

**Yüksek Başarımli Gezin Haberleşme: Çarpım Kodları
Kullanarak Ortak Kanal Kestirimi ve Kodlama**

Proje No: 104E027

Doç. Dr. A. Özgür Yılmaz

AĞUSTOS 2009
ANKARA

ÖNSÖZ

Gezgin haberleşmede yüksek veri hızlarına ihtiyaç her geçen gün arttırmaktadır. Yüksek veri hızlı haberleşmeye yönelik olarak bu projede temel olarak iki alanda çalışmalara yer verilmiştir. Birincisi yüksek veri hızlarında çalışabilecek kod yapılarının oluşturulmasıdır. Diğeri gezgin haberleşme senaryosunda kanalda gözlemlenen sönümlenme ile ilgilidir. Bu projede ilk sorunu çözmek için kod çözüm işlemi paralelleştirilmiş olarak yapılan kod yapıları önerilmektedir. Oldukça basit uyarlamalı filtrelerle çalışan bir kanal kestirimi yöntemi ile kod çözme işleminin yinelemeli olarak yapılması ile yüksek başarılı bir haberleşme sistemi ortaya çıkarılmaktadır. Bu çalışma, EEEAG-104E027 proje numarasıyla TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Hem teorik hem de gerçekleştirme ile ilişkili çalışmaların beraberce yapıldığı 4 yıllık bir proje döneminden sonra çok önemli bir birikimin elde edildiği söylenebilir. Bu birikimin bir kısmı projede yer alan öğrencilerin tezlerinde, bir kısmı ODTÜ Elektrik-Elektronik Müh. Böl. bünyesinde açılan bir lisansüstü/doktora dersinde, bir kısmı da şu anda yürütücünün ve araştırma grubunun yer aldığı çeşitli araştırma proje ve çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. Proje kapsamında yapılan çalışmalar, indekslerce taranan uluslararası dergilerde 5 makale ve ulusal/uluslararası konferanslarda 10 civarında bildiri ile literatüre kazandırılmıştır.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ	4
TABLoların LİSTESİ.....	5
ÖZET	6
ABSTRACT	7
PROJE RAPORU ANA METNİ.....	8
1. Giriş	8
2. Genel Bilgiler	10
2.1. Paralleştirilmiş Alıcı Yapıları	10
2.2. Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama ve Kanal Kestirimi.....	10
2.3. Gerçekleme	12
2.4. Diğer (MIMO, OFDM)	12
3. Yöntem	14
3.1. Paralleştirilmiş Alıcı Yapıları	14
3.1.1. Evrişimsel Çarpım Kodları (EÇK)	14
3.1.2. Paralleştirilmiş Kodlayıcı ve Kodçözücü Yapısı	16
3.1.3. Bellek Çarpışmasını Engelleyen Serpiştirici Tasarımı	20
3.2. Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama ve Kanal Kestirimi.....	21
3.2.1. Blok Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama.....	21
3.2.2. Zamanla Değişen Darbantlı Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama.....	22
3.2.3. LMS Kullanan Yinelemeli Kanal Kestirimi Yöntemi.....	22
3.3. Gerçekleme	25
3.3.1. Fiziksel Kanalı Kullanan Test Düzeneği	25
3.3.2. Kodçözücü ve Kanal Kestirici Gerçeklemesi	30
3.4. Diğer Çalışmalar	39
3.4.1. MIMO Sistemlerde Sınırlı Hızda Geribesleme Kullanımı	39
3.4.2. MIMO Sistemlerde Optimal Denkleştirme.....	40
3.4.3. Tepe-Ortalama Güç Oranı Sorunu	40
4. Bulgular	42
4.1. Paralleştirilmiş Alıcı Yapıları	42
4.1.1. Evrişimsel Çarpım Kodları (EÇK)	42
4.1.2. Paralleştirilmiş Kodlayıcı ve Kodçözücü Yapısı	43
4.2. Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama ve Kanal Kestirimi.....	43
4.2.1. Blok Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama.....	43
4.2.2. Zamanla Değişen Darbantlı Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama.....	44
4.2.3. LMS Kullanan Yinelemeli Kanal Kestirimi Yöntemi.....	45
4.3. Gerçekleme	48
4.3.1. Fiziksel Kanalı Kullanan Test Düzeneği	48
4.3.2. Kodçözücü ve Kanal Kestirici Gerçeklemesi	51
5. Tartışma/Sonuç	63
REFERANSLAR.....	66
EKLER.....	68
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU	

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil 1. EÇK kodlama işlemi	14
Şekil 2. Karıştırıcı EÇK kodlama işlemi	15
Şekil 3. Genelleştirilmiş karıştırıcı EÇK yapısı	15
Şekil 4. Karıştırıcı EÇK için kod çözme algoritması	16
Şekil 5. Turbo kodlama ve kodçözme işlemi (rx x değişkenine ait kanal gözleminin olasılığına karşılık gelmektedir, L_d veriye denk gelen serpiştirme sıralı, L_{de} verinin kendi sırasındaki log-olasılıklarıdır.)	17
Şekil 6. Paralleştirilmiş turbo kodlama ve kodçözme işlemi (CC ile evrişimsel kodlayıcı ifade edilmektedir, D evrişimsel kodçözücüdür.)	18
Şekil 7. SCCC kodlayıcı ve kodçözücüsü.	19
Şekil 8. Paralel çözümlenebilir SCCC kodlayıcı ve kodçözücüsü.	19
Şekil 9. Bellek çarpışması yaratan bir serpiştirici.	20
Şekil 10. SSS-rasgele serpiştiricinin çalışması.	21
Şekil 11. Pilot sembol yardımcılı kipleme.	23
Şekil 12. Yinelemeli kanal kestirimi-kodçözme yapılan alıcı yapısı.	24
Şekil 13. Alıcının ardından gelen işaret işleme bloğu.	26
Şekil 14. SIMO Sistem	29
Şekil 15. Paralleştirilmiş RA kodlayıcısı şeması.	32
Şekil 16. Paralleştirilmiş RA kodçözücüsü şeması.	33
Şekil 17. Orta noktaya kadar α^* ve β^* ölçütleri hesaplanır.	33
Şekil 18. Orta noktadan sonra α^* ve β^* ölçütleri hesaplanmaya devam edilirken LL değerleri de hesaplanır.	34
Şekil 19. Pilot sembollerinin eklenmesi.	37
Şekil 20. EÇK'nın çeşitli serpiştiricilerle başarımı.	42
Şekil 21. Paralleştirilmiş turbo kod başarımı (veri biti sayısı 2048).	43
Şekil 22. Blok sönümlenmeli kanalda blok hata oranı (BLER).	44
Şekil 23. Zamanla değişen sönümlenmeli kanalda blok hata oranı (BLER).	45
Şekil 24. Normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0,01$	46
Şekil 25. Normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0,01$	46
Şekil 26. Bit örnekleme biriminin örneklerini aldığı IQ iminin çizgesi.	49
Şekil 27. Kanal Tepkisi (a-Çalışmadığı durum, b-Çalıştığı durum).	50
Şekil 28. SNR'nin (şekilde İGO) zamanla değişimi ve Bit Hata Sayısı.	50
Şekil 29. Max-log-MAP çözümlenici kullanan 1/3 oranlı paraleleştirilmiş turbo kodçözücüsünün başarımında NormMax değerinin etkisi.	52
Şekil 30. log-MAP çözümlenici kullanan 1/3 oranlı paraleleştirilmiş turbo kodçözücüsünün başarımında NormMax değerinin etkisi.	52
Şekil 31. 1/3 oranlı paraleleştirilmiş RA kodçözücüsünün başarımında NormMax değerinin etkisi.	53
Şekil 32. PDTC kodçözücüsünün max-log-MAP algoritmasıyla gösterdiği başarım.	53
Şekil 33. PDTC kodçözücüsünün log-MAP algoritmasıyla gösterdiği başarım.	54
Şekil 34. PDRAC kodçözücüsünün log-MAP algoritmasıyla gösterdiği başarım.	54
Şekil 35. Normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0,001$ olan sönümlü kanal altında başarım.	58
Şekil 36. Normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0,01$ olan sönümlü kanal altında başarım.	58
Şekil 37. β değerinin birleştirilmiş kanal kestirici ve kodçözücüsünün başarımı üzerindeki etkisi ($f_D T_s = 0,01$).	59
Şekil 38. L değerinin başarım üzerindeki etkisi.	60

TABLULARIN LİSTESİ

Tablo 1. Max-log-MAP kodçözücü kullanan PDTC için sentez sonuçları.....	55
Tablo 2. log-MAP kodçözücü kullanan PDTC için elde sentez sonuçları.....	55
Tablo 3. log-MAP kodçözücü kullanan PDRAC için elde edilen sentez sonuçları	55
Tablo 4. Kodçözücülerin sağlayabilecekleri en yüksek veri hızlarının karşılaştırılması	57
Tablo 5. Kanal kestirici sentez sonuçları	60

ÖZET

Gezgin haberleşmede yüksek veri hızlarının sağlanması her geçen gün daha da önemli hale gelmektedir. Bu konu çerçevesinde proje bağlamında üzerinde durulan iki sorun belirginleşir.

İlki yüksek veri hızlarında çalışabilecek alıcı yapılarının ortaya konmasıdır. İletim bant genişliği yeterince sağlanabilse bile alıcıdaki işleme eldeki kaynaklar dahilinde gerçek zamanlı veri hızını sınırlayacaktır. Yinelemeli çalışan kodçözümlerine sahip kod sınıflarının (turbo kodlar vb.) yüksek başarımlı sergiledikleri ancak yinelemeler sebebiyle işlemedeki gecikmeden dolayı veri hızı kayıplarına maruz kaldıkları bilinmektedir. Bu projede çarpım kodlarının evrimsel kodları içeren bir hali ortaya konarak paralelleştirilmiş alıcı yapılarının geliştirilmiş halleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Parallelleştirilmiş yapı sadece kodçözümlü için değil örneğin kanal denkleştiriciler için de kullanılabilir genellikle oluşturulmuştur.

İkinci sorun olarak gezgin haberleşmede karşılaşılan sönümlenmeye projede yer verildi. Sönümlenme sebebiyle sembolden sembole değişen kanal kazanç katsayılarının kestirilmesi başarımlı önemli ölçüde etkiler. Bu arada bir kod sözcüğü içinde sönümlenme sebebiyle kanal kazançlarının değişimi çeşitleme yaratır. Buna uygun tasarlanmış kod yapıları ile çeşitleme kazancı elde edilebilir. Yüksek veri hızlarına erişmek amacıyla kanal kestiriminin de hızlı yapılabilmesi için proje kapsamında çok basit yapılı bir yöntem önerilmiştir. Çok antenli sistemlere de kolaylıkla uygulanabilen bu yöntemi kullanan ortak kodlama ve kanal kestirimi yapısı ile yüksek başarımlı bir haberleşme mimarisi ortaya konmuştur.

Proje kapsamında hem teorik çalışmalar yapılarak yüksek başarımlı haberleşme mimarileri oluşturulmuş hem de gerçekleştirme yoluyla yüksek veri hızlarını gerçek zamanlı olarak yakalayabilen alıcılar üzerine çalışmalar yapılmıştır. Proje sayesinde gerçekleştirme ile ilgili önemli bir birikimin oluştuğu söylenebilir.

Lisans, yüksek lisans, doktora seviyesinde birçok öğrenci projeye katılarak katkıda bulunmuşlar, deneyim ve bilgilerini bu sayede ilerletmişlerdir. Proje süresince birçok yan çalışma alanı ortaya çıktı. Proje sayesinde farklı alanlarda araştırmalar yapılması mümkün olmuştur.

Anahtar kelimeler: Parallelleştirilmiş kodçözümü, sönümlenme, kanal kestirimi, LMS, gerçekleştirme, FPGA, MIMO, OFDM, kanal denkleştirme.

ABSTRACT

Provision of high data rates has been more and more important lately. Two specific problems are explicated in the context of this project.

The first problem is on the construction of receiver structures that can run at high data rates. Even if the transmission bandwidth is sufficiently large, the processing with the available resources at the receiver limits the real time data rate. It is for long well known that iteratively decoded channel code families (turbo codes etc.) enjoy high performance while at the same suffer from data rate losses due to latency of iterative processing. We introduced an instantiation of product codes built with convolutional codes in this project and obtained a generalization of parallelized receiver structures. The proposed parallelized structure is applicable not only to decoders but also to other subsystems such as channel equalizers.

The second problem investigated in the project is the fading observed in wireless communications. Channel gains may change over symbols of a codeword due to fading and estimation of the channel gains is a determining factor of performance. This change of channel gains over a codeword creates a diversity as well. This diversity can be exploited if channel codes are designed correspondingly. To enable high data rates, a simple channel estimation technique was proposed in the project. With this technique that can be easily adapted to multi-antenna systems, a high performance communications architecture is obtained that jointly performs decoding and channel estimation.

We both accomplished designing high performance communication architectures through theoretical studies and implementing receivers that can achieve high data rates at real time. A substantial experience on implementation has been accumulated by the project.

Students at various levels (pursuing undergraduate, M.S., and PhD degrees) have taken part in the project and deepened their experience and knowledge in the subject matter. Many byproduct topics have come out of the project. Research in diverse fields have been possible.

Keywords: Parallelized decoding, fading, channel estimation, LMS, implementation, FPGA, MIMO, OFDM, channel equalization.

PROJE RAPORU ANA METNİ

1. Giriş

Günümüz insanı için haberleşmenin önemi her gün artmaktadır. Özellikle yüksek veri hızlarında haberleşmeye olan ihtiyaç gittikçe öne çıkmıştır. Hücresel sistemlerin başarısı sayesinde gezgin haberleşmeye toplumun geniş kesimlerinin büyük ilgisi oluşmuştur. Gezgin haberleşme, birçoğu kendine özgü, çeşitli sorunları olan telsiz kanallar üzerinden yapılmaktadır. Bu sorunlarla başa çıkacak yöntemlerin oluşturulması haberleşme alanındaki çalışmaların önemli bir ayağını oluşturur.

Telsiz kanaldaki eklenebilir beyaz Gauss gürültü (AWGN), sönümlenme ve çoklu yol olayları haberleşme esnasında rasgele hataların oluşmasına sebep olur. Shannon'ın bilgi kuramıyla öncülüğünü yaptığı kodlama paradigması, rasgele hataların sezilmesine ve düzeltilmesine olanak vermektedir. 1993 yılında ortaya konan turbo kodlar (BERROU, 1993), yinelemeli kod çözme ile kanal kapasitesine oldukça yaklaşmış ve bu yöndeki çabaların hızlanmasına neden olmuştur. Sonraki 10 yılda yinelemeli çözülen (turbo-benzeri) kodlar ile ilgili çalışmalar olgunluğa erişmiştir. Bu aşamadan sonra turbo-benzeri kodların pratikte kullanılabilmesi için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bizim projemizin bir kısmı da bu alandadır. Yineleme sebebiyle oluşan gecikme gerçek zamanlı veri hızlarını sınırlandıracağından¹ gecikmenin azaltılması için alıcıda paralelleştirme yapılabilir. Bu fikirden hareketle genel bir paralelleştirilmiş kod yapısı proje kapsamında ortaya konmuştur.

Telsiz kanallarda haberleşmeyi tehdit eden en önemli sorun sönümlenme olarak ifade edilmektedir. Gezgin haberleşme ortamında basılan sinyalin birden fazla yansısının alıcıya ulaşması ile çoklu yol girişimi oluşur. Ayrıca haberleşme esnasında verici veya alıcının (veya çevredeki diğer nesnelere) hareketi ile zamanda değişen sönümlenme olayı gözlenir. Basılan sinyalin bant genişliğine göre çoklu yol özelliği, sinyalin zamandaki uzunluğuna göre de zaman değişim özellikleri değişir. Çeşitleme potansiyeli gibi birçok açıdan bu iki farklı durum benzer özellikler göstermektedir. Çoklu yolun frekansta oluşturduğu sönümlenme değişimi, zamanla değişen kanallarda zamanda değişen sönümlenmeye karşılık gelir.

Kanalın sinyal üzerinde oluşturduğu etkilerin toplamı kanal yanıtı olarak adlandırılır. Kanal yanıtının bilinmesi haberleşmenin başarımını artırır². Özellikle kanal kapasitesine yakın çalışılırken kanal yanıtının kestirilmesi hem daha önemlidir hem de sinyal gücü düşüklüğü sebebiyle daha zordur. Hem çoklu yol hem de zaman seçici sönümlenme durumunda kanal kestiriminin kalitesi haberleşmenin başarımını etkiler. Ayrıca her iki durumda da çeşitleme kazancı kanal kodlaması ile elde edilebilir.

¹ Tüm proje boyunca alıcıda temelbant işlemleri yapan FPGA veya DSP kartı benzeri bir yapının olduğu göz önüne alınmıştır. Bu aletlerin çalışma hızı ve büyüklükleri, işleyebilecekleri veri miktarlarını sınırlamaktadırlar.

² Farksal kiplenme ile kanal yanıtı bilinmeden de birçok durumda haberleşme yapılabilir. Farksal kiplenmenin başarımı kanalın yanıtının bilindiği duruma göre daha düşüktür. Ayrıca çoklu anten haberleşmesinde farksal kiplenme kayıplarının artma eğilimi vardır. Bu sebeple literatürdeki birçok çalışmada ve kullanılan neredeyse bütün önemli haberleşme sistemlerinde (örn. GSM, WiFi) kanal kestirimi ile sistem tasarımı yapılmaktadır. Biz de bu projede aynı yolu izledik.

Bu projenin önemli ayaklarından birisi yüksek veri hızlarını mümkün kılacak basit kanal kestirimi yöntemlerinin elde edilmesi ve uygun kodlama ile beraber çalıştırılarak yüksek başarımların sağlanmasıdır. Bu yönde oldukça basit yapılı bir kanal kestirimi önerilmiş ve başarısı gösterilmiştir.

Projenin özelliklerinden birisi teorik çalışmalarla gerçeklemeyi yan yana yürütmesidir. Yukarıda bahsi geçen paralelleştirilmiş yapıları ve basit kanal kestirimi algoritmasını içeren alıcıların gerçekleştirilmesi yapılmıştır. Bu gerçeklemeler esnasında birbirinden farklı mimariler ve tasarım yaklaşımları kullanılıp karşılaştırmalar yapılarak en hızlı çalışacak yapının bulunması sağlanmıştır.

Projenin çeşitli dönemlerinde bazı konulardaki çalışmalar proje kapsamının dışına doğru kaydıkça bu çalışmalar projeden ayrıştırılmıştır. Proje içerisinde bu konuların ön çalışmaları yer aldığından bunları raporumuz içerisinde sunacağız.

Gelişme raporlarında ayrıntılı biçimde anlatılmış konulara burada kısaca değinilecek ve final raporunun doğasına uygun olarak burada gelişme raporlarına veya yazılmışsa bildiri ve makalelere referans verilecektir. Yapılan yayınlarla ilgili bilgiler mümkün olduğunca bu metinde verilecektir. Yapılan çalışmalar dört başlık altında toplanmıştır:

- a. Parallelleştirilmiş alıcı yapıları,
- b. Sönümlenmeli kanallarda kodlama ve kanal kestirimi
- c. Gerçekleme,
- d. Diğer (MIMO, OFDM).

Tüm tartışmalar bu dört başlık üzerinden yapılacaktır.

2. Genel Bilgiler

Bu kısımda yukarıdaki dört başlıkla ilgili literatürdeki çalışmalar kısaca anlatılacaktır. Proje kapsamında bizim sunduğumuz yöntemlere bir sonraki kısımda yer verilecektir.

2.1. Paralleştirilmiş Alıcı Yapıları

Shannon tarafından ortaya konan kanal kapasitesi limitine 1993 yılında Berrou ve meslektaşları tarafından (BERROU, 1993) literatüre kazandırılan turbo kodlarla oldukça yaklaşıldı. Bu kodlar iki adet evrimsel kodun bir serpiştirici (karıştırıcı, 'interleaver') ile paralel birleştirilmesinden meydana gelen oldukça basit bir yapıya sahiptirler. Yumuşak girdili ve çıktılı kod çözme algoritmalarının serpiştiriciyle beraber kullanılmaları ve kod çözme işleminin yinelenmesi bu kodların iyi başarımlar göstermesinin sebebi olarak sonradan ortaya kondu. Bu kodlardan sonra benzer şekilde yinelemeli şekilde kod çözme işlemi yapılan seri ekli evrimsel kodlar-SCCC (BENEDETTO, 1999), LDPC (GALLAGER, 1962), çarpım kodları (ELIAS, 1954) gibi başka kod yapıları üzerine birçok araştırmacı tarafından çalışmalar yapıldı.

Yineleme ile çözülen kodların yüksek başarımları gözlemlendikten sonra bu kodlarla ilgili pratikte karşılaşılabilecek sorunlar üzerine birçok çalışma başlatıldı. En önemli sorunlardan bir tanesi yineleme yapılmasından dolayı bu kodların çözümünde önemli bir gecikme oluşmasıdır. Bu da gerçek zamanlı çalışmadaki veri hızlarını önemli ölçüde düşürmektedir. Bu soruna en önemli çözüm paralelleştirme (YOON, 2002; BERROU, 2004) ile donanım karmaşıklığını arttırma karşılığında kod çözme hızını arttırmaktır. Kod çözümü yapılacak olan kod sözcüğü birkaç parçaya bölünerek her biri ayrı bir kodçözücüde işlenir. Bu ayrıştırma ve çok sayıda kodçözücüü aynı anda kullanabilmek için literatürde çeşitli yaklaşımlar önerilmiştir (EK 3 ve içindeki referanslar).

Proje başvurusunda çarpım kodlarının paralelleştirmeye uygun yapısından dolayı kullanılacağı bildirilmişti. Klasik çarpım kodlarında kullanılan Hamming kodları gibi blok kodlarının yerine evrimsel kodlar kullanarak yumuşak girdili-çiktılı kod çözme işlemi paralel bir şekilde yapılması öngörülmüştü. Buna uygun olarak projenin ilk safhalarında çalışmalar yapıldı. Ancak çalışmalar derinleştikçe aslında evrimsel kodlar ile çalışan çarpım kodlarının çok daha genel bir yapının özel durumu olduğu anlaşıldı. Yöntem kısmında bu konudaki gelişim ve oluşturulan genel yapı anlatılacaktır.

2.2. Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama ve Kanal Kestirimi

Bu projenin temel amaçlarından biri, telsiz haberleşmenin temel sorunu olan sönümlenme karşısında yüksek başarımlar sergileyebilecek bir sistem oluşturmaktır. Sönümlenme, kanalın yapısına, sinyal bant genişliğine ve sinyalin zamandaki uzunluğuna göre farklı şekilde sınıflandırılır. Bu sınıflandırmaya göre birbirinden farklı haberleşme teknikleri kullanılır.

Frekans seçici kanallarda OFDM modülasyonu ve döngüsel önek ile semboller arası girişim (ISI) sorunu ortadan kaldırılır. OFDM ile kanal birçok paralel altkanala bölünür. Bu altkanalların her biri kanalın yanıtına göre farklı bir kazanç görür. Zaman seçici kanallarda kanal kazançlı zaman içinde değişir. Hem zaman hem frekans seçici kanallarda, kanal kazançları frekans ve zaman bölgelerinin ikisinde de değişkenlik

gösterir. Proje başvurusunda seçici kanallarda kanal kestirimi ile ilgili çalışmalar yapılacağı söylenmişti. Proje esnasında araştırma grubunun bu konudaki bilgi birikimi arttıkça bu problemlerin birbirlerinden çok da farklı olmadıkları daha iyi anlaşıldı. En başta frekans seçici kanallarda OFDM ile ilgili çalışmalar yapıldıysa da sonradan zamanla değişen kanallarda çalışmalarımız sürdürüldü. Bunun temel sebebi bu kanal tipi için çok yoğun kullanılan modellerin (Jakes modeli) varolması ve bu tip kanallarda literatürde daha fazla boşluk gözlememizdir. Çalışmalarımızın tamamında ISI olmadığını varsaydık. Bu durumda kanal kestirimi yapıldıktan sonra sadece çarpma/bölme gibi tek işlemle kanal denkleştirilmesi yapılmaktadır.

Sönümlenmenin özelliğine göre farklı yöntemlerle çeşitleme kazancı elde edilebilir. Çalışmalarımızda zamanda değişen kanal modelini kullandığımızdan kodlama ile çeşitleme kazancını elde etmek için çalışmalar yaptık. Literatürde blok sönümlenmeli kanallarda kodlama (KNOPP, 2000) üzerine çalışmalar mevcuttur. Bu kanal tipinde her bir kod sözcüğü birbirinden bağımsız sönümlenen bloklar üzerinden alıcıya ulaşır. Uygun kodlama yapılarıyla çeşitleme kazancı elde edilebilir. Literatürde önerilen kodları inceleyerek daha basit bir yapıya sahip ama aynı çeşitleme kazançlarını elde eden birkaç kod üzerinde çalışmalar yapıldı.

Kanal kazançlarının bilinmediği durumlarda eşfazlı kipçözümü ('coherent demodulation') yapılamaz ve başarımları olumsuz yönde etkilenir. Bu sebeple kanal kazançlarının kestirimine birçok haberleşme sisteminde büyük önem verilmektedir. Körlemesine kestirim ('blind estimation') gibi yaklaşımlar literatürde yer alsa da neredeyse bütün önemli haberleşme sistemleri pilot dizilerine dayalı kestirim yöntemlerini kullanırlar. Bilinen bir sinyal (pilot) gönderilerek kanal kestirilir ve sonrasında bu kestirimle kipçözümü ve diğer işlemler yapılır. Kanalin değişim hızına göre³ pilot sıklıkları artırılır veya azaltılır. Kanal hızlı değiştiğinde sık pilot gönderilir. Pilot sembollerinin sıklıkla gönderilmesi, kanaldaki veri hızının düşmesine sebep olur.

Pilot sıklığını çok fazla arttırmamak için literatürde kullanılan bir yaklaşım, pilot sembollerini yanında diğer sembollerini de kanal kestirimi için kullanmaktır. Bu yaklaşımda semboller kipçözümü veya kodçözümü sonuçlarına göre tesbit ('detection') edilirler. Arada hata olsa bile sadece pilot kullanılan duruma göre önemli avantajlar sağlanabilir.

Tüm semboller üzerinden kestirim yapılırken çeşitli yöntemler vardır. Bir tanesi kod çözümü ile kestirimi birleştiren 'Per-Survivor Processing'-PSP (RAHELI, 1995) yöntemidir. Bu yöntemde, Viterbi algoritması ile kodun kafes ('trellis') yapısı üzerinden kodçözümü yapılırken aynı anda her bir yol ('path') için kanal kestirimi de yapılır. Proje başvurusunda PSP yöntemini kullanan, kodçözümü ve kanal kestirimini aynı anda yapan bir yapı üzerinde çalışmalar yapılacağı söylenmişti. Hatta PSP yöntemi doğrudan kod kafesleri üzerinden çalıştığından, basit kafes yapıları sebebiyle evrimsel kodlarla çarpım kodlarının oluşturulacağı öngörülmüştü.

Projenin 5 ve 6. dönemlerinde yapılan çalışmalarda PSP yönteminin iyi başarımları sergilemediği gözlemlendi ve gelişme raporlarında bu sonuçlar sunuldu. Uzun incelemeler sonucunda bunun sebebinin PSP yönteminin yolları birbirinden ayırırken

³ Ayrıca pilot sembollerinde işaret-gürültü oranına göre de pilot aralıkları belirlenir. Veri sembollerleriyle aynı işaret-gürültü gücü oranına (SNR) sahip pilotlar üzerinden kestirimin kalitesi düşük olabileceğinden sık sık veya arızalı pilot sembollerini gönderilip kestirim kalitesi artırılabilir.

başarılı olamamasının olduğu anlaşıldı. PSP her bir yol için ayrı bir kanal kestirimi yapmaktadır. Kanal mükemmel bilindiğinde Viterbi (ya da BCJR) algoritması yanlış yollara gittikçe daha düşük olasılıklar atamaktadır. Ancak, PSP zamanla yanlış bir yola, ona uyan bir kanal kazanç kestirimi yapıp o yolun da olasılığını yüksek hale getirmektedir. Aslında bunun böyle olduğunu PSP'nin literatürde 1990lı yıllardan beri bilinmesine rağmen çok fazla önem kazanmamasından anlamak da geriye baktığımızda mümkün görünüyor.

PSP yönteminin çalışmadığını gördükten sonra alternatifler ararken literatürde yüksek başarımlı sergileyen ve oldukça basit yinelemeli yöntemler yer aldığını gözlemledik. Bu yöntemler temel olarak en başta pilotlardan kanal kestirimi yapıp bir tur kodçözme işlemi yapmaktadır. Kodçözme işleminden sonra semboller hakkında oluşan ve gittikçe güvenilir hale gelen bilgi kanal kestiriminde kullanılmaktadır. Biz bu yöntemi baz alan ve daha yüksek başarımlı gösteren bir teknik geliştirdik. İyi başarımlı göstermeyen PSP yöntemi, gelişme raporlarında yeterince anlatılmış olup raporun kalanında yer almayacaktır. Önerdiğimiz teknik Yöntem kısmında anlatılmaktadır.

2.3. Gerçekleme

Projede ortaya konan sistemlerin gerçekleştirilmesi üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapılmıştır. Gerçekleme çalışmalarında birbirinden farklı iki parça olduğunu söylemek doğru olacaktır. İlk parçada telsiz bir kanaldan haberleşme yapmak üzere oluşturulmuş, fiziksel kanalı kullanan bir test düzeneği yer almaktadır. İkincisi ise sadece ortaya konan kodlama ve kanal kestirme yöntemlerinin gerçekleştirilmesinden oluşur.

Projenin ilk yarısında telsiz kanalı kullanan bir test düzeneği oluşturulması için birçok çalışma yapıldı. Temelbantta oluşturulan sayısal sinyaller sayısal analog çeviriciler (ADC) yoluyla analoga çevrilip 2.4 GHz'te çalışan bir FM vericisi üzerinden basıldı. Alıcı tarafında analogtan sayısala çevirme, senkronizasyon, değişmeyen kanalın kestirilmesi, kanalın denkleştirilmesi, taşıyıcı frekans kaymasının düzeltilmesi, çift alıcı antenli çalışma gibi birçok işlem için ayrıntılı çalışmalar yapılmıştır.

Projenin ikinci yarısında ilk yarıda yapılan gerçekleştirme çalışmalarındaki sorunlar gözlenerek⁴ daha çok ortak kanal kodlama-kanal kestirimi yapan mimari üzerine gerçeklemler yapıldı. Bu çalışmalarda özellikle kodçözücüde farklı yaklaşımlar denenerek tasarım alternatifleri oluşturuldu. Bu alternatiflere göre farklı hızlarda, farklı bellek kullanımına sahip sistemler karşılaştırıldı. Yöntem kısmında her iki yarıdaki çalışmalar anlatılacaktır.

2.4. Diğer (MIMO, OFDM)

Projenin özellikle ilk yarısında çok farklı yönde çalışmalar yapıldı. Bunların bir kısmının projeye ilişkisinin az olduğu söylenebilir. Ancak çalışmaların çeşitli alanlarda yürütülmesinin araştırma yapılabilecek birçok yeni konunun oluşmasına yol açtığını da söylemek yanlış olmayacaktır.

Projenin 2. ve 3. dönemlerinde MIMO sistem oluşturulması için birçok çalışma yapıldı. Bazı kart tasarımları yapıldı, bu işte kullanılmak üzere çeşitli elektronik

⁴ Bu noktada proje hakeminin önerilerinin çalışmalarımıza yol gösterdiğini söylemeliyiz. Kendisinin uyarıları dahilinde fiziksel kanalı kullanan gerçekleştirme üzerine çalışmaları durdurarak önerilen sistemlerin gerçekleştirilmesine yöneldik.

bileşenler tedarik edildi. Aynı sırada, MIMO sistemlerdeki bazı sorunlar üzerine çalışmalara başlandı. Benzer şekilde OFDM için de birkaç çalışma yapıldı. Yöntem kısmında çok ayrıntıya girmeden çeşitli açıklamalar yapılacaktır.

3. Yöntem

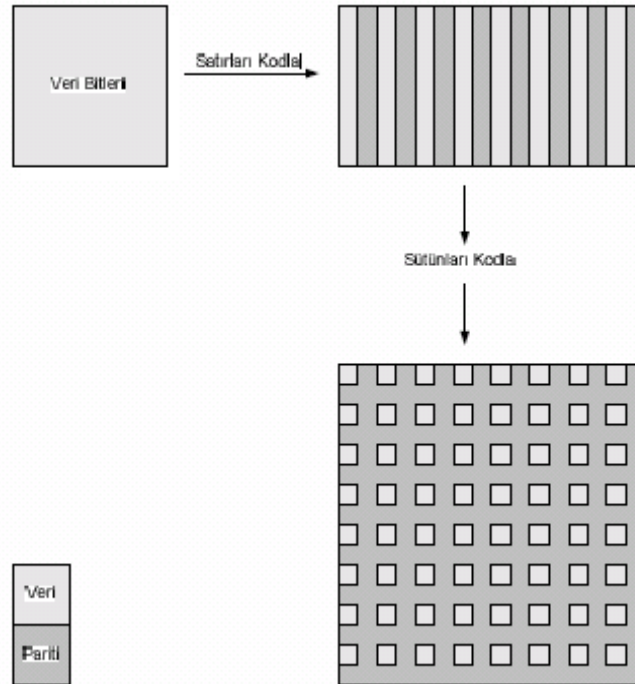
Projenin tamamında basit yapısından dolayı BPSK kiplemesi kullanılmıştır, diğer kiplemelere uygulama doğrudan yapılabilir. Burada ortaya koyulan yapılar ve yöntemler anlatılıp başarımlar Bulgular kısmında sunulacaktır.

3.1. Paralleleştirilmiş Alıcı Yapıları

3.1.1.Evrişimsel Çarpım Kodları (EÇK)

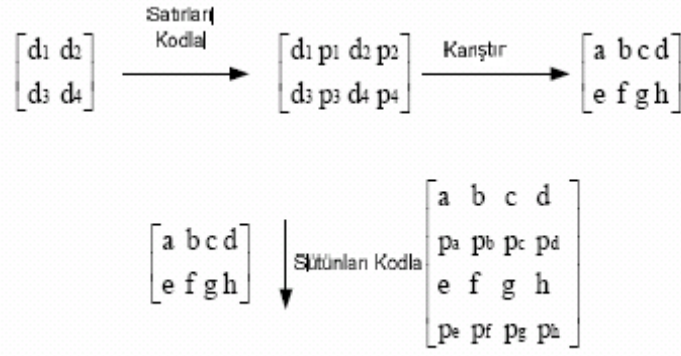
Projenin ilk döneminde proje başvurusunda yazıldığı üzere evrişimsel kodlardan oluşturulan çarpım kodları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Evrişimsel kodun blok kodlar yerine kullanılması için birkaç sebep olabilir. İki evrişimsel kodlar için çok sayıda optimal/optimal-altı yumuşak girdili-çıkıtlı kodçözme algoritmasının varolmasıdır. Bir diğeri kodlamalı modülasyon (UNGERBOECK, 1982) ve delme ('puncturing') gibi tekniklerin evrişimsel kodlarla çok kolay uygulanabilmesidir. Bu özellikler evrişimsel kodlar kullanan yapılara büyük esneklik kazandırmaktadır.

Klasik çarpım kodlarından doğrudan elde edilebilecek bir kod böylece Şekil 1'deki gibi elde edilebilir. Bir matris içine yazılan veri bitleri önce her bir satır boyunca kodlanır. Sonrasında da sütunlar boyunca kodlanır. Elde edilen matris kod sözcüğü olarak değerlendirilir ve istenen bir sıra ile kanal üzerinden iletilir.



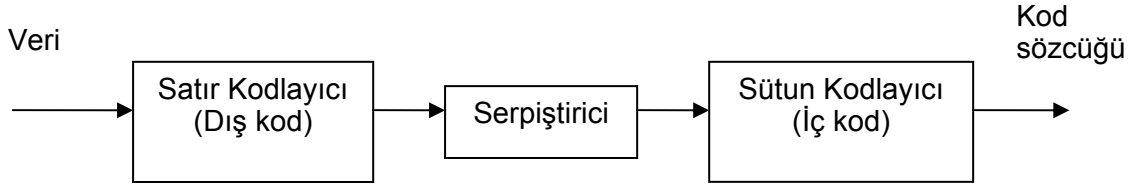
Şekil 1. EÇK kodlama işlemi

EÇK'nın ilk halinin elde edilmesinden sonraki çalışmalarımızda sütun kodlaması yapılmadan önce bir karıştırma yapmanın faydalı olduğunu gördük. Karıştırıcının var olduğu kodlamaya bir örnek Şekil 2'de verilmektedir.



Şekil 2. Karıştırıcı EÇK kodlama işlemi

Bundan sonra genelleştirilmiş yapıya ulaşılmış olmaktadır. Genelleştirilmiş yapıda matrise yazılan veriler satır satır kodlandıktan sonra karıştırıcıdan geçtikten sonra tekrar bir matrise yazılır. Bu yeni matris üzerinden de kodlama yapılır. İkinci kodlamada satır veya sütun üzerinden kodlama yapılabilir. Matrislerin satır sayıları istenildiği gibi seçilebilir. Karıştırıcı genelleştirilmiş yapı Şekil 3'te gösterilmektedir.

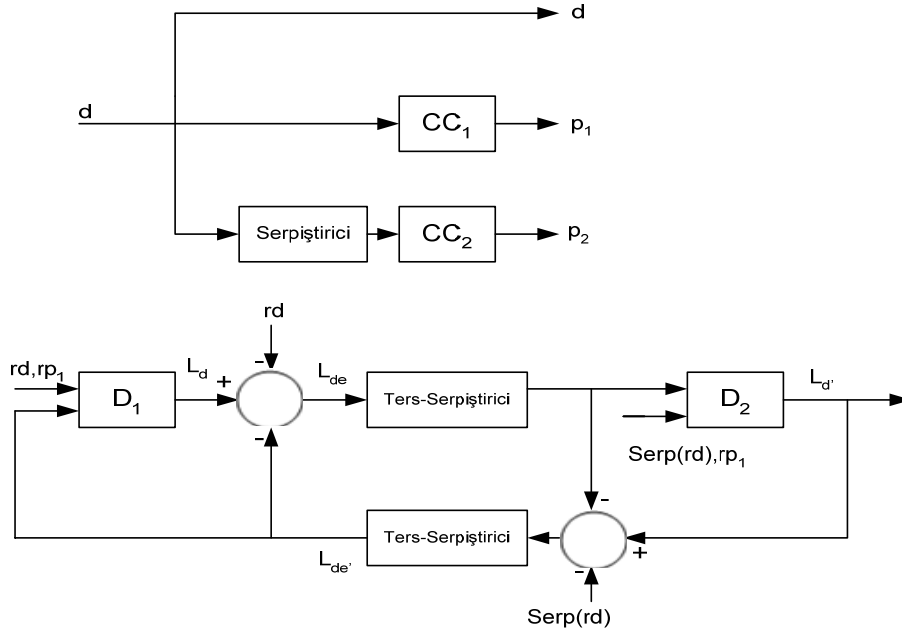


Şekil 3. Genelleştirilmiş karıştırıcı EÇK yapısı

Bu kodların paralelleştirmeye uygun yapısı, kod çözme işleminin nasıl yapılacağı anlatılırken daha iyi anlaşılabilir. Oluşturulan kod sözcüğü matris halinden bir vektör haline getirilsin ve BPSK ile kiplensin. Alıcıda gözlenen sinyali tekrar bir matris halinde yazalım. Her sütun birbirinden bağımsız kodlandığına göre her biri için kod çözme işlemi de bağımsız olarak yapılabilir. Böylece birçok kodçözücüyü aynı anda kullanarak paralelleştirme işlemi gerçekleştirebiliriz. Sütunlardaki kod çözme işleminden sonra satırlardaki kod çözme işlemi de her bir satır için aynı sebeplerden bağımsız olarak yapılır. Satır ve sütun kodçözücüler kendi aralarında bilgi değiş-tokuşu yaparak yinelemeli bir yapı oluştururlar. Bu işlem sırasında aynen turbo kodlarda olduğu gibi harici bilgi ('extrinsic information') değiş-tokuş edilir. Şekil 4'te daha önce verilen karıştırıcı EÇK kodlayıcısına karşılık gelen kod çözme algoritması gösterilmektedir. Şekilde Le harici bilgiyi logaritmik olarak tutan değişkendir.

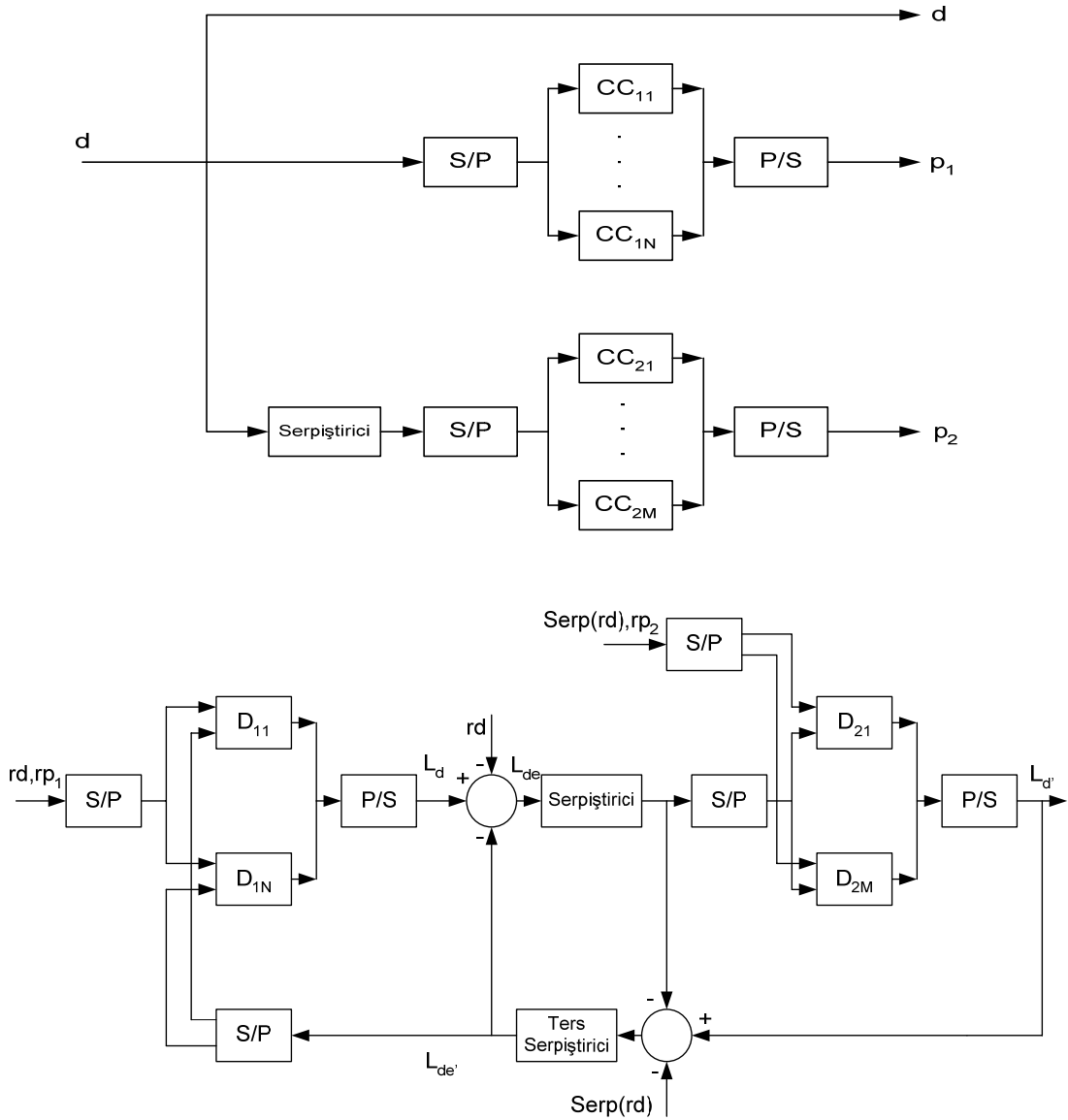
Yapılan çalışmalar hakkında daha ayrıntılı bilgiler EK 1'deki dergi makalesinde bulunabilir.

Evrişimsel ekli kodlar ('concatenated convolutional codes'), evrişimsel kodların serpiştiriciler ile beraber kullanılmasıyla oluşturulur. En iyi bilinen örnekleri, paralel ekli evrişimsel kodlar, seri ekli evrişimsel kodlar ve de hibrit ekli evrişimsel kodlardır. Paralel ekli evrişimsel kodlara turbo kodlar da denilmektedir. Turbo kodun kodlayıcı ve de çözücü yapısı Şekil 5'te gösterilmektedir. Yinelemeli çözüm ve veri vektörlerinin uzunluklarının büyük olmasından dolayı, alıcı tarafında kodun çözülmesi uzun zaman almaktadır.



Şekil 5. Turbo kodlama ve kodçözme işlemi (rx x değişkenine ait kanal gözleminin olasılığına karşılık gelmektedir, L_d veriye denk gelen serpiştirme sırası, L_{de} verinin kendi sırasındaki log-olasılıklardır.)

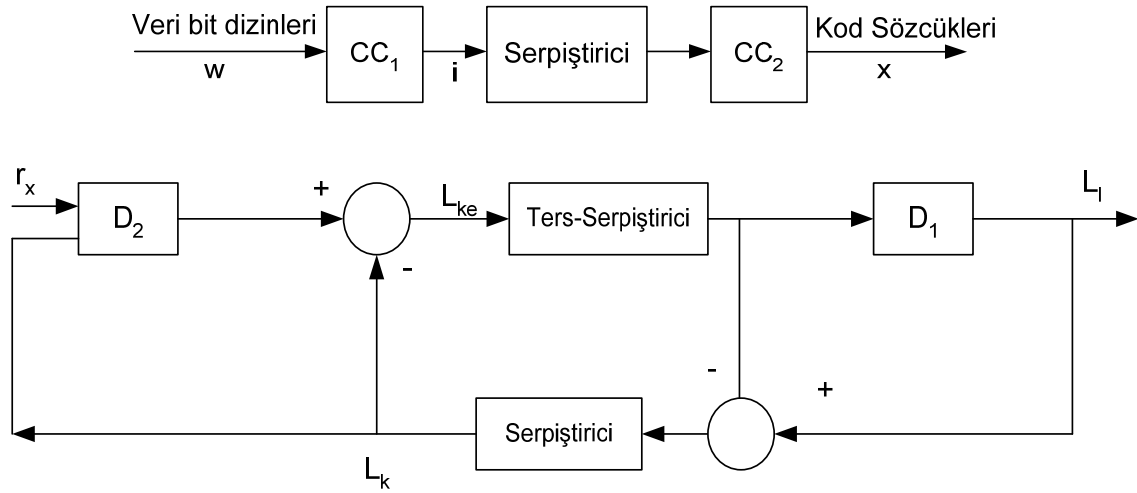
Kodçözme işleminin paralelleştirerek süresinin azaltılması ile ilgili çalışmaların çoğunda, alınan veri alıcı tarafında parçalara ayrılarak paralel işlemcilerle gönderilerek bir algoritma göz önüne alınarak kodçözme işlemi yapılır. Biz klasik çalışmaların aksine veriyi parçalamayı verici tarafında yapıyoruz. Bu işlemi şöyle gerçekleştiriyoruz. Paralel işleme tabi tutulacak olan sistemin genel yapısını bozmadan, seri-paralel (S/P) ve de paralel-seri (P/S) dönüştürücüleri kodlayıcı ve de çözücü sistemlerine ekliyoruz. Evrişimsel kodları blok kodlara benzetmek için ve de son durum olasılığını belirlemek için kafes sonlandırma bitlerini kod sözcüklerine ekliyoruz. Turbo kodunu önerdiğimiz teknikle kodçözme işlemi Şekil 6'da anlatılmıştır. Seri-paralel ve de paralel-seri dönüştürücüler sisteme eklenmiştir.



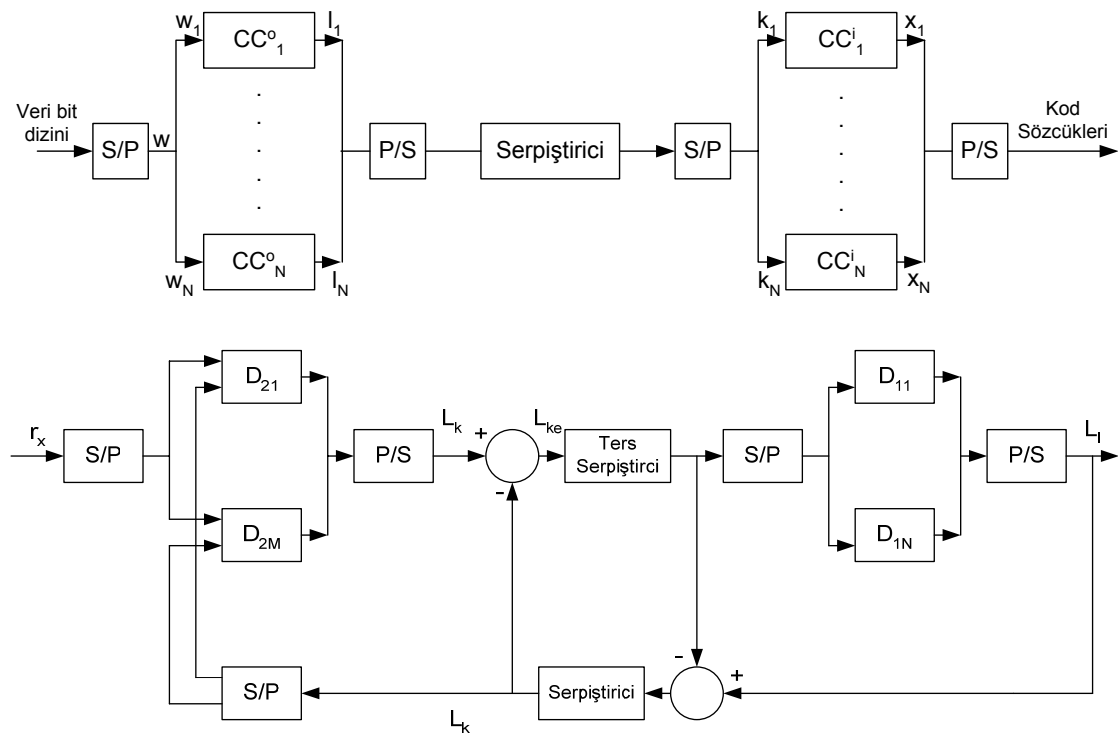
Şekil 6. Parallellendirilmiş turbo kodlama ve kodçözme işlemi (CC ile evrişimsel kodlayıcı ifade edilmektedir, D evrişimsel kodçözücüdür.)

Bu şekilde önerdiğimiz paralel çözülebilir turbo kodun çözülme süresi yaklaşık olarak, klasik turbo kodun çözülme süresinin paralel çözümleyici sayısına bölünmesi ile elde edilen süre kadar olmaktadır. Bulgular kısmında sunulduğu üzere, önerilen sistem ile klasik sistem yaklaşık aynı başarıyı sergilerler.

Aynı yaklaşım seri ekli evrişimsel kodların (SCCC) paralel çözümlenmeleri için de uygulanabilir. Klasik SCCC kodlayıcısı ve kodçözücüsü Şekil 7'de gösterilmiştir. Bu yapıyı paralel kodçözmeye uygun hale getirmek ve de kodçözme süresini azaltmak için seri-paralel ve de paralel-seri dönüştürücüler sisteme eklenerek Şekil 8'de önerdiğimiz sistem elde edilmiştir.



Şekil 7. SCCC kodlayıcı ve kodçözücüsü.

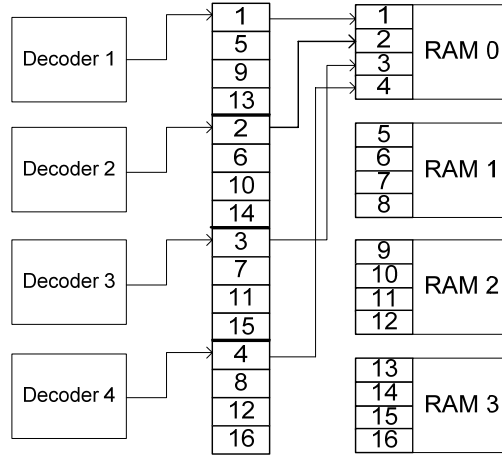


Şekil 8. Paralel çözümlenebilir SCCC kodlayıcı ve kodçözücüsü.

Önerilen yapı klasik SCCC kodla aynı başarıyı göstermektedir. Önerdiğimiz bu yapı aslında birçok farklı alt bloğun (kanal kestirici, denkleştirici vb.) paralelleştirilmesi için kullanılabilir. Örneğin, ISI kanallarındaki kanal denkleştiricilerin paralelleştirilmelerine de uygulanabilir ve turbo denkleştiricinin paralel bir yapıya getirilmesini sağlar. Bu yapının ayrıntıları EK 2'deki yayınıımızda verilmektedir.

3.1.3. Bellek Çarpışmasını Engelleyen Serpiştirici Tasarımı

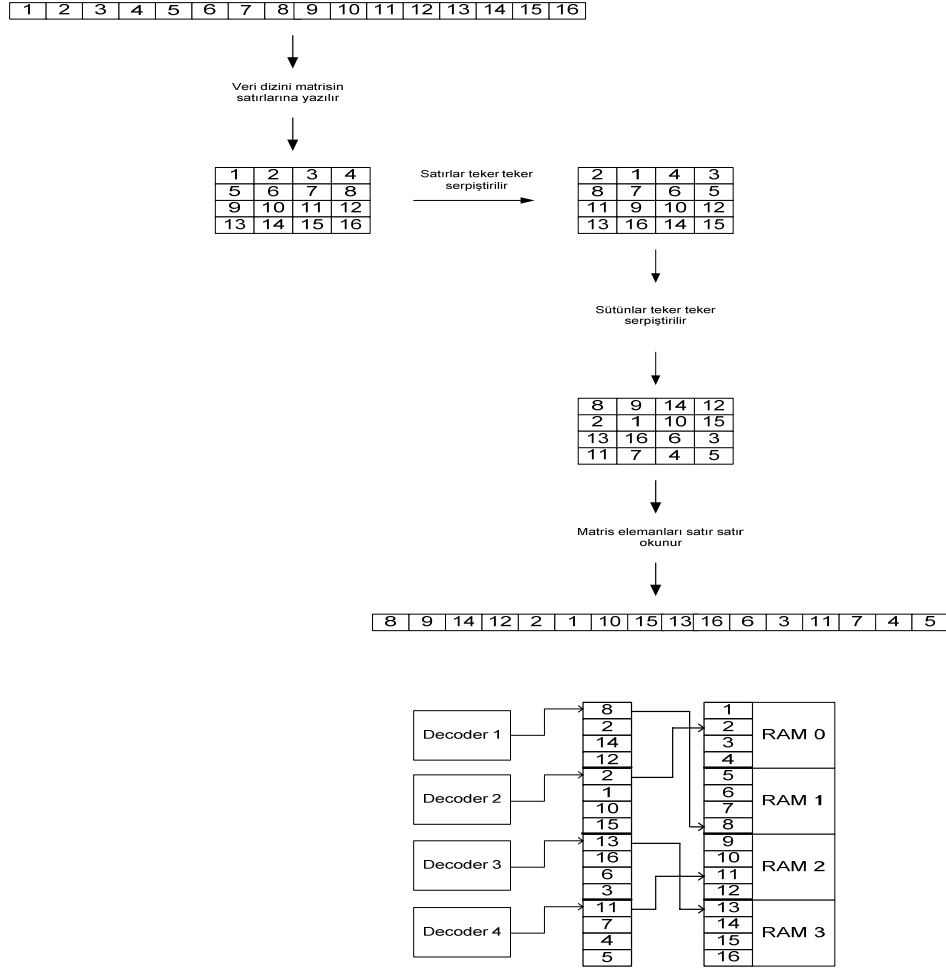
Parallelleştirme yapıldıktan sonra gözlemediğimiz, doğrudan gerçeklemeyle ilgili bir sorun bellek çarpışmasıdır. Birçok kodçözücü aynı anda farklı gözlemlere ulaşmaya çalışırken ulaşmaya çalıştıkları gözlemler aynı bellek birimi (bizim için RAM) üzerinde bulduklarında bu sorun oluşmaktadır. Bellek çarpışması sorunu yaratan bir serpiştirici örneği Şekil 9'da sunulmaktadır.



Şekil 9. Bellek çarpışması yaratan bir serpiştirici.

Literatürde bu sorunu aşmak üzere tasarlanmış çeşitli serpiştiriciler vardır. Bunların birçoğu cebirsel yöntemlerle elde edilmektedir ve bu sebeple yeterince esnek sistemler oluşturmazlar. Biz oldukça basit bir şekilde oluşturulan ve bellek çarpışmasını engelleyen bir serpiştirici tasarladık. Satır-sütun S-rasgele (SSS-rasgele) ismini verdiğimiz serpiştiricinin çalışma prensibi şu şekildedir. Veri dizini bir matrise yazılır. Matrisin her satırı teker teker değişik serpiştiricilerden geçirilir, daha sonra matrisin her sütunu farklı serpiştiricilerden geçirilir. Ardından matris elemanları satır satır okunur. SSS-rasgele serpiştiricisinin çalışması Şekil 10'da izah edilmiştir.

EK 4'te sunulan dergi makalemizde SSS-rasgele serpiştiricinin başarıyı incelenmiştir. Çalışmada 100 adet SSS-rasgele ve S-rasgele serpiştirici oluşturulmuş, paralelleştirilmiş turbo kodlarla kullanıldıklarında sağlayacakları düşük ağırlıklı kod sözcüklerinin sayıları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre SSS-rasgele serpiştirici başarıyı az miktarda kötüleştirmekte, buna karşın bellek çarpışması sorununu tamamen ortadan kaldırıp tamamıyla paralel bir gerçeklemeyi olanaklı kılmaktadır.



Şekil 10. SSS-rasgele serpiştiricinin çalışması.

3.2. Sönümlmeli Kanallarda Kodlama ve Kanal Kestirimi

3.2.1. Blok Sönümlmeli Kanallarda Kodlama

Bilindiği üzere blok-sönümlmeli kanallarda çeşitleme, tamamen ilintisiz ('uncorrelated') ergodik sönümlmeli kanallara göre oldukça sınırlıdır (KNOPP, 2000). Örneğin, uzunluğu L ve sönümlmeli blok sayısı $N \ll L$ olan bir blok sönümlmeli kanalda yalnızca N adet birbirinden farklı ve bağımsız sönümlleme seviyesi bulunurken bu sayı uzunluğu L olan bir ergodik sönümlmeli kanalda L 'dir. Bu sebeple alışlagelmiş SCCC kodlarının blok sönümlmeli kanallarda iyi çalışmadığı gösterilerek bu tip kanallarda var olan sınırlı çeşitliliği daha iyi kullandığı söylenen "*blok ekli evrişimsel kodlar*" ('blockwise concatenated convolutional codes' - BCCC) literatürde önerilmiştir (FABREGAS, 2006).

BCCC, N adet sönümlleme bloğuna sahip bir blok-sönümlmeli kanal için, alışlagelmiş şekilde bir adet dış kodlayıcı blok ile her biri bir sönümlleme bloğu ile eşleştirilmiş birbirinden bağımsız N adet eş iç kodlayıcı birimden oluşmaktadır. BCCC kod yapısında, dış kodlayıcının ürettiği kod sembolleri sıralı bir şekilde farklı iç kodlayıcı birimlere gönderilmekte ve her bir iç kodlayıcının girişinde oluşan sembol dizisi üzerinde serpiştirici çalıştırılmaktadır. Dolayısıyla dış kodlayıcı birime ait peşi sıra gelen kod sembolleri, birbiri ile bağımsız olan sönümlleme seviyeleri ile eşleşen iç kodlayıcılar tarafından işlenmekte ve sonuç olarak kodçözümüne etki eden çeşitleme

faydası artırılmaktadır. Bu kod yapısı, bizim paralelleştirilmiş yapımızla birebir örtüşmektedir. Bizim amacımız kodçözme işlemini hızlandırmaktı, BCCC'nin amacı ise çeşitleme kazancı sağlayabilecek bir yapı oluşturmaktır.

Blok-sönümlenmeli kanaldaki kısıtlı çeşitliliği akıllıca kullanan BCCC kod yapısı için daha az karmaşık bir blok ve donanım seviyesine sahip, bununla birlikte hata düzeltme performansı aynı kalan alternatif bir kod önerdik. SCCC-A şeklinde isimlendirilen bu kod yapısında, tek bir dış kodlayıcı ile BCCC'dekinin aksine N yerine yine tek bir tane iç kodlayıcı birim kullanılmış, fakat iç ve dış kodlayıcı birimler arasında kullanılan serpiştirici özel olarak tasarlanmıştır. Bu serpiştirici, dış kodlayıcı biriminin ürettiği ve art arda gelen kod sembollerini farklı sönümlenme seviyeleri ile eşleştirecek şekilde alt bloklara ayırmakta, her bir blok üzerinde bağımsız bir şekilde rastgele serpiştirici çalıştırmakta, fakat bütün bunları yaparken kod sembollerini tek dizi halinde sıralı tutmaktadır. Sonuçta oluşan kod dizisini de tek bir iç kodlayıcı ile işlemektedir. Bu yapı EK 9'da sunulan konferans bildirisinde ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

3.2.2. Zamanla Değişen Darbantlı Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama

Çeşitli makalelerde, blok-sönümlenmeli kanalların yavaş şekilde değişen sönümlenmeli kanallar için iyi bir model olduğu üzerinde durulmaktadır (KNOPP, 2000). Bu noktadan hareketle, blok-sönümlenmeli kanallar için önerilen kodların zamanla değişen sönümlenmeli kanallarda ortaya koyacağı başarımların proje kapsamında incelenmiştir.

BCCC ve SCCC-A kodlarının zamanla değişen sönümlenmeli kanallardaki başarımların benzetimlerine geçmeden önce bu kanalın ilinti özelliği dikkate alınarak türetilen iki farklı koddan bahsetmek istiyoruz. İlintili sönümlenmeli kanal dikkatle düşünüldüğünde, BCCC yapısının bu kanala uyarlanması öncelikle sanal olarak alt kanal bloklarının oluşturulmasını gerektirmektedir. Blok-sönümlenmeli kanaldaki her bir sönümlenme bloğu yerine kullanılan bu alt bloklar blok-sönümlenmeli kanalın aksine birbirinden bağımsız değil birbiriyle ilintilidir. Dolayısıyla, dış kodlayıcıdan çıkan ve peş peşe gelen kod sembolleri ardışık iç kodlayıcılara atandığında birbiriyle ilintili sönümlenmeli kanal blokları ile karşılaşacaktır. Bunun da ötesinde, kanal katsayılarını oluşturan rasgele süreçler, birbirine daha yakın bloklar arasında daha büyük ilinti oluşturmaktadır. Dolayısıyla, dış kodlayıcıdan çıkan peşi sıra kod sembollerinin ardışık olmayan iç kodlayıcılara atanması, birbiriyle daha az ilintili sönümlenme seviyeleriyle karşılaşmalarına ve çeşitleme faydasının artmasına sebep olacaktır. EK 9'da detaylı bir şekilde anlatılan bu yeni kod, RD-BCCC ('randomly distributed' BCCC) olarak adlandırılmış; SCCC-B'deki mantığa benzer bir şekilde bu yapının tek bir dış ve iç kodlayıcı ile gerçekleşmesiyle ortaya çıkan diğer yeni koda ise SCCC-B denilmiştir.

3.2.3. LMS Kullanan Yinelemeli Kanal Kestirimi Yöntemi

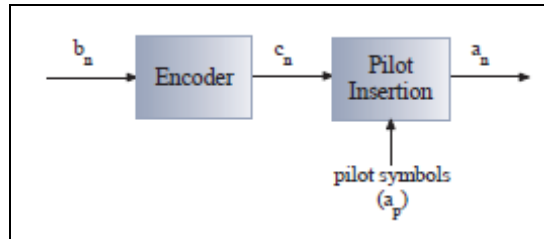
Turbo kodların en iyiye yakın ('suboptimal') bir şekilde kodçözümünün yapılmasını sağlayan yinelemeli işleme tekniği, kanal kestirimi problemine de uyarlanmış ve birçok araştırmacı tarafından kullanılan "yinelemeli kanal kestirimi" (iterative channel estimation - ICE) yöntemi elde edilmiştir.

Proje başvurusunda temellendirilen ve önceki dönemlerde de üzerinde çalışılan PSP üzerinden kanal kestirimi yaklaşımı fikir olarak literatürde bulunmasına rağmen bu

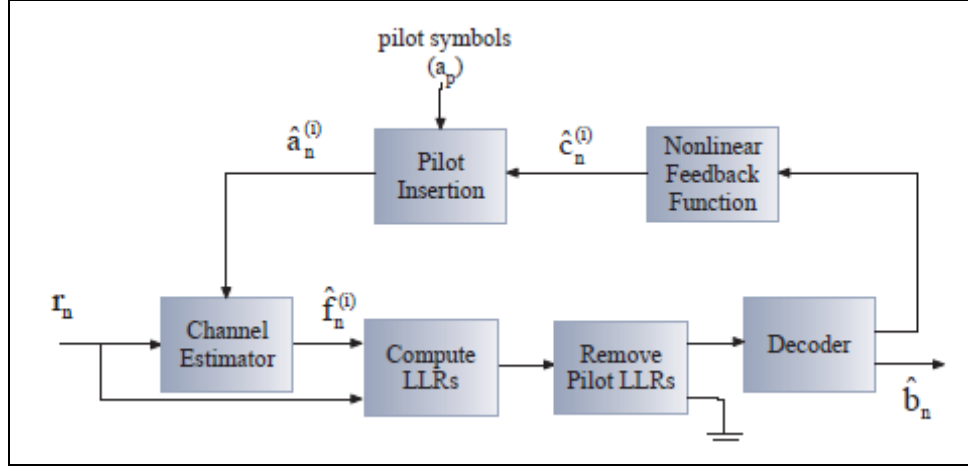
konuda iyi başarımlar sunan bir makale saptanamamıştır. PSP yaklaşımında, kodçözücüdeki kafes yapısı üzerindeki her bir yol için bir kanal kestirimi yapılmaktadır. Bu da aslında gürültüden dolayı yanlış yola sapıldığı durumda o yanlışla sürekli devam eden bir kanal kestiriminin var olmasına denk gelmektedir. Ancak şu anda literatürde üzerinde durulan yinelemeli kanal kestirimi yaklaşımında durum böyle değildir. En başta pilot sembollerinin yaklaşımı ile çok iyi olmasa da bir öncel kanal kestirimi ile kod çözme işlemi yapılmaya başlanmaktadır. Kanal kestirimi çok kötü değilse, hata oranı çok düşük olmasa da 0.01 gibi seviyelere indirilebilmektedir. Bu turbo benzeri kodlar için çok kötü bir hata seviyesi olmasına rağmen kanal kestiricisini çalıştırmak için oldukça iyi bir rakamdır. Kanal kestiricisi bu hata seviyesiyle daha iyi bir kanal kestirimi yapabilmekte ve sonrasındaki kod çözme işlemini oldukça iyi seviyelere çıkartabilmektedir.

Bu konudaki çalışmalarımızda darbantlı zamanla değişen sönümlenmeli kanallar için literatürdeki ICE algoritması üzerinde iyi bilinen LMS öngörü filtreleri (PROAKIS, 1995) kullanılarak daha az karmaşıklıkta yeni bir algoritma ortaya konuldu. RLS veya LMS'in çeşitli varyasyonları da aynı şekilde kullanılabilir. Ancak işlem yükünü düşük tutmak için burada LMS algoritmasına yer verdik. Karmaşıklık seviyesini kabul edilebilir bir miktarda tutarak kanal kestirimi algoritmasının başarımlarını artırmak amacıyla LMS algoritması sadece tek yönlü olarak değil, ileri-geri yönlerde ayrı ayrı çalıştırılarak aritmetik ortalamalar alınmıştır. Algoritmanın yeniliği LMS kanal kestiriminin tek yönde değil BCJR algoritmasında olduğu gibi iki yönde çalıştırılmasıdır. Bu sayede kestirimin kalitesi önemli ölçüde artırılabilir.

Şekil 11'de de gösterildiği gibi kullanılan verici yapısında, polar formatta rastgele oluşturulmuş bir veri dizisinin kodlanması sonucunda oluşan kod sembollerinin arasına periyodik olarak bilinen pilot sembolleri sokulmaktadır. Alıcı tarafında özel olarak tasarlanan filtrelerin kanal kestirimi yapabilmemesine olanak sağlayan bu sistem pilot sembol yardımcılı kipleme ('pilot symbol assisted modulation' – PSAM) olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 11. Pilot sembol yardımcılı kipleme.



Şekil 12. Yinelemeli kanal kestirimi-kodçözme yapılan alıcı yapısı.

Şekil 12’de gösterilen alıcı yapısında, pilot sembolleri kullanılarak bir ön kanal kestirimi oluşturulmaktadır. Gözlemlenen semboller ve kanal kestirimi yardımıyla hesaplanan log-olasılık oranları (LLR), pilot sembolere karşılık gelen değerlerin ayıklanmasından sonra kodçözücü tarafından işlenmekte ve gönderilen sembolere ait LLR değerleri hesaplanmaktadır.

Kodsözcüğü sembolleri hakkında hesaplanan LLR değerleri, sabit karar (‘hard decision’) veya yumuşak karar (‘soft decision’) olarak kanal kestirimi için geri beslenmektedir. Kodsözcüğü sembolleri hakkında elde edilen kestirimler, bilinen pilot sembollerle birlikte kullanılarak yeni bir kanal kestirimi oluşturulmakta ve böylelikle kanal kestirimi yinelemeler vasıtasıyla saflaştırılmaktadır. Bu işleme yinelemeli kanal kestirimi ismi verilmiştir.

Yinelemeli kanal kestirimi için (VALENTI, 2001)’de önerilen yapı için daha az karmaşıklıkta yeni bir yöntem önerdik. Bu amaçla, ön kanal kestirimi için kullanılan Wiener filtre yaklaşımı sabit tutulmakla birlikte, daha sonraki kestirim döngülerinde tek yönlü (1-way LMS) veya iki yönlü (2-way LMS) algoritmaları önerilmiştir.

Tek yönlü 1-way LMS algoritması, literatürde sıkça kullanılmakta olup

$$\hat{f}_{n+1}^{(i)} = \hat{f}_n^{(i)} + \beta e_n^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)} \quad e_n^{(i)} = r_n - \hat{f}_n^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Yukarıdaki ifadede \hat{f}_n n anındaki kazancın kestirimini, β LMS adım parametresini, r_n n anındaki kanal gözlemini, \hat{a}_n n anındaki sembol kararını göstermektedir. İfadedeki sembollerde üstel olarak parantez içerisinde verilen sayılar yineleme sayısına denk gelmektedir. Bir blok boyunca ileri ve geri yönlü çalışan 2-yönlü LMS algoritmasında ileri yönde kanal kestirimi

$$h_{n+1}^{(i)} = h_n^{(i)} + \beta e_{f,n}^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)} \quad e_{f,n}^{(i)} = r_n - h_n^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)}$$

şeklinde, geri yönde kanal kestirimi ise

$$g_{n-1}^{(i)} = g_n^{(i)} + \beta e_{b,n}^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)} \quad e_{b,n}^{(i)} = r_n - g_n^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)}$$

şeklinde hesaplanmakta olup her bir sönmüleme katsıyısı indisi için bu değerlerin aritmetik ortalaması alınmakta ve nihai kanal kestirimi elde edilmektedir:

$$\hat{f}_n^{(i)} = \frac{(h_n^{(i)} + g_n^{(i)})}{2}$$

Eldeki kanal modeli durağan ('stationary') olduğundan aynı LMS parametresi kullanılır. İki yöndeki kestirimlerin başlangıç kestirimleri birbirinden çok farklı olduğundan iki yönlü çalışmada ortalama alma ile daha iyi kestirim yapılabilir.

3.3. Gerçekleme

3.3.1. Fiziksel Kanalı Kullanan Test Düzeneği

Projenin ilk yarısında, biraz da aşırıya kaçılarak, oluşturulacak haberleşme sisteminin testlerinin doğrudan fiziksel kanal üzerinden yapılabilmesi için bir test düzeneği oluşturulması üzerine çalışmalar yapıldı. Bir haberleşme alıcı-vericisinin temelbant işleminde kullanılan neredeyse bütün bileşenler üzerinde mesai harcandı. Projenin asıl gerçekleme çalışmalarının salt testinin yapılacağı bu düzeneğe gereğinden fazla enerji harcadığımızı kabul etmek zorundayız. Projenin ikinci yarısında bu test düzeneği ile ilgili çalışmaları tamamen durdurarak önerilen sistemin gerçekleştirilmesine ağırlık verildi. Ancak bu test düzeneği ile ilgili çalışmalara ilk yarıdaki gelişme raporlarında çok yer verildiğinden burada yapılan çalışmaları kısaca açıklamak istiyoruz.

Test düzeneğinde ODTÜ kaynaklarıyla satın alınmış FPGA kartları kullanıldı. Ayrıca analogdan-sayısal (ADC, model: AD9229-EB) ve sayısaldan-analoga (DAC, model: AD9773-EB) çevirici kartlar tedarik edildi. RF sistemi tasarımı için kaçınmak için Ankara merkezli UDEA Ltd. Şti. tarafından üretilen UVA-T11 vericisi ve UVA-R20 alıcısı kullanıldı. FM kiplemesi ile çalışan bu alıcı ve verici birimleri kablosuz olarak video göndermek amacıyla üretildiklerinden biz 0-5MHz aralığında ürettiğimiz temelbant sinyalleri vericiye verip alıcıdan gözlemleyebildik.

A. Verici Alt Sistemi

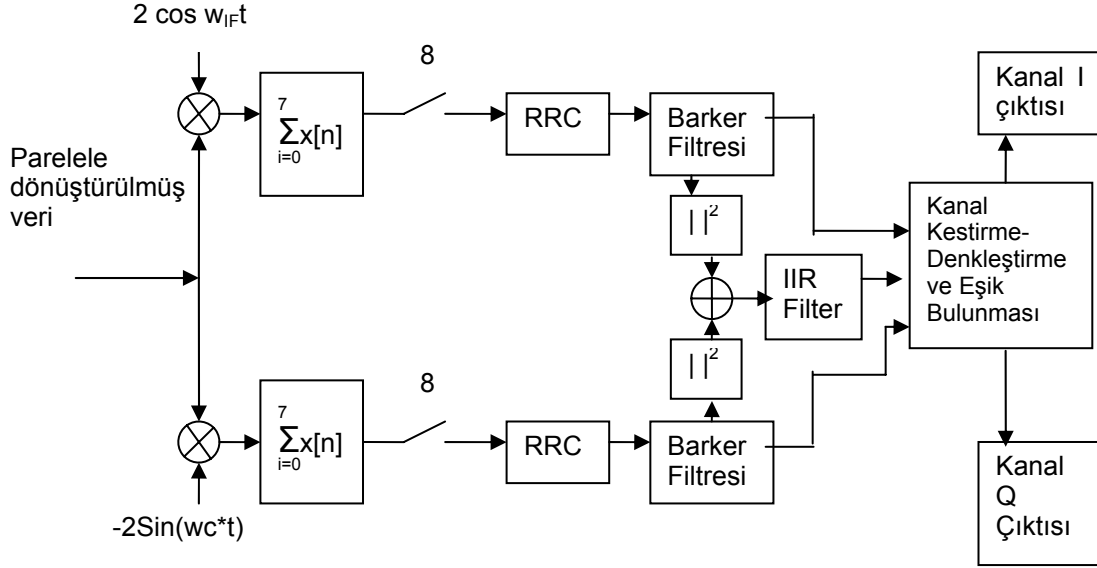
Sistemin bilgi kaynağı rasgele veri üreticidir. Bu üreteç FPGA üzerinde oluşturuldu. Lineer geribeslemeli kayan yazmaçlar (LFSR) kullanılarak sözde-rasgele sayılar üretme yöntemi sözde-rasgele sayılar üretilebilir (MEYER-BAESE, 2001). Sayısal modülasyon, 1 ve 0 değerlerinden oluşan rasgele verileri, FPGA'nın içinde bir dönüşümle 1 leri 1 olarak bırakıp 0 ları -1 yapıyor. Gelen veri FPGA'da iki alt dizi şeklinde işleme giriyor. İki farklı dizi, iki farklı kanal anlamını taşıyor ki bunlar birbirine dik olan Kanal I ve Kanal Q. 'Kanal I' nın girdisi alt dizilerden birinin kosinüsle çarpılmış haliyken, 'Kanal Q'nun girdisi diğer alt dizinin sinüsle çarpılmasıyla elde ediliyor. Bu çarpma işlemi doğrudan sayısal sentezleme ('direct digital synthesis') yaklaşımı ile FPGA'nın içinde gerçekleşiyor. FPGA'da tanımlanmış sinüs ve kosinüs örnekleri, cihazların limitleri içerisinde istediğimiz IF frekansında sinyal oluşturabilme yetisini kazandırıyor. IF frekansı bu çalışmada 0-5MHz içinde çalışma zorunluluğundan dolayı 3MHz olarak alınmıştır.

Vericiye gidecek sinyal yolunda FPGA üzerinde yapılan önemli işlerden biri de RRC (root raised cosine) filtrelemesidir. Bilindiği üzere bu süzme işlemi sayısal modülasyon sonucunda oluşan sinyallerin bantlarının sınırlandırılması amacıyla kullanılmaktadır. RRC Filtrelerinin çıktıları FPGA'nın içinde son bir toplama işleminin ardından DAC kartına gönderilir. DAC analoga çevirdiği sinyali vericiye verir. Analoga çevrilmiş olan sinyali analog video sinyali transferi için tasarlanmış

olan bir UDEA UVA-T11 FM vericisine beslenir. Bu verici 2.4 GHz bandında çalışmaktadır ve girdi sinyalinin bant aralığı 0-5 MHz olarak verilmektedir.

B. Alıcı Alt Sistemi

FM alıcısı havada yayılan yüksek frekanslı sinyali alır ve bazı filtrelemelerin ardından RF vericisine gönderilmiş olan IF sinyalinin bir benzerini oluşturur. Tabii ki bu IF sinyalinde gürültü ve kanal etkileri gözlemlenir. IF frekansındaki sinyal ADC'ye gönderilir. Bit çözünürlüğü 12 olan ADC dönüşümü yaptıktan sonra veriyi seri olarak FPGA devresine aktarır. FPGA'nın içinde seri veri paralele dönüştürülünce, tekrar sayısal işlemlere başlanır.



Şekil 13. Alıcının ardından gelen işaret işleme bloğu.

Paralel dönüştürülmüş veri kosinüs ve sinüs ile çarpılır. Çarpımın ardındaki sinyalde temelbant ve yüksek frekans içerikleri bulunur. Bunun ardından 8'er 8'er toplama bloğu ve arkasından gelen yavaş örnekleme bloğu ile hem sinyalin yüksek frekans içeriği temizlenmiş olur hem de örnekleme hızı sekizde birine inmiş olur. Toplama bloğu en basit alçak geçiren filtre olarak düşünülmelidir. Hem bu adımda hem de ardından gelen RRC filtresinde filtreleme işlemi yapıldığından yüksek frekanstaki sinyal için yeterince bastırma sağlanır. RRC filtresi uyumlu filtre olarak kullanıldığından verici tarafındaki filtre ile özdeşdir.

RRC filtresini takip eden blok Barker filtresidir. Paket senkronizasyonu için pilot serisi gönderme yöntemi oldukça yoğun olarak kullanılmaktadır. Biz de çalışmamızda Barker serilerini kullanan bir pilot serisini paketlerin başında göndermekteyiz. Barker dizisi 7 veya 11 veya 13 elemandan oluşan ikil ('binary') bir dizidir. Bu dizinin öz-ilişkisi tam orta noktasında çok yüksek bir maksimum noktaya sonuçlanır. Maksimum değer dizinin uzunluğu arttıkça artar. Bu değer bizim tasarımızda 7 olarak seçilmiştir. Ancak VHDL yazılımının esnek bir şekilde yazılmasının sonucu olarak bu değer kolaylıkla 11 veya 13'e ayarlanabilir. Bu maksimum nokta birçok gürültülü ortamda dahi tespit edilebilir. Böylece, eğer paketi gönderen taraf paketin başına Barker dizisinin elemanlarını da eklerse ve alıcı taraf gelen verinin ilişkisini alıp maksimum noktasını tespit ederse, istenilen amaca ulaşılmış olunur. Bu yöntem, paket başlangıcının belirlenmesinde kablosuz iletişimde yoğunlukla kullanılmaktadır.

Bu süzgecin iki ayrı birimle bağlantısı olması nedeniyle iki ayrı görevi vardır:

- 1- Bit paketlerinin başladıklarına ilişkin bilginin oluşturulması için paket başlangıç algılayıcısı birimine gönderilmesi.
- 2- Eniyi bit (ya da sembol) örnekleme noktalarının belirlenmesi, diğer bir deyişle, bit zamanlaması/senkronizasyonu bilgisinin bit örnekleycisine verilmesi.

Her paketin başlangıcında alıcı tarafından da bilindiği için kolayca belirlenebilecek yedi bitten oluşan Barker kodu bulunmaktadır. Bu kodun varlığının ve bunun sonucu olarak paket başlangıcının belirlenmesinde kullanılan yöntem uyumlu süzme yöntemidir. Alınan sinyal gönderilen Barker kodlu sinyalin örneklenmiş hali ile ilintilendirilir. VHDL kodunu yazdığımız bir başka birim (paket başlangıç algılayıcısı), bu uyumda yaşanan anlık yükselmeleri izlemekte ve uyarlanır eşik belirleyici birimden aldığı eşik değerin aşılması durumunda “paket alınıyor” imini yükseltmektedir.

Kanaldan alınan sinyalin gücünün her an önemli ölçüde değişebileceğini düşündüğümüzde ve aynı zamanda paket başlangıçlarının belirlenmesinde kullanılan eşik değere göre kıyaslamalarda gürültü seviyesinin ortalama değerinin kestirilmesi önemlidir. Gerçeklenen ‘Uyarlanır Eşik Belirleyici Birim’ ile, kanaldan alınan örneklenmiş sinyalin gürültü seviyesinin belirlenmesi için, paket olmadığı sırada (iki paket arasında kanalın boş olduğu zamanlarda) Barker uyum süzgeci çıkışındaki sinyal zaman içerisinde ağırlıklandırılarak bir ortalama bulunur. Bu sayede gürültünün ortalama değeri tespit edilir ve eşiklendirme işlemi ile çalışan çeşitli başka birimlerde kullanılır.

‘Paket Başlangıç Algılayıcısı’ birimin görevi, Barker ilinti süzgecinin çıkışındaki sinyalin gücünün (I ve Q kanallarından alınan uyum sonuçlarının kareleri toplamının) uyarlanır eşik belirleyicisinin bulunduğu değerin üzerinde olması durumunda “paket alınıyor” imini yükseğe çekerek bit örnekleyciyi çalıştırmaktır. Eşik değeri aşan “yerel en büyük” (‘local maximum’) örneğin gözlenme anı, aynı zamanda bit örnekleyci birimine eniyi bit örnekleme anı bilgisini de vermektedir.

Kanal tepkisi, her paketin başlangıç anında I ve Q kanalları için Barker ilinti sonuçlarında görmeyi beklediğimiz sinyallerin kanal tarafından anlık olarak hangi karmaşık sayıyla çarpılıp değiştirildiğini bulmamız ile elde edilmektedir. Daha sonra, kanal kestirim bilgisi I ve Q kanallarındaki kanal etkisini tersine çevirecek olan faz/genlik düzeltici birimine verilmektedir. Kanalın bozucu etkisini, eldeki sinyalin kanal kestiriminden elde edilen karmaşık sayıya bölünmesiyle giderebiliriz. Böylece bu birim bit/simge örnekleme birimine kanalın kazanç etkisinden kurtarılmış I ve Q örnekleri sunar. Bu birimde bit veya simgeler için karar verilir.

C. Taşıyıcı Frekans Kaymasının Kestirimi

Sistemimizde kanal kestirimi ve paket senkronizasyonu her paketin başında gönderilen Barker dizisinden oluşan bir pilot dizisiyle sağlanmaktadır. Her bir paket için paketin başında kanal kestirimi yapılmaktadır. Laboratuvar şartlarında ve sistem özellikleri ile düz sönümlenmeli bir kanal gözlenmektedir. Ardışık kanal tepkisi kestirimlerine bakıldığında, kanal tepkisinin genliğinin zamanda neredeyse sabitken, fazının görece çok hızlı ancak düzenli olarak değiştiği gözlenmekteydi. Gözlenen faz kaymasına neden ise alıcı ve vericideki 24 Mhz’lik kristal salınım (‘oscillator’) devrelerinin çıkış frekanslarında, 1kHz’in altında olan (ancak zamanla

çok yavaş olsa da değişen, ki faz gürültüsü etkisinden meydana gelmektedir) bir frekans farklılığıydı. Bu farkı ortadan kaldırmak ve daha uzun veri bitlerinin doğru iletimini sağlamak için PLL benzeri bir yapı önerildi ve bu yapı FPGA üzerinde gerçekleştirildi. Önerilen yapı, Costas döngüsü gibi donanımsal olarak daha karmaşık yapılar yerine daha basit bir yapı olması göz önüne alınarak gerçekleştirildi. ML kestirimi üzerine de çalışmalar yapıldı, ancak pratikte kolaylıkla uygulanacak bir indirgenme elde edilemediğinden aşağıdaki çözüm uygulandı.

Önerilen yapı paket başlarında elde edilen kanal kestirimlerini kullanarak çalışır. Önce salınım devreleri arasındaki fark kestirilir, daha sonra ise bu fark alıcının içinde sayısal olarak oluşturulan IF frekansındaki sinüs ve kosinüs dalgalarının fazına ters geri beslenip PLL benzeri bir yapıyla frekans farkı sıfıra indirilir.

Eğer salınım frekansından gelen kaymayı da kanal tepkisinin bir parçası olarak düşünürsek, ardışık olarak elde edilen iki kanal tepkisi göz önüne alınır ve bunların fazları birbirinden çıkarılırsa gürültülü bir frekans farkı bilgisi elde edilir. Burada hatırlanması gereken kanal kestirimi yapıldığı anda işaret-gürültü oranının (SNR) çok yüksek olduğudur. Kestirimdeki SNR küçükse zaten herhangi bir iletimin yapılması söz konusu olmayacaktır. Bu gürültüyü ortadan kaldırıp frekans farkını daha iyi kestirmek için basit bir alçak geçiren süzgeç kullanılır. Kanal tepkisinin fazı, I ve Q kanallarından elde edilen karmaşık kanal kazancı kullanılarak bulunur. Bunun için FPGA üzerinde bir ark tanjant fonksiyonuna gerek vardır. Bunun için de CORDIC yinelemeli algoritması kullanılır (MEYER-BAESE, 2001). Bu algoritmanın girdileri (x,y) çifti, çıktısı ise $\arctan(y/x)$ 'tir. CORDIC algoritması yinelemeli olarak çalıştırılır ve çalışma koşulu olan 8 bitlik çözünürlükte yaklaşık sekiz yineleme ile doğru değere etkisiz bir hata ile yaklaşır.

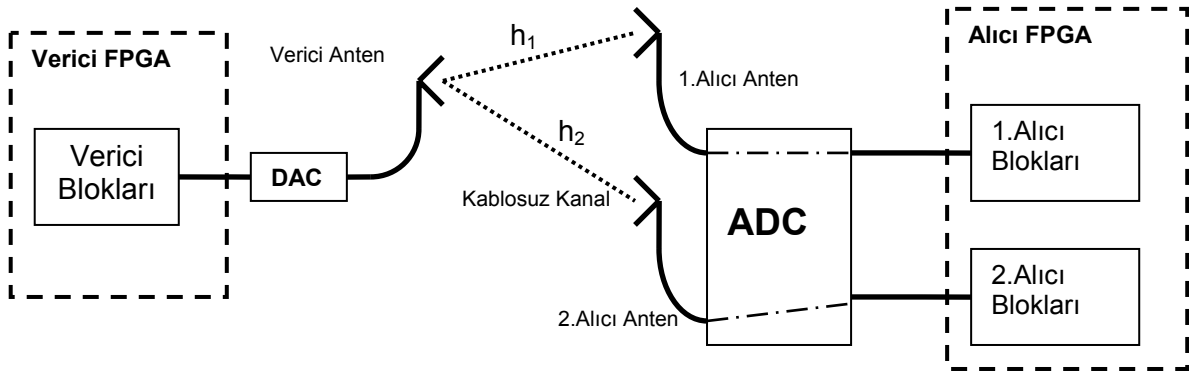
Bu işlemler gerçekleştirilip frekans farkı kestirildikten sonra, bu fark sinüs ve kosinüs dalgalarının fazına geri beslenerek bu farkın etkisi yok edilmelidir. Bunu gerçekleştirebilmek için sayısal olarak çalışan alıcıdaki çarpıcıların fazı zamanla frekans farkına orantılı bir şekilde değiştirilir. Sistemde 24 MHz'lik bir saat kullanıldığından, 256 tane sinüs örneği alındığında 3MHz'lik bir sinyal oluşturmak için bu örnekler 32'şer 32'şer atlanarak kullanılmalıdır. Burada 256 tane sinüs örneği kullanılmadaki amaç daha küçük frekans farklarını da bir paket içinde düzeltmeyi sağlayabilmektir.

Bahsedilen CORDIC algoritması ve frekans farkı bulunduktan sonra bu farkın sisteme geri beslenmesi hakkındaki detaylar EK 15'de verilen konferans bildirisinde bulunabilir.

D. Alıcı Çeşitlemesi Çalışmaları

Tek antenli sistemin gerçekleştirilmesinden sonra alıcı çeşitlemesi yapabilecek bir sistemin oluşturulması için çalışmalar yapıldı. Tek antenli sistem bütün bloklarıyla kurulmuş, Şekil 14'te gösterilen tek-girdili çok-çıkıtlı (SIMO) sistemin gerçekleştirilmesi için alıcıda var olan bloklar kopyalanmış ve ikinci alıcı antenden de sinyal alınacak şekilde bağlantılar yapılmıştır. Bu durumda iki adet UVA-R20 alıcısı kullanılmıştır. Ancak daha önceden öngörülemeyen bir sorun çıkmıştır. Bu sorun önce ikinci antenden gelen analog sinyalin uygun bir şekilde örneklenememesi olarak tanımlanmış ve incelemeler sonucunda FPGA içinde kurulan sayısal devrede bir hata tespit edilmiştir. Bundan önceki dönemlerdeki çalışmalarımızda sayısal devre tasarımı yazmaç seviyesinde (RTL) yapılmış,

FPGA üzerinde mantık ünitelerinin gerçek konumlarının belirlenmesiyle uğraşılmamıştı. Ancak devre büyüdükçe, devrenin hızlı çalışması gereken kısımlarının saat sinyallerine mesafesinin önem kazandığı gözlenmiştir. Dahası, kullanılan tamponların giriş-çıkış yelpazelerinin(fan-in fan-out) alabilecekleri en yüksek değer aşıldığından saat sinyalleri daha uzun yollardan hedeflere ulaştırılmış, bu da kestirilemeyen gecikmelere yol açmıştır. Bu da kurulan devrenin yanlış çalışmasına neden olmaktadır. Bahsedilen sorunları çözebilmek için tasarım, yazmaç seviyesinden daha alt bir seviyede yapılmıştır. Devreye konumlandırma kısıtları getirilmiş, hızlı çalışan yazmaçların saat tamponuna uzak yerleştirilmesi engellenmiştir. Ayrıca devreye Sayısal Saat Yöneticisi (DCM) eklenmiştir. Girdi olarak saat sinyalini alan DCM, geri besleme yoluyla senkronizasyonu sağlamaktadır. Böylece alıcı taraftaki FPGA'da iki anten için ayrı ayrı bloklar sorunsuz olarak kurulmuştur.



Şekil 14. SIMO Sistem

SIMO bir sistem için k antenindeki kanal gözlemleri

$$y_k = h_k x + n_k, k = 1, 2$$

olarak verilebilir. Her bir antenden alınan sinyallerin temelbant eşleniği, y_k , uyumlu filtreden geçirilmiştir. h_k antenlerdeki kompleks kanal tepkilerini, n_k gözlenen gürültüleri gösterir. Uyumlu filtre çıktıları f_k aşağıdaki gibi olacaktır:

$$f_k = |h_k|^2 x + h_k^* n_k, k = 1, 2$$

Her bir antenin aldığı verilere karar verme f_k üzerinden yapılır. Alıcıda çeşitleme tipi olarak MRC yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntemle göre, gelen verilere iki antenden alınan sinyallerin toplamı M sinyaline göre karar verilir.

$$M = f_1 + f_2$$

$$= (|h_1|^2 + |h_2|^2)x + h_1^* n_1 + h_2^* n_2$$

MRC yöntemiyle çeşitlilik sağlamak için iki antenin aldığı gürültü güçleri genelde eşittir. Gürültü güçlerinin eşit olmadığı daha genel durumda, ki kurulan sistemde gürültü güçleri her zaman aynı olmamaktadır, çarpaz terimlerin çarpılıp bu çarpımların toplanmasıyla elde edilen M' sinyali üzerinden karar verme gerçekleştirilir.

$$M' = N_2 |h_1|^2 x + N_1 |h_2|^2 x + N_2 h_1^* n_1 + N_1 h_2^* n_2$$

Yukarıdaki denklemde N_1 ve N_2 sırasıyla 1. ve 2. alıcı antenden alınan gürültünün gücünü göstermektedir.

3.3.2. Kodçözücü ve Kanal Kestirici Gerçeklemesi

Kodçözücünün gerçeklemesi ile ilgili bilgiler burada sunulmaktadır. Bu çalışmalarda fiziksel kanalla ilgili hiçbir işlem yapılmamıştır. Yani her şey FPGA üzerinde üretilmiştir. Gürültü, LFSRların kullanılmasıyla sentetik olarak üretilerek gönderilen sinyallerin üzerine eklenmiştir. Zamanla değişen kanal çalışmalarında da kanal kazançları LFSRların kullanılmasıyla üretilen gürültünün işlenmesi ile oluşturulmuştur.

A. BCJR Algoritması

BCJR algoritması en çok kullanılan MAP kodçözme algoritmalarından birisidir. Bu algoritmanın amacı BER'in en aza indirilmesidir ve her bilgi biti için bir logaritmik-olasılık oranı (log-likelihood ratio-LL) hesaplanır. İşlemlerin logaritmik tabanda yapılmasının nedeni daha sonra açıklığa kavuşturulacaktır.

Bir bilgi biti, u_l , için logaritmik-olasılık oranı şu şekilde hesaplanır,

$$L(u_l) = \ln \left[\frac{p(u_l = +1|r)}{p(u_l = -1|r)} \right]. \quad (1)$$

Verilen denklemdeki r değişkeni gözlemin tamamını gösterir. u_l bitinin kestirimi için bu değer aşağıdaki şekilde kullanılır:

$$\hat{u}_l = \begin{cases} +1 & , L(u_l) > 0 \\ -1 & , L(u_l) < 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Takip eden kısımlarda, BCJR kodçözme tekniğinin detaylarına inilmeden aşamaları hakkında bilgi verilecektir. Detaylar için (LİN, 2004) referansına başvurulabilir.

α ile gösterilen "ileri ölçüt" ('forward metric') değeri, l anında kodçözücünün s' durumunda ('state') olması ve o ana kadar $r_{t < l}$ gibi bir dizinin alınmış olması olasılığıdır. İleri ölçüt değerinin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\alpha_l(s') = p(s_l = s', r_{t < l}). \quad (3)$$

Benzer şekilde, "geri ölçüt" ('backward metric') değeri ise, l anındaki kodçözücü durumunun s olması durumunda l anından sonra $r_{t > l}$ dizisinin alınması olasılığıdır. Bu değer β olarak isimlendirilir ve matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\beta_l(s) = p(r_{t > l} | s_l = s). \quad (4)$$

İşlemlerde kullanılan son ölçüt değeri ise dal ölçütüdür ('branch metric'). γ ile gösterilen bu değer, l anında s' durumundan s durumuna geçilmesi olasılığını ifade eder. Matematiksel gösterimi aşağıdaki şekildedir.

$$\gamma_l(s) = p(s_{l+1} = s, r_l | s_l = s') \quad (5)$$

Verilen ölçüt değer tanımları kullanılarak yapılan birkaç işlem sonrasında α değerlerinin ileri özyineleme, β değerlerinin ise geri özyineleme yöntemleriyle güncellendiği görülmektedir.

$$\alpha_{l+1}(s) = \sum_{s' \in \sigma_l} \gamma_l(s', s) \alpha_l(s') \quad (6)$$

$$\beta_l(s') = \sum_{s \in \sigma_{l+1}} \gamma_l(s', s) \beta_{l+1}(s) \quad (7)$$

Denklemlerde geçen σ_l , l anında kendisine geçiş yapılabilecek, σ_{l+1} ise $l+1$ anında kendisinden geçiş yapılabilecek tüm olası durumları gösterir. Bu özyineleme denklemlerinin öncel şartları, N bitlik bir bit dizisi için şu şekilde kullanılır⁵.

$$\alpha_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\beta_N(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}$$

AWGN kanal koşulunda dal ölçütleri, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\gamma_l(s', s) = e^{u_l L_a(u_l)/2} e^{(L_c/2)(r_l \cdot v_l)} \quad (9)$$

Verilen denklemdeki $L_a(u_l)$ değişkeni u_l bitinin önsel ('a priori') olasılığını gösterir. L_c değişkeni ise kanalın güvenilirlik katsayısını ifade eder ve değeri $4E_s / N_0$ olarak bulunur. $(r_l \cdot v_l)$ nokta çarpımı, gönderildiği varsayılan dizi ile alınan dizinin ilintisini verir.

(6), (7) ve (9) numaralı eşitliklerin daha kolay çözümlenebilmesi için bu işlemler logaritmik tabana taşınmış ve hesaplamalara bu tabanda devam edilmiştir. Ölçüt değerlerinin logaritmik tabandaki karşılıkları

$$\gamma_l^*(s', s) = \ln \gamma_l(s', s) = u_l \frac{L_a(u_l)}{2} + \frac{L_c}{2} (r_l \cdot v_l) \quad (10)$$

$$\alpha_{l+1}^*(s) = \ln \alpha_{l+1}(s) = \ln \sum_{s' \in \sigma_l} e^{[\gamma_l^*(s', s) + \alpha_l^*(s')]} \quad (11)$$

$$\beta_l^*(s') = \ln \beta_l(s') = \ln \sum_{s \in \sigma_{l+1}} e^{[\gamma_l^*(s', s) + \beta_{l+1}^*(s)]} \quad (12)$$

olarak elde edilir. Verilen denklemlerin daha da basite indirgenmesi için $\max^*(.)$ adı verilen bir işlem tanımlanır:

$$\max^*(x, y) = \ln(e^x + e^y) = \max(x, y) + \ln(1 + e^{-|x-y|}). \quad (13)$$

$\max^*(.)$ işlemindeki ikinci terim $(\ln(1 + e^{-|x-y|}))$ "düzeltme eklentisi" olarak adlandırılır. Tanımlanan $\max^*(.)$ işleminin çoklu argümanlarla kullanılmasıyla α ve β hesaplamalarında kullanılan özyineleme denklemleri daha da basite indirgenebilir.

$$\alpha_{l+1}^*(s) = \max_{s' \in \sigma_l}^* [\gamma_l^*(s', s) + \alpha_l^*(s')] \quad (14)$$

$$\beta_l^*(s') = \max_{s \in \sigma_{l+1}}^* [\gamma_l^*(s', s) + \beta_{l+1}^*(s)] \quad (15)$$

Logaritmik tabana geçilmesinden sonra (8) numaralı ilklem eşitlikleri aşağıdaki gibi tanımlanır,

⁵ Yollanan bit dizisinin sonuna kafes sonlandırma bitleri eklendiği ve bu nedenle dizi sonu kodlama durumunun "0" olduğu kabul edilmiştir.

$$\alpha_0^*(s) = \begin{cases} 0, & s = 0 \\ -\infty, & s \neq 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\beta_N^*(s) = \begin{cases} 0, & s = 0 \\ -\infty, & s \neq 0 \end{cases}$$

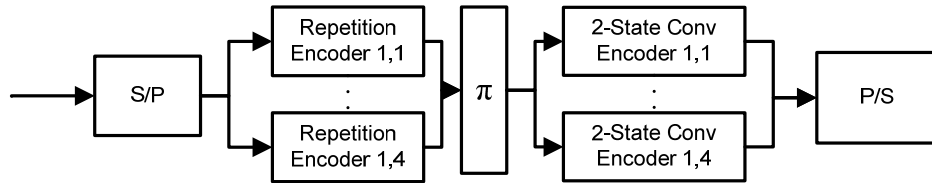
Bir takım ara denklemler sonrasında, (1) numaralı eşitlikte verilen logaritmik-olasılık oranı yukarıda yapılan tanımlamalar yardımıyla aşağıdaki düzene sokulabilir.

$$LL(u_l) = \ln \left\{ \sum_{(s',s) \in \Sigma_l^+} e^{[\alpha_l^*(s') + \gamma_l^*(s',s) + \beta_{l+1}^*(s)]} \right\} - \ln \left\{ \sum_{(s',s) \in \Sigma_l^-} e^{[\alpha_l^*(s') + \gamma_l^*(s',s) + \beta_{l+1}^*(s)]} \right\} \quad (17)$$

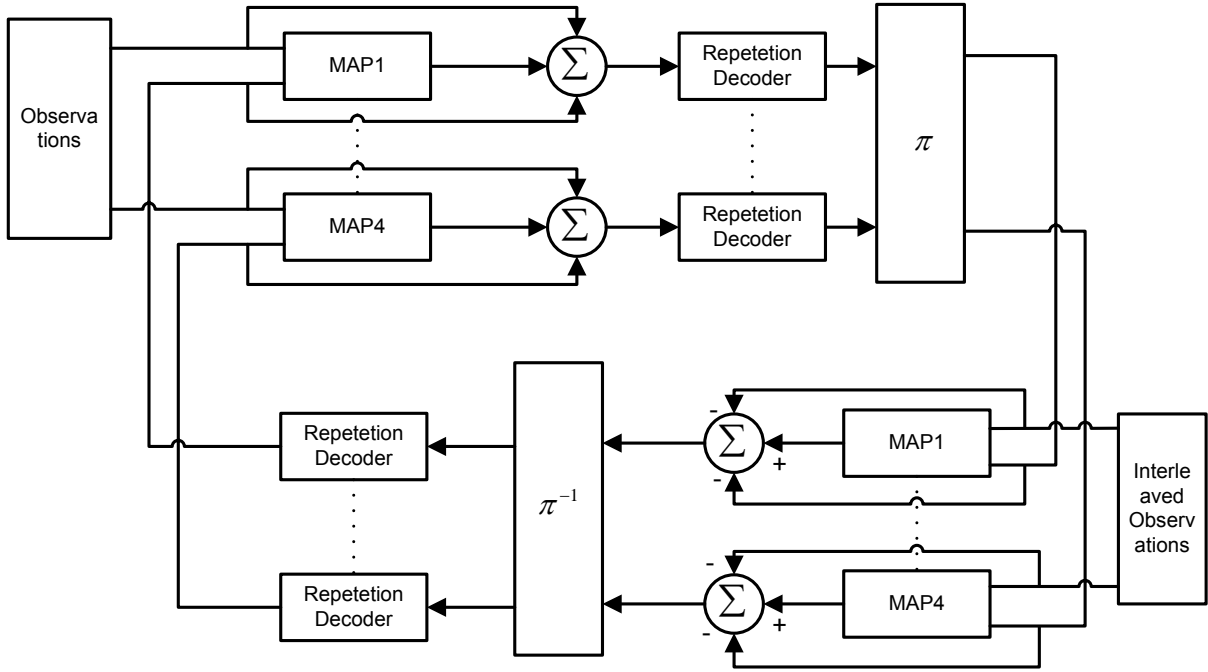
Yukarıdaki denklemde geçen Σ_l^+ ve Σ_l^- sembolleri sırasıyla, bilgi bitinin “0” ve “1” olduğu koşullardaki durum geçişlerini içeren kümeleri ifade etmek için kullanılır.

B. Paralleştirilmiş RA Kodları

Tekrarla-biriktir (RA) kodları turbo-benzeri kodlar sınıfındadır. Turbo kodların icadından sonra serpiştiriciler başka kod yapılarına da uygulanmış ve düşük karmaşıklıkta ama yüksek performanslı bu kod yapısı ortaya çıkmıştır. RA kodlar bir tekrarlayıcı ile bir biriktiricinin artarda bağlanması ile elde edilir. Biriktirici 2 durumlu bir evrişimsel kod olarak da ele alınabilir. Tekrarlayıcı bir diziyi L kere tekrar eder. Serpiştiriciden geçen bu tekrarlanmış kodlar, kodlama oranı 1 olan evrişimsel kodlayıcıdan da geçirilince RA kodlar elde edilmiş olur. RA kodunun kod oranı $1/L$ 'dir. RA kodçözümler de çözümlemeye oluşan gecikmelerden etkilenir. Kodçözümlüyü daha hızlı bir hale getirmek için paralelleştirme fikri bu kodçözümlerde de uygulanabilir. Paralleleştirilmiş RA kodlayıcısı ve kodçözümlüsü şemaları Şekil 15 ve Şekil 16'da gösterilmektedir. Genel olarak RA kodları LDPC kodlarının da çözüldüğü çarpan çizgesi ('factor graph') yaklaşımı ile çözümlerse de BCJR algoritması ile de çözümlenebilir. Biz bu çalışmada BCJR ile yinelemeli çözüm yaklaşımını kullandık.



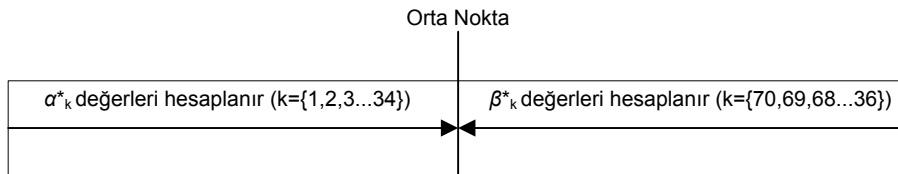
Şekil 15. Paralleleştirilmiş RA kodlayıcısı şeması.



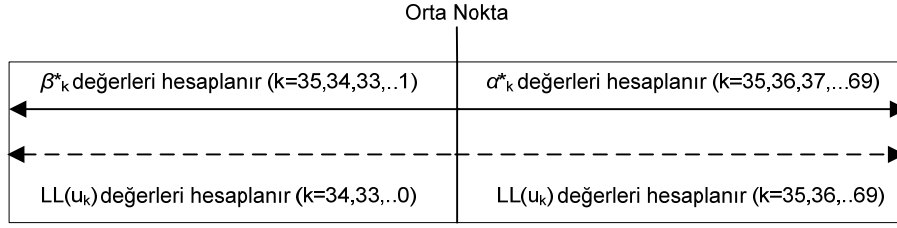
Şekil 16. Parallellleştirilmiş RA kodçözücüsü şeması.

C. Merkezden Başa Algoritması

Bu algoritma MAP kodçözücünün daha yüksek hızda çözümlene yapabilmesine olanak sağlar. BCJR kodçözücünün denklemleri hatırlanırsa, α^* ve β^* ölçütleri baştan ve sondan olmak üzere tekrarlanan denklemler ile hesaplanmaktadır. Orta noktaya gelindiğinde bit olasılığı hesaplamak için bütün bilgiler elde edilmiş olunur. Şekil 17 ve Şekil 18'de bu işlemin nasıl yapıldığı 70 uzunluğu için gösterilmiştir. 70 bitlik dizi alındıktan sonra aynı anda α^* ve β^* ölçütleri hesaplanmaya başlanır. 35. zaman dilimine gelindiğinde α^*_{34} , β^*_{35} , α^*_{35} ve β^*_{36} değerleri elde edilmiş olur. γ^*_{34} ve γ^*_{35} dal ölçütlerinin de hesaba katılması sayede $LL(u_{34})$ ve $LL(u_{35})$ olasılık değerleri hesaplanabilir. Bu algoritma ile kodçözme zamanı yarıya inmiş olur.



Şekil 17. Orta noktaya kadar α^* ve β^* ölçütleri hesaplanır.



Şekil 18. Orta noktadan sonra α^* ve β^* ölçütleri hesaplanmaya devam edilirken LL değerleri de hesaplanır.

D. Nicemleme ve Kodçözücülere Olasılıkların Aktarılması

Alıcıdaki demodülasyon işleminin sonunda elimizde kompleks sayılar olarak kanal gözlemleri oluşur. Demodülasyon işlemi sonunda alıcıdaki sinyalin ayrık zaman temelbant eşleniği ('discrete baseband equivalent') aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_k = hx_k + n_k.$$

Yukarıdaki ifadede k anındaki kanal gözlemi y_k , gönderilen sinyal x_k , gürültü n_k ve kanal kazanç katsayısı h ile gösterilmektedir.

Çalışmamızda kullanılan kodçözücüler, aşağıdaki log-olasılık oranına (LLR) ihtiyaç duymaktadırlar:

$$L_k^c = \log \frac{p(y_k | h, x_k = 1)}{p(y_k | h, x_k = -1)}.$$

Bu oran, gürültünün varyansının N_0 ve sinyalin birim genliğe sahip olduğu durumda $L_k^c = 2 / N_0 \Re\{h^* y_k\}$ olarak elde edilebilir (LIN, 2004).

Bu noktada, kodçözücüler içerisinde bu LLR değerlerinin hangi nicemleme ile hangi çözünürlükte tutulacağı bir sorun olarak ortaya çıkmaktadır. Literatürdeki birçok çalışmada, kodçözücü için çözünürlüğün çok yüksek tutulmasının fazla bir avantaj sunmadığı ortaya konmuştur. Ayrıca sadece LLR değerlerinin değil, kodçözücünün çalışırken kendisinin oluşturduğu log-olasılık değerlerinin de hangi çözünürlükte olması gerektiği ve bu iş için kullanılacak toplam bit sayısı da soru işaretleri olarak görünmektedir.

Biz burada şöyle bir yaklaşımı uygun buluyoruz. Log-olasılık değerlerinin tutulması için bir toplam bit sayısı en baştan sabitlenir. Bunun büyük olması elbette iyidir, ancak kodçözücülerin FPGA üzerindeki alanlarını arttırıp hızlarını da düşürür. Eşdağılımlı nicemleme işlemi yaparak tüm olasılıkları q ile belirtilen bir sayıya böldükten sonra elde edilen sayının tamsayı kısmını işlemlerimizde kullanacağız. Bunu tamsayı üzerinden düşünmemizin sebebi FPGA üzerinde sadece bitlerin olması ve her şeyin tamsayılarla çalışacak şekilde hem verimli hem de kolay anlaşılır şekilde ortaya konabilmesidir. Bu durumda, k nolu gözlemdaki LLR değerine karşılık gelecek kullanılacak sayı

$$Q_k^{LLR} = T \left\{ \frac{L_k^c}{q} \right\}$$

olarak elde edilir ki ifadedeki $T\{\}$ fonksiyonu argümanın tam sayı kısmını almaktadır.

Faz kaymasının demodülatör tarafında düzeltildiği bizimkisi gibi bir sistemde, $h = \sqrt{E_s}$ alındığında

$$Q_k^{LLR} = T\{A_k^{LLR}\}, \quad A_k^{LLR} = \frac{2E_s}{N_0q}x + \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0q}n_I$$

olarak elde edilir. Son ifadedeki n_I gürültü kompleks değişkenin reel kısmına denk gelmektedir ve toplam varyansın yarısına sahiptir. A_k^{LLR} ve Q_k^{LLR} değişkenlerinin birer rasgele değişken olduğu aşikardır. $x=1$ durumu altında,

$$E[A_k^{LLR}] = \frac{2E_s}{N_0q},$$

$$\sigma_{A_k^{LLR}}^2 = \frac{2E_s}{N_0q^2} = \frac{E[A_k^{LLR}]}{q}$$

istatistikleri elde edilir. A_k^{LLR} Gauss dağılımına sahiptir. Bu dağılım göz önüne alındığında elde edilecek gözlemin $E[A_k^{LLR}] + 3\sigma_{A_k^{LLR}}$ değerinden daha büyük olma olasılığı 10^{-3} civarındadır.

Aslına bakılırsa max-log-MAP algoritmasında q değerine ihtiyaç duyulmamaktadır. max-log-MAP ile log-MAP algoritmaları arasındaki fark, BCJR içindeki kafes yapısında durum log-olasılıklarının bulunduğu kısımda log-MAP'te

$$\max^*(x, y) = \ln(e^x + e^y) = \max(x, y) + \ln(1 + e^{-|x-y|})$$

işleminin kullanılıp max-log-MAP'te logaritmik faktörünün ihmal edilmesidir. Bu ikisi arasında başarımlar açısından bazı farklar doğal olarak oluşmaktadır. Ancak FPGA üzerindeki hız ve alanla başarımlar arasında bir ödünleşim gözlenmektedir.

Bu açıklamalar ışığında, proje kapsamında şöyle bir nicemleme yöntemi önerdik. Bir paket içindeki tüm log-olasılıklarının mutlak değerlerinin maksimumu *NormMax* isimli değişkenin değerine denk gelecek bir şekilde normalize edilir. Bütün log-olasılıkları bu normalizasyonla kodçözücüye sunulur. max-log-MAP gerçekleştirilmesinde q değerine de ihtiyaç vardır. Bu nedenle, *NormMax* ile normalizasyon için

$$\frac{2E_s}{N_0q} + 3\sqrt{\frac{2E_s}{N_0q^2}} = \text{NormMax}$$

denklemini çözülerek $q = \frac{1}{\text{NormMax}} \left(\frac{2E_s}{N_0} + 3\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \right)$ çözümü elde edilir.

E. max* Yaklaşımı

Sabit noktalı ('fixed point') işlemlere geçildiğinde, özellikle FPGA üzerinde gerçekleştirilecek zaman, \max^* fonksiyonundaki düzeltme eklentisi, $\ln(1 + e^{-|x-y|})$, problem oluşturmaktadır. Düzeltme eklentisi kullanılmazsa MAP çözümleyici max-log-MAP, kullanılırsa log-MAP ismini alır. Log-MAP çözümleyicide düzeltme eklentisinin FPGA gerçekleştirilmesi çok zor ve karışıktır. Bu yüzden bu eklenti bir taramalı tablo ('look-up table', LUT) yardımı ile elde edilir. Çözümleyiciye giren gözlemler nicemlenmiş değerler olduğu için, oluşturulacak LUT değerleri de nicemlenmiş halde olmalıdır. LUT oluşturmada kullanılan fonksiyon ise şöyle tanımlanabilir,

$$LUT(i) = \left\lfloor \frac{\ln(1 + e^{-iq})}{q} \right\rfloor. \quad (18)$$

F. Düğüm (Node) ölçütleri (α^* , β^*) normalizasyonu

Önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi α^* , β^* ölçüt hesaplamaları yinelemeli şekilde yapılmaktadır. Hesaplamalar devam ederken, sabit noktalı sayılar kullanıldığı için, bu ölçütler taşabilir yada küçümenlik durumuna girebilir (underflow). Böyle bir problemin oluşmasını engellemek için α^* , β^* ölçütleri her kafes adımında normalize edilir. Normalizasyon, her kafes adımında hesaplanan α^* değerlerinin maksimum olanının bütün α^* değerlerinden çıkarılması ile yapılır. β^* için de aynı işlem uygulanır.

G. Sabit Noktalı Gösterimde Toplama ve Çıkarma

Kodçözümler, K bitlik gösterim işe gerçeklenmişlerdir. K bit kullanmak ise kullanılabilir sayı aralığını $[-(2^{K-1}-1), 2^{K-1}-1]$ kümesindeki tamsayılara indirgemektedir. Elde edilebilir sayı aralığı değiştiği için yeni bir toplama ve çıkarma işlemi tanımlanmıştır. Yeni toplama işlemi \oplus ile gösterilmiştir ve bu işlemde $2^{K-1}-1$ sayısı pozitif sonsuz ($= \text{poz_sonsuz}$), $-(2^{K-1}-1)$ sayısı ise negatif sonsuz ($= \text{neg_sonsuz}$) olarak kabul edilmiştir.

$$a \oplus b = \begin{cases} \text{poz_sonsuz} & \text{eger } a \geq \text{poz_sonsuz veya } b \geq \text{poz_sonsuz} \\ \text{neg_sonsuz} & \text{eger } a \leq \text{neg_sonsuz veya } b \leq \text{neg_sonsuz} \\ \text{poz_sonsuz} & \text{eger } a + b \geq \text{poz_sonsuz} \\ \text{neg_sonsuz} & \text{eger } a + b \leq \text{neg_sonsuz} \\ a + b & \text{kalan durumlarda} \end{cases} \quad (19)$$

Çıkartma işlemi ise $a \oplus (-b)$ şeklinde gerçekleştirilebilir.

H. Zamanla Değişen Kanalda Kanal Kestircinin Gerçeklenmesi

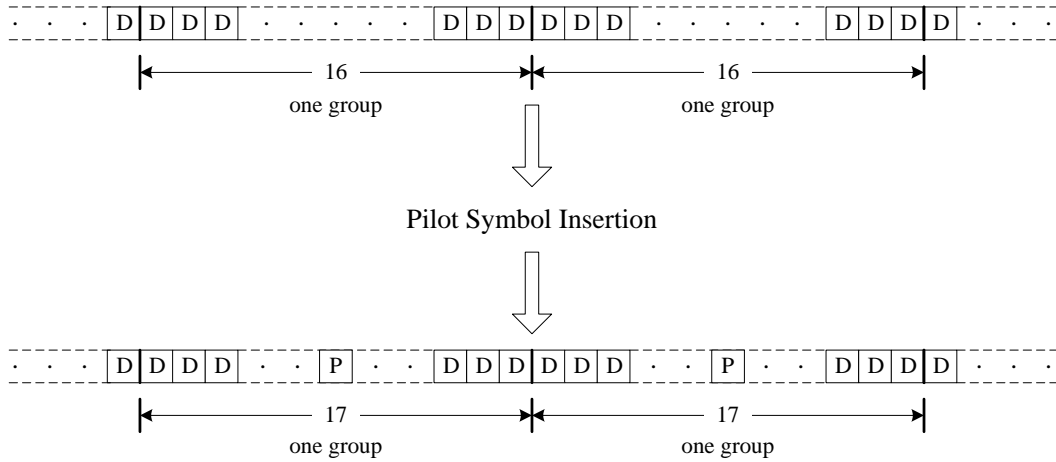
Bu kısımda, daha önce anlatılmış olan 2-yönlü LMS algoritmasının gerçekleştirilmesi anlatılacaktır. Kanal sönümlenme katsayıları Jakes modeline uygun olarak MATLAB'de üretilmektedir. Gürültüsü de eklenen sinyal örnekleri FPGA'ya gönderilmektedir.

Pilot sembol aralığının değerinin 17 olarak kullanılmasına karar verilmiştir. Bu karar verilirken EK 12'deki benzetim sonuçlarından yararlanılmıştır. M ile gösterilen pilot sembol aralığının 17 olarak belirlenmesindeki bir diğer etken de $M-1$ değerinin paket uzunluğu olan 512 değerini bölmesi gerekliliği olmuştur. Paketler, pilotların yerleştirileceği $512/(17-1) = 32$ adet gruba ayrılır ve her grubun ortasına birer pilot sembol yerleştirilir. Pilot sembollerinin eklenmesi sonrasında paket uzunluğu $512 + 32 = 544$ olarak değişmektedir.

Paketteki gerekli yerlere pilot sembollerinin eklenmesi ve çıkarılması için iki adet bileşen görevlendirilmiştir. Toplamda 32 adet pilotun eklenmesi (çıkartılması), bu bileşenlerin girdi ve çıktıları arasında 32 örneklilik bir fark yaratmaktadır. Bu sebeple, girdi ve çıktıların devamlılığı için bu bileşenler içlerinde 32 örneklilik FIFO yapısı içerir. Genel olarak pilot sembol ekleme/çıkarma işlemleri 32 saat periyodluk bir gecikmeye neden olur.

Kanal kestirici tarafında alınan dizi öncelikle evreiçi ('in-phase') ve dördün-evre ('quadrature') bileşenlerine ayrılır. Bu iki bileşene de aynı işlemler paralel ve eşzamanlı olarak uygulanır. İşlemler birebir aynı olduğu için, bu işlemler sadece evreiçi bileşen üzerinden anlatılacaktır. Paralleleştirilmiş turbo kod çözücülerde olduğu gibi, sistemin gerçekleşmesindeki asıl problem bir SISO algoritmanın sabit noktalı aritmetik üzerinde uygulanmasıdır. Bu sebeple, alınan dizi ilk olarak sabit-noktalı bir formata çevrilir. Bu çevirme işlemi sonrasında, gerçek sayılar FPGA içerisine L bitlik gösterimler olarak alınır. Ancak bu diziler karmaşık sayılardan oluştuğu için, işlemleri birbirinden ayırıp paralelleştirmek için bu sayılar reel ve sanal bileşenlerine ayrıştırılır. Bu bileşenler L bitlik sayı sistemiyle ifade edildikten sonra ilk kanal kestirim işlemi devreye girer.

Kanal kestiriminin ilk adımında 'Zero-Forcing' algoritması kullanıldı. Bu algoritmanın tercih edilme sebebi işlemlerin karmaşıklığını ve buna bağlı olarak FPGA üzerindeki kaynak tüketimini azaltmaktır. İlk kestirimdeki kanal katsayı tahminleri pilot sembollerin karşılık olarak örneklerin değerlerinden faydalanılarak gerçekleştirilir. Bu işlem için kipleme olarak BPSK ve pilot semboller için de "1" değeri sabit olarak kullanıldığında, pilot sembollerine karşılık örnekler o andaki kanal sönümlenme katsayısı olarak kaydedilir. Pilot sembolün $M-1$ komşuluğundaki (pilot sembol ile aynı gruptaki) örnekler için de bu sönümlenme katsayısı sabit olarak kabul edilir.



Şekil 19. Pilot sembollerinin eklenmesi.

Yinelemelerde kanal kestirici 2-yönlü LMS algoritmasını uygulayarak kestirimlerini tamamlar. Bu algoritmada β ile gösterilen adım aralığı da kullanılmaktadır. Bu değer sabit noktalı gösterimde 6 bit (1 bit tamsayı kısmı, 5 bit ondalık kısım için) ile ifade edilmektedir. Ancak bu değer her zaman 0'dan büyük olduğu için, tamsayı biti sabit olarak 0'dır. Bu sayı sabit noktalı sistemde "1.5" olarak ifade edilecektir. LMS algoritmasının özyineli yapısında, β değerinin L bitlik bir sayı ile çarpılması işlemi sonucunda oluşacak sonucun tekrar L bit ile ifade edilen alınan dizi örneklemeleleriyle toplanması gerekmektedir. Bu sebeple, ikinci yinelemeden başlayarak sayılar $L+5$ bit ile ifade edilir. Sayılar ilk kez L bitten $L+5$ bite çıkarılırlarken sağ taraflarına ondalık kesimi ifade etmek üzere 5 tane 0'ın eklenmesi ile gerçekleştirilir. Sonraki işlemler bu " $L.5$ " gösterimi üzerinden yapılır. Oluşturulan " $L.5$ " ifadesindeki sayının " 1.5 " gösterimindeki β ile çarpılmasının

sonucu tam olarak “ $(L+1).10$ ” gösterimiyle ifade edilir. Ancak β değerinin tamsayı bitinin 0 olmasından ötürü gösterimin en soldaki tamsayı bitinin bir işlevi yoktur. Oluşan 10 bitlik ondalık kısmın en az ağırlıklı 5 bitinin de atılması sonucu sayı gösterimi tekrar “ $L.5$ ” ifadesine dönüştürülür. Algoritmanın özyineli yapısında çarpım olarak işlemlere dahil olan diğer bir parametre ise $\hat{a}_k^{(q)}$ değeridir. Ancak geri besleme hattı üzerindeki karar kuralı olarak sıfır-bir kararı (hard-decision) kullanıldığı için bu değer $\{-1,+1\}$ şeklinde iki değer alabilir. Bu sebeple, $\hat{a}_k^{(q)}$ çarpımı sadece değerini işaretini değiştirir, sabit noktalı sistemdeki ifadesi üzerinde bit sayısı ile ilgili bir değişikliğe neden olmaz. Özyineli işlemler sırasında “ $L.5$ ”lik gösterime geçilmesine rağmen, kanal kestirimlerinin kaydedilmesi sırasında, kolaylık olması açısından, ondalık kısımdaki 5 bit atılarak L bitlik ifadeler şeklinde kaydetme işlemi gerçekleştirilir.

Kanal kestiriminin süresi gerçekleşme açısından büyük önem taşır. Bu sebeple, sistemin çalışmasını hızlandırmak için çeşitli yöntemler uygulanmaktadır. İlk yineleme içerisinde, pilot sembole denk gelen kanal sönümlenme katsayısı hesaplandıktan sonra komşuluğundaki 16 örnekleme anındaki kestirimlerinin yazılması çift erişimli belleklerin kullanılması sonucu 8 saat periyodunda gerçekleştirilir. Bu da her bir grubun kanal kestirimlerinin belleklere yazılması için 9 saat periyodu (pilot sembolün yazılması için 1, gruptaki diğer semboller için 8 saat periyodu) demektir. 544 bitlik bir paketin ilk kestirimlerinin tamamlanması ise $9 * 544 / 17 = 288$ saat çevrimi sürmektedir. Sonraki yinelemelerde ise ileri ve geri yönlü özyineli işlemlerin birbirinden bağımsız olmasından faydalanarak Merkezden Başa (Center to Top) algoritması kullanılmaktadır. Bu sayede ilk iterasyonu takip eden iterasyonlarda uzunluğu 544 örnek olan bir dizinin işlenmesi $2 * 544 = 1088$ yerine 544 saat periyodu tutmaktadır.

L bitlik evreiçi ve dördün-evre bileşenlerinin, bu kestirimin karmaşık eşleneği ile alınan dizinin çarpılması neticesinde LL değerleri hesaplanarak işlenmek üzere turbo kod çözücüye verilir:

$$LL_k = \frac{2}{N_0} \Re \left\{ r_k \hat{f}_k^{*(q)} \right\} = \frac{2}{N_0} \left(r_{k,I} \hat{f}_{k,I}^{(q)} + r_{k,Q} \hat{f}_{k,Q}^{(q)} \right).$$

LL değerinin hesaplanması aşamasında L bitlik sayıların çarpılması gerekmektedir. Sonucu $2L-1$ bit sayısı ile gösterilebilecek bu çarpım sonrasında, çarpım sonucunun en anlamlı L biti LL değerini ifade etmek üzere kod çözücüye aktarılır. Çarpımın sonucunun L bite indirilmesinin nedeni ise şu şekilde açıklanabilir. Kod çözücüye verilecek olan bu LL ifadesi, kod çözücüye girmeden önce en yüksek değeri NormMax olan K bitlik gösterime geçirilmektedir. Kanal kestiriminin FPGA üzerinde kapladığı alan ve kullandığı kaynak miktarı, gerçekleşmesinde kullanılan sıralı mimari sayesinde gösterimde kullanılan bit sayısının artışından çok fazla etkilenmemektedir ve kod çözücüye göre oldukça basit bir algoritmaya ve daha az bir karmaşıklığa sahiptir. Bu sebeple K değerine oranla daha büyük L değerlerinin kullanılabilmesi mümkündür. Ayrıca, kod çözücü içerisinde kullanılan ölçüt değerlerinin doğru ve daha anlamlı bir şekilde nicemlenebilmesi açısından K değerinden daha büyük bir L kullanılması gerekmektedir. $L > K$ kabullenmesi sonrasında, LL değerlerinin gösterilmesinde $2L-1$ yerine L bit kullanılması kod çözücünün performansı açısından çok fazla farklılık göstermemektedir.

3.4. Diğer Çalışmalar

Diğer çalışmalar kapsamında yapılan çalışmalar projenin içerisinde başlayıp sonradan projeye bağlantıları azalan çalışmalardır. Projenin temeliyle bu çalışmaların ilişkisi az olduğundan Bulgular kısmında bunlara yer verilmeyecektir. Yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar özet olarak burada anlatılacaktır.

3.4.1.MIMO Sistemlerde Sınırlı Hızda Geribesleme Kullanımı

MIMO sistemlerin sağlamış olduğu kapasite artışının pratik sistemlerde elde edilebilmesi için kanal durum bilgisinin (CSI) alıcı ve verici tarafında bir biçimde bilinmesi gerekmektedir. Aksi takdirde, demodülasyon karmaşıklığı çok fazla artmaktadır.

Kanal kapasitesi, yüksek SNR seviyelerinde, CSI'nin verici tarafında bulunup bulunmamasından çok etkilenmese bile, kanal bilgisinin verici tarafında bulunması ile MIMO kanal matrisine tekil değerli ayrışım (SVD) yöntemi uygulayarak, kanalı paralel alt kanallara ayrıştırabiliriz. Yaptığımız çalışmalarda, MIMO noktadan-noktaya kanal kapasitesi, alıcı tarafında kusursuz, verici tarafında ise nicemlenmiş kanal bilgisinin bulunduğu kabul edilerek hesaplanmıştır. Kanal bilgisini alıcı tarafından vericiye aktarmak için sınırlı hızda geri besleme metodu kullanılabilir ve bu da verici tarafında CSI'nin doğruluk derecesini belirler. Teorik çalışmalarımızda ön-kodlayıcıların verici tarafına geri besleme ile gönderildiği durum üzerinde yoğunlaşmış ve kod tablosu Rasgele Vektörel Nicemleme (RVQ) yöntemi ile rasgele biçimde oluşturulmuştur. RVQ yöntemi, nicemleyici kod defterlerinin sonsuz sayıda oluşturulup, bunların ortalama başarımlarının incelendiği bir yaklaşım sunar (LOVE, 2003). Bazı ölçütler yönünden kod tablosunda en yakın bulunan vektör verici tarafına iletilmektedir.

Birleşik güç kısıtlamasının olduğu çoklu kanallarda, düşük SNR seviyelerinde kapasiteyi arttırmak için bütün gücü sadece belli bir grup alt kanallara, yüksek SNR seviyelerinde ise bütün serbestlik derecelerini kullanmak için bütün kanallara güç dağıtılması gerektiği bilinmektedir. Bu sebeple, düşük SNR değerlerinde, paralel alt kanalların sadece çok az bir kısmı kullanılmalı, SNR seviyesi yükseldikçe, haberleşme hızını arttırmak için daha fazla sayıda alt kanal kullanıma girmelidir. Kapasiteye erişmek için kullanılan ortalama alt kanal sayısı SNR'nin artan bir fonksiyonudur. Bu nedenle, belli bir SNR değerinde, kapasiteye erişmek için ön kodlayıcı matrisin tamamını kullanmak gerekli değildir. Onun yerine, en güçlü kanallara karşılık gelen ön kodlayıcı vektörleri verici tarafına göndermek kapasiteye erişmek için yeterlidir. Böylece, geri besleme hızı düşürülebilir. SNR seviyesi yükseldikçe yeni alt kanallar kullanılmak ve geri besleme hızı arttırılmak zorundadır.

RVQ yöntemi, indirgenmiş ön kodlama ile birlikte kullanılabilir. RVQ ile geribesleme yapılan noktadan noktaya MIMO kanallarda alıcı, hem gerçek kanal matrisini hem de nicemlenmiş ön kodlama vektörlerini bilmektedir, fakat verici tarafında ise nicemlemeden dolayı kanal bilgisi tam olarak mevcut değildir. Bu nedenle her bir alt kanalda işaret terimi ile beyaz gürültü terimlerinin yanında nicemlemenin sonucu olarak, diğer alt kanaldan kaynaklanan girişim terimi bulunmaktadır. Bu durumda da, en küçük ortalama kare hata kestirimi (MMSE) ve ardışık girişim yok etme yöntemi ile MIMO kanal kapasitesine erişilebilir.

Yaptığımız teorik çalışmada, kapasiteye erişmek için kullanılan ön kodlayıcıların sayısının çok fazla bir performans kaybına neden olmadan, kanalın ortalama SNR

değerine bağlı olarak azaltılabileceğini, RVQ yöntemi ile noktadan-noktaya MIMO kanalların geri besleme sırasında az sayıda bit kullanılması ile kapasiteye yakın çalıştıklarını gözlemledik. Elde ettiğimiz ergodik kapasite üst sınır ifadesinde matris determinantının ortalaması Leibniz kuralı ve nicemleme özellikleri kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen üst sınır RVQ haricinde birçok farklı nicemleme yöntemi ile de kullanılabilir. Yapılan çalışmalar şu anda tamamlanmış durumdadır. Bu konuda bir adet dergi makalesi (EK 5) ve bir adet konferans bildirisi (EK 16) yayınlanmıştır.

3.4.2. MIMO Sistemlerde Optimal Denkleştirme

MIMO sistemlerde verici antenlerinden gönderilen sinyaller tüm alıcı antenlerinde alınmakta bu da uzaysal girişim sorununa sebep olmaktadır. En yüksek olabilirlik (ML) kuralıyla alıcı tasarımı yapılabiliyorsa da işlem yükünün yüksekliğinden dolayı bu pratikte (basit bazı durumlar haricinde) çok tercih edilmeyen bir yöntemdir. Bunun yerine filtreleme işlemine dayalı sistemler pratikte daha çok kullanılır. Filtreleme işlemiyle girişim azaltıldıktan sonra kipçözme ve kodçözme yapılır.

Yinelemeli yaklaşımlar bu durumda da yüksek başarımlar sağlar. Filtreleme ve kipçözme/kodçözme işlemleri sıra ile yapılarak başarımlar artırılır. Kipçözme/kodçözme işlemlerinden gelen sembollerle ilgili kararlar, karar geribeslemeli denkleştirme (DFE) işleminde kullanılır. Yaptığımız çalışmada yinelemeli DFE yaklaşımını kullandık. Literatürde yapılan çalışmalara katkımız yumuşak kararların, yani sembol olasılıklarının, hesaba katılarak filtre katsayılarının güncellenmesi noktasında oldu. Bu güncelleme ile önemli başarımlar iyileşmesi sağlanarak kanal kesinti olasılıklarına yakın sonuçlar elde edilebilmektedir. Ayrıca bu yaklaşımı iki farklı senaryoya uyguladık.

İlk senaryo bloklararası döndürülmüş sinyal kümesi ('rotated constellation') tekniğini kullanan bir blok sönmlemeli kanal üzerindedir (FABREGAS, 2008). Bloklardaki sembollerin matris halinde yazılıp bir önkodlama matrisi ile çarpılması ile elde edilen döndürülmüş sinyaller her bir bloktan ayrı ayrı gönderilir. Bu yöntemle, önkodlama düzgün yapılarak her sembol tüm bloklara bulaştırılırsa tam çeşitleme kazancı elde edilebilir. Farklı önkodlama matrisleri ve kodlama ile elde edilecek başarımlar da incelendi. Bu çalışmalar EK 8'deki konferans bildirisinde yayınlanmıştır. Bu konuda bir dergi makalesi başvurusunun hazırlıkları devam etmektedir.

Diğer senaryoda tek taşıyıcı-frekans bölgesinde denkleştirmenin (SC-FDE) MIMO kanallarda kullanılması yer almaktadır. OFDM yöntemine alternatif olarak sunulan SC-FDE'de de döngüsel önek kullanılır ancak vericide frekans bölgesinde hiçbir işlem yapılmaz. Buna karşılık alıcıda frekans bölgesinde filtreleme işlemi yapılır. Bu yöntem MIMO kanallara uygulandığında uzaysal girişim sorununun çözülmesi için ayrıca bir filtreleme daha yapılır. Burada yine yukarıda bahsi geçen yinelemeli DFE yaklaşımı kullanıldı. Oluşturulan yapı ve elde edilen sonuçlar EK 11'deki konferans bildirisinde sunulmuştur. Dergi makalesi (EK 19) başvurusu yapılmıştır.

3.4.3. Tepe-Ortalama Güç Oranı Sorunu

OFDM kiplenmesi çok-yollu kanallarda iyi performans göstermesi nedeniyle çok kullanılan bir yöntem haline gelmiştir. Temel olarak, OFDM iletim bandını dik alt-kanallara böler ve bilgiyi bu alt-kanallarda gönderir. Zaman bölgesinde bir OFDM sinyali birbirinden bağımsız olarak kiplenmiş sinüsoidlerin toplamıdır ve bu sinyalin

genliği zaman içerisinde çok büyük değişimler gösterebilir (OCHIAl, 2001). Tepe-ortalama güç oranı (PAPR) bu kipleme tekniğinin en önemli sorunlarından biridir. Yüksek PAPR, g yükselteçlerinin doğrusal olmayan karakteristikleri sebebiyle çeşitli sorunlara sebep olmaktadır.

OFDM kiplemesinde bileşik kaplar ('water-filling', WF) tekniği kanal kapasitesini sağlayan tekniktir (GOLDSMITH, 2005). Bu teknikte altkanalların o anki durumlarına bakılarak hangi altkanala ne kadar g verileceği bulunur ve o güce denk gelen kanal kapasitesini sağlayacak şekilde bir modülasyon tekniği uygulanır. Ancak altkanallara farklı miktarlarda g verilmesinin OFDM'in PAPR'sini daha da arttırdığı yaptığımız çalışmalarda ortaya kondu. WF kullanıldığında ortaya çıkan PAPR normal durumdaki PAPR'ye ancak ortalama SNR büyüdükçe yaklaşmaktadır. Bu alışma EK 17'deki konferans bildirisinde sunulmuştur. Bu çalışmanın asıl amacı MIMO kanallarda WF yaparken karşılaşılacak PAPR sorununu gözlemektir. alışmalar yapılırken aslında yükselteçlerin tepe güç kısıtının çok daha önemli olduğu anlaşıldı. Tepe güç kısıtı altında kapasite üzerine çeşitli çalışmalara proje kapsamının dışında devam edilmektedir.

4. Bulgular

4.1. Paralleştirilmiş Alıcı Yapıları

4.1.1. Evrişimsel Çarpım Kodları (EÇK)

EÇK başarımına serpiştiricinin etkisini öncelikle inceledik. Bunun sebebi ilk çalışmalarımızda Şekil 1'de sunulan serpiştirici kullanmayan yapının oldukça kötü başarımlarına sergilemesidir. Serpiştirici kullanıldığı durumda başarımlar çok iyi hale gelmektedir.

Şekil 20'de EÇK'nın çeşitli serpiştiricilerle bit hata oranı gösterilmektedir. Kafes sonlandırması tüm benzetimlerde kullanılmıştır. Şekilde

C1: serpiştiricinin kullanılmadığı benzetim (Şekil 1)

C2: EÇK için minimum kod uzaklığı analizi ile elde edilmiş analitik

C3: Matris diagonallarını kullanan sarmal yapıdaki serpiştiricinin kullanıldığı benzetim

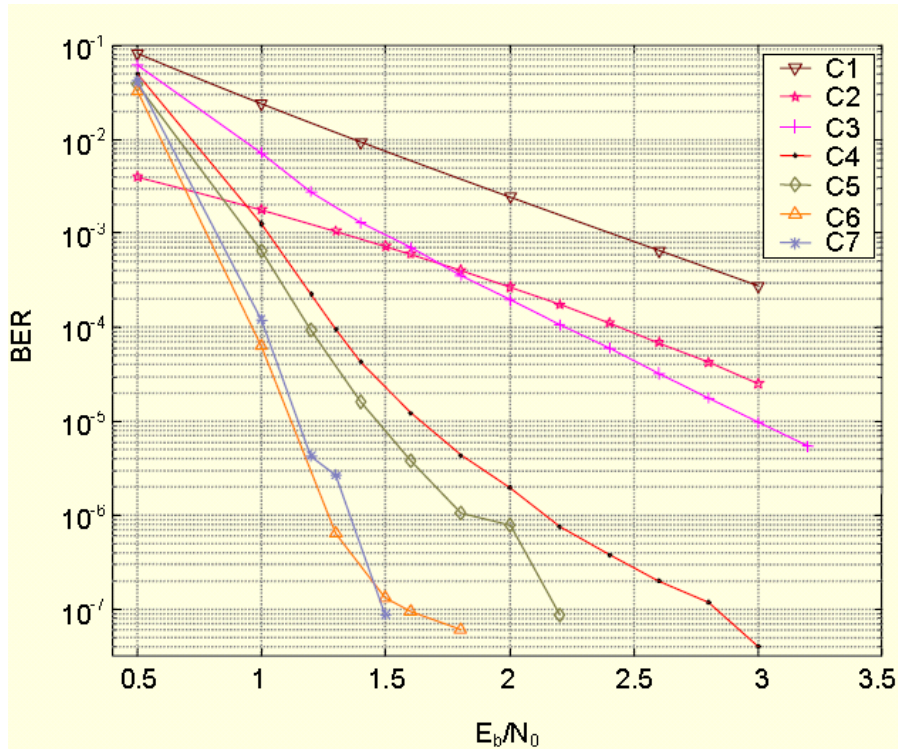
C4: Sadece sütunlara farklı S-rasgele serpiştiricilerin uygulandığı benzetim

C5: (Sarmal+sütun S-rasgele) serpiştiricinin yapıldığı benzetim

C6: Matrisin vektör haline getirilip tek bir S-rasgele serpiştiriciyle işlendiği benzetim

C7: SCCC kodla S-rasgele serpiştiricinin kullanıldığı benzetim

sonuçları sunulmaktadır. Görüldüğü üzere S-rasgele serpiştiriciyle çalışan EÇK, karşılaştırma yapılabilecek SCCC ile aynı başarımları sergilemektedir. Avantajı paralelleştirilmenin doğrudan mümkün olmasıdır.

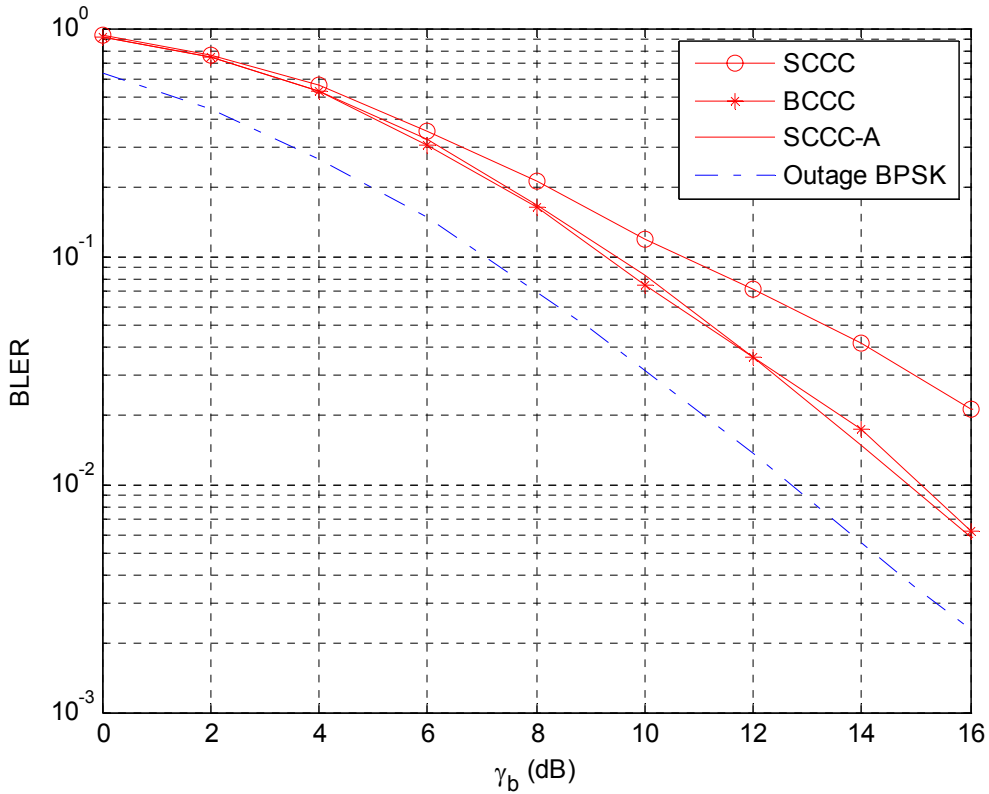


Şekil 20. EÇK'nın çeşitli serpiştiricilerle başarımı

EÇK'da kafes sonlandırması yapılması düşük ağırlıklı kod sözcüklerinin oluşmasını engelleyerek başarımları artırır. Delme işlemi yapılarak kod oranının artırılması ile ilgili çalışmalar da yapılmıştır. Önerilen yapının delmeden diğer kodlar gibi etkilendiği

iç kodlayıcının ürettiği kod sembollerini birinden bağımsız sönümleme seviyelerine gönderebilmek olduğunu ortaya koymaktadır.

Önemli bir not olarak, birden fazla iç kodlayıcı birim kullanmanın devamlı veri akışı olan sistemlerde kodçözme işleminde ortaya çıkacak gecikmeyi ('latency') azalttığı, veya başka bir açıdan BCCC'deki N iç kodlayıcıdan her birinin SCCC-A'daki tek iç kodlayıcının işlediği kafes uzunluğunun $1/N$ 'sini işlemesi itibarıyla daha az bir iş yüküne sahip olduğu açık bir gerçektir. Fakat, bu çalışma kapsamında üzerinde durduğumuz husus, donanım olarak 1 yerine N adet iç kodlayıcı kullanmanın oluşturacağı donanım karmaşıklığının yanı sıra BCCC kodunun iyi çalışmasının sebeplerinin daha iyi anlaşılup sadece serpiştirici tasarımı ile yüksek başarımlar elde edilebilmesidir.



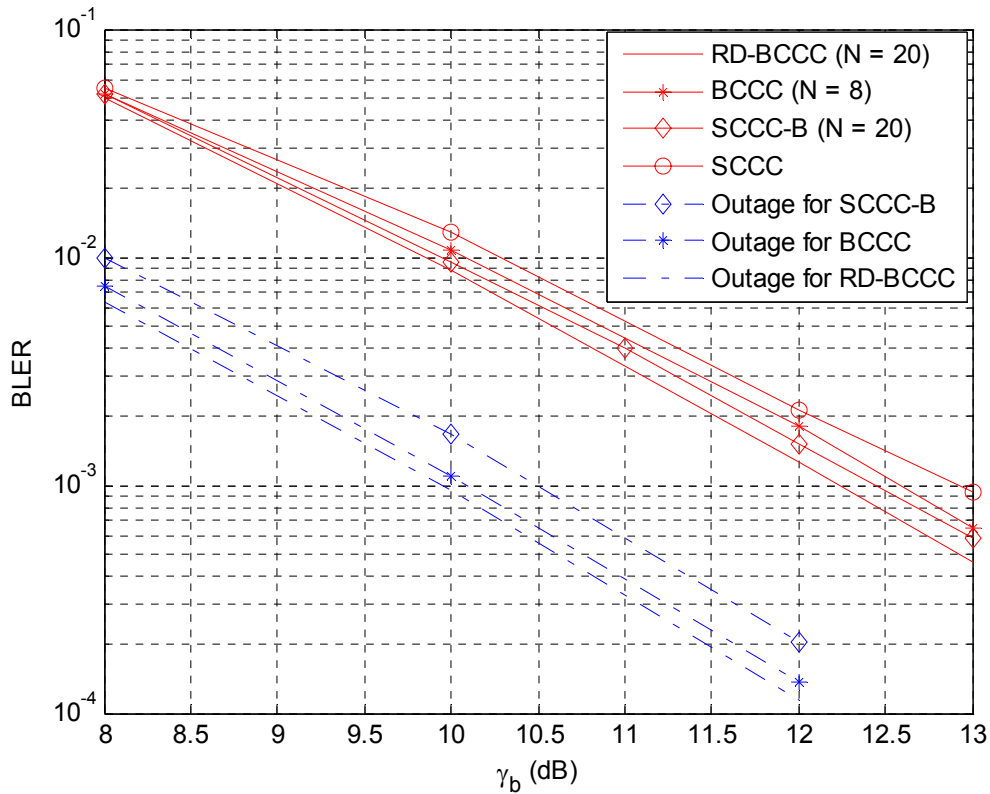
Şekil 22. Blok sönümlenmeli kanalda blok hata oranı (BLER).

4.2.2. Zamanla Değişen Darbantlı Sönümlenmeli Kanallarda Kodlama

Şekil 23'te RD-BCCC, BCCC, SCCC-B ve SCCC kodlarının başarımları her bir koda ait hizmet kesintisi⁶ ('outage probability') grafikleriyle karşılaştırılmıştır. Kodların küçük farklarından dolayı kodlama oranlarında oluşan fark sebebiyle hizmet kesinti

⁶ Kanalın hizmet kesintisi olasılığını incelemek, buradaki ergodik olmayan kanal için doğru yöntemdir. Bu incelemeye bir örnek EK 9'daki çalışmamızda verilmiştir. Orada yararlanılan literatürdeki çalışmaların dayanakları tam olarak geçerli değildir. Ancak, bu hesapların kapasiteden ne kadar uzakta olabileceğimize dair bir fikir verdiğini en azından kendi benzetimlerimizde gözlemlediğimizden bahsi geçen yaklaşımı bu çalışmada kullandık. Bu konu, bilgi kuramına dayalı başlı başına bir çalışma alanıdır. Projenin dışında tutarak, bu konuda çalışmalarımıza şu anda devam etmekteyiz. O çalışmada Polyanskiy, Poor ve Verdu tarafından 2008 ISIT konferansında sunulup sonrasında IEEE Transactions on Information Theory dergisine gönderilen "Channel Coding Rate in the Finite Blocklength Regime" çalışmasından yararlanıyoruz.

olasılıklarında ufak farklılıklar vardır. Veri bit sayısının 98, normalize edilmiş Doppler frekansının $f_D T_s = 0,01$ (T_s : sembol periyodu) olduğu şekildeki sistemle ilgili ayrıntılar EK 9'dan takip edilebilir. Burada alt kanal blokları sayısının (N) uygun bir şekilde seçilmesi gerektiğini söylemeliyiz. Başarım eğrileri, her bir kod için en yüksek başarımları sergileyen N sayısı için çizilmiştir. Görüldüğü üzere BCCC alışılacılmış SCCC kodundan daha iyi bir başarımları sergilerken rasgele sembol dağıtımını tercih eden RD-BCCC diğerlerine göre daha yüksek başarımları elde etmiştir. RD-BCCC'nin daha az karmaşıklık seviyesindeki eşi olan SCCC-B'nin ise daha önce önerilen kodlardan kendi hizmet kesintisi grafiğine diğerlerinden daha yakın olduğundan daha iyi çalıştığı görülmektedir.

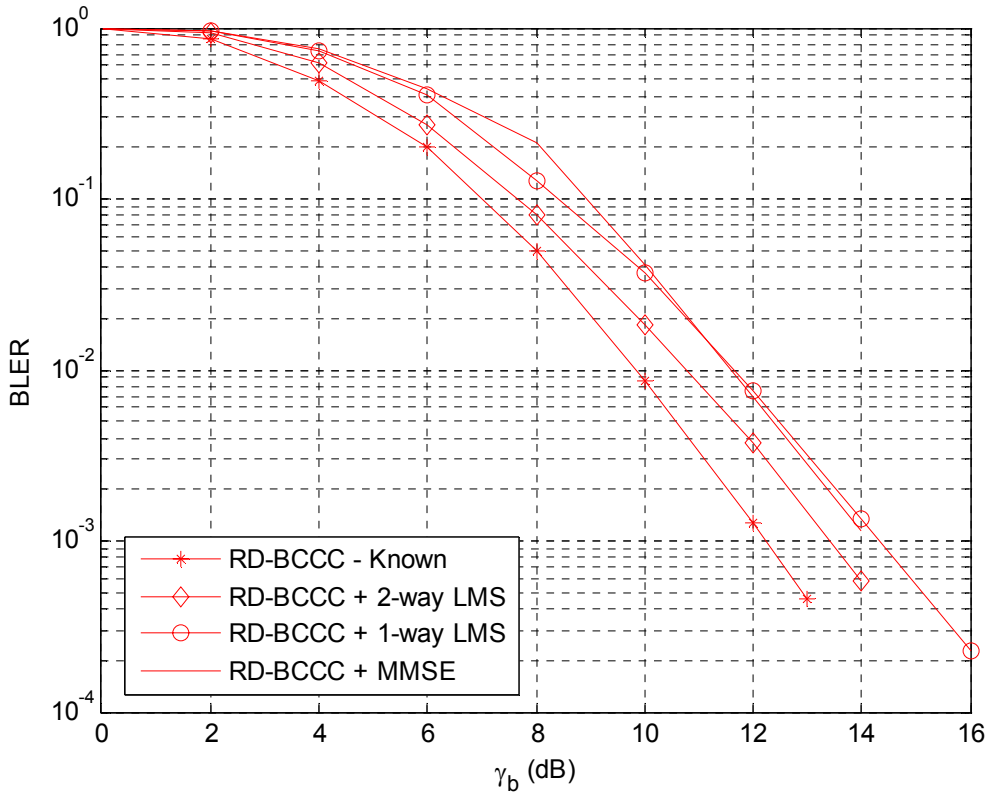


Şekil 23. Zamanla değişen sönümlenmeli kanalda blok hata oranı (BLER).

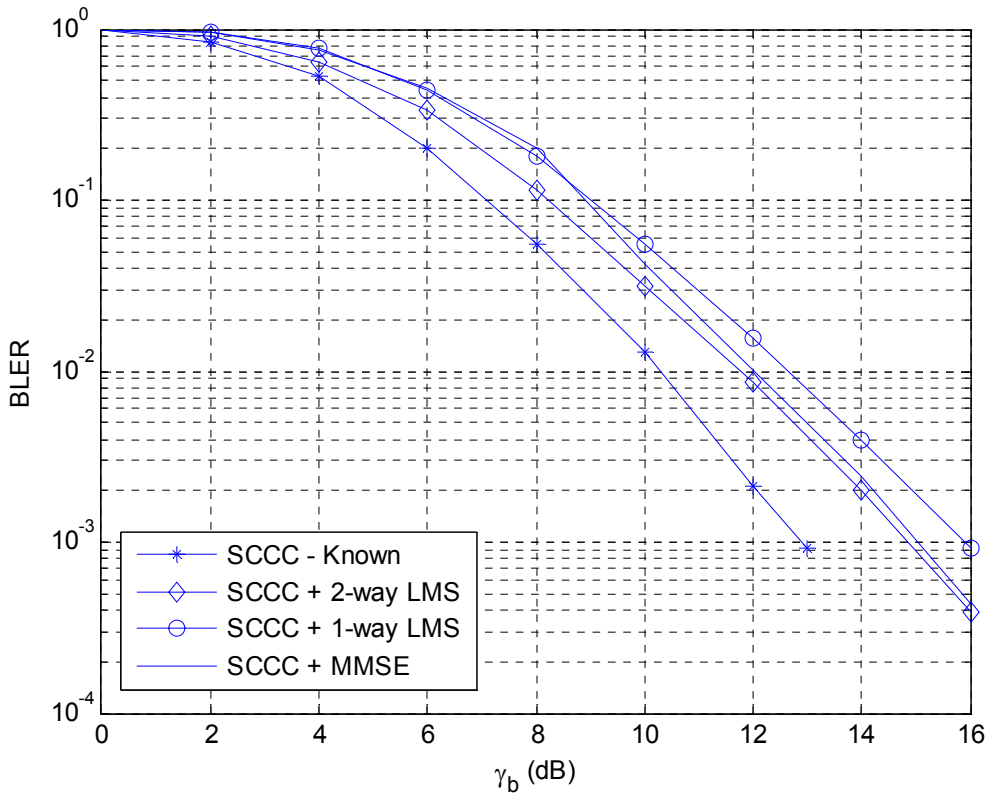
Bu sonuçlar ışığında hem blok hem de zamanla değişen sönümlenmeli kanallarda iyi başarımları sergileyen birkaç kod yapısı elde etmiş olduk.

4.2.3. LMS Kullanan Yinelemeli Kanal Kestirimi Yöntemi

Önerilen yeni algoritmanın başarımları, RD-BCCC ve SCCC kodlarının yumuşak karar geri besleme mekanizması ile birlikte zamanla değişen darbantlı sönümlenmeli bir kanalda çalıştırılmasıyla Şekil 24 ve Şekil 25'teki gibi elde edilmektedir.



Şekil 24. Normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0,01$.



Şekil 25. Normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0,01$.

Sembol aralığı $M = 11$, filtre genişliği $K = 21$ ve bilgi sembol uzunluğunun 100 olarak seçildiği bu benzetimlerde 2-yönlü LMS algoritmasının MMSE filtrelerinin kullanıldığı konvansiyonel algoritmaya göre daha az karmaşıklığa sahip olmanın yanında daha yüksek bir performansa sahip olduğu görülmektedir⁷. Ayrıca, daha önceki çalışmalarda önerilen tek yönlü LMS algoritmasının kestirim başarımının yüksek olmadığı ve kod seçimine göre bu başarımın daha da azalabileceği de görülmektedir.

Bununla birlikte, zamanla değişen sönümlenmeli kanallar için önerilen RD-BCCC kodunun var olan SCCC koduna göre, kestirim algoritmaları ile beraber çalışıldığı durumda daha yüksek başarımlar sağlanması da önemli bir gözlem olarak değerlendirilebilir. Böylece kullanılan kodun da kanal kestiricisi ile uyumlu çalışmasının önemli olduğu ortaya çıkmaktadır.

Ortaya konan yöntemin tek antenli sistemlere uygulaması EK 12'deki, çok antenli sistemlere uygulaması

EK 10'daki konferans bildirimleriyle yayınlanmıştır. 2-yönlü LMS yöntemi çok antenli sistemlerde de yüksek başarımlar sergilemektedir.

Bu konuda bir adet dergi makalesi yazılarak yayın için başvuruda bulunulmuştur. Yayın kabul edilmemiş olmakla beraber, hakemler tarafından oldukça cesaret verici yorumlarda bulunularak 2-yönlü LMS algoritmasının analizine yer verilmesiyle tekrar başvuru istenmiştir. Bu analiz ile ilgili yaptığımız çalışmalar aşağıda kısaca özetlenmektedir. Henüz yazımı tamamlanmadığından burada makaleye yer verilemeyecektir.

Uyarlamalı diğer algoritmalarda olduğu LMS algoritmasının performansı da MSE değeri ile ölçülebilir. Bu değer analitik olarak hesaplanması, zamanla değişmeyen kanallar için LMS algoritmasının bulunduğu ilk yıllarda yapılmıştır. Bu analiz, zamanla değişen kanallar için ise ilk olarak (WIDROW, 1976)'da yapılmıştır. Burada, zaman bölgesinde bir hesaplama gidebilmek amacıyla Jakes sönümlenmeli kanal modeli yerine tek kutuplu AR(1) sürecinden faydalanılmıştır. (PROAKIS, 1995-2) ise, bu hesaplamayı yaparken haberleşme sistemlerinde sıkça kullanılan Jakes sönümlenmeli kanalı doğrudan kullanmıştır. Bunu yapabilmek amacıyla, bütün işlemler zaman bölgesi yerine frekans bölgesinde gerçekleştirilmiştir.

Zamanla değişen kanallarda LMS algoritması için hesaplanan MSE değeri, iki farklı ifadenin toplamı olarak düşünülür. Bunlardan ilki, kanalın hiç değişmediğinin varsayıldığı durumda hesaplanan ve basitleştirilmiş şekli (WIDROW, 1976)'de verilen ifadedir. İkincisi ise, kanaldaki değişimden doğan gecikmeden kaynaklanmaktadır. Bir başka deyişle, zamanla değişen kanallarda LMS algoritması işletilirken, her bir zamandaki kanal katsayısı hesaplamasında bir önceki zamanda hesaplanan hata değeri kullanılmaktadır.

Gerek (WIDROW, 1976) ve gerekse de (PROAKIS, 1995-2)'de izlenen yolda en önemli basamak, takip edilen kanalın kendisi ile kestirimi arasındaki hatayı, kanalın kendisi cinsinden ifade etmek için kullanılan transfer fonksiyonunun hesaplanmasıdır.

⁷ Bu hatalı bir sonuç gibi ilk bakışta görünebilir. Neden, MMSE filtrelerinin tüm paket boyunca çalışmayıp $K=21$ uzunluğunda olmasıdır. Tüm paket boyunca çalışan bir MMSE filtresi daha iyi sonuç verecekti.

Klasik LMS algoritması için bu hesaplama daha önce bahsi geçen çalışmalarda yapılmıştır. Bu çalışmada ele alınan 2-yönlü LMS algoritması için transfer fonksiyonunun hesaplanması, algoritmanın üzerinde çalıştığı bloğun başı ile sonu arasındaki zaman farkının dikkate alınarak frekans bölgesinde ifade edilmesiyle mümkün olmuştur. Bu çalışma tamamlandığında, 2-yönlü LMS algoritmasının temel dinamikleri, frekans bölgesi üzerinde ifade edilecek ve böylelikle en küçük MSE değeri matematiksel olarak da hesaplanabilecektir. İlk sonuçlarımıza göre, 2-yönlü LMS algoritmasının MSE değerleri bu yöntemle analitik olarak doğruya oldukça yakın şekilde elde edilmektedir. Böylece 2-yönlü LMS algoritmasının LMS'e olan üstünlüğü analitik bir şekilde gösterilmiş olmaktadır.

4.3. Gerçekleme

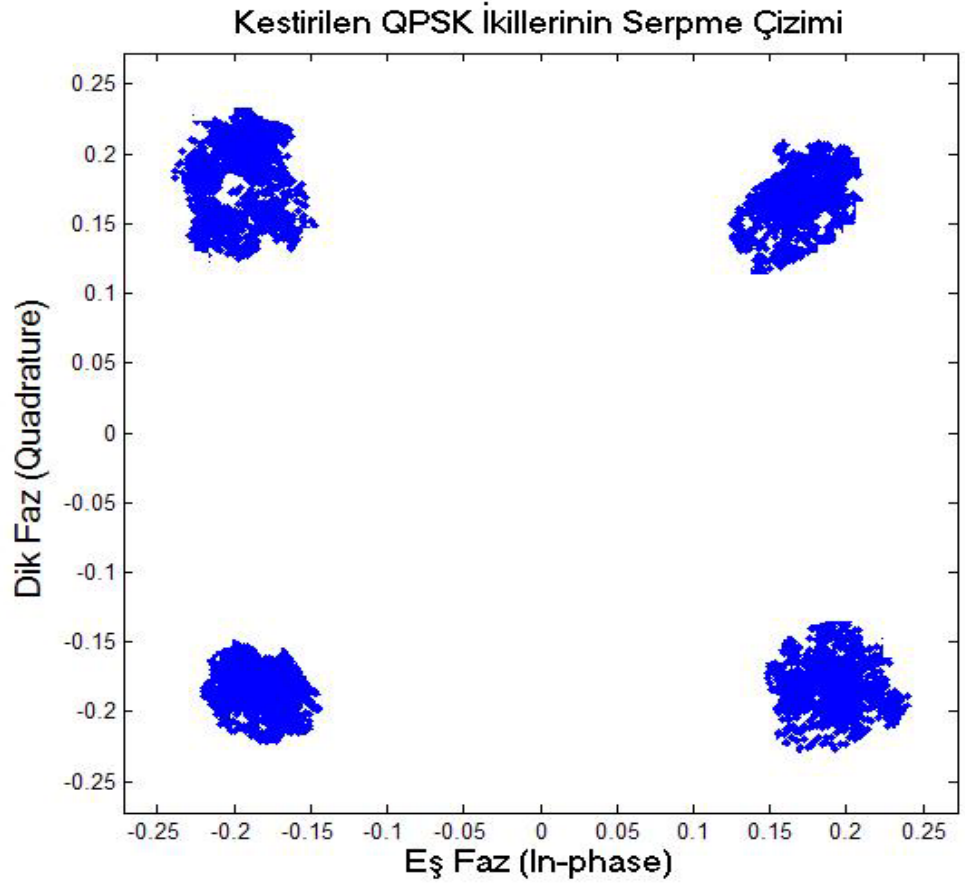
4.3.1. Fiziksel Kanalı Kullanan Test Düzeni

A. Verici Alt Sistemi

Yapılan testlerde QPSK kiplemesinin başarılı bir şekilde oluşturulduğu temelbanttaki sinyalin incelenmesi ile anlaşıldı.

B. Alıcı Alt Sistemi

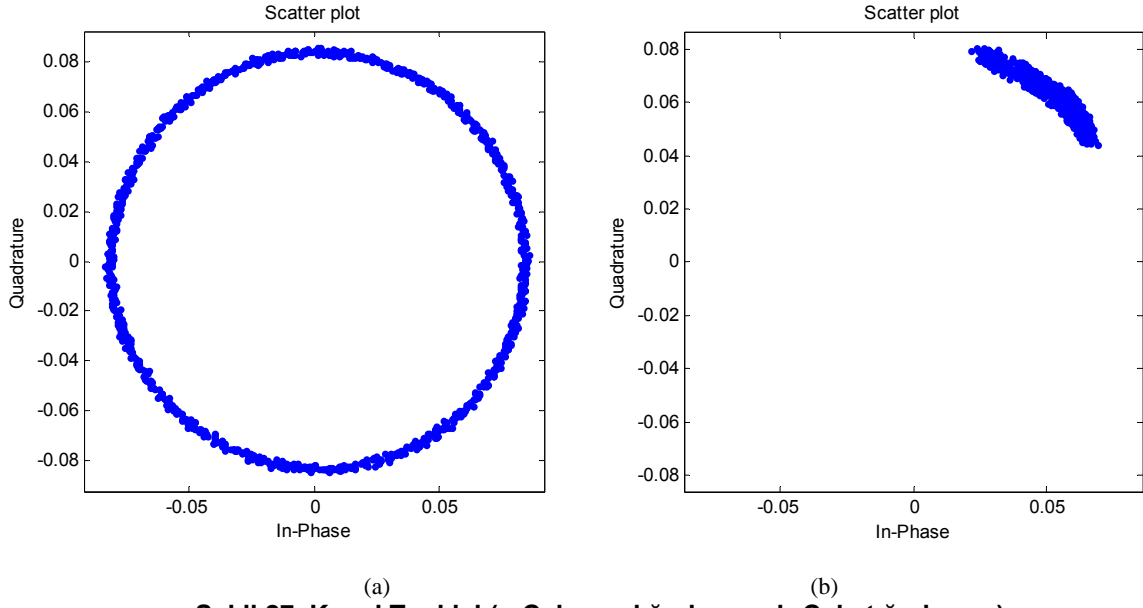
Eniyi örnekleme anı bilgisini aldıktan sonra her 3 örnekte bir kez faz kayması ve genlik kazancı düzeltilmiş I ve Q kanalı imleri üzerinde, kullanılan modülasyon tipine göre simge belirleme işini yapan 'İkil/Simge Örnekleme' birimi, vericinin gönderdiği bit değerlerini kestirme işini tamamlamış olur. QPSK modülasyon/demodülasyon sonuçlarını FPGA'dan alarak yaptığımız denemelerde 32-bit uzunluktaki veri paketlerini başarıyla aldığımızı MATLAB ortamında gözlemledik. Çalışmalarımızda elde ettiğimiz bir QPSK çizgesi Şekil 26'da görülmektedir.



Şekil 26. Bit örnekleme biriminin örneklerini aldığı IQ iminin çizgesi.

C. Taşıyıcı Frekans Kaymasının Kestirimi

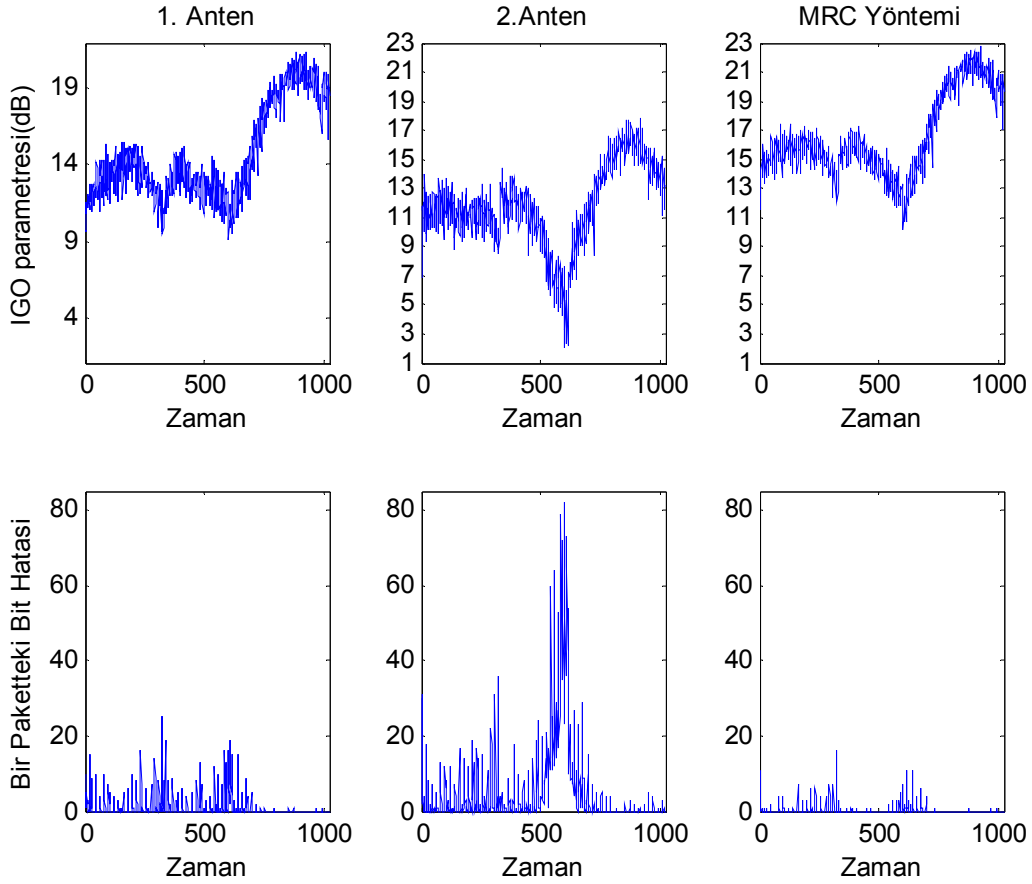
Şekil 27'de taşıyıcı frekans kaymasını kestirimin yapıldığı ve yapılmadığı durumlardaki kanal tepkisi verilmiştir. Şekilde 1000 adet ardışık pakette ölçülen kanal tepkileri çizilmektedir. Bu şekilde de görüldüğü üzere önerilen yapı fazda oluşan kaymayı büyük ölçüde azaltmaktadır. Paketler boyunca kanal tepkisi fazla değişime uğramamaktadır.



Şekil 27. Kanal Tepkisi (a-Çalışmadığı durum, b-Çalıştığı durum).

D. Alıcı Çeşitlemesi Çalışmaları

Zamanla değişen bir kanalda (alıcı antenler hareket ettirilerek bu durum sağlanmıştır) 1. anten ve 2. anten için her bir pakette (1024 bit) oluşan bit hata sayısı ve SNR bir deneyde kaydedildi. Şekil 28'deki grafikler elde edilmiştir.



Şekil 28. SNR'nin (şekilde İGO) zamanla değişimi ve Bit Hata Sayısı.

Şekil 28'deki grafikler iki satır, üç sütundan oluşmaktadır. Birinci satırın ilk iki sütunu 1. anten ve 2. antenin gördüğü SNR değerlerini göstermektedir. Bu grafikler, aynı satırın üçüncü sütununda yer alan MRC yöntemi sonucunda elde edilen SNR parametresiyle karşılaştırıldığında anlaşılmaktadır ki iki antenden biri daha düşük SNR gördüğünde diğeri onun açığını kapatmaktadır. Şekil 28'deki grafiklerin ikinci satırında da 1024 bit uzunluğundaki paketlerde oluşan bit hata sayıları görülmektedir. SNR parametresindeki azalmalar ve bit hata sayısındaki artmalar arasında güçlü bir paralellik gözlenmektedir. MRC yöntemi sonucunda oluşan bit hata sayısındaki azalma da kayda değerdir. Elde edilen bütün sonuçlar göstermiştir ki alıcı tarafta ikinci antenin eklenmesi ve MRC yönteminin uygulanması anlık ve ortalama BER ve SNR değerlerini iyileştirmiştir. Sistemin genel performansı artmıştır ve sistem derin sönümlemelere karşı daha az kırılğan olmuştur. Bu da iki anten kullanımının getirdiği çeşitlemeyi göstermektedir.

4.3.2. Kodçözücü ve Kanal Kestirici Gerçekleşmesi

A. Bellek Yüğü

Kanaldan alınan gözlemler kodçözücüye verilmeden önce FPGA üzerindeki bellek bloklarına (block RAM) kayıt edilmelidir. Paralleştirilmiş turbo kod ve RA kodçözücüleri için farklı bellek yapıları vardır.

a. Turbo kodçözücünün bellek yapısı :

Eğer N tane kodçözücü paralel şekilde çalışıyorsa bu çözümleyicileri beslemek için N tane bellek bloğı alınan *veriye denk gelen gözlem dizisi* için kullanılır. N tane blok *üst kodlayıcı yığının kodlanmış bitlerine*, N blok da *alt kodlayıcı yığının kodlanmış bitlerine denk gelen gözlem dizileri* için kullanılmalıdır. Ayrıca serpiştirici bilgisinin saklanması için de N tane bellek bloğına ihtiyaç vardır.

b. Repeat Accumulate Kod çözümleyicisi hafıza yapısı :

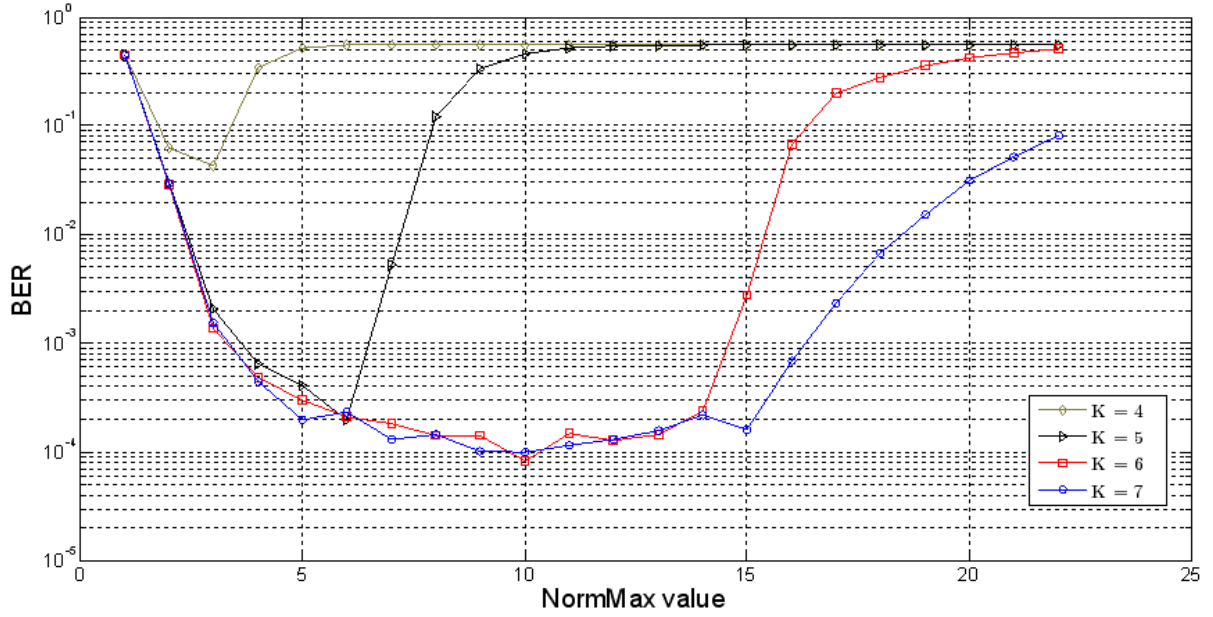
N tane paralel çalışan MAP kodçözücünün kullanacağı gözlem dizileri için N tane bellek bloğına ihtiyaç vardır. Turbo kodun aksine *veriye denk gelen gözlemler* RA kodlarında kullanılmadığı için bu kısma bellek ayırmak gerekmez. Serpiştirici bilgisini saklamak için N tane hafıza bloğına ihtiyaç vardır.

İşlemler yapılırken hesaplanan olasılık değerleri de bellek bloklarında saklanır. Her MAP çözümleyici önsel olasılık bilgisine (L_a) ihtiyaç duyar ve logaritmik-olasılık oranı (LL) ve dışsal bilgi (extrinsic information) (L_e) hesaplar. İkinci MAP kodçözücü kümesinde ise bir önce hesaplanan L_e değeri L_a olarak işleme katılır. Bu bilgilerin de hafızaya kaydedilmesi ihtiyacı her iki çözümleyici tarzı için fazladan $3N$ tane bellek bloğı ihtiyacı doğurur. Anlatılanların hepsini toplarsak turbo kodçözücüsü $7N$, RA kodçözücüsü $5N$ tane bellek bloğına ihtiyaç duymaktadır.

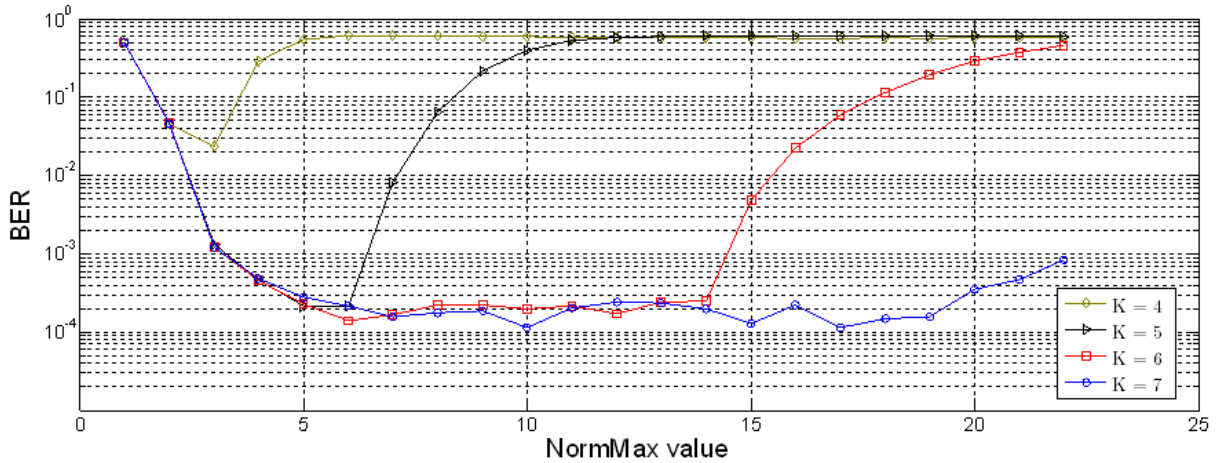
B. Kodçözücü ile İlgili Sonuçlar

Öncelikle kullandığımız FPGA platformunun Xilinx ML402 Virtex-4 SX Evaluation Platform olduğunu belirtmek istiyoruz. Bu şu anki FPGA teknolojisinde hem hız hem de büyüklük olarak orta kapasitede bir platforma denk gelmektedir.

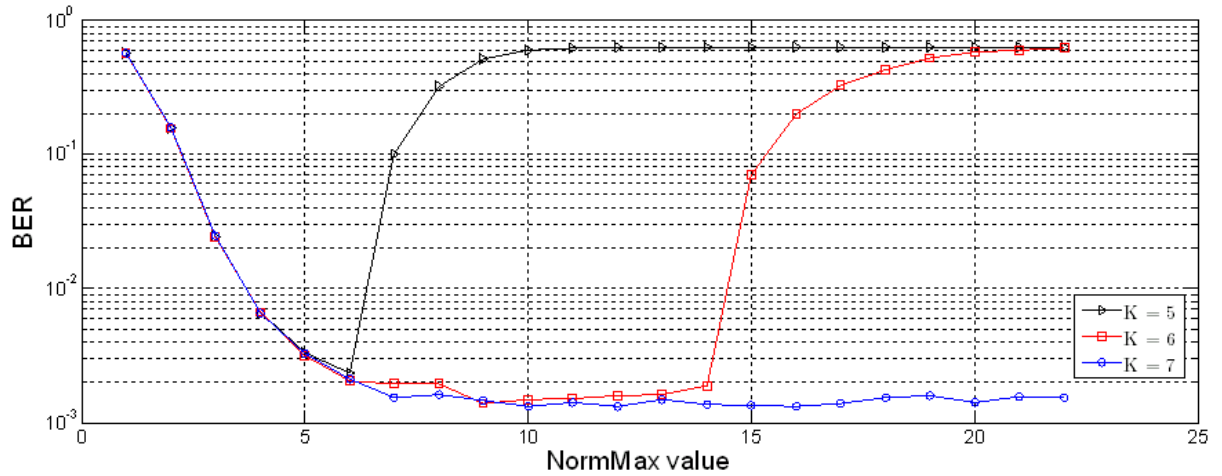
NormMax değerinin seçimi kodçözümlerinin başarımını önemli ölçüde etkilemektedir. Küçük bir değer seçilmesi bilgi kaybına sebebiyet verirken, büyük seçilmesi ise hesaplamalarda çabucak doyum ('saturation') değerlerine ulaşmaya sebep olur. Şekil 29, Şekil 30, Şekil 31'de bu etki gösterilmiştir. Şekiller her biri 160 bitlik bilgi dizisinden oluşan 6000 paketin çözülmesi ile elde edilmiştir. Bu sırada ortam bit sinyal gürültü oranı 2,6 dB'dir. Şekillerde ayrıca kodçözümlerde kullanılan bit sayısının (K) da etkisi gösterilmiştir. Dört adet MAP kodçözümlüsü paralel çalıştırılmıştır ($N=4$).



Şekil 29. Max-log-MAP çözümleyici kullanan 1/3 oranlı paralelleştirilmiş turbo kodçözümlüsünün başarımında NormMax değerinin etkisi.

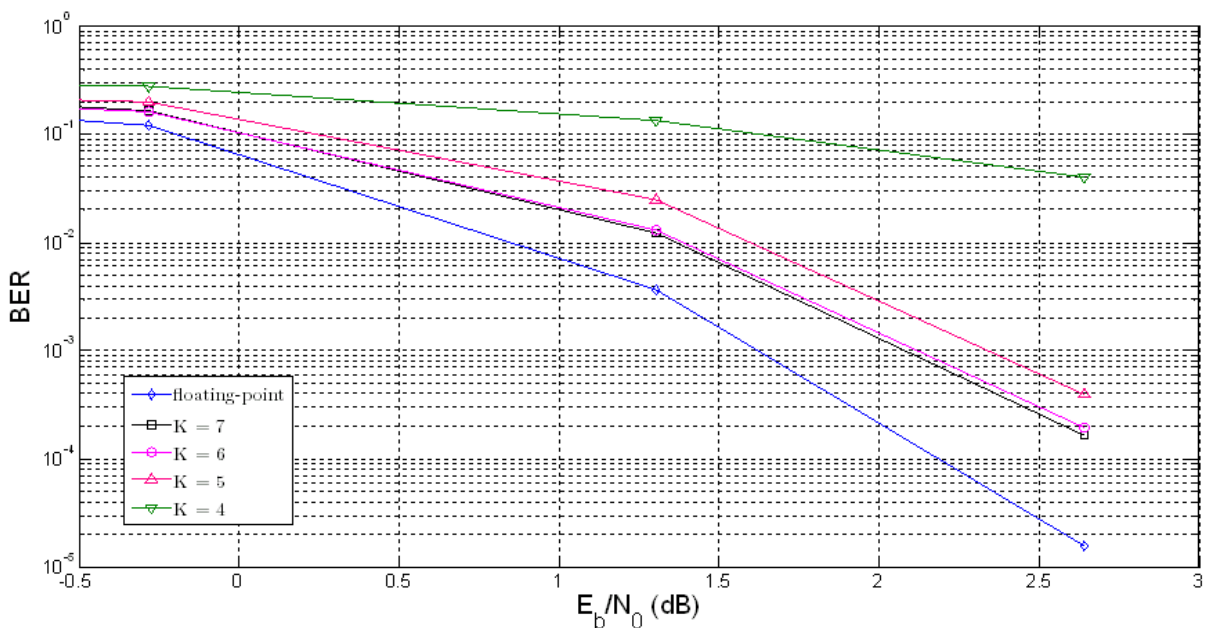


Şekil 30. log-MAP çözümleyici kullanan 1/3 oranlı paralelleştirilmiş turbo kodçözümlüsünün başarımında NormMax değerinin etkisi.

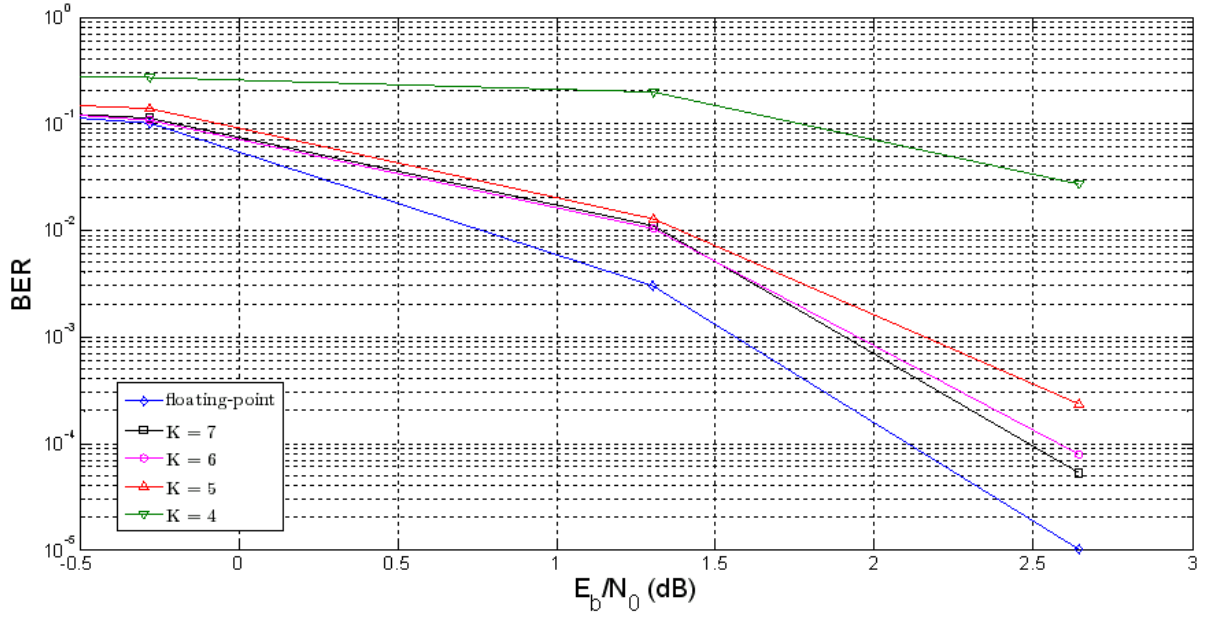


Şekil 31. 1/3 oranlı paralelleştirilmiş RA kodçözücüsünün başarımında NormMax değerinin etkisi.

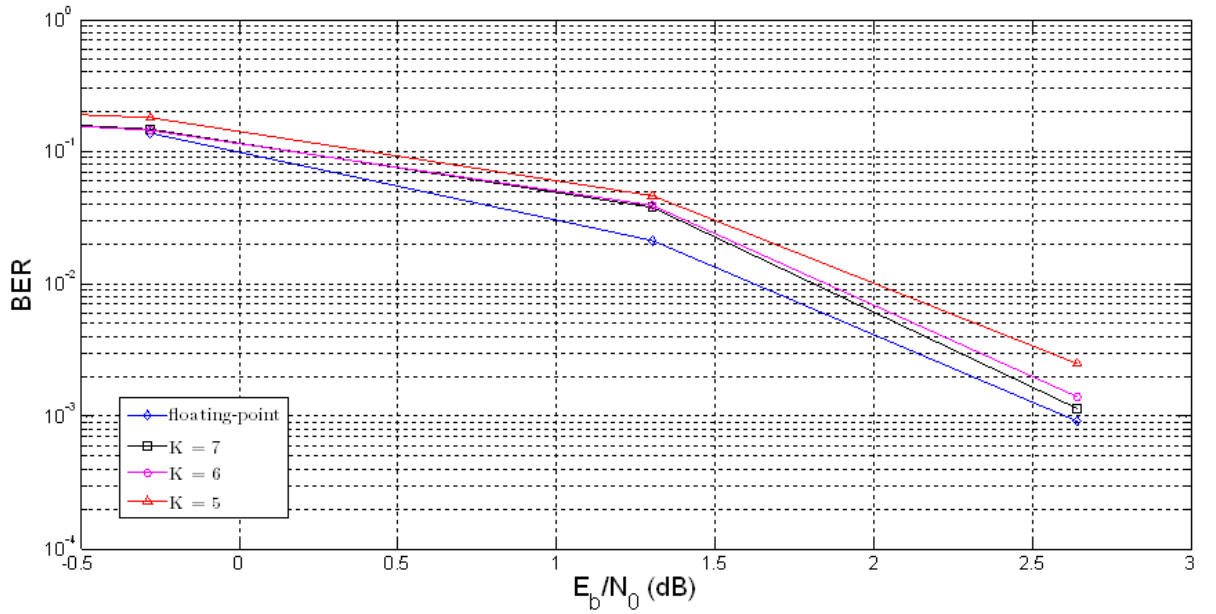
Kod çözme işleminde başarıma etki eden diğer bir parametre de ölçüt değerlerinin ifade edilmesinde kullanılan bit genişliği olan K değeridir. Büyük bir K değerinin seçilmesi, kodçözücünün başarımını arttırırken aynı zamanda FPGA üzerinde daha fazla alan teşkil etmesine ve daha yavaş bir saat hızında çalışabilmesine neden olmaktadır. K değerinin, yukarıdaki şekillerde geçen 3 kodçözücünün başarımına etkisi aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir. Bu başarımların karşılaştırmalarında, kullanılan her bir K değeri için en iyi sonucu veren $NormMax$ değerleri kullanılmıştır. Karşılaştırma işlemi için bahsedilen kodçözücünün kayan noktalı ('floating-point') gerçekleşmesi durumunda gösterdiği başarımlar baz alınmıştır. BER eğrileri 2000 adet 512 bit uzunluğundaki paketin kodçözme işleminden geçmesi sonrasında elde edilmiştir ve paralelleştirilmiş turbo (PDTC) kodçözücüler için 4, paralelleştirilmiş RA (PDRAC) kodçözücüler için 8 yineleme sabit olarak tutulmuştur.



Şekil 32. PDTC kodçözücüsünün max-log-MAP algoritmasıyla gösterdiği başarımlar.



Şekil 33. PDTC kodçözücüsünün log-MAP algoritmasıyla gösterdiği başarımları.



Şekil 34. PDRAC kodçözücüsünün log-MAP algoritmasıyla gösterdiği başarımları.

Elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde, K değerindeki artışın kodçözme başarımlarını kayan noktalı gerçeklemedeki başarımlarına yaklaştırdığı görülmüştür. Bu sebepten, istenen bit hata oranına göre bir K değeri ataması yapılması gerekmektedir. Başarımdaki değişimler incelendiğinde K değişkeninin etkisi “6” değerinden itibaren belirgin bir şekilde azalmıştır. $K = 6$ seçimi şu an için en uygun seçim görünmektedir. Bu seçim kayan noktalı gerçeklemede göre, PDTC kodçözücülerini için 0,5 dB, PDRAC kodçözücülerini için ise 0,3 dB gibi kabul edilebilir bir kayba neden olmaktadır.

Paralleştirilmiş turbo kodçözümler iki farklı mimari ile donanımsal olarak gerçekleştirilmiştir. Bunları *Mimari-A* ve *Mimari-B* olarak adlandırdık. *Mimari-A* BCJR modülünün FPGA gerçekleştirilmesinde çok fazlaca tümeleşik mantık ('combinatorial') kullanılmıştır, yani bütün toplama, çıkarma normalizasyon gibi işlemler bir saat periyodunda yapılmıştır. Dolayısıyla 42-bitlik bir dizinin çözülmesi bu mimari ile 42 saat periyodu sürmektedir. *Mimari-B*'de ise ardışık düzen ('pipelining') mantık işlemleri kullanılmıştır. Ölçüt değerleri toplama ve çıkarma işlemleri yapılırken sonuçlar flip-floplar vasıtasıyla birer kez ötelenmiştir. Bu öteleme kodçözmeye 4 saat periyodu kadar gecikme getirirse de toplamda devrenin saat frekansı yükseltilmiştir. Bu mimari ile 42-bitlik bir dizi 46 saat periyodu kadar sürede çözülür. Tablo 1 ve Tablo 2'de değişik *K* değerleri ile paraleleştirilmiş turbo kodçözümler tasarımı sonucu elde edilen sentez sonuçları verilmiştir. Tablo 3'te ise RA kodçözümlerinin sentez sonuçları verilmiştir. RA kodçözümleri sadece *Mimari-B* ile tasarlanmıştır. Tablolarda maksimum saat frekansları MHz biriminde yazılmıştır.

Tablo 1. Max-log-MAP kodçözümleri kullanan PDTC için sentez sonuçları

Bit gösterim sayısı (bit)	Kullanılan slice adedi	Slice kullanım yüzdesi (%)	Maksimum saat frekansı
<i>Mimari-A</i>			
4	6070	39	50,383
5	6104	39	49,873
6	6570	42	47,645
7	7174	46	43,841
<i>Mimari-B</i>			
4	6347	41	87,253
5	6501	42	86,963
6	6994	45	86,949
7	7537	49	85,704

Tablo 2. log-MAP kodçözümleri kullanan PDTC için elde edilen sentez sonuçları

Bit gösterim sayısı (bit)	Kullanılan slice adedi	Slice kullanım yüzdesi (%)	Maximum saat frekansı
<i>Mimari-A</i>			
5	8179	53	36,288
6	10628	69	31,522
7	11309	73	31,352
<i>Mimari-B</i>			
5	8663	56	65,557
6	10595	68	60,070
7	10807	70	55,491

Tablo 3. log-MAP kodçözümleri kullanan PDRAC için elde edilen sentez sonuçları

Bit gösterim sayısı (bit)	Kullanılan slice adedi	Slice kullanım yüzdesi (%)	Maximum saat frekansı
5	5019	32	68,755
6	6046	39	68,180
7	6219	40	64,218

Log-MAP ile max-log-MAP kodçözücüler arasındaki bu büyük farkın en büyük sebebi max^* işleminde kullanılan taramalı tablodur. q değeri kullanılarak oluşturulan taramalı tablo fazla alan kaplamakta ve uygulanabilir saat frekans hızını da düşürmektedir.

Kod çözme işlemindeki büyük miktardaki gecikmeler, bahsi geçen yinelemeli kodçözücüler için büyük sorun teşkil etmektedir. Ancak, bu yapıların paralelleştirilmesiyle gecikmenin en aza indirgenmesi amaçlanmıştır. Gecikme miktarlarını PDTC ve PDRAC kodçözücüler için ayrı ayrı aşağıdaki şekilde formüle edebiliriz.

PDTC kodçözücüler için:

$$\text{Mimari-A: } \tau = \frac{D}{N} 2I$$

$$\text{Mimari-B: } \tau = \left(\frac{D}{N} + 6 \right) 2I$$

Formüllerde geçen D terimi bir paket içerisindeki bilgi biti sayısını, N paralelleştirme sayısını, I ise yineleme sayısını ifade etmektedir. $\frac{D}{N}$ terimi BCJR

kodçözücüsünden kaynaklanan gecikmeyi verir. *Mimari-B*'de bu terimin 6 ile toplanmasının nedeni ise, o mimaride kullanılan ardışık düzenin etkisidir. Bu gecikmenin 4'ü BCJR kodçözücüsünün iç yapısından, kalan 2'si ise serpiştirici yapısından kaynaklanmaktadır.

PDRAC kodçözücüler için:

$$\tau = \left(\frac{D}{NR} + \frac{D}{2NR} + 6 \right) I = \left(\frac{3D}{2NR} + 6 \right) I$$

Yukarıdaki eşitlikte kullanılan R terimi kod oranını ifade etmektedir. Formülde verilen $\frac{D}{NR}$ terimi BCJR kodçözücülerden, $\frac{D}{2NR}$ terimi ise tekrarlama kodunun çözücülerinden kaynaklanan gecikmeleri göstermektedir.

Kodçözme gecikme hesaplamalarında ping-pong tampon yapısı kullanıldığı varsayılmıştır. Ping tamponu dolduktan sonra burada biriken gözlemler kodçözücülere aktarılır. Bu sırada yeni bir gözlem yapılırsa Pong tamponu doldurulur ve kodçözücüler yeni gözlemleri alacak hale geldi mi bu sefer Pong tamponundakiler çözücülere aktarılır ve Ping tamponu dolmaya başlar. İşlem bu şekilde devam eder. Bu sistem hafıza kullanımını iki katına çıkar.

Bahsi geçen yapıların sağlayabilecekleri en yüksek veri hızları açısından karşılaştırmamız bu noktada mümkündür. Veri hızı, v , aşağıdaki şekilde formüle edilebilir:

$$v = \frac{Df}{\tau} . \quad (20)$$

Verilen formülde f uygulanabilen en büyük frekans (saat frekansı) değerini, τ da kod çözme gecikmesini ifade eder. Veri hızını doğru şekilde hesaplamak için D , K , I , N ve R parametrelerinin alacağı değerlere karar verilmesi gerekmektedir.

Denkleimde yerine konulmak üzere f değerleri Tablo 1, Tablo 2, Tablo 3'ten elde edilmiştir. Kullanılan FPGA tamamen dolacak şekilde tasarlanan kodçözücülerin performansı Tablo 4'te verilmiştir. Tablo oluşturulurken FPGA'ya sağlanabilecek saatlerin frekansları piyasadan sağlanabilecek değerlerden seçilmiştir.

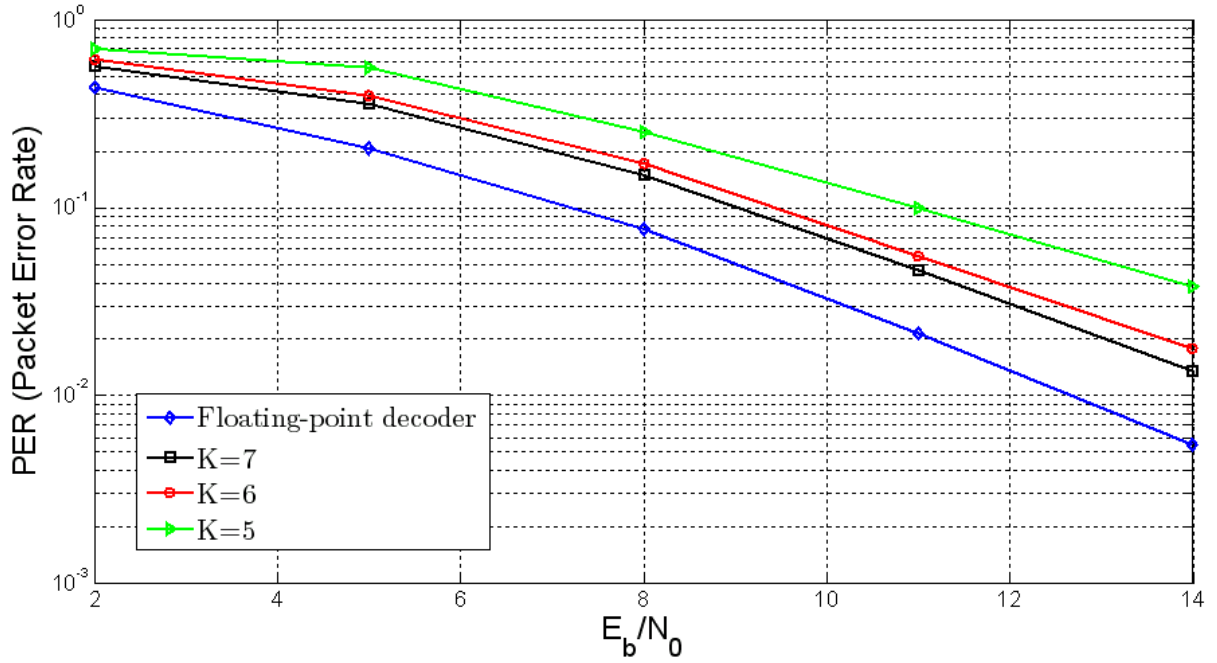
Bu sonuçlara dayanarak max-log-MAP ve ardışık düzen çalışma ile oldukça yüksek hızlara küçük başarımla ulaşılabileceği görülmektedir. Ayrıca, basit yapılarına rağmen RA kodlarının gerçekleştirilmesinde her şey göz önüne alındıktan sonra turbo kodlara göre avantajlı olmadıklarını da gözlemledik. Ortaya koyduğumuz paralelleştirilmiş yapı sayesinde elimizdeki orta büyüklükteki bir FPGA üzerinde, 61,5 Mbps gibi oldukça yüksek bir gerçek zamanlı veri hızına 1/3 kod oranıyla çalışan bir turbo kod için erişmiş olduk. Bu konuda yapılan çalışma bir dergi makalesi haline getirilerek gönderilmiştir (EK 18).

Tablo 4. Kodçözücülerin sağlayabilecekleri en yüksek veri hızlarının karşılaştırılması

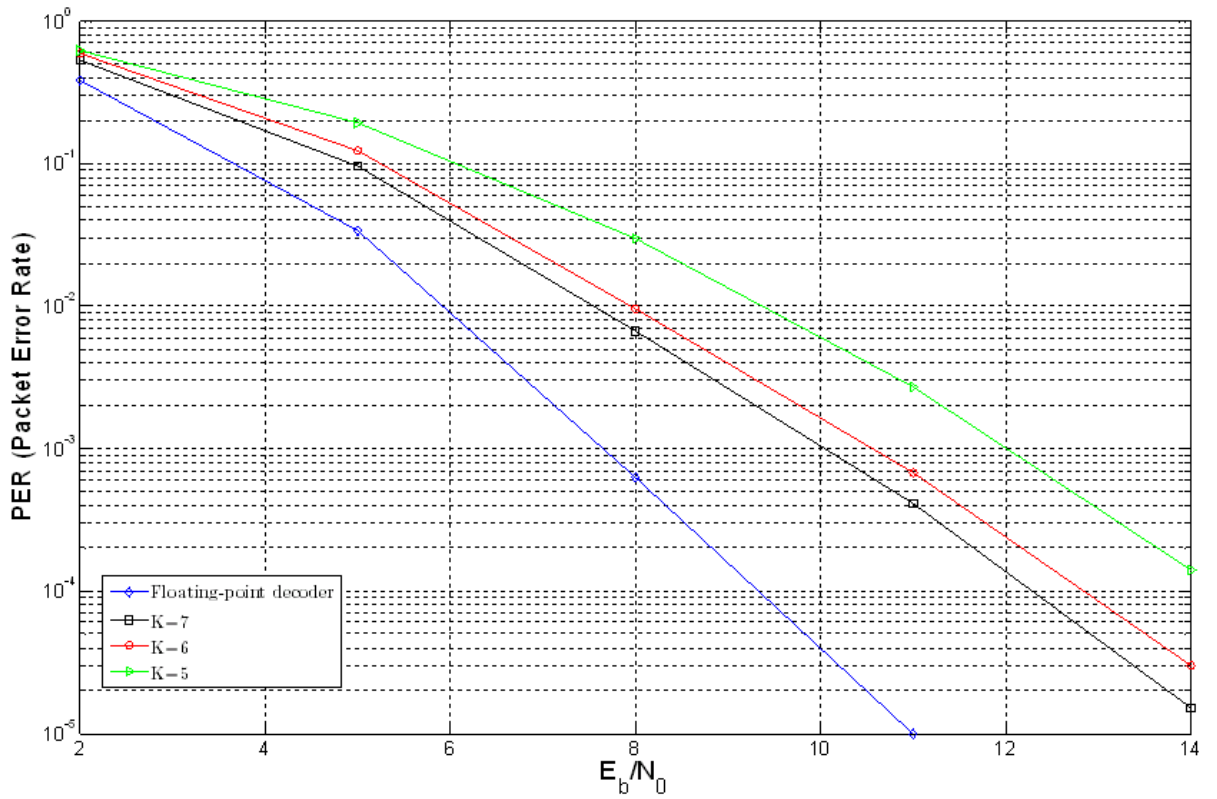
Kodçözücü ve Mimari	N	I	K (bits)	Saat Hızı (MHz)	SNR (BER = 10 ⁻³ için)	Veri Hızı (Mbps)
PDTC max-log-MAP <i>mimari-A</i>	8	4	6	48	~2,2 dB	48,0
PDTC max-log-MAP <i>mimari-B</i>	8	4	6	80	~2,2 dB	61,5
PDTC log-MAP <i>mimari-A</i>	6	4	6	30	~2,0 dB	22,5
PDTC log-MAP <i>mimari-B</i>	6	4	6	60	~2,0 dB	36,7
PDRAC log-MAP	10	8	7	60	~2,7 dB	15,4

C. Kanal Kestirici ile İlgili Sonuçlar

AWGN kanalda kullanılmak üzere makul bir K değeri önceden belirlenmişti. Rayleigh kanal altında bu değerini değiştirilerek bu işlemi tekrarladık. Kanaldaki kestirim hatasının kullanılan K değeri ile çok ilişkili olmayacağını varsayarak kanalın mükemmel bilindiği durum için başarımla inceledik. Aşağıda sonucu verilen testler 512 bitlik paketler üzerinde yapılmıştır ve kod çözücü parametreleri şu şekilde sabitlenmiştir: $N=4$ (paralel kodçözücü sayısı), $I=4$ (yineleme sayısı). Test sırasında alıcı tarafında kanal durum bilgisinin hatasız bir şekilde mevcut olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca iki farklı Rayleigh sönümlü kanal kullanılmıştır. Bunlardan birincisinin normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0.001$ iken diğerinin 0.01 olarak belirlenmiştir.



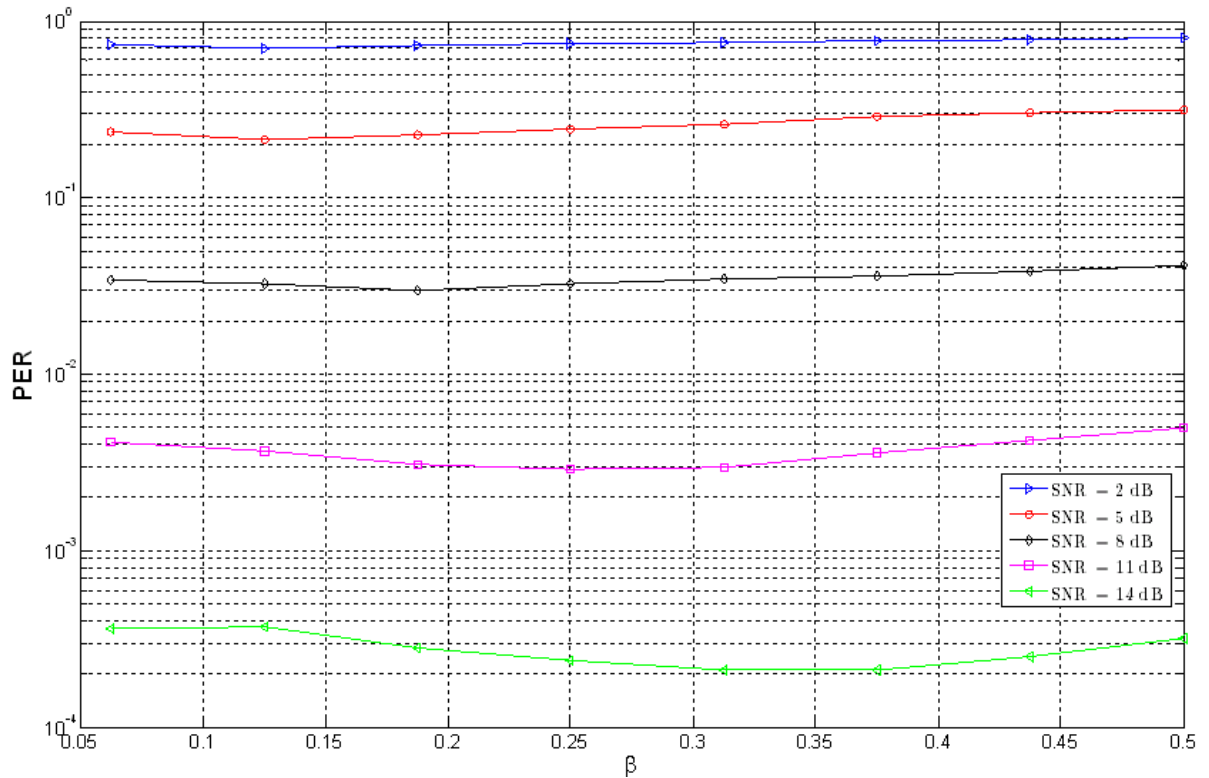
Şekil 35. Normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0,001$ olan sönümlü kanal altında başarımlar.



Şekil 36. Normalize edilmiş Doppler frekansı $f_D T_s = 0,01$ olan sönümlü kanal altında başarımlar.

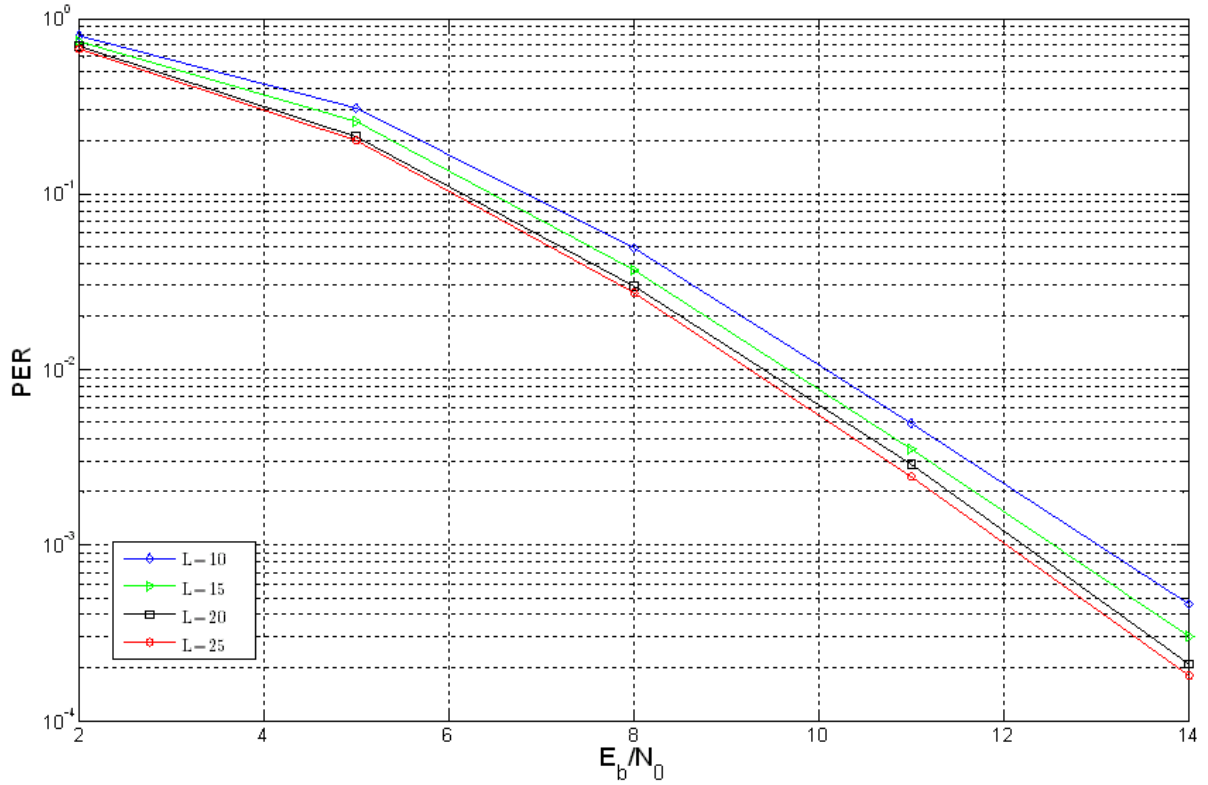
Yukarıdaki şekillerde verilen başarımlar eğrilerinde $K = 6$ tercihinin AWGN kanalda olduğu gibi makul bir tercih olabileceği görülmektedir. Bundan sonraki testlerde $K = 6$ değeri kullanılacaktır.

K değerine karar verildikten sonra kanal kestiriminde kullanılan β değerinin atanması gerekmektedir. Ancak, en uygun β değeri her SNR değeri için aynı değildir. Bu nedenle testlerde kullanılan SNR değerleri için en uygun β değerlerinin saptanması gerekmektedir. Bu sebeple değişik SNR değerlerinde değişik β değerlerinin gösterdikleri başarımlar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Bu performans karşılaştırma testlerinde $L = 20$ değeri sabit olarak tutulmuştur.



Şekil 37. β değerinin birleştirilmiş kanal kestirici ve kodçözücünün başarımlar üzerindeki etkisi ($f_D T_s = 0,01$).

Son parametre olarak L sayısına karar verilmesi gerekmektedir. Bu kapsamda, değişik L değerleri için birleştirilmiş kanal kestirici ve kodçözücü üzerinde testler yapılmıştır. Bu testler sırasında test edilen her SNR değerine karşılık gelen en uygun β değerleri kullanılmıştır. Başarımlar eğrileri aşağıdaki şekilde sunulmaktadır. Ayrıca L değerindeki değişimlerin, kanal kestirim işleminin FPGA üzerindeki gerçekleşmesindeki etkisi sentez sonuçları halinde Tablo 5'te verilmektedir. Bu sonuçlara göre L parametresinin makul değerleri 15 veya 20 olarak alınabilir.



Şekil 38. L değerinin başarımlar üzerindeki etkisi

Tablo 5. Kanal kestirici sentez sonuçları

L (bit)	Kullanılan slice adedi	Slice kullanım yüzdesi (%)	Kullanılan Blok RAM adedi	Maximum saat frekansı (MHz)
10	311	1	7	99,668
15	384	2	7	96,313
20	653	4	13	82,218
25	867	5	13	75,753

Gecikme Süresinin Hesaplanması:

D adet bilgi bitinin kodlanması ve sonrasında pilot sembollerin eklenmesi sonucunda oluşan paketin uzunluğu $P = D/R + 32$ olarak ifade edilebilir. Buradaki R kodlama oranını belirler ve bizim de daha önce belirttiğimiz şekilde kullandığımız kod için bu oran $1/3$ tür. Alıcı tarafında alınan paketin kanal kestirme ve kod çözme işlemleri öncesinde bir RAM'de hazır olarak bulunduğunu kabullenirsek, paket alma süresi gecikme süresine dahil edilmeyebilir. Bahsedilen bu kabullenme *ping-pong* arabellek yapısının kullanılması ile geçerli kılınabilir.

Kanal kestiriminin ilk yinelenmesinde karmaşık bir işlem yapılmaksızın alınan paket örnekleri ve kanal katsayılarının kestirimleri LL hesaplama dizisine verilir. Bu işlem sırasında kanal kestirimlerini ve alınan örnekleri saklamak için çift erişimli bellek kullanılması sonucu LL hesaplayıcı verme süresi $D/2R$ saat çevrimi tutmaktadır. LL hesaplayıcı aldığı bu değerlerle aynı çevrim içerisinde LL hesaplamasını tamamlar ve oluşturduğu LL değerlerini nicemleyiciye verir. PDTC kod çözücüsünün tek başına oluşturduğu gecikme süresi hesaplanırken

gecikmeyi azaltmak adına *ping-pong* arabellek yapısı kullanılmıştı. Ancak kodçözücünün kanal kestirici ile artarda kullanıldığı bu durumda kestirici ve kodçözücü birbirlerinin sonuçlarını kullandığı için biri çalışmaktayken diğerinin de çalışıp girdi üretmesi mümkün olmamaktadır. Bu sebeple iki yapının arasında *ping-pong* arabellek kullanımı fayda etmemektedir. Ancak, kanal kestirici ve kod çözücü arasındaki veri aktarımını hızlandırmak için verilerin kod çözücüdeki paralelleştirmeye uygun bir şekilde belleklere yazılması sağlanabilir. Her bir belleğin çift erişimli olarak kullanılması ve paralelleştirme sonucu (parallelleştirmenin N dal ile yapıldığı varsayımı altında) LL bilgisinin kod çözücü için hazırlanması $D/2N$ saat çevriminde tamamlanır.

Kanal kestiriminin ikinci ve sonraki yinelemelerinde ise daha önce bahsedilen CTT algoritmasının kullanılmasıyla, 2-yönlü LMS algoritmasının sonuçları ortadan başlayacak şekilde $P/2$ saat çevriminde dışarıya verilir. Bu aslında oldukça kötü bir durumdur. Bu kanal kestirimleri kullanılarak eş zamanlı olarak LL değerleri hesaplanarak niceleme işleminden geçer ve paralelleştirilmiş kod çözücü belleklerine $D/2N$ saat çevriminde yazılır.

Kod çözümünden kaynaklanan gecikme hesaplanmadan daha önce verilmiş olan formülü kullanarak toplam bir gecikme miktarı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\tau = \left(\frac{D}{2R} + \frac{D}{2N} \right) + \left(\frac{P}{2} + \frac{D}{2N} \right) (I_e - 1) + \left(\frac{D}{N} 2I_d \right) I_e.$$

Verilen denklemde I_e kanal kestirici yineleme sayısını, I_d ise kod çözücü yineleme sayısını gösterir. Gecikme süresinin hesaplanabilmesi için tasarımda değişken olarak bırakılan parametrelerin belli değerlere atanması gerekmektedir. Bunu şöyle yapacağız. Önceki en yüksek veri hızı hesaplamalarında belirli bir N değeri için farklı kodçözücülerin slice kullanım oranları incelenerek, tüm FPGA'yı dolduracak en yüksek N değeri elde edilmişti. Bu N değeri ile en yüksek veri hızı bulunmuştu. Kanal kestirimi biriminin var olduğu durumda N değeri çok değişmemektedir. Bunun sebebi kanal kestiricisinin FPGA üzerinde çok küçük yer kaplamasıdır. Ayrıca kanal kestiricisinin kullandığı blok RAM sayısı da N değerini sınırlayacak büyüklükte değildir.

MAX-LOG-MAP kodçözücü Mimari-B kullanıldığında $K=6$, $N=4$ için %45 slice kullanım oranı ile 87MHz hıza ulaşmaktadır. Kanal kestirici $L=15$ ile sadece %2 yer kaplamaktadır ve de 96Mhz hıza ulaşmaktadır. Bu durumda $N=8$ olanaklıdır. Parametrelerin $D=160$, $R=1/3$, $N=8$, $I_e=3$ ve $I_d=4$ atamaları sonrasında toplam gecikme süresi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\tau = \left(\frac{160}{2/3} + \frac{160}{16} \right) + \left(\frac{\frac{160}{1/3} + 32}{2} + \frac{160}{16} \right) 2 + \left(\frac{160}{8} 8 \right) 3 = 1262 \text{ saat periyodu}$$

Buna bağlı olarak sistemin izin verdiği veri hızı önceden de yazıldığı gibi

$$\nu = \frac{D \times f}{\tau}$$

olarak kullanılır. Yukarıdaki denklemde kullanılan f değeri FPGA üzerindeki saat hızını belirler ki bu da sentez sonuçlarının verildiği tablolarda sınırlandırılan bir değerdir. Kanal kestirici ve kodçözücü için ayrı ayrı verilen tablolar incelendiğinde saat hızını sınırlayan parçanın kodçözücü olduğu görülmektedir. PDTC kod çözücü için (MAX-LOG-MAP, Mimari-B) verilen tablodan $K = 6$ tercihine karşılık gelen saat hızının okunmasıyla veri hızı hesabı şu şekilde yapılabilir:

$$\nu = \frac{160 \times 80 \times 10^6}{1262} \approx 10,14 \text{ Mbps .}$$

Parallelleştirme işleminin bir miktar başarımlı düşüklüğüne sebep olacağı öngörülse de kanal kestirim işlemine de başarıyla uygulanabilir. Kestirimin 4 paralel yapı ile yapılması sonucu kullanılan bellek miktarı 4 katına çıkar ancak aynı saat periyodunda üretilen LL sayısı da 4 katına çıkar. Bu paralelleştirmeden PDTC kod çözücünün yapısına uygun paralelleştirme işlemi etkilenmez ve bu süreç yine $D/2N = D/8$ saat çevriminde tamamlanır. $N_e = 4$ kanal kestirimindeki paralelleştirme sayısı olduğunda bile $N = 8$ hala olanaklıdır. Gecikme süresinin bu yapı altında gecikmesi

$$\tau' = \left(\frac{D/N_e}{2R} + \frac{D}{2N} \right) + \left(\frac{P/N_e}{2} + \frac{D}{2N} \right) (I_e - 1) + \left(\frac{D}{N} 2I_d \right) I_e = 698 \text{ saat periyodu}$$

olarak bulunur. Bu yapıyla elde edilebilecek veri hızı ise aşağıda gösterilmektedir.

$$\nu = \frac{160 \times 80 \times 10^6}{698} \approx 18,33 \text{ Mbps .}$$

Elde edilen bu sayılar yukarıda da açıklandığı gibi yineleme sayılarına bağlıdır. Bu sebeple literatürdeki yinelemeli sistemleri durdurmada kullanılan çeşitli sonlandırma kuralları kullanılarak veri hızları daha yükseltilebilir. Ayrıca N , N_e , I , I_e gibi parametreler başarımlı ve hıza göre optimize edilirse daha iyi sonuçlar elde edilebilir. Yukarıda elde edilen rakam iyi başarımlı sergileyebilecek bir sistemde gözlenebilecek en kötü senaryoya yaklaşık olarak denk gelmektedir.

5. Tartışma/Sonuç

Gezgin haberleşmede yüksek hızlarda veri gönderimini sağlayabilecek bir sistemlerin ortaya konması projemizin temel amacıydı. Bu proje kapsamında bu amaca yönelik üç alanda çalışma yapılmıştır. Bunlar paralelleştirilmiş alıcı yapılarının oluşturulması, sönümlenmeli kanallarda kodlama ve kanal kestirimi, gerçekleştirme çalışmaları olarak sıralanabilir.

Yüksek veri hızlarını sağlayabilmek için yüksek başarımlı kodların yinelemeli kodçözme işleminin hızlandırılması gerektiği ortadadır. Alıcılarda DSP veya FPGA yongası gibi işlemciler kullanılmakta olup bunların sınırlı kaynaklarıyla yinelemeli kodçözme işleminin yapılması gerekmektedir. Hızı arttırmak için bir yöntem paralelleştirmedir. Bu aslında verilmiş bir yonga (örneğin FPGA) üzerinde donanım yükünü arttırıp işlem hızını arttırmaya denk gelmektedir.

Proje başvurusunda çarpım kodlarında evrimsel kodlar kullanılarak klasik çarpım kodlarına göre daha kolay işlenebilecek bir kod yapısı ortaya konması önerilmişti. Bu yönde yapılan çalışmalarda başarımlı paralelleştirmeden çok da fazla etkilenmeyen, yani hem daha hızlı çalışan hem de başarımlı da oldukça yüksek, Evrimsel Çarpım Kodları ailesi ortaya kondu. Bu çalışmalar esnasında çok daha genel yapılara kolaylıkla erişilebileceği gözlemlendi. Verici tarafındaki kodlayıcıların paralelleştirilmesinin alıcı tarafındaki kodçözümünde paralelleştirmeyi doğrudan beraberinde getirdiği görüldü. Bu sayede oldukça genel bir paralelleştirilmiş alıcı yapısı ortaya kondu.

Parallelleştirmenin sebep olduğu sorunlardan biri kodçözücünün içinde kullanılan bellekte olası çarpışmalardır. Önerilen basit bir serpiştirici yapısıyla bu sorun başarımda çok az bir kayıpla önlemlendi. Böylece paralelleştirme ile ilgili çalışmalar aşağıdaki listede özetlenebilir.

- Evrimsel kodlarla oluşturulmuş bir çarpım kodu ortaya kondu ve başarımlı çeşitli yöntemlerle incelendi.
- Genel bir paralelleştirilmiş alıcı yapısı elde edildi, çeşitli durumlara uygulandı.
- Bellek çarpışması sorununu engelleyen basit bir serpiştirici tasarlandı.

Gezgin haberleşmede alınan sinyalde bozulmalara sebeplerden biri sönümlemedir. Alınan sinyalin genliğinin ve fazının değişimine denk gelen sönümlemeye karşı çeşitli önlemler alınır. Bir tanesi kanal kodlamasının buna uygun olarak yapılmasıdır. Öncelikle blok sönümlenmeli kanallarda uygun kanal kodları anlaşılıp bunlar sonra zamanla değişen kanallarda uygulamaya sokulmuştur. Proje kapsamında, genelleştirme hakkı korunarak, zamanla değişen kanallarda çalışmalar yapılmıştır.

Sönümlemenin sebep olduğu kanal kazanç değişimlerinin bilinmesi haberleşmenin başarımlı önemli ölçüde etkilemektedir. Bu sebeple literatürde birçok kanal kestirim tekniği önerilmiştir. Ancak bu tekniklerin büyük bir kısmı yüksek işlem yükü getirdiğinden veri hızlarını düşürmektedirler. Yüksek veri hızlarını olası kılmak olan amacımıza yönelik olarak oldukça basit bir şekilde çalışan bir kanal kestirim yöntemi önerilmiştir. Literatürde iyi bilinen LMS algoritmasının iki yönlü çalıştırılmasına dayanan yöntem, ortak kodçözümü ve kanal kestirimi yapan bir sistem içinde çalıştırılıp yüksek başarımlı sağladığı gösterilmiştir. Sönümlenmeli kanalla ilgili yapılan çalışmalar şunlardır.

- Blok sönümlenmeli ve zamanla değişen darbantlı sönümlenmeli kanallarda yüksek başarımlı sergileyen kodlar tasarlandı, başarımları incelendi.

- Kanal kestirimi için 2-yönlü LMS adında basit yapılı bir yöntem oluşturuldu ve klasik yöntemlerle olan başarımların farkı incelendi. Ortak kodçözümü ve kanal kestirimi yapan bir yapıda kanal kesinti olasılıklarına oldukça yakın başarımlar elde edildi. Gerçekleme yapılarak elde edilebilecek veri hızları ortaya kondu.

Projenin temel yaklaşımı yapılan çalışmaların gerçekleştirilmesi ile ortaya konan yapıların pratik düzleme taşınmasıydı. Bu yönde yapılan çalışmaların ilk parçasında fiziksel kanalı kullanan bir test düzeneği tüm altsistemleriyle oluşturuldu. En son noktada iki alıcı anteniyle çeşitleme kazancı sağlayan bir yapı oluşturuldu. Sonrasında kodçözme ve kanal kestirimi ile ilgili önerilerle oluşturulan bir mimarinin FPGA üzerinde gerçekleştirilmesi yapıldı. Bu yapılan çalışmayla orta kapasiteli bir FPGA yongası ile oldukça yüksek veri hızlarına (40-60Mbps) erişilebileceği gözlemlenmiştir.

Böylece projenin başında ortaya konan yüksek veri hızlarına erişme amacına başarıyla ulaşıldığını söyleyebiliriz. Proje süresince elde edilen deneyim ışığında yineleme kullanıldığı durumda oldukça basit yapılarla bile yüksek başarımlar elde edilebileceği görüldü. Birçok haberleşme (veya benzer alanlar) senaryosuna uygulanabilecek bu yaklaşım, haberleşme sistemleri tasarımında her zaman göz önünde bulundurulmalıdır.

Görüldüğü üzere oldukça yüklü bir çalışma programıyla proje tamamlandı. Proje kapsamında başlanan bazı araştırmalar olgunlaşıp proje kapsamının dışına taşmaya başladı. Bunların bir kısmı üzerine çalışmalarımız proje dışında devam ettirildi ve halen sürdürülmektedir. Gelecek çalışmalar olarak adlandırılacak bu çalışmaların bazıları aşağıda verilmektedir.

- Sonlu blok uzunluğunda sönmülemeli kanallarda kanal kesintisi
- 2-yönlü LMS ile denkleştirmedeki MIMO ileri/geri besleme filtrelerinin doğrudan elde edilmesi
- Tepe güç kısıtı altında sönmülemeli kanallarda ve MIMO-OFDM sistemlerinde kapasite

Proje kapsamında yapılan çalışmalardan şu ana kadar 5 adet dergi makalesi yayınlanmıştır. Ayrıca 2 adet makale başvurusu final raporunun hazırlandığı tarihte yapılmış olup 2 adet başvuru da kısa sürede yapılacaktır. Araştırma sonuçları, yaklaşık olarak 10 adet bildiriyle ulusal ve uluslararası konferanslarda sunulmuştur.

TÜBİTAK'ın sunduğu bu imkanla, proje yürütücüsünün araştırma grubunun oluşturulması mümkün olmuştur. Her seviyeden yaklaşık 15 öğrencinin katkıda bulunduğu proje sayesinde hem teorik bazda hem de gerçekleştirme ile ilgili çok önemli bilgi birikimi ve deneyim oluşmuştur. Bu projedeki çalışmalardan 1 adet doktora tezi, 3 adet yüksek lisans tezi yazılmıştır⁸, halen devam eden bir adet doktora tezinin de önemli parçaları proje kapsamında yer almaktadır. Elde edilen bilgi birikimi ve deneyim, 2007 yılında proje yürütücüsü tarafından ODTÜ Elektrik-Elektronik Müh. Böl. bünyesinde verilmeye başlanan "EE 728 Wireless Communications" dersinde yoğun olarak kullanılmaktadır.

Sonuç olarak, dört yıllık proje döneminin oldukça yoğun bir tempo içinde, verimli bir şekilde geçtiğini söyleyebiliriz. Hem yapılan yayınlar açısından hem de kazanılan bilgi birikimi ve deneyim açısından projeye iyi olarak değerlendirilebilecek sonuçlar elde

⁸ Yüksek lisans tezlerinin iki tanesi Eylül 2009'da savunulacaktır.

edilmiştir. Başka bir kazanım da proje içerisinde başlayıp dışarıya kaydırılıp devam ettirilen birçok araştırma alanının oluşmasıdır.

REFERANSLAR

BENEDETTO S., Montorsi G., Unveiling turbo codes: some results on parallel concatenated coding schemes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, 42, 2, 409-429, (1996).

BENEDETTO S., Gaggero L., Garelo R., Montorsi G., On the Design of Binary Serially Concatenated Convolutional Codes, VIII Communication Theory Mini-Conf. (CTMC), Vancouver, BC-Canada, (1999) pp: 32-36.

BERROU C., Glavieux A., Thitimajshima P., Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes, IEEE International Conference on Communications ICC, Geneva-Switzerland, (1993) pp:1064-1070.

BERROU C., Saouter Y., Douillard C., Kerouedan S., Jezequel M., Designing good permutations for turbo codes: towards a single model, IEEE Int. Conf. on Comm. ICC, Paris-France, (2004) pp: 341-345.

ELIAS P., Error Free Decoding, *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-4, 29-37, (1954).

FABREGAS A. G., Caire G., Coded Modulation in the Block-fading Channel: Coding Theorems and Code Construction, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52, 91-114, (2006).

FABREGAS A. G., Caire G., Multidimensional Coded Modulation in Block-fading Channels, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 54, 5, 2367-2372, (2008).

GALLAGER R. G., Low Density Parity Check Codes, *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-8, 21-28, (1962).

GOLDSMITH A., Wireless Communications, Cambridge University Press, New York, (2005). Pp: 108.

KNOPP R., Humblet P. A., On Coding for Block Fading Channels, *IEEE Transactions on Information Theory*, 46, 1, 189-205, (2000).

LIN S., Costello D. J., *Error Control Coding*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, (2004). Pp: 563.

LOVE D.J., Heath Jr. R.W., Strohmer T., Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 49, 10, 2735–2747, (2003).

MEYER-BAESE U., *Digital Signal Processing with FPGA*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (2001).

OCHIAI H., Imai H., On the distribution of the peak to average power ratio in OFDM signals, *IEEE Transactions on Communications*, 49, 2, 282–289, (2001).

PROAKIS J.G., *Digital Communications*, McGraw Hill, New York, (1995). Pp: 637.

PROAKIS J.G., Optimal Tracking of Time-Varying Channels: A Frequency Domain Approach for Known and New Algorithms, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 13,1, 141-154, (1995-2).

RAHELI R., Polydoros A., Tzou C-K., PSP: A General Approach to MLSE in Uncertain Environments, *IEEE Transactions On Communications*, COM-43, 354-364, (1995).

UNGERBOECK G., Channel Coding with Multilevel/Phase Signals, *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-28,1, 55-67, (1982).

VALENTI M. C., Woerner B. D., Iterative channel estimation and decoding of pilot symbol assisted turbo codes over flat-fading channels, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 19, 1697-1705, (2001).

WIDROW B., McCool J.M., Larimore M.G., Johnson C.R., Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter, *Proceedings of the IEEE*, 64,8, 1151-1162, (1976).

YOON S., Bar-Ness Y., A Parallel MAP Algorithm for Low Latency Turbo Decoding, *IEEE Communication Letters*, 6, 7, 288-290, (2002).

EKLER

EK 1 GAZİ O., Yılmaz A. Ö., Turbo Product Codes based on Convolutional Codes, *ETRI Journal*, 28, 4, 453-460, (2006).

EK 2 GAZİ O., Yılmaz A. Ö., Zero State Doped Turbo Equalizer, *IEEE Communication Letters*, 11, 2, 164-166, (2007).

EK 3 GAZİ O., Yılmaz A. Ö., Fast Decodable Turbo Codes, *IEEE Communication Letters*, 11, 2, 173-175, (2007).

EK 4 GAZİ O., Yılmaz A. Ö., Collision Free Row Column S-random Interleaver, *IEEE Communication Letters*, 13, 4, 1-3, (2009).

EK 5 GÜVENSEN G., Yılmaz A. Ö., An Upper Bound for Limited Rate Feedback MIMO Capacity, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 8, 6, 2748-2754, (2009).

EK 6 GAZİ O., Yılmaz A. Ö., Parallel Decodable Concatenated Convolutional Codes, International Symposium and Exhibition on Electrical, Electronics, and Computer Engineering, Lefkoşe-KKTC, (2006)

EK 7 GAZİ O., Yılmaz A. Ö., On Parallelized Serially Concatenated Codes, IEEE Wireless Communications & Networking Conference WCNC, Hong Kong, (2007) pp: 713-717

EK 8 GÜVENSEN G., Yılmaz A. Ö., Iterative Decision Feedback Equalization and Decoding for Rotated Multidimensional Constellations in Block Fading Channels, IEEE Vehicular Technology Conference-Spring, Barcelona-Spain, (2009)

EK 9 YAPICI Y., Yılmaz A. Ö., Turbo-like Codes Over Block-Fading and Time-Varying Narrowband Fading Channels, IEEE Vehicular Technology Conference-Spring, Barcelona-Spain, (2009)

EK 10 YAPICI Y., Yılmaz A. Ö., Low-Complexity Iterative Channel Estimation and Tracking for Time-Varying Multi-Antenna Systems, IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Conference (PIMRC), Tokyo-Japan (2009)

EK 11 GÜVENSEN G., Yılmaz A. Ö., Iterative Frequency Domain Equalization for Single-Carrier Wideband MIMO Channels, IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Conference (PIMRC), Tokyo-Japan (2009)

EK 12 YAPICI Y., Yılmaz A. Ö., Joint Channel Estimation and Decoding with Low-Complexity Iterative Structures in Time-Varying Fading Channels, IEEE

International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Conference (PIMRC), Tokyo-Japan (2009)

EK 13 GÜVENSEN G., Yılmaz A. Ö., Probability of Full-Diversity for Simple Coded and Rotated Multidimensional Constellation Systems, IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Conference (PIMRC), Tokyo-Japan (2009)

EK 14 GAZİ O., Yılmaz A. Ö., Serpiştiricinin Konvolüsyonel Çarpım Kodlarının Performansı Üzerindeki Etkileri, URSI-Türkiye 2006

EK 15 ÖZEL Ö., Vural M., Yılmaz A. Ö., FPGA Platformunda Pilot Dizini Ekleme Yöntemiyle Paket Senkronizasyonu ve Tek Ton Parametre Kestirimi, 2007 IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Eskişehir

EK 16 GÜVENSEN G., Yılmaz A. Ö., MIMO Kanallarda Sınırlı Hızda Geribesleme ve RVQ, 2007 IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Eskişehir

EK 17 VURAL M., Aktaş T., Yılmaz A. Ö., Bileşik Kaplar Yönteminin OFDM ve MIMO Sistemlerde PAPR Üzerine Etkisi, 2007 IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Eskişehir

EK 18 ERDİN E., Kılıçoğlu Ç., Yılmaz A. Ö., An Implementation-Based Comparison of Paralellized Turbo Decoders, *European Transactions on Telecommunications* dergisine gönderilmiştir

EK 19 GÜVENSEN G., Yılmaz A. Ö., Iterative Frequency Domain Equalization for Single-Carrier Wideband MIMO Channels, *IEEE Transactions on Wireless Communications* dergisine gönderilmiştir.

Turbo Product Codes Based on Convolutional Codes

Orhan Gazi and Ali Özgür Yılmaz

In this article, we introduce a new class of product codes based on convolutional codes, called convolutional product codes. The structure of product codes enables parallel decoding, which can significantly increase decoder speed in practice. The use of convolutional codes in a product code setting makes it possible to use the vast knowledge base for convolutional codes as well as their flexibility in fast parallel decoders. Just as in turbo codes, interleaving turns out to be critical for the performance of convolutional product codes. The practical decoding advantages over serially-concatenated convolutional codes are emphasized.

Keywords: Iterative decoding, convolutional product codes, interleaving, puncturing.

I. Introduction

One of the most successful works to approach the Shannon limit was published in 1993 by C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima [1]. They introduced turbo codes, also known as parallel concatenated convolutional codes (PCCC). Turbo codes can achieve bit error rate (BER) levels of around 10^{-5} at code rates quite close to the corresponding capacity with reasonable decoding complexity. The use of soft-in soft-out decoding algorithms was a key to this success. In the last decade, similar codes such as serially-concatenated convolutional codes (SCCCs) [2], low-density parity check codes [3], and block product codes have been extensively studied. The studies on product codes were initiated by Elias [4]. Product codes enjoy a high degree of parallelization as opposed to many other forms of concatenated code structures, for example, PCCC.

The product codes studied thus far have been constructed using linear block codes, such as Hamming, extended Hamming [5], [6], BCH [7], [8], and Reed Solomon [9] codes. Single parity check (SPC) product codes are studied in [10]. Three and more dimensional SPC product codes are studied in [11]. Product codes have also attracted practical attention lately. Digital signal processing and field-programmable gate array implementations are studied in [12]. Product codes are traditionally constructed by linear block codes. Block codes have a trellis structure with a time varying property [13]. The product code we propose in this paper is constructed by using time-invariant convolutional codes. Its component codes' trellis structure does not vary in time as in product codes constructed with Hamming, extended Hamming, BCH, and Reed Solomon block codes. Moreover, the number of states in the trellis structure of a block code may grow exponentially with the difference of codeword and data block lengths [13], whereas the number of states in a

Manuscript received Sept. 25, 2005; revised Apr. 26, 2006.

This work was supported in part by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under grant 104E027.

Orhan Gazi (phone: + 90 312 284 4500/4015, email: o.gazi@ari.cankaya.edu.tr) is with Department of Electronic and Communication Engineering, Cankaya University, Ankara, Turkey.

Ali Özgür Yılmaz (email: aoyilmaz@eee.metu.edu.tr) is with Department of Electrical and Electronics Engineering, Middle East Technical University, Ankara, Turkey.

convolutional code can be set as desired. The time invariant trellis structure of convolutional codes makes them more convenient for implementation. In addition, numerous practical techniques such as trellis coded modulation and puncturing can be simply utilized with convolutional codes as opposed to linear block codes. A code from the same family was previously studied for orthogonal frequency-division multiplexing in [14] but was not analyzed or further elaborated.

Multi-input multi-output (MIMO) techniques are quite important to enhance the capacity of wireless communication systems. Space-time trellis codes provide both diversity and coding gain in MIMO channels and are widely used [15]. Space-time trellis codes usually have time-invariant trellis structures just like convolutional codes. Thus, a product code based on convolutional codes is more suitable for integration with MIMO channels and poses an alternative to block product codes.

Due to these advantages of convolutional codes, we propose a class of product codes constructed by using convolutional codes, which we call convolutional product codes (CPCs). In this paper, we will investigate the factors that affect the performance of CPCs and leave the issues regarding space time trellis codes to other publications.

The outline of the paper is as follows. The proposed code structure and the decoding algorithm for CPCs are given in section II. The minimum distance of these codes is studied in section III. In section IV, implementation advantages of CPCs are given. Simulation results are presented in section V. Concluding remarks are given in section VI.

II. CPC Encoder and Decoder

1. CPC Encoder

A regular product code is constructed by placing the information bits/symbols into a matrix. The rows and columns are encoded separately using linear block codes [5]-[8]. This type of a product encoder is shown in Fig. 1. It is seen from the figure that the data and parity bits are grouped separately.

In our case, we use convolutional codes instead of linear block codes to encode rows and columns. This is illustrated in Fig. 2. When compared to Fig. 1, it is obvious that data and parity bits are mixed uniformly.

Encoding is performed by using a matrix that determines how each encoder works. The data to be sent is put into the matrix. Each row of the matrix is encoded using a convolutional code. We use the same recursive systematic convolutional code to encode each row, although different convolutional codes can be used for this purpose. Once each

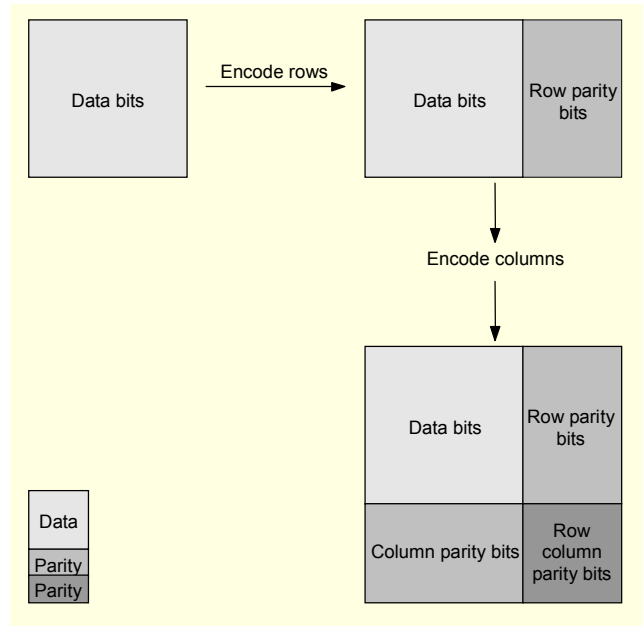


Fig. 1. Regular product code encoding procedure, where a block code is used to encode rows and columns.

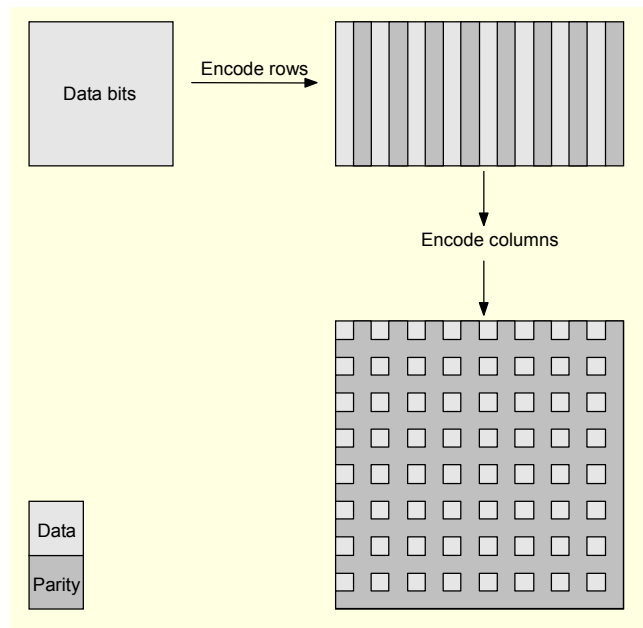


Fig. 2. CPC encoding procedure without an interleaver.

row is encoded, the matrix is sent, if desired, to an interleaver. Our data matrix dimension is $k \times k$, and the encoded data matrix dimension is $n \times n$, that is, our code is an $(n \times n, k \times k)$ code. The interleaved matrix is coded column-wise. In our simulation we used the rate 1/2 recursive systematic convolutional code with the matrix generator $(1, 5/7)_{\text{octal}}$ to encode each row and column. Hence, the overall code rate is 1/4. The general encoding procedure, which includes any type of interleaver, is illustrated in Fig. 3.

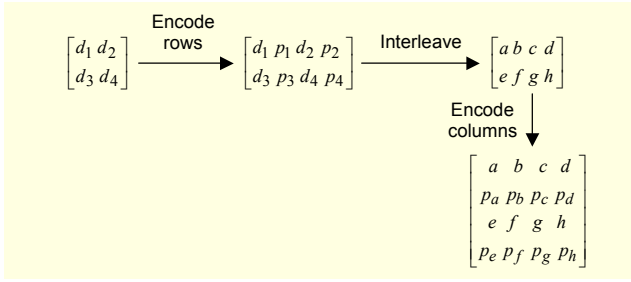


Fig. 3. Convolutional product code encoder with any type of interleaver (d denotes data bits and p denotes parity bits).

2. CPC Decoder

Convolutional product coded data is multiplexed to a single stream and binary phase shift key (BPSK) modulated. The BPSK-modulated signal is passed through an additive white Gaussian noise channel with double-sided noise power spectral density $N_0/2$, that is, the noise variance is $\sigma^2 = N_0/2$. We used the log-MAP soft decoding algorithm [16], [17] to iteratively decode the convolutional product code. Since columns were encoded last, each column is independently decoded one by one. The extrinsic information obtained from the columns is passed to the row decoder after being de-interleaved. Then, row decoding proceeds; rows are decoded one by one, and interleaved extrinsic information is passed to the column decoder. The CPC decoding procedure is depicted in Fig. 4. This procedure is repeated for a sufficient number of times. The decoding structure employed in this study is the same as that of serially-concatenated codes in Fig. 5 [17]. For frames of equal length, an SCCC decoder uses two log-MAP decoders and performs quite well at low rates. CPC decoders can utilize

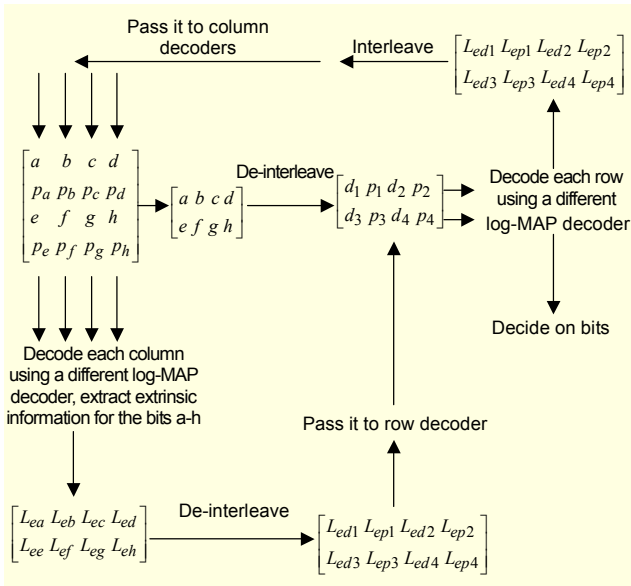


Fig. 4. Decoding operation of the convolutional product code.

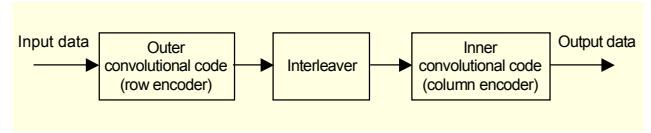


Fig. 5. SCCC encoding operation.

many log-MAP decoders in-parallel, thus showing smaller decoding delays. Therefore, we will compare the proposed CPC structure to that of SCCC.

3. Puncturing

Puncturing is a widely used tool to increase the code rate of convolutional codes [18]. The puncturing operation increases the rate of a code, but decreases the free distance. This results in a worse error rate performance compared to a non-punctured case. We used the puncturing matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

to puncture the convolutional component codes.

We studied two cases. In the first case, puncturing is applied only to the column encoders, resulting in a code rate of $2/3$ each. The overall code rate becomes $(1/2) \times (2/3) = 1/3$. When trellis termination is used for rows and columns, a convolutional code with a slightly smaller overall code rate ($\leq 1/3$) is produced. In the other case, we apply puncturing to each row and column encoder, resulting in an increased code rate of approximately $(2/3) \times (2/3) = 4/9$. Simulation results for punctured convolutional product codes (PCPCs) will be presented in section V.

III. CPC Minimum Distance and its Asymptotic Performance

The Hamming weight of a binary codeword is defined as the number of '1's available in the codeword [13]. The minimum distance of a linear code is the minimum Hamming weight of all the codewords. The minimum distance plays an important role in the code performance. As it gets larger, code performance improves, especially at high signal-to-noise ratio (SNR) values [13]. We assume that d_{free} is the free distance of the component convolutional codes used in CPCs with trellis termination. We will investigate the minimum distance of the CPCs according to the usage of the interleavers.

1. No Interleaving

After the first stage of the CPC encoding operation (row encoding), it is obvious that one of the rows of the row-

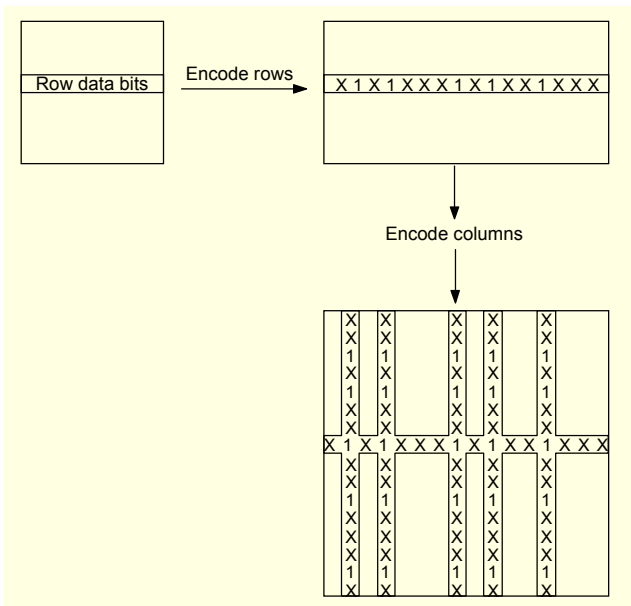


Fig. 6. If the column elements are not mixed, d_{free}^2 is preserved.

encoded matrix should contain at least d_{free} number of '1's. This means that there are d_{free} columns containing at least a single '1' in the row-encoded matrix. When columns are encoded, there exists at least d_{free} number of columns each containing at least d_{free} '1's. Hence, in total there are at least d_{free}^2 '1's in the coded matrix [6]. This is the d_{min} distance of the CPC whose component convolutional codes have a trellis termination constraint. In Figs. 6 and 7, this concept is explained for $(1, 5/7)_{\text{octal}}$ component convolutional codes whose free distance is 5. In summary, if no interleaver is used, the CPC minimum distance is d_{free}^2 .

2. Column S-Random Interleaver

Both to preserve the d_{free}^2 minimum distance of the CPC, and to benefit from the interleaving gain, after row encoding we used S-random interleavers for each column, that is, each column is interleaved but different column elements are not mixed. In this way, we guarantee that d_{free} number of columns contains a single '1' before column encoding operation. We call this type of interleaving column S-random interleaving to distinguish it from regular S-random interleaving. A helical interleaver [19] also does not mix the different column elements. A helical interleaver and a combination of helical and column S-random interleavers will also be considered.

3. Full S-Random Interleaver

If an S-random interleaver is used for all the elements of a matrix after row encoding, the number of columns that contain

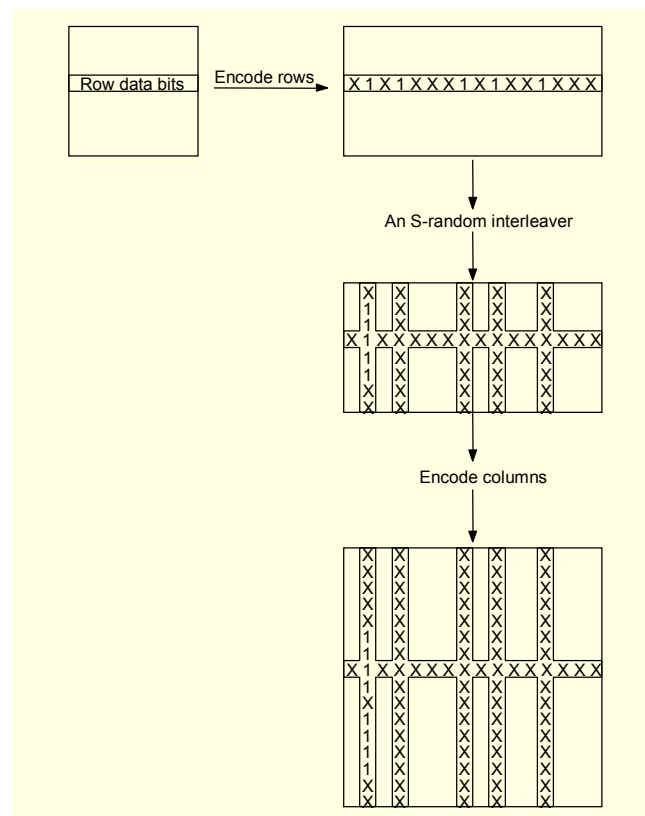


Fig. 7. d_{free}^2 is not preserved if an S-random interleaver is used ('x' stands for a single or a group of 0's).

a single '1' is not necessarily equal to $d_{\text{free}}=5$. As a result, the CPC minimum distance is no longer necessarily equal to d_{free}^2 . In fact, after an interleaving operation, all the '1's may appear in a single column. This means that the CPC minimum distance is lower bounded by d_{free} . We call this type of interleaving full S-random interleaving. In Fig. 7, the effect of the full S-random interleaver is illustrated. It is seen from Fig. 7 that when the row-encoded matrix is S-random interleaved, all the '1's appearing in a row may go to a single column. This verifies that the CPC minimum distance is lower bounded by d_{free} .

4. Punctured CPCs

The puncturing operation decreases the free distance of convolutional codes. In our case, we puncture the $(1, 5/7)_{\text{octal}}$ component convolutional code that has $d_{\text{free}}=5$, that is, an input sequence '0111' produces minimum Hamming weight codeword '00111011'. When the puncturing matrix is applied, its free distance decreases to $d_{\text{free}}=3$, that is, deleting every second parity bit in a periodic manner, '001x101x' is obtained from the minimum Hamming weight codeword. Hence, the CPCs constructed using punctured component convolutional codes have a smaller minimum distance. In fact,

the minimum distance is equal to $d_{\text{free}}^2 = 9$ if no interleaving operation is performed or a column S-random interleaver is used.

5. Asymptotic Performance

If row and column convolutional codes are trellis terminated, the row and column convolutional codes can be considered as block codes. Asymptotic performance studies made for block product codes are also valid for a convolutional product code. The BER probability of the CPCs can be approximated using the formula,

$$P_b \approx \frac{N_{c,d_{\text{free}}}^2 w_{c,d_{\text{free}}}^2}{k^2} Q\left(\sqrt{d_{\text{free}}^2 \frac{2E_s}{N_0}}\right), E_s = r^2 E_b, \quad (1)$$

where d_{free} is the free distance of the convolutional code used to construct the convolutional product code, $N_{c,d_{\text{free}}}$ is the number of convolutional codewords with free distance d_{free} , k is the length of the data information frame, and $w_{c,d_{\text{free}}}$ is the average Hamming weight of the information words that produces convolutional codewords with Hamming weight d_{free} . Also, r is the rate of the component convolutional codes and is equal to 1/2 or 2/3 in our case, and Q is the error function given as

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

The BER approximation in (1) is valid if no interleaver is used during the CPC encoding operation. If an interleaver is used, it does not hold anymore.

IV. Practical Implementation Advantages

The implementation advantage of CPC will be discussed herein with the parameters used in this study. Trellis termination will be neglected in calculation and will not alter the results significantly. In SCCC, for a given transmit data vector of length L , two log-MAP decoders are needed. The first decoder has a complexity of order $O(2L)$ ¹⁾ and a time delay of $O(2L)$. The second decoder has a shorter input, thus it has a complexity of $O(L)$ and a time delay of $O(L)$. In total, the complexity is of $O(3L)$ and the time delay is of $O(3L)$. In CPC, columns are decoded first. The use of separate log-MAP decoders for each row and column makes parallel processing operations possible. Each column decoder has a complexity

1) The meaning of $O(L)$ here is different from its conventional usage. By $O(L)$ we mean that the computation load is proportional to L , i.e., computation amount is approx. kxL , where k is the number of parameters to be computed in a single stage of the code trellis.

of $O(\sqrt{L})$ and time delay of $O(\sqrt{L})$. Since these decoders are run in-parallel, the total column decoding complexity is of $O(2L)$ but the time delay is of $O(\sqrt{L})$. Similarly, row decoding has a total complexity of $O(L)$ and time delay of $O(\sqrt{L})$. Hence, although both complexities are the same, time delays differ very much and bring about an $O(\sqrt{L})$ -time increase in decoding rate. Hence, the main advantage of CPCs lies in their suitability for a parallel decoding procedure. Although there are some proposed methods for the parallel decoding of SCCCs and PCCCs, these methods usually propose extra algorithms to solve problems met in parallel processing. Such algorithms not only bring extra complexity to the decoding operation [20]-[21], but also may suffer from performance loss. This situation is totally remedied with the proposed CPCs.

V. Simulation Results

1. Interleaving Effects

A. No Interleaver

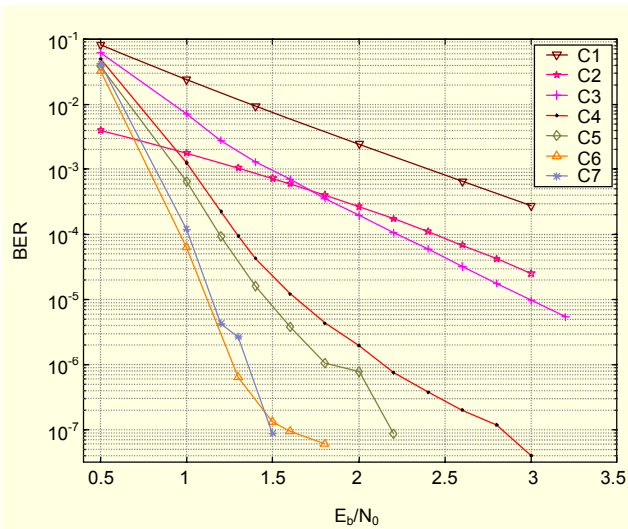
In this case, no interleaving operation is performed after row encoding. Trellis termination bits are added both to rows and columns. The minimum distance of the CPC is $d_{\text{min}} = d_{\text{free}}^2 = 25$. Trellis termination bits are necessary to guarantee $d_{\text{min}} = d_{\text{free}}^2$; otherwise d_{min} is not equal to d_{free}^2 anymore. The performance graph of this code is shown in Fig. 8. It can be seen from the graph that the performance of this CPC is not good for low SNR values, although its minimum distance is large. As is well known, the minimum distance dominates the performance of the code at high SNR values.

B. Full S-Random Interleaver

After a row-encoding operation, an S-random interleaver ($S = 18$) is used. We also simulated a serially-concatenated convolutional code to compare against CPC due to the similarity of the code structure and good performance at low rates. The performance graph is seen in Fig. 8. As seen from the performance curve, the performance is very good compared to the cases where interleavers other than S-random are used. Due to the S-random interleaver used after row encoding, the minimum distance of the CPC is not necessarily equal to d_{free}^2 . CPC with a full S-random interleaver shows the best performance at low rates due to the large interleaver gain.

C. Column S-Random Interleaver

To obtain both a better performance than that of the no interleaver case and to preserve that $d_{\text{min}} = d_{\text{free}}^2$ of CPC, we applied an S-random interleaver ($S = 3$) to each column separately. We call such interleaving column S-random



C1: No interleaver is used (rate $\approx 1/4$)
 C2: Theoretical bound (rate $\approx 1/4$)
 C3: Helical interleaver is used (rate $\approx 1/4$)
 C4: Each column is S-random interleaved (column S-random) (rate $\approx 1/4$)
 C5: Helical + column S-random interleaver is used (rate $\approx 1/4$)
 C6: Full S-random interleaver is used (rate $\approx 1/4$)
 C7: SCCC with S-random interleaver (rate $\approx 1/4$)

Fig. 8. SCC and CPC performance graph for different interleavers (iteration number = 12, frame length = 1024).

interleaving. Different column elements are not mixed. From Fig. 8, it can be seen that the performance is better compared to the CPC in which no interleaver is used. Its performance is worse than the CPC with which a full S-random interleaver is used after row encoding. The usage of the helical interleaver also guarantees that the minimum distance of CPC equals d_{free}^2 . We also investigated the case in which a helical interleaver is followed by a column S-random interleaver. It is seen that such an interleaver results in a slightly better performance than the one where only a column S-random interleaver is used during the encoding procedure.

2. Trellis Termination Effects

We simulated three trellis termination cases where trellis termination bits are added to the rows only (CPC RT), to both rows and columns (CPC TT), and neither to rows nor to columns (CPC No TT). Although the addition of trellis termination bits decreases the code rate, they are critical for good performance of the convolutional product code as seen in Fig. 9. The addition of trellis termination bits in a turbo or serially concatenated code shows negligible improvement of the code performance [22]. Without trellis termination, the performance of the CPC degrades drastically. The performance graphs are seen in Fig. 9. When only rows are trellis

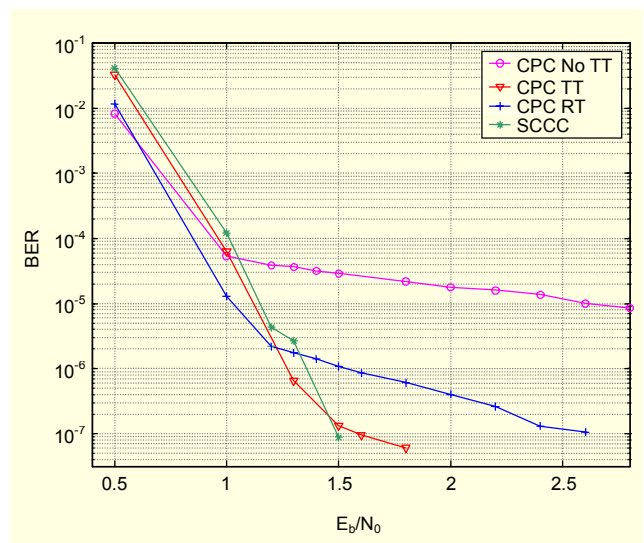
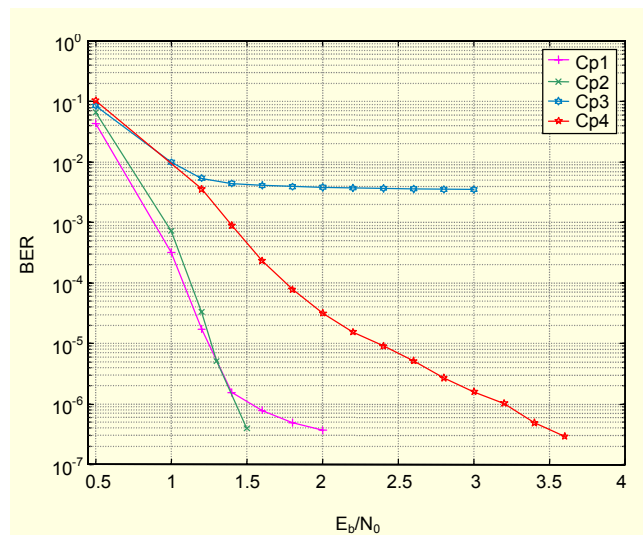


Fig. 9. CPC and SCCC performance graph (frame length = 1024, iteration number = 12).



Cp1: SCCC with S-random interleaver (rate $\approx 1/3$)
 Cp2: CPC with Full S-random interleaver (rate $\approx 1/3$)
 Cp3: CPC with Full S-random interleaver (rate $\approx 4/9$)
 Cp4: Each column is S-random interleaved (column S-random) (rate $\approx 4/9$)

Fig. 10. Punctured CPC and punctured SCCC performance graph. CPC rows and columns are trellis terminated. (frame length = 1024, iteration number = 12).

terminated, a convolutional product code has better performance at very low E_b/N_0 levels. However, the BER slope decreases at higher E_b/N_0 levels when compared to the case where both rows and columns are trellis terminated. We see that CPC RT is better than the SCCC and CPC TT at low E_b/N_0 regions. Although it is quite close to BER 10^{-7} , SCCC seems to have an error curve of higher slope compared to CPC TT at higher E_b/N_0 values.

3. Puncturing Effects

Puncturing is first applied only to rows, resulting in a rate $2/3$ CPC. From Fig. 10, it is seen that the performance of the CPC with a full S-random interleaver is good after being punctured. When the puncturing process is applied to both rows and columns, it results in a CPC rate of approximately $4/9$. From Fig. 10, it is seen that the performance becomes very poor for CPC with a full S-random interleaver. Recall that d_{\min} is not necessarily lower bounded by d_{free}^2 when an S-random interleaver is used. Thus, the particular interleaver we used resulted in a low d_{\min} . When $d_{\min} \geq d_{\text{free}}^2$ is ensured by column S-random interleaving, performance is enhanced significantly.

VI. Conclusion

In this article, we studied a new class of product codes based on convolutional codes. This type of product code has component codes with a time invariant trellis structure, as opposed to product codes constructed with linear block codes (Hamming, BCH, Reed Solomon, and so on). Hence, CPC may be more favorable for implementation than linear block product codes. When compared to serially-concatenated convolutional codes, it exhibits comparable BER levels which are of practical interest.

We investigated the effects of different interleavers on the performance of CPCs. It was seen that CPCs are outperformed by other codes unless good interleavers are used. We proposed interleaving methods to preserve the greatest minimum distance of CPCs. It is seen that the performance of a CPC is best at low rates when a full S-random interleaver is used. Column S-random interleavers are much better for punctured CPCs.

Currently, we are investigating the effects of various interleavers and the incorporation of trellis coded modulation in row and column encoding. Since CPCs employ matrices in encoding, it can be easily extended to multi-carrier modulation where the vertical dimension can correspond to the sub-carriers. The approach presented here can be successfully extended to space-time trellis coding. Thus, our future studies will also include a joint structure for CPCs and MIMO space-time frequency codes.

Acknowledgement

The authors would like to thank the anonymous reviewers for their valuable comments and helpful corrections.

References

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes," *Proc. ICC'93*, Geneva, Switzerland, May 1993, pp. 1064-1070.
- [2] S. Benedetto, L. Gaggero, R. Garello, and G. Montorsi, "On the Design of Binary Serially Concatenated Convolutional Codes," *Proc. VIII Communication Theory Mini-Conf. (CTMC)*, Vancouver, BC, Canada, June 1999, pp. 32-36.
- [3] R. G. Gallager, "Low Density Parity Check Codes," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-8, Jan. 1962, pp. 21-28.
- [4] P. Elias, "Error Free Decoding," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-4, Sept. 1954, pp. 29-37.
- [5] E. Hewitt, "Turbo Product Codes for LMDS," *IEEE Radio and Wireless Conf.*, Aug. 1998.
- [6] Nam Yul Yu, Young Kim, and Pil Joong Lee, "Iterative Decoding of Product Codes Composed of Extended Hamming Codes," *5th IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC 2000)*, Antibes, France, 04-06 July 2000, pp. 732-737.
- [7] R. M. Pyndiah, "Near-Optimum Decoding of Product Codes: Block Turbo Codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 8, Aug. 1998, pp. 1003-1010.
- [8] T. Shohon, Y. Soutome, and H. Ogiwara, "Simple Computation Method of Soft Value for Iterative Decoding of Product Code Composed of Linear Block Code," *IEIC Trans. Fundamentals*, vol. E82-A, no. 10, Oct. 1999, pp. 2199-2203.
- [9] Omar Aitsab and Ramesh Pyndiah, "Performance of Reed Solomon Block Turbo Codes," *Proc. IEEE LOBECOM' 96 Conf.*, London, U.K., vol. 1/3, Nov. 1996, pp. 121-125.
- [10] David Rankin and T. Aaron Gulliver, "Single Parity Check Product Codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 8, Aug. 2001, pp. 1354-1362.
- [11] D. M. Rankin and T. A. Gulliver, "Randomly Interleaved Single Parity Check Product Codes," *Proc. IEEE Int Symp. on Inform. Theory*, June 2000, pp. 88.
- [12] A. Goalic and R. Pyndiah, "Real Time Turbo Decoding of Product Codes on a Digital Signal Processor," *Int. Symposium on Turbo Codes and Related Topics*, Brest, Sept. 1997, pp. 624-628.
- [13] S. Lin, D. Costello, *Error Control Coding*, Prentice Hall, 2004.
- [14] F. Sanzi and S. ten Brink, "Iterative Channel Estimation and Decoding with Product Codes in Multicarrier Systems," *IEEE VTS Fall VTC2000 52nd Vehicular Technology Conf.*, Boston, MA, USA, Sep. 2000, pp. 1388-1344.
- [15] V. Tarokh V, N. Seshadri, and A. R. Calderbank, "Space-Time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Performance Criterion and Code Construction," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no. 2, Mar. 1998, pp. 744-765.
- [16] J. Hagenauer, E. Offer, and L. Papke, "Iterative Decoding of Binary Block and Convolutional Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, no. 2, Mar. 1996, pp. 429-445.

- [17] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, "Serially Concatenation of Interleaved Codes: Design and Performance Analysis," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, May 1998, pp. 909-926.
- [18] J. Hagenauer, "Rate-Compatible Punctured Convolutional Codes (RCPC Codes) and their Applications," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no. 3, May 1998, pp. 909-926.
- [19] Branka Vucetic and Jinhong Yuan, *Turbo Codes: Principles and Applications*, Kluwer Academic Publishers, May 2000.
- [20] A. Tarable, S. Benedetto, and G. Montorsi, "Mapping Interleaving Laws to Parallel Turbo and LDPC Decoder Architectures," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 50, no. 9, Sep. 2004, pp. 2002-2009.
- [21] Seokhyun Yoon and Yeheskel Bar-Ness, "A Parallel MAP Algorithm for Low Latency Turbo Decoding," *IEEE Communication Letters*, vol. 6, no. 7, July 2002, pp. 288-290.
- [22] P. Robertson, "Illuminating the Structure of Parallel Concatenated Recursive (TURBO) Codes," *Proc. GLOBECOM'94*, San Francisco, CA, Nov. 1994, pp. 1298-1303.



Orhan Gazi received the BS and MS degrees in electrical and electronics engineering from Middle East Technical University, Ankara, Turkey in 1996 and 2001. Since 2001, he has been working towards the PhD degree. His research includes error control coding and signal processing. He is currently employed as an Instructor in Cankaya University, where he delivers lectures at the undergraduate level in electrical engineering.



Ali Özgür Yılmaz received the BS degree in electrical engineering from the University of Michigan, Ann Arbor in 1999. He received the MS and PhD degrees at the same school in 2001 and 2003. He has been an Assistant Professor with Middle East Technical University, Turkey since September 2003. His research interests include high rate mobile communication systems, cooperative communications, and radar signal processing.

Zero State Doped Turbo Equalizer

Orhan Gazi and A. Özgür Yılmaz

Abstract—Although iterative equalizers perform well at low signal to noise ratios, high latency is a major disadvantage for their use in practical communication systems. In this article we propose zero state doped turbo equalizers (ZSDTEs) which can be processed in parallel and have significantly reduced processing delays. The proposed technique shows better performance when compared to the sliding window method.

Index Terms—Turbo codes, turbo equalizer, zero state doped turbo equalizer.

I. INTRODUCTION

MANY communication systems suffer from inter-symbol interference (ISI) in frequency selective channels. A channel equalizer is usually employed at the receiver side to estimate the data and alleviate the effect of ISI. Traditional equalizers are linear filters whose parameters are determined according to some optimization criteria such as zero forcing (ZF), minimum mean square error (MMSE) etc. With the invention of the turbo codes in 1993 [1] iterative algorithms gained much popularity among communication society. The iterative approach was extended to channel equalization in [2] where turbo equalizer was introduced.

Turbo equalization is the process of combining channel and decoding operations in an iterative manner. The information produced in the decoders and equalizers are traded back and forth to enhance the overall performance. A turbo equalizer (TE) system usually employs soft-input, soft output (SISO) algorithms at the decoder and equalizer block. The popular SISO algorithms employed are usually the maximum a posteriori (MAP) and Viterbi based algorithms which are sequential in nature. However, sequential solutions such as MAP and soft output Viterbi suffer from high complexity and high latency which is a limiting factor in practical applications.

To reduce complexity and the large latency, a number of algorithms to use at the equalizer block have been suggested in [3] where minimum mean square error (MMSE) equalizer is used at the equalizer block. However, its performance degrades seriously in severe ISI cases [4]. A joint structure that combines coding and equalization different than turbo equalization is suggested in [5] where decision feedback equalizer soft information is exchanged with the decoder hard decisions in an iterative manner. Although the use of the

Manuscript received September 6, 2006. The associate editor coordinating the review of this letter and approving it for publication was Dr. Rohit Nabar. This work was supported in part by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under grant 104E027.

Orhan Gazi is with the Electronics and Communication Engineering Department, Cankaya University, 06530, Ankara, Turkey (e-mail: o.gazi@cankaya.edu.tr).

A. Özgür Yılmaz is with the Electrical and Electronics Engineering Department, Middle East Technical University, 06530, Ankara, Turkey (e-mail: aoyilmaz@eee.metu.edu.tr).

Digital Object Identifier 10.1109/LCOMM.2007.061442.

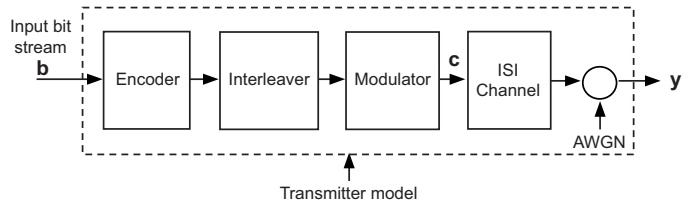


Fig. 1. Transmitter side of a communication system.

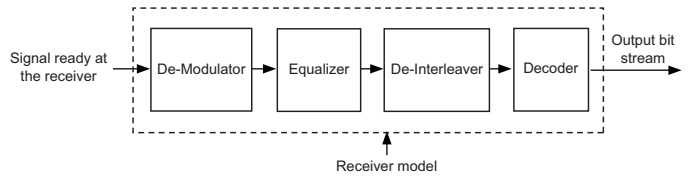


Fig. 2. Receiver side of a communication system.

sub-optimum algorithms results in reduced complexity, the performance loss cannot be tolerable for some cases [4].

Turbo product codes based on convolutional codes are studied in detail in [6]. We extend the idea in [6] and use it for turbo equalizer. We introduce ZSDTE structure which uses trellis based optimal decoding algorithms and is very suitable for parallel processing at the receiver side. ZSDTE has significantly low latency compared to the classical turbo equalizer structure and at the same time exhibits the same performance. We also compared our system performance to that of the well known sliding window technique [7].

The outline of the paper is as follows. In Section II, the structure of a communication system is explained. ZSDTE model is introduced in Section III. Section IV provides a discussion on the latency gain of the proposed structure. Simulation results and conclusions are given in Sections V and VI.

II. COMMUNICATION SYSTEM MODEL

The transmitter and receiver sides of a communication system that sends data through a frequency selective channel is depicted in Figs. 1 and 2. The channel is also included in the transmitter side for ease of representation. In the transmitter model, the transmit filter, the channel, and the receive filter are incorporated into the ISI channel model which is represented by a discrete time linear transversal filter with the finite length impulse response given by [8]

$$h[n] = \sum_{k=0}^{L_c-1} h_k \delta[n-k]$$

where h_k are the filter coefficients and L_c is the filter length which is known at the transmitter side. The channel coefficients h_k are time invariant and are available at the receiver.

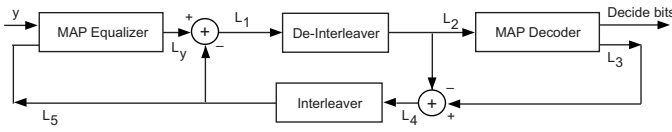


Fig. 3. Turbo equalizer. y is the received signal. L_y , L_1 , L_2 , L_3 , L_4 and L_5 denote log-likelihoods.

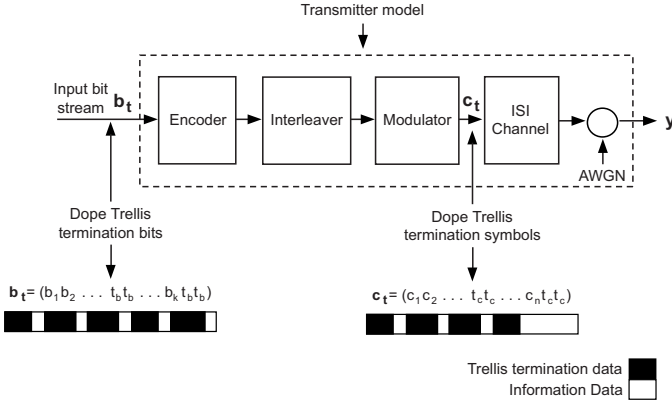


Fig. 4. Zero state doping process at the transmitter side. t_b , t_c are the trellis termination bits and symbols respectively.

To mitigate the effects of the ISI at the receiver, decoding and equalization operations are combined such that soft information exchange among blocks occurs. This iterative structure is called the turbo equalizer which is depicted in Fig. 3. Although we have used MAP algorithm for both equalizer and decoder blocks in Fig. 3 any SISO algorithm can be adopted for both blocks.

III. ZERO STATE DOPED TURBO EQUALIZER (ZSDTE)

Trellis termination bits are added to the binary information bits in a periodic manner so that the trellis diagram of the convolutional encoder visits the zero state periodically. The same procedure is repeated for the ISI channel input symbol sequence, i.e., trellis termination symbols are inserted in a periodic manner into the BPSK modulated code sequence. Hence, the ISI channel trellis is also periodically terminated. This procedure is illustrated in Fig. 4.

This approach can also be interpreted as pre-coding. The binary information sequence is pre-coded and then passed through a convolutional encoder. The encoded binary data is binary phase shift keying (BPSK) modulated. The BPSK symbol sequences are pre-coded and passed through an ISI channel. White Gaussian noise with double sideband power spectral density $N_0/2$ is added to the channel output. The pre-coding effectively divides the incoming sequence of blocks into smaller blocks which can be processed separately by multiple equalizers and decoders in a parallel manner at the receiver side. To clarify the pre-coding operation further, an equivalent representation that better illustrates the overall operation in Fig. 4 is explained in the following section.

A. Transmitter Side Equivalent Model

The zero ZSDTE model in Fig. 4 may seem complex in the first look. However, the same system can be expressed

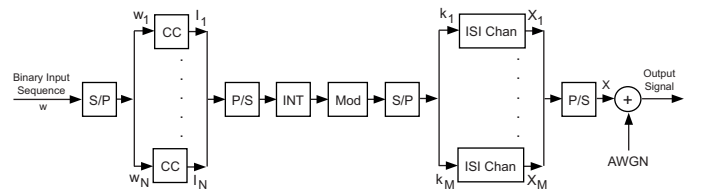


Fig. 5. Parallel equivalent model. N is the number of constituent encoders in outer cluster, M is the number of parallel ISI channels.

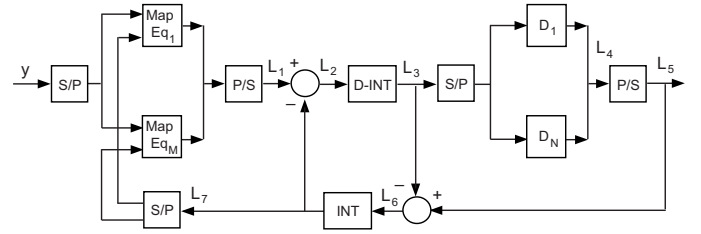


Fig. 6. Parallelized iterative equalization and decoding. y is the received signal, $L_1..L_7$ are the log-likelihoods. INT is the interleaver, D-INT is the de-interleaver. M is the number of MAP equalizers, N is the number of decoders.

with a simplified model. This model is depicted in Fig. 5. As it is seen from the Fig. 5, serial to parallel (S/P) and parallel to serial (P/S) converters are employed. All of the outer constituent encoders add trellis termination bits to the coded data sequences. Inner ISI channel trellises are also terminated. Such a scheme may be impractical for long channel impulses since trellis termination reduces the rate significantly. This transmitter side equivalent model enables us for parallel decoding and equalization operations at the receiver side.

B. Parallel Decoding and Equalization

The parallel turbo equalizer structure for the proposed system is illustrated in Fig. 6. As it is very obvious from the Fig. 6, equalizers $Eq_1..Eq_M$ and decoders $D_1..D_N$ can run in parallel. This reduces the processing delay enormously.

IV. LATENCY GAIN

The latency gain will be computed assuming that the log-MAP algorithm [1] is used in both the equalizer and decoder structures. Both the component codes and the channel have memory 2. Assume that BPSK modulation is used. The input sequence length of the channel is twice that of the convolutional code. In a classical turbo equalizer, for an input information sequence of length L two log-MAP units are needed. Let c be the complexity amount and t be decoding latency of a single stage of the code trellis. The equalizer log-MAP unit has a complexity of $2L \times c$ and a time delay of $2L \times t$, the decoder log-MAP unit has a complexity of $L \times c$ and latency of $L \times t$. The total complexity is of $3L \times c$ and the total latency is of $3L \times t$. For ZSDTE structure, assuming that the number of outer and inner branches equal N , the outer equalizer block, ignoring the trellis termination bits, has a total complexity of $2L \times c$ and a time delay of $(2L/N) \times t$, and the inner decoder block again ignoring the trellis termination bits has a total complexity of $L \times c$ and latency of $(L/N) \times t$. The total latency is of $(3L/N) \times t$. Hence, although the complexities are the same in both the

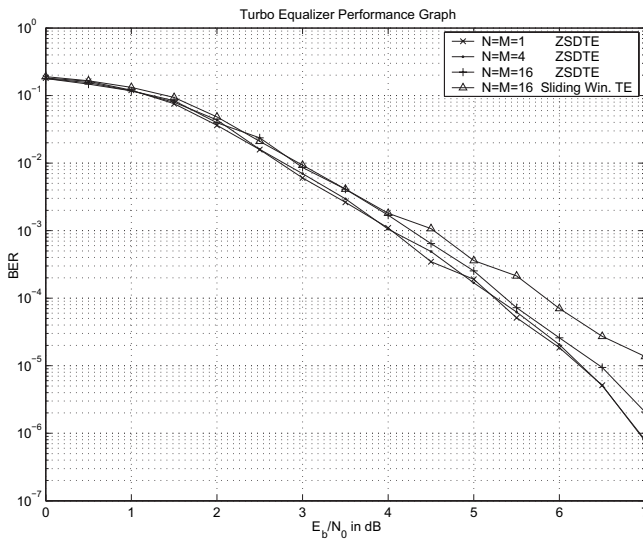


Fig. 7. Bit error rate (BER) performance of ZSDTE and sliding window turbo equalizer (SWTE). $N=M=1$ corresponds to the classical turbo equalizer.

classical turbo equalizer and ZSDTE, the latter has a latency gain of N . This is a big advantage in communication systems.

V. SIMULATION RESULTS

We use RSC $(1, 5/7)_{\text{octal}}$ for the outer code. An S-random ($S=18$) interleaver is employed between the convolutional encoder and BPSK modulator. The three tap ISI channel model in [8] is adopted. The channel coefficients are $h_0 = 0.407$, $h_1 = 0.815$ and $h_2 = 0.407$. The log-MAP algorithm is used for both the decoder and equalizer blocks. Trellis termination bits were taken into account while computing the overall rate and thus the energy per bit. Input information frame length is chosen as 1024 bits. Twelve iterations are performed for each frame. For statistical significance, simulations were run until at least 60 erroneously decoded frames have been observed. The number of outer and inner branches were chosen equal, i.e., $N=M=1$, $N=M=4$, $N=M=16$. The asymmetric case was also considered, i.e., N value changes and $M=1$ fixed. We also simulated turbo equalizer using the sliding window method in [7]. The performance graphs are shown in Figs. 7, 8, and 9.

As seen from Figs. 7 and 8, ZSDTE shows very close performance to that of the classical turbo equalizer for even large N and M values, i.e., $N=M=16$. As the number of branches increases, BER and FER performance degrade slightly. As it is obvious from the figures, ZS doping method shows better performance than the sliding window technique. The simulation results for the asymmetric situation is depicted in Fig. 9. It is seen that the performances are quite comparable.

VI. CONCLUSION

The ZSDTE structure was introduced. It was shown by simulation results that the proposed system shows almost the same performance as that of the classical turbo equalizer even for large number of parallel branches. In addition, the proposed system is very suitable for parallel processing. Hence, it has very low latency compared to the classical turbo equalizer.

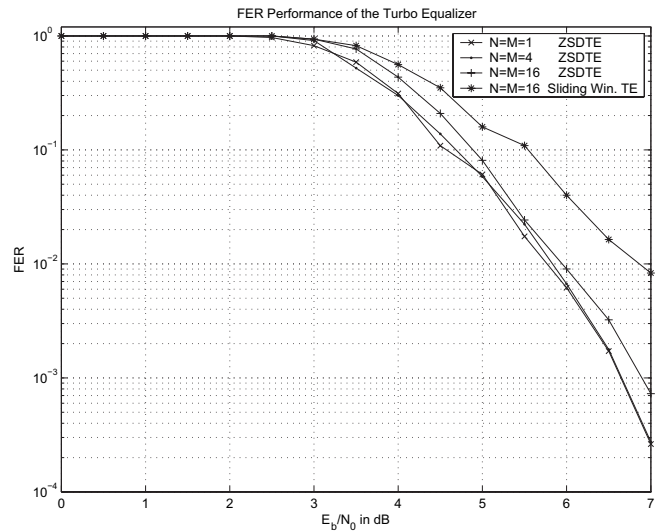


Fig. 8. Frame error rate performance of the ZSDTE and SWTE. $N=M=1$ corresponds to the classical turbo equalizer.

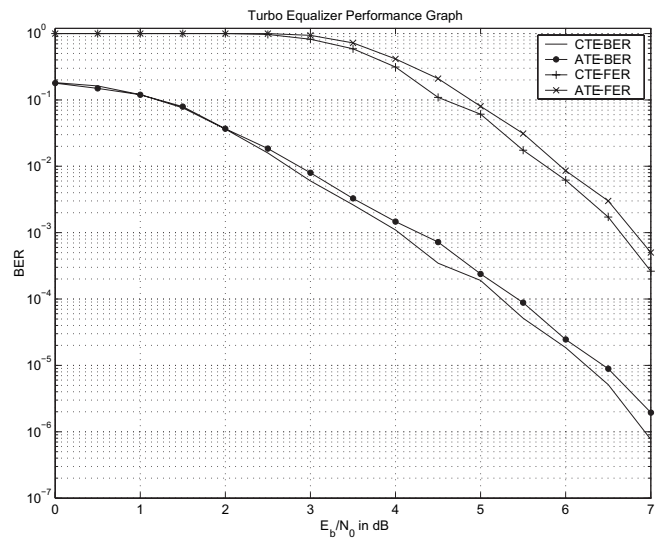


Fig. 9. Error rates for the ZSDTE for the asymmetric case, i.e., $N=16$, $M=1$. ATE and CTE mean asymmetric and classical turbo equalizer respectively.

REFERENCES

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: turbo-codes," in *Proc. IEEE ICC'93*, vol. 2, pp. 1064-1070.
- [2] C. Douillard *et al.*, "Iterative correction of intersymbol interference: turbo equalization," *Eur. Trans. Telecommun.*, vol. 6, pp. 507-511, Sept.-Oct. 1995.
- [3] M. Tüchler, R. Koetter, and A. Singer, "Turbo equalization: principles and new results," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 5, pp. 754-767, May 2002.
- [4] F. R. Rad and J. Moon, "Low complexity turbo equalization for high density magnetic recording," in *Proc. ICC 2005*, vol. 1, pp. 688-692.
- [5] S. Ariyavisitakul and Y. Li, "Joint coding and decision feedback equalization for broadband wireless channels," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 16, pp. 1670-1678, Dec. 1998.
- [6] O. Gazi and A. O. Yilmaz, "Turbo product codes based on convolutional codes," *ETRI Journal*, vol. 28, no. 4, pp. 453-460, Aug. 2006.
- [7] S. Yoon and Y. Bar-Ness, "A parallel MAP algorithm for low latency turbo decoding," *IEEE Comm. Lett.*, vol. 6, no. 7, pp. 288-290, July 2002.
- [8] J. Proakis, *Digital Communications, Fourth Edition*. McGraw-Hill, 2001.

Fast Decodable Turbo Codes

Orhan Gazi and A. Özgür Yılmaz

Abstract—Decoding delay is an important consideration for the use of turbo codes in practical applications. We propose a new structure for turbo codes which is very suitable for parallel decoding. It is shown by union bound analysis and simulation results that the proposed system performance is comparable to that of the classical turbo codes.

Index Terms—Weight enumerating function, uniform interleaver, turbo codes, parallel decodable turbo codes.

I. INTRODUCTION

TURBO codes which were introduced in 1993 by Berrou et. al. [1] represents a breakthrough in coding theory. Since the introduction of turbo codes, there has been an enormous amount of research in many aspects of encoding as well as decoding. The astonishing performance of the turbo codes are investigated in [2], and it is found out that role of the interleaver is one of the most critical factors for the performance of turbo codes. An analytical bound expression for the performance of turbo codes is also given in [2] where the uniform interleaver is employed. The uniform interleaver permits the estimation of the average interleaver gain, independent of the particular interleaver used in a turbo encoder.

Decoding delay is one of the major obstacles of turbo codes for their use in real time applications. Parallel processing is one way to reduce the decoding delay of turbo codes. In [3] two component decoders are run concurrently by which latency can be reduced approximately by half. This scheme corresponds to a parallelization in iterations whereas in [4] parallelization within iteration is achieved by the use of a rectangular type interleaver designed with an empirically found set of parameters. On the other hand, the proposed scheme here utilizes parallelization at the encoder side and uses it for parallel decoding at the receiver side. We show that the codes with the new structure perform as well as classical turbo codes both analytically using the uniform interleaver concept and by simulations. The structure proposed here presents a general construction and two instances of it found in the literature are woven turbo codes [5] and convolutional coupled codes [6].

II. BACKGROUND

A. Weight Spectrum Functions

Weight enumerating function (WEF) gives information about the codewords, i.e., number of codewords with a specific

Manuscript received September 20, 2006. The associate editor coordinating the review of this letter and approving it for publication was Prof. Marc Fossorier. This work was supported in part by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under grant 104E027.

O. Gazi is with the Electronics and Communication Engineering Department, Cankaya University, Ankara, Turkiye (email: o.gazi@cankaya.edu.tr).

A. Ö. Yılmaz is with the Electrical and Electronics Engineering Department, Middle East Technical University, Ankara, Turkiye (email: aoyilmaz@eee.metu.edu.tr).

Digital Object Identifier 10.1109/LCOMM.2007.061528.

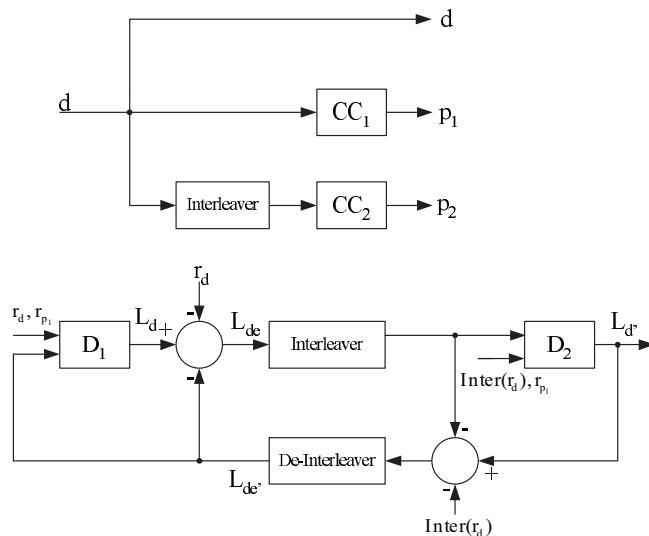


Fig. 1. Parallel concatenated code. CC_1 , CC_2 are constituent recursive systematic convolutional codes 1 and 2 respectively, D_1 and D_2 are soft-output decoders. r_d , r_{p1} and r_{p2} are the received signal values for data and parity bits.

Hamming weight, as in

$$A(X) = \sum_{x=d_{min}}^n A_x X^x,$$

where A_x is the number of codewords with Hamming weight x and X is a dummy variable. A_x 's will be named as WEF coefficients throughout the article. WEF gives information only about the codewords. No information is available about the input information sequences or parity weights. Input redundancy weight enumerating functions (IRWEFs) contain parity Hamming weight information. An IRWEF is defined as

$$A(W, Z) = \sum_{w,z} A_{w,z} W^w Z^z,$$

where $A_{w,z}$ denotes the number of codewords generated with input sequences of Hamming weight w and having parity check weight of z . $A_{w,z}$'s are named as IRWEF coefficients. Conditional weight distribution function (CWEF) gives us information about the weight distribution of the parity sequences that are generated from a Hamming weight w input sequences as defined below.

$$A(w, Z) = A_w(Z) = \sum_z A_{w,z} Z^z$$

B. IRWEF of Parallel Concatenated Code (Turbo Code)

The classical encoder and decoder of a typical turbo code (C_p) is shown in Fig. 1.

Using the uniform interleaver approach, *CWEF* of the parallel concatenated code is found as:

$$A_w^{C_p}(Z) = \frac{A_w^{CC_1}(Z) \times A_w^{CC_2}(Z)}{\binom{L}{w}},$$

where $A_w^{CC_1}(Z)$ and $A_w^{CC_2}(Z)$ are the *CWEFs* of the constituent codes CC_1 and CC_2 , $A_w^{C_p}(Z)$ is the *CWEF* of the parallel concatenated code. L is the interleaver size, w and z are the Hamming weights of the information and parity sequences, respectively. We obtain the *IRWEF* of the code C_p as:

$$A^{C_p}(W, Z) = \sum_{w=1}^k W^w A_w^{C_p}(Z),$$

where k is the length of the input information sequences. A performance upper bound to the bit error probability for the maximum likelihood soft decoding of the code in an *AWGN* channel of double sided noise power spectral density $N_0/2$ is found as below [2]

$$P_b(e) \leq \sum_{w=1}^k \frac{w}{k} W^w A_w^C(Z) |_{W=Z=e^{-R_c E_b/N_0}}. \quad (1)$$

This is further simplified as

$$P_b \cong \frac{1}{2} \sum_m D_m \operatorname{erfc} \left(\sqrt{m \frac{R_c E_b}{N_0}} \right), \quad (2)$$

where R_c is the code rate, $\frac{E_b}{N_0}$ is the bit energy to noise ratio of the *AWGN* channel, D_m is obtained from the *IRWEF* coefficients according to

$$D_m = \sum_{z+w=m} \frac{w}{k} A_{w,z}. \quad (3)$$

III. PARALLEL DECODABLE TURBO CODES (PDTC)

Our proposed structure is seen in Fig. 2. The input information sequence is sent to a serial to parallel converter to form subsequences, and these subsequences are encoded using recursive systematic convolutional codes (*RSCs*). N is the number of *RSCs* in the upper cluster, M is the number of *RSCs* in the lower cluster. The decoder is depicted in Fig. 3. Serial to parallel and parallel to serial converters are employed in this structure. Decoders D_{11}, \dots, D_{1N} and D_{21}, \dots, D_{2M} can be run in parallel. This reduces decoding delay considerably. Woven turbo codes are an instance of this general structure where non-recursive convolutional codes are employed for the upper and lower cluster codes and a rectangular interleaver is used. If convolutional codes and block codes are used for the upper and lower clusters respectively and separate interleavers are employed for the lower cluster branches we get the convolutional coupled codes [6].

A. Decoding Delay and Hardware Complexity

Let c and t be the computational complexity and latency of a single stage of the code trellis. In a classical turbo code, for a given transmit data vector of length L , two log-MAP decoders are needed. Both decoders have a computational complexity of $(c.L)$ and a time delay of $(t.L)$. In total, the complexity of each iteration is $(c.2L)$ and the time delay is $(t.2L)$. In *PDTC*

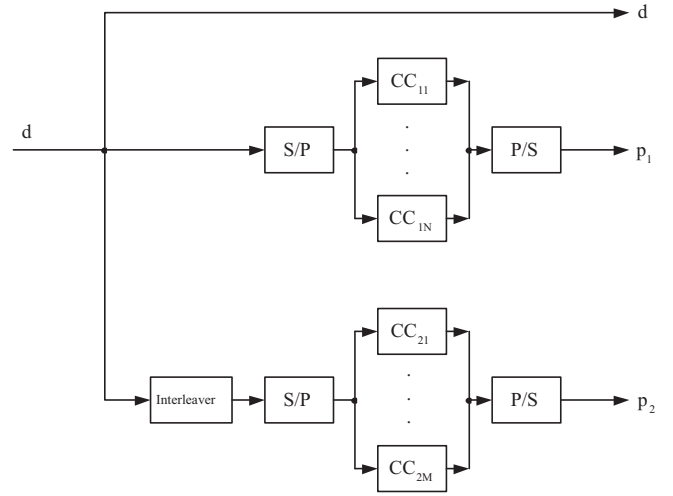


Fig. 2. PDTC Encoder. CC_{1i} , CC_{2i} are constituent *RSCs*. *S/P* and *P/S* are the serial to parallel and parallel to serial converters.

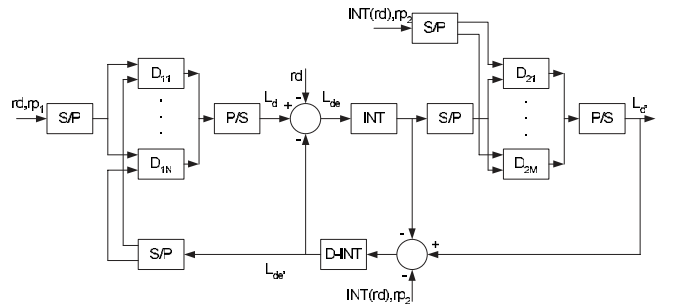


Fig. 3. PDTC Decoder. D_{1i}, D_{2j} ($i = 1 \dots N, j = 1 \dots M$) are the decoders for *RSCs* CC_{1i} and CC_{2i} respectively. r_d , r_{p1} and r_{p2} are the received signal values for data and parity bits.

the use of separate log-MAP decoders for each constituent code makes parallel processing operation possible. Assuming that $M = N$, all decoders in the first and second decoder clusters have a complexity of $(c.L/N)$ and a time delay of $(t.L/N)$. The total computational complexity is $(c.2L)$ and the decoding delay is $(t.2L/N)$. As seen from this discussion, the decoding delay is reduced by a factor of N while keeping the total computational complexity the same as before (excluding a small overhead for the serial to parallel and the opposite operations). Naturally, the decoding latency decreases in this case at the expense of increased hardware complexity as in all parallel processing operations. That is, *PDTC* hardware complexity is N times the hardware complexity of classical turbo codes.

IV. PERFORMANCE ANALYSIS OF PARALLEL DECODABLE TURBO CODES

We used the $(1, 5/7)_{\text{octal}}$ *RSC* for all the constituent codes. Trellis termination is performed in each encoder where both the terminating data and parity bits are appended to the encoded sequence. This slightly decreases the overall code rate and is taken into account while calculating the $\frac{E_b}{N_0}$ values both in computation of the analytical bounds and in simulations. $A_{1i}(W, Z)$'s are the *IRWEF*'s of the constituent codes CC_{1i} ($i = 1, \dots, N$), similarly $A_{2i}(W, Z)$'s are the *IRWEF*'s of the constituent codes CC_{2i} ($i = 1, \dots, M$).

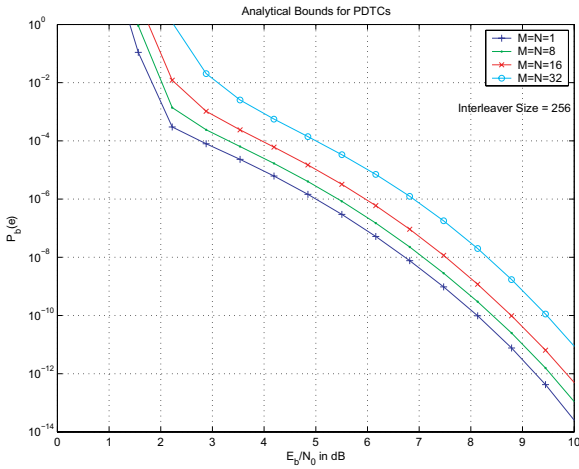


Fig. 4. Analytical bounds for PDTCs using uniform interleaver approach. Constituent codes are trellis terminated.

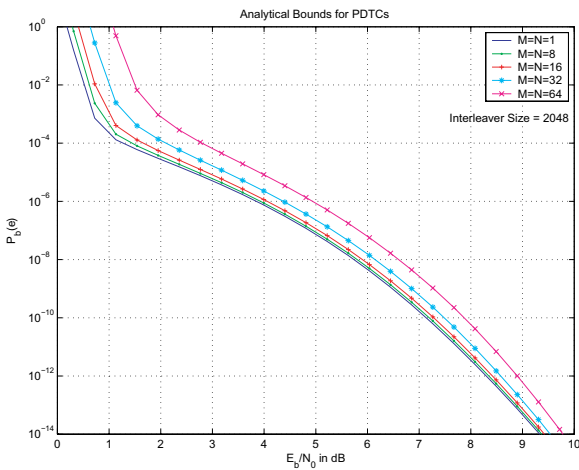


Fig. 5. Analytical bounds for PDTCs using uniform interleaver approach. Constituent codes are trellis terminated.

$A_1(W, Z)$, $A_2(W, Z)$ are the *IRWEF* of the equivalent upper and lower codes respectively. Since the information bits are independent, these *IRWEF*'s can be evaluated as

$$A^1(W, Z) = \prod_{i=1}^N A_{1i}(W, Z)$$

$$A^2(W, Z) = \prod_{i=1}^M A_{2i}(W, Z).$$

We evaluated *IRWEF*'s for different lengths of input information sequences. Once *IRWEF*'s of the *PDTC*'s are available, the uniform interleaver analytical bound approach can be applied and equations (2), (3) can be used to determine upper bounds. Analytical bounds for different interleaver lengths and N, M values are shown in Figs. 4 and 5.

In Fig. 4 the analytical bounds for a number of $M = N$ values are depicted. The code rates are readily calculated by $L/(3L + 4(M + N))$. The classical turbo code corresponds to $M = N = 1$. It is seen that there is a rise in the error floor with increasing M and N . However, when a larger interleaver size is used as in Fig. 5, it is seen that *PDTC* error floor is almost the same as that of the classical turbo code for moderate M and N values. When asymptotics of the bounds are inspected,

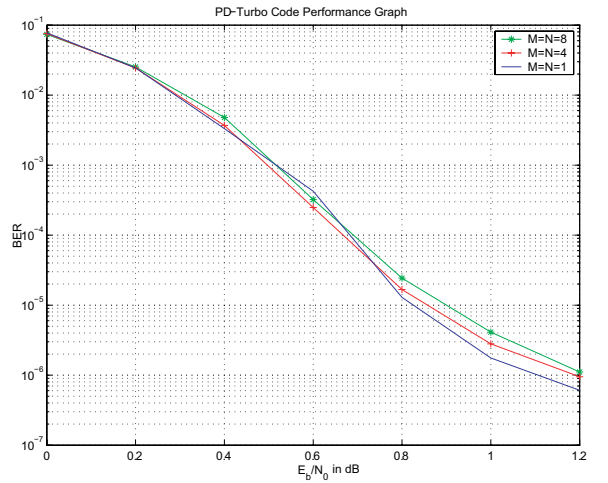


Fig. 6. PD-Turbo code performance graph. Interleaver Size = 2048. N and M are the number of constituent encoders in upper and lower clusters. S-Random ($S=20$) interleaver is used. Iteration number=12

i.e., at very high *SNR*, it is observed that the bounds are off from each other by an amount directly related to code rates. This suggests that the parallelized codes have similar *WEFs* and the rise in error floors is mainly due to rate loss stemming from trellis termination. The rise in error floor is more visible for large values of M and N but diminishes as interleaver size increases. Hence, we can choose larger M and N values with larger interleaver sizes and gain more in decoding delay. Simulation results of the proposed system are depicted in Fig. 6. It is seen from Fig. 6 that the *PDTC* performance is almost the same as that of the classical turbo code along with a slight rise in error floor predicted analytically.

V. CONCLUSION

In this article we propose a new turbo coding scheme which is suitable for parallel processing. We showed using the uniform interleaver assumption and by simulations that the proposed codes perform as well as classical turbo codes. The decoding delay is reduced by a factor of the number of parallel branches. This provides a significant advantage in practical applications.

ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank Dr. Emre Aktaş, who is with Hacettepe University Electrical and Electronics Engineering Department, for his invaluable suggestions.

REFERENCES

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: turbo-codes," in *Proc. IEEE Int. Comm. Conf. 1993*, pp. 1064-1070.
- [2] S. Benedetto and G. Montorsi, "Unveiling turbo codes: some results on parallel concatenated coding schemes," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 42, no. 2, March 1996.
- [3] Y. Wang, J. Zhang, M. Fossorier, J. S. Yedidia, "Reduced latency turbo decoding," in *Proc. IEEE Sixth SPAWC Workshop*, pp. 930-934.
- [4] C. Berrou, Y. Saouter, C. Douillard, S. Kerouedan, and M. Jezequel, "Designing good permutations for turbo codes: towards a single model," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Comm.*, vol. 1, pp. 341-345.
- [5] J. Freudenberger, M. Bossert, V. Zyablov, and S. Shavgulidze, "Woven turbo codes," in *Proc. Seventh International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory 2000*.
- [6] S. Chaoui, "Convolutional coupled codes," Ph.D. dissertation, Univ. of Darmstadt, Feb. 2003.

Collision Free Row Column S-random Interleaver

Orhan Gazi, *Member, IEEE*, and A. Özgür Yılmaz, *Member, IEEE*

Abstract—Parallel decodable turbo codes (PDTCs) are suitable for concurrent decoding and hence have low latency. Memory collision issue is an important problem met during parallel processing. In this article, we propose a collision free interleaver for parallel processing operations. The performance of PDTCs is analyzed with the proposed random interleaver preventing the memory collision problem. Distance spectra of PDTCs with the proposed interleaver are computed and compared to those with *S-random* interleaver.

Index Terms—Parallel decodable turbo codes, parallel processing, collision free interleaver.

I. INTRODUCTION

Iterative decoding along with the use of random interleavers is the reason behind the good performance of turbo-like codes. Iterative decoding introduces the latency problem which is vital especially for real time applications such as voice and video. It is essential to find techniques and structures that decrease latency. Latency reduction can be achieved basically via two approaches. One method is to decrease the complexity of the decoding algorithms; the other is to use multiple processors in order to perform concurrent calculations. Although the use of multiple processors decreases decoding latency significantly, some difficulties and drawbacks in implementation are obviously met. Multiple processors increase the hardware complexity. During the parallel processing operation, memory collision problem which is mainly due to the permutation order of the interleaver may arise. This problem is avoided by specifically designing collision free interleavers. Dividable interleaving method to prevent collision is introduced in [1]. In [2] two component decoders are run concurrently by which latency can be reduced approximately by half. Recently, some deterministic interleaver design methods were suggested. These are the almost regular permutation (ARP)[3], quadratic permutation polynomial (QPP)[4], and dithered relative prime interleavers [5]. For an ARP interleaver, since the block size has to be a multiple of C (cycle length)[6], certain block sizes are not suitable for ARP interleaver design. The QPP interleaver uses a quadratic polynomial [4]. The inverse of the polynomial is not always quadratic. The degree of the inverse polynomial depends on the block size and second order coefficient of the quadratic polynomial. QPP interleavers suffer from poorer performance and low minimum distances which is due to a strict set of

requirements while finding quadratic inverses [6]. The Third Generation Partnership Project (3GPP) is developing a long term evolution (LTE) for the WCDMA based air interface to support data rates up to 100Mbps on the downlink and 50Mbps on the uplink. QPP has been adopted as an emerged solution to the requirements of LTE [6]. Parallel decodable turbo codes (PDTCs) are proposed in [7]. PDTCs utilize parallelization at the encoder side and uses it for parallel decoding at the receiver side.

In this paper, we evaluate the performance of PDTCs with the proposed collision free random interleavers (Row-Column S-Random Interleavers) and compare it to those with *S-random* interleavers. The spectral analysis of collision free interleavers and *S-random* interleavers is performed and compared to each other. The outline of the paper is as follows. Section II explains PDTC structure. In Section III the row-column *S-random* (*RCS-random*) interleaver is introduced, and its spectral analysis is performed. Simulation results are given in Section IV. Finally concluding remarks are drawn in Section V.

II. PARALLEL DECODABLE TURBO CODES (PDTCS)

The PDTC encoder structure is depicted in Fig. 1. The input information sequence is sent to a serial to parallel converter to form subsequences, and these subsequences are encoded using recursive systematic convolutional codes (*RSCs*). The number of *RSCs* are denoted by N and M for upper and inner clusters, respectively. The corresponding decoder is depicted in Fig. 1. Serial-to-parallel and parallel-to-serial converters are employed in this structure. It is clear from Fig. 1 that decoders D_{11}, \dots, D_{1N} and D_{21}, \dots, D_{2M} can run in parallel. This reduces decoding delay considerably.

III. ROW-COLUMN S-RANDOM (RCS-RANDOM) INTERLEAVER

We introduce the row-column *S-random* interleaver in this section. This type of interleaver can be interpreted as a combination of the rectangular and random interleavers. The operation of the *RCS-random* interleaver is as follows. The data sequence is put into a matrix. First, each row of the matrix is interleaved by distinct interleavers then each column of the matrix is interleaved by different interleavers. Finally the interleaved matrix elements are read row-wise or column-wise. The operation of the *RCS-random* interleaver is depicted in Fig. 2.

A. PDTC with *RCS-random* interleaver

RCS-random interleaver can be employed with PDTC with two different approaches. We first explain these two approaches. Distance spectrum is inspected and simulation results are provided later.

Manuscript received December 17, 2008. The associate editor coordinating the review of this letter and approving it for publication was Z. Yan.

O. Gazi is with the Electronics and Communication Engineering Department, Cankaya University, Ankara, Türkiye (e-mail: o.gazi@cankaya.edu.tr).

A. Özgür Yılmaz is with the Electrical and Electronics Engineering Department, Middle East Technical University, Ankara, Türkiye (e-mail: aoyilmaz@eee.metu.edu.tr).

Digital Object Identifier 10.1109/LCOMM.2009.082142

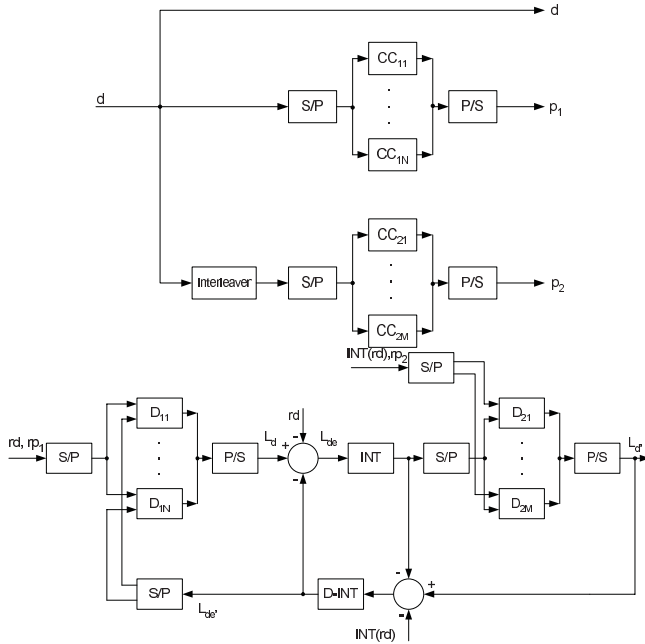


Fig. 1. PDTC encoder and decoder. CC_{1i} , CC_{2i} are constituent RSC s. D_{1i} , D_{2j} ($i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots M$) are the decoders. r_d , r_{p_1} and r_{p_2} are the received signals for data and parity bits. L_d , L_{de} , L'_d and L'_{de} are log-likelihoods.

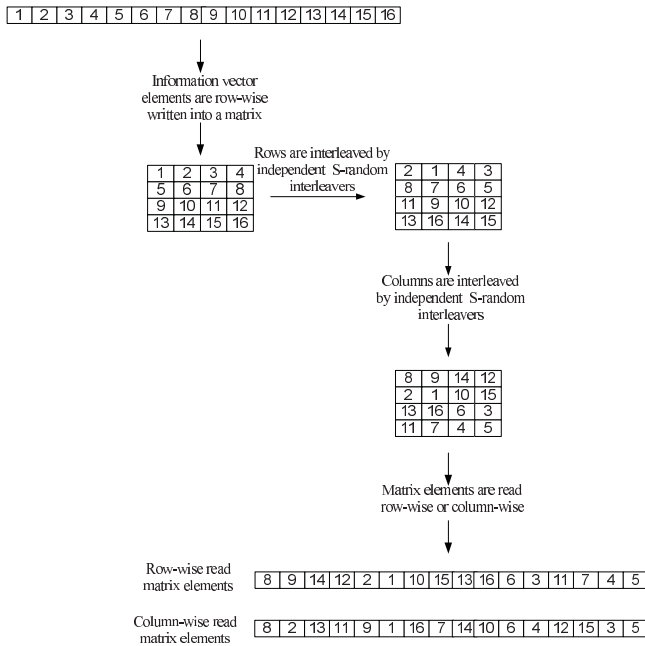
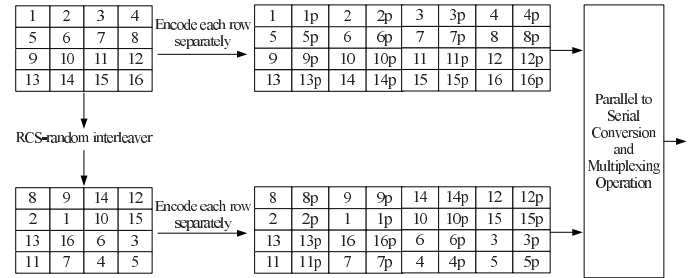
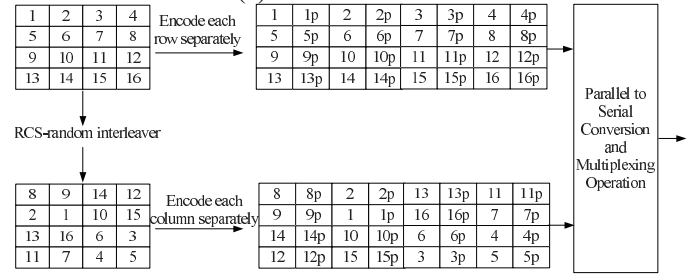


Fig. 2. Row column S -random interleaver operation.

1) *Case I*: PDTC encoding operation with RCS -random interleaver is depicted in Fig. 3-A. Information sequence is placed into a matrix and each row is encoded with a RSC . The matrix is sent into a RCS -random interleaver and interleaved matrix is coded row-wise by RSC s. The use of memory by decoders is also illustrated in Fig. 3-A. It is seen that no memory collision occurs for this type of PDTC encoding operation. Referring to Fig. 3-A, it is seen that if interleaved matrix elements are row-wise read and written into memory, collision is avoided. This sequence of operations



(a) Without collision



(b) With collision

Fig. 3. PDTC Encoder with row column S -random interleaver and PDTC decoder memory use. Memory collision occurs if columns are encoded after interleaving operation.

guarantees the prevention of memory collision if the variables for decoding of each row is kept in a separate memory block which is the case when interleaved matrix elements are encoded row-wise. Since, there would be a collision if two rows have bits at the same column whose variables are stored in the same memory block and this may happen if column-wise encoding is performed. For row-wise encoding this is impossible since they could only go to different columns by the first row interleaving operation.

2) *Case II*: In the second scenario, after RCS -random interleaving operation, column-wise encoding operation is performed. This is illustrated in Fig. 3-B. It is clear from Fig. 3-B that memory collision (MC) occurs for this type of encoding.

TABLE I
DISTANCE SPECTRUM OF PDTC WHEN *RCS-random* - *S-random*
INTERLEAVERS ARE USED (NO MC CASE)

RC=Row and Column Number, Cn=Code Number			
Code Weight	Cn (RC=32x32)	Cn (RC=16x64)	Cn (RC=8x128)
10	2-0	2-0	0-0
12	4-0	5-0	6-0
13	1-0	0-0	0-0
14	6-1	5-0	6-0
15	11-7	3-1	0-0
16	19-12	9-3	6-0
17	27-20	7-5	1-1
18	38-31	14-10	9-5

B. Distance Spectrum of PDTCs

The reason behind the superior performance of turbo-like codes lies behind the number of low-weight codewords. In [8] a fast algorithm to estimate the distance spectrum of turbo codes is suggested. We employed the technique in [8] to compute the number of low weight codewords. A hundred *RCS-random* interleavers and *S-random* interleavers are generated to compute spectrum of PDTC. In Table 1 average distance spectrum of PDTCs for a hundred *RCS-random* and *S-random* interleavers are presented. It is seen from the table that, minimum distance of PDTC is a little greater when *S-random* interleaver is employed. However, it is clear from Table 1 that the number of low weight codewords for *RCS-random* interleavers and *S-random* interleavers does not differ a lot. The table is obtained for a frame length of 1024. For much longer frame lengths it is expected that the difference between the number of low weight code words for *RCS-random* interleaver and *S-random* interleaver cases will be much smaller.

IV. SIMULATION AND RESULTS

We used $(1, 5/7)_{octal}$ *RSC* for all the constituent codes in our studies without loss of generality. Trellis termination is performed in each encoder where both the terminating data and parity bits are appended to the encoded sequence. This slightly decreases the overall code rate and is taken into account while calculating the $\frac{E_b}{N_0}$ values in simulations. The simulation results for frame lengths 512, 1024, and 4096 are depicted in Fig. 4 where it is seen that for larger frame lengths and small number of parallel branches i.e., $N=M=4$ and frame length = 4096, collision free *RCS-random* interleaver achieves almost the same performance as that of *S-random* interleaver which does not account for memory collision. For small frame sizes, e.g. 512 and 1024, the performance loss is not significant. The small performance loss is due to the lower minimum distance and larger number of codewords with small Hamming distances. For much larger frame lengths the performance difference is expected to be negligible even for large number of parallel branches. The proposed interleaver can also be used to support variable frame sizes. The prunable properties of the suggested interleaver is the ongoing future work. Considering the already available deterministic interleavers, such as ARP and QPP, our proposed interleaver is constructed in a random manner, and it doesn't suffer from a set of strict set of requirements as in QPP interleavers [6]. *RCS-random* interleavers can be constructed

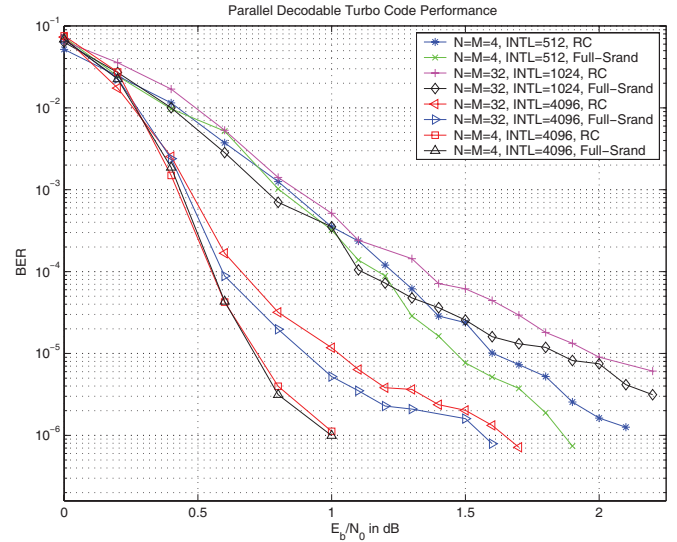


Fig. 4. PDTC performance graph for *RCS-random* and *S-random* interleavers. INTL means interleaver length.

for any interleaver length, which is not the case for ARP interleavers [6].

V. CONCLUSION

A collision free novel random interleaver structure is proposed. The specific cases of the proposed interleaver for parallel decodable turbo codes are inspected. The performance of the parallel decodable turbo codes with the proposed interleaver is compared to those with collision permitted *S-random* interleaver. It is verified by simulation results that randomly chosen *RCS-random* interleavers, even without any optimization, are both collision free and provide performance comparable to *S-random* interleavers. The PDTCs with the proposed collision free *RCS-random* interleavers comprise a full communication system with reduced latency and no memory collision problem.

ACKNOWLEDGEMENT

The authors would like to thank anonymous reviewers for their helpful comments.

REFERENCES

- [1] J. Kwak and K. Lee, "Design of dividable interleaver for parallel decoding in turbo codes," *Electron. Lett.*, vol. 38, no. 22, pp. 1362–1364, 2002.
- [2] Y. Wang, J. Zhang, M. Fossorier, and J. S. Yedidia, "Reduced latency turbo decoding," in *SPAWC, IEEE 6th Workshop*, Honolulu, USA.
- [3] C. Berrou, Y. Saouter, C. Douillard, S. Kerouedan, and M. Jezequel, "Designing good permutations for turbo codes: towards a single model," in *IEEE Int. Conf. on Comm.*, vol. 1, June 2004, pp. 341–345.
- [4] J. Sun and O. Takeshita, "Interleavers for turbo codes using permutation polynomials over integer rings," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, pp. 101–119, 2005.
- [5] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Distance upper bounds and true minimum distance results for turbo codes designed with DRP interleavers," in *3rd Int. Symp. On Turbo Codes and Rel. Topics*, Brest, France, 2003, pp. 169–172.
- [6] B. C. T. K. B. A. Nimbalkar, Y. Blankenship, "ARP and QRP interleavers for LTE turbo coding," in *IEEE WCNC, Las Vegas, USA*, Apr. 2008.
- [7] O. Gazi and A. O. Yilmaz, "Fast decodable turbo codes," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 11, no. 2, pp. 173–175, 2007.
- [8] S. Scalise and H. Ernst, "A fast algorithm to estimate the distance spectrum of turbo codes and tail-biting turbo codes," *Telecommunication Systems*, vol. 24:2, pp. 167–185, 2003.

An Upper Bound for Limited Rate Feedback MIMO Capacity

Gökhan M. Güvensesen, *Student Member, IEEE*, and A. Özgür Yılmaz

Abstract—We develop a technique to upper bound the point-to-point MIMO limited rate feedback (LRF) capacity under a wide class of vector quantization schemes. The upper bound turns out to be tight and can also be used to obtain an absolute upper bound by using a bounding distribution for Grassmannian beamforming. The bounding technique can be applied to other problems requiring the exact evaluation of the expected value of matrix determinant.

Index Terms—Limited rate feedback, MIMO, capacity bound, bounding distribution, vector quantization, reduced precoding, singular value decomposition.

I. INTRODUCTION

CAPACITY gains promised by multi-input multi-output (MIMO) systems often require an accurate knowledge of the channel at transmitter and receiver sides especially in quest to capitalize these possible gains in practical systems. An accuracy problem arises when channel state information (CSI) has to be transmitted from the receiver to the transmitter. It is obvious that CSI cannot be transmitted with infinite precision. A limited rate feedback channel is usually available for this communication and this sets a limit for the accuracy of CSI at the transmitter side.

It was shown that the MIMO channel is interference limited when the channel estimation is imperfect [1]. It was further observed in [1] that instantaneous feedback, even if imperfect, gives large capacity gains in low SNR and is useful in high SNR especially when the number of transmit antennas (n_t) is larger than the that of receive antennas (n_r) [2]. In [3], quantization rules and corresponding quantizer design criteria were proposed to be used in MISO (multiple-input single-output) and MIMO channels. Quantization of beamformers were investigated under a Grassmannian line packing framework with regard to quantization codebook size, capacity-SNR loss, and outage performance in [4], [5].

We investigate the capacity of point-to-point MIMO channels in this paper as opposed to the broadcast channel settings in aforementioned studies [6]. Although the capacity is less affected by the lack of CSI on the transmitter side at high SNR [7], its availability is very important both at low SNR and in designing practical systems that can operate close to the capacity as in adaptively modulated MIMO schemes [8] since the complex task of joint detection and decoding is avoided.

Manuscript received December 2, 2007; revised May 10, 2008; accepted July 12, 2008. The associate editor coordinating the review of this letter and approving it for publication was R. Nabar.

This work was supported in part by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under grant 104E027.

The authors are with the Department of Electrical and Electronics Engineering, Middle East Technical University, Ankara, Turkey (e-mail: {aoyilmaz, guvensesen}@metu.edu.tr).

Digital Object Identifier 10.1109/TWC.2009.071356

Furthermore, the capacity is strictly smaller with $n_t > n_r$ if no CSI is available at transmitter [2]. We concentrate on a finite rate feedback scenario in which precoders obtained by the singular value decomposition of the MIMO channel [9] are fed back to the transmitter side.

A capacity loss bound for covariance matrix based quantization was presented in [10] and a capacity loss bound was proposed in [11] for designing matrix quantization based codebooks. We herein focus on quantizing the columns of the precoding matrix obtained from singular value decomposition (SVD). The channel is quasi-parallelized by separately quantizing precoders and well-known adaptive modulation and coding techniques can be utilized as stated in [2]. Covariance matrices generated randomly with uniform distribution on the unit sphere are used in [10], that is, random matrix quantization is studied. On the other hand, our main contribution in this paper is the derivation of a capacity upper bound expression that is valid for a wide range of vector based quantization schemes. The proposed upper bound turns out to be quite tight mainly due to the exact evaluation of the expected value of matrix determinant as opposed to similar studies using Hadamard inequality to upper bound the determinant as in [10] and using approximate density function of determinant expression and partition cell approximation in [11], [12]. As a byproduct, an absolute upper bound to LRF MIMO capacity using precoding based quantization is also herein derived by utilizing a bounding distribution for Grassmannian beamforming [13].

The outline is as follows. The system model is explained in Section II. MIMO capacity expressions for LRF are obtained in Section III. An analytical upper bound for the LRF MIMO capacity is derived in Section IV. Two exemplary quantization schemes will be studied in Section V and corresponding numerical results are presented in Section VI. The paper is concluded with Section VII.

II. SYSTEM MODEL

The following notation is used throughout the manuscript. Boldface lower and upper-case letters denote column vectors and matrices, respectively. Scalars are denoted by plain lower-case letters. The superscript $(\cdot)^*$ denotes the complex conjugate for scalars and conjugate transpose for vectors and matrices. The absolute value of a scalar is shown with $|\cdot|$. The $n \times n$ identity matrix is shown with \mathbf{I}_n . The trace operator and determinant are denoted by $tr(\cdot)$ and $|\cdot|$, respectively. The autocorrelation matrix for a random vector \mathbf{a} is $R_{\mathbf{a}} = E[\mathbf{a}\mathbf{a}^*]$ where $E[\cdot]$ stands for the expected value operator. The $(i, j)^{th}$ element of a matrix \mathbf{A} is denoted by $A_{i,j}$.

The general expression for a point-to-point MIMO channel with n_r receive antennas and n_t transmit antennas is given

by $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}}$, where $\tilde{\mathbf{y}}$ is the received vector, $\tilde{\mathbf{H}}$ is the $n_r \times n_t$ channel matrix, $\tilde{\mathbf{x}}$ is the transmitted vector, and $\tilde{\mathbf{w}}$ is the zero-mean circularly symmetric complex Gaussian (ZMC-SCG) white (spatially and temporally) noise with normalized variance 1. The channel matrix $\tilde{\mathbf{H}}$ is comprised of independent ZMCSCG random variables with variance 1. Considering a block fading model, the channel matrix is assumed to be constant during a coherence interval significantly larger than symbol duration. A fixed average power is allotted for each transmission which corresponds to setting $\text{tr}(R_{\tilde{\mathbf{x}}}) \leq P$ (Sec. 10.3 in [9]).

In the case that perfect channel information is available both at the transmitter and receiver, singular value decomposition (SVD) is applied to decompose the MIMO channel into $\min(n_r, n_t)$ parallel subchannels over which multiple streams may be transmitted [14]. The following equivalent expression is obtained for the received vector when SVD is performed to attain $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{UDV}^*$:

$$\mathbf{U}^*\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{DV}^*\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{U}^*\tilde{\mathbf{w}}. \quad (1)$$

The entries of \mathbf{D} are taken to be decreasing without loss of generality. The transmitted vector can be written in general as in $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}$ where \mathbf{P} is a precoding matrix, $\mathbf{\Lambda}$ is a diagonal matrix used to distribute power among subchannels, and \mathbf{x} is the original information vector assumed to have $R_{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{I}_{\min(n_r, n_t)}$. If the precoding matrix is chosen to be $\mathbf{P} = \mathbf{V}$, by the unitary property of the precoding matrix ($\mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{I}$)

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + \mathbf{w}, \quad (2)$$

where $\mathbf{y} = \mathbf{U}^*\tilde{\mathbf{y}}$ and $\mathbf{w} = \mathbf{U}^*\tilde{\mathbf{w}}$. Since both \mathbf{D} and $\mathbf{\Lambda}$ are diagonal and $R_{\mathbf{w}} = \mathbf{I}$, the channel is decomposed into parallel subchannels. The capacity is achieved by $\mathbf{\Lambda}$ obtained through the waterfilling procedure [14] with the constraint that $\text{tr}(\mathbf{\Lambda}^2) \leq P$. We note here that the columns of matrix \mathbf{V} are isotropically distributed on the n_t -dimensional complex unit circle when considered over the realizations of $\tilde{\mathbf{H}}$. When there is only a partial CSI in transmitter due to finite rate feedback, one has imperfect precoding and power distribution matrices denoted by \mathbf{V}_f and $\mathbf{\Lambda}_f$, respectively. Eqn. (2) now becomes

$$\mathbf{y} = \mathbf{DV}^*\mathbf{V}_f\mathbf{\Lambda}_f\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (3)$$

which suggests that subchannels now interfere with each other since $\mathbf{V}^*\mathbf{V}_f \neq \mathbf{I}$, in general. We will investigate the capacity of LRF MIMO channels based on (3).

In order to reduce the rate of the feedback channel, the idea of reduced precoding can be used [15]. In this scheme, the number of beamformers used in a spatial multiplexing system is adaptively varied in order to minimize probability of symbol vector error or to maximize capacity by allocating equal power ($\mathbf{\Lambda}_f^2 = \frac{P}{n}\mathbf{I}_n$) to selected subchannels [15], [11]. Transmitting only the precoding vectors corresponding to the strongest subchannels will suffice to maximize communication rate over MIMO channels. Thus, this strategy allows efficient utilization of the feedback bits by quantizing only relevant precoders.

The analytical bound for limited rate feedback MIMO capacity to be obtained in section IV can be used to determine the number of precoders to be used at each average SNR

value in order to maximize the spectral efficiency. The idea of reduced precoding and the utilization of feedback for precoders are not only useful at low SNR values but also at high SNR especially for MIMO systems with $n_t > n_r$ [2].

III. CAPACITY WITH LIMITED RATE PRECODING

Eqn. (3) can be written with an equivalent channel matrix $\mathbf{H} = \mathbf{DV}^*\mathbf{V}_f$ as in

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}_f\mathbf{x} + \mathbf{w}. \quad (4)$$

Noting that $\mathbf{\Lambda}_f^2 = \frac{P}{n}\mathbf{I}_n$, the capacity of this scheme which makes use of n precoders is given by

$$\mathbf{C}_{n\text{-pre}} = E \left\{ \log_2 \det \left(\mathbf{I}_n + \frac{P}{n} \mathbf{H}\mathbf{H}^* \right) \right\}. \quad (5)$$

and can be achieved with MMSE estimation and successive interference cancellation [16]–[18] where the equivalent channel matrix \mathbf{H} can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{DV}^*\mathbf{V}_f \\ &= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{1f} & \dots & \mathbf{v}_{nf} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

The equivalent channel matrix \mathbf{H} has its $(i, j)^{\text{th}}$ element as $H_{i,j} = d_i \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{jf}$, where \mathbf{v}_i is the i^{th} column of \mathbf{V} and, \mathbf{v}_{jf} is the j^{th} column of \mathbf{V}_f . Defining $V_{ij} = \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{jf}$, one can evaluate

$$(\mathbf{H}\mathbf{H}^*)_{i,j} = d_i d_j \left(\sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk}^* \right). \quad (6)$$

Evaluation of the capacity in (5) requires the probability distributions of $V_{ij} = \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{jf}$ for $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ and hence the quantization rule used for limited rate feedback has to be specified.

A set of 2^{N_f} vectors $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{2^{N_f}}\}$ generated to construct the quantization codebook are defined where N_f stands for the number of feedback bits per precoding vector. Quantization vectors are length- n_t complex vectors on the n_t -dimensional complex unit circle and the quantization while obtaining the precoding vectors is determined by the following rule used in LRF MIMO studies [4]–[6], [19]:

$$\mathbf{v}_{if} = \arg \max_{\mathbf{q}_j, j=1, \dots, 2^{N_f}} |\mathbf{v}_i^* \mathbf{q}_j|^2. \quad (7)$$

There are two types of random variables in (5) whose distributions and dependence properties have to be determined in order to evaluate $\mathbf{C}_{n\text{-pre}}$. First, the cumulative distribution function (cdf) of $V_{ii} = \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{if}$ is peculiar to the given quantization codebook and rule, and we will investigate the cdf of V_{ii} for two different quantization methods in Section V. Moreover, the cdf for V_{ij} 's for $i \neq j$ is needed. In [4], [5], [19], the cdf of the squared absolute inner product between two isotropically distributed length- n_t complex unit vectors is given as

$$F_o^{n_t}(x) = \begin{cases} 1 - (1-x)^{n_t-1} & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 \\ 1 & , x > 1. \end{cases} \quad (8)$$

The same result and hence cdf hold for the case of one fixed vector and an isotropically distributed vector since one of them being isotropically distributed is sufficient for the result [4]. Bearing in mind that $\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{j\mathbf{f}}$ corresponds to projection of \mathbf{v}_i onto $\mathbf{v}_{j\mathbf{f}}$, the following holds by orthogonality of \mathbf{v}_i 's in our problem

$$\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_{1\mathbf{f}} = \mathbf{v}_k^* \left(\mathbf{v}_{1\mathbf{f}} - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{v}_j^* \mathbf{v}_{1\mathbf{f}}) \mathbf{v}_j \right) \quad (9)$$

for $k = 2, \dots, n$. Defining $\mathbf{v}_{1\mathbf{f}}' = \mathbf{v}_{1\mathbf{f}} - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{v}_j^* \mathbf{v}_{1\mathbf{f}}) \mathbf{v}_j$, the vector $\mathbf{v}_{1\mathbf{f}}'$ is in the null space of \mathbf{v}_i 's, $i = 1, \dots, k-1$, where the null space has dimension $(n_t - k + 1)$. The squared norm of $\mathbf{v}_{1\mathbf{f}}'$ is $(\mathbf{v}_{1\mathbf{f}}')^* \mathbf{v}_{1\mathbf{f}}' = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} |\mathbf{v}_j^* \mathbf{v}_{1\mathbf{f}}|^2 = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} |V_{j1}|^2$. Considering the projection of a fixed vector \mathbf{v}_k onto an isotropically distributed vector $\mathbf{v}_{1\mathbf{f}}'$ which is of dimension $(n_t - k + 1)$, one obtains the following conditional probability distribution function for $|\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_{1\mathbf{f}}|^2$ by using (8):

$$\begin{aligned} F_{|\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_{1\mathbf{f}}|^2}(x | |\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{1\mathbf{f}}|^2 = a_i, \quad i = 1, \dots, k-1) \\ = F_o^{n_t - k + 1} \left(\frac{x}{\left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} a_i\right)} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

for $k = 2, \dots, n$. The expectation in (5) is over the channel matrix \mathbf{H} or equivalently, over V_{ij} 's. For a given channel realization, \mathbf{v}_i 's are fixed and the quantized precoding vectors $\mathbf{v}_{i\mathbf{f}}$'s are chosen independently of each other by the rule given in (7). Hence, $\mathbf{v}_{i\mathbf{f}}$'s are independent of each other on the condition that \mathbf{v}_i 's are given. One should note that $\mathbf{V}^* \mathbf{V}_{\mathbf{f}}$ product involves V_{ij} terms and the phase of V_{ij} becomes relevant in this case. Recalling that the vectors are isotropically distributed, the phases of all the random variables corresponding to the projections of the precoders onto quantized precoders are independent and uniformly distributed in $[0, 2\pi]$ since the quantization rule in (7) is blind to multiplication of all the entries of a quantization vector by a complex number α of unity amplitude as $|\alpha^* \mathbf{b}|^2 = |\alpha \mathbf{a}^* \mathbf{b}|^2$. To summarize, it holds true that V_{ij} has a uniformly distributed phase in $(0, 2\pi)$ and it is independent of V_{ik} for all $k \neq j$ and V_{lj} for all $l \neq i$ for given \mathbf{v}_i 's since knowing \mathbf{v}_i only is sufficient to determine $\mathbf{v}_{i\mathbf{f}}$ for the given rule in (7).

Isotropical distribution implies that $|V_{ii}|^2 = |\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{i\mathbf{f}}|^2$'s for $i = 1, \dots, n$ are identically distributed and independent random variables. Similarly, a corresponding distribution holds for $|V_{kj}|^2 = |\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_{j\mathbf{f}}|^2$ and its cdf has a form identical to that given in (10).

IV. A CAPACITY UPPER BOUND

The capacity expression in (5) is impractical to be used in practical system design since it needs the distribution of V_{ij} 's and the expectation over V_{ij} 's distributions. We will obtain a very tight analytical upper bound for capacity of the n -precoder scheme and this analytical bound needs only the expectations $E_{11} = E|V_{11}|^2$ and $E_{21} = E|V_{21}|^2$ to be evaluated. The expected values will be denoted with $E_{ij} = E|V_{ij}|^2$ and E_{ii} 's are the same for all i 's and can be evaluated for a given quantization codebook. When the value of E_{11} is given, the value of E_{21} can be calculated easily as

follows. Due to the isotropical distribution of \mathbf{v}_i 's, E_{ij} is same as E_{21} for all $i \neq j$. The value of E_{21} can be found in terms of E_{11} by using (10) as

$$\begin{aligned} E[|V_{21}|^2] &= E[E[|V_{21}|^2 | |V_{11}|^2 = a]] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{|V_{21}|^2}(x | |V_{11}|^2 = a) f_{|V_{11}|^2}(a) dx da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{1-a} x \frac{(n_t - 2)}{(1-a)} \left(1 - \frac{x}{1-a}\right)^{n_t - 3} dx \right) f_{|V_{11}|^2}(a) da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-a}{n_t - 1} f_{|V_{11}|^2}(a) da = \frac{1 - E_{11}}{n_t - 1} \end{aligned} \quad (11)$$

This result in (11) is intuitive since, after projecting $\mathbf{v}_{1\mathbf{f}}$ on \mathbf{v}_1 , $n_t - 1$ orthonormal vectors $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{n_t}\}$ are left. Due to isotropical distribution, the power in the part of $\mathbf{v}_{1\mathbf{f}}$ orthogonal to \mathbf{v}_1 is distributed equally between $n_t - 1$ orthonormal vectors in average. The capacity for the n -precoder scheme can be upper bounded by using Jensen's inequality such that

$$E \left\{ \log_2 \left| \mathbf{I}_n + \frac{P}{n} \mathbf{H} \mathbf{H}^* \right| \right\} \leq \log_2 \left(E \left\{ \left| \mathbf{I}_n + \frac{P}{n} \mathbf{H} \mathbf{H}^* \right| \right\} \right). \quad (12)$$

The capacity bound of the n -precoder case given in (12) can be written in terms of E_{11} and E_{12} by using the result of the lemma given in Appendix as

$$\begin{aligned} C_{n\text{-pre}} &\leq \log_2 \left(1 + \sum_{k=1}^n \sum_{S_k \in P_k} \left(\frac{P}{n} \right)^k E [(d_{a_1} d_{a_2} \dots d_{a_k})^2] \right) \\ &\quad \sum_{(j_1 \in S)} \sum_{(j_2 \in S, j_2 \neq j_1)} \dots \sum_{(j_k \in S, j_k \neq j_1, \dots, j_{k-1})} (E_{a_1 j_1} \dots E_{a_k j_k}) \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$E_{a_i j_i} = E [|V_{a_i j_i}|^2] = \begin{cases} E_{11} = E [|V_{11}|^2] & \text{if } a_i = j_i \\ E_{12} = E [|V_{12}|^2] & \text{if } a_i \neq j_i \end{cases} \quad (14)$$

$S = \{1, 2, \dots, n\}$, $S_k = \{a_1, \dots, a_k\}$; and P_k is the set containing all possible (n, k) combinations of S . The term $\sum_{(j_1 \in S)} \dots \sum_{(j_k \in S, j_k \neq j_1, \dots, j_{k-1})} (E_{a_1 j_1} \dots E_{a_k j_k})$ does not depend on which k -element combination (a_1, a_2, \dots, a_k) chosen from set P_k is used in (13) since j_i 's for $i = 1, 2, \dots, k$ are chosen from set $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Using this fact, one can further simplify the capacity bound given in (13) by selecting (a_1, a_2, \dots, a_k) as $(1, 2, \dots, k)$ such that

$$\begin{aligned} C_{n\text{-pre}} &\leq \log_2 \left(1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{P}{n} \right)^k E \left\{ \sum_{S_k \in P_k} (d_{a_1} d_{a_2} \dots d_{a_k})^2 \right\} \right) \\ &\quad \cdot \sum_{(j_1 \in S)} \sum_{(j_2 \in S, j_2 \neq j_1)} \dots \sum_{(j_k \in S, j_k \neq j_1, \dots, j_{k-1})} (E_{1 j_1} \dots E_{k j_k}). \end{aligned} \quad (15)$$

$E \left\{ \sum_{S_k \in P_k} (d_{a_1} d_{a_2} \dots d_{a_k})^2 \right\}$'s for $k = 1, \dots, n$ are required to evaluate the capacity bound in (15) and one does not need to calculate $E [(d_{a_1} d_{a_2} \dots d_{a_k})^2]$ for all possible (n, k) combinations (a_1, \dots, a_k) from set S separately. Instead, the expectation of the sum of all possible joint moments are necessary. Hence, only the expectation of the sum of all possible joint moments $E \left\{ \sum_{S_k \in P_k} (d_{a_1} d_{a_2} \dots d_{a_k})^2 \right\}$ has to be found. This can be found by using Monte Carlo simulations or analytically by using currently available results for the joint

ordered moments in a closed form presented in [20] and this makes the proposed bound completely analytical.

As will be seen in Section VI, the capacity bound in (15) is very tight and can be used for practical purposes. With the help of this analytical bound, one can design an adaptive MIMO system that can change the number of precoders and the feedback rate according to the current average SNR value. The bound given in (15) is valid for many vector quantization methods as long as $V_{ij} = \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{jf}$ has a distribution such that the phase of V_{ij} is uniformly distributed in $(0, 2\pi)$ which is independent of V_{ik} for all $k \neq j$ and V_{lj} for all $l \neq i$. The quantization rule given in (7) is sufficient but not necessary to meet this condition. So, the results of this section can be applied to a wide variety of quantization schemes. Moreover, the bound is also valid for no quantization cases and we can easily construct an upper bound for the exact capacity of a MIMO system that uses n of its strongest subchannels by simply setting $E_{11} = 1$ and $E_{12} = 0$ in (15).

V. BOUNDING DISTRIBUTION AND RVQ

In this section, we will present two exemplary quantization methods that will be used to produce some numerical results in section VI. The first method is random vector quantization (RVQ) in which a codebook is generated randomly and the closest vector in the codebook is conveyed to the transmitter according to the rule given in (7) [19]. The use of RVQ as a vector quantization scheme allows simpler analysis and can be helpful in designing practical limited rate feedback MIMO systems. The probability distribution function of $|V_{11}|^2$ has been readily obtained in [4], [5], [19] as

$$F_{|V_{11}|^2}(x) = (F_o^{n_t}(x))^{2^{N_f}}. \quad (16)$$

The phase of V_{ij} is independent of its magnitude and uniformly distributed in $[0, 2\pi]$. The expected value of a random variable distributed with (16) is evaluated in [19] as

$$E[|V_{11}|^2] = E_{11} = 1 - 2^{N_f} B(2^{N_f}, \frac{n_t}{n_t - 1}), \quad (17)$$

where $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ is the Beta function and the Gamma function is given by $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ while $E_{12} = E|V_{12}|^2$ can be calculated from (11).

The second method is the one that maximizes the capacity by increasing the projection power, namely $|V_{11}|^2$. By defining a random variable z as $z = 1 - |V_{11}|^2$, we can say that for a good beamformer, the expected value of z has to be as close as possible to zero. An upper bound for the *cdf* of z , $F_z(z)$, is given in [13] such that $F_z(z) \leq \tilde{F}_z(z)$ for $0 \leq z \leq 1$ and

$$\tilde{F}_z(z) = \begin{cases} 2^{N_f} \cdot z^{n_t-1} & , 0 \leq z < \left(\frac{1}{2^{N_f}}\right)^{\frac{1}{(n_t-1)}} \\ 1 & , z \geq \left(\frac{1}{2^{N_f}}\right)^{\frac{1}{(n_t-1)}} \end{cases}. \quad (18)$$

A good beamformer shall try to come as close as possible to this distribution which we refer to as the bounding distribution hereafter [13]. For a hypothetical quantization method that attains this bounding distribution, we can evaluate the E_{11} and E_{12} values in order to construct an upper bound to the capacity of limited rate feedback MIMO scheme that none of

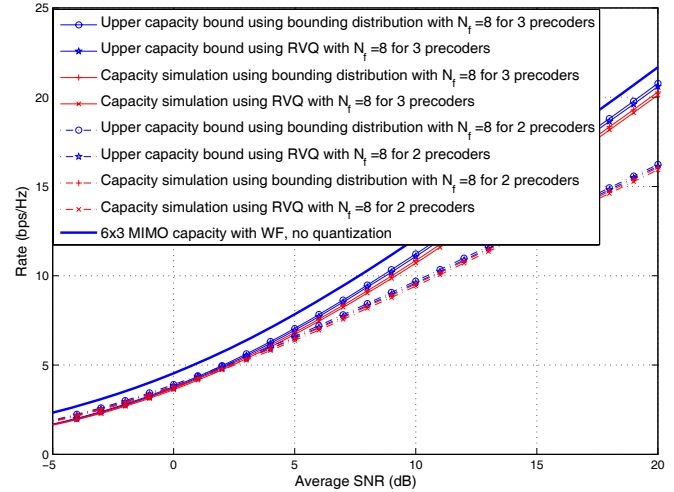


Fig. 1. 6×3 MIMO capacities and upper bounds for 2 and 3-precoder LRF schemes. RVQ and bounding distribution are used with $N_f = 8$.

the quantization methods can exceed. E_{11} can be found as given below

$$E_{11} = 1 - E[z] = 1 - 2^{N_f} \left(\frac{n_t - 1}{n_t} \right) \left(\frac{1}{2^{N_f}} \right)^{\left(\frac{n_t}{n_t - 1} \right)} \quad (19)$$

and E_{12} by (11). The value of E_{11} obtained by this bounding distribution in (19) is the maximum value of E_{11} that can be achieved among all quantization codebooks using the quantization rule in (7) for given N_f and n_t values.

VI. NUMERICAL RESULTS

In this section, the capacity upper bound obtained for LRF MIMO given in (15) is evaluated for RVQ and the bounding distribution. Random variables are generated by the inversion method [21] in simulations and placed in (5) to obtain ergodic capacity. The random variables $|V_{ii}|^2$'s are generated first while the others are drawn based on the distribution given in (10) and each data point is obtained by generating 10,000 realizations.

In Fig. 1, 6×3 MIMO system capacity under limited rate feedback with $N_f = 8$ is evaluated by using RVQ and the bounding distribution for 2 and 3-precoder schemes where the capacity bound given in (15) is also found by using E_{11} and E_{12} values for these schemes. It is seen in the figure that the capacity upper bound is very tight. It is 0.3-0.5 dB away from the 6×3 LRF MIMO capacities. It is further observed that the RVQ scheme is almost optimal since RVQ and bounding distribution capacities are quite close to each other. There is a 0.2 dB difference between these two capacities and hence we can say that RVQ can be used as a practical quantization technique that attain rates quite close to the capacity with tolerable N_f values. This also justifies its use in the literature for analysis purposes. Moreover, when compared to the exact MIMO channel capacity obtained with waterfilling (WF) that uses a short-term power constraint (Sec. 10.3 in [9]), there is a 1.3 dB loss in limited feedback incremental precoding scheme that uses RVQ with $N_f = 8$ which is well predicted by the proposed bound at high SNR.

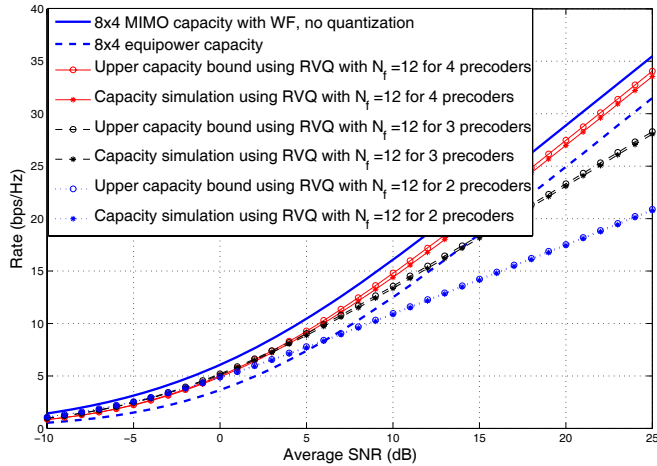


Fig. 2. 8×4 MIMO capacities and upper bounds for 2, 3 and 4-precoder LRF schemes. RVQ is used with $N_f = 12$.

In Fig. 2, RVQ is used as a quantization technique and the capacities of n -precoder 8×4 MIMO schemes are evaluated with their corresponding bounds for $N_f = 12$ and $n = 2, 3$, and 4. The equipower scheme, which corresponds to capacity with no CSI at transmitter and allocates equal power among the transmit antennas, is also depicted for comparison. It can be observed that the capacity bounds evaluated with the E_{11} value of RVQ for $N_f = 12$ is quite fine and 0.15-0.4 dB away from the ergodic capacity with $n = 2, 3$, and 4. Furthermore, it is seen that the 2-precoder capacity with $N_f = 12$ is better than the equipower scheme up to 6dB, 3-precoder scheme is better up to 13.5 dB. The 4-precoder scheme that uses all the degrees of freedom in the system always has higher capacity than the equipower scheme. At high SNR, there is a 1.6 dB difference between the 4-precoder and equipower schemes. When compared to the exact capacity with WF, there is a 1.4 dB loss in limited feedback incremental precoding scheme at high SNR and this can be compensated by increasing N_f . $N_f = 12$ may seem to be large for practical systems but this large value is due to the large transmit antenna number ($n_t = 8$). In contrast, a reasonable N_f value is sufficient to reach the capacity for small size MIMO system.

In case of limited feedback, the losses are approximately equal to the SNR loss due to quantization $10 \log_{10}(\frac{1}{E_{11}})$ dB. Intuitively speaking, the instantaneous effective SNR of the channel for single precoder case is $P \cdot |V_{11}|^2$ and hence there occurs a $-10 \log_{10} E_{11}$ dB SNR loss in the LRF scenario. This holds approximately true for the general n -precoder scheme. As N_f increases, E_{11} asymptotically becomes 1 as observed in (17) and (19) so that the capacity of LRF MIMO approaches to the capacity with no quantization. The capacity upper bound in (15) is maximized at $E_{11} = 1$ and $E_{12} = 0$ so a good quantization scheme should have a E_{11} value which is as close to 1 as possible for a given number of feedback bits. Among the given vector quantization techniques and N_f , the best quantization codebook is the one that gives the highest E_{11} value and thus, it has the greatest capacity bound value in (15).

As a result, we can use the capacity bound given in (15) to evaluate the performance of different quantization schemes.

For a given quantization scheme, it can be used to determine the number of precoders to be used at each average SNR value. In other words, for a given MIMO system and the quantization technique with N_f value, one calculates the E_{11} value of the quantization and the expectation of the sum of possible joint moments $E \{ \sum_{S_k \in P_k} (d_{a_1} d_{a_2} \cdots d_{a_k})^2 \}$ in (15) only once. After that, these two values can be used to construct the bound in (15) easily. With the help of this bound, it is possible to determine the SNR regions in which the number of precoders to be used to maximize capacity are specified during the operation of the studied incremental precoding scheme. For our exemplary quantization in Fig. 2, it is seen that using 2 precoders up to 0 dB, using 3 precoders between 0 and 5 dB, and using 4 precoders above 5 dB maximizes the capacity and this strategy always results in significantly higher capacity than the equipower scheme especially for $n_t > n_r$.

The main conclusion is that the tightness of the proposed bound is established. The upper bound can be applied to many LRF MIMO schemes and also to other problems where the exact evaluation of the determinant expected value is needed.

VII. CONCLUSION

We developed a tight upper bound to point-to-point LRF MIMO capacity that is valid for a large body of vector quantization schemes. The number of precoders used in a practical system can be determined for each average SNR value based on the upper bound developed in this paper. We furthermore evaluated the upper bound using a bounding distribution from Grassmannian beamforming which resulted in the observation that the simple RVQ technique performs quite close to capacity upper bound. Perfect channel estimation at the receiver is assumed in this study. Future studies will include the consideration of imperfect channel estimation and its delayed transmission to the transmitter side within a limited rate feedback scenario in a mobile system. Also, practical quantization methods for MIMO systems will be investigated within the framework developed in this paper.

APPENDIX: PROOF OF (13)

Define a matrix $\mathbf{B} = \frac{P}{n} \mathbf{H} \mathbf{H}^*$ with elements $B_{i,j} = \frac{P}{n} d_i d_j \left(\sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk}^* \right)$ and another matrix $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n + \mathbf{B}$. For the capacity bound of the n -precoder MIMO scheme, the determinant of the $n \times n$ matrix \mathbf{A} is necessary in evaluating (13) and it can be found by Leibniz formula [22]:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{(\Sigma_k \in S^*, k=1, \dots, n!)} \left(\prod_{i=1}^n A_{i, \sigma^k(i)} \right) \cdot \text{sgn}(\Sigma_k), \quad (20)$$

where $\sigma^k(i)$ is the i^{th} element of Σ_k which is the k^{th} element of the permutation group S^* , and S^* includes all possible permutations of the set $S = \{1, 2, \dots, n\}$. There are $n!$ different permutations of S and hence S^* is composed of $n!$ permutations. The function 'sgn' of permutations in the permutation group S^* returns +1 or -1 for even and odd permutations, respectively [23].

Recalling that $A_{i,j}$ equals $B_{i,j}$ for $i \neq j$ and $1 + B_{i,i}$ otherwise, one can write the determinant expression in a

compact form in terms of B_{ij} 's directly from (20) after a careful inspection as

$$\det(\mathbf{A}) = 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{S_k=(a_1, \dots, a_k) \in P_k} \left(\sum_{(\Sigma_l^k \in S_k^*, l=1, \dots, k!)} \left(\prod_{i=1}^k B_{a_i, \sigma^l(i)} \cdot \text{sgn}(\Sigma_l^k) \right) \right), \quad (21)$$

where P_k is the set containing all possible (n, k) combinations of $\{1, 2, \dots, n\}$. S_k^* includes all possible permutations of $S_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ and there are $k!$ different permutations in S_k^* . In the above expression, the set of k -element combination from $S = \{1, 2, \dots, n\}$ is determined first. Considering the $\sum_{(a_1, \dots, a_k) \in P_k}$ term in the summation in (21), $\sigma^l(i)$ is the i^{th} element of Σ_l^k which is the l^{th} element of the permutation group S_k^* . Recalling that $B_{ij} = \frac{P}{n} d_i d_j \left(\sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk}^* \right)$, one can put B_{ij} into $\det(\mathbf{A})$ expression given in (21) and obtain the following:

$$\det(\mathbf{A}) = 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{S_k \in P_k} \left(\sum_{\Sigma_l^k \in S_k^*} \prod_{i=1}^k \left(\frac{P}{n} d_{a_i} d_{\sigma^l(i)} \sum_{m=1}^n (V_{a_i m})(V_{\sigma^l(i) m})^* \right) \cdot \text{sgn}(\Sigma_l^k) \right), \quad (22)$$

The above expression can be simplified as follows. Defining $S_k = \{a_1, \dots, a_k\}$ and a partition $S_1^k, S_2^k, \dots, S_p^k \subset S_k$ which are disjoint sets that satisfy $S_1^k \cup S_2^k \cup \dots \cup S_p^k = S_k = \{a_1, \dots, a_k\}$, $s_i^k(j)$ is the j^{th} element in S_i^k so that $s_i^k(j)$, $j = 1, \dots, |S_i^k|$, are the elements belonging to S_i^k where $|S_i^k|$ is the cardinality of S_i^k for $i = 1, 2, \dots, p$ ($1 \leq p \leq k$). Although there are many terms in (22), the only terms that have nonzero mean are the ones all composed of squared forms $|V_{ij}|^2$. This is due to the reason that V_{ij} has a uniformly distributed phase in $(0, 2\pi)$ which is independent of V_{ik} for all $k \neq j$ and V_{lj} for all $l \neq i$. This uniform phase distribution will result in a zero expected value for any term which has a non-squared form of V_{ij} . Using this fact and after a few straightforward steps, the following simplified expression can be obtained from (22) after taking expectation

$$E\{\det(\mathbf{A})\} = E\left\{1 + \sum_{k=1}^n \sum_{S_k \in P_k} \left(\left(\frac{P}{n} \right)^k (d_{a_1} d_{a_2} \dots d_{a_k})^2 \cdot \sum_{((S_1^k, S_2^k, \dots, S_p^k) \in [S_k]^{p=1, \dots, k})} \sum_{(\Sigma_l^k(t) \in S_t^{k*}, t=1, \dots, p)} \left(\prod_{i=1}^p \sum_{z_i=1}^{|S_i^k|} \left| V_{s_i^k(j) z_i} \right|^2 \right) \cdot \text{sgn}(\Sigma_l^k) \right) \right\}, \quad (23)$$

where $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_p$, $\Sigma_l^k = (\Sigma_l^k(1), \dots, \Sigma_l^k(p))$, and S_t^{k*} is the permutation group that includes all possible permutations of the elements in S_t^k .

In the above equation, $[S_k]^{p=1, \dots, k}$ is the set that includes all possible p element partitions $(S_1^k, S_2^k, \dots, S_p^k)$ of the set S_k for $p = 1, \dots, k$. Therefore, the summation $\sum_{((S_1^k, S_2^k, \dots, S_p^k) \in [S_k]^{p=1, \dots, k})} \sum_{(\Sigma_l^k(t) \in S_t^{k*}, t=1, \dots, p)}$ in (23) is over all different permutations of all possible

$(S_1^k, S_2^k, \dots, S_p^k)$ partitions, i.e., the summation shows that p element partition is chosen from $[S_k]^{p=1, \dots, k}$ first and then, the second summation $\sum_{(\Sigma_l^k(t) \in S_t^{k*}, t=1, \dots, p)}$ is taken over all different permutations of the chosen partition of S_k . Actually, the summation $\sum_{(\Sigma_l^k(t) \in S_t^{k*}, t=1, \dots, p)}$ is the shorthand notation of $\sum_{(\Sigma_l^k(1) \in S_1^{k*})} \sum_{(\Sigma_l^k(2) \in S_2^{k*})} \dots \sum_{(\Sigma_l^k(p) \in S_p^{k*})}$ and $\text{sgn}(\Sigma_l^k)$ takes values $+1$ or -1 depending on whether $\Sigma_l^k = (\Sigma_l^k(1), \dots, \Sigma_l^k(p))$ is an even or odd permutation.

Lemma 1: The expression given in (23) can be simplified as

$$E\{\det(\mathbf{A})\} = E\left\{1 + \sum_{k=1}^n \sum_{S_k \in P_k} \left(\frac{P}{n} \right)^k (d_{a_1} d_{a_2} \dots d_{a_k})^2 \cdot \sum_{(j_1 \in S)} \sum_{(j_2 \in S, j_2 \neq j_1)} \dots \sum_{(j_k \in S, j_k \neq j_1, \dots, j_{k-1})} (|V_{a_1 j_1}|^2 \dots |V_{a_k j_k}|^2) \right\}. \quad (24)$$

Proof: The lemma suggests that the only remaining terms in (23) are the terms resulting from the partition of (S_1^k, \dots, S_p^k) with $p = k$. The only possible partition is then $S_1^k = \{a_1\}, S_2^k = \{a_2\}, \dots, S_k^k = \{a_k\}$, and $|S_i^k| = 1$ for all i 's. Eqn. (23) reduces to (24) for $p = k$ and $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_k$. Any term included within the summation $\sum_{((S_1^k, S_2^k, \dots, S_p^k) \in [S_k]^{p=1, \dots, k})} \sum_{(\Sigma_l^k(t) \in S_t^{k*}, t=1, \dots, p)}$ in (23) but not in (24) can also be written as

$$\prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{|S_i^k|} \left| V_{s_i^k(j) z_i} \right|^2 \quad (25)$$

for any given z_1, z_2, \dots, z_p between 1 and n where $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_p$ (the terms with the same z_i 's are already in another partition of S_k). $s_i^k(j)$ is the j^{th} element of S_i^k as defined before. For the above term, at least one of the S_i^k 's has cardinality $|S_i^k|$ greater or equal to 2 for some i since $p < k$, i.e., $\max_{1 \leq i \leq p} (|S_i^k|) \geq 2$. Note that the terms in (24) have $|S_i^k| = 1$ for $i = 1, 2, \dots, p$ and $p = k$.

The terms in the form given in (25) originate from the term given below in (23)

$$E\left\{ \left(\prod_{i=1}^p \sum_{z_i=1}^{|S_i^k|} \prod_{j=1}^{|S_i^k|} \left| V_{s_i^k(j) z_i} \right|^2 \right) \cdot \text{sgn}(\Sigma_l^k) \right\}. \quad (26)$$

Now focus on the summation in (23) over permutations $\Sigma_l^k(t) \in S_t^{k*}$ for $t = 1, \dots, p$. Fix z_1, \dots, z_p ($z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_p$ mandated by (25)) and all the $\Sigma_l^k(1), \Sigma_l^k(2), \dots, \Sigma_l^k(p)$ permutations except for one of the $\Sigma_l^k(c)$ with $|S_c^k| \geq 2$. Then, (25) can be written as

$$\left(\prod_{i \neq c} \prod_{j=1}^{|S_i^k|} \left| V_{s_i^k(j) z_i} \right|^2 \right) \cdot \prod_{j=1}^{|S_c^k|} \left| V_{s_c^k(j) z_c} \right|^2 \cdot \text{sgn}(\Sigma_l^k). \quad (27)$$

along with the permutation sign. By taking the summation over different $\Sigma_l^k(c)$ permutations, one can get

$$\begin{aligned} & \text{sgn} \left(\Sigma_l^k(t), t = 1, \dots, p \text{ and } t \neq c \right) \cdot \prod_{i \neq c} \prod_{j=1}^p \left| V_{s_c^k(j)z_i} \right|^2 \\ & \sum_{\Sigma_l^k(c) \in S_c^{k*}} \left(\prod_{j=1}^{|S_c^k|} \left| V_{s_c^k(j)z_c} \right|^2 \right) \cdot \text{sgn} \left(\Sigma_l^k(c) \right) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

since there are equal number of even and odd permutations of S_c^k set if $|S_c^k| \geq 2$ with opposite signs [23]. In other words, in the above equation $\text{sgn}(\Sigma_l^k(c))$ is $+1$ for $\frac{|S_c^k|!}{2}$ times and -1 for $\frac{|S_c^k|!}{2}$ times again. Therefore, the expression in (28) goes to zero and this can be done for other $\Sigma_l^k(1), \dots, \Sigma_l^k(p)$ permutations. The terms presented in (25) cancel each other in (23) and (23) reduces to the equation given in (24). **Q.E.D.**

The simplified form of the capacity bound in (24) is important, since

$$E \left[|V_{a_1j_1}|^2 \cdots |V_{a_kj_k}|^2 \right] = E \left[|V_{a_1j_1}|^2 \right] \cdots E \left[|V_{a_kj_k}|^2 \right] \quad (29)$$

by the independence of $|V_{a_1j_1}|^2, \dots, |V_{a_kj_k}|^2$. Since the distribution of $|V_{a_ij_i}|^2$'s are identical and same as the distribution of $|V_{11}|^2$ if $a_i = j_i$ and equal to the distribution of $|V_{12}|^2$ if $a_i \neq j_i$, one need only the expected values $E \left[|V_{11}|^2 \right] = E_{11}$ and $E \left[|V_{12}|^2 \right] = E_{12}$ in order to calculate the expression given in (24).

REFERENCES

- [1] T. Yoo, E. Yoon, and A. Goldsmith, "MIMO capacity with channel uncertainty: does feedback help?" in *Proc. IEEE Globecom*, pp. 96100, 2004.
- [2] E. Biglieri, R. Calderbank, A. Constantinides, A. Goldsmith, A. Paulraj, and H. V. Poor, *MIMO Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] J. C. Roh and B. D. Rao, "Channel feedback quantization methods for MISO and MIMO systems," in *Proc. IEEE PMIRC*, vol. 2, pp. 805809, Sept. 2004.
- [4] D. J. Love, R. W. Heath Jr., and T. Strohmer, "Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 27352747, Oct. 2003.
- [5] K. K. Mukkavilli, A. Sabharwal, E. Erkip, and B. Aazhang, "On beamforming with finite rate feedback in multiple-antenna systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 25622579, Oct. 2003.
- [6] N. Jindal, "MIMO broadcast channels with finite rate feedback," in *Proc. IEEE Globecom*, 2005.
- [7] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels," *Europ. Trans. Telecommun.*, vol. 10, pp. 585598, Nov./Dec. 1999.
- [8] Z. Zhou, B. Vucetic, M. Dohler, and Y. Li, "MIMO systems with adaptive modulation," *IEEE Trans. Veh. Tech.*, vol. 54, no. 5, pp. 18281842, Sept. 2005.
- [9] A. Goldsmith, *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2005.
- [10] A. D. Dabbagh and D. J. Love, "Feedback rate-capacity loss tradeoff for limited feedback MIMO systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 5, pp. 21902202, May 2006.
- [11] J. C. Roh and B. D. Rao, "Design and analysis of MIMO spatial multiplexing systems with quantized feedback," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 54, no. 8, pp. 28742886, Aug. 2006.
- [12] W. Santipach and M. L. Honig, "Asymptotic performance of MIMO wireless channels with limited feedback," in *Proc. IEEE Military Communications Conference 2003*, vol. 1, pp. 141146, Oct. 2003.
- [13] B. Giannakis, S. Zhou, and Z. Wang, "Quantifying the power loss when transmit beamforming relies on finite-rate feedback," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 4, pp. 19481956, July 2005.
- [14] E. G. Larsson and P. Stoica, *Space-Time Block Coding for Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2003.
- [15] D. J. Love and R. W. Heath Jr., "Multi-mode precoding using linear receivers for limited feedback MIMO systems," in *Proc. IEEE International Conference on Communications 2004*, vol. 1, pp. 448 452, June 2004.
- [16] G. D. Forney Jr, "On the role of MMSE estimation in approaching the information-theoretic limits of linear Gaussian channels: Shannon meets Wiener," in *Proc. 2003 Allerton Conf.*, pp. 430439, Oct. 2003.
- [17] G. D. Forney Jr, "Shannon meets Wiener II: on MMSE estimation in successive decoding schemes," in *Proc. 2004 Allerton Conf.*
- [18] P. Stoica, Y. Jiang, and J. Li, "On MIMO channel capacity: an intuitive discussion," *IEEE Signal Processing Mag.*, pp. 8384, May 2005.
- [19] C. Au-Yeung and D. J. Love, "On the performance of random vector quantization limited feedback beamforming in a MISO system," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 6, no. 2, pp. 458462, Feb. 2007.
- [20] S. Jin, M. R. McKay, X. Gao, and I. B. Collings, "MIMO multichannel beamforming: Ser and outage using new eigenvalue distributions of complex noncentral wishart matrices," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 56, no. 3, pp. 424434, Mar. 2008.
- [21] L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation*. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [22] H. Campbell, *Linear Algebra with Applications*. Appleton Century Crofts, 1971.
- [23] J. D. Dixon and B. Mortimer, *Permutation Groups*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1996.

Parallel Decodable Concatenated Convolutional Codes

Orhan Gazi, A. Özgür Yılmaz²

Electronics and Communication Engineering Department, Cankaya University
Electrical and Electronics Engineering Department, Middle East Technical University²
 o.gazi@ari.cankaya.edu.tr, aoyilmaz@metu.edu.tr²

ABSTRACT

Parallel and serial concatenated codes show very good performance at low signal to noise ratios. However, large decoding delays due to long input frame lengths constitute a major disadvantage for these types of codes. In this study we introduce a new class of concatenated convolutional codes which are very suitable for parallel decoding, thus have much less decoding delays and also show comparable performance to that of the classical serial and parallel concatenated convolutional codes. The analytical upper bound expressions for performance of the proposed structures are derived using the uniform interleaver concept.

I. INTRODUCTION

Concatenated convolutional codes CCCs, either in the parallel PCCC or serial (SCCC) form, show very good performance at low signal to noise ratios. Hence, these codes are potential candidates for practical applications in many communication systems. Low latency is necessary if high data rates are required. CCCs use sequential decoding algorithms such as maximum a posteriori algorithm (MAP) where forward and backward variables are computed in a sequential manner. Since CCCs are iteratively decoded, the decoding delay may not be affordable for high data rate communication systems. One possible solution is to implement CCC decoders in a parallel fashion. In [1], [2], [3] some techniques for parallel realization of *turbo* decoders have been suggested. The common idea of these studies is to divide the received information block into sub-blocks and decode the sub-blocks in a parallel manner. However some difficulties arise in these applications. In [2] and [3] whole trellis stages are divided into overlapped sub-blocks and these sub-blocks are decoded using the same soft-in soft-out (*T-Algorithm* or *MAP*) decoders which utilizes only partial observations. Thus, the method in [3] and [2] is sub-optimal unless a logical overlapping depth is used. A similar study is introduced in [1] where forward and backward variables computed in the previous iteration are used to provide boundary distributions for each block sub-block *MAP* decoders. This method requires additional memory in hardware to store the boundary distributions.

In our study we introduce new CCCs where parallelization is applied at the encoder side so that parallel processing at the receiver is directly available without adding any extra algorithms. Receiver side only employs *MAP* decoders in parallel. No overlapping, no boundary distributions or any other extras are needed at the receiver side. Through simulations and analytical bounds, we show that the proposed codes have performance comparable to conventional CCCs. Implementation advantages are also emphasized. The effects of trellis termination on these codes are investigated.

The remainder of the paper is arranged as follows. Background materials are provided in Section 2. In Section 3 encoder and decoders structures for the proposed codes are explained. Practical application advantages are provided in Section IV. Analytical bounds are evaluated in Section V. Finally simulation results and conclusion are given in sections VI and VII.

II. BACKGROUND

1. Parallel and Serially Concatenated Convolutional Codes:

Convolutional codes can be concatenated in a parallel (*turbo codes*) or serial manner. An interleaver is employed between constituent codes. The classical encoder of a typical turbo code C_p is shown in Fig. 1.

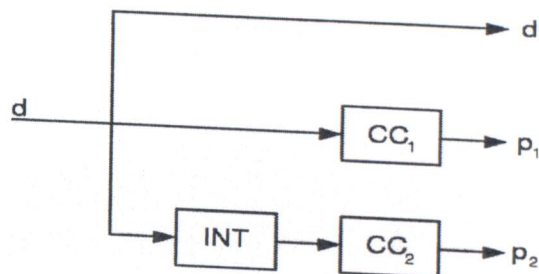


Fig. 1. Parallel concatenated convolutional code. CC_1 , CC_2 are constituent encoders 1 and 2 respectively. INT is the interleaver.

The encoder for *SCCCs* is depicted in Fig. 2. Although two constituent encoders are employed in

Figs. 1 and 2, the logic can be expended to any number of constituent encoders by incorporating more encoders and interleavers.

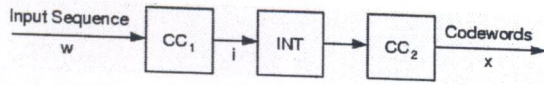


Fig. 2. Serial concatenated convolutional code. CC_1 , CC_2 are constituent encoders 1 and 2 respectively. INT is the interleaver.

2. Analytic Analysis of Turbo and SCCCs

2.1 Weight Enumerating Function

The weight enumerating function gives information about the codewords, i.e., the number of codewords with a specific Hamming weight:

$$A(X) = \sum_{i=d_{\min}}^n A_i X^i,$$

where A_i is the number of codewords with Hamming weight i , X is a dummy variable, and d_{\min} is the minimum distance of the code.

2.2 Input Output Weight Enumerating Function (IOWEF):

WEF gives information only about the codewords. No information is available about the input information sequences. IOWEF contains information about the Hamming weight of the input sequences along with the produced codewords:

$$A(W, X) = \sum_{w,i} A_{w,i} W^w X^i,$$

where $A_{w,i}$ is the number of codewords of Hamming weight i generated by information sequences of Hamming weight w . W and X are dummy variables.

2.2 Input Redundancy Weight Enumerating Functions (IRWEFs):

The input redundancy weight enumerating functions contain parity Hamming weight information. An IRWEF is defined as:

$$B(W, Z) = \sum_{w,z} B_{w,z} W^w Z^z,$$

where $B_{w,z}$ denotes the number of codewords generated with input sequences of Hamming weight w and having parity weight of z .

2.3 Conditional Weight Enumerating Function (CWEF)

The conditional weight distribution function gives us information about the weight distribution of codeword sequences or parity sequences generated from a Hamming weight w input sequences:

$$A(w, X) = \sum_i A_{w,i} X^i$$

$$B(w, Z) = \sum_z B_{w,z} Z^z,$$

where i and z are the Hamming weight of the codewords and parity sequences generated by input sequences of Hamming weight w . The first definition is used for SCCC's analytical bound evaluation whereas the second one is for PCCC's.

2.4 Analytical Bound

Once spectrum functions of the concatenated codes are available, performance upper bound to the bit error probability for maximum likelihood soft decoding of the code is found in the form [5],

$$P_b = \frac{1}{2} \sum_i D_i \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{i R_c E_b}{N_0}} \right), \quad (1)$$

where R_c is the code rate, $\frac{E_b}{N_0}$ is the bit energy to noise ratio of the AWGN channel, i is the Hamming weight of the codewords generated by Hamming weight w input sequences. For SCCC's D_i 's are obtained from the IOWEF coefficients according to

$$D_i = \sum_w \frac{w}{k} A_{w,i}. \quad (2)$$

However IRWEFs are used in (2) for turbo codes. D_i 's are obtained from the IRWEF coefficients according to

$$D_i = \sum_{z+w=i} \frac{w}{k} B_{w,z}. \quad (3)$$

where k is the length of the input information sequences.

2.5 IOWEF of SCCC's

Referring to Fig. 2, IOWEF of serial concatenated code $A^{C_s}(W, X)$ is expressed as a product of the two CWEFs of the constituent codes, which is normalized by the number of the possible permutations (i.e uniform interleaver)

$$A^{C_s}(W, X) = \sum_{i=0}^N \frac{A^{CC_1}(W, i) \times A^{CC_2}(i, X)}{\binom{N}{i}}.$$

Once IOWEF of a concatenated code is available, upper bound to the bit error probability can be calculated using (1) and (2).

2.6 IRWEF of PCCC's

The classical encoder and decoder of a typical turbo code C_p is shown in Fig. 1. Assuming the usage of the uniform interleaver, CWEF of the parallel concatenated code is found as,

$$B^{C_p}(w, Z) = \frac{B^{CC_1}(w, Z) \times B^{CC_2}(w, Z)}{\binom{N}{w}}$$

where $B^{CC_1}(w, Z)$ and $B^{CC_2}(w, Z)$ are the CWFs of the constituent codes CC_1 and CC_2 , $B^{C_p}(w, Z)$ is the CWF of the PCCC. N is the interleaver size, w and z are the Hamming weights of the information and parity sequences, respectively. We obtain the IRWF of the code C_p as

$$B^{C_p}(W, Z) = \sum_{w=1}^k W^w B^{C_p}(w, Z),$$

where k is the length of the input information sequences.

III. Parallel Decodable SCCCs and Turbo Codes

3.1 Encoding

To reduce the decoding delays of turbo-like codes researchers developed some techniques which involve parallel processing in decoding operation [1], [2], [3]. In these studies parallelization is considered at the receiver side. In our study we employ the parallelization at transmitter side and use it directly at the receiver side without requiring any extra algorithms. The parallel encoder structures for turbo codes and SCCCs are depicted in Figs. 3 and 4 where N and M are the number of constituent encoders at the upper and lower clusters for turbo codes and the number of outer and inner constituent encoders for SCCCs. Serial to parallel (S/P) and parallel to serial (P/S) converters are employed.

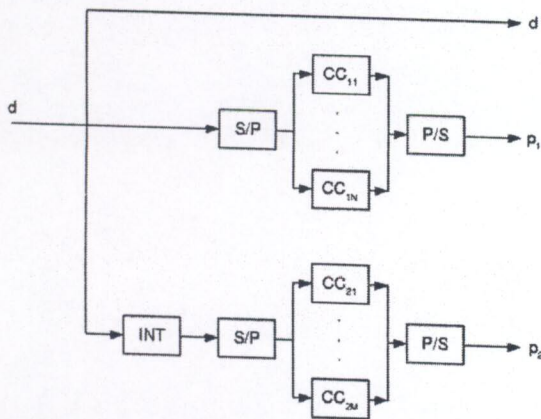


Fig. 3. PD-TC Encoder. CC_{1i} , $i=1\dots N$ and CC_{2j} , $j=1\dots M$ are constituent encoders. INT is the interleaver. S/P and P/S are the serial to parallel and parallel to serial converters.

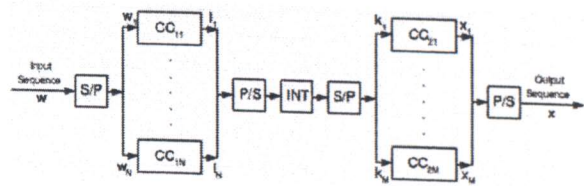


Fig. 4. PD-SCC Model. CC_{1i} , $i=1\dots N$ and CC_{2j} , $j=1\dots M$ are constituent encoders. INT is the interleaver. S/P and P/S are the serial to parallel and parallel to serial converters.

3.2 Decoding Operation

The decoder structures for PD-TCs and PD-SCCCs are depicted in Figs. 5 and 6 where it is clear that decoders $D_{11}\dots D_{1N}$, $D_{21}\dots D_{2M}$ can be run in parallel in both structures.

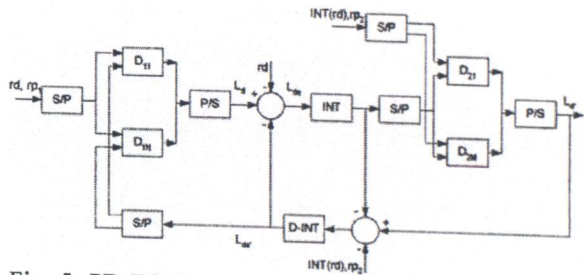


Fig. 5. PD-TC Decoder. D_{1i} , D_{2j} ($i=1\dots N$, $j=1\dots M$) are the decoders for CC_{1i} and CC_{2j} respectively. rd , rp_1 and rp_2 are the received signals for data and parity bits. L_d , $L_{d'}$, L_{d_e} , $L_{d_e'}$ are log-likelihoods.

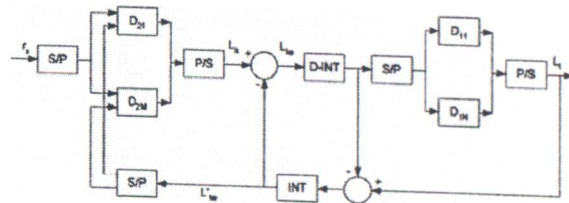


Fig. 6. PD-SCCC Decoder. r_x is the received signal. S/P and P/S are the serial to parallel and parallel to serial converters respectively. INT, D-INT are the interleaver and de-interleaver. L_k , L_l , L_{k_e} , $L_{k_e'}$ are log-likelihoods.

IV. Practical Implementation Advantages

4.1 PDTCs

Let t and c be time delay and computational complexity of a single stage of the code trellis. In a classical turbo code, for a given transmit data vector of length L , two log-MAP decoders are needed. Both decoders have a computational complexity $c.L$ and a time delay of $t.L$. In total, the complexity of each iteration is of $c.2L$ and the time delay is of $t.2L$. In PD-TC the use of separate log-MAP decoders for each constituent code makes parallel processing operation possible. Assuming that $M = N$, all

decoders in the first and second decoder clusters have a complexity $c.(L/N)$ and a time delay $t.(L/N)$. The total computational complexity of each iteration is $c.(2L)$ and the decoding delay is $t.(2L/N)$. As seen from this discussion, the decoding delay is reduced by a factor of N while keeping the total computational complexity the same as before (excluding a small overhead for the serial to parallel and the opposite operations).

4.2 PD-SCCCs

In SCCC, for a given transmit data vector of length L , two log-MAP decoders are needed. The inner decoder has a complexity $c.2L$ and a time delay $t.2L$. The outer decoder has a shorter input thus it has a complexity $c.L$ and a time delay $t.L$. In total, the complexity is $c.3L$ and the time delay is $t.3L$. For PD-SCCCs, assuming again that $M = N$, the inner decoder has a total complexity $c.2L$ and a time delay $t.(2L/M)$ and the second decoder has a complexity $c.L$ and a time delay $t.(L/M)$. In total, the complexity of each iteration is $c.3L$ and the time delay is $t.(3L/M)$.

V. Simulations

A recursive systematic convolutional code (RSC) with the generator $RSC(1,5/7)_{\text{octal}}$ is used as constituent codes in both PD-TCs and SCCCs. Input information sequences of 1024 bits are used. S-random interleavers are employed between encoder clusters where $S=18$ for PD-SCCCs and $S=10$ for PD-TCs. Trellis termination bits are added by all the constituent encoders. The encoded data is multiplexed to a single stream and binary phase shift key (BPSK) modulated. The BPSK modulated signal is passed through an additive white Gaussian noise (AWGN) channel with double-sided power spectral density $N_0/2$. We used the log-MAP soft decoding algorithm [4] to iteratively decode the codes. A total of 12 iterations are used for each simulation.

4.2 PD-SCCCs

We investigated the effects of trellis termination for three different scenarios. In the first case, only outer encoders (O-T) perform trellis termination. Both inner and outer encoders (TT) have trellis termination in the second case. As a last scenario, none of the encoders (No-TT) added trellis termination bits. Although addition of trellis termination bits decreases the code rate, they are very critical for good performance of the PD-SCCC as seen in Fig. 7. Addition of trellis termination bits in turbo or serially concatenated code shows negligible improvement on the code performance [7]. However, without trellis termination the performance of the PD-SCCC degrades drastically.

The performance graphs are seen in Fig. 7. PD-SCCC has better performance at very low $\frac{E_b}{N_0}$ levels when only inner codes are trellis terminated. Its performance is worse at higher $\frac{E_b}{N_0}$ levels when it is compared to the inner and outer codes trellis terminated case. Though quite close up to BER 10^{-7} , SCCC seems to have an error curve of higher slope compared to TT at higher $\frac{E_b}{N_0}$ values. The analytical bound is evaluated for TT case using the uniform interleaver approach. However as it is seen from the Fig. 7 the bound obtained by uniform interleaver concept gives a rough idea about the code performance [6].

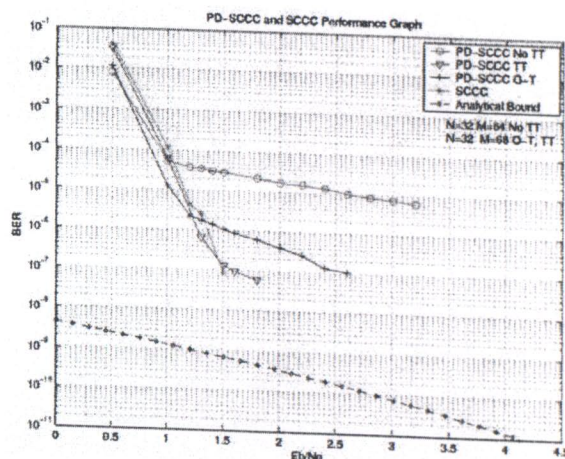


Fig. 7. PD-SCCC and SCCC performance graph. PD-SCCC with no trellis termination (PD-SCCC No TT). PD-SCCC when outer codes are trellis terminated (PD-SCCC O-T). PD-SCCC when outer and inner codes are trellis terminated (PD-SCCC TT). Frame Length=1024, Iteration number=12.

4.3 PD-TCs

All the constituent encoders added trellis termination bits to the encoded data. The simulation results are depicted in Fig. 8 where it is seen that as M and N values increases performance degrades. Hence it is important to choose appropriate M, N values for a given interleaver length so that comparable performance is obtained to that of the classical turbo codes. It is also obvious from Fig. 8 that error floor occurs at lower $\frac{E_b}{N_0}$ point for larger M and N values (i.e., for the case $M=N=32$ error floor occurs at $\frac{E_b}{N_0} \approx 2.4\text{dB}$).

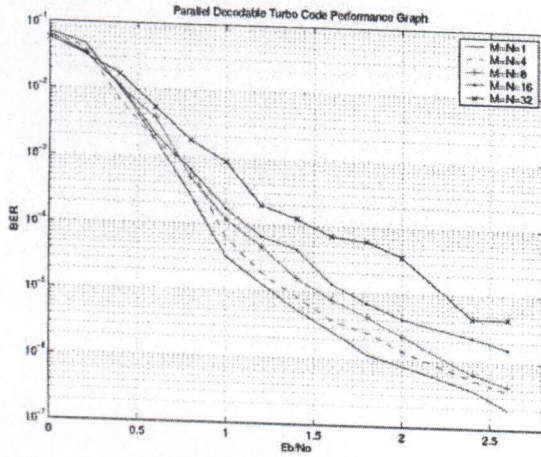


Fig. 8. PD-TC Performance graph. N and M are the number of constituent encoders in upper and lower clusters. Frame Length=1024, Iteration number=12.

VI. Analytical Analysis

The $(1,5/7)_{\text{octal}}$ recursive systematic convolutional code is used for all the constituent codes. All the constituent encoders added trellis termination to the codewords. This slightly decreases the overall code rate and is taken into account in analytical bounds.

6.1 Analytical Bounds for PD-TCs

Since the information bits are independent, IRWEF's can be evaluated as:

$$A^1(W, Z) = \prod_{i=1}^N A_{1i}(W, Z)$$

$$A^2(W, Z) = \prod_{i=1}^M A_{2i}(W, Z),$$

where $A_{1i}(W, Z)$'s are the IRWEF's of the constituent codes CC_{1i} ($i=1, \dots, N$) $A_{2i}(W, Z)$'s are the IRWEF's of the constituent codes CC_{2i} ($i=1, \dots, M$). $A^1(W, Z)$ and $A^2(W, Z)$ are the IRWEF's of the equivalent upper and lower codes respectively.

Once IRWEF's of the PDTC's are available, the uniform interleaver analytical bound approach can be applied and equations (1), (3) can be used to determine upper bounds. Analytical bounds for an interleaver length of 1024 and equal N, M values are shown in Fig. 9.

The classical turbo code corresponds to $M=N=1$. It is seen that there is a very small rise in the error floor with increasing M and N . It is clear that PDTC error floor predicted by uniform interleaver method is almost the same when $M=N=16$ as that of the classical turbo code for an interleaver length of 1024.

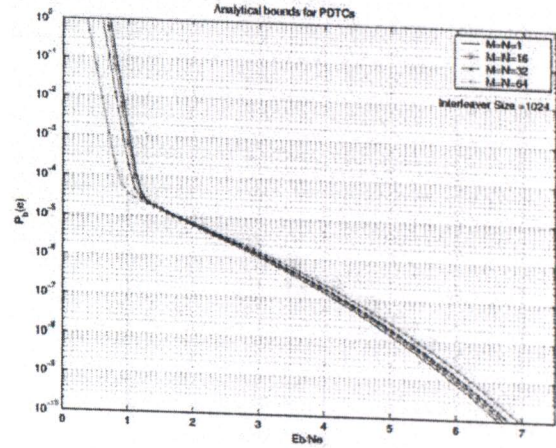


Fig. 9. Analytical bounds for PDTCs

6.2 Analytical Analysis of PD-SCCCs

Uniform interleaver approach is used to evaluate the average performance of the PDSCCCs. Since the information bits of parallel subsequences of inner and outer clusters are independent, IOWEF's of the inner and outer clusters can be evaluated as

$$A^{C1}(W, X) = \prod_{i=1}^N A_{1i}(W, X)$$

$$A^{C2}(W, X) = \prod_{i=1}^M A_{2i}(W, X)$$

where $A_{1i}(W, X)$ and $A_{2i}(W, X)$ are the IOWEF's of the constituent codes in the inner and outer clusters. We considered different scenarios and evaluated analytical bounds for the performance of the PD-SCCCs.

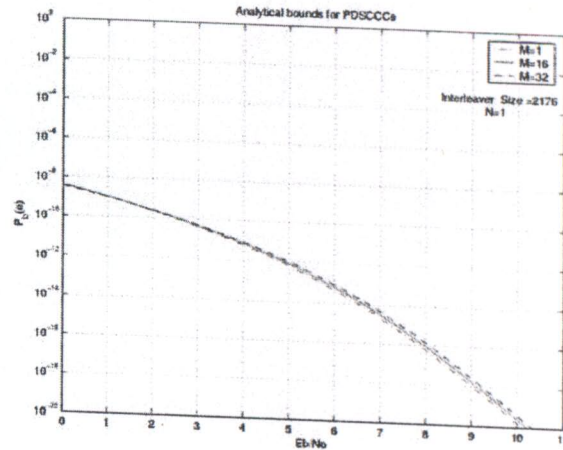


Fig. 10. PDSCCCs' analytical bounds for large interleaver size.

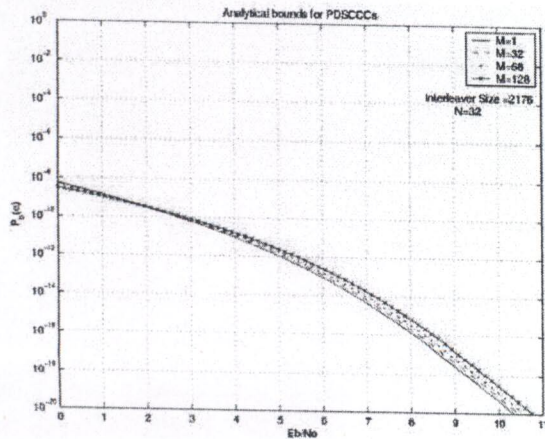


Fig. 11. PDSCCCs' analytical bounds for large interleaver.

The analytical bounds for different M and N combinations are depicted in Figs. 10 and 11 for an interleaver length of 2176. In Fig. 10 $N=M=1$ case corresponds to SCCC. It is clear that almost the same performance is achieved as that of SCCC for different M and N combinations, e.g., the bounds for $N=1$, $M=32$ and $N=M=1$ (i.e., SCCC) cases are almost the same. The performance degradation is of little amount as the M value increases. In Fig. 11 the bounds are drawn for $N=32$ and different M values. At high $\frac{E_b}{N_0}$ values degradation in performance becomes larger.

VII Conclusion

In this article we propose new classes of serial and parallel concatenated convolutional codes. Using the uniform interleaver assumption we showed that the proposed codes perform as well as classical concatenated convolutional codes. Simulation results also support the analytical outcomes. The decoding delay is reduced by a factor of the number of parallel branches. This provides a significant advantage in practical applications.

VIII. REFERENCES

- [1] Seokhyun Yoon, Yeheskel Bar-Ness, "A Parallel MAP Algorithm for Low Latency Turbo Decoding", *IEEE Communication Letters*, Vol. 6, No. 7, July 2002.
- [2] U. Dasgupta and K. R. Narayanan, "Parallel Decoding of Turbo Codes Using Soft Output T-Algorithms", *IEEE Communication Letters*, Vol. 5, No. 8, August 2001.
- [3] J. Hsu and C. Wang, "A parallel decoding scheme for turbo codes," in *Proc. ISCAS'98*, vol. 4, June 1998, pp. 445-448.
- [4] C. Berrou, A. Galavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon Limit Error-Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes", *Proceeding of IEEE International Communications Conference '93*.
- [5] Sergio Benedetto, Guido Montorsi, "Unveiling Turbo Codes: Some Results on Parallel Concatenated Coding Schemes", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 42, No. 2, March 1996.
- [6] A. G. Burr and G. White, "Comparison of iterative decoder performance with union bounds for short frame turbo codes", *Annales des Telecommunications (Special issue on Iterative Processing)*, vol. 54, no. 3-4, pp. 201-7, Mar-April 1999.
- [7] P. Robertson, "Illuminating the structure of parallel concatenated recursive (TURBO) codes," in *Proc. GLOBECOM'94*, San Francisco, CA, Nov. 1994, pp. 1298-1303.

On Parallelized Serially Concatenated Codes

Orhan Gazi and A. Özgür Yılmaz

Abstract—Serial concatenated codes show very good performance at low signal to noise ratios. However, large decoding delays due to long input frame lengths constitute a major disadvantage for these type of codes. In this study we introduce a new class of concatenated convolutional codes which are very suitable for parallel decoding, thus have much less decoding delays and also show comparable performance to that of classical serial concatenated convolutional codes. The analytical upper bound expressions for performance of the proposed structures are derived using the uniform interleaver concept.

I. INTRODUCTION

CONCATENATED codes are proposed by Forney [1] in 1966. The usage of a posteriori probabilities (*APPs*) as opposed to hard decision estimates is essential for enhancing decoder performance. Following Forney's work, new *APP* algorithms were developed. The *BCJR* algorithm [2] which was ignored for a long time is one of the most widely known *APP* algorithms. With the introduction of turbo codes (parallel concatenated convolutional codes, i.e., *PCCC*s) [3] in 1993 a huge interest on iterative decoding was aroused. The use of soft-in soft-out decoding algorithms was a key in the astonishing performance of turbo codes. This showed the way to the invention of serially concatenated convolutional codes *SCCC*s in [4], where authors showed that they were better than *PCCC*s in some respects. In the last decade, similar codes such as, low density parity check codes [5], block product codes [6], and single parity check (*SPC*) product codes [7] have been extensively studied.

Convolutional codes have some appealing properties over linear block codes. Convolutional codes' trellis structure does not vary in time as in block codes. Moreover, the number of states in the trellis structure of an (n, k) block code is upper bounded by and usually on the order of $2^{(n-k)}$ where k is the information sequence length and n is the codeword length in bits [8]. However, the number of states in a convolutional code can be set as desired. The time invariant trellis structure of convolutional codes makes them more convenient for implementation [4]. In addition, numerous practical techniques such as trellis coded modulation (*TCM*) and puncturing can be easily utilized with convolutional codes, as opposed to linear block codes.

Concatenated convolutional codes *CCC*s are potential candidates for practical applications in many communication systems. Low latency is necessary if high data rates are

required. Since *CCC*s are iteratively decoded, the decoding delay may not be affordable for high data rate communication systems. One possible solution is to implement *CCC* decoders in a parallel fashion. In [9], [10], [11] techniques for parallel realization of turbo decoders were suggested. The common idea of these studies is to divide the received information block into sub-blocks and decode the sub-blocks in a parallel manner. However some difficulties arise in these applications. In [10] and [11] trellis blocks are divided into overlapped sub-blocks and these sub-blocks are decoded using the same soft-in soft-out (*T-Algorithm* or *MAP*) decoders which utilizes only partial observations. Thus, the method in [10] and [11] is sub-optimal unless a reasonable overlapping depth is used. A similar method was introduced in [9] where forward and backward variables computed in the previous iteration are used to provide boundary distributions for each block sub-block *MAP* decoders. This method requires additional memory in hardware to store the boundary distributions.

Turbo product codes based on convolutional codes are studied in detail in [12] where parallelization is applied at the encoder side so that parallel processing at the receiver is directly available without adding any extra algorithms. The receiver side directly employs *MAP* decoders in parallel. No overlapping, no boundary distributions or any other extra considerations are needed at the receiver side. We extend the studies in [12] with this paper and propose general structures for serially and parallel concatenated codes. *SCCC*s and *PCCC*s are in fact special cases of the proposed structures. We show that *PDSCCC*s can be used instead of the *SCCC*s considerably reducing decoding delays.

The outline of the paper is as follows. In Section II definitions of weight spectrum functions are specified and analytical upper bound expressions are given for concatenated codes using the uniform interleaver concept. In Section III the proposed code configurations are explained. The advantage of the proposed codes is mentioned in Section IV. Simulation and analytical analysis results are given in Sections V and VI. Finally, concluding remarks are given in Section VII.

II. BACKGROUND

Analytical bound expressions for the performance of serial and parallel concatenated codes are defined in [4]-[13] where the authors employ uniform interleaving which is defined in [13] as a probabilistic device that maps a given input information sequence of length K and Hamming weight w into all distinct $\binom{K}{w}$ permutations with equal probability $1/\binom{K}{w}$. The uniform interleaver permits the estimation of

Orhan Gazi is with Electronics and Communication Engineering Department, Cankaya University, Ankara, Turkiye. o.gazi@cankaya.edu.tr

A. Özgür Yılmaz is with Electrical and Electronics Engineering Department, Middle East Technical University, Ankara, Turkiye. aoyilmaz@eee.metu.edu.tr

the average interleaver gain, independent of the particular interleaver used in a concatenated code system.

A. Serially Concatenated Codes

The encoder for serially concatenated codes (SCCs) is depicted in Fig. 1. The constituent codes can be chosen from block and convolutional codes. If both constituent codes are chosen from convolutional codes, the well known serially concatenated convolutional codes (SCCCs) are obtained.

Although two constituent encoders are employed in Fig. 1, the idea can be extended to any number of constituent encoders by incorporating more encoders and interleavers.

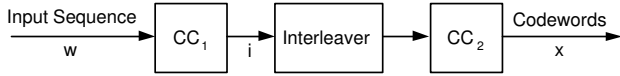


Fig. 1. Serial concatenated code. CC_1 and CC_2 are constituent codes CC s 1 and 2, respectively. The interleaver size is N .

B. Analytical Analysis of SCCCs

1) Conditional Weight Enumerating Function (CWEF):

The conditional weight distribution function gives us information about the weight distribution of codeword sequences or parity sequences generated from a Hamming weight w input sequences:

$$A(w, X) = \sum_i A_{w,i} X^i$$

where i is the Hamming weight of the codewords generated by input sequences of Hamming weight w .

2) Input Output Weight Enumerating Function (IOWEF):

IOWEF contains information about the Hamming weight of the input sequences along with the produced codewords:

$$A(W, X) = \sum_{w,i} A_{w,i} W^w X^i,$$

where $A_{w,i}$ is the number of codewords of Hamming weight i generated by information sequences of Hamming weight w . W and X are dummy variables.

3) IOWEF of SCCCs: Referring to Fig. 1, IOWEF of serial concatenated code $A^{CC_s}(W, X)$ is expressed as a product of the two CWEFs of the constituent codes, which is normalized by the number of the possible permutations (i.e., uniform interleaver)

$$A^{CC_s}(W, X) = \sum_{i=0}^N \frac{A^{CC_1}(W, i) \times A^{CC_2}(i, X)}{\binom{K}{i}}.$$

Once IOWEF of a concatenated code is available, upper bounds of the bit error probability can be calculated using (2) and (3).

4) Analytical Bound: Once spectrum functions of the concatenated codes are available, performance upper bound to the bit error probability for maximum likelihood soft decoding of the code is found in the form

$$P_b(e) \leq \sum_{w,i} \frac{w}{2k} A_{w,i} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{i R_c E_b}{N_0}} \right). \quad (1)$$

This is further simplified as [13]

$$P_b \cong \frac{1}{2} \sum_i D_i \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{i R_c E_b}{N_0}} \right), \quad (2)$$

where R_c is the code rate, $\frac{E_b}{N_0}$ is the bit energy to noise ratio of the AWGN channel, i is the Hamming weight of the codewords generated by Hamming weight w input sequences. For SCCCs D_i 's are obtained from the IOWEF coefficients according to

$$D_i = \sum_w \frac{w}{k} A_{w,i}. \quad (3)$$

III. PARALLEL DECODABLE CONCATENATED CODES (PDCCs)

To reduce the decoding delays of turbo-like codes, researchers developed some techniques which involve parallel processing in the decoding operation [9], [10], [11]. In these studies, parallelization is considered at the receiver side. In our study we employ the parallelization at the transmitter side and use it directly at the receiver side without requiring any extra algorithms. The parallel encoder structure for SCCCs is depicted in Fig. 2 where N and M are the number of outer and inner constituent encoders for SCCCs. Serial to parallel (S/P) and parallel to serial (P/S) converters are employed.

A. Parallel Decodable Serially Concatenated Codes (PDSCCs)

The general structure of the PDSCCs is depicted in Fig. 2 where $C_{11} \dots C_{1N}$ and $C_{21} \dots C_{2M}$ are the outer and

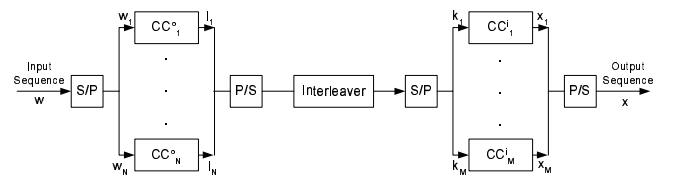


Fig. 2. PD-SCC model. $CC_n^o, n = 1 \dots N$ and $CC_m^i, m = 1 \dots M$ are constituent encoders.

inner constituent code (CC) encoders respectively. N and M are the number of constituent encoders in the outer and inner clusters, respectively. An interleaver is placed between the inner and outer encoder clusters. If all the constituent codes are chosen from the same linear block code and a rectangular interleaver is employed between code clusters, the well known block product codes are obtained. Block product codes are usually expressed using a matrix notation for ease of illustration. The matrix equivalent representation for the block product code is depicted in Fig. 3.

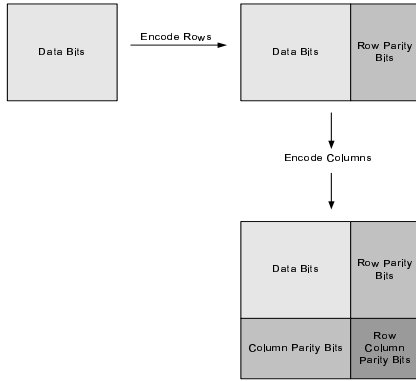


Fig. 3. Regular product code encoding procedure, where a block code is used to encode rows and columns.

1) *Parallel Decodable Serially Concatenated Convolutional Codes (PDSCCCs)*: If convolutional code encoders are employed in *PDSCCs*, *PDSCCCs* are obtained. When $M = N = 1$ *PDSCCCs* turn out to be *SCCCs*, i.e., *SCCCs* are a special case of *PDSCCCs*. Assuming that the rate of all the constituent encoders equals $1/2$, for an input sequence of length $(N \times M)/2$ where $N \geq 2$ and $M = 2k$, k a positive integer, the overall encoding procedure can be demonstrated using a matrix notation. This special case will be named as matrix *PDSCCCs* (i.e., *M-PDSCCCs*). If M value is chosen as $2N$ then the input matrix becomes a square matrix. The encoding procedure is depicted in Fig. 4. We didn't show the addition of trellis termination bits to the encoded data in the Fig. 4, however the effects of trellis termination bits are taken into account in simulations. The length of the input subsequences of the outer and inner *CC* encoders equals $M/2$ and N respectively. The interleaver size is $N \times M$. Although a rectangular interleaver is employed between constituent encoder clusters for ease of illustration any type of interleaver can be used. We will use a square input matrix ($M = 2N$) in our simulations. The encoding operation using the matrix

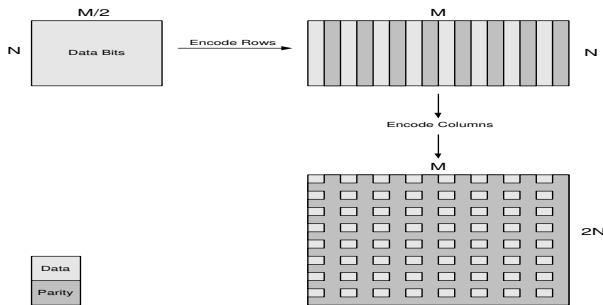


Fig. 4. *M-PDSCCC* encoding procedure.

structure proceeds as follows. The data to be sent is put into a matrix. Each row of the matrix is encoded using a code encoder. Once all the rows are encoded, the matrix is sent to an interleaver. The interleaved matrix is coded column-wise. Data matrix dimension is $k \times k$, and encoded data matrix dimension is $n \times n$, i.e., our code is an $(n \times n, k \times k)$ code.

2) *PDSCCC Decoder*: The decoder of a *PDSCCC* is seen in Fig. 5. It is clear from the decoder structure that decoders $D_{11} \dots D_{1N}$ or decoders $D_{21} \dots D_{2M}$ can run in parallel.

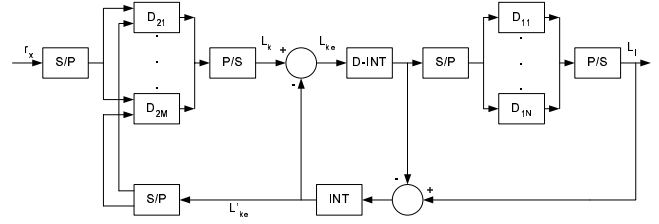


Fig. 5. *PD-SCCC* Decoder. r_x is the received signal value. INT, D-INT are the interleaver and de-interleaver. L_k and L_l are the bit probabilities. L'_{ke} and L'_{le} are the extrinsic bit probabilities.

IV. PRACTICAL IMPLEMENTATION ADVANTAGES

Definition: The complexity operator $C(L)$ for the convolutional code C is $C(L) = k \times L$ where k is the number of parameters (number of alphas, betas, gammas) to be computed by the decoder in a single stage of the code trellis, i.e., for an input frame of length L the total computation amount is approximately $k \times L$. k depends on the convolutional code generator matrix.

Definition: The latency operator is $T(L) = t \times L$ where t is the decoding latency for a single stage of the code trellis. L is the length of the input information sequence.

The implementation advantage of *M-PDSCCC* will be discussed herein with the parameters used in this study. Trellis termination will be neglected in calculation and will not alter the results significantly. In *SCCC*, for a given transmit data vector of length L , two log-MAP decoders are needed. The first decoder has a complexity of $C(2L)$ and a time delay of $T(2L)$. The second decoder has a shorter input, thus it has a complexity of $C(L)$ and a time delay of $O(L)$. In total, the complexity is of $C(3L)$ and the time delay is of $T(3L)$. An input sequence of length L corresponds to a square matrix of size $\sqrt{L} \times \sqrt{L}$. In *M-PDSCCC* columns (inner code cluster) are decoded first. The use of separate log-MAP decoders for each row and column makes parallel processing operation possible. Each column decoder (inner decoder) has complexity of $C(\sqrt{L})$ and time delay of $T(\sqrt{L})$. Since these decoders are run in parallel, the total column decoding complexity is of $C(2L)$ but the time delay is of $T(\sqrt{L})$. Similarly, row decoding (outer decoder) has a total complexity of $C(L)$ and time delay of $T(\sqrt{L})$. Although both complexities are the same, *M-PDSCCCs* decrease the decoding delay by factor $T(\sqrt{L})$.

V. PDSCCC SIMULATION

We used the recursive systematic convolutional code *RSC* with the generator $(1, 5/7)_{octal}$ for all constituent code encoders in *M-PDSCCC*. An *S-random interleaver* ($S=18$) is employed between clusters. Input information sequence frame length is chosen as 1024 bits. We formed a size 32×32 information matrix. Thus, N equals 32 and M equals 68

(i.e trellis termination bits are added after row encoding). The encoded data in matrix form is multiplexed to a single stream and binary phase shift key (*BPSK*) modulated. The *BPSK* modulated signal is passed through an additive white Gaussian noise (*AWGN*) channel with double-sided power spectral density $\frac{N_0}{2}$. We used the *log-MAP* soft decoding algorithm [3] to iteratively decode the *M-PDSCCCs*. We used 12 iterations for decoding. We also simulated the serially concatenated convolutional code which is a special case of *M-PDSCCC* with $M = N = 1$. The signal-to-noise ratio values given in all the Figs. are normalized with the proper code rates for all scenarios. Non-recursive systematic convolutional codes were also tried and it was seen that their performance is not as good as the *M-PDSCCC* system where *RSC* encoders are employed.

A. Trellis Termination Effects

We investigated the effects of trellis termination for three different scenarios. Trellis termination bits are added by the outer *RSC* encoders (row encoders) (*R-T*) with *rate* ≈ 0.235 , both outer and inner constituent *RSC* encoders (row and column encoders) added trellis termination bits to the codeword (*TT*) with *rate* ≈ 0.221 , neither outer and inner constituent *RSC* encoders added trellis termination bits to the codewords (*No-TT*) with *rate* ≈ 0.25 . Although addition of trellis termination bits decreases the code rate, they are critical for good performance of the *M-PDSCCC* as seen in Fig. 6. Addition of trellis termination bits in turbo or serially concatenated code shows negligible improvement on the code performance [14]. However, without trellis termination the performance of the *M-PDSCCC* degrades drastically. The addition of trellis termination bits slightly decreases the code rate, and this leads to a small loss in bandwidth efficiency.

The performance graphs are seen in Fig. 6. *M-PDSCCC* has better performance at very low $\frac{E_b}{N_0}$ levels when only inner codes are trellis terminated. Its performance is worse at higher $\frac{E_b}{N_0}$ levels when it is compared to the inner and outer codes trellis terminated case. Though quite close up to $BER 10^{-7}$, *SCCC* seems to have an error curve of higher slope compared to *TT* at higher $\frac{E_b}{N_0}$ values. The analytical bound is evaluated for the *TT* case using the uniform interleaver approach. However as seen from the Fig. 6 the bound obtained by uniform interleaver concept gives a rough idea about the code performance.

B. Symmetric PDSCCC

We also simulated the scenario where an equal number of parallel branches are used for the outer and inner clusters. The performance graph is depicted in Fig. 7. It is obvious from the Fig. 7 that the performance of the *PDSCCC* is slightly better than that of the *SCCC* at high $\frac{E_b}{N_0}$ values.

VI. ANALYTICAL ANALYSIS OF PDSCCC

The uniform interleaving assumption can be used to evaluate the average performance of the *PDSCCCs*. Since the information bits of parallel subsequences of inner the and

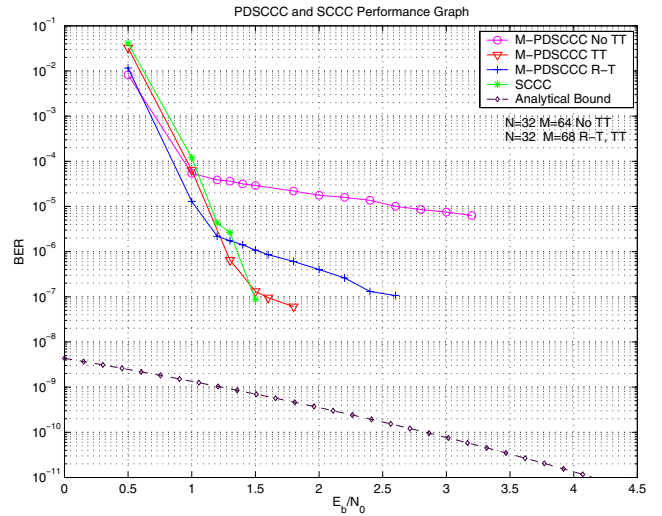


Fig. 6. *M-PDSCCC* and *SCCC* performance graph. *M-PDSCCC* with no trellis termination (*M-PDSCCC No TT*). *M-PDSCCC* when rows (outer codes) are trellis terminated (*M-PDSCCC R-T*). *M-PDSCCC* when rows and columns (outer and inner codes) are trellis terminated (*M-PDSCCC TT*). Frame length=1024, Iteration number=12.

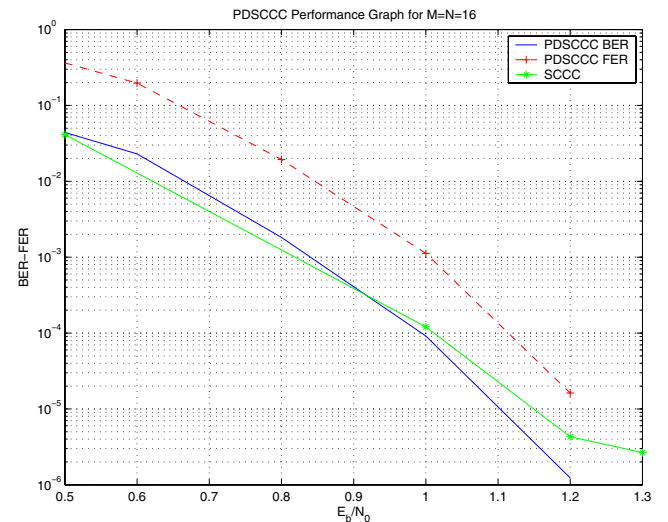


Fig. 7. *PDSCCCs* performance graph. The number of outer encoder and inner constituent encoders are equal and it is 16. Trellis termination bits are added by both outer and inner encoders. Frame length=1024. Iteration number =12.

outer clusters are independent, *IOWEFs* of the inner and outer clusters can be evaluated as

$$A^{C1}(W, X) = \prod_{i=1}^N A_{1i}(W, X)$$

$$A^{C2}(W, X) = \prod_{i=1}^M A_{2i}(W, X),$$

where $A_{1i}(W, X)$ and $A_{2i}(W, X)$ are the *IOWEFs* of the *CCs* in the inner and outer clusters. We considered different scenarios and evaluated analytical bounds for the performance of the *M-PDSCCCs*. The analytical bounds for square

input matrices are shown in Fig. 8 for different interleaver lengths. Trellis termination bits are used by both inner and outer clusters. It is clear from Fig. 8 that as the interleaver size increases better performance is obtained.

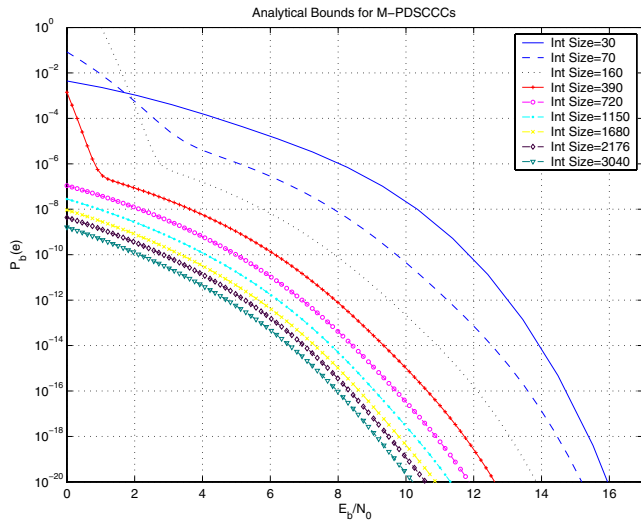


Fig. 8. *M-PDSCCs*' analytical bounds for different interleaver sizes. Square input matrices are used.

Analytical bounds are also evaluated for the case when the trellis termination is not applied to the constituent codes. The bounds are shown in Fig. 9. When compared to Fig. 8, the degradation in performance is obvious.

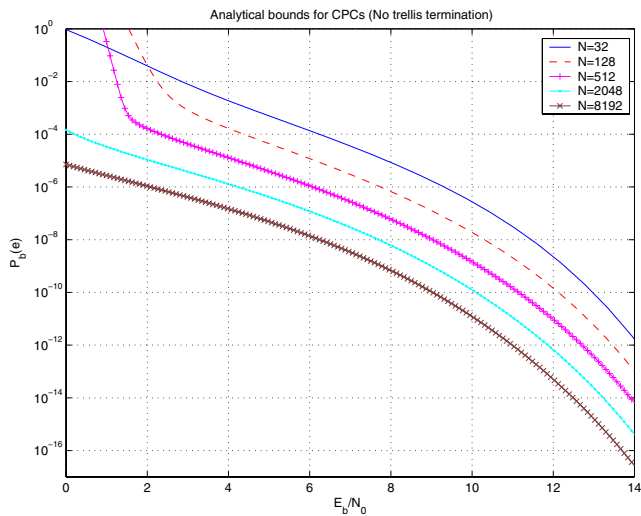


Fig. 9. *M-PDSCCs*' analytical bounds when trellis termination bits are not used.

VII. CONCLUSION

In this article we propose new classes of serial concatenated convolutional codes. Using the uniform interleaver assumption we showed that the proposed codes perform as well as classical serially convolutional codes. Simulation results also support the analytical outcomes. The decoding delay is reduced by a factor of the number of parallel

branches. This provides a significant advantage in practical applications.

REFERENCES

- [1] G. D. Forney, Jr., *Concatenated Codes*, M.I.T. Press, Cambridge, MA, USA, 1966.
- [2] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate", *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-20, March 1974, pp. 284-287.
- [3] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes," in *Proc. ICC'93* (Geneva, Switzerland, May 1993), pp. 1064-1070.
- [4] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi and F. Pollara, "Serial concatenation of interleaved codes: Design and performance analysis," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, pp. 909-926, May, 1998.
- [5] R. G. Gallager, "Low Density Parity Check Codes," *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-8:21-28, January 1962.
- [6] P. Elias, "Error free decoding," *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-4, pp. 29-37, Sept., 1954.
- [7] D. Rankin, T. Aaron Gulliver, "Single parity check product codes," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 49, no. 8, August 2001 pp. 1354-1362
- [8] Hanzo, L. / Liew, T. H. / Yeap, B. L. *Turbo Coding, Turbo Equalisation and Space-Time Coding for Transmission over Fading Channels*, John Wiley and Sons, 2002.
- [9] S. Yoon, Y. Bar-Ness, "A Parallel MAP Algorithm for Low Latency Turbo Decoding", *IEEE Communication Letters*, Vol. 6, No. 7, July 2002.
- [10] U. Dasgupta and K. R. Narayanan, "Parallel Decoding of Turbo Codes Using Soft Output *T*-Algorithms", *IEEE Communication Letters*, Vol. 5, No. 8, August 2001.
- [11] J. Hsu and C. Wang, "A parallel decoding scheme for turbo codes," in *Proc. ISCAS'98*, vol. 4, June 1998, pp. 445-448.
- [12] O. Gazi, A. Ö. Yılmaz, "Turbo Product Codes Based on Convolutional Codes," *ETRI Journal*, Vol: 28, No: 4 pp. 453-460, August 2006.
- [13] S. Benedetto, G. Montorsi, Unveiling Turbo Codes: Some Results on Parallel Concatenated Coding Schemes, *IEEE Trans. on Inform. Theory*, Vol. 42, No. 2, March 1996.
- [14] P. Robertson, "Illuminating the structure of parallel concatenated recursive (TURBO) codes," in *Proc. GLOBECOM'94*, San Francisco, CA, Nov. 1994, pp. 1298-1303.

Iterative Decision Feedback Equalization and Decoding for Rotated Multidimensional Constellations in Block Fading Channels

Gökhan M. Güvensen, A. Özgür Yılmaz

Abstract—It is known that rotated multidimensional constellations can be used effectively to achieve full-rate and full-diversity transmission in block fading channels. However, the optimal decoding complexity is exponential with the number of fading blocks (or degrees of freedom). In this paper, we propose a reduced-complexity iterative receiver structure operating on a block basis for coded modulation schemes with rotated constellations. The proposed detector is based on iterative forward and backward filtering followed by a channel decoder that uses a priori log-likelihood ratios (LLR) of coded symbols. Forward and feedback filters are jointly optimized according to the minimum mean square error (MMSE) criterion to minimize the spatial interference induced by rotation. It is observed that the proposed structure achieves full diversity and performance close to outage probability for rotated inputs even with simple Discrete Fourier Transform (DFT) rotations.

Index Terms—Rotated constellations, block-fading channel, decision feedback equalization, diversity, outage, singleton bound, coded modulation, iterative decoding, soft feedback

I. INTRODUCTION

Rotated multidimensional constellations with uncoded modulation has been studied and shown to be an effective way to attain full-rate and full-diversity transmission in fading channels [1], [2], [3]. Even random multidimensional rotations are shown to exhibit good diversity distributions to combat channel fading for uncoded transmission in [3]. The problem of constructing general coded modulation schemes over multidimensional signal sets obtained by rotating classical complex-plane signal constellations has recently been studied in [4] for block fading channels with B fading blocks.

Despite the benefits of rotation over B fading blocks, they induce large decoding complexity due to the inter-symbol interference (ISI) caused by rotated constellations. A problem here is related to the complexity of optimum decoding, i.e., maximum likelihood (ML) receiver interfaces exhibit a complexity that grows exponentially with the modulation size and the dimension of rotation (B), and becomes quickly unpractical as either parameter is large. In [3], a suboptimal MMSE equalizer with decision feedback is proposed and it is shown to achieve good performance without destroying the high diversity order in the rotated constellation. In [5], the sphere decoding is employed to avoid exhaustive search over

all candidate points. However, the structures in [3] and [5] were proposed for uncoded rotations. When coded modulation is used, the code trellis structure has to be incorporated and soft information should be provided to the decoder, which further complicates the problem. As a remedy to this problem, in [4], the use of rotations with dimension smaller than the number of fading blocks was considered. The intuition behind this idea is that the channel code itself can help to achieve full diversity and sometimes rotations of smaller dimension might be sufficient. However, for some rate values and constellation sizes, using rotations with small dimensions may not be sufficient to achieve optimal rate-diversity tradeoff, i.e., the rotations of large dimensions might be necessary to attain full diversity order and the decoding complexity has still exponential dependence on the dimension of rotation. Soft-output sphere decoding technique for rotated constellation was proposed in [6], but it still shows some undesirable limitations in practice.

In this paper, we propose an iterative receiver structure with reasonable complexity for coded modulation schemes with rotated constellations. The proposed detector is based on iterative forward and backward filtering followed by a channel decoder that works by using preliminary soft values of the coded symbols. Since the reliability of coded symbols from the decoding process are used in deriving the jointly optimal forward and backward filters, the filters employed in this work have a different structure from that of previous interference-cancellation based turbo equalizers, such as [7], [8], [9]. It has been observed that the proposed scheme yields a very close performance to the outage probability with reasonable complexity for rotated constellations. The benefits that rotation brings in terms of diversity exponent is justified without compromising the decoding complexity when compared to the optimal ML based structures with exponential complexity.

This paper is organized as follows. In Section II, the system model is described. In Section III, iterative decision feedback equalization technique for decoding of rotated constellations is discussed in detail. In Section IV, iterative decoding structure concatenated to equalization stage is explained. Finally, simulation results and concluding remarks are presented in Section V and Section VI respectively.

II. SYSTEM MODEL

The following notation is used throughout the paper. Bold-face upper-case letters denote matrices and scalars are denoted

This work was supported in part by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under grant 104E027.

The authors are with the Department of Electrical and Electronics Engineering, Middle East Technical University, Ankara, Turkey (e-mail: guvensen@metu.edu.tr, aoyilmaz@metu.edu.tr.)

by plain lower-case letters. The superscript $(\cdot)^*$ denotes the complex conjugate for scalars and $(\cdot)^H$ denotes the conjugate transpose for vectors and matrices. The $n \times n$ identity matrix is shown with \mathbf{I}_n . The autocorrelation matrix for a random vector \mathbf{a} is $\mathbf{R}_a = E\{\mathbf{a}\mathbf{a}^H\}$ where $E\{\cdot\}$ stands for the expected value operator. The $(i, j)^{th}$ element of a matrix \mathbf{A} is denoted by $\mathbf{A}(i, j)$ and the i^{th} element of a vector \mathbf{a} is denoted by a^i .

This paper considers block based transmission as in [10], [11], [8]. During the transmission of one block, the channel is assumed to be constant and it changes independently from block to block. Without dealing with the channel estimation problem, the channel is assumed to be perfectly known at each block transmission.

Assuming symbol rate sampling, the discrete time baseband equivalent model of the point-to-point single-input single-output block fading channel with B fading blocks can be written as [12],

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{D}\mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

where N is the codeword length (block length) and \mathbf{D} is a diagonal $B \times B$ matrix with main entries, d_i , $i = 1, \dots, B$, i.e., $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_B)$. $\mathbf{a}_k = [a_k^1, \dots, a_k^B]^T$ is the portion of the transmitted codeword at time k and $\mathbf{y}_k = [y_k^1, \dots, y_k^B]^T$ is the corresponding received vector at time k . Main diagonal entries of \mathbf{D} , d_i 's are the fading coefficients which are independent zero-mean circularly symmetric complex Gaussian (ZMCSCG) random variables with variance 1. Block fading model is considered and thus the channel matrices are assumed to be constant during a coherence interval significantly larger than a duration needed for the transmission of one block [13] and channel state information at transmitter (CSIT) is not available. Noise vectors \mathbf{n}_k are also taken as ZMCSCG white (spatially and temporally) noise with variance N_0 .

We consider that \mathbf{a}_k 's are obtained via the rotation of the symbols, i.e.,

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{V}\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

where $\mathbf{x}_k = [x_k^1, \dots, x_k^B]^T$ is the vector of complex-plane signal constellation symbols that is rotated by the $B \times B$ rotation matrix \mathbf{V} . The rotation matrix is unitary, i.e., $\mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}_B$ and applied uniformly throughout transmitted block.

The codewords $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{N-1}]$ form a coded modulation scheme $\chi \subset \mathbb{C}^{B \times N}$. In particular, we consider that χ is obtained as the concatenation of a binary code of rate r and a modulation over the signal constellation $S \in \mathbb{C}$ with $M = \log_2 |S|$. The rate in bits per channel use of this scheme is $R = rM$. After the transmitted signal block has been rotated, one can get the equivalent channel from (1) and (2) as

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

where $\mathbf{H} = \mathbf{D}\mathbf{V}$. This form resembles to the baseband equivalent form of MIMO channel. Therefore, we will call our structure as space-time decoder hereafter and construct our receiver based on (3) in Section III.

When no rotations are used, the optimal diversity reliability exponent is given by the Singleton bound for a given rate R

(bits per channel use) and signal constellation M as

$$d_\chi^* = 1 + \left\lfloor B \left(1 - \frac{R}{M} \right) \right\rfloor \quad (4)$$

for B Rayleigh faded blocks. This value is an upper bound for the block-diversity of any coded modulation scheme $\chi \subset \mathbb{C}^{B \times N}$ with rate R and constellation $S \in \mathbb{C}$ with $M = \log_2 |S|$. A code is block-wise maximum-distance separable (MDS) if it achieves the maximum diversity order given in (4) [12], [4].

It was shown in [4] that the optimal diversity reliability exponent achieved by random Gaussian codes can also be achieved by random coded modulation schemes concatenated with a full-diversity rotation of dimension B when $R < M$. In this case, the optimal reliability exponent is given by

$$d^* = B \quad (5)$$

which is the available degrees of freedom in the channel. The rotation of dimension B takes care of achieving full diversity while the coding gain is left to the outer coded modulation scheme over S and, so for rotated schemes, the MDS constraint on the code is relaxed [4].

As it will be seen in Section V, simple rotations like DFT which is not full-diversity rotation may be sufficient to reach optimal diversity order B in coded schemes, since the code itself help to achieve maximum reliability exponent. In other words, the optimal diversity order in (5) is achieved by both coded modulation and the rotation in this case.

III. ITERATIVE DECISION FEEDBACK EQUALIZATION (DFE) FOR ROTATED CONSTELLATIONS

We consider iterative space-time decoder with soft decision feedback in this paper. Since both equalization and decoding processes can be performed in each iteration, turbo principle can be applied as done in [7], [8], [9]. In Fig. 1, an exemplary receiver structure is shown for iterative decision feedback equalizer (DFE).

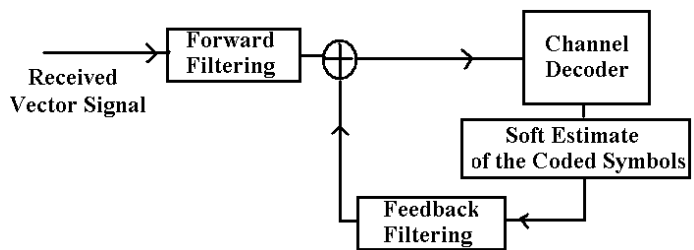


Fig. 1. Iterative Decision Feedback Equalization (DFE) and decoding for rotated constellations

One can write the output from the DFE for the k^{th} vector in the block in the i^{th} iteration as

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} = (\mathbf{W}^{(i)})^H \mathbf{y}_k - (\mathbf{F}^{(i)})^H \tilde{\mathbf{x}}_k^{(i-1)} \quad (6)$$

for $k = 0, \dots, N-1$. $\mathbf{W}^{(i)}$'s and $\mathbf{F}^{(i)}$'s are forward and feedback filters with sizes $B \times B$ and $\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}$'s are soft decisions from the previous iteration. When the filters are designed based on the MMSE criterion and the information bearing

signals are Gaussian, this structure is information theoretically optimum as stated in [14]. The first term in (6) is actually the feedforward estimate of the k^{th} transmitted vector. In (6), $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}$'s are the soft feedback decisions from the previous iteration and they are utilized at the feedback filtering process to improve the estimate of \mathbf{x}_k . The forward and backward filter matrices are jointly optimized and found according to the MMSE criterion given by $E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \|\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \mathbf{x}_k\|^2 \right\}$ presented in [10], [11].

The n^{th} component of the estimation is not used in the feedback equalization of the n^{th} component of the received vector, and so we impose the following condition on the feedback filter

$$\mathbf{F}^{(i)}(n, n) = 0, \quad n = 1, \dots, B \quad (7)$$

since, by imposing this constraint, one can avoid self-subtraction of the desired symbol by its previous estimate.

The Lagrange multiplier method can be used to obtain optimal filter coefficients. Lagrangian vectors and the corresponding scalar constraints (Lagrangian function) can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^{(i)} &= \text{diag} \left[\Gamma_1^{(i)}, \dots, \Gamma_B^{(i)} \right]_{(B \times B)}, \\ \text{Lagrangian}(\mathbf{\Gamma}^{(i)}) &= \sum_{n=1}^B (\mathbf{F}^{(i)}(n, n))^* \Gamma_n^{(i)} \end{aligned} \quad (8)$$

Due to an interleaving operation both in time and space, we can assume that,

$$E\{\mathbf{x}_k(\mathbf{x}_l)^H\} = E_s \mathbf{I}_{n_t} \delta_{kl}, \quad \text{for } k, l = 0, \dots, N-1, \quad (9)$$

where δ_{kl} is the delta function which is 0 for all k but $k = l$. Some important correlation matrices used by the forward and feedback filters are defined for the i^{th} iteration as

$$\mathbf{P}^{(i)} = E\{\mathbf{x}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})^H\}, \quad \mathbf{B}^{(i)} = E\{\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})^H\} \quad (10)$$

for $k = 0, \dots, N-1$. To simplify the computation of the filter coefficients, feedback decisions are assumed to be independent. Furthermore, due to interleaving operation of the coded symbols, feedback decisions are assumed to be uncorrelated with the symbols transmitted at different block or symbol time. It is further assumed that the reliability matrices of the decision feedback are the same for all k , i.e.,

$$E\{\mathbf{x}_k(\hat{\mathbf{x}}_l^{(i-1)})^H\} = \mathbf{0}, \quad E\{\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}(\hat{\mathbf{x}}_l^{(i-1)})^H\} = \mathbf{0}, \quad \text{for } k \neq l \quad (11)$$

$$E\{x_k^m(\hat{x}_k^n)^*\} = \rho_m \delta_{mn}, \quad E\{\hat{x}_k^m(\hat{x}_k^n)^*\} = \beta_m \delta_{mn} \quad (12)$$

for $m, n = 1, \dots, B$ and the expectations are independent of symbol index k . Then, we can write

$$\mathbf{P}^{(i)} = \text{diag}[\rho_1, \dots, \rho_B], \quad \mathbf{B}^{(i)} = \text{diag}[\beta_1, \dots, \beta_B]. \quad (13)$$

This assumption makes the forward and backward filters independent of time index k and, so the block processing on each received signal can be implemented effectively. This can be achieved by simply averaging the correlations of soft feedback decisions from the previous iteration as will be done in Section IV. These are standard and reasonable assumptions as stated

in [10], [7], [8] since the average symbol error probability is approximately the same for each symbol in a large block with quasi-static fading. Calculation of the correlation matrices $\mathbf{P}^{(i)}$ and $\mathbf{B}^{(i)}$ will be done in Section IV.

After taking the gradient of the MMSE cost function and the Lagrangian with respect to the rows of $(\mathbf{W}^{(i)})^H$ and $(\mathbf{F}^{(i)})^H$, equating the gradients to the zero vector, taking expectations and combining vectors into single matrix equations for $n = 1, \dots, B$, one can obtain the following matrix equations giving the optimal forward and backward filter matrices

$$\mathbf{R}_y \mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{H} \left[E_s \mathbf{I}_B + \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{F}^{(i)} \right] \quad (14)$$

$$\mathbf{B}^{(i)} \mathbf{F}^{(i)} = (\mathbf{P}^{(i)})^H \left[\mathbf{H}^H \mathbf{W}^{(i)} - \mathbf{I}_B \right] - \mathbf{\Gamma}^{(i)} \quad (15)$$

where

$$\mathbf{R}_y = E\{\mathbf{y}_k(\mathbf{y}_k)^H\} = (\mathbf{H}\mathbf{H}^H E_s + N_0 \mathbf{I}_B) \quad (16)$$

and $\mathbf{\Gamma}^{(i)}$ can be obtained from the constraint in (7). By substituting $\mathbf{W}^{(i)}$ into (15) and using the constraint, the Lagrangian terms given in (8) and backward filter matrices can be readily found after some calculations as,

$$\Gamma_n^{(i)} = \frac{[\mathbf{A}^{(i)}(n, :) \mathbf{D}^{(i)}(:, n)]}{\mathbf{A}^{(i)}(n, n)}, \quad n = 1, \dots, B \quad (17)$$

$$\mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} \left[\mathbf{D}^{(i)} - \mathbf{\Gamma}^{(i)} \right], \quad (18)$$

where

$$\mathbf{A}^{(i)} = \left[\mathbf{B}^{(i)} - (\mathbf{P}^{(i)})^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}^{(i)} \right]^{-1}, \quad (19)$$

$$\mathbf{D}^{(i)} = (\mathbf{P}^{(i)})^H \mathbf{H}^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{H} E_s - (\mathbf{P}^{(i)})^H, \quad (20)$$

$\mathbf{A}^{(i)}(n, :)$ is the n -th row of $\mathbf{A}^{(i)}$, $\mathbf{D}^{(i)}(:, n)$ is the n -th column of $\mathbf{D}^{(i)}$ and forward filter $\mathbf{W}^{(i)}$ can be obtained from (14).

IV. ITERATIVE DECODING

In this section, we will calculate the log-likelihood ratios (LLR) and soft decisions of the coded symbols to be used in decision feedback. BPSK modulation is assumed for simplicity, but the extension to other M-ary or M-PSK modulations is straightforward. At each iteration, extrinsic information is extracted from detection and decoding stages and is then used as a priori information in the next iteration, just as in turbo decoding. The soft output from the DFE in the i^{th} iteration after (6) can be written as,

$$\tilde{x}_k^{m(i)} = \mu_m^{(i)} x_k^m + \eta_k^{m(i)} \quad (21)$$

for $k = 0, \dots, N-1$ and $m = 1, \dots, B$. In this case, the equalized channel in (21) can be considered as a quasi-parallelized channel and the LLR for the m^{th} component of the k^{th} transmitted symbol can be written as

$$\lambda_k^{m(e)} = \log_e \frac{P(\tilde{x}_k^{m(i)} | x_k^m = +1)}{P(\tilde{x}_k^{m(i)} | x_k^m = -1)}. \quad (22)$$

The LLR term $\lambda_k^{m(e)}$ is the extrinsic information that can be obtained from the equalizer output. An a priori probability

ratio $\lambda_k^{m(p)}$ ($\log_e \frac{P(x_k^{m=+1})}{P(x_k^{m=-1})}$) is given by the decoder as the intrinsic information obtained from the previous iteration [10], [7] and used to construct a soft estimate of the coded symbol x_k^m . The extrinsic information given in (22) can be expressed as,

$$\lambda_k^{m(e)} = \frac{4\text{Re}\{(\mu_m^{(i)})^* \tilde{x}_k^{m(i)}\}}{E\{|\eta_k^m|^2\}} \quad (23)$$

by using the equivalent complex amplitude, $\mu_m^{(i)}$ of x_k^m at the output of the equalizer and the residual interference power, $E\{|\eta_k^{m(i)}|^2\}$. These values can be easily found in terms of channel matrices, forward and backward filter coefficients and correlation matrices as done for the SISO systems in [10], [7]. While computing the LLRs, we resort to simplification of the decoding algorithm by neglecting the correlation existing between the residual noise terms, i.e., the η_k^m 's are taken as uncorrelated for $m = 1, \dots, B$ as done in the decoding stage of [8] for flat fading MIMO channel and the residual interference is further approximated by a Gaussian distribution as in [10], [7]. It can be shown that $\mu_m^{(i)}$ and $E\{|\eta_k^{m(i)}|^2\}$ values do not depend on symbol time index k , so these values are calculated only once for the decoding of one block in each iteration, which reduces the complexity significantly.

Soft feedback decisions, \hat{x}_k^m for the DFE can be taken as $\tanh\left(\frac{1}{2}\lambda_k^{m(p)}\right)$ for $E_s = 1$, $m = 1, \dots, B$ and $k = 0, \dots, N-1$ as done in [7], [8], [10]. The non-zero diagonal entries of the correlation matrices $\mathbf{P}^{(i)}$ and $\mathbf{B}^{(i)}$ in (10) used by the forward and backward filters can be calculated by using the following approximation,

$$\rho_{k,m} \triangleq E\{x_k^m (\hat{x}_k^m)^*\} = E\{E\{x_k^m\} (\hat{x}_k^m)^*\} = |\hat{x}_k^m|^2 \quad (24)$$

$$\rho_m = \beta_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_{k,m} \quad (25)$$

$E\{x_k^m\}$ was taken as \hat{x}_k^m and this is a common assumption in various turbo detection techniques as done in [10], [7] and [15].

Correct estimation of $\mathbf{P}^{(i)}$ and $\mathbf{B}^{(i)}$'s are important since our proposed DFE takes into account the reliability of the feedback decisions and therefore alleviates the error propagation problem different than the original DFE studies assuming perfect feedback decisions. In the first iteration, $\mathbf{P}^{(i)}$ and $\mathbf{B}^{(i)}$ can be taken as $\mathbf{0}_B$, i.e., reliable feedback decisions are not available. As the number of iterations increases, both metrics approach the asymptotic value: $E_s \mathbf{I}_B$.

V. SIMULATION RESULTS

A. Outage Probability Calculations

For sufficiently large block length N , the packet error probability of any coding scheme is lower bounded by the information outage probability [13]. In this section, we will compare the performance of our proposed decoding structure with the corresponding constrained outage probability of rotated and unrotated schemes. The constrained capacity can be found for the system model in (3) given the complex vector set χ of cardinality $|S|^B = (2^M)^B$ (e.g., M-ary or M-PSK modulations) similar to the derivations for block fading

channels in [12] and rotated schemes in [4] as

$$C_{rotated}^\chi = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{B} I(\mathbf{x}_k; \mathbf{y}_k | \mathbf{H}) = \log_2 |S| - \frac{1}{B} E_{\mathbf{n}} \left\{ \sum_{\mathbf{x}_k \in \chi} \frac{1}{|S|^B} \log_2 \sum_{\mathbf{x}_i \in \chi} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) + \mathbf{n}\|^2 + \|\mathbf{n}\|^2}{N_0}\right) \right\} \quad (26)$$

where \mathbf{n} is ZMCSCG vector and the corresponding outage probability can be written as

$$P_{out}^{rotated, \chi}(R) = \mathbb{P}\{C_{rotated}^\chi < R\}. \quad (27)$$

Constrained outage probabilities will be used for performance evaluation in the next part.

B. Performance Results

In Fig. 2, simulation results are depicted for block fading channels with 3 fading blocks. Each block is Rayleigh faded with unity power. The error probability of rotated and unrotated systems with QPSK modulation and their corresponding outage probabilities are shown. A full block diversity attaining blockwise concatenated convolutional code (BCCC) is used for encoding for both rotated and unrotated cases as adapted from [12]. The outer code is a rate- $\frac{1}{2}$ convolutional code and the inner codes are 3 trivial rate-1 accumulators. The information block length, i.e., the information bits entering the outer encoder is taken as 148 per frame and the rate in bits per channel use of this scheme is $R = rM = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. A DFT matrix with size 3 is used to rotate discrete QPSK inputs. Number of iterations inside the Turbo BCCC decoder is set to 10 and the number of equalizer iterations at which the forward and backward filters are updated by using the reliability matrices is taken as 3.

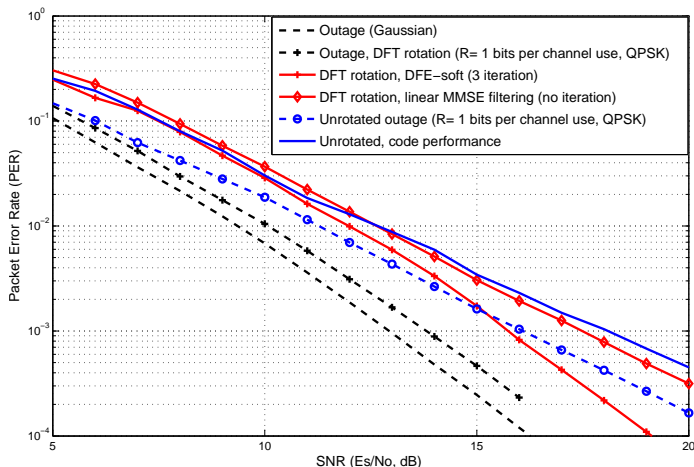


Fig. 2. Performance comparison of iterative DFE and outage for rotated and unrotated constellations, $B = 3$

As it is seen from the outage probabilities, rotation enables to capture largest possible reliability exponent achieved by Gaussian inputs, namely $d_\chi^* = B = 3$, while unrotated inputs have $d_\chi^* = 2$. It has been observed that there is approximately

2 dB difference between the outage probability with rotated inputs and the performance of decision feedback equalizer (DFE) with 3 iterations. This gap from the outage is similar to the gap between the outage and code performance of unrotated inputs. Then, one can say that the spatial interference and the error propagation problem inherent in decision feedback are almost eliminated and it is possible to attain optimal diversity of the block fading channel by using the proposed space-time equalizer. These results show that the theoretical benefit of rotation can be materialized by the proposed practical decoding structure with significantly reduced complexity. Moreover, it is seen that the simple DFT rotation is sufficient to attain optimal diversity order in coded schemes since the code itself helps achieve full diversity different than the uncoded rotations in which the full diversity rotations are necessary to get the optimal exponent.

Furthermore, it is interesting to note that the performance improvement of the iterative DFE with soft feedback over the linear MMSE filtering without decision feedback is about 3 dB at $\text{PER}=0.0001$. There is also a loss in diversity as observed in the reduced PER slope without decision feedback. The suboptimality of linear equalizer prevents the system achieving high diversity orders. One can say that the proposed equalizer gains more diversity in comparison to the linear forward MMSE filtering by a careful design of both the forward and backward filters.

In Fig. 3, simulations are repeated for 6 fading blocks and outage probabilities are constructed for Gaussian inputs, BPSK inputs and rotated BPSK inputs with DFT rotation of size 6. The same BCCC structure is used with rate- $\frac{1}{2}$ outer convolutional encoder and 6 inner rate-1 accumulators. The information block length is taken as 238. Similar results are obtained as in Fig. 2 and the optimal reliability exponent $d^* = 6$ is achieved by coded modulation scheme with simple DFT rotation, while unrotated inputs have $d_{\chi}^* = 4$ from the singleton bound. The optimal diversity order and a close performance to outage probability of rotated scheme at rate $R = 0.5$ bits per channel use within 2 dB are achieved by our practical decoding structure.

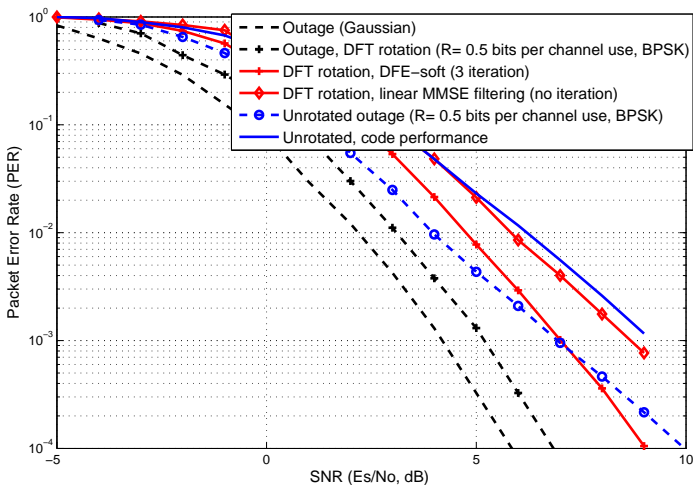


Fig. 3. Performance comparison of iterative DFE and outage for rotated and unrotated constellations, $B = 6$

Fig. 4 shows the benefits of rotations by comparing the performance of the proposed iterative DFE for rotated QPSK inputs and unrotated code performances for 8 fading blocks. DFT rotation and BCCC structure with rate- $\frac{1}{2}$ outer convolutional encoder and 8 inner rate-1 accumulators are used. The information block length is taken as 318. The maximum diversity order, namely $d^* = 8$ is achieved by the iterative DFE with soft feedback since the performance of iterative DFE shows the same slope as outage with Gaussian inputs, while the code performances with unrotated inputs can get $d_{\chi}^* = 5$. However, the gap between rotated and unrotated schemes may not be so significant at moderate PER values and even performance of the rotated scheme with the use of suboptimal non-iterative MMSE equalizer is below the performance of unrotated schemes. Therefore, for channels with large diversity order, one may not observe a considerable benefit of rotated constellations over some PER values. One has to be careful while choosing decoding architecture, since the use of non-iterative suboptimal structures may destroy the high diversity benefits induced by rotated constellations due to residual spatial interference.

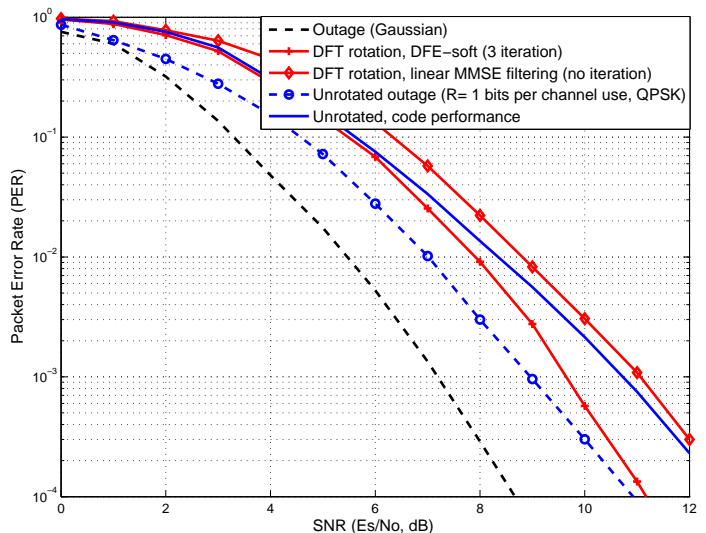


Fig. 4. Performance comparison of iterative DFE and outage for rotated and unrotated constellations, $B = 8$

VI. CONCLUSION

We have studied the block-fading channels with rotated signal constellations. Although rotated schemes can provide large diversity to combat fading, demodulation is prohibitive for large number of fading blocks and combined with coded modulations. We have proposed an iterative MMSE type decoding structure based on soft decision feedback in this paper. The proposed architecture shows a very close performance to the outage probability with rotated inputs and achieves the optimal diversity order attained by Gaussian inputs. Therefore, the theoretical benefit of rotated constellations is captured by the proposed structure with significantly reduced complexity.

REFERENCES

- [1] J. Boutros and E. Viterbo, "Signal space diversity: a power and bandwidth-efficient diversity technique for the rayleigh fading channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no. 4, pp. 1453–1467, Jul. 1998.
- [2] E. Bayer Fluckiger, F. Oggier, and E. Viterbo, "New algebraic constructions of rotated lattice constellations for the rayleigh fading channel," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 50, no. 4, pp. 702–714, Apr. 2004.
- [3] C. Lamy and J. Boutros, "On random rotations diversity and minimum mse decoding of lattices," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, no. 4, pp. 1584–1589, Jul. 2000.
- [4] A. G. Fabregas and G. Caire, "Multidimensional coded modulation in block-fading channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 54, no. 5, pp. 2367–2372, May 2008.
- [5] E. Viterbo and J. Boutros, "A universal lattice decoder for fading channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, no. 4, pp. 1639–1642, Jul. 1999.
- [6] J. Boutros, N. Gresset, L. Brunel, and M. Fossorier, "Soft-input soft-output lattice sphere decoder for linear channels," *IEEE Global Commun. Conf.*, Dec. 2003.
- [7] X. Wang and H. V. Poor, "Iterative (turbo) soft interference cancellation and decoding for coded CDMA," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 1046–1061, July 1999.
- [8] E. Biglieri, A. Nardio, and G. Taricco, "Doubly iterative decoding of spacetime turbo codes with a large number of antennas," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no. 5, pp. 773–779, May 2005.
- [9] K. Kansanen and T. Matsumoto, "A computationally efficient MIMO turbo-equaliser," *Proc. IEEE VTC*, vol. 1, pp. 277–281, 2003.
- [10] B. Ng, C. Lam, and D. Falconer, "Turbo frequency domain equalizer for single-carrier broadband wireless systems," *IEEE Trans. Wireless Comm.*, vol. 6, no. 2, pp. 759–767, Feb. 2007.
- [11] N. Benvenuto and S. Tomasin, "Iterative design and detection of a DFE in the frequency domain," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no. 11, pp. 1867–1875, Nov. 2005.
- [12] A. G. Fabregas and G. Caire, "Coded modulation in the block-fading channel: Coding theorems and code construction," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 1, pp. 91–114, Jan. 2006.
- [13] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005.
- [14] T. Guess and M. K. Varanasi, "An information-theoretic framework for deriving canonical decision-feedback receivers in gaussian channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, no. 1, pp. 173–187, Jan. 2005.
- [15] M. Tuchler and J. Hagenauer, "Linear time and frequency domain turbo equalization," *Proc. IEEE VTC*, vol. 2, pp. 1449–1453, 2001.

Turbo-like Codes Over Block-Fading and Time-Varying Narrowband Fading Channels

†Yavuz Yapıcı and ‡Ali Özgür Yılmaz

Abstract—Our main goal in this paper is to construct codes that can perform close to information-theoretic limits in time-varying channels. For this purpose, a new turbo-like code is first proposed for the block-fading channel which achieves the same error performance of a recently introduced *blockwise concatenated code* but with a lower complexity. The effectiveness of the codes are verified by comparing them with *information-outage probability*. In order to take the advantage of time diversity in time-varying fading channels, we introduce two new codes which are indeed extensions of the ones for block-fading channels. We report that error performance of the proposed codes is close to information-theoretic limits in time-varying channels set out by information-outage probability.

I. INTRODUCTION

THE research on the block-fading channel where a finite number of fading realizations are observed has become popular recently since many of the important communication systems are considered to be treated by this simplified model. Beside the channels of slow frequency hopping (such as Global System for Mobile Communication (GSM)) and multicarrier modulation with orthogonal division multiplexing (OFDM), more general slowly varying fading channels are reported to be well modeled using the block-fading channel [1].

The code construction for the block-fading channel is different from that of additive white Gaussian noise (AWGN) and conventional perfectly interleaved fading channels. In addition to the past work focusing on convolutional codes for block-fading channels, carefully designed turbo-like codes have recently been introduced to be more efficient candidates for such channels. Specifically, the turbo-like code called the *blockwise concatenated convolutional code (BCCC)* offered in [1] was shown to achieve superior performance over conventional serially concatenated convolutional code (SCCC) in the block-fading channel.

In this paper, we consider coding over both block-fading and correlated time-varying fading channels. We first propose a new code for the block-fading channel, called as *SCCC-A*, which achieves the same superior error performance of BCCC but

This work was supported in part by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under grant 104E027, and the Defence Technology Engineering and Trade Inc. (STM Inc.).

† Yavuz Yapıcı is with the STM Inc., 06800, Ankara, Turkey (e-mail: yyapici@stm.com.tr).

‡ A. Özgür Yılmaz is with the Electrical and Electronics Engineering Department, Middle East Technical University, 06531, Ankara, Turkey (e-mail: aoyilmaz@metu.edu.tr).

with reduced complexity, i.e., by using only one inner encoder instead of the multiple inner encoders as in BCCC.

Having the motivation that the simplified block-fading channel provides a useful model on which code design for correlated slowly varying fading channel is possible [2]- [3], we consider the turbo-like codes designed for block fading channel applied to time-varying narrowband fading channel as the contribution of the paper. Before we investigate the performance of BCCC and SCCC-A over time-varying Rayleigh fading channel, we propose two new turbo-like codes: *Randomly Distributed BCCC (RD-BCCC)* and its low-complexity equivalent *SCCC-B*.

Lately it has been reported in [4],[5] that behavior of finite-length codes over the AWGN can be characterized in terms of an information-outage probability. On the other hand, outage probability formulation for block-fading channels assumes an infinite length for each fading block. However, time-varying channels inherently should be considered over finite-length codewords since increasing the codeword length corresponds to an increment in the available diversity over the transmission. We will also develop a methodology as a third contribution to obtain an information-outage probability for time-varying channels.

II. TURBO-LIKE CODES FOR BLOCK-FADING CHANNEL

The research on code construction for block-fading channel recently focused on finding suitable turbo-like codes which make use of the available limited diversity in the channel [1]. In this section, we briefly overview the previous work on the information-theoretic bounds of block error rate (BLER) of turbo-like codes over block-fading channels and their construction. In addition, we introduce a new turbo-like code with the same error performance of a previously offered one but with a reduced complexity.

A. System Model for the Block-Fading Channel

We consider the block-fading channel model introduced by [2]. N fading blocks are considered each with length L and frequency nonselective fading. Fading on different blocks are assumed to be independent and identically distributed (i.i.d.), and are perfectly known by the receiver, but not by the transmitter. The following discrete-time complex baseband equivalent channel model is used

$$\mathbf{r}_n = f_n \mathbf{a}_n + \mathbf{v}_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

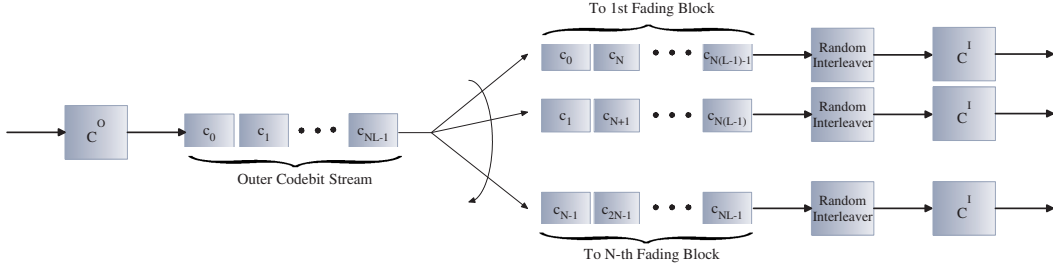


Fig. 1. BCCC Encoder

where $\mathbf{r}_n = \{r_n^0, \dots, r_n^{L-1}\}$ is the vector of received symbols, f_n is the complex fading coefficient, $\mathbf{a}_n = \{a_n^0, \dots, a_n^{L-1}\}$ is the vector of uncorrelated transmitted symbols, and $\mathbf{v}_n = \{v_n^0, \dots, v_n^{L-1}\}$ is the vector of i.i.d. noise samples which are circularly symmetric white complex Gaussian with zero-mean and variance σ_v^2 for the n -th fading block. In addition, there is no dependence between fading coefficients, the transmitted symbols and the noise.

We assume normalized flat fading and unit energy transmitted symbols. So, the average received symbol signal-to-noise ratio (SNR) is

$$\gamma_s = \frac{\mathbb{E}\{|f_n a_n^k|^2\}}{\mathbb{E}\{|v_n^k|^2\}} = \frac{\mathbb{E}\{|f_n|^2\}\mathbb{E}\{|a_n^k|^2\}}{\sigma_v^2} = \frac{1}{\sigma_v^2} \quad (2)$$

and information bit SNR is $\gamma_b = \gamma_s/R$ where R is the overall transmission rate.

B. Information-Outage Probability for the Block-Fading Channel

Information-theoretic bounds on block error rate over block-fading channels is characterized by the information-outage concept which was introduced in [2] and further elaborated in [1],[3] amongst other studies. As argued in aforementioned studies, Shannon capacity does not exist for non-ergodic channels such as block-fading channels with a finite number of fading blocks. The mutual information between input and output through the channel is a random variable in such channels and depend on the channel gain realizations. A constant rate transmission scheme is considered for block-fading channels when there is no channel-state information at the transmitter. When the instantaneous capacity is below the transmission rate, outage is declared by utilizing a strong version of converse to the channel coding theorem [3]. Probability of outage serves as a lower bound to block error rate of any code in a block-fading channel.

The information-outage probability for block-fading channels is formulated by first defining the quantity $I(P_a, \mathbf{f})$ which denotes the mutual information between input with distribution P_a and output for given channel coefficients [1]. Considering a signal constellation with cardinality $|\mathcal{S}| = 2^M$ and AWGN, $I(P_a, \mathbf{f})$ can be evaluated under the assumption of i.i.d. inputs with uniform distribution in \mathcal{S} as

$$I(P_a, \mathbf{f}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ M - 2^{-M} \sum_{a \in \mathcal{S}} \mathbb{E} \left[\log_2 \sum_{\hat{a} \in \mathcal{S}} e^{\left(-\frac{|f_n(a-\hat{a})+Z|^2 - |Z|^2}{\pi\sigma_v^2} \right)} \right] \right\} \quad (3)$$

where Z has the same distribution as the AWGN noise. The corresponding outage probability can be evaluated as

$$P_{out}(\gamma_b, R) = Pr(I(P_a, \mathbf{f}) < R). \quad (4)$$

where some of the arguments such as σ_v^2 is omitted for ease of representation.

C. Turbo-like Code Construction for the Block-fading Channel

A design criteria for turbo-like code construction in the block-fading channel is considered in [1] and [6]. Since the available diversity is limited in the block-fading channel, the popular *serially concatenated convolutional codes* (SCCC) designed for ergodic fading channels are said to exhibit poor error performance over block-fading channels [6].

In [1], *blockwise concatenated convolutional coding* (BCCC) is proposed as an encoder structure for block-fading channels which is said to achieve the Singleton bound representing the rate-diversity tradeoff [3]. In BCCC, information bit stream is first encoded by an outer code C^O of rate r_O . The resulting coded bits are distributed into N fading blocks such that consecutive coded bits are on different fading blocks, as depicted in Fig. 1. Since different fading blocks have independent fading coefficients, the consecutive coded bits of the outer encoder therefore experience independent fading levels which increases diversity benefit. Then, coded bits on each fading blocks are interleaved separately using independent random permutations, and each of the permuted bit streams are encoded by N inner encoders C^I of individual rates r_I . Assuming the modulation to be BPSK throughout this work, the overall code rate of the BCCC system is approximately $R \approx r_O r_I$. The actual rate is slightly different than $r_O r_I$ due to trellis termination at the encoders. This point is taken into account in all error performance figures.

One of the main contributions of this paper is a new turbo-like code for block-fading channel which achieves the same error performance of BCCC, but with a reduced complexity.

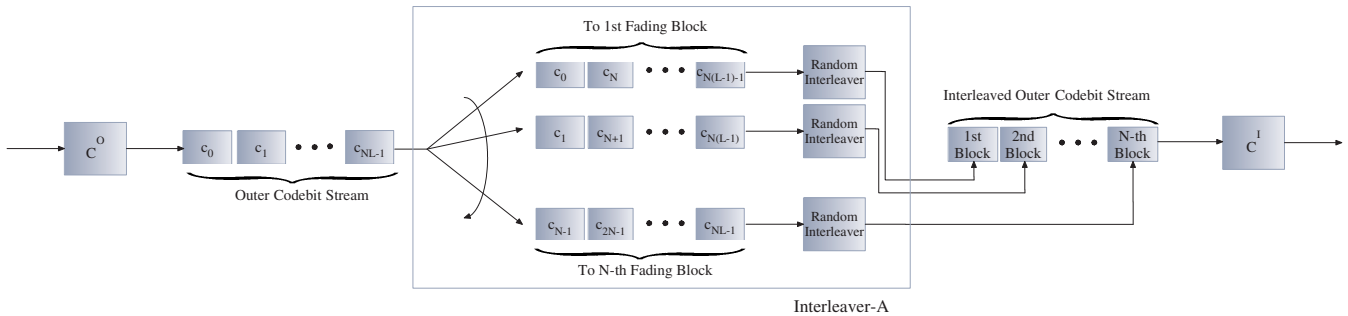


Fig. 2. SCCC-A Encoder

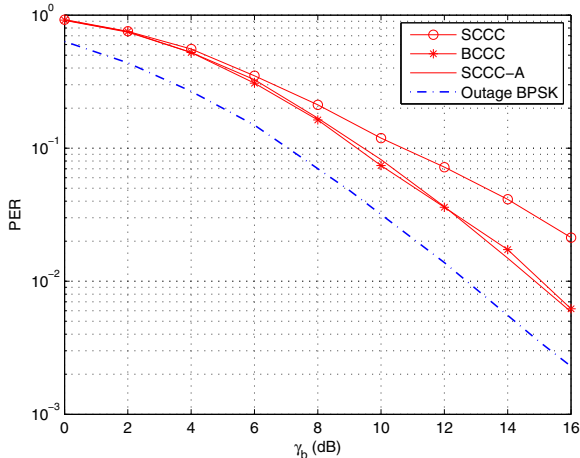


Fig. 3. BLER obtained by MAP decoding of BCCC, SCCC and SCCC-A over block-fading channel with $N = 2$ and information blocklength is 1000.

Indeed, this new code has the same encoder structure of conventional SCCC with single outer and inner encoders, but employs a special interleaver, called as “*Interleaver-A*”, which combines the idea behind BCCC and random interleaver concepts.

In this new coding which we call as *SCCC-A*, the information bit stream is first encoded by a single outer encoder. Then, coded bits at the output of the outer encoder are arranged to produce another single bit stream which is composed of N blocks and such that consecutive coded bits are distributed into different blocks, as in BCCC. After that, random interleaving is performed within each block segment separately. The resulting interleaved bit stream is then encoded by a single inner encoder in contrast to the BCCC where multiple inner encoders are used. In Fig. 2, we show the overall interleaving process for *Interleaver-A*, which operates on a single coded bit stream, as in parallel layers in order to provide better understanding.

D. Simulation Results For Codes over Block-Fading Channel

In this section, we demonstrate the effectiveness of the proposed coding scheme by presenting two important simulation results for 2 fading levels, i.e., $N = 2$. In both simulations, outer encoders are $(1, 5/7)_8$ convolutional encoder and the

inner ones are $(1, 1/3)_8$ rate-1 accumulators, as in [1]. We perform trellis termination with 2 bits in the outer encoder and 1 bit in each inner accumulator. In order to perform iterative decoding, we use soft-input soft-output (SISO) APP module introduced in [7]. As in [6], we change the interleaver for each block to produce an average interleaver.

In Fig. 3, we compare the BLER of conventional SCCC, BCCC and the proposed code SCCC-A. The information block length is chosen to be 1000 and resulting transmission rates for all codes are approximately ≈ 0.499 . Decoding is terminated after 5 iterations which achieves a good convergence. In addition, we provide the information-outage probability curve for BPSK.

We observe in Fig. 3 that, SCCC-A achieves the same BLER of BCCC, both of which have superior performance over conventional SCCC which uses ordinary random interleaver, as in [1]. Since BCCC is said to achieve maximum diversity given by the Singleton bound over block-fading channels, it is experimentally shown here that this bound can also be achieved by SCCC, but with a specially designed interleaver. Since SCCC-A uses only one inner encoder, this new coding has reduced complexity with respect to BCCC. On the other hand, BCCC enables coded bits of the outer encoder to be parallelly processed which reduces the latency at the expense of hardware complexity [8].

One of the most important features of the BCCC is reported to be the fact that information theoretic limits (information-outage probability) can be approached independent of the block length [1]. Through simulations we observe that the SCCC-A also shows BLER performance which is almost independent of the information block length, as for BCCC. We do not provide any figures here due to space limitations.

III. TURBO-LIKE CODES FOR TIME-VARYING NARROWBAND FADING CHANNELS

A. System Model for Time-varying Fading Channel

Throughout this section, we consider the following discrete-time complex baseband equivalent time-varying fading channel model at time epoch n

$$r_n = f_n a_n + v_n, \quad (5)$$

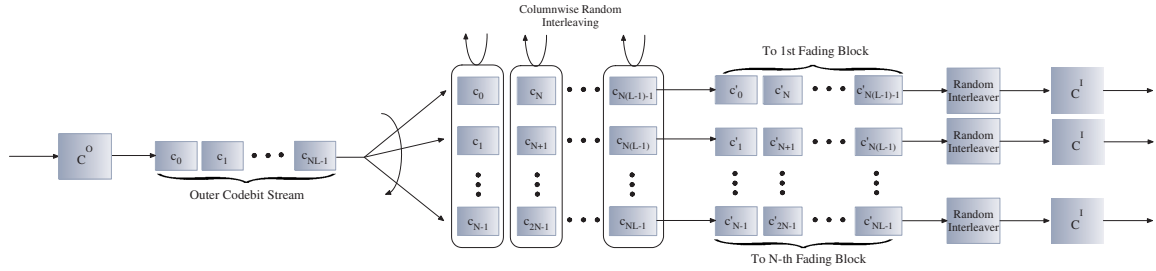


Fig. 4. Randomly Distributed BCCC (RD-BCCC) Encoder

where r_n is the received symbol, f_n is the complex channel gain which is known only by the receiver, a_n is the transmitted symbol, and v_n is the sample from circularly symmetric white Gaussian process with zero-mean and σ_v^2 variance. In this work, we assume frequency nonselective Rayleigh fading process with Jakes' model [9]. We again assume normalized flat fading, unit energy transmitted symbols and SNR computations as in Section II-A.

B. Information-Outage Probability for Time-Varying Channels

The capacity formulation for block-fading channels in [3] assumes that the length of each fading block can be infinitely large so that conventional capacity formulations are directly used. However, time-varying fading channels should be considered at finite lengths due to their nature. If the block length for time-varying channel is increased, time diversity increases proportionally and there would be an ill-conditioned comparison between the systems with different lengths.

In [4] and [5], the information-outage probability for an AWGN channel is introduced for finite-length codes. We will extend the ideas in [4],[5] to time-varying channels and obtain an outage probability.

Eqn.(5) can also be written in a vector form as in

$$\mathbf{r} = \mathbf{F} \mathbf{a} + \mathbf{v}, \quad (6)$$

where $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_K\}$ and \mathbf{F} is a diagonal matrix with the elements $\{f_1, f_2, \dots, f_K\}$. Based on the mutual information rate in [4], we define the conditional mutual information rate between vectors \mathbf{a} and \mathbf{r} conditioned on \mathbf{F} as

$$i(\mathbf{r}; \mathbf{a} | \mathbf{F}) = \frac{1}{K} \log_2 \frac{p(\mathbf{r} | \mathbf{a}, \mathbf{F})}{p(\mathbf{r} | \mathbf{F})} \quad (7)$$

where $p(\cdot)$ denotes a probability density function. Since inputs and noise are i.i.d., it can be shown that

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{a}, \mathbf{F}) = \prod_{i=1}^K p(r_i | a_i, f_i), \quad p(\mathbf{r} | \mathbf{F}) = \prod_{i=1}^K p(r_i | f_i).$$

Eqn.(8) can now be written as

$$i(\mathbf{r}; \mathbf{a} | \mathbf{F}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \log_2 \frac{p(r_i | a_i, f_i)}{p(r_i | f_i)} \quad (8)$$

for which the outage probability for time-varying channels is given by

$$P_{out}(\gamma_b, R) = Pr(i(\mathbf{r}; \mathbf{a} | \mathbf{F}) < R). \quad (9)$$

C. Turbo-like Code Construction for Time-Varying Fading Channels

In this section, we introduce two new turbo-like codes for the time-varying channel which are extensions of the original BCCC and SCCC-A, and are called as *randomly distributed blockwise concatenated convolutional code (RD-BCCC)* and *SCCC-B*.

As explained in Section II-C, original BCCC distributes the consecutive coded bits into the fading blocks in a sequential order. This may be a good choice for block-fading channel where fading on different blocks are independently distributed, but may not be efficient enough for correlated time-varying fading channels.

In order to apply BCCC to time-varying fading channel, we first divide the channel into sub-blocks over which fading is highly correlated. The correlation in the narrowband fading channel under Jakes' model (uniform scattering environment) is represented by the independent in-phase and quadrature autocorrelation functions given in [9] as

$$R(\tau) = P_r J_0(2\pi f_D \tau) \quad (10)$$

where P_r is the total received power, $J_0(\cdot)$ is the Bessel function of zeroth order, and f_D is the maximum Doppler frequency. This result implies that correlation of fading coefficients in adjacent sub-blocks are always higher than in the others. So, if we directly use BCCC in a time-varying channel, consecutive coded bits are distributed into more correlated fading levels. In order to overcome this problem and make use of the diversity in the channel efficiently, we present a new distribution scheme in which consecutive coded bits are distributed into sub-blocks randomly so that they are expected to experience much weakly correlated fading levels. We call this new code as *randomly distributed blockwise concatenated convolutional code (RD-BCCC)*, which is depicted in Fig. 4. Note that, random distribution of coded bits is corresponding to columnwise random interleaving of the coded bit matrix structure, and is depicted in Fig. 4.

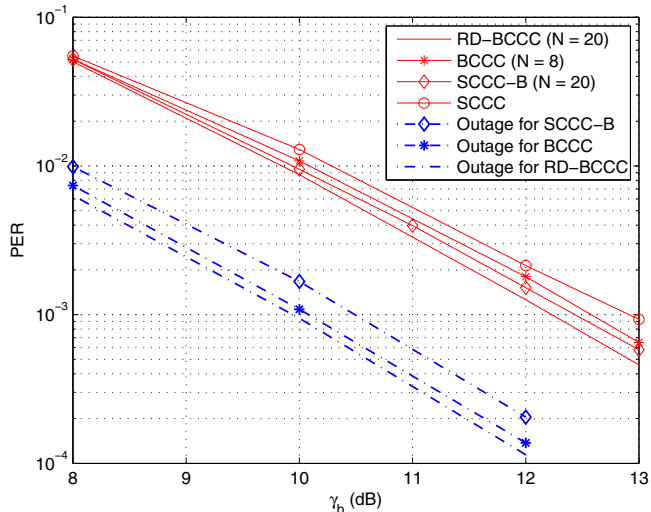


Fig. 5. BER obtained by MAP decoding of RD-BCCC, BCCC, SCCC-B and SCCC where information blocklength is 98 and $f_D T_s = 0.01$. Corresponding information-outage probabilities for BPSK are also shown.

We also present another turbo-like code for the time-varying fading channel which mimics RD-BCCC with reduced complexity, similar to the analogy between BCCC and SCCC-A. To the same fashion as in Section II-C, we design a special interleaver called “*Interleaver-B*” to achieve the diversity gain of RD-BCCC with a serially concatenated convolutional code which uses single outer and inner encoders, and distributes the coded bits of outer encoder in the same way as RD-BCCC does.

D. Simulation Results For Codes over Time-varying Fading Channel

In this section, we investigate the performance of blockwise concatenated codes (BCCC and RD-BCCC) and their low-complexity equivalents (SCCC-A and SCCC-B) over a time-varying fading channel. In simulations, all the concatenated codes are composed of $(1, 5/7)_8$ convolutional outer code and the rate-1 inner accumulator. We again use 2 bits in the outer encoder and 1 bit in each inner encoder for trellis termination. The fading channel coefficients are produced according to the time-varying Rayleigh fading process with a maximum normalized Doppler frequency of $f_D T_s = 0.01$ where T_s is the transmitted symbol time. We use SISO APP modules for the iterative decoding of the overall code produced by an information bit stream of length 98. The overall transmission rate of the system is approximately $R_1 \approx 0.445$ for RD-BCCC with $N = 20$, $R_2 \approx 0.471$ for BCCC with $N = 8$ and $R_3 \approx 0.487$ for SCCC, SCCC-A and SCCC-B. Iterative decoding is terminated after 5 iterations which provides a satisfactory convergence. We change the interleaver for each realization of the channel and perform 10^5 independent trials at each SNR value. Performance varies for different values of sub-block number N . The optimal values of N are chosen judiciously based on experiments.

In Fig. 5, we compare the error performances of RD-BCCC, BCCC, SCCC-B and SCCC with the corresponding outage probabilities for BPSK. We observe that RD-BCCC performs better than its low complexity equivalent SCCC-B, and provides almost 1dB gain over conventional SCCC and 0.4 dB over the original BCCC at $\text{BLER} = 10^{-3}$. We also observe that our proposed code RD-BCCC is off the corresponding information-outage probability only by 2.3 dB. The error performance of SCCC-B is superior over the conventional SCCC with almost 0.5 dB SNR gain and is 2 dB off the corresponding outage at the same BLER. So, RD-BCCC is superior over SCCC-B whereas the error performance of SCCC-B is slightly closer to its outage than RD-BCCC is. In addition, these offset values of around 2 dB are similar to the offsets observed for block-fading channels in [1]. Hence, the proposed codes perform very close to information-outage probability. Through simulations, we also observe that SCCC-A performs slightly worse than SCCC-B which is not shown clearly in a new figure due to space limitations.

IV. CONCLUSION

In this paper, we consider coding for block-fading and time-varying fading channels. We propose a new code for block-fading channels which achieves the same error performance as previously proposed ones but with a lower complexity. We then apply the codes designed for block-fading channels to time-varying channels. We also introduce two new codes for time-varying channels. We then develop a methodology to evaluate information-outage probability for time-varying channels with finite block lengths. We observe that the proposed codes perform within 2 dB of the corresponding outage probabilities in the same way as in codes proposed for block-fading channels.

REFERENCES

- [1] A. Guillén i Fàbregas and G. Caire, “Coded modulation in the block-fading channel: Coding theorems and code construction,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, pp. 91–114, Jan 2006.
- [2] L. H. Ozarow, S. Shamai, and A. D. Wyner, “Information theoretic considerations for cellular mobile radio,” *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, May 1994.
- [3] R. Knopp and P. A. Humblet, “On coding for block fading channels,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 1, pp. 189–205, Jul 2000.
- [4] J. N. Laneman, “On the distribution of mutual information,” in *Workshop on Information Theory and its Applications*, San Diego, CA, Feb 2006, invited Paper.
- [5] D. Buckingham and M. C. Valenti, “The information-outage probability of finite-length codes over AWGN channels,” *Information Sciences and Systems, CISS 2008. 42nd Annual Conference on*, Mar 2008.
- [6] A. Guillén i Fàbregas and G. Caire, “Turbo-like codes over the block fading channel: code design and construction,” in *3rd International Symposium on Turbo Codes and Related Topics*, Sep 2003.
- [7] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, “A soft-input soft-output APP module for iterative decoding of concatenated codes,” *IEEE Communications Letters*, vol. 1, pp. 22–24, Jan 1997.
- [8] O. Gazi and A. Yilmaz, “Turbo product codes based on convolutional codes,” *ETRI Journal*, vol. 28, pp. 453–460, Aug 2006.
- [9] A. Goldsmith, *Wireless Communications*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2005.

Low-Complexity Iterative Channel Estimation and Tracking for Time-Varying Multi-Antenna Systems

Yavuz Yapıcı

Dept. of Electrical and Electronics Eng.
Middle East Technical University
Ankara, TURKEY

A. Özgür Yılmaz

Dept. of Electrical and Electronics Eng.
Middle East Technical University
Ankara, TURKEY

Abstract—The iterative channel estimation and tracking problem is considered for time-varying frequency-flat fading multi-input multi-output (MIMO) systems. In order to jointly estimate and track the time-varying multi-antenna channel, the pilot symbol assisted modulation (PSAM) technique is generalized to the multi-antenna systems. By distributing the pilot symbols along the transmitted block, i.e., PSAM transmission, the proposed system gains the ability to track the channel variation with the same amount of pilots whereas the system with all the pilots are employed prior to the data block has no tracking capability. The error performance is further improved by iteratively estimating the channel which employs the optimal MMSE filtering and also makes use of the soft probabilities of the coded symbols provided by the decoder. In order to decrease the computational complexity due to the iterative usage of MMSE filtering, we introduce the low-complexity 2-way LMS algorithm based on the forward-backward operation of conventional forward only LMS algorithm. By simulations, 2-way LMS is shown to have a near optimal error performance and highly better channel tracking ability than the conventional LMS algorithm with no significant complexity increase.

I. INTRODUCTION

THE improved services offered by next generation wireless systems require high data rate to support the quality of service demands. To this end, deploying multiple antennas at both the transmitter and the receiver side in order to provide spatial diversity is a powerful choice amongst the others. In order to further improve the performance of these MIMO systems, space-time codes which offer a coding structure using spatial and time dimensions mutually are introduced in [1]. Nevertheless, most of these initial work on MIMO communications have the assumption of full knowledge of the channel state information (CSI). Therefore, it is recently of interest to explore for the efficient algorithms to estimate the multi-channel transmission environment.

There are various works in which MIMO channel is estimated under quasi-static conditions, i.e., the channel remains unchanged during a transmitted symbol block [2]. As the coherence time becomes smaller, the variation over a block could not be ignored any more [3]. Under this time-varying channel scenario, a tracking method should be employed if pilot symbols are used as a preamble at the beginning of

the transmitted block. The Kalman or RLS (Recursive Least Squares) type well-known tracking algorithms, both of which come with the increased computational complexity, are offered to track the gain and phase variations of the multi-channel fading environment [4]. As an alternative, it is of interest in this paper to distribute the pilot symbols along the transmitted block and use them in channel tracking to get rid of the aforementioned tracking algorithms with high complexity.

In this work, we consider the low-complexity iterative channel estimation (ICE) and tracking algorithms over the coded time-varying flat fading MIMO channel. The proposed algorithms are of data-aided type in the sense that initial channel estimation is computed based on known pilot symbols. The overall estimation mechanism is an iterative procedure such that the soft, or possibly hard, estimates of the decoded symbols are employed in subsequent iterations to further refine the channel estimate. The contribution of this work is twofold. First, the pilot-symbol assisted modulation (PSAM) [5] is proposed as the transmission technique which does not only estimate the multi-channel but also tracks the variations in complex channel taps jointly without any necessity for high complexity tracking algorithms, i.e., Kalman and RLS. The basis of this approach in multi-antenna systems is introduced in [6] and further elaborated by the present authors in [7] for single-antenna systems. As a second contribution, a low-complexity adaptive algorithm called 2-way LMS (Least Mean-Squares) which is a powerful extension of the conventional LMS algorithm is proposed to be used in channel estimation after the initial iteration instead of optimal MMSE (Minimum Mean-Square Estimate) filtering which has excess complexity especially for multi-antenna systems.

II. SYSTEM MODEL

A. Channel Model

We consider a MIMO communication system with M transmitter and N receiver antennas with a time-varying frequency-flat Rayleigh fading channel. The discrete-time complex baseband equivalent channel model under consideration is given at time k by

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k + \mathbf{v}_k \quad (1)$$

where \mathbf{H}_k is an $N \times M$ random channel matrix composed of

This work was supported in part by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under grant 104E027, and by STM Defence Technologies Engineering Inc.

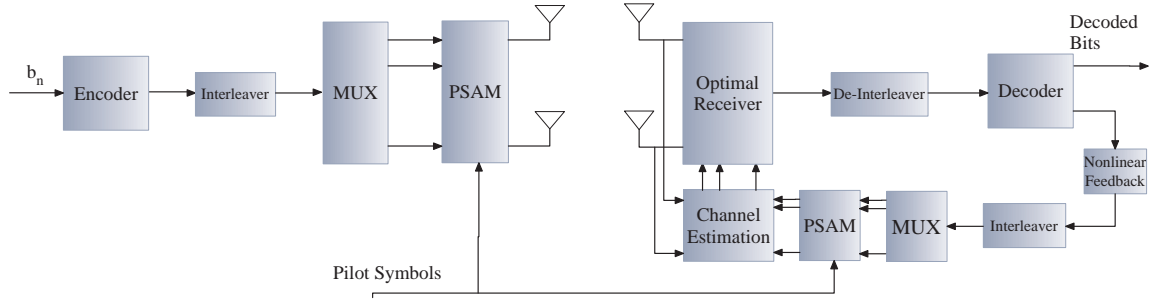


Fig. 1. Transmitter and receiver model

independent complex Gaussian entries $h_{nm,k}$ with zero mean and unit variance, $\mathbf{s}_k = [s_{1,k} \ s_{2,k} \ \dots \ s_{M,k}]^T$ is an $M \times 1$ vector of transmitted symbols, $\mathbf{v}_k = [v_{1,k} \ v_{2,k} \ \dots \ v_{N,k}]^T$ is an $N \times 1$ noise vector composed of independent and identically distributed complex Gaussian random variables with zero mean and variance N_0 , and $\mathbf{y}_k = [y_{1,k} \ y_{2,k} \ \dots \ y_{N,k}]^T$ is the corresponding $N \times 1$ complex vector of channel observations. The channel matrix \mathbf{H}_k is assumed to be unknown at both the transmitter and the receiver, and independent of the transmitted symbols and noise vector. In addition, the noise variance N_0 and the maximum Doppler frequency f_D is assumed to be known at the receiver.

We may express the channel given by (1) in terms of each received symbol at time k as

$$y_{n,k} = \sum_{m=1}^M h_{nm,k} s_{m,k} + v_{n,k}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Assuming the unit energy transmitted symbols, i.e., $\mathbb{E}\{|s_{m,k}|^2\} = 1$, the resulting average received symbol signal-to-noise ratio (SNR) at each of the receiver antenna is then given by

$$\gamma_s = \frac{M \mathbb{E}\{|h_{nm,k}|^2\} \mathbb{E}\{|s_{m,k}|^2\}}{N_0} = \frac{M}{N_0} \quad (3)$$

and the corresponding information bit SNR is $\gamma_b = \gamma_s/R_T$ where R_T is the overall transmission rate of the system.

B. Transmitter and Receiver Models

At the transmitter shown in Fig. 1, a random data block $\{b_n\} \in \{-1, +1\}$, $1 \leq n \leq L$, is first encoded by a channel code and the produced coded symbols $\{c_n\}$, $1 \leq n \leq L/R_T$, are then interleaved by the permutation Π before going through the spatial multiplexer. At the output of the multiplexer, the coded symbol vectors $\{\mathbf{s}_{d,l}\}$, $1 \leq l \leq L_d$ are parsed into the blocks of $P-1$ vectors and a known pilot symbol vector $\{\mathbf{s}_{p,l}\}$, $1 \leq l \leq L_p$, is inserted into the center of each of the block to produce the overall symbol vectors $\{\mathbf{s}_k\}$, $1 \leq k \leq L_T$, to be transmitted. In this formulation, P is defined as the pilot symbol vector spacing, $L_d = L/(MR_T)$ is the total number of coded symbol vector, $L_p = L_d/(P-1)$ is the total number of pilot symbol vectors, and $L_T = L_d + L_p$ is the total number

of transmitted vectors including both the coded and the pilot symbol vectors. This methodology is indeed a generalization of the PSAM (Pilot Symbol Assisted Modulation) technique proposed for the single-antenna systems in [5].

At the receiver, the observation vectors $\{\mathbf{r}_k\}$, $1 \leq k \leq L_T$, are combined together in order to compute the log-likelihood ratios (LLRs) of the coded symbols to be used by the soft-input soft-output decoder. The LLRs of the coded symbols are computed in the optimal sense as done in [8] with a difference, which does not affect the formulation of the LLRs, that is the underlying channel in this work is time-varying and unknown. Therefore, the LLRs computation in the present work employs also the output of the channel estimation unit. The initial channel estimation is performed by using only pilot symbol vectors, whereas this estimate is further refined in the subsequent channel estimation iterations by employing the soft probabilities on the coded symbols provided by the decoder. The feedback mechanism considered in this work is of soft kind whereas the hard estimates could also be used.

III. PSAM IN ITERATIVE MIMO CHANNEL ESTIMATION

Using all the pilot symbols at the beginning of the transmitted block, i.e., training sequence, is a good choice for the quasi-static channels in which the fading level remains unchanged during the transmission of a block. However, this method requires additional channel tracking algorithms with high complexity if the channel under consideration has a time-varying nature. In this section, we propose to use PSAM technique in order to jointly estimate and track the MIMO channel. This methodology offers to distribute the same amount of pilot symbols along a transmitted block rather than using them at the beginning of the block, and eventually removes the necessity for computationally complex tracking algorithms.

In the time-varying multi-antenna system under consideration, each subchannel between a transmitter and a receiver antenna pair has a Rayleigh fading with the combined spatial and temporal autocorrelation according to the Jakes's model given as

$$\mathbb{E}\{h_{nm,k} h_{n'm',l}\} = \delta_{nn'} \delta_{mm'} J_0(2\pi f_D(k-l)T_s) \quad (4)$$

where $J_0(\cdot)$ is the Bessel function of zeroth order, T_s is the symbol duration, and δ_{ij} is the delta function which is 1 if

$i = j$ and 0 otherwise.

In order to estimate a complex subchannel value $h_{nm,k}$, one should consider many and possibly all correlated values of this subchannel during a transmission block. As a result, the set $h_{nm,k}$, $1 \leq k \leq L_T$, should be estimated jointly. Furthermore, since each observation symbol at a single receiver antenna has a partial information on all subchannels terminating at that antenna according to (2), then the set $h_{nm,k}$, $1 \leq k \leq L_T$, $1 \leq m \leq M$ should be estimated jointly for optimal operation. In order to obtain the sufficient statistics for this estimation, let us modify the expression (2) as

$$y_{n,k} = \mathbf{s}_k^T \mathbf{h}_{n,k} + \mathbf{v}_k. \quad (5)$$

where $\mathbf{h}_{n,k}^T = [h_{n1,k} \ h_{n2,k} \ \dots \ h_{nM,k}]$ is the n -th row of the channel matrix at time k . When the time variation is also considered, we obtain

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{S} \mathbf{h}_n + \mathbf{v}_n, \quad (6)$$

where $\mathbf{y}_n = [y_{n,1} \ y_{n,2} \ \dots \ y_{n,L_T}]^T$ is the received symbol vector and $\mathbf{v}_n = [v_{n,1} \ v_{n,2} \ \dots \ v_{n,L_T}]^T$ is the noise vector for n -th antenna during the transmission of a block. The random vector to be estimated is $\mathbf{h}_n = [\mathbf{h}_{n,1} \ \mathbf{h}_{n,2} \ \dots \ \mathbf{h}_{n,L_T}]^T$, and the transmitted symbol matrix \mathbf{S} is defined as

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{s}_2^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{s}_{L_T}^T \end{bmatrix}.$$

The linear MMSE estimator of \mathbf{h}_n for the known transmitted symbol matrix \mathbf{S} is then given by [9]

$$\hat{\mathbf{h}}_{n,MMSE} = \mathbf{R} \mathbf{S}^H (\mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S}^H + N_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y}_n, \quad (7)$$

where \mathbf{I} is the identity matrix, the superscript $()^H$ denotes the Hermitian operation, and the channel correlation matrix \mathbf{R} is defined as $\mathbf{R} = \mathbb{E}\{\mathbf{h}_n \mathbf{h}_n^H\}$ and is computed using (4).

Note that, initially the receiver only knows the pilot symbol vectors $\{\mathbf{s}_{p,l}\}$, $1 \leq l \leq L_p$. Therefore, we construct an alternative form for transmitted symbol matrix by replacing the unknown coded symbol vectors with the nearest pilot symbol vector, which is a similar idea for single-antenna systems handled in [6]. The resulting alternative form is then given by

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{p1} & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{S}_{p2} & \dots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{S}_{pL_p} \end{bmatrix},$$

where \mathbf{S}_{pl} , $1 \leq l \leq L_p$, is a $P \times P$ square matrix given as $\mathbf{S}_{pl} = \mathbf{s}_{p,l}^T \mathbf{I}$. Note that, we should also modify the observation vector \mathbf{y}_n in (7) so that it becomes compatible with the alternative form for the transmitted symbol matrix \mathbf{S}_p . To this end, we define the modified observation vector $\mathbf{y}_{p,n}$ as

$$\mathbf{y}_{p,n} = \begin{bmatrix} y_{n,l_1} \mathbf{u}^T \\ y_{n,l_2} \mathbf{u}^T \\ \vdots \\ y_{n,l_{L_p}} \mathbf{u}^T \end{bmatrix},$$

where the set $\{l_1, l_2, \dots, l_{L_p}\}$ contains the time indices of the transmitted pilot symbol vectors, and \mathbf{u} is a $P \times 1$ column vector with all entries 1. The resulting initial MMSE estimate is then given as

$$\hat{\mathbf{h}}_{n,MMSE} = \mathbf{R} \mathbf{S}_p^H (\mathbf{S}_p \mathbf{R} \mathbf{S}_p^H + N_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y}_{p,n}. \quad (8)$$

Subsequently, LLRs of the coded symbols are computed based on initial channel estimate, deinterleaved and fed to the decoder which computes the extrinsic information, λ_n , of the coded symbols. The expected value of these soft probabilities, i.e., $\tanh(\lambda_n)$, are then interleaved, multiplexed and used as if they are the actual transmitted coded symbols. In the subsequent channel estimation iterations, the resulting estimates of the coded symbols are used together with the pilot symbols to obtain a refined estimate of the channel according to (7), in an iterative fashion.

IV. LOW-COMPLEXITY ICE FOR MIMO TRANSMISSION

The MMSE channel estimation in multi-antenna systems has a high computational complexity which makes this optimal choice impractical. In the literature, conventional forward only LMS, which we called *1-way LMS* to differentiate with the modified version introduced in this section, is offered for ICE algorithms in single-antenna systems to reduce the computational complexity. However, the tracking capability of this conventional LMS is shown to be poor for single-antenna systems in [7], and also for multi-antenna systems in Section V, under fast time-varying fading. In this section, we therefore propose a modified LMS algorithm called *2-way LMS* which has an improved, indeed near optimal, tracking capability for fast time-varying multi-antenna systems with no significant complexity increase with respect to the conventional one.

A. 1-way LMS Algorithm

In this section, assuming that the initial channel estimate was computed according to (8) and the decoder has produced the soft probabilities on coded symbols, we derive the 1-way LMS algorithm in order to estimate the MIMO channel in the subsequent channel estimation iterations. To this end, the error term $e_{n,k}^F$ in the forward direction for the received symbol $y_{n,k}$ is defined as

$$e_{n,k}^F = y_{n,k} - \left(\hat{\mathbf{s}}_k^{(i-1)} \right)^T \hat{\mathbf{h}}_{n,k}^{(i)} \quad (9)$$

where $\hat{\mathbf{s}}_k^{(i-1)}$ denotes the soft estimate of the coded symbol vector $\hat{\mathbf{s}}_k$ at the $(i-1)$ -th iteration, and $\hat{\mathbf{h}}_{n,k}^{(i)}$ denotes the estimate for the n -th row of the channel matrix in the forward direction at time k . The corresponding update equation for the n -th row of the channel matrix is therefore given as

$$\hat{\mathbf{h}}_{n,k+1}^{(i)} = \hat{\mathbf{h}}_{n,k}^{(i)} + \beta e_{n,k}^F \left(\hat{\mathbf{s}}_k^{(i-1)} \right)^T. \quad (10)$$

Further elaborating this expression such that it involves all of the rows gives us

$$\hat{\mathbf{H}}_{k+1}^i = \hat{\mathbf{H}}_k^i + \beta \mathbf{e}_k^F \left(\hat{\mathbf{s}}_k^{(i-1)} \right)^T \quad (11)$$

where $\hat{\mathbf{H}}_k^i$ stands for the estimate of the channel matrix at the i -th iteration and time index k , the error vector in the forward direction is defined as $\mathbf{e}_k^F = [e_{1,k}^F e_{2,k}^F \dots e_{N,k}^F]^T$, and β denotes the step size of the adaptive algorithm. Note that, LMS update algorithm in this fashion employs the the estimate of the coded symbols at the $(i-1)$ -th estimation iteration to compute the channel estimate at the i -th estimation iteration.

B. 2-way LMS Algorithm

Now, we introduce the 2-way LMS algorithm for the multi-antenna systems which operates the forward only LMS both in the forward and the backward direction along the transmitted block. Again, assuming that the initial channel estimate is obtained and the soft information on coded symbols are accordingly produced by the decoder, the 2-way LMS algorithm computes the forward channel estimates $\hat{\mathbf{F}}_k^i$ using (11). The backward channel estimate $\hat{\mathbf{G}}_k^i$ at the i -th estimation iteration is computed by employing the conventional LMS algorithm in the reverse direction along the transmitted block as follows

$$\hat{\mathbf{G}}_{k-1}^i = \hat{\mathbf{G}}_k^i + \beta \mathbf{e}_k^B \left(\hat{\mathbf{s}}_k^{(i-1)} \right)^T. \quad (12)$$

The corresponding error vector in the backward direction is defined as $\mathbf{e}_k^B = [e_{1,k}^B e_{2,k}^B \dots e_{N,k}^B]$ with the entries

$$e_{n,k}^B = y_{n,k} - \left(\hat{\mathbf{s}}_k^{(i-1)} \right)^T \hat{\mathbf{g}}_{n,k}^{(i)} \quad (13)$$

where $\hat{\mathbf{g}}_{n,k}^{(i)}$ is the n -th row of $\hat{\mathbf{G}}_k^i$. The overall MIMO channel estimate is defined to be a linear function of the estimates in the forward and backward directions. For simplicity, we choose the arithmetic average as the linear operation which results in the following channel estimate for the 2-way LMS algorithm at time k

$$\hat{\mathbf{H}}_k^i = \left(\hat{\mathbf{F}}_k^i + \hat{\mathbf{G}}_k^i \right) / 2. \quad (14)$$

V. NUMERICAL RESULTS

We consider a fast time-varying frequency-flat multi-antenna system employing 2 transmitter and 4 receiver antennas with the maximum Doppler frequency $f_D = 100$ Hz, the symbol time $T_s = 0.1$ ms, the pilot symbol vector spacing $P = 7$, and the data length $L = 98$. The resulting total number of transmitted symbol vector is therefore $L_d = 100$ including trellis termination bits, and the normalized Doppler frequency along a whole block is $f_D L_T = 1.17$ which corresponds to a significant time-variation. Pilot symbols are assumed to be zero-mean and unit variance independent Gaussian random variables. The data block is encoded by a convolutional code

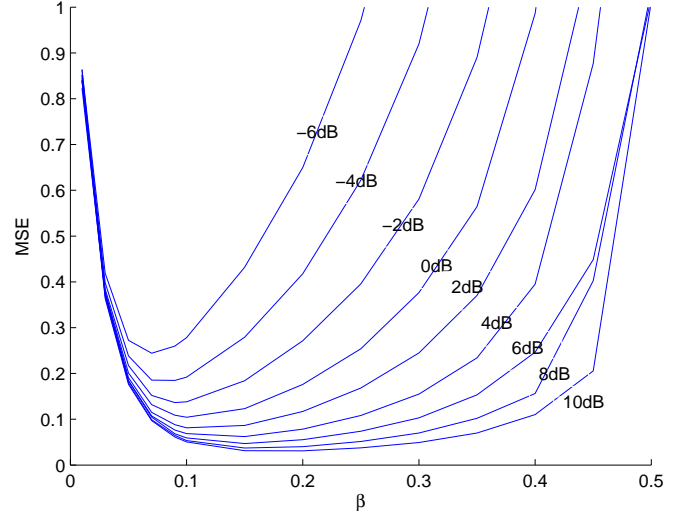


Fig. 2. Average MSE for 2-way LMS for varying step-size, i.e., $\beta \in \{0, \dots, 0.5\}$, and received symbol SNR, $\gamma_s \in \{-6 \text{ dB}, \dots, 10 \text{ dB}\}$. Each bowl-type curve is for a specific value of γ_s .

with generator $(1, 5/7)_8$, and the channel interleaver is the random interleaver. The number of channel estimation iteration is 5 which provides a satisfactory convergence.

In order to assess the channel tracking performances, we first evaluate the average mean-square error (MSE), i.e., $\mathbb{E}\{\|\mathbf{H}_k - \hat{\mathbf{H}}_k\|^2\}$, under full knowledge of transmitted symbols (genie-aided) condition. For this purpose, the optimal tracking performance of both the 1-way LMS and 2-way LMS algorithms are obtained for varying step-size (β) and received symbol SNR (γ_s) values, and shown in Fig. 2 for 2-way LMS, as an example. The optimal β values are chosen accordingly and then used in average MSE computation. The result is shown in Fig. 3. It is observed that the performance of LMS-based algorithms are highly dependent on β choice, and that tracking capability of proposed 2-way LMS algorithm is near that of the optimal MMSE whereas 1-way LMS achieves a poor tracking performance especially at the low SNR regime.

As a second comparison, the effect of coding is considered on the channel estimation performance in an iterative fashion under a more realistic situation where only the pilot symbols are known a-priori, and LMS-based algorithms operate with the optimal β values chosen on trial and error basis for each SNR level. We make a number of observations from the corresponding simulation results shown in Fig. 4. First, the assumption made in [10] that the received noisy codeword in multi-antenna systems which is also corrupted by fading may be decoded using the channel estimate at the beginning of the block does not work under this fast time-varying scenario. As shown in the figure, even for the exact value of the channel matrix at the beginning of the block, i.e., \mathbf{H}_0 , fails to decode the whole transmitted block. Secondly, the proposed PSAM technique for the multi-antenna systems achieves a good tracking ability with its low-complexity structure, even for the

VI. CONCLUSION

In this work, the joint iterative channel estimation and tracking problem is considered for time-varying frequency-flat fading multi-antenna transmission. We generalize the PSAM technique to the multi-antenna systems and show that it has the capability of tracking the variation in the channel fading level with the same amount of pilot symbols as compared to the training structures where all the pilot symbols are in the form of a preamble sequence. It is also shown that the generalized PSAM achieves the satisfactory error performance without any necessity for the special tracking algorithms such as RLS and Kalman filtering both of which are computationally expensive. We further improve the error performance of the PSAM transmission by iteratively estimating the channel and incorporating the soft estimates of the coded symbols. In order to decrease the resulting complexity of the iterative channel estimation structure, we propose to use the low-complexity 2-way LMS algorithm after initial channel estimation instead of optimal high-complexity MMSE filtering. The 2-way LMS algorithm, which operates in both the forward and the backward directions along a transmitted block, is shown to achieve a similar error performance to that of the optimal MMSE filtering, and to have much better error performance than the conventional 1-way LMS algorithm with no significant complexity increase.

REFERENCES

- [1] V. Tarokh, N. Seshadri, and A. Calderbank, "Space-time codes for high data rate wireless communication: Performance criterion and code construction," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 44, no. 2, pp. 744–765, Mar 1998.
- [2] T. L. Marzetta, "Blast training: Estimating channel characteristics for high capacity space-time wireless," in *Proc. of 37th Annual Allerton Conference*, 1999, pp. 958–966.
- [3] Q. Sun, D. Cox, A. Lozano, and H. Huang, "Training-based channel estimation for continuous flat fading BLAST," in *Proc. of ICC*, vol. 1, Apr–May 2002, pp. 325–329.
- [4] C. Kominakis, C. Fragouli, A. Sayed, and R. Wesel, "Multi-input multi-output fading channel tracking and equalization using Kalman estimation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 5, pp. 1065–1076, May 2002.
- [5] J. K. Cavers, "An analysis of pilot symbol assisted modulation for rayleigh fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, pp. 686–693, Nov. 1991.
- [6] M. C. Valenti and B. D. Woerner, "Iterative channel estimation and decoding of pilot symbol assisted turbo codes over flat-fading channels," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 19, pp. 1697–1705, Sep. 2001.
- [7] Y. Yapıcı and A. Ö. Yılmaz, "Joint channel estimation and decoding with low-complexity iterative structures in time-varying fading channels," in *Proc. of IEEE PIMRC'09*, Tokyo, Japan, Sep. 13–16, 2009.
- [8] A. Stefanov and T. Duman, "Turbo-coded modulation for systems with transmit and receive antenna diversity over block fading channels: System model, decoding approaches, and practical considerations," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 19, no. 5, pp. 958–968, May 2001.
- [9] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory (4th Edition)*. Prentice Hall, September 2001.
- [10] E. Eitel and J. Speidel, "Enhanced decision-directed channel estimation of time-varying flat MIMO channels," in *Proc. of PIMRC'07*, Sep 2007, pp. 1–5.

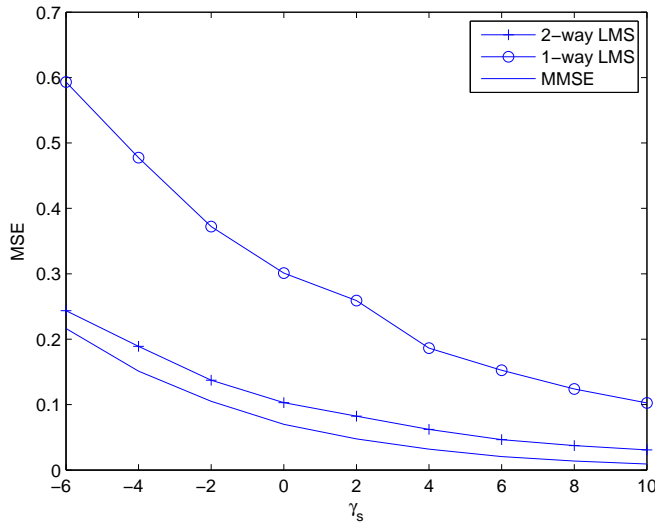


Fig. 3. Average MSE for MMSE, 1-way LMS and 2-way LMS algorithms under full knowledge of transmitted symbols (genie-aided). LMS-based algorithms use the optimal β 's.

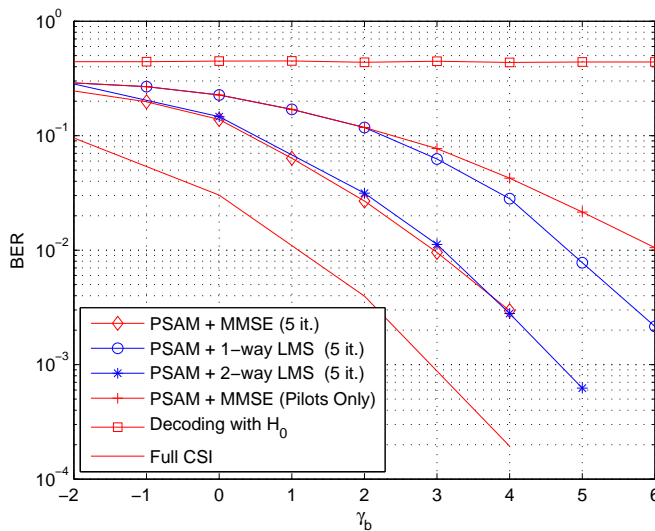


Fig. 4. BER for known channel, PSAM with MMSE which uses pilots only, and PSAM with MMSE, 1-way LMS, and 2-way LMS algorithms together with the soft probabilities on the coded symbols. Total number of iterations for channel estimation is 5. Decoding performance with H_0 is also provided.

initial channel estimation which employs the pilot symbols only. Thirdly, the performance of PSAM is further improved by iteratively estimating the channel and incorporating the soft estimates of the coded symbols via 2-way LMS algorithm which achieves almost the same error performance with the optimal MMSE approach. The error performance of 2-way LMS and MMSE pair is off the known case by 1.5 dB whereas this penalty for 1-way LMS is approximately 4 dB at $\text{BER} = 10^{-3}$.

Iterative Frequency Domain Equalization for Single-Carrier Wideband MIMO Channels

Gökhan M. Güvensen, A. Özgür Yılmaz

Abstract—Single carrier frequency domain equalization (SC-FDE) is receiving considerable attention recently due to its comparable complexity and performance with OFDM. In this paper, an iterative SC-FDE with decision feedback in frequency domain is proposed for wideband multiple-input multiple-output (MIMO) channels and more general multipath vector channels as a generalization of previous works considering FDE with decision feedback for single-input single-output (SISO) systems. The proposed detector is based on iterative forward and backward filtering followed by a MIMO multi-stream detector that uses a priori log-likelihood ratios (LLR) of coded symbols. Forward and feedback filters are jointly optimized according to the minimum mean square error (MMSE) criterion to minimize both self interference (ISI) and interference from other streams transmitted at different antennas. It has been observed that the proposed structure exploits the multi-path diversity sources of the channel effectively and a performance very close to MIMO-OFDM outage probability can be achieved. Therefore, our proposed iterative SC-FDE technique for MIMO wideband channels can be viewed as a strong alternative to MIMO-OFDM schemes with similar complexity.

I. INTRODUCTION

While OFDM based schemes are well-recognized candidates for broadband wireless technology, single-carrier (SC)-based technology has also started to gain considerable attention due to its comparable complexity with OFDM. It has been shown in [1] that frequency domain equalization (FDE) can readily be applied to SC transmission to yield similar performance to OFDM. Since OFDM suffers from high peak-to-average power ratio (PAPR) problem, SC techniques leading to more efficient use of power amplifiers are more suitable for uplink channels [1], [2]. Due to the attractive features of SC-FDE, it has been viewed as a strong alternative to OFDM-based systems recently and its importance is clear for wideband channels.

Block iterative FDE was proposed for uncoded single-input single-output (SISO) multipath channels in [3] and, block iterative FDE was considered in [4] together with channel decoding. Iterative equalization schemes for wideband MIMO channels was considered in [5]. They consider MMSE type forward filtering and successive interference cancellation (SIC) to mitigate the interference in time domain. Turbo equalization with MMSE type filtering in frequency domain was studied in [6], but it does not consider the use of decision feedback filters or SIC operation.

This work was supported in part by the Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under grant 104E027.

The authors are with the Department of Electrical and Electronics Engineering, Middle East Technical University, Ankara, Turkey (e-mail: guvensen@metu.edu.tr, aoyilmaz@metu.edu.tr.)

The contribution of the paper is threefold. We first show that SC-FDE with both forward and backward filters can be generalized from SISO to vector channels, which includes MIMO as a special case. We, furthermore, derive the jointly optimal forward and backward filters in the frequency domain so that the complexity advantage of FDE is not compromised. Since reliability of coded symbols from the decoding process are used in deriving the optimal forward and backward filters, the filters employed in this work have a different structure from that of previous interference-cancellation-based MIMO turbo equalizers, such as in [7], [8] and [9]. Third, the MIMO wideband channel can be quasi-parallelized with the help of our proposed space-frequency equalizer and so, the code construction techniques achieving optimal rate-diversity tradeoff given by the singleton bound for block-fading channels [10], [11] can be effectively used such that the proposed equalization scheme combined with this type of coding structures yields a very close performance to the MIMO-OFDM outage probability and hypothetical matched filter bound (MFB) [12].

This paper is organized as follows. In Section II, the system model is described. In Section III, iterative frequency domain equalization techniques with frequency domain decision feedback generalized to vector channels are discussed in detail. In Section IV, asymptotic performance analysis of the proposed iterative FDE is done. Finally, the code construction techniques, simulation results and concluding remarks are presented in Section V and Section VI, respectively.

II. SYSTEM MODEL

The following notation is used throughout the paper. Bold-face upper-case letters denote matrices and scalars are denoted by plain lower-case letters. The superscript $(\cdot)^*$ denotes the complex conjugate for scalars and $(\cdot)^H$ denotes the conjugate transpose for vectors and matrices. The $n \times n$ identity matrix is shown with \mathbf{I}_n . The autocorrelation matrix for a random vector \mathbf{a} is $\mathbf{R}_a = E\{\mathbf{a}\mathbf{a}^H\}$ where $E\{\cdot\}$ stands for the expected value operator. The $(i, j)^{th}$ element of a matrix \mathbf{A} is denoted by $\mathbf{A}(i, j)$ and the i^{th} element of a vector \mathbf{a} is denoted by a^i .

This paper considers block-based transmission as in [4] and [3]. During the transmission of one block, the channel is assumed to be constant and it changes independently from block to block. Without dealing with the channel estimation problem, the channel is assumed to be perfectly known at each block transmission. Cyclic prefix (CP) is used to prevent inter-block interference and enable frequency domain equalization with length larger than or equal to maximum channel length (L) as explained in [13]. The signal for a transmitted block with CP is a sequence of vectors: $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{L-1}]$.

Assuming symbol rate sampling, the discrete time baseband equivalent model of the point-to-point MIMO wideband channel with n_r receive antennas and n_t transmit antennas can be written as [14],

$$\mathbf{y}_k = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{H}_l \mathbf{x}_{k-l} + \mathbf{n}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

where \mathbf{H}_l 's, $l = 0, \dots, L-1$, are complex channel matrices comprised of independent zero-mean circularly symmetric complex Gaussian (ZMCSCG) random variables with variance given by the power delay profile of each channel [15]. Block fading model is considered and thus the channel matrices are assumed to be constant during a coherence interval significantly larger than a duration needed for the transmission of one block [13] and channel state information at transmitter (CSIT) is not available. Noise vectors \mathbf{n}_k 's are also taken as ZMCSCG white (spatially and temporally) noise with variance N_0 . Only BPSK modulation is considered during the simulation studies. Extension to other M-ary or M-PSK modulations is straightforward.

If we define the DFT operation as $A_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j2\pi nk/N}$ for $k = 0, \dots, N-1$, where a_n and A_k are the time domain sequence and its frequency domain sequence, respectively, then after the DFT operation to each element of \mathbf{y}_k in (1), we can obtain the following expression in the frequency domain as done in [9]

$$\mathbf{Y}_k = \bar{\mathbf{A}}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{N}_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

where $\bar{\mathbf{A}}_k$ is an $n_r \times n_t$ matrix representing the channel frequency response at the k^{th} tone with the entries [9]

$$\lambda_m^i(k) = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{H}_l(i, m) e^{-j2\pi kl/N}, \quad (3)$$

for $i = 1, \dots, n_r$ and $m = 1, \dots, n_t$ and $\mathbf{H}_l(i, m)$ is a scalar and defined as the $(i, m)^{\text{th}}$ element of the channel matrix \mathbf{H}_l . The expression in (2) is the frequency domain equivalent of the channel in (1) and will be frequently used in the remainder of the paper. Also, DFT operation is performed by using $q_n^m = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi mn/N}$ for $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ hereafter.

III. ITERATIVE FREQUENCY DOMAIN EQUALIZATION FOR WIDEBAND MIMO CHANNELS

We consider iterative frequency domain equalization (FDE) with frequency domain decision feedback in this paper. Since both equalization and decoding process can be performed in each iteration, turbo principle can be applied as done in [4], [16]. In Fig. 1, an exemplary receiver structure is shown for the frequency domain decision feedback (FDDF) case.

As it will be observed in Section V, the combined multipath and space enriched diversity of the channel is exploited by the proposed space-frequency equalizer effectively such that the performance obtained by the matched filter bound (MFB) [12] is approximately achieved.

The iterative frequency domain equalizer with hard and soft decision feedback in the frequency domain is studied in [2], [3] and [4] for the SISO systems. We derive the filter matrices

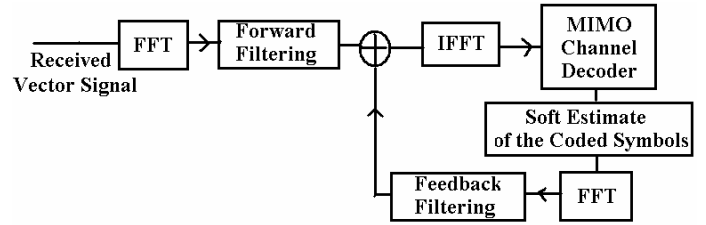


Fig. 1. FDE-FDDF: Iterative FDE with frequency domain decision feedback (FDDF)

based on the MMSE criterion like the FDE with time domain decision feedback (FDE-TDDF) case.

Output of the FDE-FDDF for the k^{th} vector in the block (for the i^{th} iteration) can be expressed as,

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{N-1} (q_j^k)^* \left[(\mathbf{W}_j^{(i)})^H \mathbf{Y}_j - (\mathbf{C}_j^{(i)})^H \hat{\mathbf{X}}_j^{(i-1)} \right] \quad (4)$$

for $k = 0, \dots, N-1$. $\mathbf{W}_j^{(i)}$'s and $\mathbf{C}_j^{(i)}$'s are forward and feedback filters both in frequency domain with sizes $n_r \times n_t$ and $n_t \times n_t$ respectively and $\hat{\mathbf{X}}_j^{(i-1)}$'s are the DFT's of soft decisions from the previous iteration.

It can be shown that one can find an optimum equalizer with time domain decision feedback which is equivalent to an equalizer with frequency domain decision feedback. The forward and backward filter matrices are jointly optimized and found according to the MMSE criterion in time domain given by $E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \|\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \mathbf{x}_k\|^2 \right\}$ presented in [4], [3]. Since, the proposed FDE-FDDF and FDE-TDDF structures are equivalent, one can find a relation between time domain feedback filters $\mathbf{F}_j^{(i)}$ and frequency domain feedback filters $\mathbf{C}_j^{(i)}$. It can be shown that

$$(\mathbf{F}_k^{(i)})^*(m, n) = \sum_{l=0}^{N-1} (\mathbf{C}_l^{(i)})^*(m, n) e^{j2\pi kl/N} \quad (5)$$

for $m, n = 1, \dots, n_t$ and $k = 0, \dots, N-1$ where $(m, n)^{\text{th}}$ elements of $(\mathbf{C}_j^{(i)})^H$ and $(\mathbf{F}_j^{(i)})^H$ are defined as $(\mathbf{C}_j^{(i)})^*(m, n)$ and $(\mathbf{F}_j^{(i)})^*(m, n)$, respectively. Since the optimization problem for FDE-FDDF case is mathematically equivalent to FDE-TDDF with the constraint $\mathbf{F}_0^{(i)}(n, n) = 0$, $n = 1, \dots, n_t$, we can set the constraint for frequency domain feedback filters from (5) as

$$(\mathbf{F}_0^{(i)})^*(n, n) = \sum_{l=0}^{N-1} (\mathbf{C}_l^{(i)})^*(n, n) = 0, \quad n = 1, \dots, n_t \quad (6)$$

With this constraint, one can avoid self-subtraction of the desired symbol by its previous estimate. The Lagrange multiplier method can be used to obtain optimal forward and backward frequency domain filters. Lagrangian vectors and the corresponding scalar constraints (Lagrangian function) can be written as

$$\mathbf{\Gamma}^{(i)} = \text{diag} \left[\Gamma_1^{(i)}, \dots, \Gamma_{n_t}^{(i)} \right]_{(n_t \times n_t)},$$

$$\text{Lagrangian}(\mathbf{\Gamma}^{(i)}) = \sum_{n=1}^{n_t} \sum_{j=0}^{N-1} (\mathbf{C}_j^{(i)}(n, n))^* \Gamma_n^{(i)} \quad (7)$$

The mitigation of inter-stream interference originated from other antenna stream's spatial interference and inter symbol interference (ISI) resulted from frequency selectivity is done optimally with this structure. This differs from previous MIMO studies which use spatial interference suppression techniques based on successive interference cancellation (SIC).

Interleaving operation is used both in time and space, thus we can assume that,

$$E\{\mathbf{x}_k(\mathbf{x}_l)^H\} = E_s \mathbf{I}_{n_t} \delta_{kl}, \text{ for } k, l = 0, \dots, N-1. \quad (8)$$

Some important correlation matrices used by the forward and feedback filters are defined for the i^{th} iteration as

$$\mathbf{P}^{(i)} = E\{\mathbf{x}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})^H\}, \quad \mathbf{B}^{(i)} = E\{\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})^H\} \quad (9)$$

for $k = 0, \dots, N-1$. They can be found by using the soft feedback decisions, $\hat{\mathbf{x}}_k$'s, obtained from the decoder as done in [17]. The correlation matrices are updated in each iteration by using the soft information provided by the decoder. The forward and backward filters are shown to be independent of time index k and, so the block processing on each frequency bin can be implemented effectively.

After taking the gradient of the MMSE cost function and the Lagrangian with respect to the rows of $(\mathbf{W}_j^{(i)})^H$ and $(\mathbf{C}_j^{(i)})^H$, equating the gradients to the zero vector, taking expectations and combining vectors into single matrix equations for $n = 1, \dots, n_t$, one can obtain the following matrix equations giving the optimal forward and backward filter matrices in the frequency domain

$$\mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j} \mathbf{W}_j^{(i)} = \bar{\Lambda}_j \left[E_s \mathbf{I}_{n_t} + \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{C}_j^{(i)} \right] \quad (10)$$

$$\mathbf{B}^{(i)} \mathbf{C}_j^{(i)} = (\mathbf{P}^{(i)})^H \left[\bar{\Lambda}_j^H \mathbf{W}_j^{(i)} - \mathbf{I}_{n_t} \right] - \Gamma^{(i)} \quad (11)$$

for $j = 0, \dots, N-1$, where

$$\mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j} = E\{\mathbf{Y}_j(\mathbf{Y}_j)^H\} = \left(\bar{\Lambda}_j \bar{\Lambda}_j^H E_s + N_0 \mathbf{I}_{n_r} \right) \quad (12)$$

and $\Gamma^{(i)}$ can be obtained from the constraint

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{C}_j^{(i)}(n, n) = 0, \quad n = 1, \dots, n_t. \quad (13)$$

By substituting $\mathbf{W}_j^{(i)}$'s into (11) and using the constraint (13), the Lagrangian terms given in (7) and backward filter matrices can be readily found after some calculus as

$$\Gamma_n^{(i)} = \frac{\left[\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A}_j^{(i)}(n, :) \mathbf{D}_j^{(i)}(:, n) \right]}{\left[\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A}_j^{(i)}(n, n) \right]}, \quad n = 1, \dots, n_t \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_j^{(i)} = \mathbf{A}_j^{(i)} \left[\mathbf{D}_j^{(i)} - \Gamma^{(i)} \right], \quad (15)$$

where

$$\mathbf{A}_j^{(i)} = \left[\mathbf{B}^{(i)} - (\mathbf{P}^{(i)})^H \bar{\Lambda}_j^H \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j}^{-1} \bar{\Lambda}_j \mathbf{P}^{(i)} \right]^{-1}, \quad (16)$$

$$\mathbf{D}_j^{(i)} = (\mathbf{P}^{(i)})^H \bar{\Lambda}_j^H \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j}^{-1} \bar{\Lambda}_j E_s - (\mathbf{P}^{(i)})^H, \quad (17)$$

and $\mathbf{A}_j^{(i)}(n, :)$ is the n -th row of $\mathbf{A}_j^{(i)}$, $\mathbf{D}_j^{(i)}(:, n)$ is the n -th column of $\mathbf{D}_j^{(i)}$. Forward filters $\mathbf{W}_j^{(i)}$'s are obtained from (10) for $j = 0, \dots, N-1$.

The computational complexity to obtain forward and feedback filters is considerably reduced for FDE-FDDF case, since only $n_r \times n_r$ and $n_t \times n_t$ matrix inversions are needed as can be seen from (14)-(17) and size of these matrices is independent of block length (N) just like OFDM-based systems.

As to the decoding stage, well known turbo decoding idea is used. The equalizer and decoder iteratively exchange soft information in terms of likelihood values of the transmitted data to improve their performance. The soft-in soft-out decoder produces likelihood information of each coded bit and it can be in the form of a convolutional, block or spacetime trellis decoder depending on the encoding structure. The equalizer coefficients are updated by using the likelihood information of transmitted data given by the decoder at each iteration.

IV. ASYMPTOTIC PERFORMANCE ANALYSIS OF FDE-FDDF

At each iteration, forward and feedback filters approach the optimal coefficients in case of perfect feedback with the help of improved log a-posteriori probability (APP) ratio of each coded symbol obtained from the decoder. At later iterations, feedback decisions become more and more reliable and correlation matrices approach the asymptotic values: $\mathbf{P}^{(i)} \rightarrow E_s \mathbf{I}_{n_t}$ and $\mathbf{B}^{(i)} \rightarrow E_s \mathbf{I}_{n_t}$. Signal-to-interference-noise-ratio's (SINR) of each parallelized channel after equalization are evaluated for the asymptotic case and given as

$$SINR_m = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^{n_r} |H_l(i, m)|^2 \frac{E_s}{N_0}, \quad \text{for } m = 1, \dots, n_t \quad (18)$$

The complete work can be found in ([18], Appendix).

It is seen from (18) that one can achieve the full diversity gain ($n_r \times L$) at each of the parallelized channels. If transmit diversity schemes in the form of coding across antennas such as universal space-time codes [19] or other coding-multiplexing based techniques [11] are utilized, the maximum potential diversity gain of ($n_r \times n_t \times L$) can be achieved by the proposed equalization scheme here.

It is well known that the SC-MMSE receiver reduces to a channel matched filter if the perfect a priori information of all transmitted symbols leading to ISI and inter-stream interference are available at the receiver and all the interference is cancelled [16]. Therefore, an upper bound to the packet error rate (PER) referred to as the matched filter bound (MFB) of the receiver can be obtained by assuming perfect decision feedback [12]. As long as the channel is not in outage, the feedback decisions approach to their true values and thus, the proposed receiver attains a very close performance to MFB.

V. SIMULATION RESULTS

A. Outage Probability and MFB Calculations

In this section, we will compare the performance of our proposed equalizer with the hypothetical MFB performance and

the corresponding constrained outage probability of MIMO-OFDM system. The constrained capacity can be found for the system model in (2) given the complex vector set χ of cardinality M^{n_t} (e.g., M-ary or M-PSK modulations) similar to the derivations for block fading channels in [11] as

$$C_{MIMO-OFDM}^{\chi} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} I(\mathbf{X}_j; \mathbf{Y}_j | \bar{\mathbf{A}}_j) = n_t \log_2(M) - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} E_{\mathbf{N}_j} \left\{ \sum_{\mathbf{X}_k \in \chi} \frac{1}{M^{n_t}} \log_2 \sum_{\mathbf{X}_i \in \chi} \exp \left(\frac{-\|\bar{\mathbf{A}}_j(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_i) + \mathbf{N}_j\|^2 + \|\mathbf{N}_j\|^2}{N_0} \right) \right\} \quad (19)$$

and the corresponding outage probability can be written as

$$P_{out}^{MIMO-OFDM, \chi}(R) = \mathbb{P} \{ C_{MIMO-OFDM}^{\chi} < R \}. \quad (20)$$

Constrained outage probability and the MFB will be used for performance evaluation in the next part. We used powerful channel codes in our simulations to get a close performance to channel capacity, but similar observations are obtained when less powerful or high rate codes are applied. Again, the proposed receiver operates very close to the hypothetical MFB since this structure uses jointly optimal forward and feedback filtering in each equalizer iteration. Due to space limitations, we can not include these results.

B. Code Construction and Performance Results

The code construction used in our work is similar to the structure for random-like codes adapted to the block-fading channel based on blockwise concatenation and on bit-interleaved coded modulation (BICM) in [11]. The presented coded modulation construction in [11] systematically yields singleton-bound achieving turbo-like codes defined over an arbitrary signal set. As such, any other coding architecture that performs well in parallel block fading channels can be used in our system. We have used the same encoding and decoding structures as in [11] in simulations.

Here, concatenated convolutional codes are used. The outer code is a simple repetition code of rate $r = 1/n_t$ and the inner codes are rate-1 accumulators, which is referred to as repeat and blockwise accumulate (RBA) code [11]. Fig. 2 shows the performance of the proposed FDE-FDDF for a 4×4 MIMO system with the use of full block diversity attaining RBA code of rate $r = 1/4$. Channel model described in Section II is assumed and COST207 channel with exponential power delay profile for suburban and urban areas [15] is used (with 7μ sec delay spread). BPSK modulation is used for simplicity, but other M-ary or M-PSK modulations combined with BICM [20] can be applied to our proposed structure. Symbol duration is taken as 1μ second, and the channel length L equals 8. The first channel tap is taken to possess unity power. The information block length, i.e., the information bits entering the outer encoder is taken as $K = 250$, then the block length N is equal to $K/(r \cdot n_t) + 1 = 251$ including termination bits. Number of iterations inside the Turbo RBA decoder is set to 10 and the number of equalizer iterations at which

the forward and backward filters are updated by using the reliability matrices is taken as 3.

It is seen from Fig. 2 that the performance of FDE-FDDF is 0.3 dB away from MFB. There is approximately 1.5 dB difference between the outage probability of the MIMO-OFDM at rate $R = n_t \cdot r = 1$ bits/sec/Hz and this gap from the outage is similar to the gaps obtained with RBA in parallel block fading channels in [11]. Then, one can say that ISI, spatial interference and, the error propagation problem in decision feedback are almost eliminated, since the perfect decision feedback performance (MFB) is approximately achieved. Moreover, it is seen that the performance of FDE-FDDF shows the same slope as MIMO-OFDM outage and so it is possible to attain the maximum diversity of the MIMO broadband channel by using the proposed space-frequency equalizer and coding across transmit antennas. Furthermore, SC-FDE-based schemes could be a promising candidate for wideband MIMO systems as an alternative to MIMO-OFDM schemes and if one takes the loss due to PAPR problem in OFDM based systems into consideration, the performance difference between SC-FDE-based MIMO schemes and the MIMO-OFDM systems will be more significant.

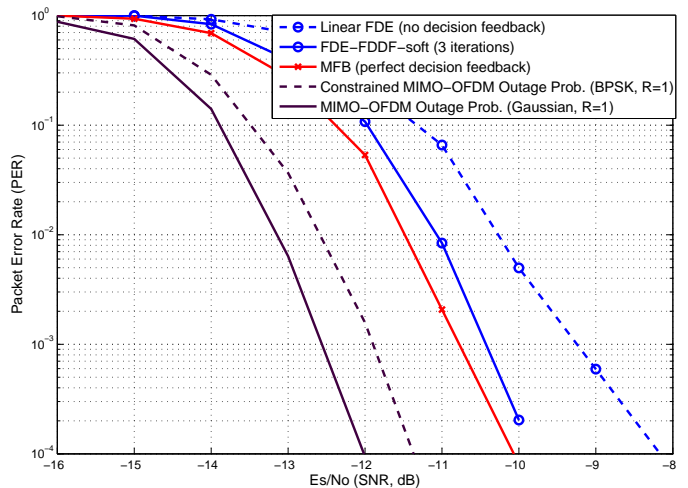


Fig. 2. Performance comparison of SC-FDE with MFB and outage for 4×4 MIMO, $T_s = 1 \mu$ sec and COST 207 suburban channel

In Fig. 3, simulation results are depicted for code rate, $r = 1/2$. A full block diversity attaining blockwise concatenated code (BCC) is used for encoding as adapted from [11]. The outer code is a rate- $\frac{1}{2}$ convolutional code and the inner codes are n_t trivial rate-1 accumulators. The information block length K is taken as 248. Similar results are obtained and a close performance to MIMO-OFDM outage at rate $R = n_t \cdot r = 2$ bits/sec/Hz is achieved within 2 dB.

Our proposed SC-FDE can also be applied to classical SISO ISI channels. In Fig. 4, we compared the performance of iterative SC-FDE-FDDF-soft feedback with that of the outage of an OFDM scheme. A convolutional encoder with $r = 1/2$ serially concatenated (SC) with a rate-1 accumulator is used for information block length $K = 123$. At first glance, it is surprising to note that constrained OFDM outage probability is surpassed by the iterative FDE-FDDF, but as stated in [21] the

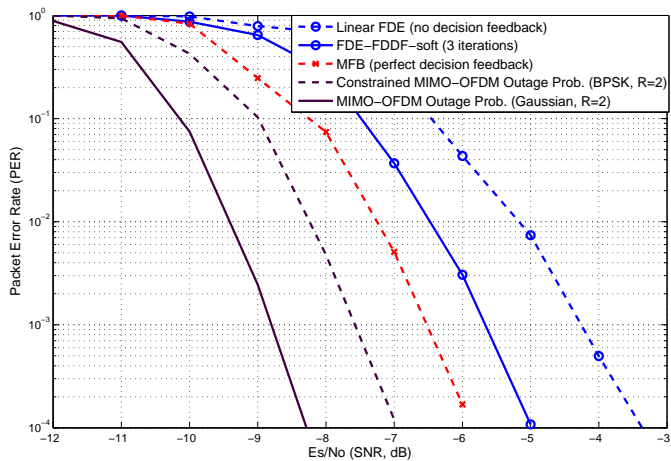


Fig. 3. Performance comparison of SC-FDE with MFB and outage for 4×4 MIMO, $T_s = 1\mu$ sec and COST 207 suburban channel

capacity of wideband channels under non-Gaussian alphabets is an open problem and OFDM is not the capacity achieving scheme for non-Gaussian input alphabets.

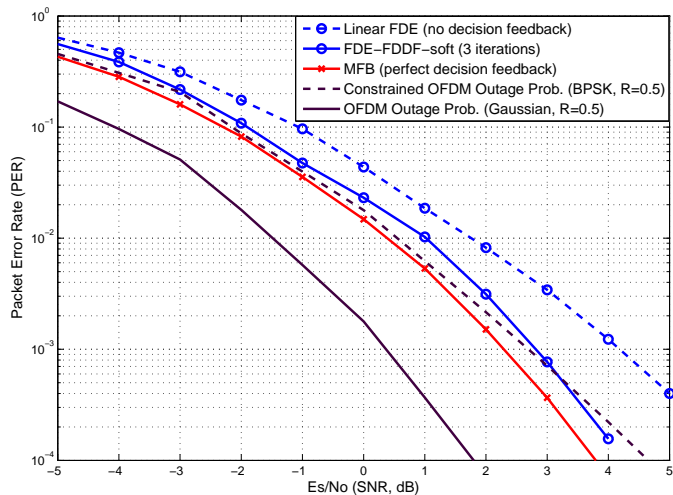


Fig. 4. Performance comparison of SC-FDE with MFB and outage for SISO system, $T_s = 0.5\mu$ sec, COST 207 typical suburban exponential channel, $L = 15$

Furthermore, it is interesting to note that the performance improvement of the FDE-FDDF scheme over the linear FDE without decision feedback is about 2 dB at $PER=0.0001$ for all simulation results. There is also a loss in diversity as observed in the reduced PER slope without decision feedback. One can say that the proposed space-frequency equalizer gains more diversity in comparison to linear FDE by a careful design of both the forward and backward filters.

VI. CONCLUSION

In this paper, we extended the SC-FDE mechanism from SISO channels to more general vector-based models which include MIMO as a special case. We have also shown that capacity-achieving jointly optimal forward and backward filtering operations can be effectively performed in the frequency domain. It is observed that error performance close to the

outage probability can be attained by careful coding across transmit antennas without compromising computational complexity. Therefore, our proposed iterative SC FDE technique for MIMO wideband channels can be viewed as a strong alternative to MIMO-OFDM schemes with similar complexity. Future studies will include the effect of channel estimation error on the performance of vector channel SC-FDE systems.

REFERENCES

- [1] D. Falconer, S. L. Ariyavisitakul, A. Benyamin-Seeyar, and B. Eidson, "Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 40, no. 4, pp. 58–66, April 2002.
- [2] N. Benvenuto and S. Tomasin, "On the comparison between OFDM and single carrier modulation with a DFE using a frequency-domain feedforward filter," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, pp. 947–955, June 2002.
- [3] N. Benvenuto and S. Tomasin, "Iterative design and detection of a DFE in the frequency domain," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no. 11, pp. 1867–1875, Nov. 2005.
- [4] B. Ng, C. Lam, and D. Falconer, "Turbo frequency domain equalizer for single-carrier broadband wireless systems," *IEEE Trans. Wireless Comm.*, vol. 6, no. 2, pp. 759–767, Feb. 2007.
- [5] K. Kansanen and T. Matsumoto, "A computationally efficient MIMO turbo-equaliser," *Proc. IEEE VTC*, vol. 1, pp. 277–281, 2003.
- [6] M. S. Yee, M. Sandell, and Y. Sun, "Comparison study of single carrier and multi-carrier modulation using iterative based receiver for MIMO system," *Proc. IEEE VTC*, pp. 1275–1279, 2004.
- [7] J. Karjalainen, N. Veselinovic, K. Kansanen, and T. Matsumoto, "Iterative frequency domain joint-over-antenna detection in multiuser MIMO," *IEEE Trans. Wireless Comm.*, vol. 6, no. 10, pp. 3620–3631, Oct. 2007.
- [8] R. Visoz, A. O. Berthet, and S. Chtourou, "Frequency-domain block turbo-equalization for single-carrier transmission over MIMO broadband wireless channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, no. 12, pp. 2144–2149, Dec. 2006.
- [9] Y. Zhu and K. B. Letaief, "Single-carrier frequency-domain equalization with noise prediction for MIMO systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 55, no. 5, pp. 1063–1076, May 2007.
- [10] R. Knopp and P. Humblet, "On coding for block fading channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, no. 1, pp. 189–205, Jan. 2000.
- [11] A. G. Fabregas and G. Caire, "Coded modulation in the block-fading channel: Coding theorems and code construction," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 1, pp. 91–114, Jan. 2006.
- [12] J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt, *Digital Communication*, Springer, Third Edition.
- [13] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005.
- [14] E. Biglieri, R. Calderbank, A. Constantinides, A. Goldsmith, A. Paulraj, and H. Vincent Poor, *MIMO Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2007.
- [15] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGRAW-HILL, 2001.
- [16] X. Wang and H. V. Poor, "Iterative (turbo) soft interference cancellation and decoding for coded CDMA," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 1046–1061, July 1999.
- [17] G. M. Guvensen and A. O. Yilmaz, "Iterative decision feedback equalization and decoding for rotated multidimensional constellations in block fading channels," *Proc. IEEE VTC*, vol. 1, pp. 1–6, April 2009.
- [18] G. M. Guvensen, *Near capacity operating practical transceivers for wireless fading channels*, Thesis (M.S.): Middle East Technical University, Ankara, 2009.
- [19] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge University Press, 2005.
- [20] G. Caire, G. Taricco, and E. Biglieri, "Bit-interleaved coded modulation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no. 3, pp. 927–946, May 1998.
- [21] P. O. Vontobel, A. Kavcic, D. M. Arnold, and H. A. Loeliger, "A generalization of the blahut-arimoto algorithm to finite-state channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 54, no. 5, pp. 1887–1918, May 2008.

Joint Channel Estimation and Decoding with Low-Complexity Iterative Structures in Time-Varying Fading Channels

Yavuz Yapıcı

Dept. of Electrical and Electronics Eng.
Middle East Technical University
Ankara, TURKEY

A. Özgür Yılmaz

Dept. of Electrical and Electronics Eng.
Middle East Technical University
Ankara, TURKEY

Abstract—A low-complexity iterative channel estimation (ICE) algorithm is proposed with the promise of improved error performance. The new algorithm operates the LMS filter both in the forward and the backward directions along a block. The feedback from the decoder to the estimator is in the form of soft decisions. The pilot symbol assisted modulation (PSAM) is used as the transmission technique. The effect of code choice on various ICE algorithms is also explored by considering the blockwise concatenated codes initially offered for block-fading channels. The performance of the new estimation algorithm with the proposed coding is shown to outperform the conventional estimation algorithms over a fast time-varying Rayleigh fading channel beside its low complexity structure.

I. INTRODUCTION

Channel estimation is a major problem in digital communication systems especially for turbo codes operating at low signal-to-noise (SNR) ratio where the performances of most estimation algorithms are degraded. The iterative channel estimation (ICE) algorithm using the well-known iterative processing principle is a powerful candidate among the other channel estimation algorithms. We study a new ICE employing LMS algorithm with a proper coding over a time-varying narrowband fading channel. In this work, the previous works which may consider different channel models, transmission techniques and coding schemes are first overviewed to clearly remark our contribution.

In [1], an iterative receiver is proposed for fast time-varying frequency selective channels without any channel code. The proposed receiver employs a maximum-likelihood (ML) channel estimator using a known training sequence and a maximum-likelihood sequence estimator (MLSE) to extract the transmitted symbols. As an extension, the work in [2] considers a channel code over the same channel which is now assumed to be quasi-static. An LMS filter with hard estimates of the code symbols is used after the initial estimation iteration. However, any comparison showing the influence of using LMS algorithm instead of optimal ML estimator on the error performance is not provided.

The soft-decision feedback in ICE for a time-varying frequency selective channel is considered in [3]. The soft decisions of the code symbols together with the known training sequence are used to obtain an estimate of the channel by means of an LMS filtering. Similarly, the resulting error performance with LMS algorithm is not assessed by comparing it with that of minimum mean squared error (MMSE) estimation. The ICE with both hard and soft-decision feedback together with a MMSE type prediction filtering is discussed in [4]. In that work, the derived filter is not optimal with the usage of soft feedback. For slower fade rates, moving average filtering is suggested instead of MMSE to reduce the complexity. However, no simplification is proposed for fast time-varying channels.

The contribution of this paper is twofold. First, a low-complexity ICE is proposed which employs the LMS algorithm to estimate a fast time-varying narrowband fading channel. The LMS filtering is performed both in the forward and the backward directions to improve the performance by keeping the processing complexity close to the conventional LMS implementation. We prefer to use soft estimates of the code symbols with PSAM transmission technique. Second, the effect of code choice on different ICE algorithms is also explored. The blockwise concatenated codes proposed for block-fading channels and investigated over the ergodic channels by the present authors is offered as a powerful alternative [5]. The new low complexity ICE algorithm with the proposed coding is observed to outperform the recent conventional ICE algorithms, i.e., ICE with forward only LMS in [3] and ICE with MMSE approximation in [4]. It is also shown that the proposed blockwise coding achieve a better error performance than conventional codes with ICE algorithms.

The rest of the paper is organized as follows. In Section II, the channel model under consideration is introduced. The conventional ICE is reviewed and the new low-complexity estimation algorithm with improved error performance is proposed in Section III. The blockwise concatenated codes over time-varying fading channels is reviewed in Section IV. The computer simulation results are presented in Section V, and the paper ends up with some concluding remarks in Section VI.

II. SYSTEM MODEL

A. Channel Model

We consider the following discrete-time complex baseband equivalent time-varying fading channel model at time epoch n

$$r_n = f_n a_n + v_n \quad (1)$$

where r_n is the received symbol, f_n is a sample from a time-varying correlated fading process, a_n is the transmitted symbol and v_n is the sample from i.i.d. circularly symmetric Gaussian process with zero-mean and variance σ_v^2 . We assume that the fading coefficients are unknown at the transmitter and the receiver, and are independent of the transmitted symbols and the noise. In addition, noise variance σ_v^2 and maximum Doppler frequency f_D is assumed to be known a priori at the receiver.

In this work, we consider a frequency-flat Rayleigh fading process generated by using Jakes' isotropic scattering model [6]. In this model, the real and the imaginary parts of the complex channel coefficients are assumed to be independent with the following autocorrelation function

$$r(k) = J_0(2\pi f_D k T_s) \quad (2)$$

where $J_0(\cdot)$ is the Bessel function of the first kind and zeroth order, and T_s is the symbol duration. We also assume normalized flat fading, i.e., $E\{|f_n|^2\} = 1$, and unit energy transmitted symbols, i.e., $E\{|a_n|^2\} = 1$. The average received symbol SNR is

$$\gamma_s = \frac{E\{|f_n a_n|^2\}}{E\{|v_n|^2\}} = \frac{E\{|f_n|^2\}E\{|a_n|^2\}}{\sigma_v^2} = \frac{1}{\sigma_v^2} \quad (3)$$

and information bit SNR is $\gamma_b = \gamma_s/r$ where r is the overall transmission rate of the system.

B. Transmitter and Receiver Models

Following the convention of [7], we use the pilot symbol assisted modulation (PSAM) in estimation of the flat-fading time-varying channel. In PSAM, known pilot symbols are inserted into the code stream prior to transmission as in Fig. 1. At the receiver, pilot symbols are used to obtain an estimate of the complex fading coefficients by employing a properly designed filter as shown in Fig. 2.

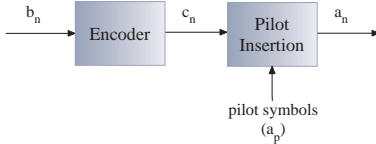


Fig. 1. Transmitter model

At the transmitter, a random data sequence $\{b_n\}$ is first encoded by an encoder as shown in Fig. 1. The resulting code stream $\{c_n\}$ is then split into frames of $(M - 1)$ symbols

and the known pilot symbols $\{a_p\}$ are inserted periodically into the center of each of the frame. We assume $a_p = 1$ throughout the work without any loss of generalization. The parameter M is called *pilot symbol spacing* and is assumed to be odd, as suggested in [7]. The code sequence $\{a_n\}$ including pilot symbols is then transmitted over a Rayleigh fading time-varying channel where all uncoded and coded sequences are in polar form, i.e., $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in \{-1, 1\}$.

At the receiver side, the ICE structure proposed in [4] is employed as shown in Fig. 2. As a first difference from the model considered in [4], the channel estimation algorithm derives an estimate for only the complex fading coefficients, not the noise variance σ_v^2 which is assumed to be provided to the receiver a priori. The received sequence $\{r_n\}$ is first processed using a properly designed filter to obtain an initial estimate of the complex fading channel coefficients. The log-likelihood ratios (LLRs) are then computed using the received sequence and the initial channel estimate. After removing the LLRs corresponding to the pilot symbols, the remaining LLRs are then passed to a soft-input soft-output (SISO) decoder.

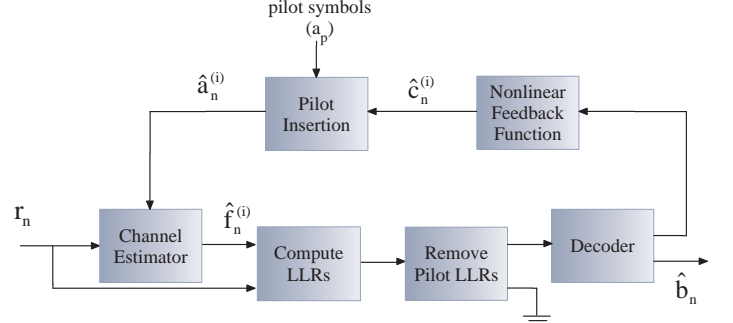


Fig. 2. Receiver model

The SISO decoder produces soft probabilities not only for the information symbols $\{b_n\}$ but also for the code symbols $\{c_n\}$. In the iterative channel estimation, these LLRs of the code symbols $\{\lambda_n^{(i)}\}$ are used to improve the estimation performance by treating the estimates of code symbols as if they were the known transmitted pilot symbols. For this purpose, $\{\lambda_n^{(i)}\}$ are passed through a nonlinearity to produce the soft-decision estimates of the code symbols where the superscript (i) denotes the channel estimation iteration number. The pilot symbols are then inserted into the estimates of code symbols as in the transmitter, and the resulting stream is passed to the channel estimator. As a result, a new channel estimate is computed using not only the pilot symbols but also the estimated values of code symbols. As a second difference, we prefer to feed $\{\lambda_n^{(i)}\}$ back to the estimator not after each decoder iteration but after a sufficient number of decoder iterations so that the next channel estimate is computed using more reliable code symbol estimates.

III. CHANNEL ESTIMATION

A. Conventional Iterative Channel Estimation

The observation model introduced in (1) may be modified for BPSK signalling to yield the following equivalent form

$$\begin{aligned} r'_n &= a_n r_n \\ &= f_n a_n^2 + a_n v_n \\ &= f_n + v'_n, \end{aligned} \quad (4)$$

where v'_n has exactly the same statistics as v_n , i.e., $E\{v'_n\} = a_n E\{v_n\} = 0$, and $E\{|v'_n|^2\} = a_n^2 E\{|v_n|^2\} = \sigma_v^2$ since $a_n^2 = 1$ in BPSK signalling.

In the data-aided mode where the transmitted symbols are known a-priori, the Wiener estimate of the fading coefficients may be computed by using a $(2K + 1)$ -tap filter as

$$\hat{f}_n = \sum_{k=-K}^K w_k r'_{n-k} = \mathbf{w}^T \mathbf{r}'_n \quad (5)$$

$$= \sum_{k=-K}^K w_k a_{n-k} r_{n-k} \quad (6)$$

where $\mathbf{w} = [w_{-K} \ w_{-K+1} \ \dots \ w_K]^T$ is the tap-weight vector, and $\mathbf{r}'_n = [r'_{n+K} \ r'_{n+K-1} \ \dots \ r'_{n-K}]^T$ is the modified observation vector both of which are of size $(2K + 1) \times 1$. We formulate the minimum mean square-error (MMSE) solution for the tap-weight vector \mathbf{w} as follows

$$E\{\mathbf{r}'_n{}^H \mathbf{r}'_n{}^H\} \mathbf{w} = E\{\mathbf{r}'_n f_n^*\}^1, \quad (7)$$

which is indeed known as the Wiener-Hopf's system of linear equations. Using (4) in (7) yields the following matrix form

$$\mathbf{w} = (\mathbf{R} + \sigma_v^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{P}. \quad (8)$$

where \mathbf{R} is the $(2K + 1) \times (2K + 1)$ autocorrelation matrix of the fading coefficients with the entries $\mathbf{R}_{ij} = r(i - j)$, $\mathbf{P} = [r(K) \ r(K - 1) \ \dots \ r(-K)]^T$ is the $(2K + 1) \times 1$ cross-correlation vector where the Jakes' fading autocorrelation function $r(\cdot)$ is defined in (2), and \mathbf{I} is the $(2K + 1) \times (2K + 1)$ identity matrix. Note that, the MMSE filter in (8) does not depend on the time index n , and therefore is exactly the same for all the fading coefficients in a transmitted block. This important facility is the reason behind using the modified observation model in (4).

In real communication scenario in which transmitted symbols are not known, the approximation

$$\hat{f}_n = \sum_{k=-K}^K w_k a_p r_{p(n-k)} \quad (9)$$

is suggested in [4] for the initial channel estimation where $r_{p(n-k)}$ is defined to be the observation closest to r_{n-k} , and

¹ $()^H$ and $()^*$ stand for Hermitian transpose and complex conjugate operations, respectively.

the index $p(n - k)$ is defined accordingly as

$$p(n - k) = M \left\lfloor \frac{n - k}{M} \right\rfloor + \left(\frac{M + 1}{2} \right). \quad (10)$$

After the initial channel estimation, the complex fading coefficients are suggested to be estimated using

$$\hat{f}_n^{(i)} = \sum_{k=-K}^K w_k \hat{a}_{(n-k)}^{(i-1)} r_{n-k} \quad (11)$$

for the i -th estimation iteration. Although the hard-decision feedback may be considered, this work focuses on the soft-decision feedback operating according to

$$c_n^{(i)} = \tanh \left(\lambda_n^{(i)} \right), \quad (12)$$

which in fact corresponds to the expected value from the LLR. Note that, the filtering operation in (11) which is proposed in [4] is not optimal from MMSE point of view since $(\hat{a}_{(n-k)}^{(i)})^2 \neq 1$ in soft decision feedback mechanism. Nevertheless, this approach is employed in this work for its practicality and comparison purposes with the recent works.

B. Low-Complexity Iterative Channel Estimation with LMS

In this section, we propose a low-complexity ICE algorithm with improved error performance which employs the well-known LMS algorithm [8].

The proposed algorithm derives an initial channel estimate according to (9) by using pilot symbols only. In the subsequent channel estimation iterations, an LMS filter is employed instead of MMSE filtering to reduce the overall processing complexity. The soft estimates of the code symbols are also incorporated into the channel estimator together with the pilot symbols, as before.

Two different approaches are considered while employing the LMS algorithm to perform channel estimation. The first approach, which we call *1-way LMS*, utilizes the LMS algorithm in a conventional manner where an estimate of the channel at the i -th estimation iteration is computed using

$$\hat{f}_{n+1}^{(i)} = \hat{f}_n^{(i)} + \beta e_n^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)} \quad (13)$$

where the complex conjugate operation on the estimate of the real transmitted symbol is omitted and β stands for step size of the algorithm. Note that, in order to implement the LMS algorithm at the i -th channel estimation iteration, the estimate of the transmitted symbols at the $(i - 1)$ -st estimation iteration is used. The error term $e_n^{(i)}$ in (13) is defined as

$$e_n^{(i)} = r_n - \hat{f}_n^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)}. \quad (14)$$

The second approach, which we call *2-way LMS*, operates the LMS algorithm both in the forward and the backward direction along the transmitted block. We define $\{h_n\}$ to be the estimate of complex fading channel coefficients produced by the LMS algorithm operating in the forward direction, and $\{g_n\}$ to be the estimate in the backward direction. The overall channel estimate used in LLR computations is the arithmetic

average of the forward and backward estimates at each time epoch n .

The forward LMS algorithm is identical to 1-way LMS operating in the forward direction, and $\{h_n\}$ is therefore computed according to (13)-(14). Similarly, the backward LMS algorithm is equivalent to the 1-way LMS in the backward direction, and operates according to

$$g_{n-1}^{(i)} = g_n^{(i)} + \beta e_{b,n}^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)} \quad (15)$$

where the error term $e_{b,n}^{(i)}$ is defined as

$$e_{b,n}^{(i)} = r_n - g_n^{(i)} \hat{a}_n^{(i-1)}. \quad (16)$$

The resulting complex fading channel coefficients are computed by averaging the forward and backward estimates at each time epoch n as follows

$$\hat{f}_n^{(i)} = \frac{(h_n^{(i)} + g_n^{(i)})}{2}. \quad (17)$$

IV. CODING FOR ITERATIVE CHANNEL ESTIMATION

In [5], the present authors investigate the coding over both the block-fading and the time-varying narrowband fading channels where the former is a good model for the latter, in general. The blockwise concatenated convolutional code (BCCC) which is initially designed for the block-fading channels is shown to outperform the conventional serially concatenated convolutional code (SCCC) over the fully interleaved time-varying channels, as well.

In this work, we investigate the effect of code choice on the performance of ICE structures with various prediction filters. Indeed, since the ICE algorithms benefit from the decoded symbols to refine the channel estimate, the error performance of the codes being used is expected to have a major effect on the overall performance. We examine this subject by employing both the conventional SCCC as well as the powerful candidate BCCC in iterative channel estimation structures, and report the corresponding simulation results in the following section.

V. SIMULATION RESULTS

The error performances of the aforementioned iterative estimation algorithms and channel codes are explored by performing extensive computer simulations. A fast time-varying Rayleigh flat-fading channel with a maximum normalized Doppler frequency of $f_D T_s = 0.01$ is considered for this purpose. The transmitted information blocks are of 100 symbols long, and are encoded by either a SCCC or a BCCC code, both of which are composed of outer and inner convolutional encoders with the generator polynomials $(1, 5/7)_8$ and $(1, 1/3)_8$, respectively, in octal form. The trellis termination is also assumed by employing 2 bits and 1 bits for the outer and inner encoders, respectively.

The number of iterations for both channel estimation and decoder iterations is set to be 5 which provides a satisfactory convergence with 10^5 independent trials at each SNR level. In

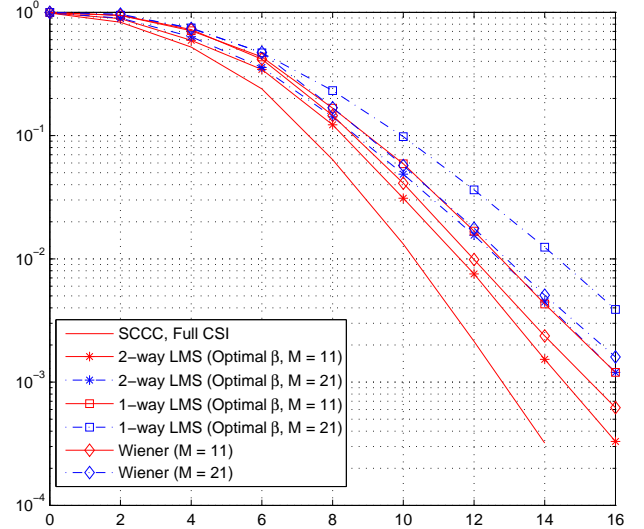


Fig. 3. BLER of SCCC over a fast Rayleigh flat-fading channel with the normalized fading rate $f_D T_s = 0.01$, data sequence of length 100, symbol spacing $M = 11$ and $M = 21$, and the filter size $2K + 1 = 21$. Both the 1-way LMS and 2-way LMS algorithms are operated with the best step-size (β) values.

order to achieve the best performance, the subblock number N of BCCC is set to 10 with the rationale explained in [5] in detail. In simulations, optimal step size (β) values are used for both 1-way and 2-way LMS algorithms. The best β is chosen from the set $\{0.1, 0.15, 0.2, \dots, 0.5\}$ independently at each SNR value on trial and error basis. The initialization of LMS algorithm is performed by using the perfect channel estimates.

Throughout the simulations, we choose the MMSE filter size to be 21, i.e., $K = 10$, which is reasonable for our purpose which is to achieve a high performance ICE with low complexity. Therefore, although the error performance of MMSE is expected to improve with the increasing filter size, we avoid from such a scenario in order to compare the error performances on an acceptable level of complexity.

In the Fig. 3 and Fig. 4, we demonstrate the BLER performance of the estimation algorithms under consideration with different channel codes and pilot symbol spacing (M) values. It is observed under all scenarios that the 2-way LMS is the best choice among the others. The 2-way LMS at $\text{BLER} = 10^{-3}$ is off the known channel case by only 1 dB under BCCC encoding and $M = 11$, whereas this gap is 1.8 dB for both the MMSE approximation and 1-way LMS under the same scenario. These SNR gaps are changed to be 1.75 dB, 2.45 dB, and 3.60 dB for the 2-way LMS, the MMSE approximation and the 1-way LMS algorithms, respectively, when the SCCC channel code is employed instead, where the other conditions are kept unchanged. Note that, a 21-tap FIR filter with a high complexity is used for the MMSE prediction, whereas the computational complexity of 2-way

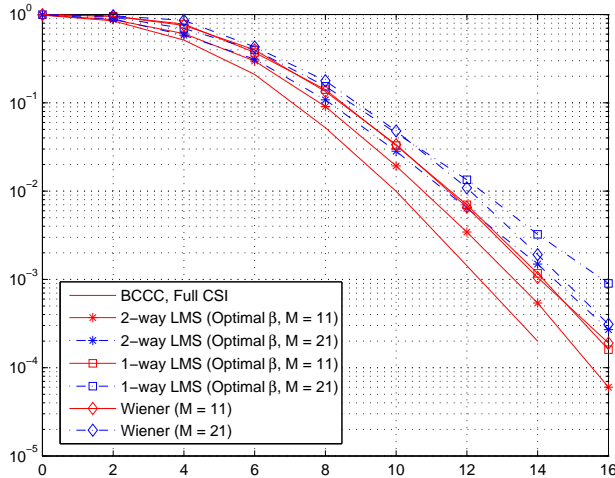


Fig. 4. BLER of BCCC over a fast Rayleigh fading channel with the normalized fading rate $f_D T_s = 0.01$, data sequence of length 100, symbol spacing $M = 11$ and $M = 21$, and the filter size $2K + 1 = 21$. Both the 1-way LMS and 2-way LMS algorithms are operated with the best step-size (β) values.

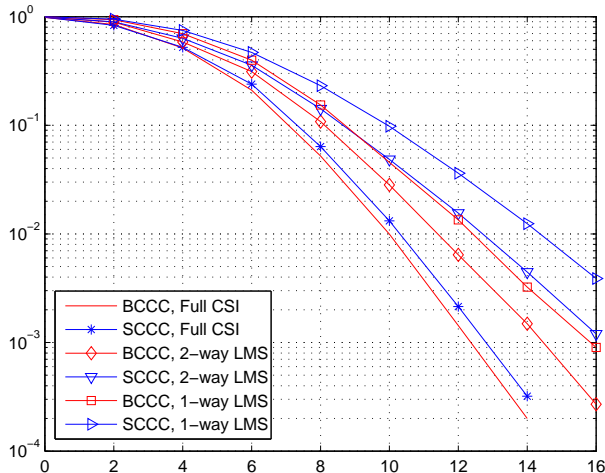


Fig. 5. BLER of BCCC over a fast Rayleigh fading channel with normalized fading rate $f_D T_s = 0.01$, data sequence of length 100, symbol spacing $M = 21$ and the filter size $2K + 1 = 21$.

LMS is basically as low as the single-tap 1-way LMS filter.

Several comments may be made on these results about the effect of the pilot density and the code choice. First of all, the error performance degrades with the decreased number of pilot symbols, i.e., when M increases from $M = 11$ to $M = 21$, for both of the channel codes, as expected. Secondly, the robustness of the estimation algorithms under consideration are different with respect to the increase in M . For example, 2-way LMS requires extra 1.31 dB SNR to achieve $\text{BLER} = 10^{-2.4}$ under SCCC encoding when M

increases from 11 to 21, whereas MMSE approximation and 1-way LMS require 1.16 dB and 1.85 dB, respectively, under the same scenario. The extra SNR requirement for 2-way LMS, MMSE approximation and 1-way LMS is observed to be 1.11 dB, 0.59 dB, and 1.71 dB, respectively, under the same scenario except for the BCCC encoding and $\text{BLER} = 10^{-3}$.

In order to better evaluate the effect of the code choice, the BLER curves of 1-way and 2-way LMS estimation algorithms in the Fig. 3 and Fig. 4 are placed in the Fig. 5 for $M = 11$. In this clear figure, it is observed that the performance gap between SCCC and BCCC is only 0.45 dB in the known channel case, whereas this value increases to 1.80 dB for 2-way LMS and 2.00 dB for 1-way LMS algorithms in the unknown channel case. Therefore, the error performance of the channel estimation algorithms are closer to the known channel performance when the BCCC code is employed instead of SCCC.

VI. SUMMARY

A new low-complexity and improved performance iterative channel estimation algorithm is proposed for the fast Rayleigh flat-fading channels. The new algorithm employs the LMS filtering in both the forward and the backward directions to improve the error performance. Simulation results indicate a remarkable SNR improvement along with the reduced processing complexity as compared to the conventional approach with the MMSE based prediction. The error performance of the considered algorithms are also observed to depend on the code choice. The blockwise concatenated codes, which is initially designed for the block-fading channels, are explored over the fully correlated channel, and the corresponding error performances of the estimation algorithms are observed to be more closer to the known channel performance when it is compared with the case in which the conventional serially concatenated codes are employed.

REFERENCES

- [1] K.-H. Chang and C. Georghiades, "Iterative joint sequence and channel estimation for fast time-varying intersymbol interference channels," in *Proc. of IEEE ICC'95*, vol. 1, Seattle, WA, Jun. 1995, pp. 357–361.
- [2] N. Nefedov, M. Pukkila, R. Visoz, and A. Berthet, "Iterative data detection and channel estimation for advanced TDMA systems," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 51, no. 2, pp. 141–144, Feb. 2003.
- [3] R. Otnes and M. Tuchler, "Iterative channel estimation for turbo equalization of time-varying frequency-selective channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 3, no. 6, pp. 1918–1923, Nov. 2004.
- [4] M. C. Valenti and B. D. Woerner, "Iterative channel estimation and decoding of pilot symbol assisted turbo codes over flat-fading channels," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 19, pp. 1697–1705, Sep. 2001.
- [5] Y. Yapıcı and A. Ö. Yılmaz, "Turbo-like codes over block-fading and time-varying narrowband fading channels," in *Proc. of IEEE VTC'09*, Barcelona, Spain, Apr. 26–29, 2009.
- [6] A. Goldsmith, *Wireless Communications*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2005.
- [7] J. K. Cavers, "An analysis of pilot symbol assisted modulation for rayleigh fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, pp. 686–693, Nov. 1991.
- [8] J. Proakis, *Digital Communications*. McGraw-Hill, 2000.

Probability of Full-Diversity for Simple Coded and Rotated Multidimensional Constellation Systems

Gökhan M. Güvensen

Electrical and Electronics Eng. Dept.
Middle East Technical University
Ankara, Turkey

Email: guvensen@metu.edu.tr

Tuğcan Aktaş

Electrical and Electronics Eng. Dept.
Middle East Technical University
Ankara, Turkey

Email: taktas@eee.metu.edu.tr

Ali Özgür Yılmaz

Electrical and Electronics Eng. Dept.
Middle East Technical University
Ankara, Turkey

Email: aoyilmaz@metu.edu.tr

Abstract—The case of rotation, in use together with coding in a channel with B fading blocks, is analyzed in terms of diversity properties of the coded systems with multi-dimensional rotated constellations (coded-rotated system) output. First closed-form expression obtained is related to the diversity performance of unrotated generic coding structures with given minimum distance, d , block length, and number of fading blocks. Afterwards, another closed-form expression is derived for distinguishing the effect of rotation applied on the given coding structures. This latter expression yields a strict lower bound on the probability of attaining full diversity for any coded-rotated system and gives us a tool to evaluate the improvement with respect to systems involving only coding and also systems with only rotation. The results shown summarize the benefits of utilizing rotation together with coding, even in the cases of very simple non-full-diversity rotations like DFT rotations.

I. INTRODUCTION

Rotated multidimensional constellations have been shown to be an effective way to achieve full-rate and full-diversity transmission in fading channels, [1], [2], and [4]. The idea of rotating a finite constellation is shown to increase the diversity order by spreading the information contained in each symbol over several independent fading blocks [1]. Thus, rotation can be seen as a way to combat channel fading, even in uncoded systems. Random multidimensional rotations shown to exhibit good diversity distributions such as Kruskemper or cyclotomic rotations have been proposed in [3]. These types of rotations guarantees the optimal diversity order for block-fading channels. However, the rotation idea has been limited to uncoded structures and the joint effect of coding and rotation has not been studied extensively. Recently, construction of general coded-modulation schemes over multidimensional signal sets obtained by rotating classical signal constellations has been studied in [5] for block-fading channels with B degrees of freedom. It has been presented in [5] that the optimal diversity reliability exponent achieved by random Gaussian codes can also be achieved by random coded-modulation schemes concatenated with a full-diversity rotation.

Furthermore, in [8], it is shown by using simulations that the maximum reliability exponent (diversity order) can also

be achieved via simple rotations, like DFT, over finite constellations in practical coded modulation schemes; although simple rotations show poor diversity distributions for uncoded transmissions. In this paper, we analytically prove that simple rotations can be sufficient to guarantee full-diversity when used with coded modulation schemes. In spite of insufficiency of coding and rotation by themselves, they cooperate to attain the maximum achievable diversity when utilized together. Our closed-form expressions can be used to evaluate the performance of any coding structure and the performance of coded-rotated schemes through the diversity distributions. Actually, our analysis deals with the probability distribution of block-wise Hamming distance [9] for the codeword pairs with distance d between them for block fading channels under uniform interleaving assumption.

II. SYSTEM MODEL

In our analysis, the discrete-time baseband equivalent model of the point-to-point, single-input single-output, block-fading channel with B fading blocks is assumed as in [9], [10].

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{D}\mathbf{r}_j + \mathbf{n}_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

where N is the block length and \mathbf{D} is a diagonal $B \times B$ matrix with Rayleigh faded diagonal elements. As shown in Fig. 1, the codewords, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$, at the output of the uniform interleaver, π , have their BPSK modulated symbols distributed uniformly over fading blocks and time. Our analysis can be extended to higher constellations (M-PSK, M-QAM, etc.) easily, but BPSK is assumed for its analytical simplicity. We consider that the \mathbf{X} is obtained as the concatenation of a binary code of rate r and a modulation over the signal constellations \mathcal{S} over complex numbers. $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N]$ is the rotated codeword using the rotation matrix, \mathbf{V} . The received vector at time j , \mathbf{y}_j , is the channel output of size $B \times 1$.

Block diversity of a coded modulation scheme $\chi \in \mathbb{C}^{B \times N}$ is the minimum number of non-zero rows of $\mathbf{X} - \mathbf{X}'$ for any pair of codewords $\mathbf{X}' \neq \mathbf{X}$ in χ . The block diversity metric is the principal asymptotic indicator of pairwise-error-probability for any coding scheme and it determines the slope of the error-rate curve [9]. Therefore, we investigate the diversity distributions, i.e., the probability of observing a specific diversity for both rotated (DFT matrices as a special

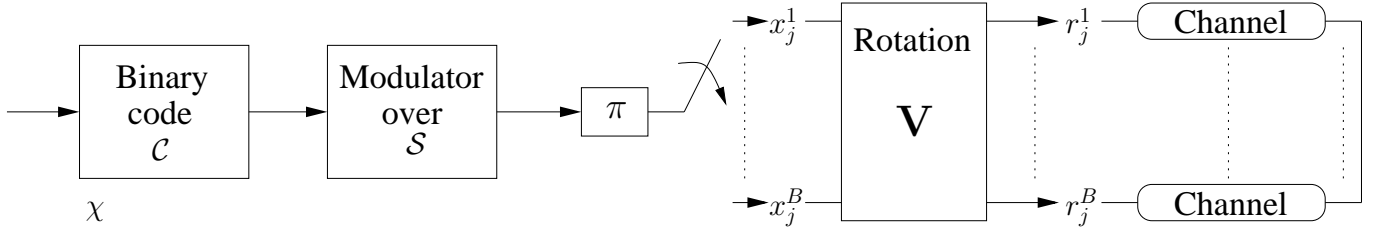


Fig. 1. System model with coded modulation, interleaving, and rotation

case) and unrotated schemes. These distributions can be seen as the main performance measure in general.

For block-fading channels, it is known that in addition to the block diversity, the product distance between the codeword pairs affects the packet error probability as well [9], [11]. Due to the finite precision of DFT rotations, for a given diversity order achieved, it also maintains high product distance values as compared to other random unitary matrices with full-diversity but poor product distance.

III. UNROTATED CODING CASE

For a codeword $\mathbf{X} \in \{-1, 1\}^{B \times N}$, which has the minimum distance, d , from the zero-codeword, we are interested in the number of rows of \mathbf{X} that are composed of all zeros after uniform interleaving described in Section II. Through uniform interleaving, the probability of each one of $B \times N$ entries of \mathbf{X} being non-zero is identical. Therefore, the number of interleaved codewords that satisfy k -diversity property with exactly $B - k$ all-zero rows and with d non-zero entries is given as

$$C_k = \binom{B}{k} D(T_k), \quad (2)$$

where $D(T_k)$ is the number of k -diversity codewords without considering which rows are selected to be all-zero, but only distinguishing within non-zero rows. Then, we have

$$D(T_k) = \sum_{T_k} \prod_{i=1}^k \binom{N}{v_i},$$

$$T_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k \mid \sum_{i=1}^k v_i = d, 1 \leq v_i \leq N\}. \quad (3)$$

In (3), v_i values denote the non-zero weights for the rows of a codeword. The definition of the set T_k can be generalized for obtaining a superset, T'_k , for it.

$$T'_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k \mid \sum_{i=1}^k v_i = d, 0 \leq v_i \leq N\}, \quad (4)$$

where T'_k is the set which includes all weight vectors with number of non-zero weights smaller than or equal to k . Then,

$$D(T'_k) = \sum_{T'_k} \prod_{i=1}^k \binom{N}{v_i} = \binom{N+k}{d}. \quad (5)$$

If we define new sets, A_k^j s, where the weight v_j is always zero for set A_k^j , we can rewrite T_k as follows.

$$T_k = T'_k \setminus \bigcup_{j=1}^k A_k^j, \quad (6)$$

$$A_k^j = \{v_1, v_2, \dots, v_k \mid \sum_{i=1}^k v_i = d, v_j = 0, 0 \leq v_i \leq N\}$$

Hence, the number of codewords described in (3) can also be found as

$$D(T_k) = D(T'_k) - D\left(\bigcup_{j=1}^k A_k^j\right). \quad (7)$$

From combinatorics, using the well-known inclusion-exclusion principle for union of k sets, A_k^j s for $1 \leq j \leq k$, the subtrahend in (7) can be easily calculated. For example, in the case that $k = 3$,

$$\begin{aligned} D(A_k^1 \cup A_k^2 \cup A_k^3) &= D(A_k^1) + D(A_k^2) + D(A_k^3) \\ &\quad - D(A_k^1 \cap A_k^2) - D(A_k^1 \cap A_k^3) \\ &\quad - D(A_k^2 \cap A_k^3) \\ &\quad + D(A_k^1 \cap A_k^2 \cap A_k^3). \end{aligned} \quad (8)$$

In general, for any k value, together with the symmetry of the system with respect to j in sets A_k^j , it is clear that $D(A_k^j) = D(A_k^1)$ for all j values and also any $D(\cdot)$ term involving intersection of m ($m \geq 2$) sets are equal irrespective of the exact names of the sets in the intersection. As a result, the generalized form of (8) is given as

$$\begin{aligned} D\left(\bigcup_{j=1}^k A_k^j\right) &= k D(A_k^1) - \binom{k}{2} D(A_k^1 \cap A_k^2) \\ &\quad + \binom{k}{3} D(A_k^1 \cap A_k^2 \cap A_k^3) - \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Moreover, it is known by a simple change of k with $k - 1$ in (5) that

$$D(A_k^1) = \binom{N(k-1)}{d}, \quad (10)$$

and in a very similar fashion for any intersection term it is true that

$$D\left(\bigcap_{j=1}^m A_k^j\right) = \binom{N(k-m)}{d}. \quad (11)$$

Then, using (5), (7), (10), (11), the number of codewords with exactly k non-zero rows and d non-zero entries with respect to all-zero codeword is given as

$$\begin{aligned} D(T_k) &= \binom{N+k}{d} - k \binom{N(k-1)}{d} + \binom{k}{2} \binom{N(k-2)}{d} - \dots \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{N(k-i)}{d}. \end{aligned} \quad (12)$$

The final result is that the probability that an interleaved codeword has a diversity of k is

$$\Pr \{\text{diversity}=k\} = \frac{\binom{B}{k}}{\binom{NB}{d}} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{N(k-i)}{d}, \quad (13)$$

which is obtained by normalizing the number in (2) by the number of all interleaved codewords with d minimum distance to zero-codeword. Using the result in (13), performance figures for codes with varying rates are presented in Section VI.

IV. ROTATED CODING CASE

Unlike coding structures without rotation in constellation, obtaining the exact probability values for rotated codewords having diversity (number of rows with at least one non-zero symbol) equal to k is cumbersome. The main problem with analysis of coded-rotated systems is that we need to incorporate the general form of any arbitrary rotation matrix of any size into the equations relating the weights of the codewords to the diversity values after rotation. Therefore, our aim is to discover some closed-form upper bound for the analyzed coded-rotated system having a diversity order smaller than the maximum possible. In other words, we try to understand the lower bound of the probability that the system is full-diversity attaining.

We start analysis by observing the columns of any codeword (that is already interleaved prior to rotation) of size $B \times N$ with BPSK modulated entries. A given column of a codeword is simply rotated by the rotation matrix, \mathbf{V} , of size $B \times B$. Here, in search for the probability of zero entries in the rotated column vector, simple comparison of rotated column vectors to the zero vector is not valid. This is due to fact that for any two column vectors $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \{-1, 1\}^B$, the difference vector $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ has three types of entries, $\mathbf{z} \in \{-2, 0, 2\}^B$, and an entry of $z_i = 0$ is twice as probable as entries $z_i = \pm 2$. Then we either need to include this distinct probabilities of entries in our analysis, or better create all possible difference vectors, \mathbf{z} . For any difference column vector with weight (number of non-zero entries) ω , let us call the probability of having its i^{th} entry (i^{th} row) equal to 0 after rotation operation as $P^i(\omega)$.

$$P^i(\omega) = \Pr \{i^{\text{th}} \text{ entry of a rotated vector of weight } \omega \text{ is } 0\}, \\ i \in \{1, 2, \dots, B\}, \omega \in \{1, 2, \dots, B\}.$$

$P^i(\omega)$ values can be easily obtained by generating all difference column vectors, applying the specific rotation matrix on them, and calculating the ratio of rotated vectors with related entry equal to 0 to all such rotated vectors.

For any pair of codewords $\mathbf{X}' \neq \mathbf{X}$ in χ , if we consider a rotated difference codeword, $\mathbf{R} = \mathbf{V}(\mathbf{X} - \mathbf{X}')$, of size $B \times N$, it has N rotated column vectors, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$. The number of all possible rotated vectors, \mathbf{r}_j , which have weight ω_j before rotation and possess a 0 in their i^{th} entry is given by

$$C^i(\omega_j) = 2^{\omega_j} \binom{B}{\omega_j} P^i(\omega_j). \quad (14)$$

Out of N columns of \mathbf{R} , we need to consider only the ones that have at least one non-zero entry before rotation, since

others are known to result in all-zero columns after rotation. If \mathbf{R} has k such columns with weights $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$, then $\max(1, \lceil \frac{d}{N} \rceil) \leq k \leq \min(N, d)$ and $\sum_{j=1}^k \omega_j = d$, where d is the minimum distance of the codewords to be rotated. Consequently, the number of \mathbf{R} matrices (rotated codewords) that have columns with this specified vector of weights and have their i^{th} rows composed of all zeros is determined as

$$D^i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) = \binom{N}{k} \prod_{j=1}^k C^i(\omega_j). \quad (15)$$

Next, we examine the set of all weight vectors satisfying $\sum_{j=1}^k \omega_j = d$. This set of k -tuples is defined as

$$S_k = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k \mid \sum_{j=1}^k \omega_j = d, \omega_j \leq \min(B, d - k + 1)\}. \quad (16)$$

Identification of set S_k is described in Section V. Summing the previously obtained $D^i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ values in (15) firstly over all elements over the set S_k , then over all possible values of k , we obtain the total number of rotated codewords that have their i^{th} rows as all-zero rows. This result gives us the number of rotated codewords that lead to a diversity loss at least at the i^{th} row.

$$E^i = \sum_{k=1}^d \sum_{S_k} D^i(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k). \quad (17)$$

Finally, the probability of having a rotated difference codeword that has a diversity loss at its i^{th} row is exactly obtained by normalizing the number E^i in (17) through division with the number of all possible rotated difference codewords as

$$P^i = \Pr \{\text{diversity loss at } i^{\text{th}} \text{ row}\} \\ = \frac{E^i}{2^d \binom{NB}{d}} \\ = \frac{\sum_{k=1}^d \sum_{S_k} \binom{N}{k} \prod_{j=1}^k 2^{\omega_j} \binom{B}{\omega_j} P^i(\omega_j)}{2^d \binom{NB}{d}} \\ = \frac{\sum_{k=1}^d \sum_{S_k} \binom{N}{k} \prod_{j=1}^k \binom{B}{\omega_j} P^i(\omega_j)}{\binom{NB}{d}} \quad (18)$$

It is clear that a rotated codeword may have more than one all-zero rows. However if we assume that a codeword has more than one diversity loss with negligibly small probability, we can propose an upper bound, which is based on the union bound, for losing at least one diversity in a coded-rotated system. This upper bound is generated by simply summing the probability of diversity losses over B rows as

$$\Pr \{\text{diversity of the system is less than } B\} \leq \sum_{i=1}^B P^i. \quad (19)$$

Therefore, the lower bound for the probability of the coded-rotated system achieving full diversity is

$$\Pr \{\text{coded-rotated system is full-diversity}\} \geq 1 - \sum_{i=1}^B P^i. \quad (20)$$

V. IDENTIFICATION OF SET S_k

The problem of obtaining k weight values such that they sum up to d is a special case of the well-known Knapsack problem [12], with *values* in the problem selected as one. The constraints are summarized as follows.

$$\sum_{j=1}^k \omega_j = d, \quad \omega_j \in \{1, 2, \dots, \min(B, d - k + 1)\} \quad (21)$$

Knapsack problem is NP-complete [13]. We use the following algorithm for constructing the set S_k .

```

global  $S_k \leftarrow \emptyset$ 
 $\omega\_array \leftarrow []$ 
recursive_generator( $\omega\_array, k\_val, B\_val, d\_val, 1$ )
function recursive_generator( $array, k, B, d, \omega_j$ )
max_weight  $\leftarrow d - (\text{sum}(array) + k - \text{length}(array) - 1)$ 
if length( $array$ ) =  $k - 1$  then
if sum( $array$ ) +  $B \geq d$  then
 $\omega\_array \leftarrow [\omega\_array, (d - \text{sum}(array))]$ 
 $S_k \leftarrow S_k \cup \omega\_array$ 
end if
else if  $\omega_j \leq \min(\text{max\_weight}, B)$  then
recursive_generator( $[\omega\_array, \omega_j], k, B, d, 1$ )
recursive_generator( $\omega\_array, k, B, d, \omega_j + 1$ )
end if
return

```

The given algorithm recursively obtains the set S_k . At the beginning, the global variable S_k is initialized to empty set and a null vector is created for the recursive function *recursive_generator*. This function is called with the initial empty vector of ω_j values, number of non-zero-weight columns, k , corresponding system parameters, B and d , and an initial guess of the ω_1 value as 1. Function *recursive_generator*, firstly, checks whether the last and so the k^{th} element of the weight vector is the weight to be calculated. If so, it simply subtracts the sum of the currently obtained weights from the total weight allowed (minimum distance, d) to find ω_k and adds this last element to the weight vector to include this result in the global set S_k . Otherwise, if the currently guessed ω_j value is in the admissible range (smaller than the smallest of B and the value which makes all following ω_i values, $j + 1 \leq i \leq k$, equal to 1), then it calls two new instances of itself. First instance accepts current ω_j value as an element included in weight vector and continues construction of this vector with $\omega_{j+1} = 1$. Second instance checks whether $\omega_j + 1$ is an admissible weight value. In this way, set S_k is filled with admissible weight vectors recursively.

This algorithm has a complexity (both in memory and time) that is exponential in the system parameter d . However, for values $d \leq 24$, the set S_k can be found without any problems.

VI. RESULTS AND DISCUSSION

The results presented in this section are based on BPSK modulation for only simplicity and can be generalized to higher dimension modulations with ease. Moreover, we divide the analysis of unrotated and rotated coding into three by

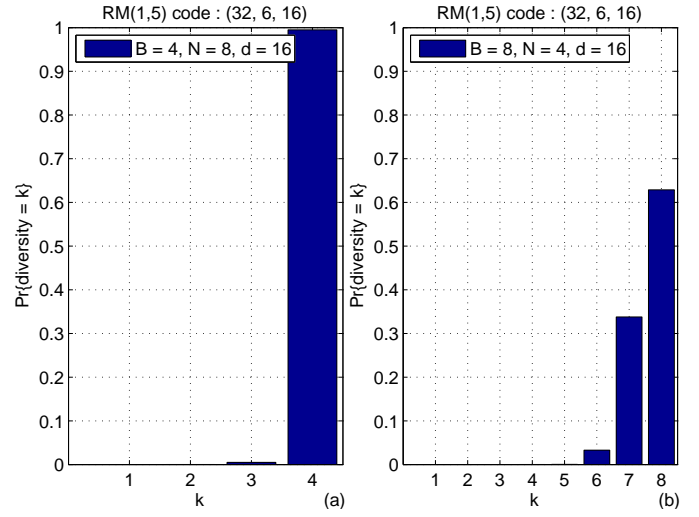


Fig. 2. Diversity histograms of Reed-Muller code, $r=6/32$, for $B=4$ and $B=8$

using a low-rate code, a middle-rate code, and a high-rate code. In Fig. 2, we plot the diversity histograms for a low-rate ($r = 6/32$) Reed-Muller code of code length $BN = 32$ and minimum distance $d = 16$, which is a practical instance of the generic code with the same parameters. These unrotated coding diversity distributions are obtained in accordance with the exact closed-form expression (13) in Section III and are purely analytical. It is clear that with $B = 4$ in Fig. 2.a, the code nearly achieves the full-diversity of 4. However, with $B = 8$ in Fig. 2.b, the probability of full-diversity is slightly over 0.6. If we calculate the lower bounds for full-diversity probabilities of coded-rotated systems with $B = 4$ and $B = 8$ (using 4-point and 8-point DFT matrices for rotation), we obtain 0.99991 and 0.99451, respectively. These lower bounds are calculated according to the closed-form expression (20) in Section IV. In case of $B = 8$, a significant improvement in full-diversity probability is observed with the joint use of coding and rotation, especially when we consider the performance of unrotated coding scheme in Fig. 2.b and the performance of pure (uncoded) rotation, which is to be given in Fig. 5.b.

For mid-rate code example, we plot Fig. 3, which demonstrates the diversity probabilities for unrotated Golay code of rate $r = 1/2$, code length $BN = 24$, and $d = 8$. In Fig. 3.a, with $B = 6$, we see that full-diversity probability is near to 0.2; whereas the equivalent coded-rotated system with 6-point DFT rotation outperforms it by a full-diversity probability of 0.97992 from (20). The coded-rotated system also performs much better than the pure rotation scheme, given in Fig. 5.a, which achieves full-diversity with probability 0.6. For $B = 8$, in Fig. 3.b, we see a probability of nearly zero, which is improved to 0.94645 in case of coded-rotated system.

For the high-rate code of Reed-Muller, $r = 26/32$, code length $BN = 32$, and $d = 4$ as the system parameters, we observe Fig. 4. The full-diversity probabilities of unrotated coded scheme are nearly 0.1 and exactly zero for $B = 4$ in

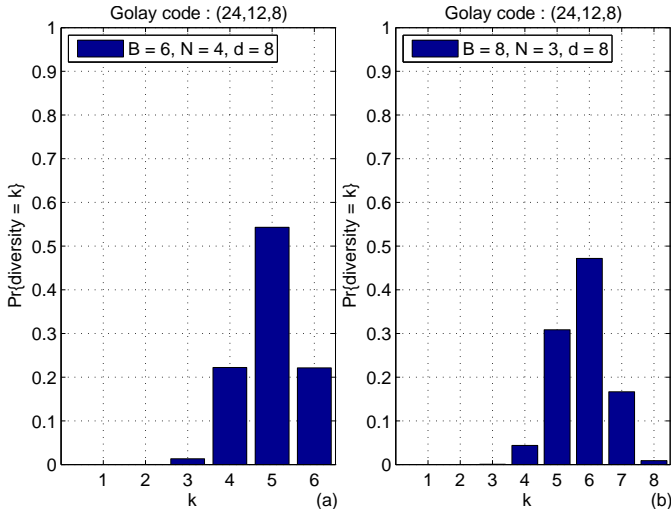


Fig. 3. Diversity histograms of Golay code, $r=12/24$, for $B=6$ and $B=8$

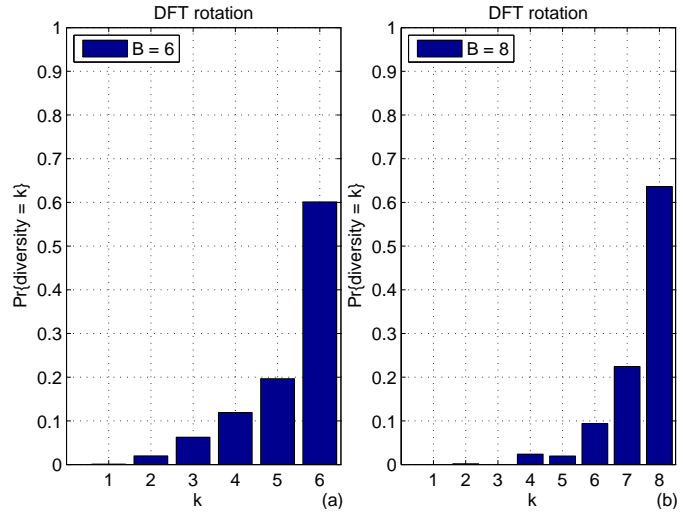


Fig. 5. Diversity histograms of pure 6-point and 8-point DFT rotations

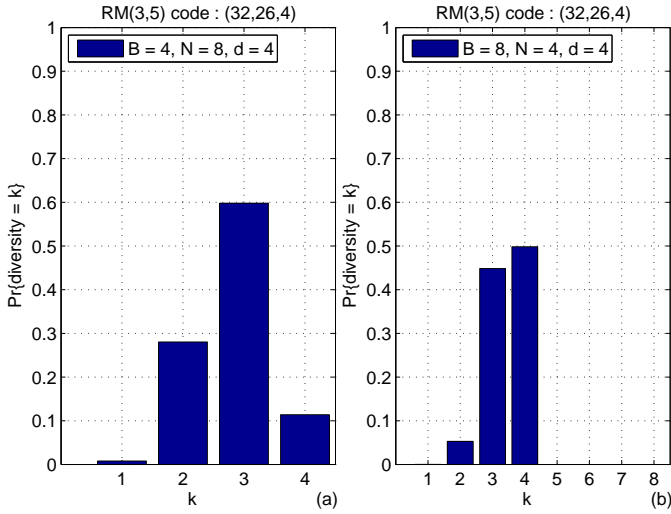


Fig. 4. Diversity histograms of Reed-Muller code, $r=26/32$, for $B=4$ and $B=8$

Fig. 4.a and $B = 8$ in Fig. 4.b, respectively. For $B = 4$, the full-diversity probability of coded-rotated system is calculated as 0.98415 from (20). Finally, for $B = 8$ with coded-rotated scheme, we obtain a lower bound value of 0.91146, which is also much higher than the full-diversity probability of the uncoded rotation scheme demonstrated in Fig. 5.b.

VII. CONCLUSION

In this paper, we derived analytical expressions for evaluating the diversity distributions for unrotated and rotated coding schemes. The diversity due to cooperation of coding and rotated constellations are superior to systems involving only coding or only rotation that is not full-diversity achieving. We mainly concentrated on DFT rotations, which are easy to implement with respect to optimized full-diversity rotations. The code itself helps rotation achieve the maximum diversity order in practical situations and these diversity benefits can be captured by using low-complexity receiver architectures

yielding a very close performance to Gaussian codes in block-fading channels [4], [6], [7], and [8].

REFERENCES

- [1] J. Boutros and E. Viterbo, *Signal space diversity: a power and bandwidth-efficient diversity technique for the rayleigh fading channel*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 44, no. 4, pp. 1453-1467, Jul. 1998.
- [2] E. B. Fluckiger, F. Oggier, and E. Viterbo, *New algebraic constructions of rotated lattice constellations for the rayleigh fading channel*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 50, no. 4, pp. 702-714, Apr. 2004.
- [3] F. Oggier, E. B. Fluckiger, *Best rotated cubic lattice constellations for the Rayleigh fading channel*, Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory, Yokohama, Japan, 2003.
- [4] C. Lamy and J. Boutros, *On random rotations diversity and minimum mse decoding of lattices*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 46, no. 4, pp. 1584-1589, Jul. 2000.
- [5] A. G. Fabregas and G. Caire, *Multidimensional coded modulation in block-fading channels*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 54, no. 5, pp. 2367-2372, May 2008.
- [6] E. Viterbo and J. Boutros, *A universal lattice decoder for fading channels*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 45, no. 4, pp. 1639-1642, Jul. 1999.
- [7] J. Boutros, N. Gresset, L. Brunel, and M. Fossorier, *Soft-input soft-output lattice sphere decoder for linear channels*, IEEE Global Commun. Conf, Dec. 2003.
- [8] G. M. Guvensen and A. O. Yilmaz, *Iterative Decision Feedback Equalization and Decoding for Rotated Multidimensional Constellations in Block Fading Channels*, IEEE VTC Spring 2009.
- [9] R. Knopp and P. Humblet, *On coding for block fading channels*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 46, no. 1, pp. 189-205, Jan. 2000.
- [10] A. G. Fabregas and G. Caire, *Coded modulation in the block-fading channel: Coding theorems and code construction*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, no. 1, pp. 91-114, Jan. 2006.
- [11] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [12] S. Martello and P. Toth, *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*, revised ed. John Wiley & Sons Inc.
- [13] R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, in Complexity of Computer Computations, R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds. Plenum Press, 1972, pp. 85-103.

SERPIŞTİRİCİNİN KONVOLUSYONEL ÇARPIM KODLARININ PERFORMANSI ÜZERİNDEKİ ETKİLERİ

Orhan Gazi, A. Özgür Yılmaz*
 Çankaya Üniversitesi
 Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği
 Balgat, Ankara
o.gazi@ari.cankaya.edu.tr , aoyilmaz@eee.metu.edu.tr

*Orta Doğu Teknik Üniversitesi
 Elektrik Elektronik Mühendisliği
 Balgat, Ankara

Özet: *Bu makalede serpiştiricinin konvolusyonel çarpım kodlarının performansları üzerindeki etkilerini inceliyoruz. Konvolusyonel çarpım kodlarının yapısı paralel çözümleme işlemine daha uygun olduğu için çözülme süresi diğer turbo türü kodlara göre önemli ölçüde azaltılabilmektedir. Serpiştiricinin turbo kodlarda olduğu gibi konvolusyonel çarpım kodlarının performansları üzerinde de önemli bir etkisi olmaktadır. Konvolusyonel çarpım kodlarının seri olarak birleştirilmiş konvolusyonel kodlara göre pratik uygulamalardaki avantajlarından bahsedeceğiz.*

1. Giriş

Shannon limitine yaklaşan en başarılı çalışmalardan birisi 1993 yılında Berrou, A. Glavieux and P. Thitimajshima tarafından yapıldı. [1]. Turbo kodlar diğer bir deyişle paralel olarak birleştirilmiş konvolusyonel kodlar tanıtıldı. Bu kodlar kapasiteye çok yakın oranlarda çok düşük (10^{-5} etrafında) bit hata oranları göstermektedir. Ayrıca çözümleme karmaşıklığı da katlanılabilir miktardadır. Sof-in soft-out algoritmalarının kullanımı bu başarıdaki anahtar faktörlerinden biridir. Son on yılda, seri birleşik konvolusyonel kodlar (SCCC) [2], LDPC kodlar [3], ve de çarpım kodları detaylı olarak incelendi. Çarpım kodları üzerindeki çalışmalar Elias'ın önderliğinde başlamıştır [4]. Çarpım kodları paralel çözümlemeler için diğer kodlara göre daha avantajlı durmaktadır. Şu ana kadar oluşturulan çarpım kodlarının yapılarında çoğunlukla blok kodlar kullanılmıştır. Bu blok kodlar genelde Hamming, genişletilmiş Hamming], BCH, ve de Reed Solomon [5]-[6] kodlarıdır. Çarpım kodlarının DSP ve de FPGA uygulamaları da son zamanlarda ilgi çeken bir konu olmaktadır. Çarpım kodları genel olarak doğrusal blok kodları kullanılarak oluşturulmuşlardır. Blok kodların örgü yapıları zamanla zamanla değişen bir özelliğe sahiptirler [6]. Bizim bu makalede önerdiğimiz çarpım kodları zamandan bağımsız olan konvolusyonel kodlar kullanılarak oluşturulmaktadır. Bu kodların örgü yapıları blok kodlarda olduğu (Hamming, BCH, SPC, Reed Solomon) gibi zaman içerisinde değişim göstermezler. Ayrıca, blok kodların örgü yapısındaki durum sayısı kod sözcüğünün ve de veri uzunluğunun farkı ile üstsel bir şekilde artmaktadır [6]. Diğer bir deyişle $C(n,k)$ doğrusal blok kodu gösteriyor olsun k veri bitlerinin sayısını n de kodlanmış bitlerin sayısını gösterebiliriz, bu durumda blok kodun örgü yapısında 2^{n-k} adet durum bulunmaktadır. Oysa konvolusyonel kodlardaki durum sayısını istediğimiz gibi ayarlayabiliriz ve de durum sayısı veri bitlerinin ve de kodlanmış bitlerin uzunluklarından bağımsızdır. Konvolusyonel kodların yukarıda bahsedilen avantajlarından ötürü çarpım kodu oluştururken konvolusyonel kodları kullanacağız ve de bu şekilde elde ettiğimiz kodu konvolusyonel çarpım kodu şeklinde adlandıracağız (KÇK). Bu makalede KÇK'nin performansını etkileyen faktörleri inceleyeceğiz. Makalenin içeriği şu şekilde olacak. Bölüm II de önerilen kod yapısı ve de çözümleme algoritması açıklanacak. Bu kodların en küçük uzunlukları Bölüm III'te incelenecek. Numerik sonuçlar Bölüm IV'te verilecek. Bölüm V de avantajlarından bahsediyoruz. Sonuç kısımlarında Bölüm VI'de belirtilecek.

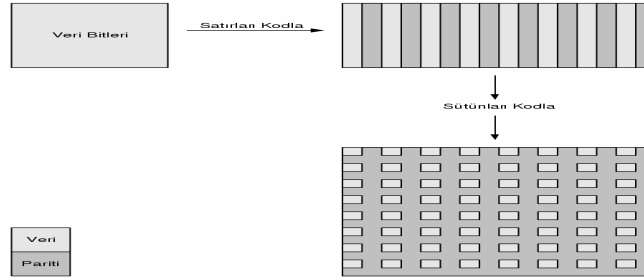
2. KÇK Kodlayıcısı ve Çözücüsü

2.1 KÇK Kodlayıcısı

Çarpım kodlarını oluştururken doğrusal blok kodlar kullanmak yerine satır ve de sütunları kodlarken konvolusyonel kodlar kullandık. Bu durum Şekil 1 de izah edilmiştir. Kodlama işlemi bir matrisin yardımı ile yapılır. Kodlanacak veri bitleri bir matrise yerleştirilir. Matrisin her satırı konvolusyonel kod kullanılarak ayrı ayrı kodlanır. Satır olarak kodlanmış veri serpiştiriciden geçirildikten sonra sütun kodlaması yapılır.

2.2 KÇK Çözücüsü

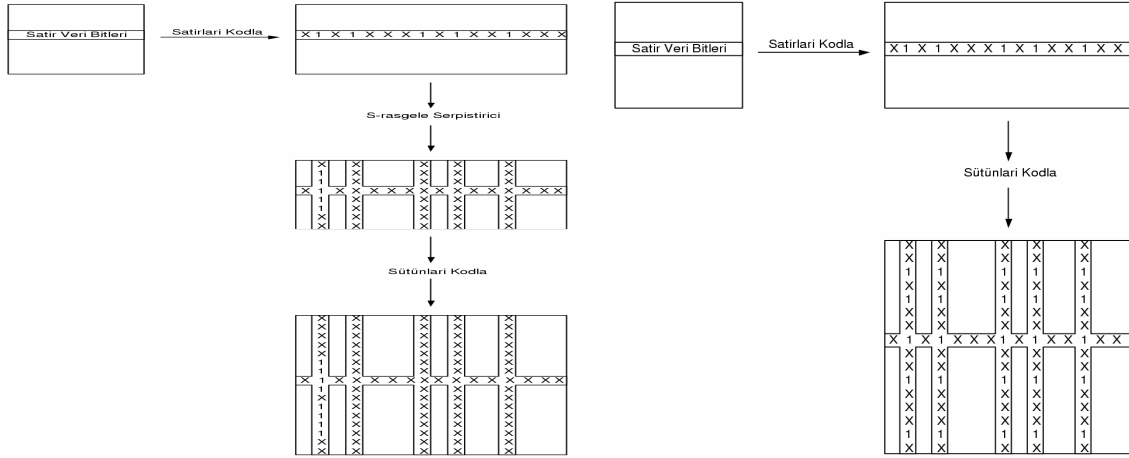
BPSK (Binary Phase Shift Keying) ile module edilen veri beyaz gürültülü kanaldan geçirilir. Çözümleme esnasında log-MAP yumuşak çözümleme algoritması konvolusyonel çarpım kodunu yinelemeli bir şekilde çözmek için kullanıldı [1]. Her sütun ve satır için farklı bit log-MAP çözücüsü kullanıldı.



Şekil 1. KÇK kodlama işlemi

3. KÇK'nin En Küçük Uzaklığı

Bu makalede $d_{\text{bağımsız}}$ 'ı parça konvolusyonel kodların bağımsız uzaklıkları olarak kabul ediyoruz. KÇK'nin en küçük uzaklığında $d_{\text{enKüçük}}$ ifadesi ile göstericeğiz. $d_{\text{enKüçük}}$ değeri parça konvolusyonel kodların bağımsız uzaklığına ve de kullanılan serpiştiricinin türüne bağlı olarak değişmektedir. Kullanılan serpiştirici satır kodlamasından sonra '1'lerin sayısını değiştirmezse KÇK'nin $d_{\text{enKüçük}}$ değeri $d_{\text{bağımsız}}^2$ olmaktadır, diğer durumlarda $d_{\text{bağımsız}}^2$ değeri garanti edilemez. Bu durum Şekil 2 de tam S-rasgele ve de sadece sütünları S-rasgele karıştırıcılar için izah edilmiştir.



Şekil 2. KÇK'nin en küçük uzaklığının serpiştiriyeye göre değişimi.

4. Elde Edilen Veriler

Yeterli istatistiksel sonuçlar çıkarmak için simülasyonlarda bir milyon veri vektörü kullandık ve de her veri vektörü 1024 bit içermektedir. KÇK'nin oluşturulması esnasında oranı (1/2) olan sistematik dönüş ümlü konvolusyonel kod (1; 5/7)octal kullanıldı. Çözülmesi esnasında 12 yineleme kullanıldı.

4.1. Serpiştirici etkileri

4.1.1. Serpiştirici yok:

Bu durumda satır kodlama işleminden sonra serpiştirici kullanmadık. Örgü sonlandırma bitleri hem satırlara hem de sütünlara eklenmiştir. KÇK'nin en küçük uzaklığı $d_{\text{enKüçük}} = d_{\text{bağımsız}}^2 = 25$ olmaktadır. Örgü sonlandırma bitlerini eklenmesi $d_{\text{enKüçük}} = d_{\text{bağımsız}}^2$ eşitliğinin sağlanması için gereklidir, aksi halde $d_{\text{enKüçük}}$ değeri $d_{\text{bağımsız}}^2$ 'e eşit olmamaktadır. Bu kodun performans grafiği Şekil 3'te gösterilmektedir. Performans grafiğinden görüldüğü üzere en küçük uzaklığının değeri büyük bile olsa, KÇK küçük E_b/N_0 değerleri için iyi sonuçlar vermemektedir. Çok iyi şekilde bilindiği gibi en küçük uzaklığın etkisi yüksek E_b/N_0 değerlerinde daha iyi görülmektedir.

4.1.2. Tam S-rasgele Serpiştirici:

Satır kodlama işleminden sonra S-rasgele serpiştiricisi (S= 18) kullanıldı. Benzer yapılarından ötürü SCCC'u da benzetim yapıp elde edilen sonuçları KÇK ile karşılaştırdık. Her iki kodda küçük kod oranlarda iyi sonuçlar vermektedir. SGO (Sinyal Gürültü Oranı) değerleri bütün senaryolar için normalize edildi. Performans grafikleri Şekil 4'de görülmektedir. Performans eğrisinden de görüleceği üzere, diğer serpiştiricilerle karşılaştırıldığında en iyi performansı bu serpiştiricinin kullanıldığı KÇK vermektedir. Tam S-rasgele serpiştiricinin kullanımından dolayı KÇK'nin en küçük uzaklığı $d_{\text{bağımsız}}^2$ değerine eşit olmak zorunda değildir. Teorik olarak yüksek E_b/N_0

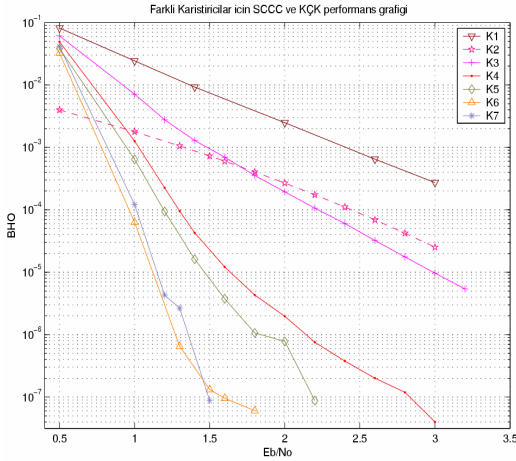
değerlerinde bu kodun performansının düşük değerli küçük uzaklığından ötürü diğer serpiştiriciler kullanılarak yapılanlara göre daha kötü olması beklenmektedir.

4.1.3. Sütün S-rasgele Serpiştiricisi:

Serpiştiricisiz duruma göre daha iyi performans elde etmek ve de KÇK'nin $d_{enKüçük} = d^2$ bağımsız eşitliğini korumak için S-rasgele serpiştiricisini sadece her sütün için ayrı ayrı uyguladık ve de bu tür serpiştiriciye sütün S-rasgele serpiştiricisi ismini verdik. Bu tür serpiştiricilerin değişik kod oranlarındaki performansları Şekil 3' te gösterilmiştir.

4.2. Bit eleme etkileri:

Bit eleme işleminin sadece satırlara uygulanması KÇ K'nin oranının (2/3)'e yükselmesine sebep olur. Bu durumda tam S-rasgele serpiştiricisi iyi performans gösterir. Bit eleme işlemi hem satırlara hem de sütünlara uygulanırsa KÇK'nin oranı (4/9)'a yükselmektedir. Bu durumda tam S-rasgele serpiştiricisi kötü performans sağlar. Sütün S-rasgele serpiştiricileri daha iyi performans sağlarlar. Performans grafikleri Şekil 3'te gösterilmiştir.



- K1: Serpiştiricisiz KÇK (Oran:1/4)
- K2: Teorik sınır (Oran:1/4)
- K3: Helikal serpiştiricili KÇK (Oran:1/4)
- K4: sütün S-rasgele serpiştiricili KÇK (Oran:1/4)
- K5: Helikal ve de sütün S-rasgele serpiştiricili KÇK (Oran:1/4)
- K6: Tam S-rasgele serpiştiricili KÇK (Oran:1/4)
- K7: S-rasgele serpiştiricili SCCC (Oran:1/4)

- Kp1: S-rasgele serpiştiricili SCCC (Oran:2=3)
- Kp2: Tam S-rasgele serpiştiricili KÇK (Oran:2=3)
- Kp3: Tam S-rasgele serpiştiricili KÇK (Oran:4=9)
- Kp4: Sütün S-rasgele serpiştiricili KÇK (Oran:4=9)

Şekil 3. KÇK'nin en değişik serpiştiriciler ve de değişik oranlardaki performansı.

5. Avantajları

KÇK'nin temel avantajı paralel çözülemeye elverişli olmasıdır. Her satır ve de her sütün için kullanılacak olan bağımsız bir log-MAP çözücüsü çözümlene süresinin önemli ölçüde düşmesine sebep olacaktır [7].

6. Sonuçlar

Bu makalemizde konvolusyonel kodlar üzerine kurulmuş olan yeni bir tür çarpım kodu üzerinde durduk. Değişik serpiştiricilerin KÇK performansı üzerindeki etkilerini ayrı ayrı inceledik. Eğer iyi bir serpiştirici kullanılmazsa diğer kodlar KÇK den daha iyi performans göstermektedir. KÇK'nin en küçük uzaklığını maksimize etmek için karıştırma metodları önerdik. Yüksek oranlarda performansın korunması için özel serpiştiriciler önerdik.

7. Kaynaklar

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes," in Proc. ICC'93(Geneva, Switzerland, May 1993), pp. 1064-1070.
- [2] S. Benedetto, L. Gaggero, R. Garello, and G. Montorsi, "On the design of binary serially concatenated convolutional codes," in Proc. VIII Communication Theory Mini-Conf. CTMC, Vancouver, BC, Canada, June 1999, pp. 32-36.
- [3] R. G. Gallager, "Low Density Parity Check Codes," IRE Trans. Inform. Theory, IT-8:21-28, January 1962.
- [4] P. Elias, "Error free decoding," IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-4, pp. 29-37, Sept., 1954.
- [5] L. Hanzo, T. H. Liew, B. P. Yeap, Turbo Coding, Turbo Equalisation and Space-Time Coding. Wiley 2002.
- [6] Shun Lin, Daniel J. Costello, Jr., Error Control Coding. Prentice Hall, 2004.
- [7] Orhan Gazi, A. Özgür Yılmaz, "Konvolusyonel Çarpım Kodlarının Performans Analizi", İTÜSEM 2005, II. İletişim teknolojileri ulusal sempozyumu, 17-19 Kasım 2005 Ç ukurova ı niversitesi, pp. 171-176.

FPGA Platformunda Pilot Dizini Ekleme Yöntemiyle Paket Senkronizasyonu ve Tek Ton Parametre Kestirimi

Pilot-aided Packet Synchronization and Single-Tone Parameter Estimation on an FPGA Platform

Ömür Özel, Mehmet Vural, Ali Özgür Yılmaz

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, ODTÜ

Özetçe

Bu bildiriye, pilot serisi göndererek paket senkronizasyonunun sağlandığı bir FPGA gerçekleştirilmesi ele alınmıştır. Ayrıca kanal tepkisi kestirilirken, alıcı ve vericideki kristal salınım devrelerinin çıkış frekanslarının farklı olmasından kaynaklanan hatayı düzeltmek için PLL benzeri bir yapı önerilmiştir.

Abstract

In this paper, an FPGA implementation in which packet synchronization is performed by transmitting pilot sequences will be explained. In addition, in order to recover the frequency offset between the frequencies of oscillators at the transmitter and the receiver, a PLL like structure is proposed.

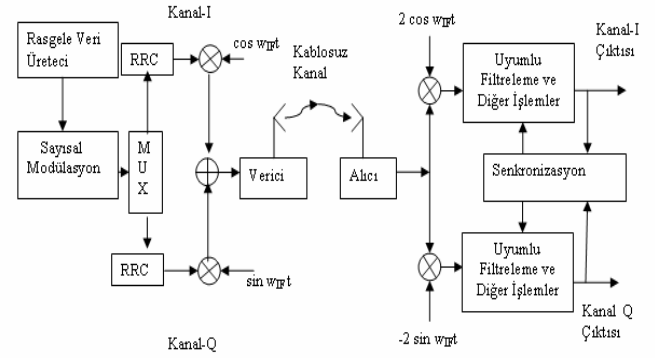
1. Giriş

Kablosuz sayısal iletişim sistemlerinde veriler genellikle belli sayıda bitten oluşan paketler halinde gönderilir. Gönderilen veri paketinin başlangıcının alıcı tarafından algılanması gerekmektedir. Bu, iletişim sistemlerinde yaygın bir problemin tanımıdır: paket senkronizasyonu. Paketlerin başına eklenen bilinen bir pilot dizini [1],[3] ile paket senkronizasyonunu sağlamak mümkündür. Kablosuz kanallar düşünüldüğünde ortamdaki yansımalar ve frekansla değişen sönümlenmeler beraberinde semboller arası girişimi (ISI) getirebilir. Bu da paket ve bit hata oranını (PER ve BER) artırır, sistemin performansını düşürür. Dar bant haberleşme durumunu göz önüne alsak dahi, düz sönümlenmeli kanalda gönderilen sinyalde frekans kayması gözlenebilir. Bunun sebebi verici ve alıcı taraflarda kullanılan osilatörlerin tam olarak aynı olmamasından dolayı oluşan frekans farkıdır. Bu bildiriye FPGA üzerine kurulu bir sayısal iletişim sisteminde, düz sönümlenmeli bir kanalda, pilot ton tabanlı paket senkronizasyonu teorik olarak ele alınacak ve uygulamada frekans farkından doğan hataları gidermek için bir yöntem önerilip gerçekleştirme yoluyla başarısı irdelenecektir.

2. bölümde üzerinde çalıştığımız sistem yapısal ve teorik olarak ele alınacaktır. 3. bölümde paket senkronizasyonu için kullanılan metodun teorik temelleri anlatılacaktır. 4. bölüm önerilen PLL benzeri yapının çalışma prensibine ve FPGA üzerinde gerçekleştirilmesine ayrılmıştır. 5. bölümde ise sonuçlar yer almaktadır.

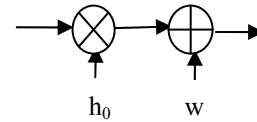
2. Sistem

Çalışmamız FPGA ortamında kurulan bir kablosuz iletişim sistemi üzerindedir. Sistemin blok diyagramı Şekil-1'de gösterilmektedir.



Şekil 1: Sistemin Blok Diyagramı

Özetle, sistem alıcı ve verici taraflarda yer alan Xilinx Virtex II-Pro platformunda gerçekleştirilen süzme ve modülasyon bloklarından oluşmaktadır. Verici tarafta üretilen rasgele veri kablosuz kanal aracılığıyla alıcı tarafa iletilmektedir. Kanal, düz sönümlenmeli eklenebilir beyaz Gauss gürültüsü (AWGN) olarak modellenmiştir. Şekil 2'de açıklanan modelde h_0 kanalın kullanılan banttaki karmaşık kazancını ve w Gauss gürültüyü göstermektedir.



Şekil 2: Kanal Modeli

Gönderilmek istenen paketin başına hem verici hem alıcı tarafından bilinen bir dizin eklenir ve alıcı tarafta bu dizinin tespitiyle hem paket senkronizasyonu sağlanır hem de kanal kestirimi yapılır. Paket senkronizasyonu sağlanırken elde edilen kanal tepkisi, paket içindeki bitlerin kestiriminde kullanılmaktadır. Paket senkronizasyonu için yapılan işlemler verici ve alıcıdaki kristal salınım devrelerinin çıkış frekanslarının aynı olduğunu varsaymaktadır ancak her iki frekans değerinin birbirine eşit olması pratik olarak mümkün değildir. Bu da kestirilen bitlerin fazlarında kaymalar oluşturmaktadır. Bu yüzden sisteme PLL benzeri bir yapı eklenmesi gerekmiştir. Bunun için birçok sayısal PLL yapıları

önerilmiştir[6],[7]. Bu yapıların FPGA üzerinde uygulanması alan ve karmaşıklık yönünden dezavantajlıdır. Sistemde zamanda ayrık gözlemlerle kanal kestirimi yapıldığından salınım frekansları arasındaki farkı bulmak için önerilebilecek en iyi metot en büyük olabilirlik kestirimidir [5]. Bu yöntemi kullanabilmek için ayrık Fourier dönüşümünün FPGA üzerinde gerçekleşmesi gerekmektedir ki, bu da yine alan ve karmaşıklık yönünden bir avantaj sağlamaz. Mevcut metotlar yerine gerçekleşmesi daha basit olan bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntemde CORDIC yinelemeli algoritması[4] ve bir alçak geçiren süzgeç kullanılmaktadır. Yöntemin ortalama sinyal gürültü oranı (İGO)'nın 5-6 dB' den büyük olduğu durumlarda doğru olarak çalıştığı benzetimler yardımıyla doğrulanmıştır.

3. Paket Senkronizasyonu

Çalışmamızda paket senkronizasyonunu sağlamak için kullanılan yöntemlerden pilot dizin tabanlı bir yöntem kullanılmıştır. Gönderilmek istenen veri paketi hem alıcı hem verici tarafından bilinen bir bit dizini başına eklenerek gönderilir. Alıcı tarafta bilinen dizin tespit edilince geriye kalan veri esas paket olarak kabul edilir.

Açıktır ki sistemin bu şekilde iyi bir performans sergileyebilmesi için sözü edilen bit dizininin birçok durumda kesin olarak tespit edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, uygulamamızda çok özel bir dizin olan Barker dizini [1] kullanılmıştır. Bu dizini özel yapan özilintisinin orta nokta harici noktalarda orta noktaya kıyasla oldukça düşük değerlere sahip olmasıdır. Barker dizini 2, 3, 4, 5, 7, 11 veya 13 bitten oluşabilir. Dizindeki bit sayısı ile doğru orantılı olarak dizinin kendisiyle ilintilenmesi sonucu oluşan tepe noktası yüksek olacaktır. Tepe noktası ne kadar yüksek olursa dizini tespit etmek o kadar kolay olacağından uygulamamızda 13 bitlik Barker dizini kullanılmıştır.

Verici tarafta Barker dizini gönderilmek istenen veri paketinin başına eklenir ve sonuçta elde edilen yeni paket gönderilir. Akan verinin onüç uzunluklu bir penceresi bilinen onüçlük Barker diziniyle ilintileme işlemine sokulur. Tepe noktasının gözlemlendiği an paket başlangıcı için referans olur. Barker ilinti filtresinin yarattığı gecikme de hesaba katılınca asıl paketin ilk verisi elde edilmiş olur. Sistemimizde modülasyon türü olarak QPSK seçilmiştir.

Barker tepe noktasını tespit ile kurduğumuz senaryo gürültüsüz ideal bir kanalda paketlerin başlangıcını hatasız kestirmemizi sağlar. Ancak gerçek bir kanalda durum hiç de böyle değildir. Gürültü ve gecikmeler tepe noktasını zamanda istenmedik bir noktaya taşıyabilir veya tespitini zorlaştırabilir. Dahası sistemin kendi hataları olabilir. Kuracağımız senkronizasyon modülü tüm bu olumsuzlukları engelleyebilmelidir.

Kanalın frekans tepkisi alınan sinyal gücünde ve fazında değişimlere yol açmaktadır. Barker dizininin eş ve dik fazlarda eşit olarak gönderildiği durumda alıcıdaki sinyal ayrık temelbant eşdeğeri

$$y[k] = (1 + j)s[k]h_0 + w[k], k = 0, 1, \dots, 12 \quad (1)$$

olarak bulunur. (1)'de $s[k]$ gönderilen Barker dizini $w[k]$ de Gauss gürültünün anlık değerini göstermektedir.

Sinyalin başlangıç noktasının bulunması için gerçekleştirilen uyumlu süzme işleminin çıktısı, $s^*[-k]$, $s[-k]$ 'nin eşleniğini gösterirken

$$z[k] = y[k] * s^*[-k] \quad (2)$$

olur.

Paketler vericiden alıcıya doğru akarken ardışık iki paket arasında hiçbir sinyalin olmadığı, sadece gürültünün olduğu bir zaman diliminin hep olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$z[k] = w[k] * s^*[-k] \quad (3)$$

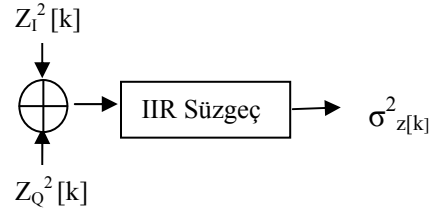
ifadesi geçerlidir. *Sabit yanlış alarm oranı*[2] P_{FA} 'ya eşitlendiğinde

$$P(|z[k]|^2 > \lambda) = P_{FA} \quad (4)$$

sinyalin olmadığı hipotezi altında λ bulunmalıdır. Bu durumda $z[k]$ ortalama değeri sıfır olan Gauss gürültünün lineer filtrelenmesinden oluşur, dolayısıyla k 'nin her değeri için Gauss dağılımlı bir değişkendir. Gauss gürültü modeli ile $z[k]$ 'nin mutlak karesi ise üstel dağılımlı olduğundan, $P_{FA} = 10^{-4}$ alınırsa eşik değeri yaklaşık olarak

$$\lambda = 4 \ln(10) \sigma_{z[k]}^2 \approx 9 \sigma_{z[k]}^2 \quad (5)$$

şeklinde hesaplanabilir. (5)'te $\sigma_{z[k]}^2$ filtreden geçmiş gürültünün değışintisidir ve ortalama değer alan birinci dereceden bir IIR süzgeç ile kestirilir.



Şekil 3: Eşik değerinin bulunması

Burada $Z_I[k]$ ve $Z_Q[k]$ sırasıyla eş ve dik fazlardaki Barker ilinti filtresi çıktılardır. Sadece gürültünün olduğu durumda alınan sinyal gücünün λ 'yı geçme olasılığı çok düşük tutulmuştur. Sinyal λ eşik değerini geçmişse başında Barker dizini olan paket gelmeye başlamış varsayılır. Bu durum için Barker ilinti filtresinin çıktısı

$$z[0] = ((1 + j)h_0 + w[k] * s^*[-k]) |_{k=0} \quad (6)$$

olarak bulunur. Aynı şekilde sinyalin varolduğu hipotezinde tepe noktasının görülmesi gereken $z[12]$ için ise

$$z[12] = (13(1 + j)h_0 + w[k] * s^*[-k]) |_{k=12} \quad (7)$$

ifadesi bulunur.

Tepe noktası tespit edilirken eşik değerine göre karşılaştırma kullanılacaktır. Açıktır ki gürültü hesaba katılmayınca $|z[12]|^2/|z[0]|^2$ oranı 169 iken gürültünün varolduğu durumda sabit bir oran önerilemez. Buna rağmen, işaret-gürültü oranı(İGO) 0 dB'nin altına düşse dahi önerdiğimiz

yöntemle tepe noktasının tespiti mümkündür. Bu yöntemle göre algoritmanın işleyişi şöyledir:

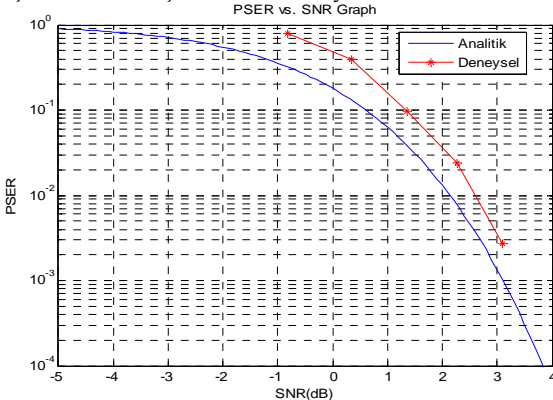
- 1) $|z[k]|^2 < \lambda$ ise 1.aşamada kalınır, aksi durumda 2. aşamaya geçilir.
- 2) $k=0$ kabul edilip $z[k]$ değeri kaydedilir, $\tau = |z(k)|^2$ diye ikinci bir eşik değeri oluşturulur ve 3.üncü aşamaya geçilir
- 3) Gelen veri örneklenirken diğer yandan $|z[k]|^2 > \tau$ karşılaştırması da yapılır. Eğer $|z[k]|^2 > \tau$ ise örnekleme kesilip 2. aşamaya geri döndürülür. Pilot dizini uzunluğunca(13 sembol) $|z[k]|^2 < \tau$ olursa örnekleme devam edilir. Paket bitiminde 1. aşamaya geri döndürülür.

Algoritma gürültünün gücünün sinyal gücü yanında etkisiz olduğu varsayımına dayanarak geliştirildiği için İGO azaldıkça paket senkronizasyonunda aksamalar görülür. Gauss gürültülü kanal modelimizde paket senkronizasyon hata oranının(PSER)

$$PSER = P(|13(1+j)h_0 + n|^2 < \lambda) \quad (8)$$

olasılığına eşit olduğu görülür. (8) nolu eşitlikte n Barker filtresinden geçmiş gürültüyü göstermektedir ve değışintisi $13\sigma_w^2$ olur. Bu olasılık, merkezdeşılık parametresi (noncentrality parameter) $|13(1+j)h_0|^2$ olan merkezi olmayan ki-kare('chi-square') dağılımlı bir rasgele değışkenin olasılık dağılım fonksiyonunun λ noktalarındaki değeridir.

Sistemin PSER performansı gönderilen 10^5 tane paketin kaçının başlangıcının tespit edilebildiğini ölçerek belirlenmiştir. Kanal kazancının büyüklüğü ve gürültü gücü sabit kabul edilip sinyal gücü ayarlanarak İGO değerinde değışim sağlanmıştır. Analitik ve deneysel olarak elde edilen İGO ile paket senkronizasyon hata oranı(PSER) arasındaki ilişki Şekil 4'te görülmektedir. Analitik ve deneysel sonuçlar arasındaki güçlü bir paralellik vardır. Aradaki fark İGO ölçüm hatası ile açıklanabilecek boyuttadır.



Şekil 4: PER vs. SNR grafiği

Alıcı ve vericide kullanılan FPGA sistemlerinin kristal salınım devrelerinin çıkış frekansları farklılık göstermektedir. Frekans yükseltme ve düşürme işlemleri sırasında farklı

frekanslı saatlerin kullanılması fazda kaymaya sebep olur. Eğer salınım frekansından gelen kaymayı da kanal tepkisinin bir parçası olarak düşünürsek, h_k toplam kanal tepkisi ve Δf alıcı ile vericideki salınım devrelerinin çalışma frekansları arasındaki fark olmak üzere

$$h_k(t) = h_0 e^{j2\pi\Delta f t} \quad (9)$$

olarak hesaplanır. Kanal tepkisindeki kaymadan dolayı paketin içindeki bitleri kestirirken hatalar oluşacaktır. Bu kaymayı tersine çevirmek için kurulan PLL benzeri yapı 4.Bölümde anlatılacaktır.

4. Frekans Hatasını Bulma

Bu bölümde 3. bölümde anlatılan taşıyıcı frekanstaki hatanın bulunması ve düzeltilmesi anlatılacaktır. 3. bölümde de anlatıldığı gibi kanal tepkisi, her paketin başlangıç anında I ve Q kanalları için Barker ilinti sonuçlarında görülmesi beklenen sinyalin hangi karmaşık sayıyla çarpılıp değıştiğini bularak elde edilir. Kanal tepkisinin (h_0) uzun bir zaman aralığı için değışmediği varsayılarak, alıcı ve vericideki kristal salınım devrelerinin çıkış frekanslarındaki fark (Δf) da göz önüne alındığında, paketler arası zaman τ olduğu durumda her paketin başlangıcında elde edilen kanal tepkileri (r_i) şöyle olacaktır:

$$\begin{aligned} r_1 &= h_0 + w_1 \\ r_2 &= h_0 e^{j2\pi\Delta f \tau} + w_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ r_n &= h_0 e^{j2\pi\Delta f (n-1)\tau} + w_n. \end{aligned} \quad (10)$$

(10)'daki r_i dizisi (7)'deki $z[12]$ 'nin $13.(1+j)$ 'ye bölünmesi ile elde edilen kanal tepkisidir. (10)'da da görüldüğü gibi kanal kestiriminde hataya yol açan iki faktör bulunmaktadır. Bunlar

1) Her paket zamanında oluşan $2\pi\Delta f \tau$ kadar bir faz kayması.

2) Kanal gürültüsü (w_i).

Ortalama İGO'nun yüksek olduğu durumlarda frekans farkından doğan hata gürültüye göre daha çok önem arz etmektedir. Bu hatanın bulunması için şöyle bir çözüm önerilmektedir:

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \frac{h_0 e^{j2\pi\Delta f i \tau} + w_{i+1}}{h_0 e^{j2\pi\Delta f (i-1)\tau} + w_i} = e^{j2\pi\Delta f \tau} (1 + n_{i+1}). \quad (11)$$

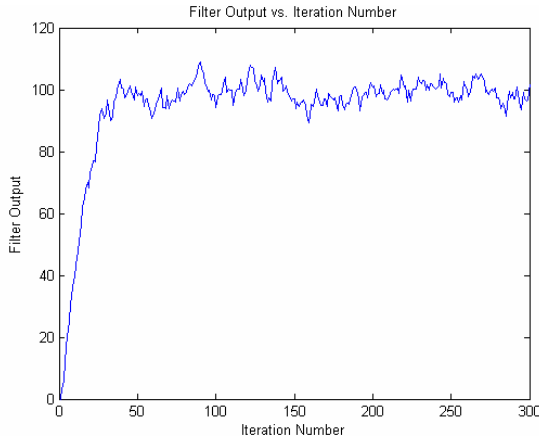
Eşitlikte n_{i+1} ile gösterilen gürültünün etkisini yok etmek için (11)'den elde edilen Δf kestirimi bir alçak geçiren süzgece girdi olarak verilir ve süzgecin çıktısı zaman içinde gerçek frekans farkına yakınsar. Şekil-5'te ikinci dereceden sonsuz dürtü yanıtı bir filtre kullanılarak gerçekleştirilen bir MATLAB benzetiminin süzgeç çıktısı gösterilmiştir. Görüldüğü gibi filtrenin çıktısı oluşan frekans farkına zamanla yaklaşmakta ve de daha sonra bu frekans farkı üzerinde salınım yapmaktadır. Şekil-6'da değışik sinyal gürültü oranları için süzgeç çıktısının değışinti değerleri verilmiştir.

Önerilen modelin FPGA üzerindeki daha kolay bir tasarımı için iki ardışık kanal kestirimi değerlerini birbirine bölmek

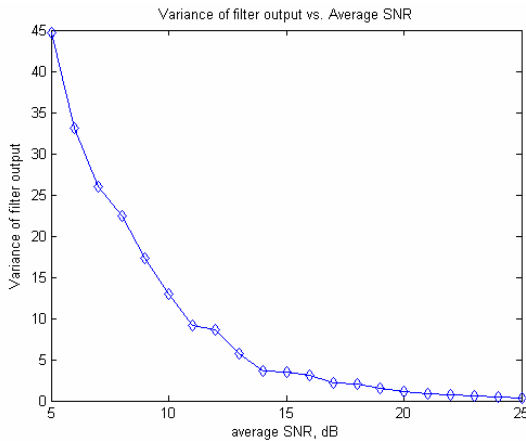
yerine, bu değerlerin fazlarını birbirinden çıkarmak daha kolay olmaktadır. Kanal kestirim ara biriminin çıktısından gelen karmaşık sayının fazını bulabilmek için FPGA üzerinde bir ark tanjant operatörüne ihtiyaç duyulmaktadır. Bunun için de CORDIC[4] döngülü algoritması kullanılmıştır. Bu algoritmanın girdileri (x,y) çifti, çıktısı ise arktan(y/x)'tir ve (12)'de gösterildiği gibi çok basit toplama-çıkarma ve mantıksal sağa kaydırma işlemleriyle gerçekleştirimi yapılabilir.

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x, y_0 = y, z_0 = 0 \\
 \varepsilon_k &= \tan^{-1}(2^{-k}) \\
 \delta_k &= -\text{sgn}(y_k) \\
 x_{k+1} &= x_k - \delta_k y_k 2^{-k} \\
 y_{k+1} &= y_k + \delta_k x_k 2^{-k} \\
 z_{k+1} &= z_k - \delta_k \varepsilon_k \\
 z_k &\rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)
 \end{aligned} \tag{12}$$

Yukarıdaki algoritma yinelemeli olarak çalıştırılır ve az sayıda (~8) yineleme ile çok iyi sonuçlar verir.



Şekil-5 Süzgeç Çıktısı vs. Paket Sayısı, $\Delta f = 100$ Hz, SNR = 10 dB



Şekil-6 Süzgeç Çıktısının Değişimsizliği vs. Ortalama İGO
Önerilen yapının FPGA üzerinde gerçekleştirilmesi için CORDIC algoritması çalıştırılıp, frekans hatası her paket başlangıcında bulunduğunda bu hataya karşılık gelecek şekilde

sistemde kullanılan sayısal salınım modülünün frekansının azaltılması ya da artırılması gerekmektedir. Bunun için şöyle bir çözüm önerilmiştir:

Salınım yapan devre sayısal olarak çalıştığı için Şekil-1'de alıcı tarafında gösterilen sinüs ve kosinüs dalgalarından belli sayıda (sistem için 64 seçilmiştir) örnek alınır ve bu örnekler zaman içinde sırayla kullanılır. Eğer sistemde 24 MHz'lik bir saat kullanıldığını düşünürsek, her saat vurumunda sıra bir sonraki örneğin olduğu için f_0 'nun 3MHz olduğu durumda, örnekler 8'er 8'er atlanarak kullanılır. Bu örneklerin frekansının, alçak geçiren süzgeç çıktısına göre Δf kadar daha büyük olması gerekiyorsa $\lfloor (f_0 / (\Delta f \cdot 64)) \rfloor$ örnekte bir, bir sonraki örnek kullanılır. Böylece sistem olması gereken frekansta çalıştırılmış olur.

5. Sonuçlar

Düz sönümlenmeli eklenebilir Gauss gürültülü kablosuz kanalda paket senkronizasyon sorunu üzerine çalışılmıştır. Bu sorunun çözümünde pilot dizini ekleme yöntemi kullanılmıştır. Özel olarak Barker dizini olarak adlandırılan bu dizinin eklenmesiyle kurulan yöntemin performansı farklı İGO değerleri için analitik ve deneysel olarak incelenmiştir.

FPGA sistemlerinin salınım devrelerinin çıkış frekansları arasındaki fark kanal kestiriminde hataya neden olmaktadır. Bu hatanın giderilmesi için PLL benzeri bir yapı önerilmiştir. Bu yapının performansı benzetimlerle ölçülmüş, iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. FPGA sistemlerinde uygulanması çok kolay olan bu yapının gerçekleştirilmesi henüz tamamlanmamıştır. Bu yapının gerçekleştirilmesi tamamlandıktan sonra sonuçları konferans zamanına yetiştirilecektir.

6. Teşekkür

Çalışmalarımıza katkılarından dolayı ODTÜ Elektrik-Elektronik Mühendisliği Telekomünikasyon Laboratuvarı'ndan Tuğcan Aktaş'a teşekkür ederiz.

7. Kaynakça

- [1] S. Haykin, M. Moher, *Modern Wireless Communications*, Prentice Hall, 2005, Bölüm 3.
- [2] Van Trees H. L., *Detection, Estimation and Modulation Theory*, John Wiley & Sons, 1968
- [3] A. J. Goldsmith, *Wireless communications*, Cambridge University Press, 2005
- [4] Y.H. Hu, "CORDIC-Based VLSI Architecture for Digital Signal Processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, no. 7, July 1992
- [5] D. Rife and R. Boorstyn, "Single-tone parameter estimation from discrete-time observations", *IEEE Transactions on Information Theory*, IT- 20, no. 5, pp. 591-598, Sept. 1974.
- [6] J. R. Barry, E. A. Lee, D. G. Messerschmitt, *Digital Communication*, Kluwer Academic Publishers, 2004, Bölüm 14
- [7] U. Meyer-Baese, "Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays", Springer, 2004, Bölüm 7

MIMO Kanallarda Sınırlı Hızda Geribesleme ve RVQ

MIMO Channels with Limited Rate Feedback and RVQ

Yrd. Dç. Dr. Ali Özgür Yılmaz

Araş. Gör. Gökhan Muzaffer Güvensen

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ), Ankara
aoyilmaz@eee.metu.edu.tr
guvensen@eee.metu.edu.tr

Özetçe

Çoklu alıcı-vericili anten sistemi kablosuz haberleşmede uzam çeşitlemesiyle birlikte getirdiği daha fazla serbestlik derecesinin bir sonucu olarak kapasiteyi önemli ölçüde arttırmaktadır. Fakat kapasitedeki bu artış çok-girişli çok-çıkışlı (MIMO) sistemlerde kanal bilgisinin kusursuz biçimde bulunması sonucunda olmaktadır. Biz bu makalede, ilk olarak Kanal Durum Bilgisinin (CSI) alıcı tarafında kusursuz olarak bulunduğunu, fakat verici tarafında ise sınırlı hızdaki geri beslemenin bir sonucu olarak nicemlenmiş kanal bilgisinin bulunduğunu kabul ederek MIMO kanal kapasitesini hesapladık. İkinci durumda ise, alıcı tarafında kanal bilgisinin kestiriminde belli bir hatanın oluştuğunu göz önüne alarak, geri beslemeli MIMO kapasitesi üzerinde çalıştık. Genel olarak yukarıdaki iki durum için, rasgele vektörel nicemleme (RVQ) yöntemi ile birlikte indirgenmiş sayıda ön kodlayıcı kullanılması sonucunda ortaya çıkan kapasite incelenmiş ve kapasite kayıplarının ön kodlayıcı başına az sayıda bit kullanılması sonucunda bile çok fazla olmadığı anlaşılmıştır.

Abstract

The capacity increases promised by multi-input multi-output (MIMO) systems usually come with requirements in regard to channel knowledge. We study the capacity of a MIMO scheme with perfect channel state information (CSI) at the receiver side where the transmitter has only a quantized version of the CSI due to a limited rate feedback channel. Random vector quantization is investigated along with a reduced number of precoders. It is found out that capacity losses are quite tolerable even in the case of small number of bits per quantized precoder.

1. GİRİŞ

Çok-girişli çok-çıkışlı (MIMO) sistemlerin getirdiği kapasite kazancının pratik sistemlerde elde edilebilmesi için alıcı ve verici tarafında kusursuz bir kanal bilgisine (CSI) ihtiyacımız vardır. CSI'nin doğru bir şekilde elde edilmesi pilot simgelerinin miktarı, kanal kestirim metodu gibi bir çok faktöre bağlıdır. Kanal bilgisini alıcı tarafından vericiye aktarmak için sınırlı hızda geri besleme metodu kullanılabilir ve bu da verici tarafında CSI'nin doğruluk derecesini belirler.

Kanal kestiriminin doğru bir şekilde yapılmadığı durumda, MIMO kanalın girişim sınırlı olduğu gösterilmiştir [1]. Ayrıca yine [1]'de anlık geri besleme tekniğinin hatalı olsa bile hem düşük hem de yüksek işaret-gürültü oranı (SNR) durumunda yüksek kapasite kazançları sağladığı gözlenmiştir. Benzer biçimde, noktadan noktaya MIMO sistemleri ile MIMO yayın sistemlerinin kanal kapasitesi, alıcı tarafında kusursuz, verici

tarafında ise nicemlenmiş kanal bilgisinin bulunduğu kabul edilerek birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. [2]'de ise MISO (çok-girişli tek-çıkışlı) kanal ile MIMO kanallarda kullanılmak üzere nicemleme kuralları ile nicemleyici tasarım ölçütleri önerilmiştir. Grassmannian beamforming yöntemi niceme tekniği olarak kullanılmış ve bu durumda, kod tablosunun büyüklüğü, kapasite-SNR kayıpları, kesinti performansı gibi konular incelenmiştir [3], [4]. MIMO yayın kanallarının sınırlı hızda geri besleme kullanılması sonucunda girişim limitli olduğu ve kapasitenin, SNR ile birlikte doğrusal artışı isteniyorsa, SNR arttıkça geri beslemede daha fazla sayıda bit kullanılması gerektiği gösterilmiştir [5]. Rasgele vektörel nicemleme yönteminin MISO sistemlerde kullanılması da [6]'da ele alınmıştır.

Biz bu çalışmada noktadan noktaya MIMO kanallarının kapasitesini inceledik ve bunu yayın kanallarının kapasitesiyle karşılaştırdık. MIMO kanal matrisine tekil değerli ayrışım (SVD) yöntemi uygulayarak, kanalı paralel alt kanallara ayrıştırabiliriz. Her bir paralel kanal için ön kodlayıcılar ile güç seviyelerini verici tarafına göndererek, MIMO kanal kapasitesine ulaşabiliriz. Kanal kapasitesi, yüksek SNR seviyelerinde, CSI'nin verici tarafında bulunup bulunmamasından çok etkilenmese bile, SVD tekniği düşük SNR seviyelerinde ve de kapasiteye yakın çalışan uyarlanabilir şekilde kiplenmiş MIMO sistemlerinin tasarımında önem kazanmaktadır [8]. Bu makalede, ön kodlayıcıların verici tarafına geri besleme ile gönderildiği durum üzerinde yoğunlaşmış ve kod tablosu RVQ yöntemi ile rasgele biçimde oluşturulmuştur. Bazı ölçütler yönünden kod tablosunda en yakın bulunan vektör verici tarafına iletilmektedir. Bu durumda, geri besleme hızının azaltılması için bütün ön kodlayıcılar kullanılmamış, onun yerine ön kodlayıcıların belli bir bölümünün kullanılması sonucunda ortaya çıkan kapasite hesaplanmıştır.

Çalışmamızda, ikinci bölümde kullanılan sistem modelini açıkladık, üçüncü bölümde ise indirgenmiş ön kodlayıcı yöntemini önerdik. Dördüncü ve beşinci bölümlerde ise kanal kestiriminde hata oluşmadığı ve oluştuğu durumlar için kapasite ifadeleri elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen kapasite ifadeleri için analitik sınırlar bulunmuş ve yazı altıncı bölüm ile sonlandırılmıştır.

2. SİSTEM MODELİ

Kalın küçük ve büyük harfler sırasıyla sütun vektörlerini ve matrisleri temsil etmektedir. Sayılar ise yalın küçük harfler ile gösterilmişlerdir. Üst simge (*) sayılar için karmaşık eşlenik, vektör ve matrisler için karmaşık devrik alma işlemine karşılık gelmektedir. $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ birim matris ise \mathbf{I}_n sembolü ile gösterilmektedir. Matrisin izi ve mutlak değer işlemlerini

sırasıyla $\text{tr}(\cdot)$ ve $|\cdot|$ simgeleri temsil eder. Rasgele \mathbf{a} vektörü için özilinti matrisi $\mathbf{R}_a = E[\mathbf{a}\mathbf{a}^*]$ ile gösterilmiştir ve $E[\cdot]$ beklenen değer operatörüdür.

Alıcı anten sayısı n_r , verici anten sayısı n_t olan noktadan noktaya MIMO kanalın genel ifadesi aşağıda verilmiştir;

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}} \quad (1)$$

Burada;

$\tilde{\mathbf{H}}$: $n_r \times n_t$ kanal matrisini,

$\tilde{\mathbf{x}}$: elemanları gönderilecek bilgiyi kanal sembolleri olarak taşıyan vektörü,

$\tilde{\mathbf{w}}$: sıfır ortalamalı uzamsal ve zamansal olarak simetrik değeri 1 'e düzgelenmiş varyansa sahip beyaz gauss gürültüsünü (ZMCSG) göstermektedir.

Blok sönmleme modeli göz önüne alındığında, gönderilen işaret üzerindeki ortalama güç kısıtını aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}}) \leq P \quad (2)$$

Tekil değerli ayrışım metodu (SVD) ile, MIMO kanalı $\min(n_r, n_t)$ tane alt paralel kanallara aşağıdaki gibi ayrıştırabiliriz;

Öncelikle kanal matrisini SVD ile ayrıştırdığımızda:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^* \quad (3)$$

Bu durumda;

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^* \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{w}} \quad (4)$$

\mathbf{D} bir köşegen matristir ve $\tilde{\mathbf{x}}$ vektörü ön kodlayıcı matris, alt kanallara güçlerin nasıl dağıldığını gösteren köşegen matris, ve özilinti matrisi birim matris olan \mathbf{x} vektörünün çarpımı şeklinde yazılabilir: $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_f \mathbf{\Lambda}_f \mathbf{x}$ ve $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{I}_{\min(n_r, n_t)}$.

Gerekli birimcil dönüşümleri uygularsak; $\mathbf{y} = \mathbf{U}^* \tilde{\mathbf{y}}$ ve $\mathbf{w} = \mathbf{U}^* \tilde{\mathbf{w}}$, (4)'deki ifadeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{V}_f^* \mathbf{\Lambda}_f \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (5)$$

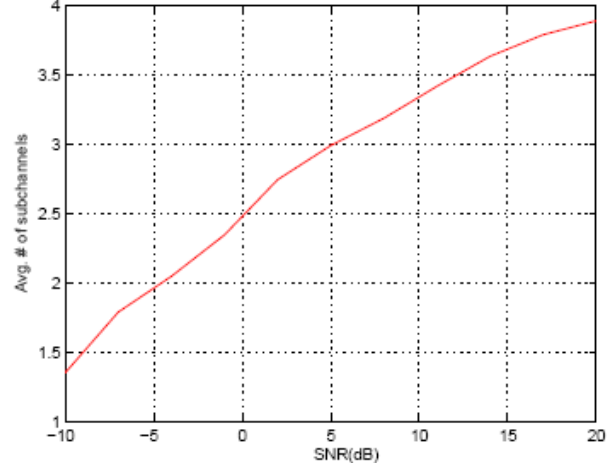
Verici tarafında sınırlı hızda geri beslemeden dolayı kanal bilgisi tam olarak bulunmamaktadır, bu da nicemlenmiş ön kodlayıcı matris kullanılmasının sonucunda meydana gelmiştir. Bu yüzden, geri besleme durumunda $\mathbf{V}_f^* \mathbf{\Lambda}_f \neq \mathbf{I}$ ve de yeni ortalama güç kısıtı $\text{tr}(\mathbf{\Lambda}_f^2) \leq P$ olarak yazılabilir.

3. İNDİRGENMİŞ ÖN KODLAMA TEKNİĞİ

Toplanır beyaz gauss gürültülü kanalların kapasitesinin düşük SNR değerinde güç sınırlı, yüksek SNR değerlerinde ise band genişliğine bağlı olduğu bilinmektedir [10]. Bu bilgi, birleşik güç kısıtlamasının olduğu çoklu kanallarda, düşük SNR seviyelerinde kapasiteyi arttırmak için bütün gücü sadece belli bir grup alt kanallara, yüksek SNR seviyelerinde ise bütün serbestlik derecelerini kullanmak için bütün kanallara güç dağıtmamız gerektiğini gösterir. Bu sebeple, düşük SNR değerlerinde, paralel alt kanalların sadece çok az bir kısmı kullanılmalı, SNR seviyesi yükseldikçe, haberleşme hızını arttırmak için daha fazla sayıda alt kanal kullanıma girmelidir.

Şekil-1'de uzamsal waterfilling yöntemiyle 4×4 MIMO kanalda, kapasiteye erişmek için kullanılan paralel alt kanal sayısı gözükmektedir. Bu şekilde, her bir SNR değeri için (gürültü seviyesi 1 olarak alınmıştır) 20,000 kanal

gerçekleştirilmesi yapılmış ve kullanılan ortalama alt kanal sayısı hesaplanmıştır. Kapasiteye erişmek için kullanılan ortalama alt kanal sayısı SNR'nin artan bir fonksiyonudur. Bu nedenle, belli bir SNR değerinde, kapasiteye erişmek için ön kodlayıcı matrisin tamamını kullanmak gerekli değildir. Onun yerine, en güçlü kanallara karşılık gelen ön kodlayıcı vektörleri verici tarafına göndermek kapasiteye erişmek için yeterlidir. Böylece, geri besleme hızı düşürülebilir ve kullanılmayan diğer kanallar başka amaçlar için ayrılabilir. SNR seviyesi yükseldikçe yeni alt kanallar kullanılmak ve geri besleme hızı arttırılmak zorundadır.



Şekil-1. 4x4 kanal kapasitesine erişmek için kullanılan ortalama alt kanal sayısı

4. RVQ ile KAPASİTE HESABI

Analitik kolaylığından ötürü sınırlı hızda geri beslemenin noktadan noktaya MIMO kanal kapasitesi üzerindeki etkisini RVQ yöntemini kullanarak inceleyeceğiz. 2^{N_f} tane nicemleyici $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{2^{N_f}}\}$ vektörleri, nicemleyici kod tablosunu yaratmak için RVQ tekniği ile rasgele olarak oluşturulmaktadır. Burada, N_f ön kodlayıcı vektör başına karşılık gelen bit sayısını göstermektedir. Nicemleyici vektörler, n_t -boyutlu birim çember üzerindeki yön bağımsız dağılım üzerinden bağımsız olarak çekilen n_t boyunda karmaşık vektörlerden oluşur [5], [6]. RVQ yöntemini, indirgenmiş ön kodlama ile birlikte kullanabiliriz. Bu durumda, analitik kolaylık ve pratik sistemlerdeki uygulanabilirliğinden ötürü, yalnızca iki alt kanalı kullanacağız. Gerekli değişkenleri yeni durumda tekrar tanımlarsak;

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \end{bmatrix}, \mathbf{V}_f = [\mathbf{v}_{1f} \quad \mathbf{v}_{2f}], \mathbf{\Lambda}_f = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

ifade (5)'i kullanarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{1f} & d_1 \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{2f} \\ d_2 \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{1f} & d_2 \mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{2f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Bu denklemi dikkatli bir şekilde incelediğimizde, her bir alt kanalda işaret terimi, beyaz gürültü terimi ve diğer alt kanaldan kaynaklanan girişim terimi olduğu görülür. Demodülasyonda, diğer kanaldan gelen girişim dikkate alınmaz ise, uyumlu filtreleme işlemi alınan işaret üzerinde tıpkı yayın kanallarındaki gibi uygulanabilir. Bu durumda, iki alt kanalın işaret-girişim-oranı (SIR) aşağıdaki gibi verilebilir;

$$\text{SIR}_1 = \frac{d_1^2 \lambda_1^2 |\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{1f}|^2}{d_1^2 \lambda_2^2 |\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{2f}|^2 + 1},$$

$$\text{SIR}_2 = \frac{d_2^2 \lambda_2^2 |\mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{2f}|^2}{d_2^2 \lambda_1^2 |\mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{1f}|^2 + 1}, \quad (8)$$

Uyumlu filtreleme (match filtering) sonucunda elde edilen kapasite ise $C_{mf} = \log_2(1 + \text{SIR}_1) + \log_2(1 + \text{SIR}_2)$ (9)

Böylece kanal matrisi \mathbf{H} ve nicemlenmiş ön kodlayıcı vektörler verildiğinde (9)'da verilen eşitliği kullanarak C_{mf} 'yi hesaplayabiliriz. Nicemleme işlemi aşağıda verilen kural doğrultusunda yapılmaktadır;

$$\mathbf{v}_{if} = \arg \max_{j=1,2,\dots,2^{N_f}} |\mathbf{v}_i^* \mathbf{q}_j|^2 \quad (10)$$

\mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 vektörleri verildiğinde, ön kodlayıcı matrisler (10)'da verilen yöntemi kullanarak birbirlerinden bağımsız olacak biçimde oluşturulabilirler. RVQ yöntemi, nicemleyici kod defterlerinin sonsuz sayıda oluşturulup, bunların ortalama performanslarının incelendiği rasgele kodlama yaklaşımıdır.

Bu durumda, $|\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{1f}|^2$ ve $|\mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{2f}|^2$ 'nin bağımsız özdeşçe dağılmış rasgele değişkenler olduğu görülmektedir. Bu değişkenlerin olasılık dağılım işlevleri [3] ve [4]'de aşağıdaki gibi verilmiştir;

$$F_{|\mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{if}|^2}(x) = \begin{cases} \left(1 - (1-x)^{n_i-1}\right)^{2^{N_f}}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 \\ 1 & , x > 1 \end{cases} \quad (11)$$

(9)'da verilen kapasiteyi hesaplaya bilmemiz için kalan 2 tane daha değişkenin olasılık dağılımını bilmek zorundayız.

$\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{1f}$, \mathbf{v}_1 vektörünün \mathbf{v}_2 üzerine iz düşümüne karşılık gelmektedir. Bu durumda, \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 'nin dikliklerini kullanarak aşağıda verilen ifadeyi oluşturabiliriz;

$$\mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{1f} = \mathbf{v}_2^* (\mathbf{v}_{1f} - (\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{1f}) \mathbf{v}_1), \quad (12)$$

\mathbf{v}_{1f} vektörünü tanımlayarak, $\mathbf{v}'_{1f} = \mathbf{v}_{1f} - (\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{1f}) \mathbf{v}_1$, bu vektörün, \mathbf{v}_1 vektörüne dik bir uzayda yer aldığı gözükür. Bu durumda, \mathbf{v}'_{1f} vektörü (n_i-1) boyutlu, büyüklüğü

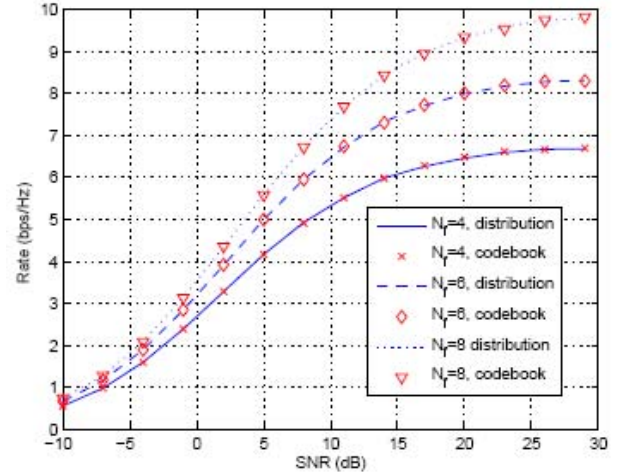
$(\mathbf{v}'_{1f})^* \mathbf{v}'_{1f} = 1 - |\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{1f}|^2$ olan bir vektördür. \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 vektörleri verildiğinde, \mathbf{v}_{1f} ve \mathbf{v}_{2f} vektörleri birbirlerinden bağımsızdır. \mathbf{v}_2 vektörünün yön bağımsız dağılıma sahip \mathbf{v}'_{1f} üzerine izdüşümü düşünüldüğünde, $|\mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{1f}|^2$ için aşağıdaki koşullu olasılık dağılımı elde edilir;

$$F_{|\mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{1f}|^2}(x | |\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{1f}|^2 = a) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{x}{1-a}\right)^{n_2-2}, & 0 \leq x \leq 1-a \\ 0 & , x < 0 \\ 1 & , x > 1-a \end{cases}$$

(13)

Benzer biçimde, $|\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_{2f}|^2$ 'nin $|\mathbf{v}_2^* \mathbf{v}_{2f}|^2$ koşulu altındaki dağılımı da (13)'de verilen dağılıma sahiptir. Basit gösterim açısından, $\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_{jf}$ şeklinde yeni bir rasgele değişken tanımladık. \mathbf{V}_{ij} ilerleyen kısımlarda sıklıkla kullanılacaktır.

Elde ettiğimiz olasılık dağılımlarını kullanarak uyumlu filtreleme sucunda bulunan kanal kapasitesini hesaplayabiliriz. İki farklı yol kullanarak, ergodik kapasite Monte Carlo benzetim yöntemi ile hesaplanmış ve yukarıda bulunan olasılık dağılım fonksiyonlarının geçerliliği Şekil-2'de gösterilmiştir.



Şekil-2. Uyumlu filtreleme sonucunda elde edilen, 4 x 4 MIMO kanal için ergodik kapasite. Çizgiler, olasılık dağılım fonksiyonları ile işaretler ise rasgele oluşturulan kod defterleri kullanılarak elde edilmiştir.

Şekil-2'den çıkarılabilecek bir diğer sonuç ise kanal kapasitesinin SNR ile doğrusal olarak yükselmediğidir. Bu durumda kapasiteyi arttırmak için N_f artırılmalıdır, fakat yinede kapasitenin girişim limitli olduğu gözlenmektedir. İdeal ön kodlayıcılarınkine çok yakın bir performans için çok fazla sayıda bit (N_f) kullanılması gerekmektedir. Bu durumda, kod tablosu çok fazla büyüyecek ve ideal ön kodlayıcıya daha yakın bir tablo bulma olasılığımız artacaktır.

Yayın kanallarından farklı olarak noktadan noktaya MIMO kanallarda alıcı, hem gerçek kanalı hem de nicemlenmiş ön kodlama vektörlerini bilmektedir. Bu durumda, eş kanal matrisini tanımlarsak, $\mathbf{H} = \mathbf{D}\mathbf{V}^* \mathbf{V}_f$, (5)'i aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz;

$$y = \mathbf{H}\mathbf{A}_f x + w \quad (14)$$

2 adet ön kodlayıcı kullanan durumdaki kanal kapasitesi;

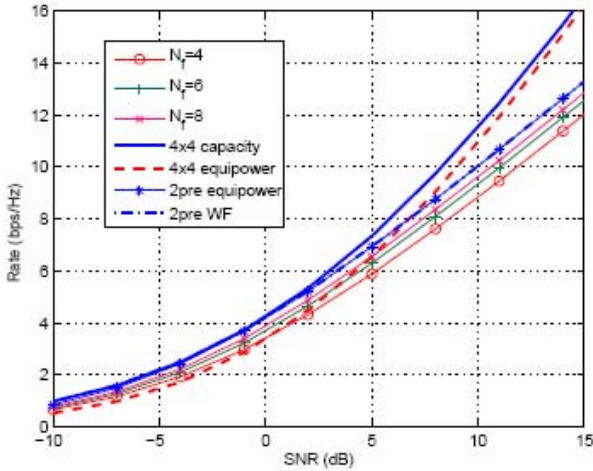
$$C_{2\text{pre}} = \log_2 | \mathbf{I}_2 + \mathbf{H}\mathbf{A}_f^2 \mathbf{H}^* | \quad (15)$$

ve bu kapasiteye en küçük ortalama kare hata kestirimi (MMSE) ve ardışık girişim yok etme yöntemi ile erişilebilir [15].

Kapasiteyi hesaplarken Waterfilling yöntemi uygulanmamış, onun yerine en iyi alt yaklaşımlardan biri olarak, alt kanalların ikisine de eşit güç verilerek analiz yapılmıştır, $\mathbf{A}_f^2 = \frac{P}{2} \mathbf{I}_2$. Bu sayede, güç dağılımı için geri

besleme kullanılmasına gerek kalmamış, elde edilen sonuçlar belli SNR değerlerine kadar gerçek kapasiteye çok yakın kalmıştır.

Şekil-3'de 2 ön kodlayıcı durumların 4x4 kanal kapasitesi ile karşılaştırması yapılmıştır. Her bir nokta, 10,000 Monte Carlo benzetimi ile oluşturulmuş, RVQ ile bulunan olasılık dağılımları kullanılarak elde edilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, nicemlemenin çok da ince olmadığı (4 ile 8 bit arası) 2 ön kodlayıcı durumun, N_f değerine bağlı olarak 2-8dB arası kadar tüm kanallara eşit güç dağıtıldığı duruma göre 4x4 kanal kapasitesine daha yakın olduğu görülmektedir. SNR seviyesi yükseldiğinde ise 2 ön kodlayıcı durumun 4x4 kapasiteden uzaklaştığı görülmektedir çünkü bu durumda tüm serbestlik dereceleri kullanılmamaktadır. Özetle, 2 ön kodlayıcı durumdaki haberleşme hızı, kanal kapasitesine, geri beslemede az sayıda bit kullanılması durumunda bile (düşük SNR değerleri için) yakın kalmakta ve 5dB'ye kadar eşit güç dağılımına göre 1-2dB kazanç olduğu gözlenmektedir.



Şekil-3. 4x4 ergodik kanal kapasiteleri. Tüm kanalların kullanıldığı durum (2 durum: Waterfilling ve eşit güç dağılımı) ile 2-ön-kodlayıcı durumdaki (3 durum: Waterfilling ve eşit güç dağılımı, $N_f = \infty$ ile eşit güç dağılımında sınırlı hızda geri besleme) kapasiteleri karşılaştırılması

5. RVQ YÖNTEMİ İLE KAPASİTE SINIRI ve KANAL KESTİRİM HATASININ KAPASİTEYE ETKİSİ

RVQ yöntemi ile oluşturulan 2-ön kodlayıcı durumdaki kanal kapasitesine bir üst sınır oluşturabiliriz. Fakat, bildirimizi 4 sayfa ile sınırlı tutmak zorunda olduğumuz için burada uzun sayılabilecek ispata yer veremiyoruz, sadece bu sınırın analitik ifadesini verebiliyoruz;

$$\begin{aligned} E \log_2 | \mathbf{I} + \frac{P}{2} \mathbf{H}\mathbf{H}^* | &\leq \log_2 \left(1 + \frac{P}{2} E[d_1^2] (E[|V_{11}|^2] + E[|V_{12}|^2]) \right. \\ &\quad \left. + \frac{P}{2} E[d_2^2] (E[|V_{21}|^2] + E[|V_{22}|^2]) \right) \\ &\quad + \frac{P^2}{4} E[d_1^2 d_2^2] E[|V_{11}|^2] E[|V_{22}|^2] \\ &\quad + \frac{P^2}{4} E[d_1^2 d_2^2] E[|V_{12}|^2] E[|V_{21}|^2] \end{aligned} \quad (16)$$

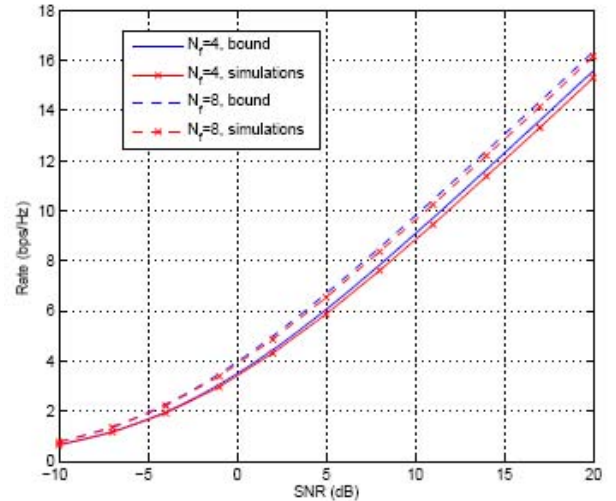
$$E[|V_{11}|^2] = E_{11} = E_{22} = 1 - 2^{N_f} B\left(2^{N_f}, \frac{n_t}{n_t - 1}\right), \quad (17)$$

$$E[|V_{12}|^2] = E[|V_{21}|^2] = \left(1 - B\left(1, \frac{n_t - 1}{n_t - 2}\right)\right) 2^{N_f} B\left(2^{N_f}, \frac{n_t}{n_t - 1}\right)$$

Burada, $B(x, y)$ beta fonksiyonudur [6].

$d_1^2, d_2^2, d_1^2 d_2^2$ değişkenlerinin ortalama değerleri Monte Carlo benzetimi kullanılarak hesaplanmıştır. Deneysel momentler, 100,000 gerçekleştirme yapılarak, bunlar üzerinden ortalama alınarak bulunmuştur.

Şekil-4'de ise gerçek kapasite değerleri ile ona bulunan sınırın birbirine çok yakın olduğu gözlenmektedir. Elde ettiğimiz üst sınır ile gerçek ergodik kapasite arasındaki fark 0.2dB ile 0.4dB arasında değişmektedir.



Şekil-4. 2-ön-kodlayıcı durumdaki haberleşme hızları için bulunan üst sınırların Monte Carlo benzetim değerleriyle karşılaştırılması

Kanal kapasitesini hesaplarken, alıcı tarafında kusursuz kanal durum bilgisinin bulunduğunu kabul etmiştik, ikinci aşamada ise alıcı tarafında MMSE yöntemiyle kanal kestirimi yapıldığını ve bir kestirim hatası oluştuğunu kabul edersek, yeni durumda; $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \mathbf{E}$, burada $\hat{\mathbf{H}}$, kestirim sonucunda bulunan kanal matrisi ve \mathbf{E} de kestirim hatasıdır. \mathbf{H} ve \mathbf{E} arasındaki korelasyon sıfırdır ve \mathbf{E} , ZMCSCG olasılık dağılımına sahiptir, varyansı ise;

$$\sigma_E^2 = \text{MMSE} = E(\tilde{\mathbf{H}}_{ij}^2) - E(\hat{\mathbf{H}}_{ij}^2) \text{ olarak belirtilir [17],}$$

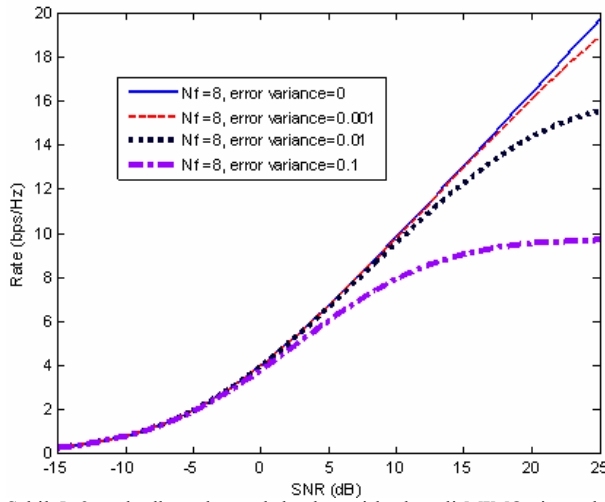
burada σ_E^2 kanal kestirimindeki doğruluk derecesini göstermektedir.

Bu yeni durumda ise 2-ön kodlayıcı kanalin kapasitesi aşağıdaki gibidir;

$$C_{2\text{pre}}(\text{lower}) = \log_2 \left| \mathbf{I}_2 + \frac{P/2}{\sigma_E^2 P + 1} \mathbf{H}\mathbf{H}^* \right| \quad (18)$$

Burada yine alt kanallara eşit güç dağıtılmıştır, $\Lambda_f^2 = \frac{P}{2} \mathbf{I}_2$.

Sayfa limitlerini aşmamak adına, yukarıdaki ifadenin çıkarımına bu bildiride yer veremiyoruz. Şekil-5'de farklı σ_E^2 değerleri için 2 ön kodlayıcı kullanıldığı durumdaki haberleşme hızlarının farklı SNR değerlerine göre değişimi gösterilmektedir. σ_E^2 değerlerinin çokta küçük olmadığı durumlarda (şekilde $\sigma_E^2=0.1$), SNR seviyesi yükseldikçe, $\sigma_E^2 P$ terimi çok büyümekte ve kapasite belli bir SNR değerinden sonra sabit kalmaktadır.



Şekil-5. 2-ön kodlayıcı sınırlı hızda geri beslemeli MIMO sistemde, kanal kestirimindeki doğruluk derecesinin kapasiteye etkisi

6. SONUÇLAR

Bu bildiride, genel olarak noktadan-noktaya MIMO kanalların sınırlı hızda geri besleme durumundaki kapasitelerini inceledik. İlk olarak, kapasiteye erişmek için kullanılan ön kodlayıcıların sayısının çok fazla bir performans kaybına neden olmadan, kanalın ortalama SNR değerine bağlı olarak azaltılabileceğini gördük. Daha sonra, RVQ yöntemi ile noktadan-noktaya MIMO kanalların, geri besleme sırasında, yayın kanallarına nazaran çok daha az sayıda bit kullanılması ile kapasiteye yakın çalıştıklarını gözlemledik. Son olarak, ön kodlayıcı durumlarda kanal kapasitesine, pratik sistem tasarımında kullanılabilecek, üst sınır oluşturduk. Ayrıca, kanal kestiriminde belli bir hatanın oluştuğunu kabul ederek bunun ergodik kapasite üzerindeki etkisini inceledik. Daha sonraki çalışmalarımıza kanalın değiştiği, fakat en son yapılan kanal kestirimdeki hatanın değerinin, alıcı tarafında tespit edildiğini kabul ederek, bu senaryo için yine sınırlı hızda geri besleme durumunda maksimum haberleşme hızlarını ve analitik sınırları bulmaya çalışacağız. Buna ek olarak, daha fazla sayıda ön kodlayıcının kullanılması durumunda oluşan ergodik kapasiteyi hesaplamaya çalışacağız.

6. KAYNAKÇA

- [1] T. Yoo, E. Yoon, and A. Goldsmith, "MIMO capacity with channel uncertainty: Does feedback help?," *Proc. IEEE Globecom*, pp. 96–100, 2004.
- [2] J.C. Roh and B.D. Rao, "Channel feedback quantization methods for MISO and MIMO systems," *Proc. IEEE PMIRC*, vol. 2, pp. 805–809, Sept. 2004.
- [3] D.J. Love, R.W. Heath Jr., and T. Strohmer, "Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2735–2747, Oct. 2003.
- [4] K.K. Mukkavilli, A. Sabharwal, E. Erkip, and B. Aazhang, "On beamforming with finite rate feedback in multiple-antenna systems," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2562–2579, Oct. 2003.
- [5] N. Jindal, "MIMO broadcast channels with finite rate feedback," *Proc. IEEE Globecom*, 2005.
- [6] C. Au-Yeung and D.J. Love, "On the performance of random vector quantization limited feedback beamforming in a MISO system," *preprint*.
- [7] I. E. Telatar, "Capacity of multi-antenna Gaussian channels," *Europ. Trans. Telecommun.*, vol. 10, pp. 585–598, Nov./Dec. 1999.
- [8] Z. Zhou, B. Vucetic, M. Dohler, and Y. Li, "MIMO systems with adaptive modulation," *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, vol. 54, no. 5, pp. 1828–1842, Sept. 2005.
- [9] E.G. Larsson and P. Stoica, *Space-Time Block Coding for Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2003.
- [10] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005.
- [11] L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation*, New York: Springer-Verlag, 1986.
- [12] G.D. Forney Jr, "Shannon meets Wiener II: On MMSE estimation in successive decoding schemes," *Proc. 2004 Allerton Conf.*, 2004.
- [13] P. Stoica, Y. Jiang, and J. Li, "On MIMO channel capacity: An intuitive discussion," *IEEE Signal Processing Mag.*, pp. 83–84, May 2005.
- [14] T.M. Cover and J.A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley & Sons, 1991.
- [15] C. G. Khatri, "Distribution of the largest or the smallest characteristic root under null hypothesis concerning complex multivariate normal populations," *Ann. Math. Stat.*, vol. 35, pp. 1807–1810, Dec. 1964.
- [16] M. Kang and M.-S. Alouni, "Largest eigenvalue of complex Wishart matrices and performance analysis of MIMO MRC systems," *IEEE J. Sel. Areas Comm.*, vol. 21, no. 3, pp. 418–426, April 2003.
- [17] T. Yoo and A. Goldsmith, "Capacity of fading MIMO channels with channel estimation error," in *Proc. IEEE Int. Conf. Commun.*, vol. 2, June 2004, pp. 808–813.

Bileşik Kaplar Yönteminin OFDM ve MIMO Sistemlerde PAPR Üzerine Etkisi

Effect of Water-Filling Method on the PAPR for OFDM and MIMO Systems

Mehmet Vural, Tuğcan Aktaş, Ali Özgür Yılmaz

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, ODTÜ

e-mail: {e134297,e129143,aoyilmaz}@metu.edu.tr

Özetçe

Bu bildiriye, dikgen sıklık bölümlü çoğullama (OFDM) yönteminde çok karşılaşılan tepe güç/ortalama güç oranı (PAPR) problemi ele alınmıştır. Sistemde bileşik kaplar (BK) yöntemi uygulandığında bu problemdeki değişimler gözlenmiş ve bu durum için bir dağılım fonksiyonu önerilmiştir. Ayrıca, çok girdili-çok çıktılı (MIMO) sistemlerde BK algoritması eşit güç dağıtım algoritmasıyla karşılaştırılmış ve aynı sorun uzay çeşitlemesinde de gözlemlenmiştir.

Abstract

In this paper, the peak-to-average power ratio (PAPR) problem for orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) is investigated. The variations in the nature of the problem along with the utilization of water-filling technique are observed and the corresponding cumulative distribution function for PAPR is determined. In addition to OFDM analysis, another analysis is carried out for the comparison of water-filling technique and an equal power distribution algorithm in case of a multiple input multiple output (MIMO) system and the same PAPR problem is examined in the spatial diversity scenario as well.

1. Giriş

Dikgen sıklık bölümlü çoğullama (OFDM) çok-yollu kanallarda iyi performans göstermesi nedeniyle çok kullanılan bir yöntem haline gelmiştir. Temel olarak, OFDM bant genişliğini N tane dik alt-kanala böler ve veriyi bu alt-kanallarla gönderir. Zaman bölgesinde bir OFDM sinyali birbirinden bağımsız olarak kiplenmiş sinüsoidlerin toplamıdır ve bu sinyalin genliği zaman içerisinde çok büyük değişimler gösterebilir [1]. Tepe güç/ortalama güç oranı (PAPR) bu modülasyon tekniğinin en önemli sorunlarından biridir. Zamanla değişen kanallarda, kanal durumu hem alıcı hem de vericide biliniyorsa “water-filling” (bileşik kaplar, BK) tekniği kanal kapasitesini sağlayan tekniktir. Bu teknikte kanalın o anki durumuna bakılarak kanala ne kadar güç verileceği bulunur ve o güce denk gelen kanal kapasitesini sağlayacak şekilde bir modülasyon tekniği uygulanır [3]-[5]. OFDM yönteminde frekans ve zaman bölgesinde iki boyutlu BK tekniği uygulamak mümkündür. Çok benzer bir şekilde MIMO sistemler söz konusu olduğunda da uzay ve zaman alanında iki boyutlu bir BK yöntemi uygulanabileceği gibi kanal özelliklerine bağlı olarak kapasiteden önemli bir kayıp yaşanmadan yalnızca uzayda BK tekniği uygulamak da mümkündür [7]. İki boyutlu yöntemde her alt kanala verilen

güç ve o alt kanalın modülasyon tekniği zaman içinde önceden belirlenmiş bir toplam güç limitine bağlı olarak değiştirilirken tek boyutta anlık olarak belirlenen limite göre bir güç dağıtımı ve modülasyon seçimi yapılmaktadır.

Yüksek işaret-gürültü oranının (İGO) sağlandığı durumlarda gücün eşit dağıtılmasıyla elde edilen kapasitenin kanal kapasitesine yakın olduğu daha önceki çalışmalarla gösterilmiştir [3]. Düşük İGO durumunda ise BK tekniğinin spektral verimliliği artırdığı bilinmektedir.

Yüksek PAPR çok verimli doğrusal güç yükselteçlerinin varlığını gerektirir. OFDM yönteminin kullanıldığı sistemlerde bulunan doğrusal olmayan yükselteçlerin performansını veya bu yükselteçlerde ne kadar iyi bir doğrusallığa ihtiyaç duyulduğunu öngörmek için PAPR’ın özelliklerinin iyi bilinmesi gerekmektedir. Eğer N alt kanalın hepsine faz kaydırmalı kiplenim (PSK) ile modülasyon uygulanırsa PAPR’ın teorik üst sınırı N olur. PAPR’ın bu teorik üst sınıra ulaşma ihtimali N büyüdükçe azalır [2].

PAPR probleminin araştırıldığı çalışmalarda hem OFDM hem de MIMO durumunda BK tekniğinin etkileri göz önüne alınmamaktadır. Düşük İGO durumunda PAPR’ın daha da kötü bir duruma geldiği gözlenmiştir. Ayrıca PAPR’ın olasılık dağılımının bulunması için önerilen geleneksel yöntemde [6] BK yönteminin de uygulandığı göz önüne alınarak bazı değişiklikler önerilmiş ve önerilen yeni dağılım fonksiyonu benzetim sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Bildirinin 2. bölümünde sistem modeli ve kullanılan yöntemler, 3. bölümünde benzetim çalışmaları ve son bölümünde sonuçlar yer almaktadır.

2. Sistem Modeli

Bu bölümde kullanılan sistem modeli ve kullanılan yöntemler açıklanacaktır. OFDM yönteminde N uzunluğundaki birbirinden bağımsız, ortalaması sıfır olan karmaşık veri dizileri $\{X[i]\}$, IFFT modülüne girdi olarak verilir ve zaman bölgesindeki semboller $\{x[n]\}$ uygun bir şekilde alıcı tarafına yolları:

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} X[i] e^{j2\pi n i / N} \quad (1)$$

Zaman bölgesindeki $x[n]$ sinyalinin maksimum değerinin karesinin bu sinyalin ortalama gücüne oranı PAPR’ı verir ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$PAPR = \frac{\max_n \|x[n]\|^2}{E_x \{\|x[n]\|^2\}} \quad (2)$$

(1)’de bulunan $x[n]$ sembolleri birbirinden bağımsız birçok verinin toplamları olduğu için N sonsuza gittikçe merkezi limit teoremine göre $x[n]$ ’lerin dağılımı karmaşık Gauss dağılımına yaklaşır. Eğer N yeterince büyük seçilirse ($N > 64$) Gauss yaklaşımı kullanılabilir ve BK tekniğinin

uygulanmadığı durumda PAPR'ın olasılık dağılım fonksiyonu bilinmektedir [3]. PAPR rasgele değişken λ ile ifade edildiğinde ve her bir alt kanala verilen ortalama güç 1 birim olarak alındığında dağılımı

$$F_\lambda(\lambda) = \Pr(\max_{0 \leq i \leq N} |x[i]|^2 \leq \lambda) = (1 - e^{-\lambda})^N \quad (3)$$

olarak bulunur.

BK tekniğinin PAPR'a etkisini incelerken her alt kanalın durumunun birbirinden bağımsız olarak zaman içinde değiştiği düşünülmüştür. Hem zaman hem de frekans boyutunda BK uygulandığı düşünülürse her alt kanala verilen güç

$$\frac{P_j(\gamma_j)}{P} = \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_j}\right)^+ \quad (4)$$

olarak yazılır. Buradaki γ_j , j alt kanalının anlık İGO' su,

$P_j(\gamma_j)$ anlık İGO' ya denk gelen güç, P ortalama toplam

güç limiti, γ_0 ise bu limit kullanılarak elde edilen bir eşik değeridir. Eğer herhangi bir alt kanalın anlık İGO' su bulunan eşik değerinden daha büyükse o alt kanala $P_j(\gamma_j)$ kadar güç verilir, değilse o alt kanal o an için kullanılmaz. Bu işlem her alt kanal için tekrarlanır ve daha sonra frekans bölgesindeki veriler $\sqrt{P_j \gamma_j}$ ile çarpıldıktan sonra IFFT işlemi uygulanır.

BK uygulandığında PAPR için yukarıda yapılan analizin aynen uygulanması mümkün değildir, çünkü BK tekniğinde sisteme verilen güç her an değişmektedir, bu da $x[n]$ 'lerin güçlerinin zaman içinde değiştiğini ifade eder ki geleneksel analizde bu durum göz önüne alınmamıştır. Bunu daha kolay görebilmek için abartı durumu göz önüne alabiliriz: Bazı durumlarda bütün alt kanalların anlık İGO' larının çok kötü olma ve hepsinin de eşik değerinin altında kalma ihtimali vardır. Bu durumda o an herhangi bir sinyal gönderilmeyecek ve PAPR o an için sıfır olacaktır. Aynı şekilde eğer bütün kanalların durumu çok iyi olursa, çok yüksek bir güç sisteme verilecek ve de bu PAPR'ın artmasına neden olacaktır. Yapılan analizde bazı değişiklikler yapabilmek için herhangi bir $\underline{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$ anlık İGO vektörü için $x[n]$ 'nin değışintisi (σ_γ^2) hesaplanmalıdır. Alt kanallara dağıtılan

veriler birbirinden bağımsız sıfır ortalamalı değışintisi bir olan simetrik karmaşık Gauss dağılımlı alındığında,

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^2 &= E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{P_i(\gamma_i)} \sqrt{P_j(\gamma_j)} X[i] X^*[j] e^{j2\pi(i-j)n/N} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P_k(\gamma_k) \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde değışinti bulunur.

Eğer herhangi bir anlık İGO vektörü için zaman bölgesindeki sembollerin karmaşık Gauss dağılımlı oldukları varsayılırsa, o vektöre denk gelen cdf

$$F_{\lambda(\underline{\gamma})}(\lambda(\underline{\gamma})) = (1 - e^{-\lambda / \sigma_\gamma^2})^N \quad (6)$$

olur.

Bu durum bütün olası anlık İGO vektörleri için düşünüldüğünde, PAPR'ın cdf'i (6)'da yazılan ifadenin ortalaması olarak bulunur.

$$F_\lambda(\lambda) = \iiint \dots \int f_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_N) (1 - e^{-\lambda / \sigma_\gamma^2})^N d\gamma_1 \dots d\gamma_N \quad (7)$$

(7)'deki İGO vektörünün birleşik dağılımı, her alt kanalın birbirinden bağımsız olduğu varsayıldığı için, marjinal dağılımların çarpımı yapılarak bulunur.

MIMO sistemi içinse M alıcı N de verici anteninden oluşan, her antenin birbirinden bağımsız Rayleigh sönümlemeye etkilediği bir kanal yapısı ele alınmış ve kanal kazançlarının oluşturduğu H matrisi üzerinde uygulanan tekil değer ayrıştırması (SVD, Singular Value Decomposition) yöntemi ile paralelleştirilen kanallar üzerinde tek boyutlu BK tekniği gerçekleştirilmiştir. Burada verici antenlerden gönderilen sinyali N uzunluğundaki x vektörü, alıcı antenler tarafından yakalanan sinyali de yine M uzunluğundaki y vektörü olarak betimleysek

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M1} & \dots & h_{MN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_M \end{bmatrix} \quad (8)$$

eşitliğine ulaşırız. Burada $h_{i,j}$ numaralı verici anteninden i numaralı alıcı antenine olan kanal kazançını, n_i ise i numaralı alıcı antenine ulaşan gürültü sinyalini betimlemektedir. SVD yöntemine göre her $M \times N$ boyutlu H matrisi, $M \times M$ boyutlu U ve $N \times N$ boyutlu V 'nin birimcil (unitary), $M \times N$ boyutlu Σ 'nin ise köşegen matrisler olduğu $H = U \Sigma V^H$ ayrıştırımıyla yazılabilir [8]. Bu durumda eğer gönderilecek x vektörü öncelikle V vektörü ile şekillendirilip $\tilde{x} = Vx$ vektörü olarak gönderilir ve alınan y vektörü de U^H vektörü ile şekillendirilirse $\tilde{y} = U^H y$ vektörü,

$$\tilde{y} = U^H (H \tilde{x} + n) = U^H (U \Sigma V^H V x + n) = \Sigma x + \tilde{n} \quad (9)$$

şeklinde bulunur. Bu gösterimde $\tilde{n} = U^H n$ vektörü U birimcil bir matris olduğundan n ile eş dağılıma sahiptir. Sonuç olarak bulunan Σx vektörü, gönderilmek istenen sinyalin birbirinden bağımsız, diğer bir deyişle paralelleştirilmiş, kanal kazançları elemanları pozitif olan Σ matrisince belirlenen kanallar üzerinde gönderilmiş halidir. Bu noktadan sonra kanal kapasitesini en yüksek değerine ulaştıracak olan güç dağıtım yöntemi olarak BK yöntemi kullanılır ve paralelleştirilmiş kanallara, anlık kazançlarına göre belirlenen bir limit değerine göre güç dağıtılır [3]. Yöntem bu haliyle OFDM sistemindeki frekans alanında dağıtım yapan BK tekniği ile özdeştir. 3. bölümde bu bölümde OFDM yöntemi için bulunan analitik sonuçlar, benzetim sonuçları ve geleneksel analiz sonuçları karşılaştırılacaktır. Ayrıca, MIMO sistemde BK ve uyarlamasız yöntemler PAPR ve kapasite açısından kıyaslanacaktır.

3. Benzetimler

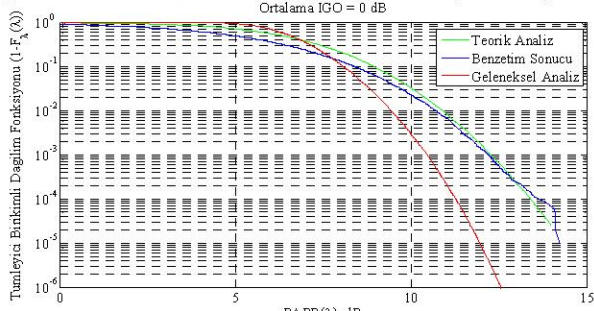
Bu bölümde değışik ortalama İGO değerleri için benzetim sonuçları verilecektir. OFDM'de kullanılan alt kanal sayısı N=64 olarak alınmış ve her alt kanalın birbirinden bağımsız Rayleigh sönümlenmeli kanal olduğu varsayılmıştır. 2. bölümdeki analizleri değerlendirmek için, kanal kapasitesini

sağlamak amacıyla alt kanallara dağıtılan semboller ortalaması sıfır, değıştisi bir olan karmaşık Gauss dağılımlı olarak seçilmiş ve 100.000 Monte Carlo simülasyonu ile dağılımlar oluşturulmuştur. Denklem (7)'de verilen dağılımı hesaplamak için de yine Monte Carlo simülasyonu yapılmıştır. Değişik λ değerleri için (7)'deki integral, simülasyon ile bulunmuş, bu değerler kullanılarak dağılım fonksiyonu çizilmiştir. Geleneksel analizdeki dağılımı hesaplamak içinse 2. bölümde çıkarılan (3) numaralı denklem kullanılmıştır.

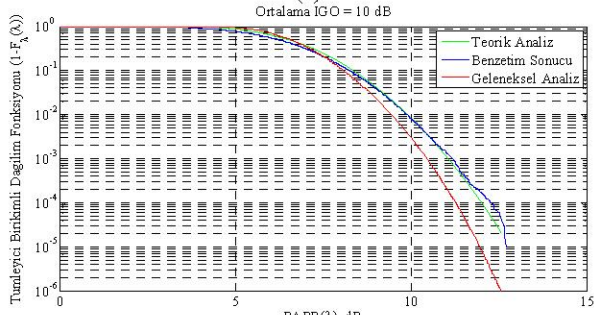
Şekil 1'de ortalama İGO değeri sırasıyla 0, 10, 30 dB olan kanallar için benzetim sonuçları, (7)'de bulunan sonuç ve geleneksel analiz sonucu (3) gösterilmektedir. Burada verilen ortalama İGO değeri bütün gücün tek bir alt kanala verildiği varsayılarak göz önüne alınmıştır.

Ayrıca Şekil-2'de tek boyutlu BK (sadece frekansta) ile iki boyutlu BK (frekans ve zamanda) teknikleri karşılaştırılmıştır.

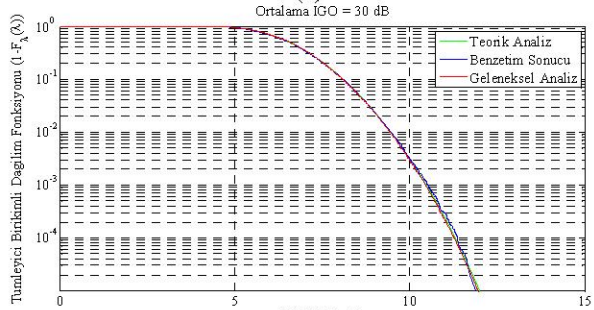
Şekil 3'te ise BK tekniğinin PAPR'a etkisini görmek adına, PAPR'ın 10^{-4} 'ten daha büyük olma ihtimali için BK uygulanmadığı durumlardan kaç dB daha büyük olduğu gösterilmektedir. Yükselteçteki "power back-off" değeri, 10^{-4} gibi bir olasılıkla gözlenen PAPR miktarına eşit alınmıştır.



(a)

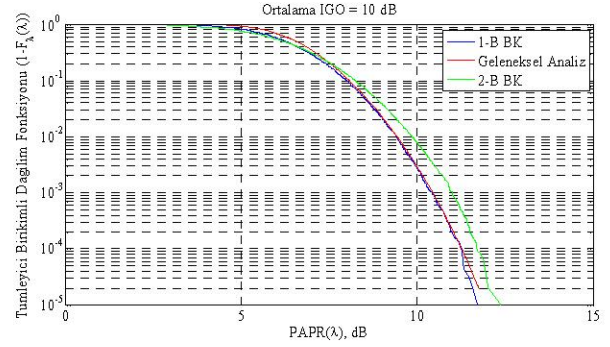


(b)

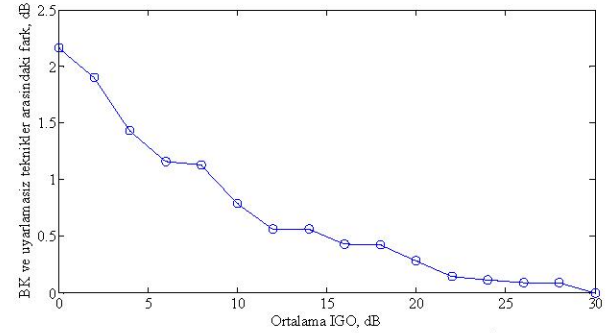


(c)

Şekil 1(a,b,c): İGO = 0, 10, 30 dB; $P(PAPR > \lambda_0)$ vs. $PAPR$



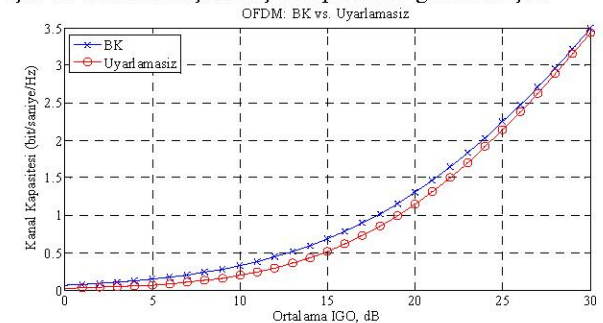
Şekil-2: $P(PAPR > \lambda_0)$ vs. $PAPR$



Şekil-3: BK'de PAPR kaybı vs. Ortalama İGO

Elde edilen benzetim sonuçları karşılaştırıldığında çok düşük İGO değerlerinde BK yönteminin PAPR üzerindeki negatif etkisi açıkça görülmektedir. Tek boyutlu BK uygulandığında ise Şekil-2'de görüldüğü gibi PAPR artışı gözlenmemektedir. Ortalama İGO büyüdükçe PAPR dağılımları BK tekniğinin uygulanmadığı durumdaki PAPR değerlerine doğru yakınsamaktadır. Zaten yüksek İGO durumunda BK tekniğinin fazla çalışmadığı, bütün kanallara hemen her zaman aynı gücün verildiği bilinmektedir. Ayrıca denklem (7)'de elde edilen analiz sonucunun benzetim sonuçlarıyla örtüştüğü görülmektedir. Benzetim sonuçları denklem (3)'te verilen dağılıma ise ancak İGO değerinin 15 dB' den büyük değerlerinde benzemektedir. Böylece (7)'de verilen dağılımın daha genel geçer olduğu görülmektedir. Şekil-3'te gösterilen sonuçlara göre ise İGO'nun 10 dB' den küçük değerleri için PAPR değerlerindeki kaybın 1 dB' den fazla olduğu görülmektedir. Bu da sistemde kullanılan güç yükseltecinin back-off değerinin eğer BK tekniği uygulanıyorsa 1 dB daha fazla olmasını gerektirir.

Şekil-4'te ise BK uygulandığı ve uygulanmadığı durumlar için bir alt kanal başına düşen kapasiteler gösterilmiştir.

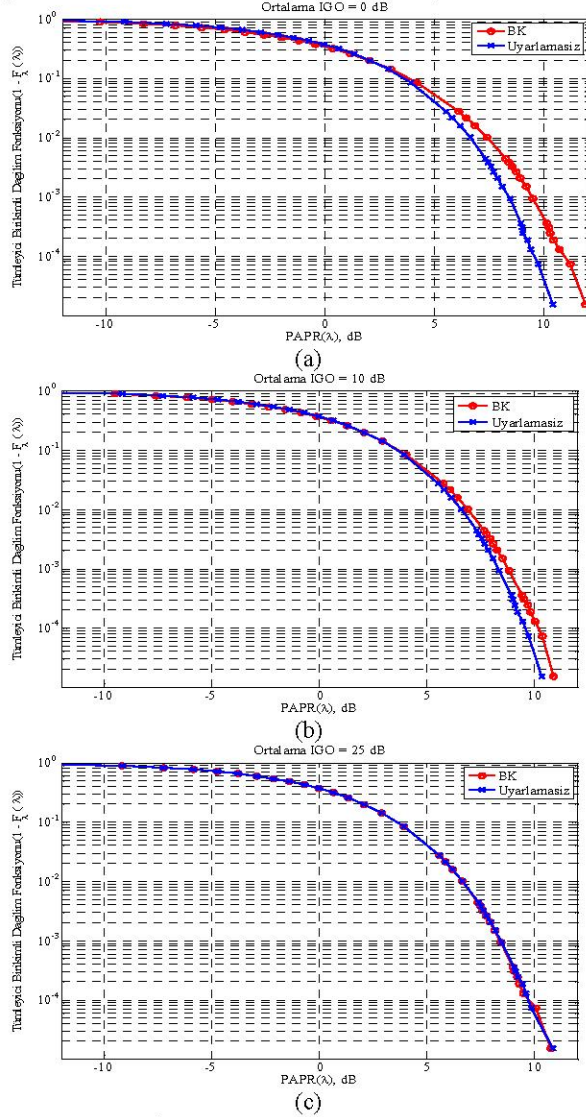


Şekil-4: Kanal Kapasitesi vs. Ortalama İGO

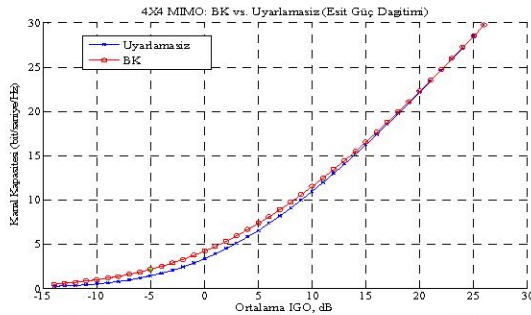
Şekil-4'e göre 0 dB etrafında kanal kapasitesinden 3.5-4 dB kazanç sağlanırken, Şekil-3'te görüldüğü üzere PAPR'dan 2

dB'lik bir kayıp söz konusudur. Bu durumda kapasitedeki gerçek kazancımız 1.5-2 dB kadar olmaktadır.

4X4 (4 alıcı ve 4 vericiden oluşan) MIMO sisteminin benzetim sonuçlarının verildiği Şekil-5'te sırasıyla 0, 10 ve 25 dB İGO değerleri için BK yöntemi ile eşit güç dağıtım yönteminin PAPR dağılımları karşılaştırılmıştır. İGO'nun 0 dB olduğu durumda, BK'nin PAPR yönünden 10^{-4} noktası için 1.5dB kaybı, özellikle bu İGO değerlerinde kapasite (Şekil-6) yönünden yaklaşık 2dB kazanç sağlaması nedeniyle yöntemin etkin kazancını 0.5 dB seviyesine çekmektedir.



Şekil-5(a,b,c): İGO = 0, 10, 25 dB; $P(PAPR > \lambda_0)$ vs. PAPR



Şekil-6: Kanal Kapasitesi vs. Ortalama İGO

Ayrıca, değişken hızlı-değişken güçlü MQAM benzetimleri yapılmış, benzer PAPR problemlerinin yaşandığı gözlenmiştir. Bu çalışmaların sonuçları burada verilmemiştir.

4. Sonuçlar

OFDM ve MIMO temelli haberleşme sistemlerinde BK tekniğinin uygulandığı ve uygulanmadığı durumlarda, bu yöntemlerde büyük bir sorun olan PAPR problemi incelenmiştir. BK tekniğinin OFDM için uygulandığı durumlarda PAPR'ın daha da kötü bir hal aldığı gözlenmiş ve PAPR'ın dağılımı için literatürde önerilmiş geleneksel analiz yönteminin BK yöntemli senaryoda çalışmadığı görülmüştür. Bu senaryo için yeni bir dağılım fonksiyonu önerilmiş ve bu dağılım benzetim sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Yeni önerilen dağılımın benzetim sonuçlarıyla örtüştüğü gösterilmiştir. Ortalama İGO değeri arttıkça beklendiği üzere PAPR değerlerinin BK tekniğinin uygulanmadığı durumdaki değerlerine doğru düştüğü gözlenmiştir. Zaten yüksek İGO değerlerinde kapasitedeki kazanç 0 dB'ye yaklaştığından, eğer BK yöntemiyle bir avantaj sağlanmak isteniyorsa bu durumda PAPR yönünden de bir dezavantajın oluştuğu sonucuna varılmıştır. Bu dezavantajın OFDM sistemi için 1.5-2 dB kadar ve aynı İGO değerlerinde kapasitedeki kazancın 3-3.5 dB değerlerinde olduğu görülmüştür. Bu durumda gerçek kazancın 1-2 dB olduğu sonucuna ulaşılmıştır. MIMO sistemde ise tek boyutlu BK tekniği uygulandığında, kapasitedeki kazancın 0dB İGO çevresinde 1.5-2dB; PAPR yönünden kaybın ise 1-1.5dB olması nedeniyle her iki sistemde de BK tekniği uygulandığında, düşük İGO değerlerinde (<10 dB) kullanılması gereken güç yükselticinin back-off değerinin artırılması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

5. Kaynakça

- [1] D. J. G. Mestdagh, P. M. P. Spruyt, "A Method to Reduce the Probability of Clipping in DMT-based Transceivers," *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 44, pp.1234-1238, Ekim 1996.
- [2] H. Ochiai, H. Imai, "On the distribution of the peak to average power ratio in OFDM signals," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 49, no. 2, pp. 282-289, Şubat 2001.
- [3] A. J. Goldsmith, *Wireless communications*, Cambridge University Press, 2005
- [4] M. S. Alouini, A. J. Goldsmith, "Capacity of Rayleigh fading channels under different adaptive transmission and diversity-combining techniques," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, pp.1165-1181, Temmuz 1999.
- [5] A. J. Goldsmith, P. P. Varaiya, "Capacity of fading channels with channel side information," *IEEE Trans. Inform. Theory.*, vol. 43, pp. 1986-1992, Kasım 1997
- [6] R. van Nee and A. de Wild, "Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM," *Proc. IEEE Vehicular Technology Conf. (VTC'98)*, Mayıs 1998, pp. 2072-2076.
- [7] Z. Shen, R.W. Heath, J.G. Andrews, B.L. Evans, "Comparison of space-time water-filling and spatial water-filling for MIMO fading channels," *IEEE Global Telecommunications Conference*, 2004, Vol: 1, Sayfa:431 - 435
- [8] G. Strang, "Linear Algebra and Its Applications", *Brooks Cole*; 4th edition

An Implementation-Based Comparison of Parallelized Turbo Decoders

Enes Erdin

TUBITAK Defense Industries Research and Development Institute

Digital Electronics Design Division, Ankara, Turkey

Email: eerdin@sage.tubitak.gov.tr

Çağlar Kılıcıoğlu

ASELSAN Electronics Industries Inc.

Communications Division, Ankara, Turkey

Email: ckilcioglu@aselsan.com.tr

Ali Özgür Yılmaz

Department of Electrical and Electronics Engineering

Middle East Technical University, Ankara, Turkey

Email: aoyilmaz@metu.edu.tr

Abstract

In this paper, we discuss the implementation of a low latency decoding algorithm for turbo codes and repeat accumulate codes and compare the implementation results in terms of maximum available clock speed, resource consumption, error correction performance, and the data (information bit) rate. In order to decrease the latency a parallelized decoder structure is introduced for these mentioned codes and the results are obtained by implementing the decoders on a field programmable gate array. The memory collision problem is avoided by using collision-free interleavers. Through a proposed quantization scheme and normalization approximations, computational issues are handled for overcoming the overflow and underflow issues in a fixed point arithmetic. Also, the effect of different implementation styles are observed.

Index Terms

Turbo codes, repeat accumulate codes, parallelized decoding scheme, BCJR, FPGA, metric quantization.

I. INTRODUCTION

In wireless communications, channel coding has an important role on enhancing the communication reliability and quality of service. Turbo codes, introduced in [1], have shown a great performance in additive white Gaussian (AWGN) channels. After the great achievement of the turbo structure, the same idea has been applied to different coding schemes. Turbo-like codes, explained in detail in [2], is the result of that idea. Following the improvements in wireless communications, high speed data transmission became a great necessity. Unfortunately, both turbo and turbo-like codes introduce huge decoding latencies since they operate in an iterative manner. To overcome that problem, numerous techniques have been applied.

Parallel processing at component decoders significantly reduce latency ([3] and references therein). Parallelization may also be imposed to the encoder side and a neat parallel decoder structure can be obtained as in [4]. In this structure, decoding and encoding time is reduced by the number of simultaneously operating blocks. Another technique is the optimization of the marginal a posteriori (MAP) decoders by applying an algorithm called “center to top” (CTT) [3]. In CTT, the forward and backward recursions of decoding run concurrently and decoding latency is halved at the expense of computational resources.

Our aim in this paper is to compare some parallelized turbo decoder architectures. The effects of design choices in FPGA implementation will be examined in regard to maximum clock speed, number of slices used, maximum data rate, and error rate performance. In particular, turbo codes and repeat-accumulate codes will be inspected in terms of the mentioned parameters.

The center-to-top algorithm is implemented for the log-MAP and max-log-MAP decoders. A fixed number of bits used for the metrics calculated in decoders. To circumvent the overflow and underflow problems, a simple yet effective quantization technique is proposed here as well. A memory collision-free interleaver is utilized in order to enable a full implementation without the memory access problems [5].

The paper consists of the following sections. In Section II, we present the mathematical expressions for the BCJR algorithm. Section III describes the idea of parallelization introduced for turbo codes. In Section IV, we explain the parallelized repeat-accumulate codes. In Section V, we provide the details of implementation and optimizations applied during the realization of the proposed systems on an FPGA board. Some numerical results are presented in Section VI and conclusion follows in Section VII.

II. BCJR ALGORITHM

The BCJR algorithm [6] is the most popular MAP decoding algorithm. It aims to minimize the bit error rate (BER) by maximizing the marginal a posteriori probabilities. In practice, the BCJR algorithm usually calculates the *a posteriori log-likelihood ratio* (*a posteriori L-value*) of an information bit. The reason of working in the log-domain will be clarified later in this section.

The log-likelihood ratio (LL) of an information bit u_l can be calculated as

$$LL(u_l) = \ln \left[\frac{p(u_l = +1|\mathbf{r})}{p(u_l = -1|\mathbf{r})} \right], \quad (1)$$

for a received signal sequence \mathbf{r} . Using this a posteriori L-value, a hard decision corresponding to u_l can be found by

$$\hat{u}_l = \begin{cases} +1, & LL(u_l) > 0 \\ -1, & LL(u_l) < 0 \end{cases}. \quad (2)$$

In the remaining part of this section the BCJR decoding algorithm steps will be explained without derivation. Detailed derivations can be found in [7].

The *forward metric*, denoted by α , at time l is defined as the probability of being at state s' at time l and having a received sequence $\mathbf{r}_{t < l}$ up to time l . Hence, the α metric is given as

$$\alpha_l = p(s_l = s', \mathbf{r}_{t < l}), \quad (3)$$

where s_l is the state at time l .

Similarly, the *backward metric*, denoted by β , at time l is defined as the probability of receiving a sequence $\mathbf{r}_{t > l}$ after time l given that the state at time l is s ,

$$\beta_l = p(\mathbf{r}_{t > l} | s_l = s). \quad (4)$$

As the third metric, the *branch metric* at time l is the probability of having a state transition from state s' to s at time l . It is denoted by γ and defined as

$$\gamma_l = p(s_{l+1} = s, \mathbf{r}_l | s_l = s'). \quad (5)$$

As a result of a few steps on the definitions of α and β , it can be seen that α values are updated by a forward recursion, whereas β values are updated by a backward recursion as given by

$$\alpha_{l+1}(s) = \sum_{s' \in \sigma_l} \gamma_l(s', s) \alpha_l(s'), \quad (6)$$

$$\beta_l(s') = \sum_{s \in \sigma_{l+1}} \gamma_l(s', s) \beta_{l+1}(s), \quad (7)$$

with initial conditions,

$$\alpha_0(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}, \quad (8a)$$

$$\beta_N(s) = \begin{cases} 1, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}. \quad (8b)$$

In (8b), N stands for the length of the input sequence¹. In (6) and (7), σ_l denotes the set of all possible states from which a transition is possible at time l and σ_{l+1} denotes the set of all possible states to which a transition is possible at time $l+1$. After having the initial conditions, α and β values can be calculated for the whole packet with the knowledge of γ values.

In an AWGN channel, branch metrics can be written as [7]

$$\gamma_l(s', s) = e^{u_l L_a(u_l)/2} e^{(L_c/2)(r_l \cdot v_l)}, \quad (9)$$

where $L_a(u_l)$ is the a priori bit probability², L_c is the channel reliability factor which is equal to $4E_s/N_0$, and v_l denotes the output vector consisting of data and parity observations for transition from state s' to s . The dot product $(r_l \cdot v_l)$ gives the correlation between the hypothesized transmitted and received vectors. Scaling this distance with L_c means that the observations are more reliable when SNR is high and a priori values are trusted more when SNR is low.

In order to perform the calculations given in (6), (7) and (9) in an easier way, these operations are usually realized in the logarithmic domain. The log-domain metric values are given as follows:

$$\gamma_l^*(s', s) = \ln \gamma_l(s', s) = u_l \frac{L_a(u_l)}{2} + \frac{L_c}{2} (r_l \cdot v_l), \quad (10)$$

$$\alpha_{l+1}^*(s) = \ln \alpha_{l+1}(s) = \ln \sum_{s' \in \sigma_l} e^{[\gamma_l^*(s', s) + \alpha_l^*(s')]}, \quad (11)$$

$$\beta_l^*(s') = \ln \beta_l(s') = \ln \sum_{s \in \sigma_{l+1}} e^{[\gamma_l^*(s', s) + \beta_{l+1}^*(s)]}. \quad (12)$$

It can easily be seen that both forward and backward metric calculations can be simplified more by defining a max^* operation

$$max^*(x, y) = \ln(e^x + e^y) = \max(x, y) + \ln(1 + e^{-|x-y|}), \quad (13)$$

where the second term is usually called the *correction term*.

¹It is assumed herein that termination bits are added at the end of each packet in the encoder side. So, the final state is known to be the zero-state.

²It must be noted that the L_a values for the termination bits are always 0.

By using the multiple argument form of the \max^* operation, (11) and (12) can be simplified as

$$\alpha_{l+1}^*(s) = \max_{s' \in \sigma_l}^* [\gamma_l^*(s', s) + \alpha_l^*(s')], \quad (14)$$

$$\beta_l^*(s') = \max_{s \in \sigma_{l+1}}^* [\gamma_l^*(s', s) + \beta_{l+1}^*(s)] \quad (15)$$

with the initial conditions,

$$\alpha_0^*(s) = \begin{cases} 0, & s = 0 \\ -\infty, & s \neq 0 \end{cases}, \quad (16a)$$

$$\beta_N^*(s) = \begin{cases} 0, & s = 0 \\ -\infty, & s \neq 0 \end{cases}. \quad (16b)$$

Figures 1 and 2 illustrate the use of \max^* operation in α and β computations, respectively.

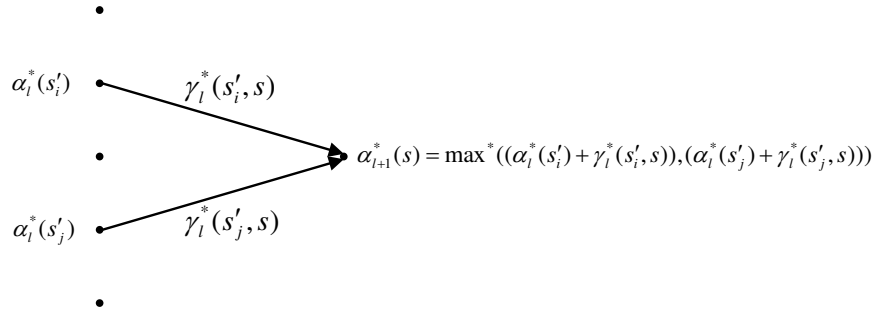


Fig. 1. Forward recursion in calculation of $\alpha_{l+1}^*(s)$

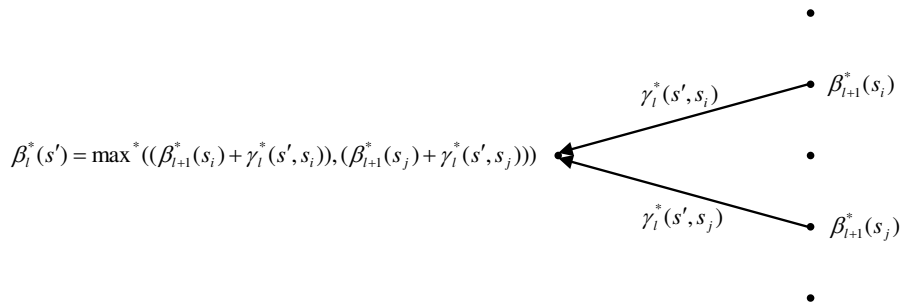


Fig. 2. Backward recursion in calculation of $\beta_l^*(s')$

By skipping the intermediate steps, the log-likelihood formula in (1) can be rewritten using the formulas described above as [7]

$$LL(u_l) = \ln \left\{ \sum_{(s',s) \in \Sigma_l^+} e^{[\alpha_l^*(s') + \gamma_l^*(s',s) + \beta_{l+1}^*(s)]} \right\} - \ln \left\{ \sum_{(s',s) \in \Sigma_l^-} e^{[\alpha_l^*(s') + \gamma_l^*(s',s) + \beta_{l+1}^*(s)]} \right\} \quad (17)$$

where Σ_l^+ and Σ_l^- are the sets of transitions with the information bit is 0 and 1, respectively.

III. PARALLEL DECODABLE TURBO CODES

Turbo codes were first introduced by Berrou et. al. [1] in 1993. A turbo code's (TC) encoder consists of two convolutional encoders operating in parallel. While the upper encoder ($Encoder_1$) encodes the information bits in the given order, the lower one ($Encoder_2$) operates on an interleaved version of the information bits. This encoder structure is shown in Figure 3.

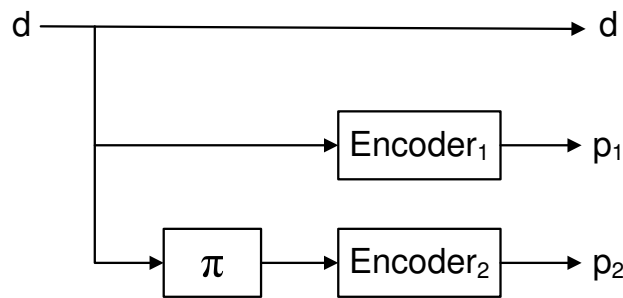


Fig. 3. TC encoder structure where encoders are mostly convolutional encoders

A TC decoder consists of two MAP decoders operating iteratively. Computed LL values out of *Decoder 1* are used in *Decoder 2*, and vice versa. By subtracting the input LL values from the computed ones, the *extrinsic information* is obtained, which is the actual estimation of that decoding step [1].

However, using an iterative decoding scheme may suffer from huge decoding latencies and degrade the transmission rate in real time operations. To overcome this drawback in a simple way, parallelization is introduced on both the encoder and decoder sides [4] as shown in Figures 5 and 6. In the parallel decodable turbo code (PDTC) decoder structure, there exist decoder clusters instead of single component decoders. These two clusters operate iteratively, while the decoders in each cluster operate simultaneously and independently. This architecture decreases the decoding latency by N , where N is the number of

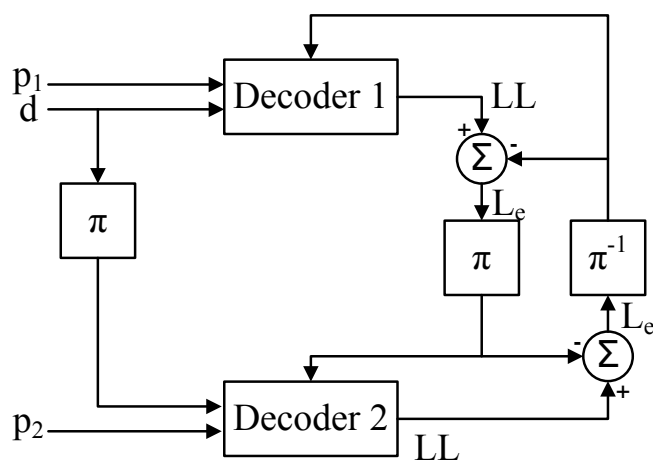


Fig. 4. TC decoder structure with the usage of extrinsic information

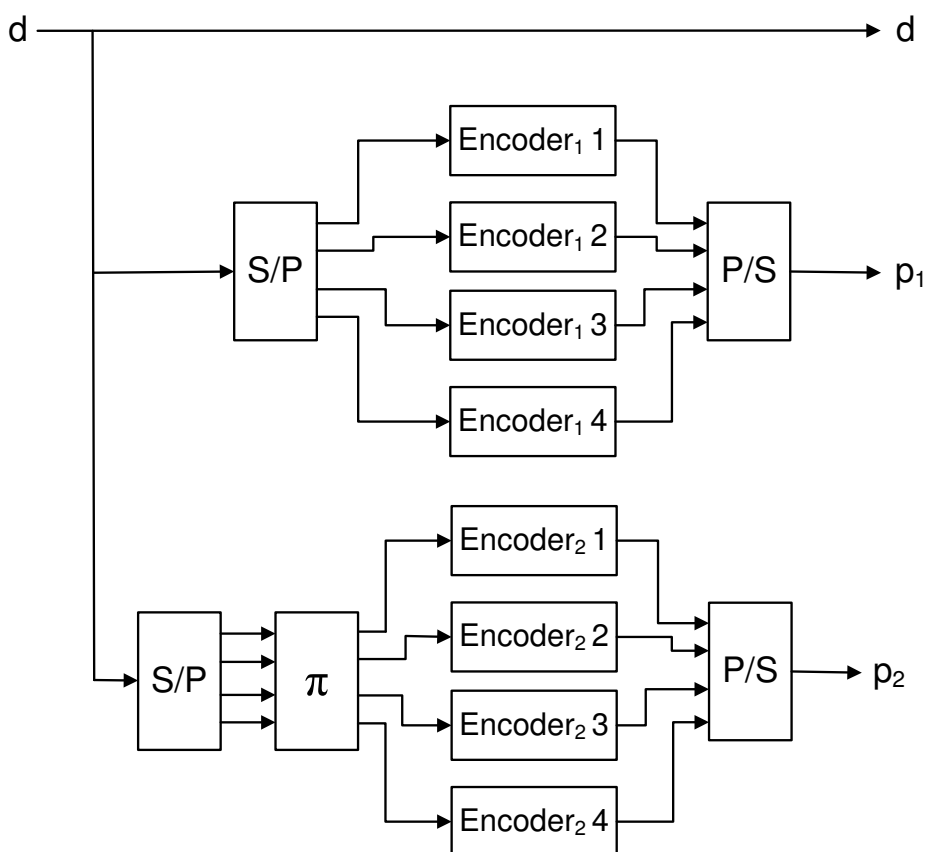


Fig. 5. PDTC encoder structure

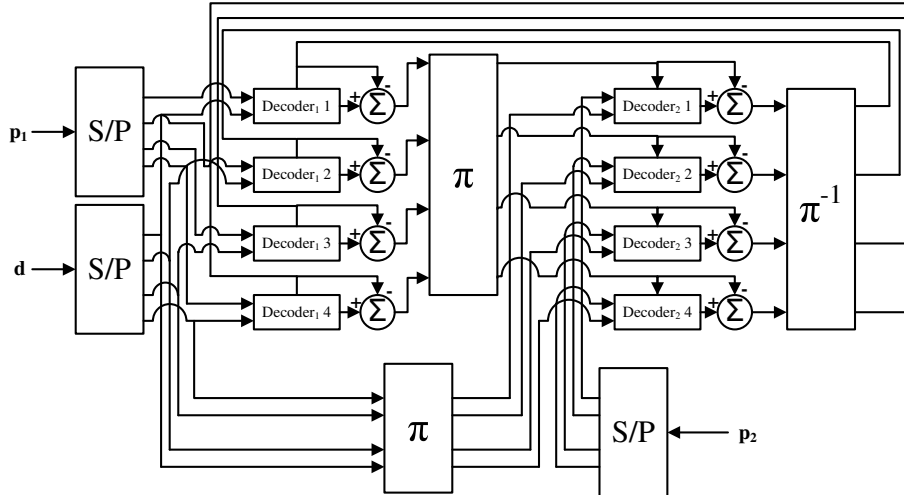


Fig. 6. PDTC decoder structure

parallel decoders in a cluster³. While TC decoders operate on a block of K information bits, each decoder in PDTC operates on K/N information bits in parallel.

To implement this parallel structure, an architecture suitable for parallel processing is needed. For that reason, FPGA is chosen to investigate the PDTC performance. In our studies, we have used 4 parallel decoders in each cluster without loss of generality.

IV. PARALLEL DECODABLE REPEAT ACCUMULATE CODES

Repeat Accumulate (RA) codes are in the class of turbo-like codes. After the invention of turbo codes, Divsalar et. al [2] applied the random-like interleaver structure to a set of coding schemes. Repeat accumulate codes are obtained by the concatenation of a repetition code encoder and a 2-state convolutional encoder. The decoding latency issue surfaces also in RA codes and hence the parallelization idea may be applied. The parallel concatenated repeaters repeat the uncoded data bits L times and forward the results to the rate-1 convolutional encoders after passing through an interleaver. Hence, the overall rate of the encoder becomes $1/L$ which is the same as that of the repetition encoder.

Although factor-graph based decoding is usually preferred for RA codes, we will utilize convolutional decoders along with repetition decoders so that similar architectures will be compared. In the decoding

³The number of decoders in each cluster may be different in general.

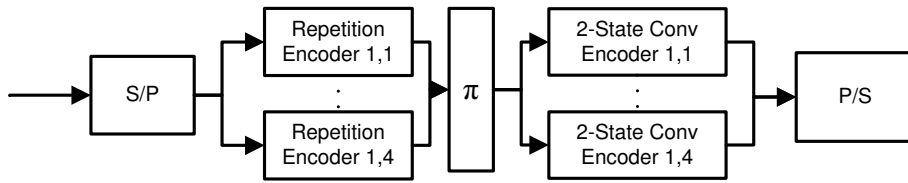


Fig. 7. Parallel Decodable Repeat Accumulate Code encoder structure

process, decoders operating in parallel are utilized in order to decrease latency as in PDTC decoders. The parallelized decoder structure is shown in Figure 8.

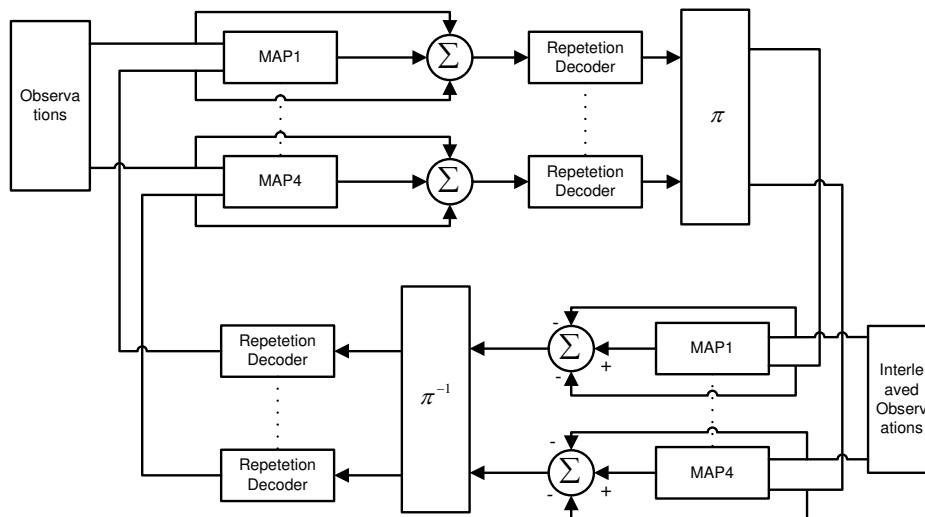


Fig. 8. Parallel Decodable Repeat Accumulate Code decoder structure

V. FPGA IMPLEMENTATION

We have implemented our system on a Xilinx ML402 Virtex-4 SX Evaluation Platform and produced test results by working on it. This platform has a medium sized FPGA with number of available slices 15000. Its architecture enables building parallel processing blocks. However, implementing a soft-in soft-out (SISO) decoder on an FPGA inherently faces some problems since it has limited resources which do not let one easily use floating-point arithmetic or large fixed-point arithmetic. Throughout this section,

we will describe our solutions to the problems and optimizations we have applied. BPSK modulation is assumed throughout and other constellations can be similarly applied.

A. The Center to Top Algorithm

When the metric calculations in (11) and (12) are considered, it can be seen that the two operations are independent of each other. This gives the ability to calculate α and β metrics simultaneously assuming that all of the received values are available for branch metric calculations. This assumption is valid for the iterative decoding schemes (like of turbo codes as in our case) since decoding process can begin after receiving the whole packet. By this algorithm, the decoding time can be halved. Consider a decoder running on 70 information bits. At time 0 the metric values are initialized as defined in (16a) and (16b). α^* and β^* values are calculated without computing any LL value up to time 35. At time 35, both of α_{35}^* , β_{36}^* and α_{34}^* , β_{35}^* values are available together with the branch metrics for the time, γ_{35}^* and γ_{34}^* . So,

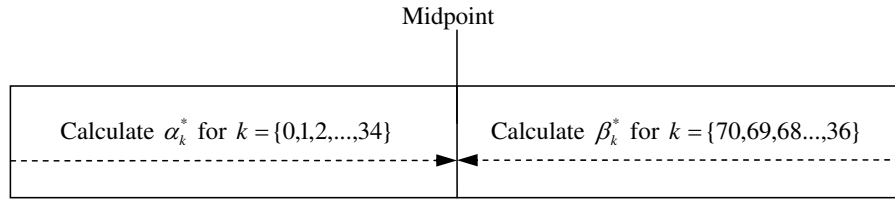


Fig. 9. α^* and β^* values are updated with no LL computation upto the midpoint

$LL(u_{35})$ and $LL(u_{34})$ are computed and given out. That process, starting from the center of the frame,

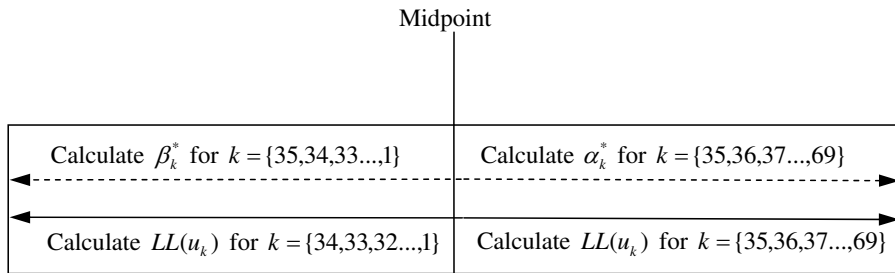


Fig. 10. While α^* and β^* values are updated, LL values are being computed and given out at the same time

continues to the end and simultaneously to the beginning of the frame. That is why this algorithm is

named as “center to top” [3]. It must be noted that α and β metric values do not have to be written to memory after the midpoint, since LL values are calculated simultaneously. So, not only the decoding time but also the memory usage is halved by this algorithm.

B. Memory Collision-Free Interleavers

Block RAMs are the most widely used storage elements on FPGA projects. Starting from that fact, we have used block RAMs to store observations and calculated LL values. However, using RAMs introduce some difficulties because of their limited accessibility. Even in the dual port block RAMs, there are only two available ports to read or write at the same time.

As described in Section III, each decoder in a cluster operate in parallel to each other. This means that each receive the observation values and input LL values at the same time instants. Since block RAMs storing these values can serve to only one decoder for the desired address, 4 parallel decoders must be assigned to work on different RAMs. If two (or more) decoders try to work on (especially for “writing” operation) the same RAM, there will occur a memory collision. To prevent this problem, memory collision-free interleavers of [5] have been used.

C. Observation Quantization

In the conventional mathematical model, a $+1$ or -1 is assumed to be transmitted for BPSK, an appropriate noise is added and calculations are carried on with these assignments. An AWGN channel for BPSK modulation can be modeled as

$$y_k = h_k x_k + n_k, \quad (18)$$

for any time instant k where y_k is the received symbol, h_k is the channel gain ($\sqrt{E_s}$ in an AWGN channel with E_s being the signal energy), x_k is the transmitted bit ($x_k = \mp 1$) and n_k is a circularly symmetric complex Gaussian random variable with mean 0 and variance N_0 .

The conditional probability of a received symbol y_k can be expressed as

$$f(y_k|h_k, x) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{|y_k - h_k x|^2}{N_0}}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \ln(f(y_k|h_k, x)) &= -\ln(\pi N_0) - \frac{|y_k|^2}{N_0} - \frac{|h_k|^2 |x_k|^2}{N_0} \\ &\quad + \frac{2}{N_0} \Re\{y_k h_k^* x^*\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$= C + \frac{2}{N_0} \Re\{y_k h_k^* x^*\}, \quad (21)$$

where C is a constant and has no effect on the MAP calculations. Hence, the function can be redefined as

$$\ln(f(y_k|h_k, x)) \doteq \frac{2}{N_0} \Re\{y_k h_k^* x^*\}, \quad (22)$$

where \doteq denotes equality with a constant.

As we use fixed-point arithmetic, the metric values in the BCJR algorithm are represented by a fixed number of bits, K . However, the decoder is not guaranteed to work properly with this representation unless the channel observations (input of the decoder) are carefully quantized. For that reason, we need to quantize observations by a quantization factor, q , such that the represented observations lay in a set S smaller than the set of numbers represented by K bits. After that, the quantized observation probability for $x = 1$ is used in decoding with

$$Q_k = Q(\ln(f(y_k|h_k, x = 1))) = \left\lfloor \frac{2/N_0 \Re(y_k h_k^*)}{q} \right\rfloor. \quad (23)$$

If we apply the AWGN channel model given in (18) on (23) for a BPSK modulation, we get

$$Q_k = \left\lfloor \frac{2\sqrt{E_s}/N_0 \Re\{y_k\}}{q} \right\rfloor, \quad (24)$$

$$= \left\lfloor \frac{2\sqrt{E_s}/N_0 \Re\{(\sqrt{E_s} + n_k)\}}{q} \right\rfloor, \quad (25)$$

$$= \left\lfloor \frac{2E_s}{N_0 q} + \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0 q} n_I \right\rfloor, \quad (26)$$

where n_I is the real part of the complex Gaussian noise with mean 0 and variance $N_0/2$.

Recalling that a finite number of bits are used in representing numbers, the question is how to choose q . If q is chosen to be very small, Q_k 's will be large and the formulas such as (17) will not function properly due to overflow. If q is chosen to be very large, then the difference in noise values of the observations will not be properly passed to the decoder and then soft decoding will suffer. We resolve the problem above by the compromise that the packet is normalized with respect to its absolute maximum symbol value, $ObsMax$. If we represent that value with a predefined value, $NormMax$ (absolute maximum value after the quantization is performed) then we get a set $S = \{-NormMax, -NormMax+1, \dots, NormMax-1, NormMax\}$ for decoder's input sequence. This information can be combined with a well known property of the Gaussian distribution that, in a normally distributed set with mean μ and variance σ^2 , obtaining a number p such that $|p| > \mu + 3\sigma$ has a probability of about 1/1000. To be able to apply that

property, we need to identify the mean and variance of the random variable $A = \frac{2E_s}{N_0q} + \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0q}n_I$.

$$E\{A\} = \frac{2E_s}{N_0q} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0q}\sigma_{n_I} = \frac{2\sqrt{E_s}}{N_0q}\frac{\sqrt{N_0}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2E_s}{N_0q}}\frac{1}{\sqrt{q}} \\ &= \frac{\sqrt{E\{A\}}}{\sqrt{q}} \end{aligned} \quad (28)$$

After the quantization of the packet, it is known that symbols greater than $+NormMax$ or smaller than $-NormMax$ can occur in the packet with a small probability. If we neglect the small probability of $1/1000$, we can define $NormMax$ as

$$NormMax = E\{A\} + 3\sigma_A \quad (29)$$

$$= E\{A\} + 3\frac{\sqrt{E\{A\}}}{\sqrt{q}} \quad (30)$$

By replacing (27) in (30), we get

$$NormMax = \frac{2E_s}{N_0q} + 3\sqrt{\frac{2E_s}{N_0q}}\frac{1}{\sqrt{q}}. \quad (31)$$

By solving this equation, q can be calculated as

$$q = \frac{\frac{2E_s}{N_0} + 3\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}}{NormMax}. \quad (32)$$

As it is obvious in (32), q is a function of the SNR (E_s/N_0) for a selected $NormMax$ value. Instead of calculating the q value for each packet, a look-up table (LUT) can be used. In our design, we have used a relatively large LUT that stores the q values in 8 bits, 3 for integer part and 5 for the decimal part. That gives a precision of $1/2^5$ and yields a satisfactory performance.

D. max^* Approximation

The correction term in max^* operation poses a trouble when it is needed to be expressed in fixed-point arithmetic. It is not possible to easily realize the \ln function fully in such a system. For that reason, some approximations must be made to implement the max^* operation. There are basically two approximations in the literature. These two different approaches result in $log-MAP$ with tables and $max-log-MAP$.

If the decoder is a $log-MAP$ decoder then max^* calculation is a more difficult subject, because the correction term, $\ln(1 + e^{(-|x-y|)})$, should be calculated. Since the hardware implementation of such a

function is complicated, this term is handled by construction of a LUT in practice. As described in the previous part, the observations are in quantized form, therefore LUT values also have to be quantized accordingly. That is, if the inputs to the max^* function are in a quantized fashion, the other terms generated in the function also should be quantized in parallel with the inputs. The LUT construction function is,

$$LUT(i) = \left\lfloor \frac{\ln(1 + e^{-iq})}{q} \right\rfloor \quad (33)$$

where i is the absolute value of the difference of the inputs of the max^* function. The LUT sizes are usually quite small (around 5-6 entries) with reasonable $NormMax$ values.

In a max-log-MAP decoder, the correction term is neglected, that is max^* operation is the same with ordinary max operation. So, the quantization term, q , is useless for this method. In other words, it can be said that decoder does not need an exact SNR estimation to operate properly. Studies in [8] and [9] have shown that max-log-MAP decoders work without any need on SNR estimation.

E. Fixed-Point Summation and Subtraction

Using a restricted set ($[-(2^{K-1} - 1), 2^{K-1} - 1]$ where K is the metric size) to represent metric values forces us to introduce new summation and subtraction operations with the closure property in the given set. The operation *clipsum*, denoted by \oplus , replaces with the regular summation. Under the assumption of $plus_inf = 2^{K-1} - 1$ and $minus_inf = -plus_inf$,

$$a \oplus b = \begin{cases} plus_inf, & a \geq plus_inf \text{ or } b \geq plus_inf \\ minus_inf, & a \leq minus_inf \text{ or } b \leq minus_inf \\ plus_inf, & a + b \geq plus_inf \\ minus_inf, & a + b \leq minus_inf \\ a + b, & \text{else.} \end{cases} \quad (34)$$

Similarly, a new subtraction operation *clipsubtract* (\ominus) is introduced as

$$a \ominus b = a \oplus (-b). \quad (35)$$

F. Node (α, β) Metric Normalization

In (6) and (7) it has been shown that α and β values are updated in a recursive manner. As the computations go further, these metric values may overflow ($> plus_inf$) or underflow ($< minus_inf$). To solve this problem, α and β values are normalized at each trellis step. After each forward recursion, maximum of the newly generated forward metric values is subtracted from these values and α metrics

are updated with these normalized values. The same is applied to the β metrics. After the normalization process, we get a maximum value of 0 for α and β metrics at each time instant and prevent underflow and overflow cases. Another approach to node metric normalization can be found in [10].

G. Memory Complexity

Before the decoding process, the observations have to be stored in different memories in order to use them in the parallel decoder structure. For that reason, a memory structure is defined. That structure differs for PDTC and PDRAC decoders.

1) *PDTC memory structure*: If there are N decoders operating in parallel, then there must be N independent memory blocks for data bit observations (d in Figure 6). Accordingly, N memory blocks are used for parity observations and N memory blocks for interleaved parity observations (p_1 and p_2 in Figure 6, respectively). In addition to these, N memory blocks are also defined for interleaver (memory collision-free interleavers) tables.

2) *PDRAC memory structure*: For N parallel MAP decoders, the observations are stored into N memory blocks. Different than the PDTC case, there are no data observations. Similar to the PDTC case, N memory blocks are used to store the interleaver tables.

Log-likelihood values are stored in RAMs, too. Each decoder needs an a priori probability (L_a) and generates log-likelihood ratio (LL) and *extrinsic information* (L_e), where in our design L_e 's are calculated within the MAP decoder⁴. These L_e and L_a notations are eligible for the decoders running in the first cluster. In the second cluster, decoders use L_e values as L_a and generates the L_e values which will be used as L_a in the next iteration. The word "cluster" is used just for imaging which defines half of an iteration. In fact, decoders only change their state to switch the input and output log-likelihood ratios (L_a and L_e). Since LL values are final results, they are updated (overwritten) after each *cluster* run. That structure brings out a memory usage of $3N$ memory blocks for log-likelihood ratio storage in both PDTC and PDRAC decoders.

Summing up all yields a usage of $7N$ number of memory blocks for PDTC decoder and $5N$ for PDRAC decoder.

⁴The extrinsic information is generated inside the decoder to decrease the system complexity at the expense of maximum clock speed.

VI. RESULTS

In this section, the effects of the implementation choices will be shown and the performances of parallelized decoder structures will be compared.

The choice for the number $NormMax$ (explained in Section V-C) affects the performance of decoder such that choosing a high value results in saturation in metric calculations while choosing a small value causes a loss in representing observation values. This effect on performance has been shown in Figures 11, 12, and 13. The figures are obtained by observing 6000 packets with each containing 160 information bits for $E_b/N_0 = 2.6$ dB. The optimum $NormMax$ values for each K and decoding algorithm can be obtained from these figures. Also, in the figures it can be seen that as the K value increases, so does the number of available optimum $NormMax$ values.

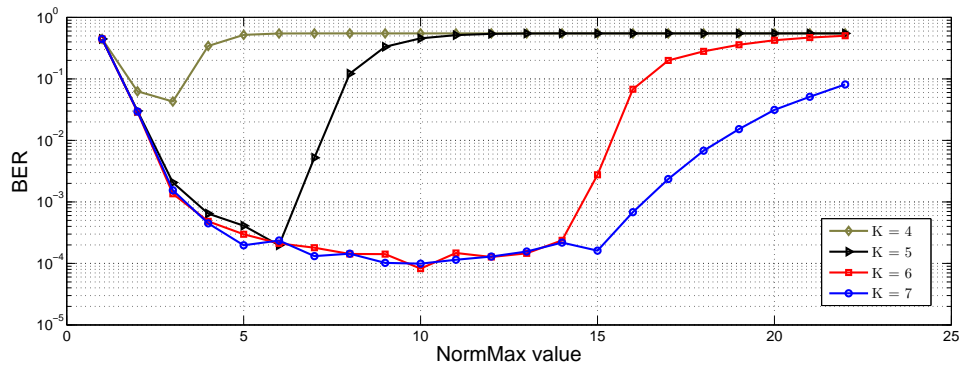


Fig. 11. The effect of $NormMax$ value on a rate-1/3 PDTC decoder using the max-log-MAP algorithm.

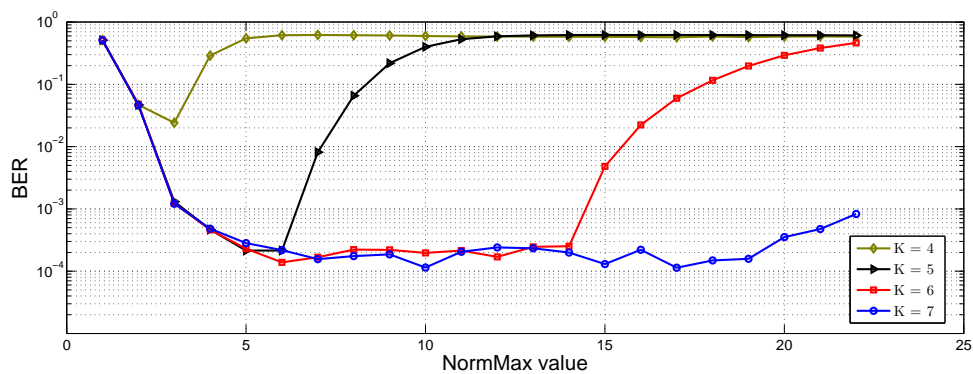


Fig. 12. The effect of $NormMax$ value on a rate-1/3 PDTC decoder using the log-MAP algorithm.

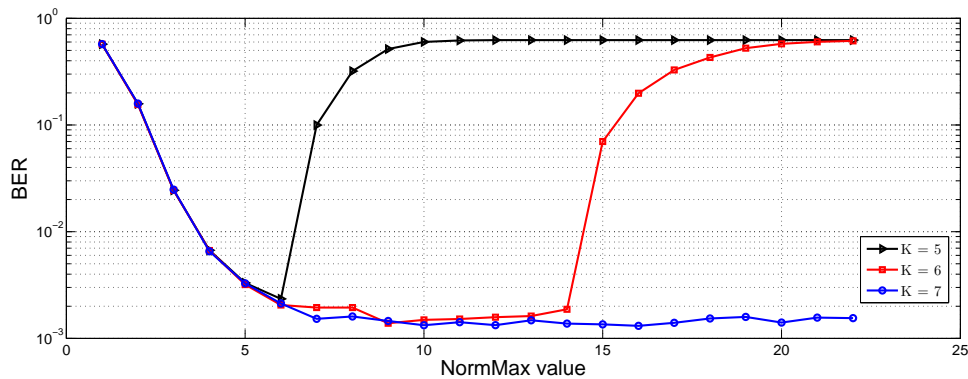


Fig. 13. The effect of $NormMax$ value on a rate-1/3 PDRAC decoder.

Another parameter that affects the performance of the decoders is the selection of the K value. Choosing a large K results in a better performance while at the same time causes the decoder to consume more resources on FPGA and to work on a lower clock speed. So, there is a tradeoff between the performance, resource consumption, and the speed. The performance results are given in Figures 14, 15, and 16. It must be noted that these comparisons are made by using the best resulting $NormMax$ values for each decoder structure and K value after 2000 runs on a 512-bit packet with a fixed iteration number (4 for PDTCs and 8 for PDRAC).

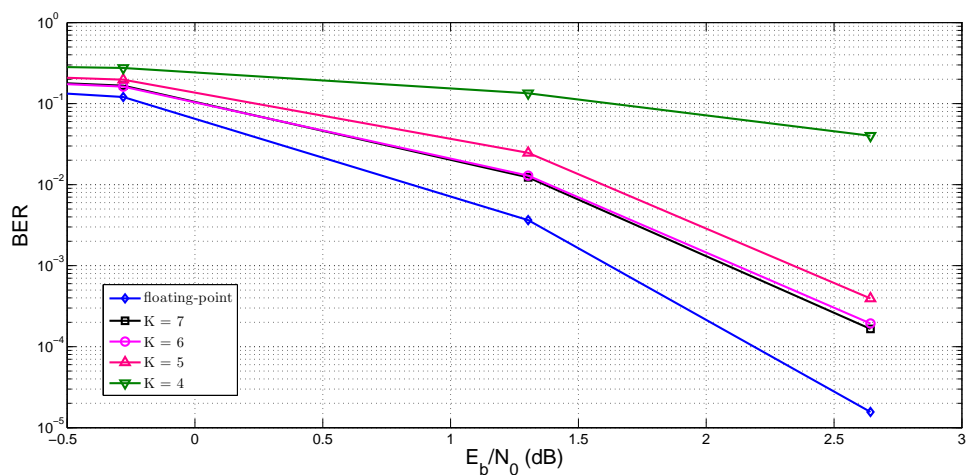


Fig. 14. Performance of PDTC decoder with max-log-MAP algorithm.

The three figures above (Figures 14, 15 and 16) show that as K increases, the performances approach to the floating-point case. That is why, the selection of the K value in a design must be done carefully

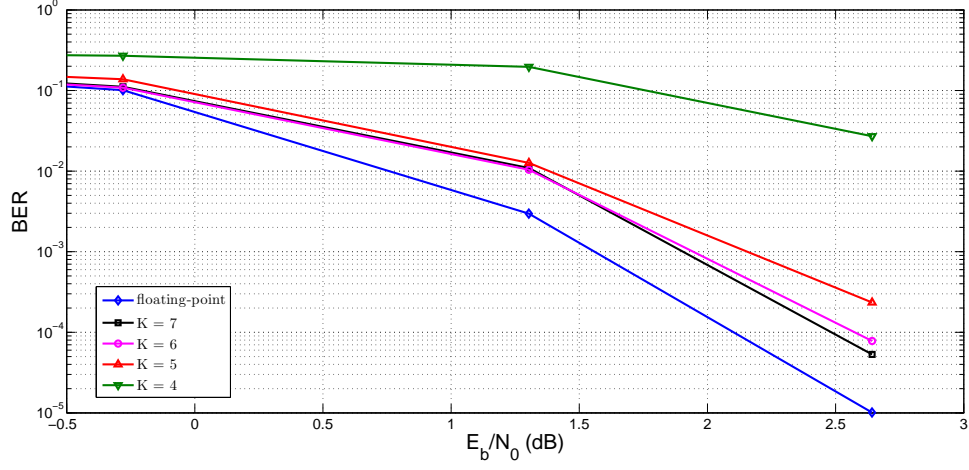


Fig. 15. Performance of PDTC decoder with log-MAP algorithm.

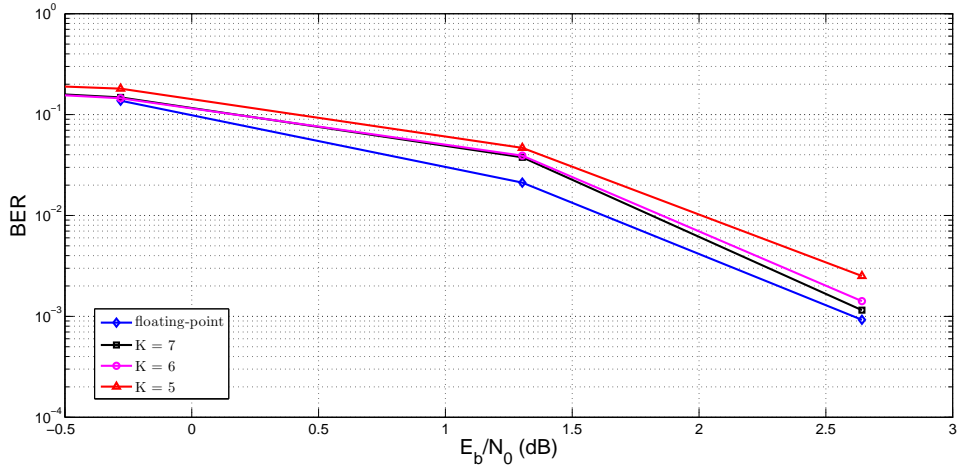


Fig. 16. Performance of PDRAC decoder.

to match the BER requirement. In these figures, it can be seen that the performance increase is slowed down after $K = 6$. So, the choice of K as 6 seems to be a good choice for these decoder structures. That brings a performance off only by 0.5 dB from the floating-point for the PDTC decoders and 0.3 dB for the PDRAC decoder.

In this study, we have used two different architectures for implementing PDTC decoders, namely *Architecture-A* and *Architecture-B*. The difference between these two architectures can be explained as follows. *Architecture-A* uses combinatorial logic operations heavily in the BCJR decoder implementation.

All the numerical calculations are carried on in one clock cycle, i.e., α/β calculation, α/β normalization, α , β , γ summation and LL computations are done in one clock cycle. Decoding a 42-bit length sequence (42 data bits, 42 parity bits) takes 42 cycles on *Architecture-A*. On the other hand, *Architecture-B* uses a pipelining structure. Independent computations are pipelined, i.e., α/β calculation is done in one cycle, α/β normalization is done in the next clock cycle, α , β , γ summation is done in one cycle and LL values are calculated in one clock cycle. This architecture aims to divide the combinatorial logic operations into smaller pipelined blocks. However, this approach causes the BCJR decoder to decode with an extra latency of 4 clock cycles. So, by this architecture decoding a 42-bit length sequence takes 46 cycles. The resource consumptions for these two architectures are given in Tables I and II together with the speed considerations for different K values. In Table III, the synthesis results for PDRAC decoder is given⁵.

TABLE I
SYNTHESIS RESULTS OF PDTC DECODER WITH MAX-LOG-MAP ALGORITHM

metric size (bits)	Slices used	Slice usage (%)	Max. clock speed (MHz)
Architecture-A			
4	6070	39	50.383
5	6104	39	49.873
6	6570	42	47.645
7	7174	46	43.841
Architecture-B			
4	6347	41	87.253
5	6501	42	86.963
6	6994	45	86.949
7	7537	49	85.704

The distinct difference between log-MAP and max-log-MAP algorithms is that the former uses a LUT. As described in Section V-C, LUT is generated by using the q value. In our design RA code uses the log-MAP algorithm. That is why, the q calculating circuit is included in these two codes and it consumes

⁵Due to the speed advantage of *Architecture-B*, it is used on PDRAC decoder implementation.

TABLE II
SYNTHESIS RESULTS OF PDTC DECODER WITH LOG-MAP ALGORITHM

metric size (bits)	Slices used	Slice usage (%)	Max. clock speed (MHz)
Architecture-A			
5	8179	53	36.288
6	10628	69	31.522
7	11309	73	31.352
Architecture-B			
5	8663	56	65.557
6	10595	68	60.070
7	10807	70	55.491

TABLE III
SYNTHESIS RESULTS OF PDRAC DECODER

metric size (bits)	Slices used	Slice usage (%)	Max. clock speed (MHz)
5	5019	32	68.755
6	6046	39	68.180
7	6219	40	64.218

some additional resources. These extra resources are included in the results given in Tables II and III. It is obvious that LUT insertion degrades the design performance in terms of both resource usage and maximum clock speed. The reason of that can be explained as follows. LUT can be thought as a large multiplexer which is controlled by the q value and the inputs of the max^* operation. Additionally the results of the LUT have to be added in the max^* operation in order that max^* result can be ready at the next clock cycle, that is, a combinatorially operating large multiplexer degrades the resource usage and combinatorial addition degrades the maximum operating frequency. Also, it must be noted that the slice usage increases almost linearly with N .

Large decoding latencies in turbo and turbo-like codes are told to be the drawback of these algorithms. By making them operate in parallel, a decrease in their decoding latencies is expected. To observe that decrease, decoding latencies are better to give in a formula. The decoding latency, τ , for our parallel decodable turbo code decoder structure (both log-MAP and max-log-MAP) is

$$\tau = \frac{D}{N}2I, \text{ for } \textit{Architecture-A} \text{ and} \quad (36)$$

$$\tau = \left(\frac{D}{N} + 6\right)2I, \text{ for } \textit{Architecture-B}, \quad (37)$$

where D is the number of information (data) bits in the packet, N is the number of parallel decoders in a cluster and I is the iteration number. The $\frac{D}{N}$ term is the decoding latency of a BCJR decoder operating with the CTT algorithm. The addition by 6 in (37) is the result of the latency in BCJR (4) and interleaver structure (2) due to pipelining in *Architecture-B*. The reason of multiplying by $2I$ is that in each iteration the BCJR decoders run twice, one for the uninterleaved form of data and one for the interleaved.

Similarly for PDRAC decoders the decoding latency can be expressed as

$$\tau = \left(\frac{D}{NR} + \frac{D}{2NR} + 6\right)I \quad (38)$$

$$= \left(\frac{3D}{2NR} + 6\right)I \quad (39)$$

where R is the code rate. The term $\frac{D}{NR}$ in (38) is the latency introduced by the BCJR decoders and the term $\frac{D}{2NR}$ is the latency introduced by the accumulate decoders. Although not performed here, different number of parallelized blocks for BCJR and accumulate decoders can be utilized for optimization purposes.

During the decoding latency calculations, we have assumed that a *ping-pong* buffer structure is used in the receiver side. While a packet is being received, the observations are stored in a memory in the quantized form. After that, *ping* memories are filled as described in Section V-G for d , p_1 and p_2 observations and decoders begin to run. If another packet arrives during the decoding process, the d , p_1 and p_2 observations are stored in *pong* memories. In this case, the decoding process is not affected by the reception of the new packet. When the decoders finish their job, they operate on the *pong* memories and this time the *ping* memories are free for another packet storage. This structure doubles the memory usage in the system for storing observations.

At this point, we can make a final comparison between all the proposed structures in terms of maximum available data rates. If we denote the data rate by v , we can formulate it as,

$$v = \frac{D \times f}{\tau}, \quad (40)$$

where f is the maximum available frequency and τ is the decoding latency. To find the exact data rate, we need to decide on the architecture, number of data bits in a packet (D), metric representation width (K), iteration number (I), the number of constituent decoders in a cluster (N), and the code rate (R). In data rate calculation, the f value can be obtained by checking the Tables I, II, and III for the selected K value. Similarly, τ value can be obtained from (36), (37), or (39) for the decided structure and architecture. After observing the BER performances and FPGA resource usage, we have decided to use $K = 6$ for log-MAP and max-log-MAP PDTC decoders with both architectures and $K = 7$ for PDRAC decoder. Herein we used packets containing 160 data bits, that is $D = 160$. Using the Tables I, II, III and Figures 14, 15, 16 with the design choices listed above, we can generate Table IV that gives all the information and comparisons needed.

TABLE IV
COMPARISON OF THE PROPOSED DECODER STRUCTURES

Decoder & Architecture	N	I	K (bits)	Clock speed (MHz)	SNR for $BER = 10^{-3}$	Bit Rate (Mbps)
PDTC with max-log-MAP in <i>Architecture-A</i>	8	4	6	48	~ 2.2 dB	48
PDTC with max-log-MAP in <i>Architecture-B</i>	8	4	6	80	~ 2.2 dB	61.54
PDTC with log-MAP in <i>Architecture-A</i>	6	4	6	30	~ 2.0 dB	22.5
PDTC with log-MAP in <i>Architecture-B</i>	6	4	6	60	~ 2.0 dB	36.73
PDRAC with log-MAP	10	8	7	60	~ 2.7 dB	15.4

As seen in Table IV, N values differ for each decoder structure. The idea of using different N values can be explained as follows. It is remarked before that the resource consumption increases approximately linearly as N increases. Working on that assumption, maximum available N value is calculated for the usage of the all FPGA resources. In [11], it is stated that increasing the N value does not affect the performance of the PDTC decoder. By these provided results, it is not hard to say that a PDTC decoder with log-MAP architecture in *Architecture-B* is the best in terms of error performance. However, max-log-MAP decoder may be preferred in terms of resource consumption and data rate but with a 0.2 dB performance degradation. On the other hand, PDRAC decoder structure with parallelised MAP decoders does not present a satisfactory performance among the proposed architectures.

VII. CONCLUSION

Decoding latency is an important issue in iterative decoding algorithms which may be overcome with parallelization. In this paper we implemented a parallelized encoder/decoder structure for turbo and repeat-accumulate codes. A new and simple metric quantization scheme was proposed and used to avoid problems of decoding in fixed point arithmetic. Combinatorial logic and pipelining based architectures were separately implemented for comparison purposes. Comparisons were made in terms of error performance, FPGA resource usage, FPGA clock speed, and data rate. Max-log-MAP with pipelining provided the best result when all issues are taken into account. PDRAC does not perform well in comparison to any of the turbo decoders at the same data rate.

REFERENCES

- [1] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes," in *Proc. ICC'93*, pp. 1064–1070, May 1993.
- [2] D. Divsalar, H. Jin, and R. J. McEliece, "Coding theorems for "turbo-like" codes," *Proc. 36th Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing*, pp. 201–210, September 1998.
- [3] J. Jung, I. Lee, D. Choi, J. Jeong, K. Kim, E. Choi, and D. Oh, "Design and architecture of low-latency high-speed turbo decoders," *ETRI Journal*, vol. 27, no. 5, pp. 525–532, October 2005.
- [4] O. Gazi and A. Özgür Yılmaz, "Fast decodable turbo codes," *IEEE Communication Letters*, vol. 11, no. 2, April 2007.
- [5] O. Gazi and A. Özgür Yılmaz, "Collision free row column S-random interleaver," *IEEE Communication Letters*, vol. 13, no. 4, April 2009.
- [6] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-20, pp. 284–287, 1974.
- [7] S. Lin and D. J. Castello, *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, Prentice-Hall, 1983.
- [8] T. A. Summers and S. G. Wilson, "SNR mismatch and online estimation in turbo decoding," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 46, no. 4, pp. 421–423, April 1998.
- [9] A. Worm and P. Hoeher, "Turbo-decoding without SNR estimation," *IEEE Communications Letter*, vol. 4, no. 6, pp. 193–195, June 2000.
- [10] Peter H.-Y. Wu and S. M. Pisuk, "Implementation of a low complexity, low power, integer-based turbo decoder," *Global Telecommunications Conference*, pp. 946–951, 2001.
- [11] Orhan Gazi, *Parallelized Architectures for Low Latency Turbo Structures*, Ph.D. thesis, Middle East Technical University, 2007.

Iterative Frequency Domain Equalization for Single-Carrier Wideband MIMO Channels

Gökhan M. Güvensen, A. Özgür Yılmaz

Abstract

Single carrier frequency domain equalization (SC-FDE) is receiving considerable attention recently due to its comparable complexity and performance with OFDM. In this paper, an iterative SC-FDE with decision feedback in frequency domain is proposed for wideband multiple-input multiple-output (MIMO) channels and more general multipath vector channels as a generalization of previous works considering FDE with decision feedback for single-input single-output (SISO) systems. The proposed detector is based on iterative forward and backward filtering followed by a MIMO multi-stream detector that uses a priori log-likelihood ratios (LLR) of coded symbols. Forward and feedback filters are jointly optimized according to the minimum mean square error (MMSE) criterion to minimize both self inter-symbol-interference (ISI) and interference from other streams transmitted at different antennas. It has been observed that the proposed structure exploits the multi-path diversity sources of the channel effectively and performance very close to MIMO-OFDM outage probability can be achieved. Therefore, our proposed iterative SC FDE technique for MIMO wideband channels can be viewed as a strong alternative to MIMO-OFDM schemes with the similar complexity.

Index Terms

Iterative frequency domain equalization, soft decision feedback, soft interference cancellation, MIMO-OFDM, outage probability, matched filter bound, diversity, block-fading channels, concatenated codes, single-carrier broadband wireless systems.

I. INTRODUCTION

Multiple-input multiple-output (MIMO) systems have received much attention due to their multiplexing and diversity capabilities and potentially can offer tens of megabits per second transmission rates in future wireless systems. However, sophisticated equalization and decoding schemes are required for reliable

The authors are with the Department of Electrical and Electronics Engineering, Middle East Technical University, Ankara, Turkey (e-mail: guvensen@metu.edu.tr, aoyilmaz@metu.edu.tr.)

communication at such high rates. While OFDM based schemes are well recognized candidates as a broadband wireless technology, single-carrier (SC) based technology has also started to gain considerable attention due its comparable complexity with OFDM. It has been shown in [1] that frequency domain equalization (FDE) can be readily applied to SC transmission to yield similar performance as OFDM. Since OFDM suffers from high peak-to-average power ratio (PAPR) problem, SC techniques leading to more efficient use of power amplifiers are more suitable for uplink channels [1], [2]. It is known that OFDM and SC techniques are similar in terms of spectral efficiency and that OFDM only shifts the multipath fading problem from the time domain to the frequency domain [3]. Actually, OFDM breaks the frequency diversity and channel coding is needed to reclaim it as opposed to the SC based systems where multipath diversity can be attained without channel coding.

Due to the attractive features of SC-FDE, it has been viewed as a strong alternative to OFDM based systems recently and its importance is clear for wideband channels. Block iterative FDE was proposed for uncoded single-input single-output (SISO) multipath channels in [4] and, block iterative FDE was considered in [5] together with channel decoding. Reliability metrics for uncoded and coded symbols are utilized in SISO systems to prevent the error propagation problem of decision feedback process in [4] and [5], respectively.

Iterative equalization schemes for wideband MIMO channels was considered in [6]. They consider minimum mean squared error (MMSE) type forward filtering and successive interference cancellation (SIC) to mitigate the interference in time domain. Turbo equalization with MMSE type filtering in frequency domain was studied in [7], but it does not consider the use of decision feedback filters or SIC operation and thus can not achieve the total multipath diversity gain of the channel as will be shown later. Recently, iterative frequency domain equalization techniques were considered in [8] and [9]. They are both based on soft interference cancellation and MMSE forward filtering followed by a maximum a posteriori probability (MAP) detector. In [10], a hybrid equalization scheme is proposed where forward filtering is performed in frequency domain, backward filtering is performed in time domain, and a further SIC operation is utilized to mitigate inter-stream interference. All these studies consider V-BLAST type architectures where each stream transmitted over different antennas is coded separately without paying any regard to the possible diversity gains by careful coding across transmit antennas as in [11], [12] and D-BLAST based structures.

In this paper, iterative FDE with decision feedback is applied to MIMO wideband systems. Actually, our analysis and results are not only valid for MIMO schemes but also can be applied to other multipath

vector channels such as asynchronous multipath multi-user CDMA or systems which have the same discrete time model after sampling as MIMO schemes. Our work here is a generalization of the FDE technique from SISO to more general system models. A novel low-complexity iterative frequency domain equalizer utilizing soft frequency domain decision feedback from the multi-stream space-time MIMO decoder is proposed and the performance of this equalizer is shown to achieve the hypothetical matched filtering bound (MFB) performance [13] that upper bound the performance of any MIMO receiver. It is also shown that the proposed equalization scheme combined with the capacity achieving coding-multiplexing based techniques for parallel block fading channels [11], [12] has a close performance to the outage probability of the MIMO-OFDM scheme and the maximum diversity of the multipath vector channel can be attained by the proposed equalization and decoding structure.

Iterative frequency domain equalizers proposed in our work contain two separate filters, namely the forward and the backward filters, which are jointly optimized in each iteration to minimize both the inter-symbol-interference (ISI) within streams and interference across streams. Since reliability of coded symbols from the decoding process are used in deriving the optimal forward and backward filters, the filters employed in this work have a different structure from that of previous interference-cancellation based MIMO turbo equalizers, such as [8], [9] and [10]. Our proposed equalization technique for multivariate ISI channels here is actually mathematically equivalent to the information theoretically optimum approach stated in [14]. Hence, the proposed structure is optimum if the channel symbols are drawn from a Gaussian alphabet and otherwise performs very close to the corresponding input alphabet constrained outage probability of MIMO-OFDM systems.

The contribution of the paper is threefold. We first show that SC-FDE with both forward and backward filters can be generalized from SISO to vector channels, which includes MIMO as a special case. We furthermore derive the jointly optimal forward and backward filters in the frequency domain so that the complexity advantage of FDE is not compromised. The error propagation problem in decision feedback is eliminated by taking the reliability of the decisions into account in each iteration. Third, the MIMO wideband channel can be quasi-parallelized with the help of our proposed space-time equalizer and so the code construction techniques achieving optimal rate-diversity tradeoff given by the singleton bound for block-fading channels [11], [12] can be effectively used such that the proposed equalization scheme combined with this type of coding structures yields a very close performance to the MIMO-OFDM outage probability. Therefore, we can say that proposed SC-FDE based scheme could be a promising candidate

for wideband MIMO systems as an alternative to MIMO-OFDM schemes.

This paper is organized as follows. In Section II, the system model is described. In Section III, iterative frequency domain equalization techniques with both time and frequency domain decision feedbacks generalized to MIMO wideband channels are discussed in detail. In Section IV, iterative decoding algorithm of the proposed FDE for MIMO channels is explained. Asymptotic performance analysis of the iterative FDE with soft decision feedback in frequency domain is done in Section V. Finally, the code construction techniques, simulation results and concluding remarks are presented in Section VI and Section VII respectively.

II. SYSTEM MODEL

The following notation is used throughout the paper. Boldface upper-case letters denote matrices and scalars are denoted by plain lower-case letters. The superscript $(\cdot)^*$ denotes the complex conjugate for scalars and $(\cdot)^H$ denotes the conjugate transpose for vectors and matrices. The $n \times n$ identity matrix is shown with \mathbf{I}_n . The autocorrelation matrix for a random vector \mathbf{a} is $\mathbf{R}_a = E\{\mathbf{a}\mathbf{a}^H\}$ where $E\{\cdot\}$ stands for the expected value operator. The $(i, j)^{th}$ element of a matrix \mathbf{A} is denoted by $\mathbf{A}(i, j)$ and the i^{th} element of a vector \mathbf{a} is denoted by a^i .

This paper considers block based transmission as in [5] and [4]. During the transmission of one block, the channel is assumed to be constant and it changes independently from block to block. Without dealing with the channel estimation problem, the channel is assumed to be perfectly known at each block transmission. Cyclic prefix (CP) is used to prevent inter-block interference with length larger or equal to maximum channel length (L) as explained in [3]. The signal for a transmitted block with CP is a sequence of vectors: $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{L-1}]$.

Assuming symbol rate sampling, the discrete time baseband equivalent model of the point-to-point MIMO wideband channel with n_r receive antennas and n_t transmit antennas can be written as [15],

$$\mathbf{y}_k = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{H}_l \mathbf{x}_{k-l} + \mathbf{n}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

where \mathbf{H}_l 's, $l = 0, \dots, L-1$, are complex channel matrices comprised of independent zero-mean circularly symmetric complex Gaussian (ZMCSCG) random variables with variance given by the power delay profile of each channel [16]. Block fading model is considered and thus the channel matrices are assumed to be constant during a coherence interval significantly larger than a duration needed for the transmission of

one block [3] and channel state information at transmitter (CSIT) is not available. Noise vectors \mathbf{n}_k are also taken as ZMCSCG white (spatially and temporally) noise with variance N_0 . Only BPSK modulation is considered during the analysis and simulation studies. Extension to other M-ary or M-PSK modulations is straightforward.

If we define the DFT operation as $A_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j2\pi nk/N}$ for $k = 0, \dots, N-1$, where a_n and A_k are the time domain sequence and its frequency domain sequence, respectively, then after the DFT operation to each element of \mathbf{y}_k in (1), we can obtain the following expression in the frequency domain as done in [10]

$$\mathbf{Y}_k = \bar{\mathbf{A}}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{N}_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

where $\bar{\mathbf{A}}_k$ is an $n_r \times n_t$ matrix representing the channel frequency response at the k^{th} tone with the entries [10]

$$\lambda_m^i(k) = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{H}_l(i, m) e^{-j2\pi kl/N}, \quad (3)$$

for $i = 1, \dots, n_r$ and $m = 1, \dots, n_t$ and $\mathbf{H}_l(i, m)$ is a scalar and defined as the $(i, m)^{\text{th}}$ element of the channel matrix \mathbf{H}_l . In (2), \mathbf{X}_k is the DFT of a vector sequence $\{\mathbf{x}_k\}$ with

$$\mathbf{X}_k = [X_k^1, \dots, X_k^{n_t}]^T \quad (4)$$

for $k = 0, \dots, N-1$ as adapted from [10]. X_k^i is the DFT of the sequence transmitted at the i^{th} antenna at the k^{th} frequency bin such that

$$X_k^i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x_l^i e^{-j2\pi kl/N}, \quad i = 1, \dots, n_t. \quad (5)$$

Similarly, Y_k^i and N_k^i are the DFT of the corresponding received and noise sequences at the i^{th} receive antenna at the k^{th} frequency bin for $i = 1, \dots, n_r$. The expression in (2) is the frequency domain equivalent of the channel in (1) and will be frequently used in the remainder of the paper. As observed in (2), the channel gains of an OFDM system are converted from scalars in SISO to matrices in MIMO due to multiple transmit and receive antennas. Also, DFT operation is performed by using $q_n^m = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi mn/N}$ for $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ hereafter.

III. ITERATIVE FREQUENCY DOMAIN EQUALIZATION FOR WIDEBAND MIMO CHANNELS

We consider iterative frequency domain equalization (FDE) with both time and frequency domain decision feedback in this paper. Since both equalization and decoding processes can be performed in each iteration, turbo principle can be applied as done in [5], [17]. According to the turbo principle, log-likelihood ratio (LLR) of the coded bits can be obtained from the channel equalizer and this information is used by the decoder. The decoder produces LLR of the coded symbols and the soft estimates of the coded symbols are constructed based on them to be used in feedback process at next iteration.

The decoding scheme based on the BCJR algorithm [18] with convolutional codes may be used as the decoding scheme for each substream and V-BLAST or D-BLAST type architectures on which MIMO systems are built can be used for transmission of each coded substream. V-BLAST and D-BLAST are widely used in MIMO schemes since they do not require CSIT and streams are separately demodulated by some sort of filtering such as MMSE and then decoded [3], [19], [20]. In Fig. 1, an exemplary receiver structure is shown for frequency domain decision feedback (FDDF) case.

As opposed to previous works in MIMO systems [8], [9] and [10], forward and feedback filters are jointly optimized in our approach to minimize both inter-symbol-interference (ISI) and interference from other streams. As it will be observed in Section VI, the combined multipath and space enriched diversity of the channel is exploited by decision feedback equalizer effectively such that the performance obtained by matched filtering bound (MFB) is approximately achieved and a close performance to the outage of MIMO-OFDM can be obtained when the proposed equalization scheme is combined with coding structures that achieve the optimal rate-diversity tradeoff [12].

A. Frequency Domain Equalization with time domain decision feedback (FDE-TDDF)

To start with, \mathbf{Y}_j 's for $j = 0, \dots, N - 1$ can be easily shown to be uncorrelated from (2), and we can say that \mathbf{Y}_j is a sufficient statistic to estimate \mathbf{X}_j when it is Gaussian. As similar to the SISO case in [5], we can write the output from the FDE-TDDF for the k^{th} vector in the block in the i^{th} iteration as,

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{N-1} (q_j^k)^* (\mathbf{W}_j^{(i)})^H \mathbf{Y}_j - \sum_{j=0}^{N-1} (\mathbf{F}_j^{(i)})^H \tilde{\mathbf{x}}_{(k+j) \bmod N}^{(i-1)} \quad (6)$$

for $k = 0, \dots, N - 1$. $\mathbf{W}_j^{(i)}$'s and $\mathbf{F}_j^{(i)}$'s are forward and feedback filters with sizes $n_r \times n_t$ and $n_t \times n_t$, respectively. When the filters are designed on the MMSE criterion, this structure is information theoretically optimum as stated in [14] when \mathbf{x}_k 's are Gaussian. The first summation is actually the feedforward estimate

of the k^{th} transmitted vector. First, the feedforward equalization is done at the j^{th} frequency tone by multiplying an $n_t \times n_r$ matrix $(\mathbf{W}_j^{(i)})^H$ to the input vector \mathbf{Y}_j . Then, one can get the feedforward estimate at the time domain by converting the equalized frequency tones to the time domain with inverse DFT as done in the first summation in (6). In (6), $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}$'s are the soft feedback decisions from the previous iteration and they are utilized at the feedback filtering process to improve the estimate of \mathbf{x}_k .

For the iterative FDE-TDDF operation, we consider feeding back the entire block of interfering vectors. Thus, there are N feedback filter matrices but it is possible to use only a number of L nonzero feedback filters to reduce computational complexity to find $\mathbf{F}_j^{(i)}$'s. On the contrary, our scheme here is operating on a block basis, therefore it cancels both the pre-cursor and the post-cursor ISI while eliminating interference from other streams.

The forward and backward filter matrices are jointly optimized and found according to the MMSE criterion presented in [5], [4]. The total mean square error in one block, conditioned on the channel matrices and the results of the previous iteration, can be expressed as,

$$J = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \|\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \mathbf{x}_k\|^2 \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=1}^{n_t} E \{ (\tilde{x}_k^{m(i)} - x_k^m)(\tilde{x}_k^{m(i)} - x_k^m)^* \} \quad (7)$$

where $\tilde{x}_k^{m(i)}$ is the estimate of the k^{th} symbol transmitted at m^{th} antenna at i^{th} iteration.

Successive cancellation between substreams transmitted from different transmit antennas at the same symbol time can be incorporated in our frequency domain equalizer by simply putting the constraint on backward filter $\mathbf{F}_j^{(i)}$ in (6) such that

$$\mathbf{F}_0^{(i)}(n, n) = 0, \quad n = 1, \dots, n_t \quad (8)$$

since, by imposing this constraint, one can avoid self-subtraction of the desired symbol by its previous estimate. In other words, the estimation of the k^{th} symbol transmitted at m^{th} antenna does not use its soft estimate from the previous iteration, but it can utilize the soft estimate of other coded symbols transmitted at the same symbol time in the feedback equalization.

The Lagrange multiplier method can be used to obtain optimal filter coefficients. Lagrangian vectors and the corresponding scalar constraints (Lagrangian function) can be written as

$$\mathbf{\Gamma}^{(i)} = \text{diag} \left[\Gamma_1^{(i)}, \dots, \Gamma_{n_t}^{(i)} \right]_{(n_t \times n_t)}, \quad \text{Lagrangian}(\mathbf{\Gamma}^{(i)}) = \sum_{n=1}^{n_t} (\mathbf{F}_0^{(i)}(n, n))^* \Gamma_n^{(i)} \quad (9)$$

By taking the gradient of the cost function and the Lagrangian with respect to rows of $(\mathbf{W}_j^{(i)})^H$, the following is obtained

$$\nabla_{(\mathbf{W}_l^{(i)})^H} J = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (q_l^k)^* \mathbf{Y}_l \left[\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{Y}_j^H \mathbf{W}_j^{(i)}(n) q_j^k - \sum_{j=0}^{N-1} (\hat{\mathbf{x}}_{(k+j) \bmod N}^{(i-1)})^H \mathbf{F}_j^{(i)}(n) - (x_k^n)^* \right] \right\} \quad (10)$$

for $l = 0, \dots, N-1$ and $n = 1, \dots, n_t$. When the gradient is taken with respect to rows of $(\mathbf{F}_j^{(i)})^H$,

$$\nabla_{(\mathbf{F}_l^{(i)})^H} J = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} -\hat{\mathbf{x}}_{(k+l) \bmod N}^{(i-1)} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{Y}_j^H \mathbf{W}_j^{(i)}(n) q_j^k - \sum_{j=0}^{N-1} (\hat{\mathbf{x}}_{(k+j) \bmod N}^{(i-1)})^H \mathbf{F}_j^{(i)}(n) - (x_k^n)^* \right] \right\} + \sum_{k=0}^{N-1} \Gamma_n^{(i)} \mathbf{e}_n \delta_l \quad (11)$$

for $l = 0, \dots, N-1$ and $n = 1, \dots, n_t$ where $\mathbf{W}_j^{(i)}(n)$ and $\mathbf{F}_j^{(i)}(n)$ are the n^{th} column of $\mathbf{W}_j^{(i)}$ and $\mathbf{F}_j^{(i)}$ respectively. δ_l is the delta function which is 0 for all l but $l = 0$ and \mathbf{e}_n denotes a n_t -dimensional vector of all zeros except for the n^{th} element which is 1.

Due to an interleaving operation both in time and space, we can assume that,

$$E\{\mathbf{x}_k(\mathbf{x}_l)^H\} = E_s \mathbf{I}_{n_t} \delta_{kl}, \text{ for } k, l = 0, \dots, N-1. \quad (12)$$

Some important correlation matrices used by the forward and feedback filters are defined for the i^{th} iteration as

$$\mathbf{P}^{(i)} = E\{\mathbf{x}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})^H\}, \quad \mathbf{B}^{(i)} = E\{\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})^H\} \quad (13)$$

for $k = 0, \dots, N-1$. To simplify the computation of the filter coefficients, feedback decisions are assumed to be independent. Furthermore, due to interleaving operation of the coded symbols, feedback decisions are assumed to be uncorrelated with the symbols transmitted at different antenna or symbol time. It is further assumed that the reliability matrices of the decision feedback are same for all k , i.e.,

$$E\{\mathbf{x}_k(\hat{\mathbf{x}}_l^{(i-1)})^H\} = \mathbf{0}, \quad E\{\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}(\hat{\mathbf{x}}_l^{(i-1)})^H\} = \mathbf{0}, \text{ for } k \neq l \quad (14)$$

$$E\{x_k^m(\hat{x}_k^n)^*\} = \rho_m \delta_{mn}, \quad E\{\hat{x}_k^m(\hat{x}_k^n)^*\} = \rho_m \delta_{mn} \quad (15)$$

for $m, n = 1, \dots, n_t$ and the expectations are independent of symbol index k . Then, we can write

$$\mathbf{P}^{(i)} = \text{diag}[\rho_1, \dots, \rho_{n_t}], \quad \mathbf{B}^{(i)} = \text{diag}[\beta_1, \dots, \beta_{n_t}]. \quad (16)$$

These are standard and reasonable assumptions as stated in [5], [17] since the average symbol error

probability is approximately the same for each symbol in a large block with quasi-static fading. This approximation should not lead to a significant loss in performance.

The vector filters $\mathbf{W}_j^{(i)}$ and $\mathbf{F}_j^{(i)}$ can be calculated by equating the gradients to zero vectors in (10) and (11). Expectations required to find filter coefficients can be calculated easily from vector DFT operation and (2) as follows,

$$E\{\mathbf{X}_k(\mathbf{X}_l)^H\} = E\{\mathbf{x}_k(\mathbf{x}_l)^H\} = E_s \mathbf{I}_{n_t} \delta_{kl} \quad (17)$$

$$E\{\mathbf{N}_k(\mathbf{N}_l)^H\} = E\{\mathbf{n}_k(\mathbf{n}_l)^H\} = N_0 \mathbf{I}_{n_r} \delta_{kl} \quad (18)$$

$$E\{\mathbf{Y}_k(\mathbf{Y}_l)^H\} = \left(\bar{\Lambda}_k \bar{\Lambda}_k^H E_s + N_0 \mathbf{I}_{n_r} \right) \delta_{kl} = \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_k} \delta_{kl} \quad (19)$$

$$E\{\mathbf{Y}_l(\hat{\mathbf{x}}_{(k+j) \bmod N}^{(i-1)})^H\} = \bar{\Lambda}_l \mathbf{P}^{(i)} q_{(k+j) \bmod N}^l \quad (20)$$

$$E\{\mathbf{Y}_l(\mathbf{x}_k)^H\} = \bar{\Lambda}_l E_s q_k^l \quad (21)$$

After equating the gradients to zero vector, taking expectations by using the above equations and combining vectors into single matrix equations for $n = 1, \dots, n_t$, one can obtain the following matrix equations providing the optimal forward and backward filter matrices

$$\mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j} \mathbf{W}_j^{(i)} = \bar{\Lambda}_j \left[E_s \mathbf{I}_{n_t} + \sqrt{N} \mathbf{P}^{(i)} \sum_{m=0}^{N-1} q_m^j \mathbf{F}_m^{(i)} \right] \quad (22)$$

for $j = 0, \dots, N - 1$,

$$\mathbf{B}^{(i)} \mathbf{F}_l^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} (q_l^m)^* (\mathbf{P}^{(i)})^H \bar{\Lambda}_m^H \mathbf{W}_m^{(i)} \quad (23)$$

for $l = 1, \dots, N - 1$ and

$$\mathbf{B}^{(i)} \mathbf{F}_0^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} (q_0^m)^* (\mathbf{P}^{(i)})^H \bar{\Lambda}_m^H \mathbf{W}_m^{(i)} - (\mathbf{P}^{(i)})^H - \mathbf{\Gamma}^{(i)}. \quad (24)$$

By substituting $\mathbf{W}_m^{(i)}$'s into (23) and (24), the backward filter matrices can be readily found after some manipulations. After some calculus, one obtains the following matrix equations and $\mathbf{F}_l^{(i)}$'s can be found from the solution of the given equations.

$$\mathbf{B}^{(i)} \mathbf{F}_l^{(i)} - \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{T}(l, n) \mathbf{F}_n^{(i)} = \mathbf{V}(l), \quad l = 1, \dots, N - 1 \quad (25)$$

$$\mathbf{B}^{(i)}\mathbf{F}_0^{(i)} - \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{T}(0, n)\mathbf{F}_n^{(i)} = \mathbf{V}(0) - (\mathbf{P}^{(i)})^H - \mathbf{\Gamma}^{(i)} \quad (26)$$

where

$$\mathbf{T}(l, n) = \sum_{m=0}^{N-1} (q_l^m)^* (\mathbf{P}^{(i)})^H \bar{\mathbf{\Lambda}}_m^H \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_m}^{-1} \bar{\mathbf{\Lambda}}_m \mathbf{P}^{(i)} q_n^m, \quad (27)$$

$$\mathbf{V}(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} (q_l^m)^* (\mathbf{P}^{(i)})^H \bar{\mathbf{\Lambda}}_m^H \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_m}^{-1} \bar{\mathbf{\Lambda}}_m E_s \quad (28)$$

for $l, n = 0, \dots, N-1$. Optimal feedback filter matrices, $\mathbf{F}_j^{(i)}$'s can be found as a solution of the above equations by using the constraint given in (8) and forward filters, $\mathbf{W}_j^{(i)}$'s can be obtained from (22).

As seen in (25) and (26), the computation of feedback matrices requires the inversion of a Hermitian block Toeplitz matrix with size $Nn_t \times Nn_t$ similar to the SISO cases in [5]. However, this matrix inversion burden for time domain decision feedback filters will be significantly reduced when we switch to the frequency domain decision feedback case and thus, the computational simplicity of SC FDE technique will be observed.

Soft feedback decisions of the coded symbols can be obtained by using the information given by the decoder. Using these soft decisions, it is possible to approximate correlation matrices $\mathbf{P}^{(i)}$ and $\mathbf{B}^{(i)}$ as done for the SISO case in [5]. Correct estimation of $\mathbf{P}^{(i)}$ and $\mathbf{B}^{(i)}$'s are important since FDE-TDDF and FDE-FDDF takes into account the reliability of the feedback decisions and therefore alleviates the error propagation problem different than the original FDE studies in [1] and [2] assuming perfect feedback decisions. In the first iteration, $\mathbf{P}^{(i)}$ and $\mathbf{B}^{(i)}$ can be taken as $\mathbf{0}_{n_t}$, i.e, reliable feedback decisions are not available. As the number of iterations increases, both metrics approaches to the asymptotic value: $E_s \mathbf{I}_{n_t}$. Calculation of these correlation matrices will be done in Section IV.

B. Frequency Domain Equalization with frequency domain decision feedback (FDE-FDDF)

The iterative frequency domain equalizer with hard and soft decision feedback in the frequency domain is studied in [2], [4] and [5] for the SISO systems. We derive the filter matrices based on the MMSE criterion like the FDE-TDDF case. Since, FDE-TDDF described in the previous section and FDE-FDDF are both based on the same MMSE criterion in the time domain, both structures are actually equivalent. Output of the FDE-FDDF for the k^{th} vector in the block (for the i^{th} iteration) can be expressed as,

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{N-1} (q_j^k)^* \left[(\mathbf{W}_j^{(i)})^H \mathbf{Y}_j - (\mathbf{C}_j^{(i)})^H \hat{\mathbf{X}}_j^{(i-1)} \right] \quad (29)$$

for $k = 0, \dots, N - 1$. $\mathbf{W}_j^{(i)}$'s and $\mathbf{C}_j^{(i)}$'s are forward and feedback filters both in frequency domain with sizes $n_r \times n_t$ and $n_t \times n_t$ respectively and $\hat{\mathbf{X}}_j^{(i-1)}$'s are the DFT's of soft decisions from the previous iteration. Since, the proposed FDE-TDDF and FDE-FDDF structures are equivalent, one can find a relation between time domain feedback filters $\mathbf{F}_j^{(i)}$ and frequency domain feedback filters $\mathbf{C}_j^{(i)}$. It can be shown that

$$(\mathbf{F}_k^{(i)})^*(m, n) = \sum_{l=0}^{N-1} (\mathbf{C}_l^{(i)})^*(m, n) e^{j2\pi kl/N} \quad (30)$$

for $m, n = 1, \dots, n_t$ and $k = 0, \dots, N - 1$ where $(m, n)^{th}$ element of $(\mathbf{C}_j^{(i)})^H$ and $(\mathbf{F}_j^{(i)})^H$ are defined as $(\mathbf{C}_j^{(i)})^*(m, n)$ and $(\mathbf{F}_j^{(i)})^*(m, n)$ respectively. Since the optimization problem for FDE-FDDF case is mathematically equivalent to FDE-TDDF (Section III-A) with the constraint $\mathbf{F}_j^{(i)}(n, n) = 0$, $n = 1, \dots, n_t$, we can set the constraint for frequency domain feedback filters from (30) as

$$(\mathbf{F}_0^{(i)})^*(n, n) = \sum_{l=0}^{N-1} (\mathbf{C}_l^{(i)})^*(n, n) = 0, \quad n = 1, \dots, n_t \quad (31)$$

With this constraint, one can avoid self-subtraction of the desired symbol by its previous estimate. The Lagrange multiplier method can be used once again to obtain optimal forward and backward frequency domain filters. Lagrangian vectors and the corresponding scalar constraints (Lagrangian function) can be written as

$$\mathbf{\Gamma}^{(i)} = \text{diag} \left[\Gamma_1^{(i)}, \dots, \Gamma_{n_t}^{(i)} \right]_{(n_t \times n_t)}, \quad \text{Lagrangian}(\mathbf{\Gamma}^{(i)}) = \sum_{n=1}^{n_t} \sum_{j=0}^{N-1} (\mathbf{C}_j^{(i)}(n, n))^* \Gamma_n^{(i)}. \quad (32)$$

By taking the gradient of the cost function and the Lagrangian with respect to the rows of $(\mathbf{W}_j^{(i)})^H$ and $(\mathbf{C}_j^{(i)})^H$, the following are obtained

$$\nabla_{(\mathbf{W}_l^{(i)}(n))^H} J = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (q_l^k)^* \mathbf{Y}_l \left[\sum_{j=0}^{N-1} (\mathbf{Y}_j^H \mathbf{W}_j^{(i)}(n) q_j^k - (\hat{\mathbf{X}}_j^{(i-1)})^H \mathbf{C}_j^{(i)}(n) q_j^k) - (x_k^n)^* \right] \right\} \quad (33)$$

$$\nabla_{(\mathbf{C}_l^{(i)}(n))^H} J = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} -(q_l^k)^* \hat{\mathbf{X}}_l^{(i-1)} \left[\sum_{j=0}^{N-1} (\mathbf{Y}_j^H \mathbf{W}_j^{(i)}(n) q_j^k - (\hat{\mathbf{X}}_j^{(i-1)})^H \mathbf{C}_j^{(i)}(n) q_j^k) - (x_k^n)^* \right] \right\} + \sum_{k=0}^{N-1} \Gamma_n^{(i)} \mathbf{e}_n \quad (34)$$

for $l = 0, \dots, N - 1$ and $n = 1, \dots, n_t$ where $\mathbf{W}_j^{(i)}(n)$ and $\mathbf{C}_j^{(i)}(n)$ are the n^{th} column of $\mathbf{W}_j^{(i)}$ and $\mathbf{C}_j^{(i)}$ respectively. Expectations required to find filter coefficients can be calculated easily from vector DFT

operation and (2) as follows

$$E\{\mathbf{Y}_l(\hat{\mathbf{X}}_k^{(i-1)})^H\} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_l \mathbf{P}^{(i)} \delta_{kl} \quad (35)$$

$$E\{\hat{\mathbf{X}}_k^{(i-1)}(\hat{\mathbf{X}}_l^{(i-1)})^H\} = \mathbf{B}^{(i)} \delta_{kl} \quad (36)$$

$$E\{\hat{\mathbf{X}}_k^{(i-1)}(\mathbf{x}_l)^H\} = q_l^k (\mathbf{P}^{(i)})^H \quad (37)$$

After equating the gradients to zero vector, taking expectations by using the equations above and combining vectors into single matrix equations for $n = 1, \dots, n_t$, one can obtain the following matrix equations giving the optimal forward and backward filter matrices in the frequency domain

$$\mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j} \mathbf{W}_j^{(i)} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_j \left[E_s \mathbf{I}_{n_t} + \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{C}_j^{(i)} \right] \quad (38)$$

$$\mathbf{B}^{(i)} \mathbf{C}_j^{(i)} = (\mathbf{P}^{(i)})^H \left[\bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H \mathbf{W}_j^{(i)} - \mathbf{I}_{n_t} \right] - \mathbf{\Gamma}^{(i)} \quad (39)$$

for $j = 0, \dots, N - 1$, and $\mathbf{\Gamma}^{(i)}$ can be obtained from the constraint:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{C}_j^{(i)}(n, n) = 0, \quad n = 1, \dots, n_t \quad (40)$$

By substituting $\mathbf{W}_j^{(i)}$'s into (39) and using the constraint, the Lagrangian terms given in (32) and backward filter matrices can be readily found after some calculus as,

$$\mathbf{\Gamma}_n^{(i)} = \frac{\left[\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A}_j^{(i)}(n, :) \mathbf{D}_j^{(i)}(:, n) \right]}{\left[\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A}_j^{(i)}(n, n) \right]}, \quad n = 1, \dots, n_t \quad (41)$$

$$\mathbf{C}_j^{(i)} = \mathbf{A}_j^{(i)} \left[\mathbf{D}_j^{(i)} - \mathbf{\Gamma}^{(i)} \right], \quad (42)$$

where

$$\mathbf{A}_j^{(i)} = \left[\mathbf{B}^{(i)} - (\mathbf{P}^{(i)})^H \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j}^{-1} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j \mathbf{P}^{(i)} \right]^{-1}, \quad (43)$$

$$\mathbf{D}_j^{(i)} = (\mathbf{P}^{(i)})^H \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j}^{-1} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j E_s - (\mathbf{P}^{(i)})^H, \quad (44)$$

$\mathbf{A}_j^{(i)}(n, :)$ is the n -th row of $\mathbf{A}_j^{(i)}$, $\mathbf{D}_j^{(i)}(:, n)$ is the n -th column of $\mathbf{D}_j^{(i)}$ and $\mathbf{W}_j^{(i)}$'s are obtained from (38) for $j = 0, \dots, N - 1$.

It is seen that the computational complexity to obtain forward and feedback filters is considerably reduced for SC FDE-FDDF case in comparison to FDE-TDDF, since only $n_r \times n_r$ and $n_t \times n_t$ matrix

inversions are needed as can be seen from (41)-(44) and size of these matrices is independent of block length (N) like OFDM based systems. Therefore, the complexity of SC FDE-FDDF technique for MIMO wideband channels is comparable to MIMO-OFDM systems.

IV. ITERATIVE DECODING

In this section, we will calculate the log-likelihood ratios (LLR) and soft decisions of the coded symbols for FDE with frequency domain decision feedback (FDDF). BPSK modulation is assumed for simplicity, but the extension to other M-ary or M-PSK modulations is straightforward in principle. At each iteration, extrinsic information is extracted from detection and decoding stages and is then used as a priori information in the next iteration, just as in Turbo decoding. The soft output from the FDE-FDDF in the i^{th} iteration after (29) can be written as,

$$\tilde{x}_k^{m(i)} = \mu_m^{(i)} x_k^m + \eta_k^{m(i)} \quad (45)$$

for $k = 0, \dots, N - 1$ and $m = 1, \dots, n_t$. In this case, the equalized MIMO channel in (45) can be considered as a quasi-parallelized channel and the LLR for the k^{th} symbol transmitted at m^{th} antenna can be written as

$$\lambda_k^{m(e)} = \log_e \frac{P(\tilde{x}_k^{m(i)} | x_k^m = +1)}{P(\tilde{x}_k^{m(i)} | x_k^m = -1)}. \quad (46)$$

The LLR term $\lambda_k^{m(e)}$ is the extrinsic information that can be obtained from the equalizer output. An a-priori probability ratio $\lambda_k^{m(p)}$ ($\log_e \frac{P(x_k^m = +1)}{P(x_k^m = -1)}$) is given by the decoder as the intrinsic information obtained from the previous iteration [5], [17] and used to construct a soft estimate of the coded symbol transmitted at m^{th} antenna for k^{th} vector.

The equivalent complex amplitude, $\mu_m^{(i)}$ of the symbol transmitted from the m^{th} antenna at the output of the equalizer and the residual interference power, $E\{|\eta_k^{m(i)}|^2\}$ can be computed by using (29) as follows,

$$\begin{aligned} \mu_m^{(i)} &= E\{\tilde{x}_k^{m(i)} (x_k^m)^*\} / E_s = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} [(\mathbf{W}_j^{(i)}(m))^H \bar{\mathbf{\Lambda}}_j - (\mathbf{C}_j^{(i)}(m))^H (\mathbf{P}^{(i)})^H] \mathbf{e}_m \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} (\mathbf{W}_j^{(i)}(m))^H \bar{\mathbf{\Lambda}}_j \mathbf{e}_m \end{aligned} \quad (47)$$

and $E\{|\eta_k^{m(i)}|^2\} = E\{|\tilde{x}_k^{m(i)}|^2\} - E_s|\mu_m^{(i)}|^2$ where

$$E\{|\tilde{x}_k^{m(i)}|^2\} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} (\mathbf{W}_j^{(i)}(m))^H \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j} \mathbf{W}_j^{(i)}(m) + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} (\mathbf{C}_j^{(i)}(m))^H \mathbf{B}^{(i)} \mathbf{C}_j^{(i)}(m) - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2}{N} \text{Re} \left\{ (\mathbf{W}_j^{(i)}(m))^H \bar{\boldsymbol{\Lambda}}_j \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{C}_j^{(i)}(m) \right\} \quad (48)$$

for $m = 1, \dots, n_t$, where $\mathbf{W}_j^{(i)}(m)$ and $\mathbf{C}_j^{(i)}(m)$ are the m^{th} column of $\mathbf{W}_j^{(i)}$ and $\mathbf{C}_j^{(i)}$ respectively.

It is important to note that $\mu_m^{(i)}$ and $E\{|\eta_k^{m(i)}|^2\}$ values do not depend on symbol time index k , so these values are calculated only once for the decoding of one block in each iteration. The inputs to the decoder in terms of the LLR for each coded stream can be calculated by knowing the optimal filter coefficients. The residual interference at the output from the equalizer is well approximated by a Gaussian distribution as in [5], [17]. Then, the extrinsic information given in (46) can be expressed as

$$\lambda_k^{m(e)} = \frac{4\text{Re}\{(\mu_m^{(i)})^* \tilde{x}_k^{m(i)}\}}{E\{|\eta_k^{m(i)}|^2\}} \quad (49)$$

Soft feedback decisions for the FDE-FDDF can be expressed in terms of the extrinsic information provided by the decoder as follows [17]:

$$P[x_k^j] \triangleq P[x_k^j = b_j] = \frac{1}{2} \left[1 + b_j \tanh \left(\frac{1}{2} \lambda_k^{j(p)} \right) \right], \quad b_j \in \{+1, -1\} \quad (50)$$

$$\hat{x}_k^m = E\{x_k^m\} = \sum_{x_k^m \in \{+1, -1\}} x_k^m P[x_k^m] = \tanh \left(\frac{1}{2} \lambda_k^{m(p)} \right) \quad (51)$$

for $E_s = 1$, $m = 1, \dots, n_t$ and $k = 0, \dots, N-1$. The non-zero diagonal entries of the correlation matrices $\mathbf{P}^{(i)}$ and $\mathbf{B}^{(i)}$ in (13) used by the forward and backward filters can be calculated by using the following approximation,

$$\rho_{k,m} \triangleq E\{x_k^m (\hat{x}_k^m)^*\} = E\{E\{x_k^m\} (\hat{x}_k^m)^*\} = |\hat{x}_k^m|^2 \quad (52)$$

$$\rho_m = \beta_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \rho_{k,m} \quad (53)$$

$E\{x_k^m\}$ was taken as \hat{x}_k^m and this is a common assumption in various turbo detection techniques as done in [5], [17] and [21].

V. ASYMPTOTIC PERFORMANCE ANALYSIS

At each iteration, forward and feedback filters approach the optimal coefficients in case of perfect feedback with the help of improved log a-posteriori probability (APP) ratio of each coded symbol obtained from the decoder. As the iteration increases, feedback decisions become more reliable and correlation matrices approach to asymptotic values: $\mathbf{P}^{(i)} \rightarrow E_s \mathbf{I}_{n_t}$ and $\mathbf{B}^{(i)} \rightarrow E_s \mathbf{I}_{n_t}$. Signal-to-interference-noise-ratio's (SINR) of each parallelized channel in (45) after equalization is evaluated in Appendix for the asymptotic case and given as

$$SINR_m = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^{n_r} |H_l(i, m)|^2 \frac{E_s}{N_0}, \quad \text{for } m = 1, \dots, n_t \quad (54)$$

It is seen from (54) that one can achieve the full diversity gain ($n_r \times L$) at each of the parallelized channels. If transmit diversity schemes in the form of coding across antennas such as universal space-time codes [22] or other coding-multiplexing based techniques [12] are utilized, the maximum potential diversity gain of ($n_r \times n_t \times L$) can be achieved by the proposed equalization scheme here.

A scheme is approximately universal if it is in deep fade only when the channel itself is in outage [22]. D-BLAST architecture satisfies this criterion by appropriate choice of codewords and being approximately universal is sufficient for a scheme to achieve the diversity-multiplexing tradeoff of the channel [23], [22]. Transmission schemes based on D-BLAST can achieve the full diversity gain of the flat fading MIMO channel ($n_r \times n_t$) if the temporal coding with stream rotation is capacity-achieving (Gaussian code books with infinite block size T). Moreover, the D-BLAST system can achieve the maximum capacity with outage if the wasted space-time dimensions along the diagonals are neglected [22]. Therefore, by incorporating these types of coding structures in our proposed equalizer, one can achieve the diversity-multiplexing tradeoff of the frequency selective MIMO channel. However, this pursuit is beyond the scope of this paper.

In our case, we have used simple coding structures that achieve the optimal rate-diversity tradeoff given by Singleton Bound for block-fading channels in [12] and as it will be seen in Section VI, one can get a very close performance to the outage probability of MIMO-OFDM scheme.

We can calculate the asymptotic outage of our MIMO SC-FDE structure approximately by assuming

independent identically distributed channel taps in (1) and using (54) as follows,

$$\begin{aligned}
P_{out}^{asympt}(R) &= \mathbb{P} \left\{ C_{FDE-FDDF}^{asympt} < R \right\} = \mathbb{P} \left\{ \sum_{m=1}^{n_t} \log_2 (1 + SINR_m) < R \right\} \\
&\leq \mathbb{P} \left\{ \max_{m, m \in \{1, \dots, n_t\}} \log_2 \left(1 + \frac{E_s}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^{n_r} |H_l(i, m)|^2 \right) < R \right\} \\
&= \left(\mathbb{P} \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{E_s}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^{n_r} |H_l(i, 1)|^2 \right) < R \right\} \right)^{n_t} \\
&\leq \left(\mathbb{P} \left\{ \max_{l, i} \frac{E_s}{N_0} |H_l(i, 1)|^2 < 2^R - 1 \right\} \right)^{n_t} = \left(\mathbb{P} \left\{ \frac{E_s}{N_0} |H_0(1, 1)|^2 < 2^R - 1 \right\} \right)^{n_t n_r L} \\
&= \left(1 - \exp^{-\frac{2^R - 1}{(E_s/N_0)}} \right)^{n_t n_r L} \approx \frac{(2^R - 1)^{n_t n_r L}}{(E_s/N_0)^{n_t n_r L}} \tag{55}
\end{aligned}$$

where standard probability evaluation techniques for maximum of independent random variables are employed. It is observed from (55) that the outage probability has a decay rate in the order of $(n_r \times n_t \times L)$ as similar to MIMO-OFDM scheme and this outage is approximately achieved by our practical SC-FDE scheme as will be seen in Section VI.

VI. SIMULATION RESULTS

A. Outage Probability and MFB Calculations

In this section, we will compare the performance of our proposed equalizer with the hypothetical matched filtering bound (MFB) performance and the corresponding constrained outage probability of MIMO-OFDM system. The constrained capacity can be found for the system model in (2) given the complex vector set χ of cardinality M^{n_t} (e.g., M-ary or M-PSK modulations) similar to the derivations for block fading channels in [12] as

$$\begin{aligned}
C_{MIMO-OFDM}^{\chi} &= I(\mathbf{X}_j; \mathbf{Y}_j | \bar{\Lambda}_j) \\
&= n_t \log_2(M) - \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} E_{\mathbf{N}_j} \left\{ \sum_{\mathbf{X}_k \in \chi} \frac{1}{M^{n_t}} \log_2 \sum_{\mathbf{X}_i \in \chi} \exp \left(\frac{-\|\bar{\Lambda}_j(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_i) + \mathbf{N}_j\|^2 + \|\mathbf{N}_j\|^2}{N_0} \right) \right\}
\end{aligned}$$

and the corresponding outage probability can be written as

$$P_{out}^{MIMO-OFDM, \chi}(R) = \mathbb{P} \left\{ C_{MIMO-OFDM}^{\chi} < R \right\}. \tag{56}$$

It is well known that SC-MMSE receiver reduces to channel matched filter if the perfect a priori information of the all transmitted symbols leading to ISI and inter-stream interference is available at

the receiver and all interference is cancelled. Therefore, upper bound performance of the packet error rate (PER) referred to as matched filter bound (MFB) of the receiver can be obtained by assuming perfect decision feedback [13]. Constrained outage probability and the MFB will be used for performance evaluation in the next part.

B. Code Construction and Performance Results

The code construction used in our work is similar to the structure for random-like codes adapted to the block-fading channel based on blockwise concatenation and on bit-interleaved coded modulation (BICM) in [12]. The presented coded modulation construction in [12] systematically yields singleton-bound achieving turbo-like codes defined over an arbitrary signal set. As such, any other coding architecture that performs well in parallel block fading channels can be used in our system. We have used the same encoding and decoding structures as in [12] in simulations.

A sample coding structure used in simulations is shown in Fig. 2. Here, the outer code is a simple repetition code of rate $r = 1/n_t$ and the inner codes are rate-1 accumulators which is referred to as repeat and blockwise accumulate (RBA) code [12]. Fig. 3 shows the performance of the proposed FDE-FDDF for a 4×4 MIMO system with the use of full block diversity attaining RBA code of rate $r = 1/4$. Channel model described in Section II is assumed and typical COST207 channel with exponential power delay profile for suburban and urban areas [16] is used. BPSK modulation is used for simplicity, but other M-ary or M-PSK modulations combined with BICM [24] can be applied to our proposed structure. Symbol duration is taken as 1μ second, and the channel length L equals 8. The first channel tap is taken as unity power. The information block length, i.e., the information bits entering the outer encoder is taken as $K = 250$, then the block length N is equal to $K/(r \cdot n_t) + 1 = 251$ including termination bits. Number of iterations inside the Turbo RBA decoder is set to 10 and the number of equalizer iterations at which the forward and backward filters are updated by using the reliability matrices is taken as 3.

It is seen from Fig. 3 that the performance of FDE-FDDF is 0.3 dB away from MFB. There is approximately 1.5 dB difference between the outage probability of the MIMO-OFDM at rate $R = n_t \cdot r = 1$ bits/sec/Hz and this gap from the outage is similar to the gaps obtained with RBA in parallel block fading channels in [12]. Then, one can say that the ISI, the substream interference and, the error propagation problem in decision feedback is almost eliminated since the perfect decision feedback performance (MFB) is approximately achieved. Moreover, it is seen that the performance of FDE-FDDF shows the same slope as MIMO-OFDM outage and so it is possible to attain the maximum diversity of the MIMO broadband

channel by using the proposed space-time equalizer and coding across transmit antennas. Furthermore, SC-FDE based schemes could be a promising candidate for wideband MIMO systems as an alternative to MIMO-OFDM schemes and if one takes the loss due to PAPR problem in OFDM based systems into consideration, the performance difference between SC-FDE based MIMO schemes and the MIMO-OFDM systems will be more significant.

In Fig. 4, simulation results are depicted for code rate, $r = 1/2$. A full block diversity attaining blockwise concatenated code (BCC) is used for encoding as adapted from [12]. The outer code is a rate- $\frac{1}{2}$ convolutional code and the inner codes are n_t trivial rate-1 accumulators. The information block length K is taken as 248. Similar results are obtained and a close performance to MIMO-OFDM outage at rate $R = n_t \cdot r = 2$ bits/sec/Hz is achieved within 2 dB.

Our proposed SC-FDE can also be applied to classical SISO ISI channels. In Fig. 5, we compared the performance of iterative SC-FDE-FDDF-soft feedback with that of the outage of an OFDM scheme. A convolutional encoder with $r = 1/2$ serially concatenated (SC) with a rate-1 accumulator is used with information block length $K = 123$. At first glance, it is surprising to note that constrained OFDM outage probability is surpassed by the iterative FDE-FDDF, but as stated in [25] the capacity of wideband channels under non-Gaussian alphabets is an open problem and OFDM is not the capacity achieving scheme for non-Gaussian input alphabets. Maximum diversity order achieved by OFDM is given by the singleton-bound and this diversity is below the diversity order of the channel for BPSK modulation at $r = 1/2$. However, SC-FDE does not necessitate coding or Gaussian alphabet to attain maximum potential diversity order of the channel in SISO systems.

Furthermore, it is interesting to note that the performance improvement of the FDE-FDDF scheme over the linear FDE without decision feedback is about 2 dB at PER=0.0001 for all simulation results. There is also a loss in diversity as observed in the reduced PER slope without decision feedback. One can say that the proposed space-time equalizer gains more diversity in comparison to linear FDE by a careful design of both the forward and backward filters.

VII. CONCLUSION

In this paper, we extended the SC-FDE mechanism from SISO channels to more general vector-based models which include MIMO as a special case. We have also shown that capacity-achieving jointly optimal forward and backward filtering operations can be effectively performed in the frequency domain. It is observed that error performance close to the outage probability can be attained by careful coding across

transmit antennas without compromising computational complexity. Therefore, our proposed iterative SC FDE technique for MIMO wideband channels can be viewed as a strong alternative to MIMO-OFDM schemes with similar complexity. Future studies will include the effect of channel estimation error on the performance of vector channel SC-FDE systems.

APPENDIX: ASYMPTOTIC SINR CALCULATION

If $\mathbf{P}^{(i)} = \mathbf{B}^{(i)} = E_s \mathbf{I}_{n_t}$, one can write \mathbf{A}_j in (43) as

$$\mathbf{A}_j = \left[E_s \mathbf{I}_{n_t} - E_s^2 \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H \mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j}^{-1} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j \right]^{-1} \quad (57)$$

By using Matrix Inversion Lemma, one can get

$$\mathbf{A}_j = \frac{1}{E_s} \mathbf{I}_{n_t} + \frac{1}{E_s} \mathbf{I}_{n_t} E_s^2 \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H \left[\mathbf{R}_{\mathbf{Y}_j} - \bar{\mathbf{\Lambda}}_j \frac{1}{E_s} \mathbf{I}_{n_t} E_s^2 \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H \right]^{-1} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j \frac{1}{E_s} = E_s^{-1} \mathbf{I}_{n_t} + \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H N_0^{-1} \mathbf{I}_{n_r} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j \quad (58)$$

and

$$\mathbf{D}_j = -(\mathbf{A}_j)^{-1} \quad (59)$$

is written from (44). Lagrangian terms in (32) can be found as

$$\Gamma_n = \frac{-N}{\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{A}_j(n, n)} = \frac{-E_s N}{\sum_{j=0}^{N-1} \left[1 + \frac{E_s}{N_0} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H(n) \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(n) \right]}, \quad n = 1, \dots, n_t \quad (60)$$

by using (41) and (58) and further noting that $\mathbf{A}_j^{(i)}(n, :) \mathbf{D}_j^{(i)}(:, n) = (\mathbf{A}_j^{(i)} \mathbf{D}_j^{(i)})(n, n) = -1$ by (59).

Defining

$$\Sigma_n = \sum_{j=0}^{N-1} \left[1 + \frac{E_s}{N_0} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H(n) \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(n) \right], \quad (61)$$

feedback filter matrices can be obtained as

$$\mathbf{C}_j = -\mathbf{I}_{n_t} - \mathbf{A}_j \Gamma \quad (62)$$

from (42) and (59). One can obtain the columns of feedback filter matrices by putting (58) and (60) into (62) such that

$$\mathbf{C}_j(n) = -\mathbf{e}_n + \frac{N}{\Sigma_n} \left[\mathbf{e}_n + \frac{E_s}{N_0} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(n) \right] \quad (63)$$

and forward filter can be found as

$$\mathbf{W}_j(n) = \frac{\frac{E_s}{N_0} N \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(n)}{\Sigma_n} \quad (64)$$

for $j = 0, \dots, N-1$, $n = 1, \dots, n_t$ from (38) and (63).

In this case, the soft estimate of x_k^m is a scaled version of the matched filter output after ideal interference cancellation in the frequency domain. SINR's of each parallelized channels after equalization can be found after some manipulation by using (47) and (48) for the asymptotic case as follows,

$$\mu_n = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{E_s}{N_0} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H(n) \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(n) \right]}{\Sigma_n} \quad (65)$$

and

$$E\{|\tilde{x}_k^n|^2\} = \frac{E_s}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left[1 + \frac{N^2}{\Sigma_n^2} - 2 \frac{N}{\Sigma_n} \right] + \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{E_s^2}{N_0} N \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H(n) \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(n) \right]}{\Sigma_n^2} \quad (66)$$

$$E\{|\eta_k^n|^2\} = \frac{E_s [\Sigma_n - N]^2}{\Sigma_n^2} + \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{E_s^2}{N_0} N \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H(n) \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(n) \right]}{\Sigma_n^2} - E_s |\mu_n|^2 = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{E_s^2}{N_0} N \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H(n) \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(n) \right]}{\Sigma_n^2} \quad (67)$$

for $n = 1, \dots, n_t$.

The SINR can then be evaluated as

$$SINR_m = \frac{|\mu_m|^2 E_s}{E\{|\eta_k^m|^2\}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\mathbf{\Lambda}}_j^H(m) \bar{\mathbf{\Lambda}}_j(m) \frac{E_s}{N_0} \quad (68)$$

from (45), and one can obtain the following based on Parseval's relation by using (3)

$$SINR_m = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{E_s}{N_0} \sum_{i=1}^{n_r} |\lambda_m^i(j)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n_r} \frac{E_s}{N_0} \sum_{j=0}^{N-1} N |H_j(i, m)|^2 = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{i=1}^{n_r} |H_l(i, m)|^2 \frac{E_s}{N_0} \quad (69)$$

for $m = 1, \dots, n_t$.

REFERENCES

- [1] D. Falconer, S. L. Ariyavisitakul, A. Benyamin-Seeyar, and B. Eidson, "Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 40, no. 4, pp. 58–66, April 2002.
- [2] N. Benvenuto and S. Tomasin, "On the comparison between OFDM and single carrier modulation with a DFE using a frequency-domain feedforward filter," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, pp. 947–955, June 2002.
- [3] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2005.
- [4] N. Benvenuto and S. Tomasin, "Iterative design and detection of a DFE in the frequency domain," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no. 11, pp. 1867–1875, Nov. 2005.

- [5] B. Ng, C. Lam, and D. Falconer, "Turbo frequency domain equalizer for single-carrier broadband wireless systems," *IEEE Trans. Wireless Comm.*, vol. 6, no. 2, pp. 759–767, Feb. 2007.
- [6] K. Kansanen and T. Matsumoto, "A computationally efficient MIMO turbo-equaliser," *Proc. IEEE VTC*, vol. 1, pp. 277–281, 2003.
- [7] M. S. Yee, M. Sandell, and Y. Sun, "Comparison study of single carrier and multi-carrier modulation using iterative based receiver for MIMO system," *Proc. IEEE VTC*, pp. 1275–1279, 2004.
- [8] J. Karjalainen, N. Veselinovic, K. Kansanen, and T. Matsumoto, "Iterative frequency domain joint-over-antenna detection in multiuser MIMO," *IEEE Trans. Wireless Comm.*, vol. 6, no. 10, pp. 3620–3631, Oct. 2007.
- [9] R. Visoz, A. O. Berthet, and S. Chtourou, "Frequency-domain block turbo-equalization for single-carrier transmission over MIMO broadband wireless channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, no. 12, pp. 2144–2149, Dec. 2006.
- [10] Y. Zhu and K. B. Letaief, "Single-carrier frequency-domain equalization with noise prediction for MIMO systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 55, no. 5, pp. 1063–1076, May 2007.
- [11] R. Knopp and P. Humblet, "On coding for block fading channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, no. 1, pp. 189–205, Jan. 2000.
- [12] A. G. Fabregas and G. Caire, "Coded modulation in the block-fading channel: Coding theorems and code construction," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 1, pp. 91–114, Jan. 2006.
- [13] J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt, *Digital Communication*, Springer, Third Edition.
- [14] T. Guess and M. K. Varanasi, "An information-theoretic framework for deriving canonical decision-feedback receivers in gaussian channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, no. 1, pp. 173–187, Jan. 2005.
- [15] E. Biglieri, R. Calderbank, A. Constantinides, A. Goldsmith, A. Paulraj, and H. Vincent Poor, *MIMO Wireless Communications*, Cambridge University Press, 2007.
- [16] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGRAW-HILL, 2001.
- [17] X. Wang and H. V. Poor, "Iterative (turbo) soft interference cancellation and decoding for coded CDMA," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 1046–1061, July 1999.
- [18] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 20, pp. 284–287, Mar. 1974.
- [19] P. W. Wolniansky, G. J. Foschini, and G. D. Golden, "V-BLAST: An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel," *Bell Laboratories, Lucent Technologies, Crawford Hill Laboratory*, Oct. 1998.
- [20] G. J. Foschini, "Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multiple antennas," *Bell Laboratories Technical Journal*, vol. 1, no. 2, pp. 41–59, 1996.
- [21] M. Tuchler and J. Hagenauer, "Linear time and frequency domain turbo equalization," *Proc. IEEE VTC*, vol. 2, pp. 1449–1453, 2001.
- [22] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge University Press, 2005.
- [23] L. Zheng and D. N. C. Tse, "Diversity and multiplexing: A fundamental tradeoff in multiple antenna channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 5, pp. 1073–1096, May 2003.
- [24] G. Caire, G. Taricco, and E. Biglieri, "Bit-interleaved coded modulation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no. 3, pp. 927–946, May 1998.
- [25] P. O. Vontobel, A. Kavcic, D. M. Arnold, and H. A. Loeliger, "A generalization of the blahut-arimoto algorithm to finite-state channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 54, no. 5, pp. 1887–1918, May 2008.

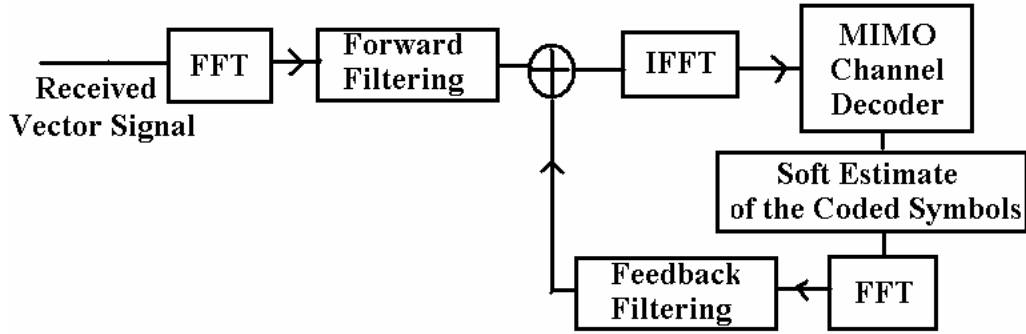


Fig. 1. Iterative FDE with frequency domain decision feedback (FDDF)

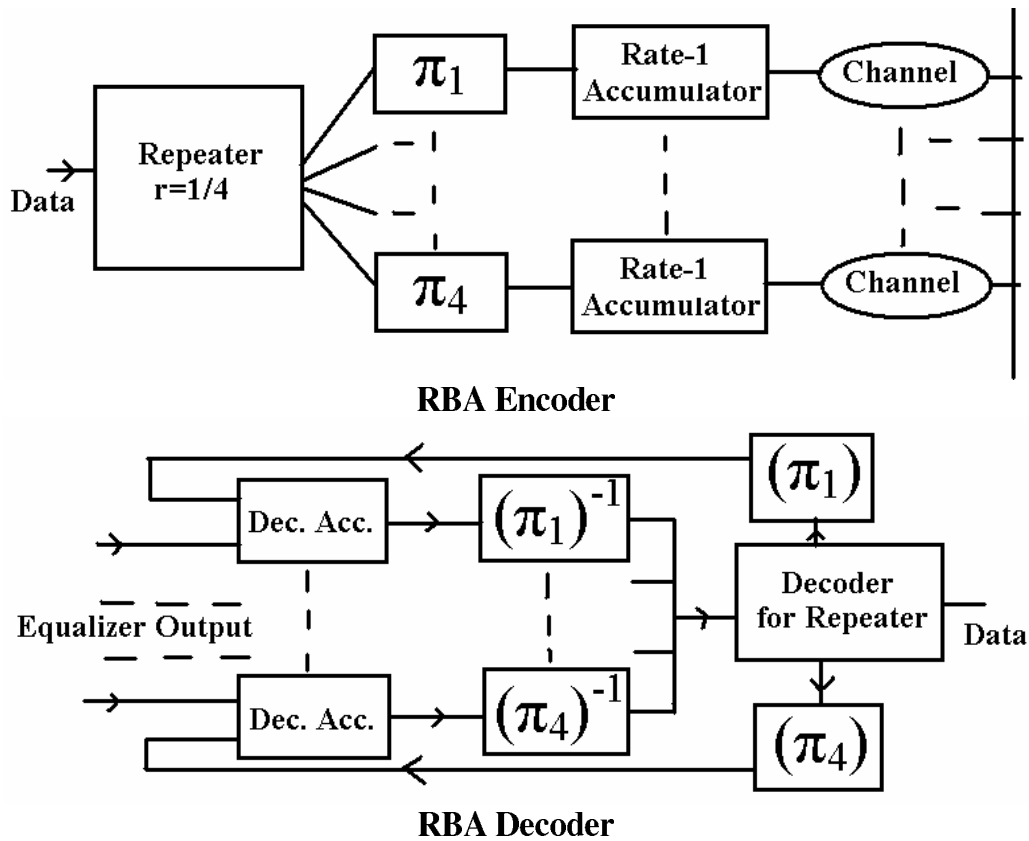


Fig. 2. RBA Encoding and Decoding structure for 4×4 MIMO channel with $r = 1/4$

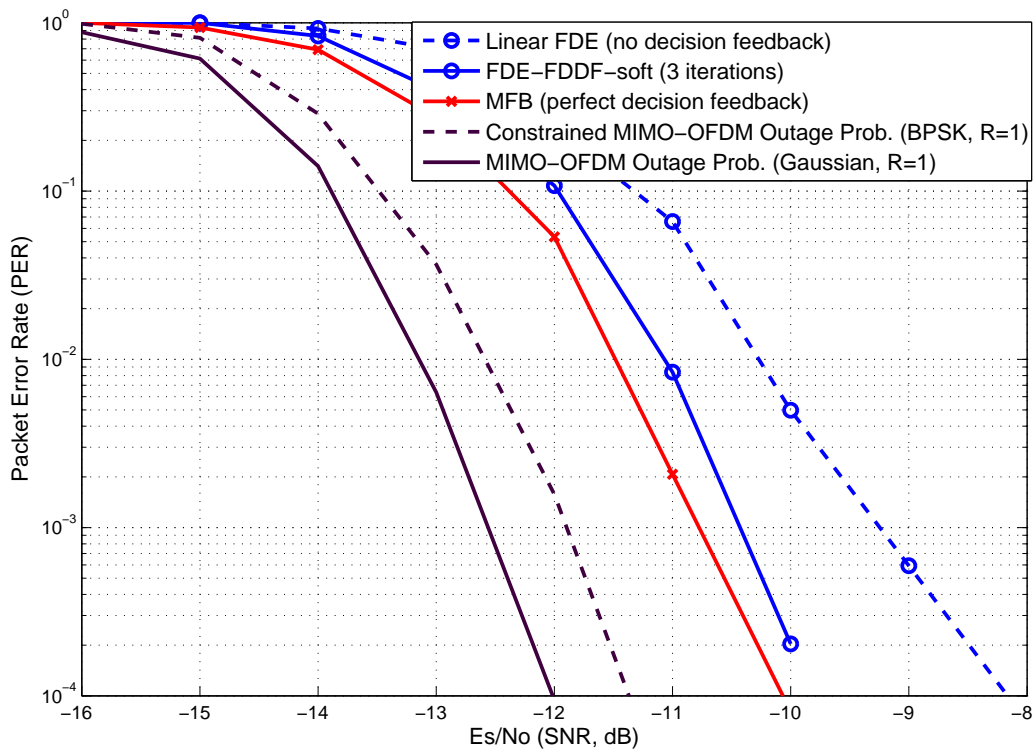


Fig. 3. Performance comparison of frequency domain equalization techniques with matched filter bound and with outage probability for 4×4 MIMO system, $T_s = 1\mu$ sec, COST 207 typical suburban exponential channel, $L = 8$ and RBA code is used with $\frac{1}{4}$ code rate.

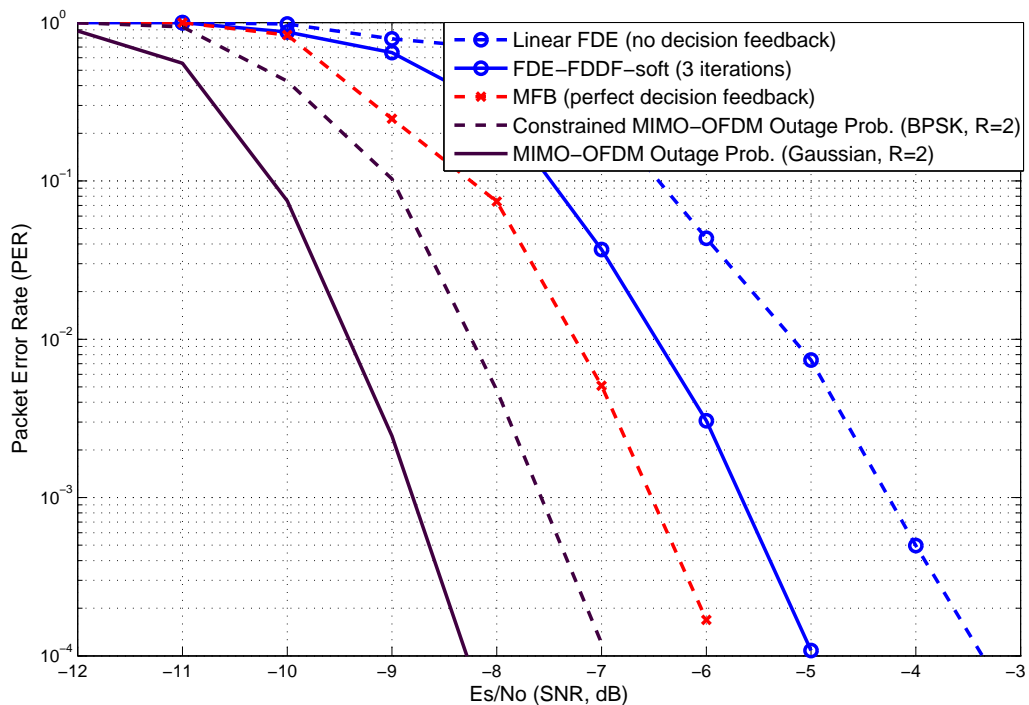


Fig. 4. Performance comparison of frequency domain equalization techniques with matched filter bound and with outage probability for 4×4 MIMO system, $T_s = 1\mu$ sec, COST 207 typical suburban exponential channel, $L = 8$ and BCC is used with $\frac{1}{2}$ code rate.

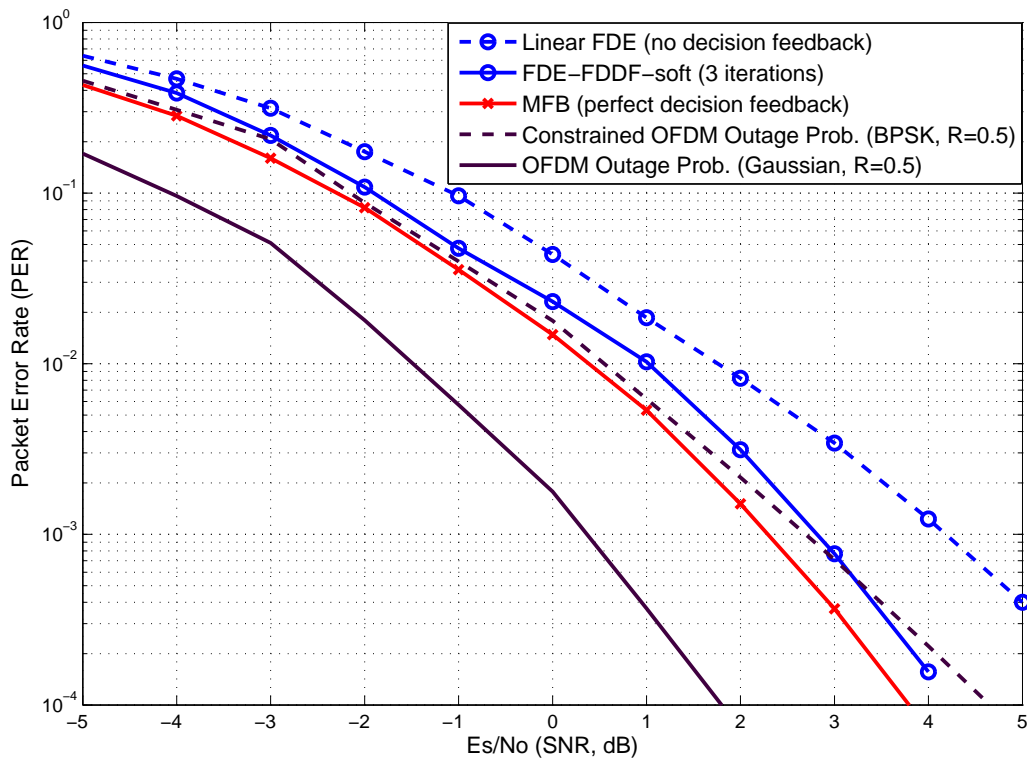


Fig. 5. Performance comparison of frequency domain equalization techniques with matched filter bound and with outage probability for OFDM system, $T_s = 0.5\mu$ sec, COST 207 typical suburban exponential channel, $L = 15$ and SC code is used with $\frac{1}{2}$ code rate.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje No: 104E027
Proje Başlığı: Yüksek Başarılı Gezgın Haberleşme: Çarpım Kodları Kullanarak Ortak Kanal Kestirimi ve Kodlama
Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar: Doç. Dr. A. Özgür Yılmaz
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: ODTÜ Elektrik-Elektronik Müh. Böl. 06531 Ankara
Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi: UDEA Ltd. Şti. İvedik Organize Sanayi Bölgesi, 21. Cad. 609. Sok. No:2, Ostim, ANKARA, TÜRKİYE
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 1/7/2005 – 1/7/2009
Öz (en çok 70 kelime) Gezgın haberleşmede yüksek veri hızlarına ihtiyaç her gün arttırmaktadır. Bu olgu proje bağlamında iki sorunsalı ortaya çıkarır. Birincisi yüksek veri hızlarında çalışabilecek kod yapılarının oluşturulmasıdır. Diğer gezgın haberleşme senaryosunda kanalda gözlemlenen sönümlemeyen kaynakları. Bu projede ilk sorunu çözmek için kod çözüm işlemi paralelleştirilmiş olarak yapılan kod yapıları önerilmektedir. Oldukça basit uyarlamalı filtrelerle çalışan bir kanal kestirimi yöntemi ile kod çözme işleminin yinelemeli olarak yapılması ile yüksek başarılı bir sistem ortaya çıkarılmaktadır.
Anahtar Kelimeler: Gezgın haberleşme, yinelemeli kod çözme, kanal kestirimi, LMS, zamanda değişen kanallar, sönümlemeli kanallarda kodlama
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu mu? Evet <input type="checkbox"/> Gerekli Değil <input checked="" type="checkbox"/> Fikri Ürün Bildirim Formu'nun tesliminden sonra 3 ay içerisinde patent başvurusu yapılmalıdır.
Projeden Yapılan Yayınlar: Dergi makaleleri: <ul style="list-style-type: none"><i>An Upper Bound for Limited Rate Feedback MIMO Capacity, G. Güvensen, A. Ö.</i>

Yılmaz, IEEE Transactions on Wireless Communications, Vol. 8, No. 6, June 2009, 2748-2754

- *Collision Free Row Column S-random Interleaver*, O. Gazi, A. Ö. Yılmaz, IEEE Communications Letters, Vol. 13, No. 4, April 2009, 1-3
- *Fast Decodable Turbo Codes*, O. Gazi, A. Ö. Yılmaz, IEEE Communications Letters, Vol. 11, No. 2, February 2007, 173-175
- *Zero State Doped Turbo Equalizer*, O. Gazi, A. Ö. Yılmaz, IEEE Communications Letters, Vol. 11, No. 2, February 2007, 164-166
- *Turbo Product Codes based on Convolutional Codes*, O. Gazi, A. Ö. Yılmaz, ETRI Journal, Vol. 28, No. 4, August 2006, 453-460

Uluslararası Konferans Bildirileri:

- *Low-Complexity Iterative Channel Estimation and Tracking for Time-Varying Multi-Antenna Systems*, Y. Yapıcı, A. Ö. Yılmaz, 2009 IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Conference, Tokyo, Japan
- *Iterative Frequency Domain Equalization for Single-Carrier Wideband MIMO Channels*, G. Güvensen, A. Ö. Yılmaz, 2009 IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Conference, Tokyo, Japan
- *Joint Channel Estimation and Decoding with Low-Complexity Iterative Structures in Time-Varying Fading Channels*, Y. Yapıcı, A. Ö. Yılmaz, 2009 IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Conference, Tokyo, Japan
- *Probability of Full-Diversity for Simple Coded and Rotated Multidimensional Constellation Systems*, G. Güvensen, A. Ö. Yılmaz, 2009 IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Conference, Tokyo, Japan
- *Turbo-like Codes Over Block-Fading and Time-Varying Narrowband Fading Channels*, Y. Yapıcı, A. Ö. Yılmaz, 2009 IEEE Vehicular Technology Conference-Spring, Barcelona, Spain
- *Iterative Decision Feedback Equalization and Decoding for Rotated Multidimensional Constellations in Block Fading Channels*, G. Güvensen, A. Ö. Yılmaz, 2009 IEEE Vehicular Technology Conference-Spring, Barcelona, Spain
- *On Parallelized Serially Concatenated Codes*, O. Gazi, A. Ö. Yılmaz, IEEE Wireless Communications & Networking Conference WCNC 2007, Hong Kong
- *Parallel Decodable Concatenated Convolutional Codes*, O. Gazi, A. Ö. Yılmaz, International Symposium and Exhibition on Electrical, Electronics, and Computer Engineering 2006, 23-25 Nov., Lefkoşe

Ulusal Konferans Bildirileri:

- *FPGA Platformunda Pilot Dizini Ekleme Yöntemiyle Paket Senkronizasyonu ve Tek Ton Parametre Kestirimi*, 2007 IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Eskişehir
- *MIMO Kanallarda Sınırlı Hızda Geribesleme ve RVQ*, 2007 IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Eskişehir
- *Bileşik Kaplar Yönteminin OFDM ve MIMO Sistemlerde PAPR Üzerine Etkisi*, 2007 IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, Eskişehir
- *Serpiştiricinin Konvolüsyonel Çarpım Kodlarının Performansı Üzerindeki Etkileri*, O. Gazi, A. Ö. Yılmaz, URSI-Türkiye 2006