

Очевидно, что α_2^0 , развернутое выражение которого представлено правой частью второй строчки формул (3), и α_4^0 представляет собой зональные гармоники гравитационного поля Земли, симметричные относительно экватора (α_2^0 характеризует сжатие), а α_1^0 и α_3^0 — несимметричные относительно экватора.

Таким образом, гравитационное поле Земли, представленное разложением в виде ряда по эллипсоидальным функциям Ламе, как и в разложении по сферическим функциям, являет собой сложную картину и представляется совокупностью знакопеременных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. М., Физматгиз, 1963.
2. Заборовский А. Н. Специальные функции для геофизиков-разведчиков. М., ОНТИ, 1939.
3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1967.

Поступила в редакцию
24.6 1970 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии

УДК 62—50

Б. Б. БУХОВЦЕВ, В. В. ЛЯЛИН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМ СВОБОДНЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕИДЕНТИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Метод траекторий корней уравнений с линейным свободным параметром [1] часто используется для анализа двумерных систем [2]. Однако параметры системы могут входить в характеристическое уравнение как линейно, так и квадратично. Метод траекторий корней целесообразно применять и в этом случае.

Рассмотрим двумерную систему с перекрестными обратными связями, изображенную на рисунке а. Исследуем перемещение корней и изменение степени устойчивости такой системы при изменении любого параметра, квадратично входящего в характеристическое уравнение.

Пусть передаточные функции основных каналов $W_1(p) = \frac{k}{1 + T_1 p}$ и $W_2(p) = \frac{k}{1 + T_2 p}$ передаточные функции каналов перекрестных связей $A_1(p) = \frac{a_1}{1 + T_3 p}$ и $A_2(p) = \frac{a_2}{1 + T_4 p}$, где k — коэффициент усиления основных каналов, a_1, a_2 — коэффициенты усиления каналов перекрестных связей, T_1, T_2 — постоянные времени основных каналов, T_3, T_4 — постоянные времени каналов перекрестных связей, $p = \delta + j\omega$ — комплексная частота.

Характеристическое уравнение данной системы записывается в виде

$$[1 + W_1(p)][1 + W_2(p)] - A_1(p)A_2(p)W_1(p)W_2(p) = 0. \quad (1)$$

Подставляя в (1) выражение для передаточных функций, получим

$$(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)(1 + T_4 p) + k(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)[2 + (T_1 + T_2)p] +$$

$$+ k^2 [(1 + T_3 p) (1 + T_4 p) - a_1 a_2] = 0. \quad (2)$$

Примем k за параметр траекторий. В качестве примера возьмем параметры системы $T_1=0,02$ сек, $T_2=0,03$ сек,

$$T_3 = T_4 = 0,05 \text{ сек}, \quad a_1 = -0,4, \quad a_2 = 0,5. \quad (3)$$

Траектории корней уравнения (2) при любых конечных значениях $T_1, T_2, T_3, T_4, a_1, a_2$ не могут иметь асимптот комплексных ветвей. Действительно, угловой коэффициент асимптот $t = \pm \sqrt{\frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} - 1}$ [3] не может быть действительным числом,

так как $\frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \leq \frac{1}{4}$ при любых конечных значениях параметров семейства траекторий. Знак равенства реализуется лишь при $T_1 = T_2$.

Подставив значения параметров (3) в уравнение (2), получим характеристическое уравнение системы

$$(1 + 0,02p) (1 + 0,03p) (1 + 0,05p)^2 + k (1 + 0,05p)^2 (2 + 0,05p) + k^2 [(1 + 0,05p)^2 + 0,20] = 0. \quad (4)$$

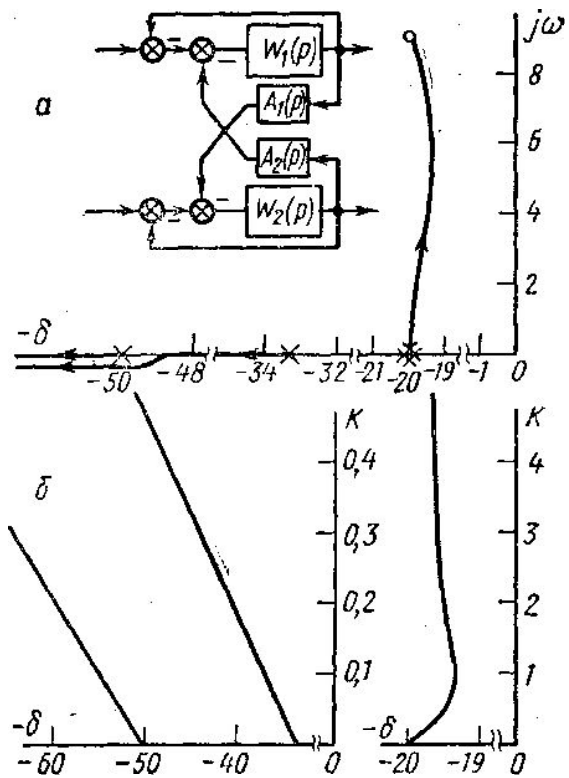
Уравнение (4) имеет начальные точки $p_1 = -50, p_2 = -33,3; p_{3,4} = -20$, средние точки $y_1 = -40, y_{2,3} = -20$ и предельные точки $z_{1,2} = 20 \pm 8,94 j$.

Построенный по известной методике [3, 4] положительный годограф характеристического уравнения (4) изображен на рис. 1. Стрелки показывают направление движения корней из начальных точек. По годографу легко исследовать характер движения корней по комплексной плоскости и изменение степени устойчивости двумерной системы при изменении коэффициента усиления основных каналов в пределах $0 \leq k < \infty$. При изменении k от 0 до 0,87 степень устойчивости уменьшается от $S_{\max} = 20,0$ до $S_{\min} = 19,35$; при увеличении k от 0,87 до ∞ степень устойчивости увеличивается от $S_{\min} = 19,5$ до $S_{\max} = 20,0$.

При любых значениях коэффициента усиления k система устойчива. На рисунке б изображены графики параметра k для действительных и комплексных ветвей траекторий. Используя их, возможно определить значение коэффициента усиления k , чтобы обеспечить заданную степень устойчивости.

Особенностью рассмотренной двумерной системы с перекрестными связями является совпадение части начальных точек корневого годографа с частью средних точек и как следствие этого стягивание одного из разрешенных участков действительной оси [3] в точку $\delta = -20$. Таким образом, в системе не реализуемы аperiodические движения с затуханием δ , лежащим в пределах $-33,3 < \delta < -20$ и $\delta > -20$. Следовательно, переходные процессы в рассмотренной системе при $k \neq 0$ будут иметь колебательный характер.

Выше рассмотрен случай двумерной системы с перекрестными обратными связями разных знаков. Аналогично могут быть рассмотрены случаи перекрестных обратных связей одинаковых знаков, перекрестных прямых связей одинаковых и разных знаков.



ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
2. Бендриков Г. А., Огородникова В. И. «Автоматика и телемеханика», № 4, 1967.

3. Буховцев Б. Б., Кулагина О. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ. астрон., 11, № 1, 1970.
 4. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 1969.

Поступила в редакцию
 24.9.1970 г.

Кафедра
 физики колебаний

УДК 535.8:535.241.13

А. Я. ГОЙХМАН, В. Н. КАЛИНИН

О ВОЗМОЖНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ МОДУЛЯЦИИ СВЕТА НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТА ФРАНЦА—КЕЛДЫША

Одной из основных характеристик модулятора света является линейность его амплитудной характеристики. Пусть к кристаллу приложено электрическое поле $E(t) = E_1 + E_2 \sin \omega t$. Очевидно, что при $\frac{E_2}{E_1} \ll 1$ величина нелинейных искажений

(амплитуда высших гармоник) будет минимальна, если постоянное смещение E_1 выбрано таким образом, чтобы одновременно выполнялись соотношения

$$\left| \frac{dI}{dE} \right|_{E=E_1} = \max, \quad \left| \frac{d^2I}{dE^2} \right|_{E=E_1} = 0, \quad \left| \frac{d^n I}{dE^n} \right|_{E=E_1} \rightarrow \min, \quad n > 2$$

где $I = I_0 \exp[-\alpha(\Omega, E) \cdot d]$ — интенсивность света, прошедшего через модулятор, I_0 — интенсивность падающего светового потока, α — коэффициент поглощения света частоты Ω , d — толщина кристалла в направлении луча света.

Зависимость коэффициента поглощения света от частоты и величины электрического поля в случае идеальной формы края полосы поглощения имеет вид

$$\alpha = \pi \Phi \hbar \frac{\beta^{1/3}}{(8\mu)^{1/2}} [(\nu')^2 - y\nu^2], \quad (2)$$

где обозначения те же, что и в [1]; в случае экспоненциальной формы края [2]

$$\alpha = \alpha_0 \exp \left[\lambda (\hbar\Omega - \hbar\Omega_0) + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \right] = B \exp \left(\frac{E}{E_0} \right)^2, \quad (3)$$

где α_0 — коэффициент поглощения света частоты Ω_0 ,

λ — параметр материала, описывающий крутизну края поглощения,

$$E_0^2 = \frac{24\mu}{e^2 \hbar^2 \lambda^3}.$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение для $\frac{d^2I}{dE^2}$ (1), получаем уравнения для отыскания E_1 в случае идеальной формы края

$$[(\nu')^2 + y\nu^2] \frac{\alpha d}{(\nu')^2 - y\nu^2} + 2 [(\nu')^2 + 2y\nu^2 + 4y^2\nu\nu'] = 0 \quad (4)$$

в случае экспоненциальной формы края

$$\left(\frac{E_1}{E_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[B \exp \left(\frac{E_1}{E_0} \right) - 1 \right]. \quad (5)$$