

УДК 519.6
№ держреєстрації 0112U001285
Інв. № 0714U003548

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
ЛНУ ім.Івана Франка
79000 м. Львів, вул. Університетська, 1; тел. (032) 272 70 40
факс (032) 261-69-03, ndch@franko.lviv.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор
з наукової роботи
д-р хім. наук, проф.
_____ Б. Котур

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
*ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМИХ І ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ І МЕХАНІКИ ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВИМИ
МЕТОДАМИ*
Пі-120П
(заключний)

Заст. начальника НДЧ
канд. фіз.-мат. наук

І. Куньо

Декан факультету
прикладної математики та інформатики,
д-р ф.-м. н., професор

Я. Савула

Керівник НДР
д-р ф.-м. н., професор

Г. Шинкаренко

2013

Рукопис закінчено 6 листопада 2013 р.
Результати цієї роботи розглянула Вчена Рада
факультету прикладної математики та інформатики
протокол № 25 від 13 листопада 2013 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Зав. кафедри, г. н. сп, д-р фіз.-мат. наук, проф.	_____	Г. Шинкаренко (розд. 1, 2, 4)
Зав. кафедри, г. н. сп., д-р фіз.-мат. наук, проф.	_____	Р. Хапко (розд. 5)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	Б. Остудін (розд. 6)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	С. Шахно (розд. 7, 8)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	В. Вовк (розд. 1)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	В. Горлач (розд. 3)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	П. Вагін (розд. 4)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	І. Бернакевич (розд. 4)
ст. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, доцент	_____	П. Венгерський (розд. 4)
мол. наук. співроб., ст. викл.	_____	Я. Гарасим (розд. 6)
наук. співроб.	_____	Р. Малець (розд. 3)
аспірант, ст. лаб.	_____	В. Стельмашук (розд. 3)
асистент	_____	Г. Квасниця (розд. 1, 2)
аспірант, ст. лаб.	_____	І. Чир (розд. 3, 4)
інж. 1 к.	_____	Л. Пахолків (розд. 5)
ст. лаб.	_____	Т. Семенюта (розд. 1)
асистент	_____	О. Вовк (розд. 1, 2)
асистент	_____	І. Клименко (розд. 3)
асистент	_____	Я. Коковська (розд. 4)
асистент	_____	О. Остапов (розд. 1, 2)
лаб. , студент	_____	М. Зінчук (розд. 1)

Нормоконтролер

М. Благітко

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР частина 1: 266 с., 4 розділи, 67 рис., 31 табл., 130 джерел;
частина 2: 56 с., 4 розділи, 7 рис., 10 табл., 29 джерел.

Об'єктом дослідження є надійні та ефективні числові методи аналізу математичних моделей важливих проблем фізики, механіки та екології, які можуть бути імплементовані як інтелектуальний базис комерційних комп'ютерних середовищ для виконання кваліфікованих обчислювальних експериментів.

Мета роботи – розробка надійних, ефективних та цілком обґрунтованих числових схем розв'язування складних задач для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, які мають важливі застосування в сучасній інженерії та технологіях.

Методи дослідження – методи теорії операторів та функціонального аналізу, метод Петрова-Гальоркіна, метод скінченних елементів (МСЕ), однокрокові рекурентні схеми, граничні інтегральні рівняння різних типів та розмірностей, перетворення Лагерра, функції Гріна.

Сформульовано математичні моделі процесів та об'єктів, що вивникають у таких застосуваннях:

- 1) термопружності оболонок податливих до зсуву та стиснення, а також просторових тіл, що піддаються імпульсним поверхневим силовим та тепловим навантаженням;
- 2) дисипативної акустики в'язкої теплопровідної рідини;
- 3) піроелектричних актуаторів та сенсорів.

Встановлено цілком придатні для застосувань умови коректності їх варіаційних формулювань, розроблено числові схеми на основі апроксимацій МСЕ та одно крокових рекурентних схем інтегрування в часі, встановлено критерії стійкості, оцінки швидкості їх збіжності, розроблено прикладні програми за допомогою яких виконано серії обчислювальних експериментів.

Для одно- та двовимірних крайових задач розроблено надійні та ефективні апостеріорні оцінювачі похибок апроксимацій МСЕ як для лінійних і слабо нелінійних, так і сингулярно збурених крайових задач у випадках лінійних та білінійних апроксимацій МСЕ.

Побудовано h - та hp -адаптивні схеми МСЕ, стратегії керування яких використовують оригінальні оцінювачі похибки Діріхле та Неймана і алгоритми локального згущення сіток триангулюванням Делоне або бісекцій. Можливості проведення обчислювальних експериментів значно розширено використанням спеціальних форматів збереження рідко заповнених систем рівнянь МСЕ та ітераційних методів їх розв'язування.

Розроблено наближені схеми розв'язування обернених задач реконструкції тріщин, включень та граничних значень у частково-необмежених областях для випадків рівнянь Лапласа, теплопровідності. Доведено збіжність ітераційного процесу з надквадратичною збіжністю для розв'язування одного класу нелінійних рівнянь.

КРАЙОВА ЗАДАЧА, РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ-АДВЕКЦІЇ-РЕАКЦІЇ, СИСТЕМИ РІВНЯНЬ П'ЄЗОЕЛЕКТРИКИ, РІВНОВАГИ ПРУЖНОГО АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА ТА ГІДРОЛОГІЇ, ВАРІАЦІЙНІ РІВНЯННЯ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ТА ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ, АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ, АДАПТУВАННЯ ТРИАНГУЛЯЦІЙ, СТАБІЛІЗОВАНА СХЕМА, АДАПТИВНА СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ГАРАНТОВАНА ТОЧНІСТЬ АПРОКСИМАЦІЙ, ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ, НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ, ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРРА, МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ, ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД, МЕТОД КОЛОКАЦІЇ, АПОСТЕРІОРНА ОЦІНКА ПОХИБКИ, НЕЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ, МЕТОД НЬЮТОНА, МЕТОД ХОРД, ПОРЯДОК ЗБІЖНОСТІ, УМОВИ ЛІПШИЦЯ.

З М І С Т

ВСТУП.....	12
Частина 1	15
1 АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНЮВАЧІ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	16
1.1 Коректно сформульована варіаційна задача.....	16
1.2. Апроксимація Гальоркіна та апіорна оцінка її похибки.....	17
1.3 Поповнення просторів апроксимацій та умова насичення	17
1.4 Апроксимації методу скінченних елементів	18
1.5 Варіаційна задача про апостеріорний оцінювач похибки	20
1.6 Поелементно визначені апостеріорні оцінювачі похибок апроксимацій МСЕ залишкового гатунку та їх обчислення	22
1.7 АОП частинами лінійних апроксимацій МСЕ	24
1.7.1 Оцінювач Діріхле для лінійних апроксимацій на трикутнику	25
1.7.2 Оцінювач Неймана для лінійних апроксимацій на трикутнику	26
1.7.3 Аналіз збіжності апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач.....	27
1.7.4 Аналіз збіжності числових результатів для модельних нелінійних задач.....	31
1.8 АОП частинами квадратичних апроксимацій МСЕ на трикутних скінченних елементах	34
1.8.1 Оцінювач Діріхле квадратичних апроксимацій на трикутнику	34
1.8.2 Оцінювач Неймана квадратичних апроксимацій на трикутнику	35
1.8.3 Аналіз збіжності апроксимацій МСЕ	35
1.9 АОП для білінійних апроксимацій МСЕ на чотирикутниках.....	36
1.9.1 Оцінювач Діріхле білінійних апроксимацій на чотирикутниках	37
1.9.2 Оцінювач Неймана білінійних апроксимацій на чотирикутниках.....	38

1.9.3	Аналіз збіжності апроксимацій для сингулярно збурених задач	39
1.9.4	Аналіз збіжності апроксимацій для слабо нелінійних задач	41
1.10	АОП для серендипових квадратичних апроксимацій МСЕ на чотирикутниках	43
1.10.1	Оцінювач Діріхле серендипових квадратичних апроксимацій	43
1.10.2	Оцінювач Неймана серендипових квадратичних апроксимацій	44
1.10.3	Аналіз збіжності числових результатів для модельних сингулярно збурених задач	45
1.10.4	Аналіз збіжності числових результатів для модельних нелінійних задач	50
1.11	Ітераційні методи розв'язування великих систем лінійних алгебричних рівнянь з розрідженими матрицями.....	52
1.11.1	Методу узагальнених мінімальних нев'язок GMRES	52
1.11.2	Побудова передобумовлювача СЛАР	54
2	АДАПТИВНІ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	55
2.1	<i>h</i> -адаптивні схеми МСЕ	55
2.1.1	Стратегії локального адаптування поділів на скінченні елементи	55
2.1.2	Формулювання крайової задачі	57
2.1.3	Варіаційне формулювання крайової задачі	57
2.1.4	Частинами квадратичні апроксимації МСЕ.....	58
2.1.5	Частинами кубічні апроксимації МСЕ.....	64
2.1.6	Стратегія адаптування сітки.....	67
2.1.7	Аналіз числових результатів	68
2.1.8	Висновки.....	74
2.2	<i>hp</i> -адаптивні схеми МСЕ	75
2.2.1	Формулювання задачі	75
2.2.2	Застосування МСЕ до розв'язування задачі	79
2.2.3	Алгоритм синтезу глобальної СЛАР	81

2.2.4 Збіжність hp-адаптивних схем: аналіз результатів числових експериментів з модельними сингулярно збуреними задачами	87
2.2.5 Альтернативні стратегії адаптування.....	101
2.2.6 Підсумки і висновки.....	126
3 ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВІ СХЕМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ	127
3.1 Формулювання, коректність та апроксимація початково-крайової задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини.....	127
3.1.1 Вступ.....	127
3.1.2 Фундаментальні рівняння термогідродинаміки ньютонівської рідини	128
3.1.3 Лінеаризована система рівнянь дисипативної акустики в термінах пружного зміщення і температури	132
3.1.4 Лінеаризована початково-крайова задача дисипативної акустики..	135
3.1.5 Варіаційна задача дисипативної акустики.....	136
3.1.6 Властивості складників варіаційної задачі дисипативної акустики	138
3.1.7 Енергетичні рівності дисипативної акустики.....	140
3.1.8 Регулярність даних задачі дисипативної акустики.....	141
3.1.9 Єдиність та обмеженість розв'язку варіаційної задачі дисипативної акустики	143
3.1.10 Напівдискретизація Гальоркіна варіаційної задачі дисипативної акустики	145
3.1.11 Існування розв'язку варіаційної задачі дисипативної акустики	148
3.1.12 Висновки	150
3.2 Апроксимація початково-крайових задач п'єзо- та піроелектрики.....	151
3.2.1 Вступ.....	152
3.2.2 Формулювання задач динаміки п'єзоелектриків	153
3.2.3 Напівдискретизація варіаційної задачі п'єзоелектрики	155

3.2.4	Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі.	156
3.2.5	Обчислення енергетичних характеристик.	157
3.2.6	Числові експерименти.	158
3.2.7	Висновки.	163
3.3	Формулювання та аналіз задач термопружності оболонок: напівдискретизація за змінною товщини варіаційних задач термопружності	164
3.3.1	Вступ.	164
3.3.2	Початково-крайова та варіаційна задачі термопружності.	165
3.3.3	Припущення малості товщини.	168
3.3.4	Квазістатична задача термопружності оболонок.	176
3.3.5	Числовий експеримент.	182
3.3.6	Висновки.	184
3.4	Апроксимація початково-крайових задач термопружності	185
3.4.1	Вступ.	185
3.4.2	Постановка задачі.	187
3.4.3	Варіаційне формулювання.	189
3.4.4	Властивості складових частин варіаційного рівняння	190
3.4.5	Напівдискретизація Гальоркіна	192
3.4.6	Енергетичні рівняння	194
3.4.7	Деякі апріорні оцінки та коректність варіаційного формулювання .	194
3.4.8	Побудова однокрокової рекурентної схеми	196
3.4.9	Апробація чисельної схеми	199
3.4.10	Числові приклади	203
3.4.11	Висновки.	207
4	ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ	208
4.1	Вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення	208
4.1.1	Вступ.	208

4.1.2 Основні припущення та співвідношення теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення.....	209
4.1.3 Лінійна початково-крайова задача теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення, та її варіаційне формулювання..	214
4.2 Технологія моделювання руху води відкритими каналами	219
4.2.1 Опис розробленої технології.....	221
4.2.2 Приклад використання компоненти для розробки сайту водних ресурсів України.....	231
4.2.3 Проблеми реалізації функцій системи та шляхи їх вирішення	233
4.3 Загартування поверхні металу дією рухомими імпульсними джерелами тепла та тиску.....	237
4.3.1 Математична модель: початково-крайова задача поверхневого зміцнювання.....	240
4.3.2 Варіаційна постановка задачі	243
4.3.3 Напівдискретизація варіаційної задачі.....	244
4.3.4 Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі	245
4.3.5 Чисельні експерименти та обговорення.....	247
4.3.5 Висновки.....	253
4.4 Нелінійне деформування тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення.....	254
4.4.1 Вступ.....	254
4.4.2 Вихідні гіпотези теорії оболонок.....	255
4.4.3 Деформація оболонки	257
4.4.4 Рівняння рівноваги та фізичні співвідношення.....	259
4.4.5 Числові приклади	263
4.4.6 Висновки.....	267
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	268
ЧАСТИНА 2.....	282

5. МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	283
5.1 Про чисельне розв'язування задач нестационарної теплопровідності в тривимірних необмежених областях.....	283
5.2 Формулювання задачі.....	284
5.3 Часткова дискретизація за часом	285
5.4 Метод потенціалів для граничних задач	286
5.5 Проекційний метод для двовимірних інтегральних рівнянь	287
5.6 Імплементация методу	291
5.7 Чисельні експерименти	293
5.8 Висновки.....	296
6 УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ.....	297
6.1 Загальна характеристика проблеми	297
6.2 Апостеріорний метод оцінки похибки	299
6.2 Врахування специфіки граничних поверхонь	300
6.4 Висновки.....	308
7 ЗБІЖНІСТЬ КОМБІНОВАНОГО МЕТОДУ НЬЮТОНА-ХОРД І ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	309
7.1 Опис проблеми.....	309
7.2 Звичайні та узагальнені умови Ліпшиця для нелінійного оператора та поділених різниць.....	311
7.3 Збіжність ітераційного процесу (7.4).....	314
7.4 Область єдиності розв'язку	318
7.5 Наслідки.....	319
7.6 Висновки.....	320

8 АНАЛІЗ	ЗБІЖНОСТІ	ДВОТОЧКОВОГО	МЕТОДУ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ		НЕЛІНІЙНИХ	РІВНЯНЬ
З НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИМ ОПЕРАТОРОМ.....			322
8.1 Вступ			322
8.2 Аналіз збіжності.....			323
8.3 Числові експерименти			328
8.4 Висновки.....			334
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ			335
ВИСНОВКИ.....			339

ВСТУП

За останнє тридцятиріччя серед методів чисельного розв'язування наукових та інженерних задач домінуючі позиції здобув метод скінчених елементів (МСЕ). Успішну альтернативу зараз йому складають методи граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Можна навести й випадки, коли кооперування цих методів розв'язування варіаційних та інтегральних рівнянь приводило до успішного розв'язання складних проблем фізики і механіки, демонструючи актуальність подібних досліджень в галузі обчислювальної математики. Систематизований і найбільш повний огляд новітніх досягнень можна знайти в двотомнику *Encyclopedia of Computational Mechanics* / E.Stein, R.de Borst, T.J.R. Hughes, eds. Vol. 1. Solids, Vol. 2. Fluids. Wiley, 2004.

На порядку дня перед теорією та застосуваннями МСЕ стоїть вирішення таких проблем:

(I) як забезпечити належний запас стійкості апроксимацій МСЕ, щоб гарантувати їх надійне застосування до широкого кола задач, зокрема, сингулярно збурених;

(II) яким чином можна забезпечити ефективність обчислення апроксимацій МСЕ з наперед заданою точністю.

Розробка цих фундаментальних проблем далека від остаточних рішень, але вагомі здобутки останніх п'ятнадцяти років привели до становлення двох важливих концепцій: (I) стабілізовані схеми МСЕ, в яких забезпечення стійкості не знижує порядків збіжності апроксимацій; (II) адаптивні схеми МСЕ, які встановили тісний зв'язок між апостеріорними похибками одержаних наближених розв'язків та стратегіями адаптування чисельних схем.

З іншого боку, застосування інтегральних рівнянь передбачає доведення теорем еквівалентності, а також побудову та обґрунтування наближених схем розв'язування інтегральних рівнянь різних класів у суттєво просторовому випадку, ускладнених різним характером нелінійностей, при наявності

незамкнених поверхонь інтегрування. Окрім цього, актуальними залишаються різноманітні прямі та обернені нестационарні проблеми, до яких можна ефективно застосовувати методи ГІР. У зв'язку з цим виникає необхідність створення досконалих чисельних методів розв'язування відповідних еволюційних задач, одно- та двовимірних інтегральних рівнянь із різними показниками та типами сингулярностей у ядрах.

Актуальним є також створення конкурентноспроможного програмного продукту, адаптованого до аналізу широкого кола прикладних проблем.

Метою даного проекту є побудова та обґрунтування числових схем, які створять теоретичну основу для проведення кваліфікованого обчислювального експерименту у проблемах фізики і механіки, які описуються сингулярно збуреними крайовими і початково-крайовими прямими та оберненими задачами для систем рівнянь у часткових похідних.

Основою проектування схем методу скінченних елементів є побудова та аналіз функціоналів джерел похибок, які приводять до надійних та зручних апостеріорних оцінювачів похибок апроксимацій МСЕ та індикаторів їх чутливості, створюючи теоретичний фундамент пошуку оптимальних реалізацій алгоритмів МСЕ, здатних знаходити наближені розв'язки з наперед гарантованою точністю та очікуваною швидкістю збіжності. На цих засадах будуються алгоритми послідовного уточнення апроксимацій МСЕ із системою контролю за пониженням рівня похибок на кожному скінченному елементі до бажаної величини шляхом адаптування розрахункових сіток, підвищення порядку апроксимації та/або зважування нев'язок. Доповненням до адаптивних схем відшукування розв'язків сингулярно збурених задач є стабілізовані МСЕ, які розвинені за допомогою належного вибору базисів просторів вагових функцій методу Петрова-Гальоркіна.

Результати побудови та дослідження згаданих схем МСЕ конкретизуються для сингулярно збурених задач: п'єзо- і піроелектрики та фотопровідності; уточнених моделей оболонок, мілкої води та гідроакустики; формування

дисипативних структур у збудливих середовищах та мігрування домішок. Запропоновані схеми знайшли програмну реалізацію і перевірку своїх можливостей за результатами обчислювальних експериментів.

Альтернативний підхід до створення та обґрунтування чисельних методів для розв'язування прямих і обернених еволюційних задач механіки та фізики полягає у широкому застосуванні граничних інтегральних рівнянь. В основу цих досліджень покладено інтегральні рівняння різних типів та розмірностей, перетворення Лагерра, функції Гріна, декомпозицію складних нерегулярних областей, регуляризуючі методи типу Ньютона тощо. Розглядаються питання розв'язності наближених схем, апроксимації відповідних операторів та просторів, умови стійкості та збіжності.

Конкретні фундаментальні задачі, які вирішує даний проект:

Розробка та аналіз методів дискретизації варіаційних та інтегральних рівнянь математичної фізики, які забезпечують надійні обчислення високоточних апроксимацій їхніх розв'язків, зокрема, із наперед заданою точністю, та оптимальність їх обчислень.

Конструювання схем граничних інтегральних рівнянь, адаптивних та стабілізованих схем МСЕ.

Аналіз апроксимативності, стійкості та збіжності, апіорні та апостеріорні оцінки швидкості збіжності.

Розробка алгоритмів чисельних схем та відповідного програмного забезпечення комп'ютерного моделювання.

ЧАСТИНА 1

1 АПОСТЕРІОРНІ ОЦІНЮВАЧІ ПОХИБОК АПРОКСИМАЦІЙ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

1.1 Коректно сформульована варіаційна задача

Розглянемо варіаційну задачу вигляду (див. також [50])

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V \text{ такий, що} \\ a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (1.1)$$

де V є гільбертовим простором зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_V$ і асоційованою з ним нормою $\|v\|_V := (v, v)_V^{1/2}$, $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ - білінійна форма і $l: V \rightarrow \mathbb{R}$ - лінійний функціонал.

Щоб гарантувати коректність формулювання задачі (1.1), ми припустимо, що її білінійна форма є неперервною та V -еліптичною, іншими словами, знайдуться сталі $0 < a_0 < M$ такі, що

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (1.2)$$

$$|a(v, v)| \geq a_0 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (1.3)$$

На додаток до цього припустимо, що лінійний функціонал l є неперервним на V , іншими словами,

$$\|l\|_* := \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|\langle l, v \rangle|}{\|v\|_V} < +\infty. \quad (1.4)$$

За виконання умов (1.2)-(1.4) теорема Лакса-Мільграма-Вишика [3, 8] гарантує існування єдиного розв'язку $u \in V$, який неперервно залежить від даних задачі, більш докладно,

$$\|u\|_V \leq a_0 \|l\|_*. \quad (1.5)$$

Нарешті, будемо надалі припускати, що (не обов'язково симетрична) білінійна форма $a(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ - породжує (так звану *енергетичну*) норму

$$\|v\| := a(v, v)^{1/2} \quad \forall v \in V, \quad (1.6)$$

еквівалентну нормі $\|\cdot\|_V$.

1.2. Апроксимація Гальоркіна та апіорна оцінка її похибки

З огляду на класичну процедуру дискретизації Гальоркіна введемо сімейство $\{V_h\}_{h>0}$ скінченновимірних підпросторів $V_h \subset V$, яке характеризується малим параметром $h > 0$, і розглянемо задачу вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u_h \in V_h \text{ такий, що} \\ a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (1.7)$$

Лінійні апроксимації МСЕ для трикутних скінченних елементів та дискретизована варіаційна задача (1.7) детальніше описані у [48, 50].

Приймаючи до уваги ортогональність похибки апроксимації Гальоркіна

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in V_h, \quad (1.8)$$

можна показати, що за наведених вище допущень апроксимація $u_h \in V_h$ буде характеризуватися такою *апіорною оцінкою*

$$\|u - u_h\|_V \leq a_0^{-1} M \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V. \quad (1.9)$$

Оцінка (1.9) показує характер залежності похибки апроксимації Гальоркіна $e_h := u - u_h \in V$ від даних задачі та повноти просторів апроксимації V_h .

1.3 Поповнення просторів апроксимацій та умова насичення

Тепер ми визначимо поповнені скінченновимірні підпростори $W_h := V_h \oplus E_h \subset V$, $\dim E_h < +\infty$, і розглянемо нові апроксимації $\bar{u}_h \in W_h$, що задовольняють рівняння

$$\begin{cases} \text{знайти } \bar{u}_h \in W_h \text{ такий, що} \\ a(\bar{u}_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in W_h. \end{cases} \quad (1.10)$$

Оскільки $V_h \subset W_h$, то будемо припускати, що нові апроксимації $\bar{u}_h \in W_h$ збігаються до розв'язку u швидше, ніж попередні $u_h \in V_h$, точніше, будемо вважати, що існує незалежна від значення h стала $\beta \in (0,1)$ така, що буде правильною так звана умова насиченості

$$\|u - \bar{u}_h\| \leq \beta \|u - u_h\| \quad \forall h > 0. \quad (1.11)$$

Скориставшись нерівністю (1.11) та нерівністю трикутника, одержимо звідси оцінки різниці між апроксимаціями \bar{u}_h і u_h такого гатунку

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_h - u_h\| &= \|\bar{u}_h - u + u - u_h\| \leq \|\bar{u}_h - u\| + \|u - u_h\| \\ &\leq (1 + \beta) \|u - u_h\|, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\|\bar{u}_h - u_h\| \geq \|u - u_h\| - \|\bar{u}_h - u\| \geq (1 - \beta) \|u - u_h\|. \quad (1.13)$$

Склавши їх, прийдемо до двосторонньої оцінки похибки апроксимації Гальоркіна

$$(1 + \beta)^{-1} \|\bar{u}_h - u_h\| \leq \|u - u_h\| \leq (1 - \beta)^{-1} \|\bar{u}_h - u_h\|. \quad (1.14)$$

1.4 Апроксимації методу скінченних елементів

Щоб обчислити апроксимації розв'язки задачі (1.10) ми використовуємо сім'ю квазірівномірних сіток $\mathcal{T}_h = \{T\}$, які у двовимірних випадках складаються або з трикутних скінченних елементів $T = K$ або чотирикутних елементів $T = Q$, $h_T = \text{diam}T$, $h = \max h_T$. Далі для кожного $m \in \mathbb{N}$ ми конструюємо скінченно-елементні простори апроксимацій

$$V_h^m(\Omega) := \{v \in V \cap C(\Omega) : v = \sum_{0 \leq i+j \leq m} a_{ij} x^i y^j \quad \forall (x, y) \in K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (1.15)$$

з використанням сіток з трикутних елементів ($m=1,2,3$), див. [50], або

$$V_h^m(\Omega) := \{v \in V \cap C(\Omega) : v = \sum_{0 \leq i, j \leq m} a_{ij} x^i y^j \quad \forall (x, y) \in Q \quad \forall Q \in \mathcal{T}_h\} \quad (1.16)$$

з використанням чотирикутних елементів ($m=1,2$).

За базиси цих просторів ми вибираємо звичайні для методу скінченних елементів функції форми $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ такі, що $\text{supp } \varphi_i := \{\cup T : A_i \in \bar{T}\}$, $\varphi_j(A_i) = \delta_{ij}$, де M число вузлів $A_i = (x_i, y_i)$ триангуляції T_h , які не лежать на границі Γ_D . Тоді шуканий розв'язок (1.10) набуває вигляду лінійної комбінації

$$u_h(x, y) := \sum_{i=1}^M q_i \varphi_i(x, y) \quad (1.17)$$

з поки що невизначеними коефіцієнтами $q_i \in \mathbb{R}$.

Далі, використовуючи процедуру дискретизації Гальоркіна, ми зводимо дискретизовану задачу (1.10) до задачі вигляду

$$\text{знайти } u_h \in V_h^m \text{ таку, що } a(u_h, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V_h^m \quad (1.18)$$

або в алгебраїчній формі: знайти $u_h = \sum_{i=1}^M q_i \varphi_i$ таку, що коефіцієнти q_i задовольняють наступну систему лінійних алгебричних рівнянь, див. [50, 48, 53]

$$\sum_{j=1}^M a(\varphi_j, \varphi_i) q_j = \langle l, \varphi_i \rangle \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.19)$$

Для її розв'язування нами використовується ітераційний метод узагальнених мінімальних нев'язок (GMRES) з перезапусками [50].

Більше цього, у випадку використання чотирикутних скінченних елементів з метою уніфікації процесу обчислень (числового інтегрування з використанням квадратур Гаусса) коефіцієнтів системи алгебричних рівнянь МСЕ ми використовуємо так званий 'стандартний елемент' $Q_0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : |\alpha|, |\beta| \leq 1\}$ з відображенням $\Phi: Q_0 \rightarrow Q$ вигляду

$$\begin{cases} x(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=\pm 1} x_{\frac{1}{2}(5+2j-ij)} (1+i\alpha)(1+j\beta), \\ y(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=\pm 1} y_{\frac{1}{2}(5+2j-ij)} (1+i\alpha)(1+j\beta) \quad \forall (\alpha, \beta) \in Q_0, \end{cases}$$

де $A_m = (x_m, y_m)$, $m = 1, \dots, 4$, є вершинами чотирикутника Q .

Якщо апроксимації МСЕ відшуковуються з використанням трикутних скінченних елементів, то обчислення коефіцієнтів систем алгебричних рівнянь здійснюється з використанням квадратур Дюнавана [23] – квадратур Гаусса, які адаптовані до такого сорту скінченних елементів.

1.5 Варіаційна задача про апостеріорний оцінювач похибки

З огляду на той факт, що обчислення уточненої апроксимації $\bar{u}_h \in W_h$ вимагає, як правило, значно більших обчислювальних затрат у порівнянні із обчисленням $u_h \in V_h$, ми будемо шукати її наближення за допомогою розв'язку задачі про апостеріорний оцінювач похибки (див. також [1, 46, 48, 53])

$$\begin{cases} \text{знайти індикатор похибки } e_h \in E_h \text{ такий, що} \\ a(e_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \\ \quad \quad \quad := \langle l, v \rangle - a(u_h, v) \quad \forall v \in E_h, \end{cases} \quad (1.20)$$

Задача (1.20) є коректно сформульованою, тобто має єдиний розв'язок, причому

$$a(e_h, v) = a(u - u_h, v) = a(\bar{u}_h - u_h, v) \quad \forall v \in E_h; \quad (1.21)$$

$$\|e_h\| = \|\rho(u_h)\|_*. \quad (1.22)$$

Теорема 1.1 про апостеріорний оцінювач похибки (АОП).

Нехай $u \in V, u_h \in V_h$ і $\bar{u}_h \in W_h = V_h \oplus E_h$ є розв'язками задач (1.1), (1.7) і (1.10) відповідно. Припустимо також, що простори апроксимацій V_h вибрано в такий спосіб, що виконуються (і) умова насиченості (1.11) та підсилена нерівність Коші

$$|a(v, w)| \leq \gamma \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V \quad (1.23)$$

зі сталою $0 < \gamma < 1$, значення якої не залежить від h .

Тоді апостеріорний оцінювач похибки $e_h \in E_h$ встановлює цілком обчислювані двосторонні оцінки похибки апроксимації $e := u - u_h \in V$ такого татунку

$$\|e_h\| \leq \|u - u_h\| \leq C \|e_h\|, \quad (1.24)$$

де стала $C = (1 - \beta)^{-1}(1 - \gamma^2)^{-1/2}$.

Доведення. З огляду на (1.21) одержимо $\|e_h\|^2 = a(u - u_h, e_h) \leq \|u - u_h\| \|e_h\|$, звідки приходимо до лівої нерівності в (1.24).

Далі, візьмемо довільні $v \in V_h, w \in E_h$ і зауважимо, що

$$\begin{aligned} a(\bar{u}_h - u_h, v + w) &= a(\bar{u}_h - u_h, w) = a(e_h, w) \\ &\leq \|e_h\| \|w\| \quad \forall v \in V_h, \forall w \in E_h. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Скориставшись підсиленою нерівністю Коші (1.23), одержимо таку оцінку

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= a(v + w, v + w) \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + a(v, w) + a(w, v) \\ &\geq \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\gamma \|v\| \|w\| \\ &= \|w\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 + (\|v\| - \gamma \|w\|)^2 \\ &\geq (1 - \gamma^2) \|w\|^2 \quad \forall v, w \in V. \end{aligned}$$

Повертаючись тепер до нерівності (1.25), знайдемо, що

$$\begin{aligned} a(\bar{u}_h - u_h, v + w) &\leq \|e_h\| \|w\| \\ &\leq (1 - \gamma^2)^{-1/2} \|e_h\| \|v + w\| \quad \forall v \in V_h, \forall w \in E_h \end{aligned} \quad (1.26)$$

або

$$\|\bar{u}_h - u_h\| = \sup_{v+w \in W_h} \frac{a(\bar{u}_h - u_h, v + w)}{\|v + w\|} \leq (1 - \gamma^2)^{-1/2} \|e_h\|. \quad (1.27)$$

Застосувавши тепер праву нерівність з (1.14), приходимо до оцінки

$$(1 - \beta) \|u - u_h\| \leq \|\bar{u}_h - u_h\| \leq (1 - \gamma^2)^{-1/2} \|e_h\|, \quad (1.28)$$

яка доводить правильність задекларованої в (1.24) правої нерівності. ▲

Одержані в (1.24) двосторонні оцінки похибки апроксимації Гальоркіна $u_h \in V_h$ свідчать про *ефективність* цієї процедури (ліва нерівність) та її *надійність* (права нерівність). Більше цього, на відміну від апіорних оцінок

похибок (1.14) тепер існує потенціальна можливість економного обчислення індикатора похибки $e_h \in E_h$, а саме, нижче ми запропонуємо алгоритми цих обчислень з використанням специфіки методу скінченних елементів.

1.6 Поелементно визначені апостеріорні оцінювачі похибок апроксимацій МСЕ залишкового гатунку та їх обчислення

Щоб отримати апроксимації розв'язку задачі (1.20), ми вводимо поелементно-визначені індикаторні функцію похибки ε_h , які є розв'язками таких локальних задач, див. також [84]:

(i) *задача Діріхле для апостеріорного оцінювача похибок апроксимацій МСЕ*

$$\begin{cases} \text{задано } \mathcal{T}_h, u_h \in V_h^m(\Omega); \\ \text{знайти } \varepsilon_T^{Dir} \in E_h(T) = H_0^1(T) \text{ такий, що} \\ a(\varepsilon_T^{Dir}, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E_h(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{cases} \quad (1.29)$$

(ii) *задача Неймана [48, 49, 51] для апостеріорного оцінювача похибок апроксимацій МСЕ*

$$\begin{cases} \text{задано } \mathcal{T}_h, u_h \in V_h^m(\Omega); \\ \text{знайти } \varepsilon_T^{Neu} \in E_h(T) = \{v \in H^1(T) : v(A_i) = 0 \quad \forall A_i \in \bar{T}\} \text{ такий, що} \\ a(\varepsilon_T^{Neu}, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E_h(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{cases} \quad (1.30)$$

Розв'язки коректно сформульованих задач Діріхле (1.29) та Неймана (1.30) визначають розподіли індикаторів похибок на кожному скінченному елементі

$$\eta_T^{Dir} := \|\varepsilon_T^{Dir}\|_{L^2(T)}, \quad \eta_T^{Neu} := \|\varepsilon_T^{Neu}\|_{L^2(T)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad (1.31)$$

та глобальні апостеріорні оцінювачі похибок апроксимацій МСЕ

$$\eta^{Dir} := \left[\sum_{Q \in \mathcal{T}_h} (\eta_Q^{Dir})^2 \right]^{1/2}, \quad \eta^{Neu} := \left[\sum_{Q \in \mathcal{T}_h} (\eta_Q^{Neu})^2 \right]^{1/2} \quad \forall \mathcal{T}_h \quad \forall h. \quad (1.32)$$

Оцінювач Діріхле η^{Dir} наслідує оригінальну концепцію апостеріорної оцінки похибки апроксимацій МСЕ, яка запропонована в [2], і є подібним до

оцінювачів залишкового типу, які базуються на локальній крайовій задачі Діріхле, див. [52].

Новизною є формулювання локальної задачі Неймана у вигляді (1.30): вона побудована на *природній гіпотезі*, що попередньо знайдена апроксимація МСЕ $u_h \in V_h^m(\Omega)$ здатна відтворити точні значення розв'язку $u \in V$ варіаційної задачі у вузлах кожного скінченного елемента. Більше цього, таке припущення одночасно знімає питання відносно існування та єдиності розв'язку задачі Неймана, які накладають обтяжливі обмеження для програмної реалізації алгоритмів такого гатунку, див. напр. [3]. Такий спосіб побудови оцінювачів Неймана запропоновано авторами у працях [49, 50, 52, 53, 84] для трикутних сіток та [48, 51] для сіток з чотирикутників.

Цілком зрозуміло, що сформульовані задачі про апостеріорні оцінювачі похибок надають економний спосіб комп'ютерного обчислення апостеріорних оцінок апроксимації МСЕ в процесі послідовного перегляду скінченних елементів біжучої триангуляції. Таким чином, основними питаннями, які на цьому етапі вимагають відповіді, є такі:

- 1) Яким чином необхідно вибрати скінченновимірні підпростори апроксимацій в просторах $E_h(T)$, щоб гарантувати ефективність та надійність обчислених наближень до істинного розподілу похибок?
- 2) Чи знайдені наближення до похибок відтворюють порядки збіжності апроксимацій МСЕ, які передбачені апріорними оцінками похибок на рівномірно згущуваних сітках скінченних елементів за належної регулярності даних задачі?
- 3) Чи обчислювані і такий спосіб наближення до похибок здатні належним чином характеризувати апроксимацій МСЕ для розв'язків сингулярно збурених крайових задач, а також нелінійних крайових задач?
- 4) Чи знайдені наближення до похибок можуть бути використані для обчислення двосторонніх оцінок істинної похибки апроксимацій МСЕ?

5) Як використати знайдені наближення до похибок для обчислення апроксимацій МСЕ з наперед гарантованою точністю і оптимальним використанням компютерних ресурсів, іншими словами, чи здатні схеми МСЕ адаптуватися до конкретної структури шуканих розв'язків крайових задач ?

Відповіді на ці та близькі за змістом питання подано нижче у вигляді достатньо повних результатів аналізу апроксимацій модельних задач з різноманітними сингулярностями та нелінійностями.

1.7 АОП частинами лінійних апроксимацій МСЕ

Маючи на меті доповнення наших теоретичних положень результатами виконаних обчислювальних експериментів тут і нижче ми зупиняємося на крайовій задачі дифузії-адвекції-реакції (див. також [49, 49, 51, 53, 83, 84])

$$\begin{cases} \text{знайти } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -\nabla \cdot [\mu \nabla u] + \beta \cdot \nabla u + \sigma u = f[u] \text{ в } \Omega \subset R^2, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma \equiv \partial\Omega \end{cases} \quad (1.33)$$

з наступним її варіаційним формулюванням (див. також [48, 49, 51, 53, 83])

$$\begin{cases} \text{задано } V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma\}, \\ a(w, v) := \int_{\Omega} [\mu \nabla w \cdot \nabla v + v \beta \cdot \nabla w + \sigma w v] dx, \\ N(w; v) := \int_{\Omega} f[w] v dx \quad \forall w, v \in V; \\ \text{знайти } u \in V \text{ таку, що } a(u, v) = N(u; v) \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (1.34)$$

де $\mu = \mu(x)$, $\beta = \{\beta_i(x)\}_{i=1}^2$, $\sigma = \sigma(x)$, $f[w] \equiv f[x, w(x)]$ задані достатньо регулярні функції, що забезпечують існування та єдиність її розв'язку u . Наближений розв'язок $u_h \cong u$ шукатимемо у просторі кусково лінійних скінчено-елементних апроксимацій $V_h^1(\Omega)$ способом, який передбачає: (i) дискретизацію задачі (1.30) методом Гальоркіна [49, 50], (ii) лінеаризацію

отриманої системи нелінійних рівнянь методом Ньютона та (iii) розв'язування одержаних систем алгебричних рівнянь ітераційним методом узагальнених мінімальних нев'язок (GMRES) [50, 55].

У випадку слабкої нелінійності на додаток до поданого раніше оцінка похибки знайденої апроксимації u_h використовує лінеаризовану задачу про похибку (див. [83]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти похибку апроксимації } e := u - u_h \in E := V \setminus V_h \\ \text{таку, що } b(u_h; e, v) = \rho(u_h; v) \quad \forall e \in E, \\ b(w; z, v) := a(z, v) - \int_{\Omega} f_u[w]z dx, \\ \rho(w; v) := N(w; v) - a(w, v) \quad \forall w, z, v \in V, \end{array} \right. \quad (1.35)$$

яка розв'язується застосуванням процедури Гальоркіна в ортогональному до V_h скінченновимірному підпросторі $E_h \subset V \setminus V_h$ (див. також [83]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти оцінювач похибки } e_h \in E_h \text{ такий, що} \\ b(u_h; e_h, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in E_h. \end{array} \right. \quad (1.36)$$

1.7.1 Оцінювач Діріхле для лінійних апроксимацій на трикутнику

Поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибки (АОП) шукаємо у вигляді кубічного полінома на довільному трикутнику K триангуляції

$$\left\{ \begin{array}{l} e(x)|_K \simeq e_K^{Dir}(x) := \lambda_K^{Dir} \varphi_K^{Dir}(x), \\ \text{supp } \varphi_K^{Dir} := K, \quad \varphi_K^{Dir} := 27L_iL_jL_k, \end{array} \right. \quad (\text{див.рис. 1.1}) \quad (1.37)$$

де $L_m = L_m(x)$ - його барицентричні координати. У цьому випадку коефіцієнти λ_K для кожного трикутника K визначаються у простий спосіб:

$$\lambda_K^{Dir} \equiv e_K^{Dir}(x^K) = \frac{\langle \rho(u_h), \phi_K^{Dir} \rangle}{b(u_h; \phi_K^{Dir}, \phi_K^{Dir})}, \quad (1.38)$$

про решту деталей див. [50].

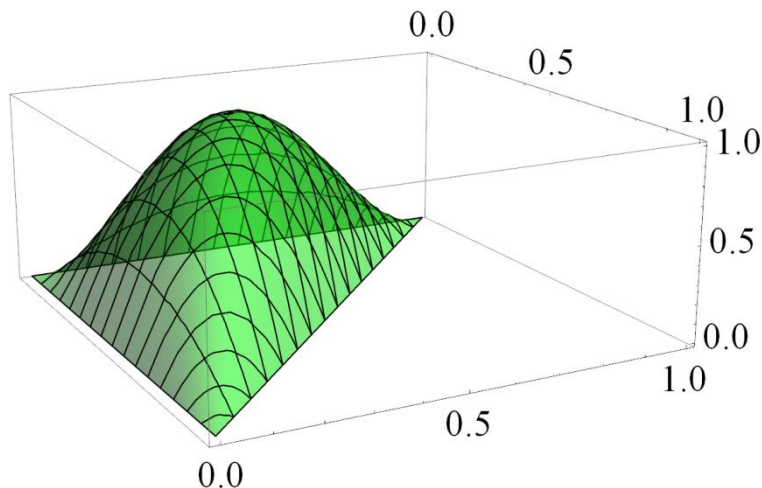


Рисунок 1.1 – Базисна функція $\varphi_K^{Dir} := 27L_1L_2L_3$

Альтернативою цьому способу може бути вибір функції $\varphi_K = \varphi_K(x)$ у вигляді частинами лінійної функції Куранта з носієм $\text{supp} \varphi_K = K$, яка приписана центру ваги цього трикутника.

1.7.2 Оцінювач Неймана для лінійних апроксимацій на трикутнику

Апостеріорний оцінювач похибки (АОП) шукаємо у вигляді квадратичного полінома (див. [48, 49, 53, 83]) на довільному трикутнику K триангуляції (див. рис. 1.2)

$$\begin{cases} e(x)|_K \approx e_K^{Neu}(x) := \lambda_K^{Neu} \varphi_K^{Neu}(x), \\ \text{supp} \varphi_K^{Neu} := K, \quad \varphi_K^{Neu} := 3(L_iL_j + L_jL_k + L_kL_i), \end{cases} \quad (1.39)$$

де $L_m = L_m(x)$ - його барицентричні координати. Коефіцієнти λ_K для кожного трикутника K визначаються у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \lambda_K^{Neu} \equiv e_K^{Neu}(x^K) &= \frac{\rho(u_h; \phi_K^{Neu})}{b(u_h; \phi_K^{Neu}, \phi_K^{Neu})} \cong \\ &\cong 2|K| \frac{2|K| f^K - \sum_m u_m [\beta_1^K b_m + \beta_2^K c_m + \frac{2}{3}|K| \sigma^K]}{\mu^K \sum_m (b_m^2 + c_m^2) + \frac{16}{5}|K|^2 [\sigma^K - f_u^K]}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

де μ^K , β_i^K , σ^K , f^K , f_u^K - значення відповідних функцій у центрі ваги x^K трикутника, $|K|$ - площа цього трикутника, про решту деталей див. [49, 50, 83].

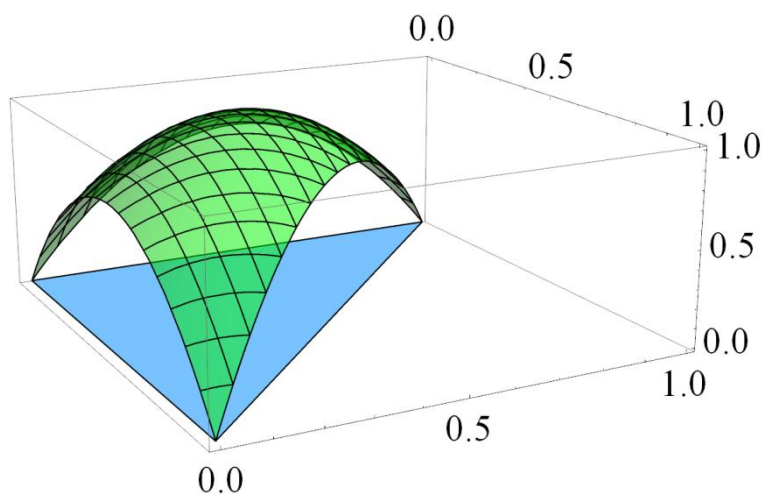


Рисунок 1.2 – Базисна функція $\varphi_K := 3(L_i L_j + L_j L_k + L_k L_i)$

1.7.3 Аналіз збіжності апроксимацій МСЕ для сингулярно збурених задач

Розглянемо сингулярно збурену лінійну крайову задачу адвекції-дифузії [34]

$$\begin{cases} -\mu \Delta u - (\beta_1, \beta_2) \cdot \nabla u = 0 & \text{в } \Omega = (0,1)^2, \\ u = U & \text{на } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.41)$$

з точним розв'язком $U(x, y) = G[m\beta_1(x) + v\beta_2(y)]G[m\beta_2(y) - v\beta_1(x)]$,

де $\mu = 10^{-4}$, $\beta_1(x) = x - 0.6$, $\beta_2(y) = y - 0.3$, $m = \cos(\pi/6)$, $v = \sin(\pi/6)$,
 $G z = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{erf}(z/\sqrt{2\mu})]$. Ця задача характеризується числом Пекле
 $Pe = \mu^{-1} \max_{(x,y) \in \Omega} \sqrt{\beta_1^2(x) + \beta_2^2(y)} \cong 0.8062 \mu^{-1} = 8062$, є сингулярно збуреною,
 що демонструє на рис. 1.3 її розв'язок з внутрішнім шаром.

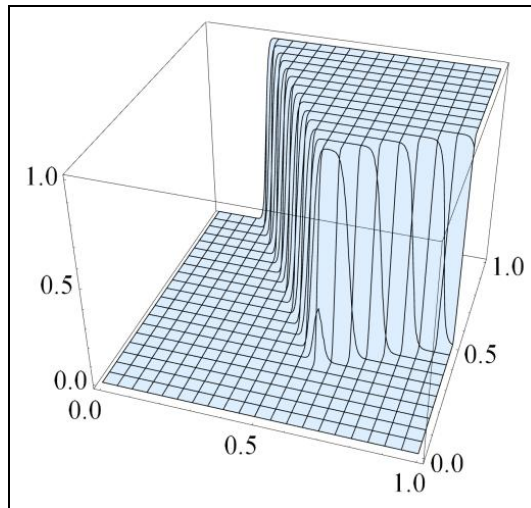


Рисунок 1.3 – Точний розв'язок задачі (1.41)

Рис. 1.4 ілюструє апроксимацію МСЕ розв'язку задачі (1.41) та розподіл значень похибки $|u - u_h|$, яка, незважаючи на досить густу сітку, набуває в околі внутрішнього шару значень відносної похибки, які близькі до 100%.

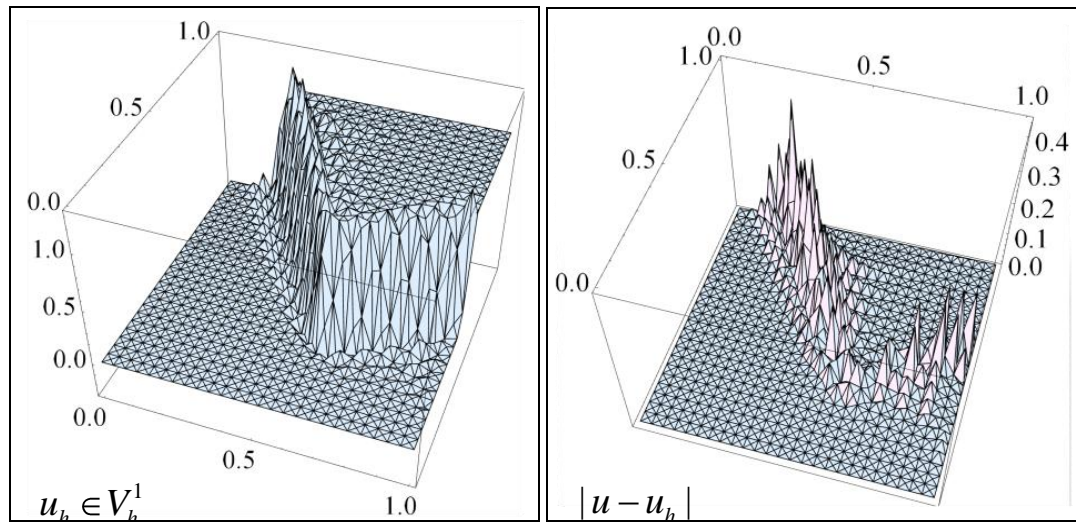


Рисунок 1.4 – Апроксимація МСЕ розв’язку задачі (1.41) та її похибка, обчислені на рівномірній сітці з 2500 трикутників

Щоб проаналізувати *надійність, ефективність та порядок збіжності* апостеріорних оцінювачів похибок типу Неймана та Діріхле, спочатку розглянемо їх характеристики, обчислені на послідовності вкладених триангуляцій з рівномірним згущенням так, що на кожному його кроці існуючий трикутник підлягав поділу на чотири подібних. Деякі результати цих експериментів винесені до табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Збіжність частинами лінійних апроксимацій розв’язку задачі (1.41) та їх апостеріорних оцінювачів похибок, обчислених на рівномірно згущуваних сітках

k	$Nod \mathcal{T}_h$	$Card \mathcal{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Neu}
1	1 301	2500	98.498	81.905	99.747	7.2	17.6	-	-
2	5 101	10 000	90.447	47.445	99.019	4.5	15.1	1.5	1.0
3	2 0201	40 000	32.963	17.020	79.247	2.0	7.6	2.6	2.5
4	8 0401	160 000	5.651	7.195	21.205	0.8	3.0	2.6	2.6
5	320 801	640 000	1.785	3.542	6.882	0.5	1.9	1.7	1.7
6	1 281 601	2 560 000	0.751	1.770	2.907	0.4	1.6	1.3	1.3

Тут k – номер кроку згущення сітки, $M_k = \text{Nod } \mathcal{T}_h$ – кількість її вузлів, $\text{Card } \mathfrak{T}_h$ – кількість скінченних елементів сітки, $\varepsilon := \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|u\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ – істинна відносна похибка, $\varepsilon_h^{\text{Dir}} := \|e_h^{\text{Dir}}\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ – апроксимація відносної похибки на основі апостеріорного оцінювача Діріхле, $\varepsilon_h^{\text{Neu}} := \|e_h^{\text{Neu}}\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{1,\Omega}^{-1} 100\%$ – апроксимація відносної похибки на основі апостеріорного оцінювача Неймана, $\kappa^{\text{Dir}} := \|e_h^{\text{Dir}}\|_{1,\Omega} \|u - u_h\|_{1,\Omega}^{-1}$ – індекс ефективності апостеріорного оцінювача Діріхле, $\kappa^{\text{Neu}} := \|e_h^{\text{Neu}}\|_{1,\Omega} \|u - u_h\|_{1,\Omega}^{-1}$ – індекс ефективності апостеріорного оцінювача Неймана, $p^{\text{Dir}} := 2 \ln(\| (e_h^{\text{Dir}})^k \| \| (e_h^{\text{Dir}})^{k+1} \|^{-1}) / \ln(M_{k+1} M_k^{-1})$ та $p^{\text{Neu}} := 2 \ln(\| (e_h^{\text{Neu}})^k \| \| (e_h^{\text{Neu}})^{k+1} \|^{-1}) / \ln(M_{k+1} M_k^{-1})$ – відповідні порядки збіжності.

Табл. 1.1 показує, що порядки збіжності обох оцінювачів похибок зі згущенням сіток монотонно наближаються до одиниці, як це теоретично очікувалося. Хоча знайдені значення апостеріорних оцінювачів похибок Діріхле та Неймана різняться між собою приблизно в чотири рази, вони *надійно обчислюють нижні та верхні оцінки істинної похибки* для апроксимацій розв'язку задачі (1.41) відповідно.

Проте досягнути 1%-го рівня відносної похибки апроксимації розв'язку сингулярно збуреної задачі (1.41) на рівномірних сітках вдається дорогою ціною: для цього необхідно організувати обчислення і зберігання коефіцієнтів матриць та правих частин, а потім розв'язувати системи лінійних алгебричних рівнянь з величезною кількістю (понад 10^6) невідомих. В даній праці ці нетривіальні завдання розв'язано з використанням: (і) *спеціальних форматів зберігання* рідкозаповнених ненульовими коефіцієнтами матриць, (іі) *ітераційних методів з передобумовленням* (див. [50]) для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь.

На додаток до цього, щоб оптимізувати об'єми обчислювальних витрат для відшукування високоточних апроксимацій МСЕ, запропоновані тут АОП (1.37) та (1.39) покладено в основу розроблених в цьому проекті *h-адаптивних схем*

методу скінченних елементів, які мінімізують обчислення за рахунок надійних стратегій локального згущення розрахункових триангуляцій. З огляду на ці обставини можливості розробленого програмного забезпечення було доповнено реалізацією алгоритму триангулювання двовимірних областей методом бісекції; більш повний опис див. нижче.

Ці та подібні результати обчислювальних експериментів з апостеріорними оцінювачами Діріхле (1.37) та Неймана (1.41) для модельних сингулярно збурених задач можна знайти в працях авторів [49, 50].

1.7.4 Аналіз збіжності числових результатів для модельних нелінійних задач

Тепер проаналізуємо придатність побудованих апостеріорних оцінювачів Діріхле (1.37) та Неймана (1.41) для оцінок похибок апроксимацій розв'язків нелінійних крайових задач. Для цього розглянемо результати обчислювальних експериментів з такою нелінійною крайовою задачею

$$\begin{cases} -\Delta u = au^3 + bu^2 \text{ in } \Omega = (0,1)^2, \\ u \equiv U \text{ on sides } x=1, y=1; \nabla u \cdot \nu \equiv 0 \text{ on } x=0, y=0, \end{cases} \quad (1.42)$$

яка має точний розв'язок $U = (\sin r^2 + 2)^{-1}$ з коефіцієнтами $a = -8l^2 r^2 \cos^2 r^2$, $b = 4l^2 (\cos r^2 - r^2 \sin r^2)$, $r^2 = l^2(x^2 + y^2)$, див. рис. 1.5.

Від параметра l залежить чутливість правої частини задачі (1.42) до похибок апроксимацій МСЕ. Чим більше його значення, тим істотніше похибки апроксимації МСЕ спотворюють структуру точного розв'язку задачі (1.42). В наших експериментах ми обмежуємося вибором значення $l = 3.0$.

На рис. 1.6 зображено апроксимацію МСЕ розв'язку та її похибку для задачі (1.42) на рівномірній триангуляції з 2500 однакових трикутників.

Відзначимо тут, що найбільші значення похибок досягаються в областях з великим градієнтом розв'язку.

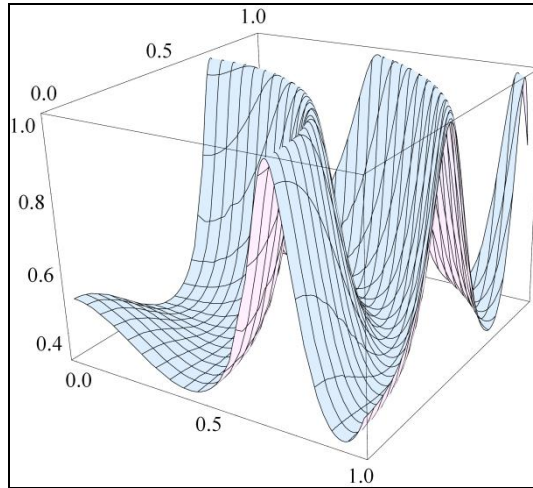


Рисунок 1.5 – Точний розв'язок задачі (1.42)

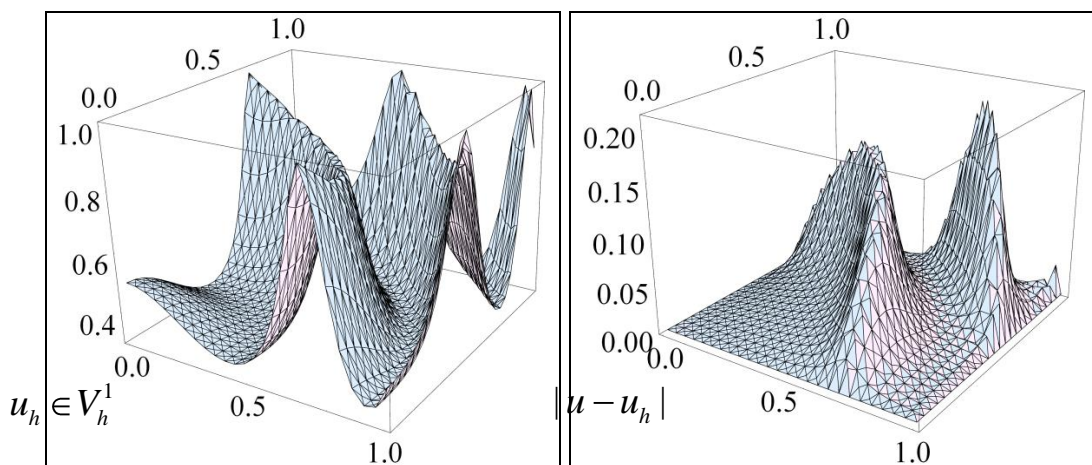


Рисунок 1.6 – Апроксимація МСЕ розв'язку задачі (1.42) та її похибка, обчислені на рівномірній сітці з 2500 трикутників

Більш детальну характеристику запропонованих апостеріорних оцінювачів Діріхле і Неймана для цієї нелінійної задачі можна зробити на підставі даних табл. 1.2, укладеної в той же спосіб, як це зроблено у п. 1.7.3.

Таблиця 1.2 – Збіжність частинами лінійних апроксимацій розв’язку задачі (1.42) та їх апостеріорних оцінювачів похибок, обчислених на рівномірно згущуваних сітках

k	$Nod \mathcal{T}_h$	$Card \mathcal{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	ρ^{Dir}	ρ^{Neu}
1	1 301	2500	7.319	26.906	28.243	0.2	0.9	-	-
2	5 101	10 000	3.769	11.899	14.596	0.3	1.2	0.8	0.8
3	2 0201	40 000	1.906	5.218	7.381	0.4	1.4	0.9	0.9
4	8 0401	160 000	0.956	2.462	3.703	0.4	1.5	1.0	1.0
5	320 801	640 000	0.478	1.209	1.853	0.4	1.5	1.0	1.0
6	1 281 601	2 560 000	0.239	0.602	0.927	0.4	1.5	1.0	1.0

Наведені тут результати обчислень апроксимацій розв’язку та їхніх похибок на послідовності рівномірних сіток для задачі (1.42) свідчать про незначний вплив нелінійності у структурі її рівняння на показники швидкості збіжності та індекси ефективності за достатньо малих значень діаметрів триангуляцій, якщо їх порівнювати із висновками, зробленими на підставі даних табл. 1.1 для лінійної задачі (1.41).

Хоча у порівнянні з випадком лінійної задачі тут слід відзначити такі відмінності у характері збіжності знайдених розв’язків: (i) як значення порядків збіжності апроксимацій, так і індексів ефективності оцінювачів похибок, *досить швидко* досягають рівня своїх асимптотичних та граничних значень, що можна пояснити виявом властивостей *ортогональних проєкцій* у знайдених апроксимаціях МСЕ; (ii) як значення порядків збіжності апроксимацій, так і індексів ефективності оцінювачів похибок, *монотонно зростають* (монотонно зменшуються у лінійній задачі) до рівня своїх граничних значень, що з великою вірогідністю можна пояснити впливом нелінійності та її способом числового трактування; (iii) оскільки похибки та їх оцінювачі в задачах (1.41) і (1.42) різняться близько у три рази, то слабка нелінійність крайової задачі не

породжує настільки суттєвих локальних нерегулярностей розв'язків, як це спостерігається у випадку сингулярної збуреності задачі (1.41).

Ці та подібні результати обчислювальних експериментів з апостеріорними оцінювачами Діріхле (1.37) та Неймана (1.41) для модельних нелінійних задач можна знайти у [49].

Підводячи підсумки виконаних обчислювальних експериментів з модельними сингулярно збуреними та/або слабонелійними крайовими задачами можна стверджувати, що побудовані нами

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{поелементно визначені апостеріорні оцінювачі похибок} \\ \text{частинами лінійних апроксимацій 1.37 та 1.41} \\ \text{здатні надійно та ефективно обчислювати границі меж} \\ \text{істинних похибок таких апроксимацій MSE.} \end{array} \right.$$

1.8 АОП частинами квадратичних апроксимацій MSE на трикутних скінченних елементах

1.8.1 Оцінювач Діріхле квадратичних апроксимацій на трикутнику

Поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибки (АОП) шукаємо у вигляді кубічного полінома на довільному трикутнику K триангуляції

$$\left\{ \begin{array}{l} e(x)|_K \approx e_K^{Dir}(x) := \lambda_K^{Dir} \varphi_K(x), \\ \text{supp } \varphi_K := K, \quad \varphi_K := 27 L_i L_j L_k, \end{array} \right. \quad (1.43)$$

де $L_m = L_m(x)$ - його барицентричні координати. У цьому випадку коефіцієнти λ_K для кожного трикутника K визначаються у простий спосіб:

$$\lambda_K^{Dir} \equiv e_K^{Dir}(x^K) = \frac{\langle \rho(u_h), \phi_K \rangle}{b(u_h; \phi_K, \phi_K)}, \quad (1.44)$$

про решту деталей див. [50].

1.8.2 Оцінювач Неймана квадратичних апроксимацій на трикутнику

Поелементно визначений апостеріорний оцінювач Неймана для частинами квадратичних апроксимацій МСЕ визначаємо в барицентричних координатах на кожному трикутнику K триангуляції в такий спосіб

$$\begin{cases} e(x)|_K \approx e_K^{Neu}(x) := \lambda_K^{Neu} \varphi_K(x), \\ \text{supp } \varphi_K := K, \\ \varphi_K := L_i L_j (L_i - L_j) + L_j L_m (L_j - L_m) + L_i L_m (L_m - L_i). \end{cases} \quad (1.45)$$

1.8.3 Аналіз збіжності апроксимацій МСЕ

Розглянемо крайову задачу з рівнянням Гельмгольца

$$\begin{cases} -\Delta u - 10^3 u = f \text{ в } \Omega = (0,1)^2, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.46)$$

де права частина $f = f(x, y)$ вибрана таким чином, що функція $U(x, y) = \sin(3\pi x) \sin(3\pi y)$ є точним розв'язком задачі (1.46).

Знову ж таки для того, щоб проаналізувати *надійність, ефективність та порядки збіжності* апостеріорних оцінювачів похибок типу Неймана та Діріхле, розглянемо їхні характеристики таким самим чином, як це було зроблено в пункті 1.7.3. Результати цих експериментів винесені до табл. 1.3.

Табл. 1.3 показує, що порядки збіжності оцінювача похибки типу Діріхле зі згущенням сітки приблизно рівні очікованому теоретичному значенню, а саме – 2. Незважаючи на те, що АОП типу Неймана демонструє перший порядок збіжності, він разом із АОП типу Діріхле дозволяє *надійно отримати нижні та верхні оцінки істинної похибки* апроксимацій розв’язку задачі (1.46).

Таблиця 1.3 – Збіжність частинами квадратичних апроксимацій розв’язку задачі (1.46) та їх апостеріорних оцінювачів похибок, обчислених на рівномірно згущуваних сітках

k	$Nod \mathcal{T}_h$	$Card \mathcal{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Neu}
1	145	64	28.998	37.793	10.307	0.8	0.3	-	-
2	545	256	1.994	5.210	6.293	0.4	1.2	4.2	0.9
3	2113	1024	0.506	1.236	3.102	0.4	2.5	2.0	1.0
4	8321	4096	0.133	0.308	1.548	0.4	5.0	1.9	1.0
5	33025	16384	0.034	0.077	0.774	0.4	10.1	2.0	1.0

1.9 АОП для білінійних апроксимацій МСЕ на чотирикутниках

Тут ми розглянемо скінченно-елементну апроксимацію $u_h \in V_h^{1,2}$, записану в локальних координатах (α, β) чотирикутника Q у вигляді білінійної функції цих змінних

$$u_h|_Q = u_Q(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=\pm 1} u_h(A_{(5+2j-ij)/2})(1+i\alpha)(1+j\beta).$$

1.9.1 Оцінювач Діріхле білінійних апроксимацій на чотирикутниках

Поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибки (АОП) білінійних апроксимацій МСЕ шукаємо у вигляді біквдратичного полінома на довільному чотирикутнику Q

$$\begin{cases} e|_Q \approx e_Q^{Dir}(\alpha, \beta) := \lambda_Q^{Dir} \phi_Q^{Dir}(\alpha, \beta), \\ \text{supp } \phi_Q^{Dir} := Q, \\ \phi_Q^{Dir}(\alpha, \beta) := (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2). \end{cases} \quad (1.47)$$

У цьому випадку коефіцієнти λ_Q^{Dir} для кожного чотирикутника Q визначаються у простий спосіб:

$$\lambda_K^{Dir} \equiv e_K^{Dir}(x^K) = \frac{\langle \rho(u_h), \phi_Q^{Dir} \rangle}{b(u_h; \phi_Q^{Dir}, \phi_Q^{Dir})}, \quad (1.48)$$

про решту деталей див. [50].

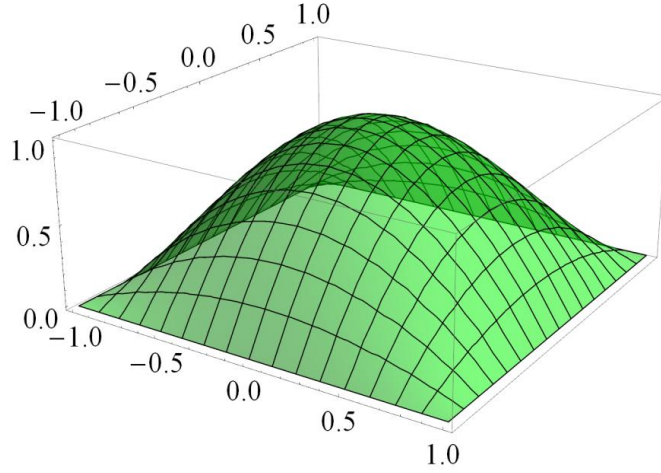


Рисунок 1.7 – Базисна функція $\phi_Q^{Dir}(\alpha, \beta) = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)$

1.9.2 Оцінювач Неймана білінійних апроксимацій на чотирикутниках

Беручи до уваги умови задачі (3), ми визначаємо індикаторну функцію $\bar{\varepsilon}_h$ на кожному скінченному елементі Q (див. рис. 1.8) в локальному вигляді

$$\begin{aligned} e|_Q &= e_Q^{Neu}(\alpha, \beta) := \lambda_Q^{Neu} [1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)] \\ &= \lambda_Q^{Neu} \phi_Q^{Neu}(\alpha, \beta) \quad \forall (\alpha, \beta) \in Q_0, \end{aligned} \quad (1.49)$$

де

$$\lambda_Q^{Neu} = \frac{\langle \rho[u_h], \phi_Q^{Neu} \rangle}{b(u_h; \phi_Q^{Neu}, \phi_Q^{Neu})} \quad \forall Q \in \mathcal{T}_h, \quad (1.50)$$

Тоді індикатор похибки на елементі $\bar{\eta}_Q^{Neu}$ і глобальна оцінка похибки $\|\bar{\varepsilon}_h^{Neu}\|_{1,\Omega}$ обчислюється у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_Q^{Neu} &= \|\bar{\varepsilon}_Q^{Neu}\|_{1,Q} = |\lambda_Q^{Neu}| \|\phi_Q^{Neu}\|_{1,Q} \quad \forall Q \in \mathcal{T}_h, \\ \|\bar{\varepsilon}_h^{Neu}\|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{Q \in \mathcal{T}_h} (\bar{\eta}_Q^{Neu})^2 \quad \forall \mathcal{T}_h. \end{aligned} \quad (1.51)$$

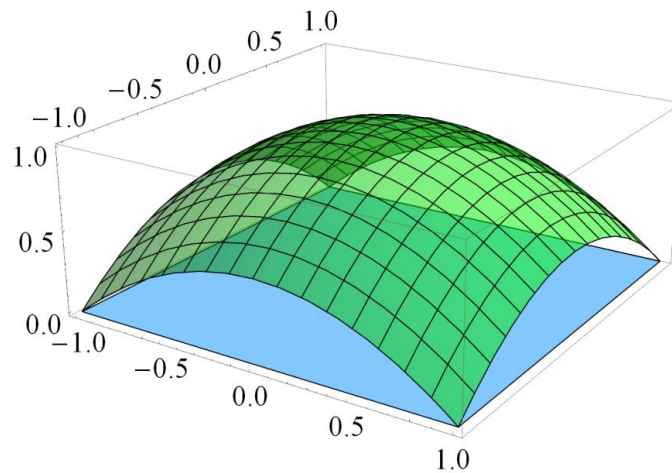


Рисунок 1.8 – Базисна функція $\phi_0^{Neu}(\alpha, \beta) = 1 - \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}\alpha^2\beta^2$

1.9.3 Аналіз збіжності апроксимацій для сингулярно збурених задач

Подібно як у п. 1.7 ми характеризуємо властивості поелементних оцінювачів похибок Діріхле (1.47) та Неймана (1.49) розв'язування модельних задач з відомими точними розв'язками і демонструємо результати виконаних числових експериментів з білінійними скінченно-елементними апроксимаціями на рівномірно згущуваних сітках з чотирикутників діаметра h .

Спочатку розглянемо сингулярно збурену крайову задачу з внутрішніми шарами (1.41). Щоб мати можливість порівняння з результатами аналізу апостеріорних оцінювачів частинами лінійних апроксимацій, виконаного нами в п. 1.7, ми наводимо рис. 1.9 з графіками білінійної апроксимації МСЕ та модуля істинної похибки цієї апроксимації, обчислених на рівномірній сітці 35×35 із чотирикутних скінченних елементів.

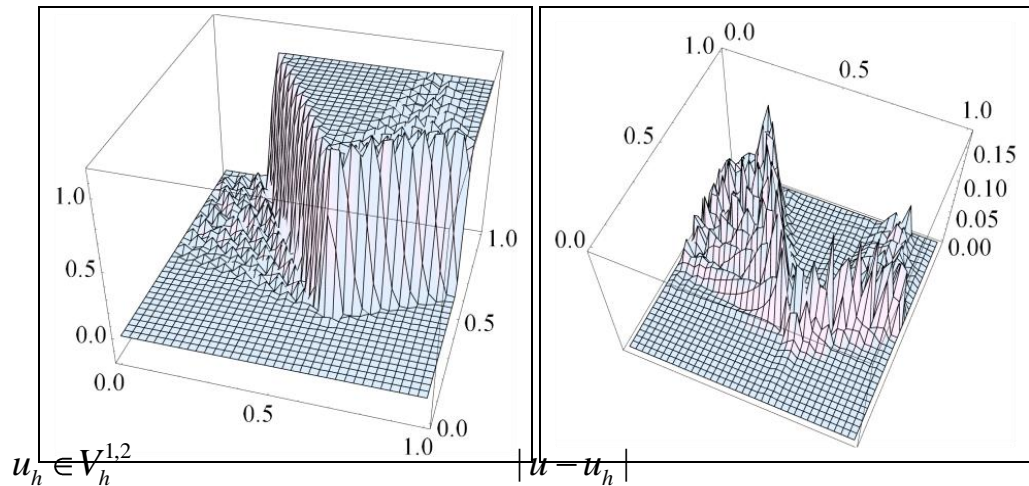


Рисунок 1.9 – Частинами білінійна апроксимація розв’язку задачі (1.41) та її похибка: сітка з 35×35 чотирикутних скінченних елементів.

Добре видно, похибки знайденої апроксимації розпорошуються по всій області визначення шуканого розв’язку: зароджуючися на елементах внутрішнього шару вона простягається до границь області. Як і в п.1.7 значення відносної похибки в деяких точках внутрішнього шару близькі до 100%, не дивлячись на те, що на кожному скінченному елементі дана апроксимація має на один ступінь вільності більше, ніж розглянута раніше лінійна апроксимація на трикутнику. Детельніші характеристики апроксимацій такого вигляду, а також їхніх похибок та апостеріорних оцінювачів похибок Діріхле (1.47) та Неймана (1.49) подано в табл. 1.4 (позначення ті ж, що описано у п. 1.7.3).

Оскільки кількість невідомих приблизно одна і та ж в обох випадках, то, порівнюючи результати останніх рядків табл. 1.1 та 1.4, можна бачити, що приблизно за одного й того ж рівня істинної похибки межі її оцінок, обчислені оцінювачами Діріхле (1.47) і Неймана (1.49), різняться лише в два рази (проти чотирьох у лінійних апроксимаціях). Звідси можна зробити висновок, що побудовані тут оцінювачі Діріхле та Неймана більш якісно характеризують похибки білінійних апроксимацій MSE, ніж їхні аналоги для лінійних апроксимацій MSE.

Таблиця 1.4 – Збіжність частинами білінійних апроксимацій розв’язку задачі (1.41) та їх апостеріорних оцінювачів похибок, обчислених на рівномірно згущуваних сітках

k	$Nod \mathfrak{T}_h$	$Card \mathfrak{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	ρ^{Dir}	ρ^{Neu}
1	1 296	1 225	92.198	57.887	96.188	3.9	5.7	-	-
2	5 041	4 900	40.679	26.313	64.550	1.7	3.2	2.4	2.0
3	19 881	19 600	10.152	11.616	20.988	0.9	1.8	2.1	2.0
4	78 961	78 400	4.697	5.780	10.142	0.8	1.8	1.1	1.0
5	314 721	313 600	2.348	2.890	5.125	0.8	1.8	1.0	1.0
6	1 256 641	1 254 400	1.175	1.445	2.572	0.8	1.8	1.0	1.0

Ці та подібні результати обчислювальних експериментів з апостеріорними оцінювачами Діріхле (1.47) та Неймана (1.49) для модельних сингулярно збурених задач можна знайти в [48].

1.9.4 Аналіз збіжності апроксимацій для слабо нелінійних задач

Розв’яжемо нелінійну задачу (1.42) використовуючи частинами білінійні апроксимації МСЕ на рівномірній сітці з 35×35 чотирикутних скінченних елементів. Сітка вибрана таким чином, щоб кількість вузлів у ній (1 296) була близькою до кількості вузлів (1 301) трикутної сітки пункту 1.7.4. Це робить зручним порівняння лінійних (рис. 1.6) та білінійних апроксимацій (рис. 1.10). Останні забезпечують менші абсолютні значення похибки, але не змінюють структуру її розподілу.

Як і в п. 1.7. будуємо наступну таблицю збіжності для дослідження характеристик апостеріорних оцінювачів похибок Діріхле (1.47) та Неймана (1.49) в нелінійній задачі (1.42)

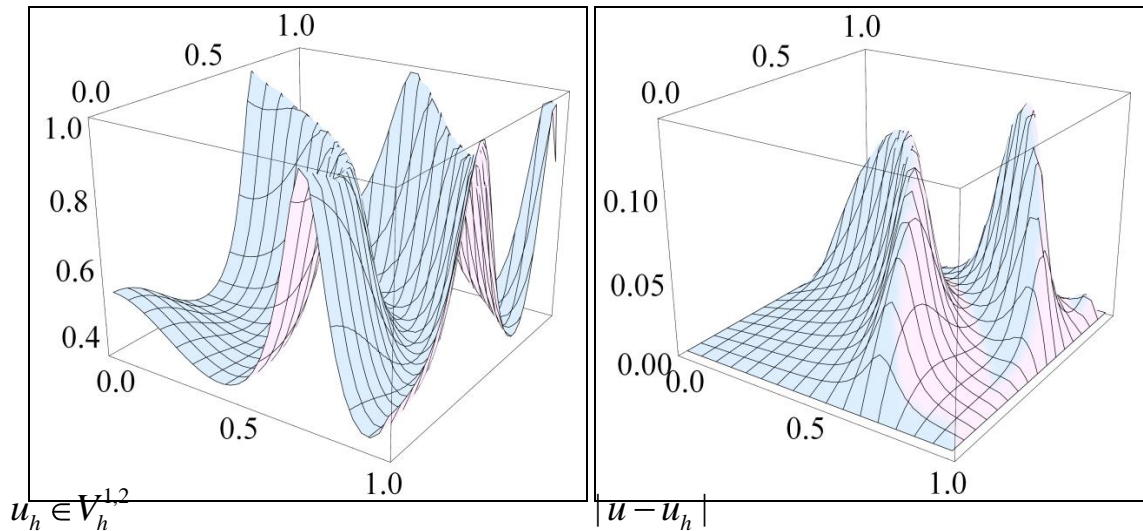


Рисунок 1.10 – Ілюстрація результатів розв’язування задачі (1.42) МСЕ для 35×35 чотирикутних скінченних елементів з білінійними апроксимаціями.

Таблиця 1.5 – Збіжність частинами білінійних апроксимацій до розв’язку задачі (1.42) та їх апостеріорних оцінювачів похибок, обчислених на рівномірно згущуваних сітках

k	$Nod \mathfrak{T}_h$	$Card \mathfrak{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Neu}
1	1 296	1 225	12.291	21.339	26.791	0.5	1.1	-	-
2	5 041	4 900	6.354	9.236	13.907	0.7	1.5	0.8	0.9
3	19 881	19 600	3.211	4.151	7.033	0.8	1.7	0.9	1.0
4	78 961	78 400	1.610	1.994	3.527	0.8	1.8	1.0	1.0
5	314 721	313 600	0.806	0.986	1.765	0.8	1.8	1.0	1.0
6	1 256 641	1 254 400	0.403	0.491	0.883	0.8	1.8	1.0	1.0

Результати, отримані у табл. 1.5, підтверджують висновки зроблені для даних табл. 1.4. Отже апостеріорні оцінювачі (1.47) та (1.49) не змінюють своїх основних характеристик при переході до розв’язування нелінійних задач, а відмінності у збіжності та апроксимативності при розв’язуванні та апостеріорній оцінці похибок у задачах (1.41) та (1.42) зумовлені сингулярною збуреністю першої.

Ці та подібні результати обчислювальних експериментів з апостеріорними оцінювачами Діріхле (1.47) та Неймана (1.49) для модельних нелінійних задач можна знайти в [48, 51].

Знову ж таки, приймаючи до уваги результати аналізу обчислювальних експериментів, приходимо до висновку, що

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{поелементно визначені апостеріорні оцінювачі похибок} \\ \text{частинами білінійних апроксимацій 1.47 та 1.49} \\ \text{здатні надійно та ефективно обчислювати} \\ \text{двосторонні границі меж істинних похибок наближень .} \end{array} \right.$$

1.10 АОП для серендипових квадратичних апроксимацій МСЕ на чотирикутниках

Тут ми розглянемо скінченно-елементну апроксимацію $u_h \in V_h^2$, записану в локальних координатах (α, β) чотирикутника Q у вигляді білінійної функції цих змінних

$$u_h|_Q = u_Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^8 u_h(A_i) \phi_i(\alpha, \beta),$$

де

$$\phi_i(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \alpha_i \alpha)(1 + \beta_i \beta)(\alpha_i \alpha + \beta_i \beta - 1), & i = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)(1 + \beta_i \beta), & i = 5, 7, \\ \frac{1}{2}(1 - \beta^2)(1 + \alpha_i \alpha), & i = 6, 8. \end{cases}$$

1.10.1 Оцінювач Діріхле серендипових квадратичних апроксимацій

Поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибки (АОП) типу Діріхле квадратичних серендипових апроксимацій МСЕ на довільному чотирикутнику Q шукаємо у вигляді

$$\begin{cases} e|_Q \approx e_Q^{Dir}(\alpha, \beta) := \lambda_Q^{Dir} \varphi_Q^{Dir}(\alpha, \beta), \\ \text{supp } \varphi_Q^{Dir} := Q, \\ \varphi_Q^{Dir}(\alpha, \beta) := (\alpha - \alpha^3)(1 - \beta^2) + (\beta - \beta^3)(1 - \alpha^2), \end{cases} \quad (1.51)$$

див.рис. 1.11.

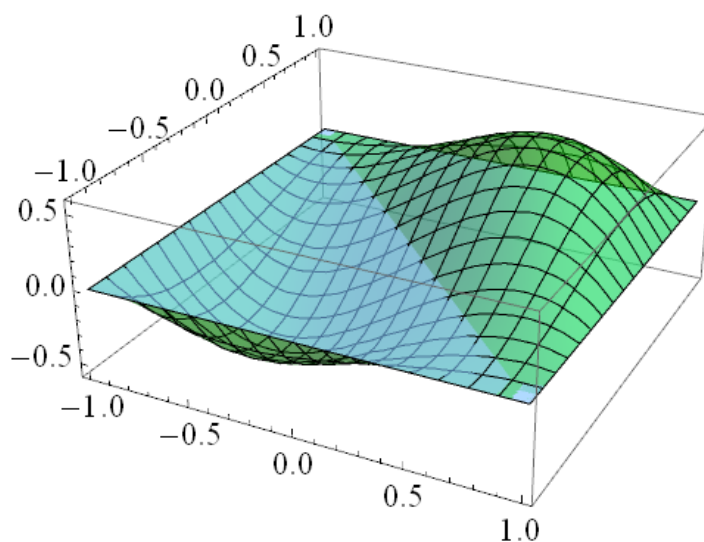


Рисунок 1.11 – Базисна функція $\varphi_Q^{Dir}(\alpha, \beta) = (\alpha - \alpha^3)(1 - \beta^2) + (\beta - \beta^3)(1 - \alpha^2)$.

1.10.2 Оцінювач Неймана серендипових квадратичних апроксимацій

Поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибки (АОП) типу Неймана (див. [51]) квадратичних серендипових апроксимацій MSE на довільному чотирикутнику Q шукаємо у вигляді

$$\begin{cases} e|_Q \approx e_Q^{Neu}(\alpha, \beta) := \lambda_Q^{Neu} \varphi_Q^{Neu}(\alpha, \beta), \\ \text{supp } \varphi_Q^{Neu} := Q, \\ \varphi_Q^{Neu}(\alpha, \beta) := \alpha + \beta - \alpha^3 - \beta^3, \end{cases} \quad (1.52)$$

див.рис.1.12.

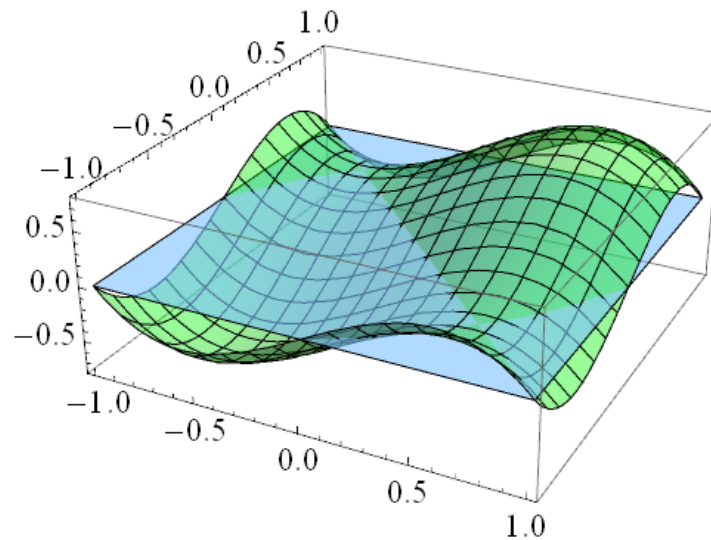


Рисунок 1.12 – Базисна функція $\phi_Q^{Neu}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta - \alpha^3 - \beta^3$.

1.10.3 Аналіз збіжності числових результатів для модельних сингулярно збурених задач

Як і для випадку лінійних та білінійних апроксимацій дослідимо збіжність квадратичних серендипових апроксимацій та їх апостеріорних оцінювачів похибок для сингулярно збуреної задачі з внутрішніми шарами (1.41). Розв'язавши задачу (1.41) методом скінченних елементів з квадратичними серендиповими апроксимаціями на рівномірній чотирикутній сітці 20×20 , бачимо (див. рис. 1.13), що, аналогічно як і для лінійних та білінійних апроксимацій, максимальні значення похибки досягаються у примежовому шарі, але абсолютні значення похибки є очікувано менші за рахунок вищого порядку апроксимацій.

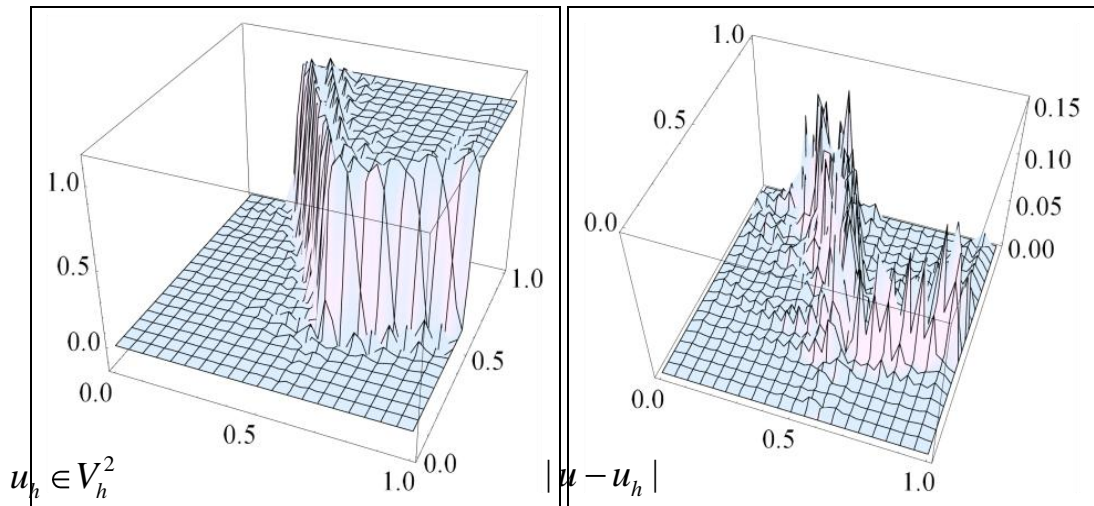


Рисунок 1.13 – Ілюстрація результатів розв’язування задачі (1.41) MSE для 20×20 чотирикутних скінченних елементів з квадратичними серендиповими апроксимаціями.

Якщо навіть візуально (детальніше див. табл. 1.4 та табл. 1.6) порівняти результати розв’язування задачі (1.41) проілюстровані на рис. 1.9 та рис. 1.13, то можна побачити, дивний факт, що квадратичні серендипові апроксимації з-за кількості вузлів сітки 1281 не забезпечують істотно менших абсолютних значень похибки, ніж білінійні апроксимації на сітці з приблизно такою ж кількістю вузлів, а саме з 1296 вузлами. Таке спостереження можна пояснити надто рідкою сіткою в обох випадках, адже побудувавши таблицю збіжності (табл. 1.6) для квадратичних серендипових апроксимацій, як це зроблено для білінійних апроксимацій, див. табл. 1.4, спостерігаємо, як це очікувалось теоретично, значну перевагу в точності квадратичних серендипових апроксимацій.

Числові результати у табл. 1.6 демонструють вищий порядок збіжності апостеріорних оцінок похибки Діріхле (1.51) та Неймана (1.52), ніж, теоретично очікуваний, який рівний 2.0. Якщо глянути на поведінку (постійне зменшення) індексів ефективності κ^{Dir} та κ^{Neu} , то можна зробити висновок, що швидкість збіжності істинної похибки є дещо меншою, ніж її апостеріорних оцінок. Саме тому отримані двосторонні оцінки похибки є не настільки переконливими як

для лінійних та білінійних апроксимацій. І навіть більше того, числові експерименти з додатковими модельними задачами показали, що, на відміну від лінійних та білінійних апроксимацій, апостеріорні оцінювачі похибок Діріхле (1.51) та Неймана (1.52) для квадратичних серендипових апроксимацій не завжди дають верхню та нижню оцінки істинної похибки відповідно. Як приклад такого випадку, розглянемо наступну задачу з примежовим шаром

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + (\beta_1, \beta_2) \cdot \nabla u = f & \text{в } \Omega = (0;1)^2, \\ u \equiv 0 & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (1.53)$$

де $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\mu = 10^{-2}$, а права частина $f = f(x, y)$ вибрана так, щоб точним розв'язком цієї задачі була наступна функція

$$\begin{aligned} u(x) &= x_1 x_2^2 - x_2^2 g(2, x_1) + g(3, x_2)[g(2, x_1) - x_1], \\ g(\gamma, t) &:= \exp\{\gamma(t-1) / \mu\}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

див.рис. 1.14.

Таблиця 1.6 – Збіжність частинами квадратичних серендипових апроксимацій до розв'язку задачі (1.41) та їх апостеріорних оцінювачів похибок, обчислених на рівномірно згущуваних чотирикутних сітках

k	$Nod \mathfrak{T}_h$	$Card \mathfrak{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Neu}
1	1 281	400	68.219	52.344	79.517	1.7	2.39	-	-
2	4 961	1 600	25.512	17.50	32.635	1.5	1.96	1.8	1.9
3	19 521	6 400	5.021	4.269	7.014	1.2	1.65	2.4	2.3
4	77 441	25 600	1.445	1.209	2.071	1.2	1.71	1.8	1.8
5	308 481	102 400	0.255	0.267	0.401	1.0	1.50	2.5	2.4
6	1 231 361	409 600	0.040	0.057	0.072	0.7	1.26	2.7	2.5

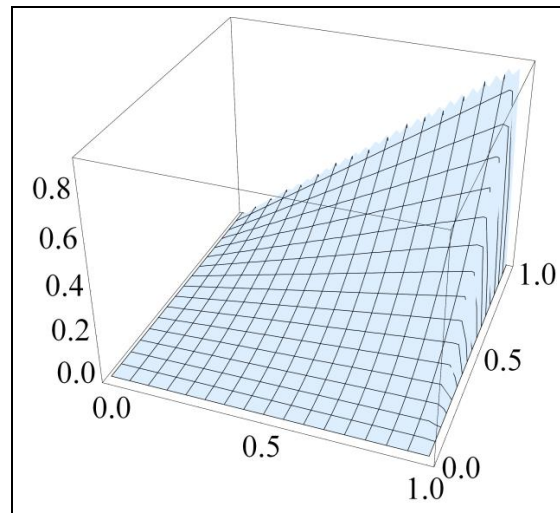


Рисунок 1.14 – Точний розв’язок (1.54) задачі з примежовим шаром (1.53).

Задача (1.53) є сингулярно збуреною з числом Пекле $Pe = \mu^{-1} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} = 10^2 \sqrt{13} \cong 360.6$.

Розв’яжемо задачу (1.53) МСЕ з квадратичними серендиповими апроксимаціями на рівномірній сітці з 20×20 чотирикутних скінченних елементів, див. рис. 1.15.

На рис. 1.15 видно, що найбільші значення похибок зосереджені у примежовому шарі, де найбільші значення градієнтів. Максимальні значення похибок сягають 100%. Детальніше проаналізуємо характеристики апостеріорних оцінювачів Діріхле (1.51) та Неймана (1.52) у наступній таблиці збіжності 1.7.

Числові результати з табл. 1.7 показують, що порядки збіжності апостеріорних оцінювачів похибки Діріхле та Неймана збігаються до 2.0. А збіжність індексів ефективності цих оцінювачів означає, що порядок збіжності істинної похибки квадратичних серендипових апроксимацій близький до порядку збіжності її апостеріорних оцінювачів, тобто до 2.0. Тим не менше верхню оцінку похибки не вдається отримати з використанням оцінювача Неймана (1.52) для задачі (1.53).

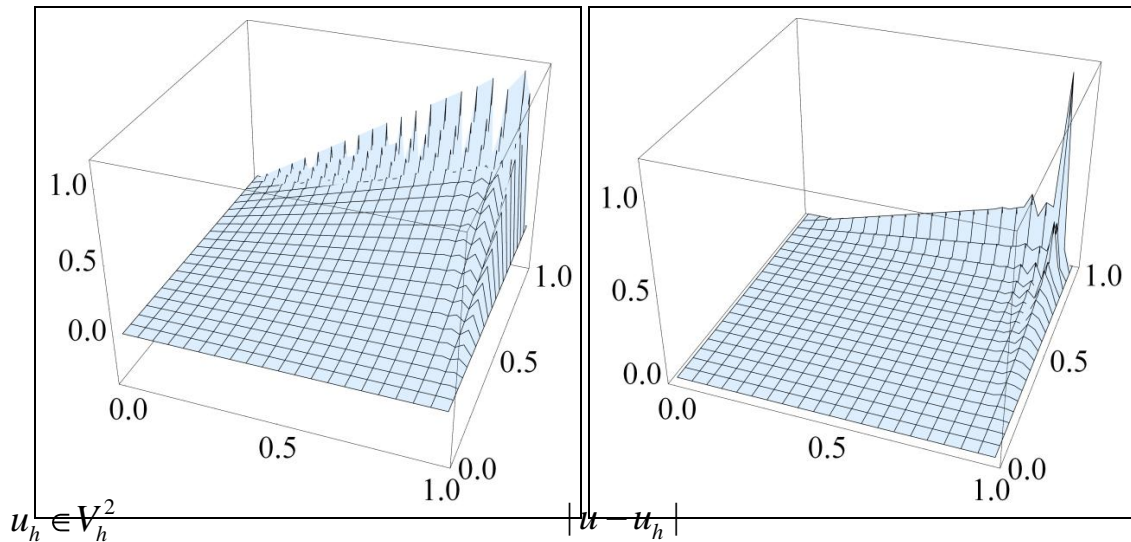


Рисунок 1.15 – Ілюстрація результатів розв’язування задачі (1.53) МСЕ для 20×20 чотирикутних скінченних елементів з квадратичними серендиповими апроксимаціями.

Таблиця 1.7 – Збіжність частинами квадратичних серендипових апроксимацій до розв’язку задачі (1.53) та їх апостеріорних оцінювачів похибок, обчислених на рівномірно згущуваних чотирикутних сітках

k	$Nod \mathfrak{T}_h$	$Card \mathfrak{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Neu}
1	1 281	400	73.877	91.734	79.178	1.17	1.49	-	-
2	4 961	1 600	42.805	59.83	49.484	0.79	0.95	1.2	1.2
3	19 521	6 400	18.31	28.691	22.028	0.65	0.79	1.3	1.3
4	77 441	25 600	5.950	9.905	7.234	0.60	0.73	1.6	1.6
5	308 481	102 400	1.628	2.775	1.983	0.59	0.72	1.9	1.9
6	1 231 361	409 600	0.417	0.716	0.509	0.58	0.71	2.0	2.0

Можливим поясненням нездатності оцінювача Неймана (1.52) дати верхню оцінку істинної похибки для задачі (1.53) (див. табл. 1.7) та “непереконливості” двосторонніх оцінок похибки для задачі (1.41) (див. табл. 1.6) може бути той

факт, що на відміну від апостеріорних оцінювачів похибок, побудованих для лінійних та білінійних апроксимацій, оцінювачі Діріхле (1.51) та Неймана (1.52) для квадратичних серендипових апроксимацій мають базисні функції, які набувають від'ємних значень та не є симетричними відносно осей координат, див рис. 1.11 та рис. 1.12 відповідно.

Таким чином побудова апостеріорних оцінювачів похибок, які забезпечать надійні двосторонні оцінки похибок для квадратичних серендипових апроксимацій є завданням майбутніх досліджень та наукових пошуків.

1.10.4 Аналіз збіжності числових результатів для модельних нелінійних задач

Розглянемо модельну задачу (1.42) як приклад застосування апостеріорних оцінювачів похибок Діріхле (1.51) та Неймана (1.52) до оцінки похибок квадратичних серендипових апроксимацій розв'язку нелінійних задач. Розв'яжемо (1.42) на тій же рівномірній сітці з 20×20 чотирикутних скінченних елементів, як і в пункті 1.10.3, див. рис. 1.16.

На рис. 1.16 видно значну перевагу в точності квадратичних серендипових апроксимацій над лінійними (див. рис. 1.16) та білійними (див. рис. 1.10) апроксимаціями. Для детальнішого порівняння та дослідження апостеріорних оцінювачів похибок у випадку нелінійних задач будемо наступну таблицю збіжності.

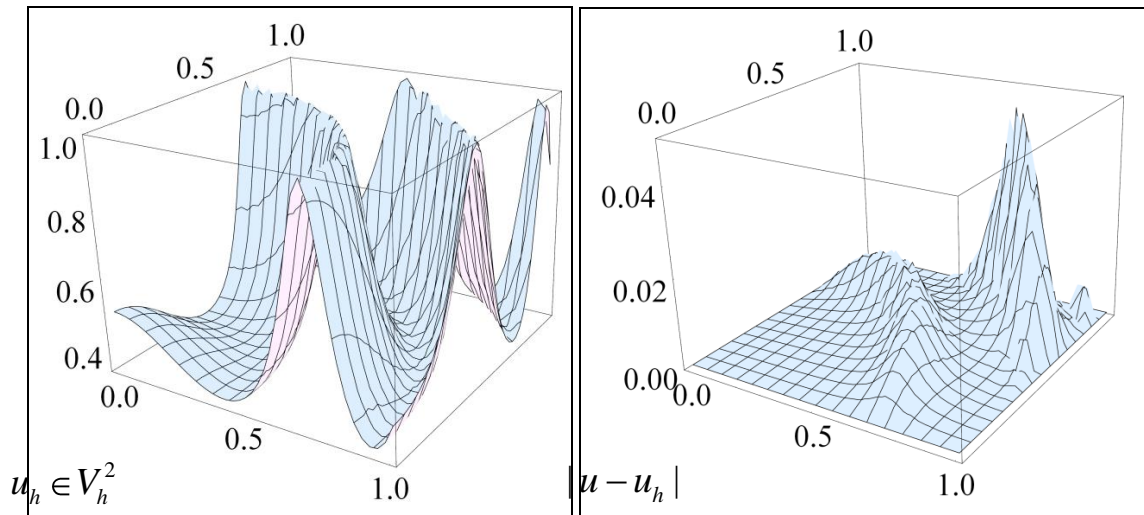


Рисунок 1.16 – Ілюстрація результатів розв’язування задачі (1.42) МСЕ для 20×20 чотирикутних скінченних елементів з квадратичними серендиповими апроксимаціями.

Таблиця 1.8 – Збіжність частинами квадратичних серендипових апроксимацій розв’язку задачі (1.42) та їх апостеріорних оцінювачів похибок, обчислених на рівномірно згущуваних чотирикутних сітках

k	$Nod \mathfrak{T}_h$	$Card \mathfrak{T}_h$	ε_h^{Dir}	ε	ε_h^{Neu}	κ^{Dir}	κ^{Neu}	p^{Dir}	p^{Neu}
1	1 281	400	3.050	7.317	6.498	0.4	0.9	-	-
2	4 961	1 600	0.893	1.398	1.997	0.6	1.4	1.7	1.7
3	19 521	6 400	0.235	0.338	0.521	0.7	1.5	1.9	1.9
4	77 441	25 600	0.060	0.084	0.132	0.7	1.6	2.0	2.0
5	308 481	102 400	0.015	0.021	0.033	0.7	1.6	2.0	2.0
6	1 231 361	409 600	0.004	0.005	0.008	0.7	1.6	2.0	2.0
7	4 920 321	1 638 400	0.001	0.001	0.002	0.7	1.6	2.0	2.0

Табл. 1.8 показує, що апостеріорні оцінювачі похибок Діріхле (1.51) та Неймана (1.52) для квадратичних сирендипових апроксимацій мають другий

порядок збіжності та забезпечують двосторонні оцінки істинної похибки для нелінійної задачі подано у [51].

1.11 Ітераційні методи розв'язування великих систем лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими матрицями

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$Sx = F, \quad (1.55)$$

до якої приводять апроксимації МСЕ. Великі порядки N системи рівнянь (1.55) і розрідженість матриці S вимагають зберігання лише її ненульових елементів матриці у спеціальному форматі, наприклад, Compressed Sparse (lower triangle) Row схему [72]. Переваги такого способу досягаються завдяки наперед відомій множині пар індексів, які визначають позиції ненульових елементів матриці S і формують її портрет. Таким чином, для розв'язування систем рівнянь МСЕ (1.55) створюються передумови для успішного використання ітераційних процедур, в цій роботі ми обрали проекційний метод узагальнених мінімальних нев'язок з перезапусками (GMRES) [55, 72]. Для погано обумовлених матриць, які генеруються дискретизацією сингулярно збурених задач, цей метод доповнено побудовою передобумовлювача.

1.11.1 Методу узагальнених мінімальних нев'язок GMRES

Розглянемо ітераційний процес Річардсона [55] для розв'язування СЛАР (1.55)

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} + \alpha_n r^{(n)} = q^{(n)} + \alpha_n (F - Sq^{(n)}), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.55)$$

з заданим початковим наближенням $q^{(0)}$. З (1.55) отримуємо наступний зв'язок n -го залишку $r^{(n)}$ із початковим $r^{(0)}$

$$r^{(n)} = p_n(S)r^{(0)}, \quad p_n(S) := \prod_{i=0}^{n-1} (I - \alpha_i S).$$

Оскільки $p_n(S)$ - поліном n -го порядку матриці S , то залишок $r^{(n)}$ можна шукати у підпросторі Крилова $K_{n+1}(S, r^{(0)})$, введеному наступним чином

$$K_n(S, v) = \text{span}\{v, Sv, S^2v, \dots, S^{n-1}v\}. \quad (1.56)$$

Зв'язок початкового наближення $q^{(0)}$ з отриманим на n -тому кроці $q^{(n)}$ має вигляд

$$q^{(n)} = q^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i r^{(i)}, \quad q^{(n)} \in W_n := \{w = q^{(0)} + v, v \in K_n(S, r^{(0)})\}. \quad (1.57)$$

Процес (1.57), узагальнений до вигляду

$$q^{(n)} = q^{(0)} + q_{n-1}(S)r^{(0)}, \quad (1.58)$$

називається методом Крилова, якщо $q_{n-1}(S)$ є поліномом матриці S степеня менше $n-1$ і вибирається таким чином, щоб $q^{(n)}$ було найкращим наближенням точного розв'язку q в просторі W_n .

Для матриці V_n , стовпцями якої є вектори ортонормованого базису $\{v_i\}_{i=1}^n$ простору $K_n(S, r^{(0)})$, які побудовані методом Арнольді [72], ітераційний процес (1.58) набуває вигляду

$$q^{(n)} = q^{(0)} + V_n z^{(n)} \text{ або, що еквівалентно, } r^{(n)} = r^{(0)} - SV_n z^{(n)}. \quad (1.59)$$

Якщо вектор $z^{(n)}$ у (1.59) вибирається з огляду на умову мінімізації норми нев'язки

$$\|r^{(n)}\| = \|F - Sq^{(n)}\| = \min_{w \in W_n} \|F - Sw\|,$$

то така процедура називається методом узагальнених мінімальних нев'язок (GMRES).

Важливо зауважити, що GMRES є проєкційним методом, оскільки $q^{(n)}$ шукається в просторі Y_n при умові ортогональності нев'язки $r^{(n)}$ до простору SY_n , де $Y_n = K_n(S, r^{(0)})$. Крім того у [72] показано, що згадані задачі мінімізації та проектування еквівалентні.

1.11.2 Побудова передобумовлювача СЛАР

Ідея передобумовлення полягає у переході від (1.55) до еквівалентної задачі

$$MSq = MF \quad (1.60)$$

з деякою невідродженою матрицею M . Метою цього є отримання нової СЛАР з таким же розв'язком, але кращими характеристиками для її розв'язування. Матриця M повинна бути близька до S^{-1} , адже при $M = S^{-1}$, задача (1.60) зводиться до тривіального вигляду $Ix = MF$. Передобумовлення матиме сенс лише, коли побудова матриці M буде менш трудомісткою, ніж розв'язування (1.55). Крім того, при переході від (1.55) до (1.60) в загальному випадку змінюється портрет матриці, але відповідна реалізація GMRES [72] для розв'язування (1.60) потребує зберігання лише матриць M^{-1} та S . Їх портрети збігатимуться, якщо M^{-1} будувати методом неповної LU -факторизації матриці S .

2 АДАПТИВНІ СХЕМИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

2.1 h -адаптивні схеми МСЕ

Для крайових задач з лінійними диференціальними рівняннями другого порядку побудовано h -адаптивні схеми методу скінченних елементів (МСЕ) з використанням частинами квадратичних і частинами кубічних апроксимацій розв'язку. Наведено результати аналітичних обчислень складників системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ з такими наближеннями на скінченному елементі. Головну увагу приділено побудові частинами поліноміальних апостеріорних оцінювачів похибок вжитих вище апроксимацій, подано вирази для обчислення розподілів їхніх енергетичних норм на скінченних елементах, які, зрештою, покладено в основу системи адаптування сіток з метою відшукування наближень із наперед заданою точністю. Ефективність розроблених адаптивних схем ілюструється аналізом числових розв'язків модельної сингулярно збуреної крайової задачі.

2.1.1 Стратегії локального адаптування поділів на скінченні елементи

У різноманітних застосуваннях комп'ютерного моделювання все більше уваги приділяють надійним критеріям оцінки обчислених характеристик досліджуваних об'єктів та явищ. Особливу цінність такі критерії становлять у виконанні обчислювальних експериментів із сингулярно збуреними крайовими та \ чи початково-крайовими задачами, див., наприклад, [24]. З огляду на цю важливу обставину теорія числових методів останнім часом була доповнена потужним інструментарієм: апостеріорні оцінювачі похибок (АОП) апроксимацій МСЕ, див. огляди [63, 66] та монографії [1, 4, 68].

Детальна побудова АОП частинами лінійних апроксимацій МСЕ для крайових задач із звичайними диференціальними рівняннями другого порядку та побудова h – адаптивної схеми на їхній основі нещодавно виконана в праці [69]. За допущення, що така апроксимація $u_h = u_h(x)$ з достатньою точністю відтворює значення шуканого розв'язку $u = u(x)$ у вузлах x_i використаної сітки $\mathfrak{T}_h = K_{i+1/2}$, наближення до похибки $e := u - u_h$ на кожному скінченному елементі $K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1})$ перебувають у вигляді частинами квадратичної функції бульбашкової структури

$$e(x) \cong b_{i+1/2}(x) \lambda_{i+1/2} := 4 \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)^2} \lambda_{i+1/2} \quad \forall x \in K_{i+1/2}. \quad (2.1)$$

Шуканий коефіцієнт $\lambda_{i+1/2}$ апостеріорного оцінювача (2.3) подає наближене значення похибки апроксимації МСЕ у центрі ваги $x_{i+1/2}$ скінченого елемента $K_{i+1/2}$ і незалежно від решти скінченних елементів поділу обчислюється з лишку варіаційного рівняння

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{\langle l_{i+1/2}, b_{i+1/2} \rangle - c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2})}{c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2})}, \quad (2.2)$$

де $c_{i+1/2}(\cdot, \cdot)$ та $\langle l_{i+1/2}, \cdot \rangle$ – складові білінійної форми та лінійного функціонала варіаційного рівняння розглядуваної задачі, визначені на скінченному елементі $K_{i+1/2}$. На цьому шляху обчислюється розподіл похибок між скінченними елементами сітки \mathfrak{T}_h і приймаються рішення щодо її згущення (розрідження) з метою досягнення рівномірного розподілу похибки наперед заданого рівня.

Подібний підхід до побудови АОП розвинуто в статтях [97, 98] для апроксимацій МСЕ в задачах еластостатики, а також [100] – в задачі дифузії-конвекції-реакції.

2.1.2 Формулювання крайової задачі

Розглянемо крайову задачу: знайти функцію $u = u(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння

$$-\mu(x)u'(x)' + \beta(x)u'(x) + \sigma(x)u(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, L] \quad (2.3)$$

і задовольняє крайові умови

$$u(0) = 0, \quad -\mu(L)u'(L) = \alpha u(L) - \bar{u}. \quad (2.4)$$

Тут $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ та $f = f(x)$ – задані функції такі, що

$$\begin{cases} \mu(x) \geq \mu_0 = \text{const} > 0, & \sigma(x) \geq 0, \\ \mu, \beta, \sigma \in L^\infty \Omega, & f \in L^2 \Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

а $\alpha \geq 0$, \bar{u} – задані сталі.

2.1.3 Варіаційне формулювання крайової задачі

Крайова задача (2.4) допускає варіаційне формулювання вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти } u \in V := \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0\} \text{ таку, що} \\ c(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (2.6)$$

з такими білінійною формою та лінійним функціоналом

$$\begin{cases} c(u, v) := \int_0^L (\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv) dx + \alpha u(L)v(L), \\ \langle l, v \rangle := \int_0^L f v dx + \alpha \bar{u}v(L) \quad \forall u, v \in V. \end{cases} \quad (2.7)$$

З огляду на теорему Лакса-Мільграма-Вишика можна переконатися, що варіаційна задача (2.6) коректно сформульована, якщо її дані задовольняють умови регулярності (2.5) і

$$\sigma - \frac{1}{2}\beta' \geq 0 \quad \forall x \in (0, L), \quad \alpha - \frac{1}{2}\beta L \geq 0. \quad (2.8)$$

За цих умов білінійна форма $c \dots : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ варіаційної задачі утворює на просторі допустимих функцій V норму (відому під назвою енергетичної норми задачі)

$$\|v\|_V := \sqrt{c(v, v)} \quad \forall v \in V. \quad (2.9)$$

2.1.4 Частинами квадратичні апроксимації МСЕ

2.1.4.1 Локальні незалежні змінні на скінченних елементах

Зафіксувавши натуральне N , поділимо відрізок $0, L$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} := [x_i, x_{i+1}]$ довжини $h_{i+1/2} := x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N-1$ так, що $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = L$. Тут і далі дробовим індексом будемо позначати номер скінченного елемента і певні його характеристики, скажімо, $x_{i+1/2} := (x_{i+1} + x_i)/2$ – це центр ваги скінченного елемента $K_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$.

На кожному скінченному елементі $K_{i+1/2}$ введемо локальну координату ξ згідно з правилом

$$\begin{cases} x = x(\xi) := \frac{1}{2}(1-\xi)x_i + \frac{1}{2}(1+\xi)x_{i+1} = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \\ \quad = x_{i+1/2} + \frac{1}{2}h_{i+1/2}\xi \quad \forall \xi \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (2.10)$$

У визначенні (2.10) використано такі позначення:

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}(1-\xi), \quad \omega(\xi) := \frac{1}{2}(1+\xi). \quad (2.11)$$

Введення локальних координат на скінченних елементах створює, з одного боку, передумови для однотипного опису їхніх, скажімо, геометричних

характеристик, а з іншого – дає змогу підготуватися, наприклад, до обчислення основних співвідношень МСЕ з використанням числового інтегрування квадратурами Гауса.

2.1.4.2 Квадратичний поліном на скінченному елементі

На кожному скінченному елементі виберемо квадратичну апроксимацію шуканого розв'язку варіаційної задачі (2.6) у вигляді

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \cong u_h(\xi) := 2\theta(\xi) \left[\theta(\xi) - \frac{1}{2} \right] u_i + \\ \quad + 2\omega(\xi) \left[\omega(\xi) - \frac{1}{2} \right] u_{i+1} + \{4\omega(\xi)\theta(\xi)\} u_{i+1/2}, \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1, +1], \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Отже, з огляду на диференціювання складених функцій та апроксимацію (2.12) ми одержуємо правило обчислення похідних вигляду

$$u' \equiv \frac{du}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} u[x(\xi)] \cong \frac{2}{h} \frac{du_h}{d\xi} \quad \forall K_{i+1/2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (2.13)$$

Зауваження 2.1. Тут і далі, щоб описати квадратичну апроксимацію з (2.12) як функцію глобальної змінної $x \in K_{i+1/2}$, достатньо замінити визначення (2.11) функцій $\theta = \theta(\xi)$ і $\omega = \omega(\xi)$ такими, як $\theta = \theta(x) := h_{i+1/2}^{-1}(x_{i+1} - x)$, $\omega = \omega(x) := h_{i+1/2}^{-1}(x - x_i) \quad \forall x \in K_{i+1/2}$.

2.1.4.3 Обчислення на скінченному елементі

З огляду на застосування класичних схем нам будуть потрібні обчислення складових варіаційного рівняння (2.6) вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{i+1/2}(u, v) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{ \mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv \} dx + \alpha u(L)v(L) \delta_{N i+1}, \\ \langle l_{i+1/2}, v \rangle := \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v dx + \alpha \bar{u}v(L) \delta_{N i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Як і в попередній статті [62], будемо виконувати інтегрування в (2.14) наближено з вживанням теореми про середнє

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{i+1/2}(u, v) \cong \mu_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v' dx + \beta_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v dx + \sigma_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} uv dx \\ \quad + \alpha u(L)v(L) \delta_{N i+1}, \\ \langle l_{i+1/2}, v \rangle \cong f_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v dx + \alpha \bar{u}v(L) \delta_{N i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

де

$$\mu_{i+1/2} := \mu(x_{i+1/2}), \quad \beta_{i+1/2} := \beta(x_{i+1/2}), \quad \sigma_{i+1/2} := \sigma(x_{i+1/2}).$$

2.1.4.4 Система дискретизованих рівнянь на скінченному елементі

Твердження 2.1 про структуру рівнянь МСЕ з квадратичною апроксимацією.

Нехай апроксимація u_h розв'язку варіаційної задачі (2.6) відшуковується методом Гальоркіна з використанням квадратичних апроксимацій, які на кожному скінченному елементі поділу вибрано у вигляді (2.12).

Тоді система лінійних алгебричних МСЕ, побудована на скінченному елементі $K_{i+1/2} = x_i, x_{i+1}$, має таку структуру:

$$\left\{ \frac{\mu}{3h} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{6} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma h}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{fh}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \quad \forall K_{i+1/2} = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.16)$$

Доведення. Вибираючи в кожному з доданків (2.15) послідовно за допустимі функції $v_m \stackrel{3}{m=1} := 2\theta(\theta - \frac{1}{2}), 2\omega(\omega - \frac{1}{2}), 4\theta\omega$ і приймаючи за u апроксимацію з (2.12), після безпосередніх обчислень інтегралів від добутків поліноміальних функцій, одержуємо, що

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h v_m dx \right\}_{m=1}^3 = \frac{h_{i+1/2}}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v_m dx \right\}_{m=1}^3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v'_m dx \right\}_{m=1}^3 = \frac{1}{3} \frac{1}{h_{i+1/2}} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+1/2} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_m dx \right\}_{m=1}^3 = \frac{h_{i+1/2}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Після виконання належних алгебричних обчислень з векторами (2.17)-(2.20) згідно з правилами (2.15) прийдемо до системи задекларованих лінійних алгебричних рівнянь (2.16).

$$e_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} e_{i+1/2}(x) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2} b_{i+1/2}(x), \quad (2.22)$$

де $\text{supp } e_{i+1/2} \equiv \text{supp } b_{i+1/2} := K_{i+1/2} \quad i=0, \dots, N-1$.

Тоді будуть правильними такі твердження.

1. Коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (2.22) обчислюють за правилами

$$\lambda_{i+1/2} \equiv e_h x_{i+1/2} = \frac{7}{2} \left\{ h \frac{4\beta u_{i+1} - 2u_{i+1/2} + u_i + h\sigma u_{i+1} - u_i}{42\mu + \sigma h^2} \right\}_{i+1/2}. \quad (2.23)$$

2. Норму апостеріорного оцінювача похибки (2.21) та її розподіл між скінченними елементами визначають таким способом:

$$\|e_h\|_V^2 = \sum_{i=0}^{N-1} c_{i+1/2}(e_{i+1/2}, e_{i+1/2}) = \frac{1}{210} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}^2 \left\{ \frac{1}{h} 42\mu + h^2\sigma \right\}_{i+1/2}. \quad (2.24)$$

Доведення. З огляду на задачу про апостеріорний оцінювач похибки та класичну схему Гальоркіна її розв'язування, за деталями див. [69], знаходимо, що

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{\langle l_{i+1/2}, b \rangle - c_{i+1/2}(u_h, b)}{c_{i+1/2}(b, b)}. \quad (2.25)$$

Зрештою, безпосередні обчислення приводять нас до таких значень складових останнього дробу:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{i+1/2}(b, b) = \frac{1}{210} \left\{ \frac{42}{h} \mu + h\sigma \right\}_{i+1/2}, \\ c_{i+1/2}(u_h, b) = -\frac{1}{60} \left[4\beta u_{i+1} - 2u_{i+1/2} + u_i + h\sigma u_{i+1} - u_i \right]_{i+1/2}, \\ \langle l_{i+1/2}, b \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

2.1.5 Частинами кубічні апроксимації МСЕ

2.1.5.1 Ермітові кубічні поліноми на скінченному елементі

На кожному скінченному елементі виберемо кубічну апроксимацію шуканого розв'язку варіаційної задачі (2.6) у вигляді

$$\begin{cases} u[x(\xi)] \approx u_h(\xi) := \theta^2(\xi) 2\omega(\xi) + 1 u_i + h\theta^2(\xi)\omega(\xi)u'_i + \\ \quad + \omega^2(\xi) 2\theta(\xi) + 1 u_{i+1} - h\omega^2(\xi)\theta(\xi)u'_{i+1}, \\ x(\xi) = \theta(\xi)x_i + \omega(\xi)x_{i+1} \quad \forall \xi \in [-1, +1], \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2.27)$$

2.1.5.2 Основні співвідношення МСЕ на скінченному елементі

Твердження 2.2 про структуру рівнянь МСЕ з кубічною апроксимацією.

Нехай апроксимація u_h розв'язку варіаційної задачі (2.6) відшуковується методом Гальоркіна з використанням кубічних поліномів Ерміта, які на кожному скінченному елементі поділу вибрано у вигляді (2.27).

Тоді система лінійних алгебричних МСЕ, побудована на скінченному елементі $K_{i+1/2} = x_i, x_{i+1}$, має таку структуру:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\mu}{10h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & 3h & -36 \\ 3h & 4h^2 & -h^2 & -3h \\ 3h & -h^2 & 4h^2 & -3h \\ -36 & -3h & -3h & 36 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{20} \begin{bmatrix} -30 & 6h & -6h & 30 \\ -6h & 0 & -h^2 & 6h \\ 6h & h^2 & 0 & -6h \\ -30 & -6h & 6h & 30 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma h}{140} \begin{bmatrix} 156 & 22h & -13h & 54 \\ 22h & 4h^2 & -3h^2 & 13h \\ -13h & -3h^2 & 4h^2 & -22h \\ 54 & 13h & -22h & 156 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{fh}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ h/2 \\ -h/2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}_{i+1/2} \quad (2.28) \\ & \forall K_{i+1/2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Доведення. Як і раніше, вибираючи в кожному з доданків (2.15) послідовно за допустимі функції множини $v_{i, m=1}^4 := \theta^2(2\omega + 1), 2\theta^2\omega, -2\omega^2\theta, \omega^2(2\theta + 1)$ і підставляючи до них апроксимацію з (2.27), після подібних обчислень одержимо, що

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_h v_m dx \right\}_{m=1}^4 = \frac{h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & -13h & 54 \\ 22h & 4h^2 & -3h^2 & 13h \\ -13h & -3h^2 & 4h^2 & -22h \\ 54 & 22h & -22h & 156 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v_m dx \right\}_{m=1}^4 = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} -30 & 6h & -6h & 30 \\ -6h & 0 & -h^2 & 6h \\ 6h & h^2 & 0 & -6h \\ -30 & -6h & 6h & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_h v'_m dx \right\}_{m=1}^4 = \frac{1}{30} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & 3h & -36 \\ 3h & 4h^2 & -h^2 & -3h \\ 3h & -h^2 & 4h^2 & -3h \\ -36 & -3h & -3h & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u'_{i+1} \\ u_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v_m dx \right\}_{m=1}^4 = \frac{h}{12} f_{i+1/2} \begin{bmatrix} 6 \\ h \\ -h \\ 6 \end{bmatrix}. \quad \blacktriangle \quad (2.32)$$

2.1.5.3 Апостеріорний оцінювач похибок частинами кубічних апроксимацій МСЕ

Оцінювач похибок апроксимацій МСЕ, обчислених з використанням ермітових кубічних поліномів вигляду (2.27), будуватимемо на кожному скінченному елементі з використанням поліномів четвертого порядку, а саме

$$e_h(\xi) := \lambda_{i+1/2} b(\xi) \equiv 16\theta_i^2(\xi)\omega_i^2(\xi)\lambda_{i+1/2} \quad \forall K_{i+1/2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (2.33)$$

Теорема 2.2 про апостеріорний оцінювач похибки частинами кубічних апроксимацій МСЕ.

Нехай $\mathfrak{T}_h = K_{i+1/2}$ – деякий поділ відрізка $[0, L]$ на скінченні елементи $K_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$, $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, N-1$, $h := \max h_{i+1/2}$, на кожному з яких обчислено кубічну апроксимацію u_h вигляду (2.27). Нехай на додаток до цього для оцінки точності знайденої апроксимації використовується частинами визначений апостеріорний оцінювач похибки у вигляді розвинення

$$e_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} e_{i+1/2}(x) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2} b_{i+1/2}(x), \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} b_{i+1/2}(\xi) := 16 \omega(\xi)\theta(\xi)^2 = (1 - \xi^2)^2 \\ \text{supp } e_{i+1/2} \equiv \text{supp } b_{i+1/2} := K_{i+1/2} \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases}$$

Тоді будуть правильними такі твердження.

1. Коефіцієнти $\lambda_{i+1/2}$ розвинення (2.33) подають наближені значення похибки апроксимації $u_h(x)$ в центрах ваг кожного скінченного елемента; правило його обчислення набуває вигляду

$$\lambda_{i+1/2} = e_h|_{x_{i+1/2}} = \frac{\langle l_{i+1/2}, b_{i+1/2} \rangle - c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2})}{c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2})}, \quad (2.35)$$

де

$$\begin{cases} c_{i+1/2}(u_h, b_{i+1/2}) = \frac{2}{105} \left\{ 7(2\sigma h - 3\beta)u_i + h\left(\frac{28}{h}\mu - 4\beta + 3h\sigma\right)u'_i \right. \\ \quad \left. + 7(2\sigma h + 3\beta)u_{i+1} - h\left(\frac{28}{h}\mu - 4\beta + 3h\sigma\right)u'_{i+1} \right\}_{i+1/2}, \\ c_{i+1/2}(b_{i+1/2}, b_{i+1/2}) = \frac{128}{315} \left\{ \frac{4}{h}\mu + h\sigma \right\}_{i+1/2}, \\ \langle l_{i+1/2}, b_{i+1/2} \rangle = \frac{8}{15} h f|_{i+1/2}, \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2.36)$$

2. Норму апостеріорного оцінювача похибки (2.33) та її розподіл між скінченними елементами обчислюють так:

$$\|e_h\|_V^2 = \sum_{i=0}^{N-1} c_{i+1/2} (e_{i+1/2}, e_{i+1/2}) = \frac{128}{315} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1/2}^2 \left\{ \left(4 \frac{\mu}{h} + h\sigma \right) \right\}_{i+1/2}. \quad (2.37)$$

2.1.6 Стратегія адаптування сітки

Виведені вище вирази для апостеріорних оцінювачів похибки на скінченному елементі ми використовували для побудови рекурсивного алгоритму адаптування розрахункової сітки так, щоб результуюча апроксимація МСЕ була знайдена на кожному скінченному елементі з наперед гарантованою точністю.

Детальніше, ми вибираємо за якість знайденої на сітці $\mathfrak{S}_h = K_{i+1/2}$ частинами визначеної квадратичної або частинами кубічної апроксимації u_h послідовність індикаторів

$$\eta_{i+1/2} := \sqrt{\frac{c_{i+1/2} (e_h, e_h) N}{\|u_h\|_V^2 + \|e_h\|_V^2}} 100\%, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (2.38)$$

Індикатори похибки (2.38) визначають, який відсоток становить норма похибки від середнього значення норми розв'язку на кожному скінченному елементі. Якщо це число більше від заданого допустимого рівня похибки, то скінченний елемент поділяється на два нових додаванням нового вузла сітки в його центр ваги. Коли ж індикатор похибки певного скінченного елемента не перевищує допустимого рівня, то такий елемент без змін входить до нової розрахункової сітки. Процес уточнення апроксимацій МСЕ завершується за умови, що під час перегляду біжучої сітки не відбулося поділу жодного з її скінченних елементів.

2.1.7 Аналіз числових результатів

Розглянемо крайову задачу (2.3), (2.4) з такими коефіцієнтами: $\mu=1$, $\beta(x)=3000(\frac{2}{3}L-x)$, $\sigma=0$, $f=3000$, $\alpha=100000$, $\bar{u}=0$. Початкова сітка – рівномірний поділ відрізка на $N_0=4$ скінченні елементи, допустимий рівень похибки $\varepsilon=5\%$. Наближені розв’язки цієї задачі були побудовані описаною вище процедурою h -адаптування з використанням лінійних, квадратичних і кубічних ермітових апроксимацій МСЕ. Скрізь далі вжито такі позначення: m – номер біжучого кроку адаптування; N_m – загальна кількість скінченних елементів поділу \mathfrak{T}_h ; p_i – порядок швидкості збіжності схеми МСЕ в середньоквадратичній нормі $|\cdot|_H$ ($i=0$) та в енергетичній нормі $\|\cdot\|_V$ ($i=1$) відповідно, δ_{\max} – максимальна відносна похибка на біжучій сітці

$$\delta_{\max} = \max_{K_{i+1/2} \in \mathfrak{T}_h} \sqrt{\frac{\|e_{i+1/2}\|_V^2 N_m}{\|u_h\|_V^2 + \|e_h\|_V^2}} \times 100\%. \quad (2.39)$$

За допущення, що показники збіжності апроксимацій МСЕ на нерівномірних поділах близькі до апіорних оцінок стосовно параметра дискретизації $h_m := \frac{1}{N_m}$, їхні порядки швидкості збіжності обчислювали згідно з правилом [98]

$$p := \frac{\ln \|e^0\| - \ln \|e^m\|}{\ln N_m - \ln N_0}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.40)$$

де $\|\cdot\|$ – одна з норм $|\cdot|_H$ або $\|\cdot\|_V$.

2.1.7.1 Результати h -адаптування з частинами лінійними апроксимаціями

Результати h -адаптування з частинами лінійними апроксимаціями зображено на рис. 2.1, 2.2 та табл. 2.1. З таблиці добре видно, що перші три кроки адаптування зводяться до рівномірного згущення сіток з подвоєнням кількості їхніх елементів. Головна причина такого поведження криється у високому рівні похибок наближення, зумовлених наявністю у структурі задачі точки повороту $x = 2L/3$.

Лише після належного пониження рівня похибок з четвертого кроку починається локальне згущення сіток саме в околі точки повороту. Ефективність цієї стратегії виражається у дещо завищених порівняно з передбачуваними теорією порядках збіжності в обох нормах.

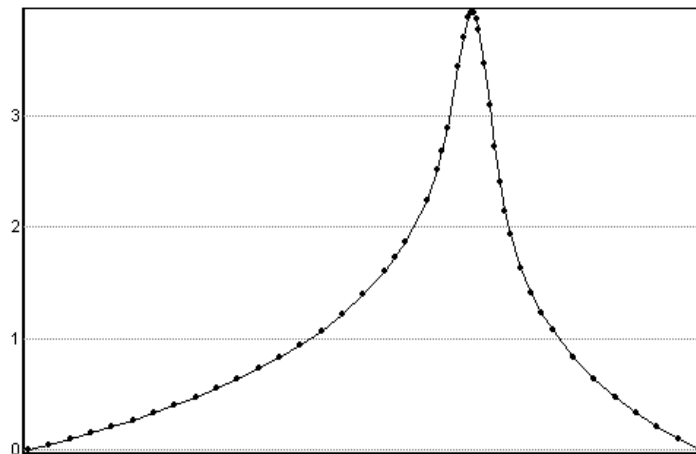


Рисунок 2.1 – Частинами лінійна апроксимація. Точками відзначено її значення у вузлах знайденого поділу з 47 елементів

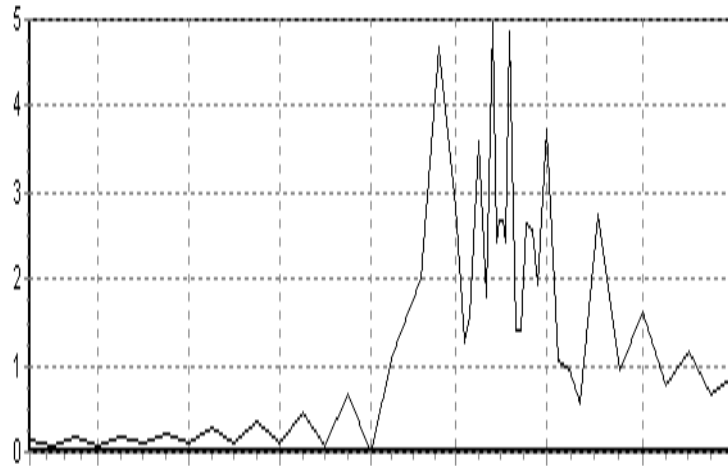


Рисунок 2.2 – Розподіл відносних похибок частинами лінійної апроксимації на скінченних елементах після останнього кроку алгоритму

Таблиця 2.1 – Характеристики покрокової збіжності h -адаптування з частинами лінійними апроксимаціями МСЕ

m	N	$\ e_h\ _V$	$\ u_h\ _V$	p_1	$ e_h _H$	$ u_h _H$	p_0	δ_{\max}
0	4	69.8644	57.6909		1.71475	1.47796		106.98
1	8	84.1026	57.2641	-0.267	1.81804	1.45028	-0.084	118.22
2	16	40.3459	54.7685	0.396	0.633193	1.37752	0.719	60.42
3	32	5.0289	54.7226	1.265	0.046413	1.37488	1.736	39.90
4	37	2.37515	54.7439	1.520	0.014489	1.37594	2.146	18.81
5	44	1.47607	54.7475	1.609	0.007021	1.3763	2.293	9.66
6	47	1.08745	54.7475	1.690	0.005556	1.37637	2.327	4.95

2.1.7.2 Результати h -адаптування з частинами квадратичними апроксимаціями

Результати h -адаптування з частинами квадратичними апроксимаціями показано на рис. 2.3, 2.4 та табл. 2.2. Характер збіжності дуже подібний до

попереднього випадку, але з огляду на вищий степінь вжитих поліномів є монотонним і потребує меншої кількості кроків адаптування. Зазначимо також, що на останньому кроці рівень максимальної відносної похибки з 7% зменшився до 2%.

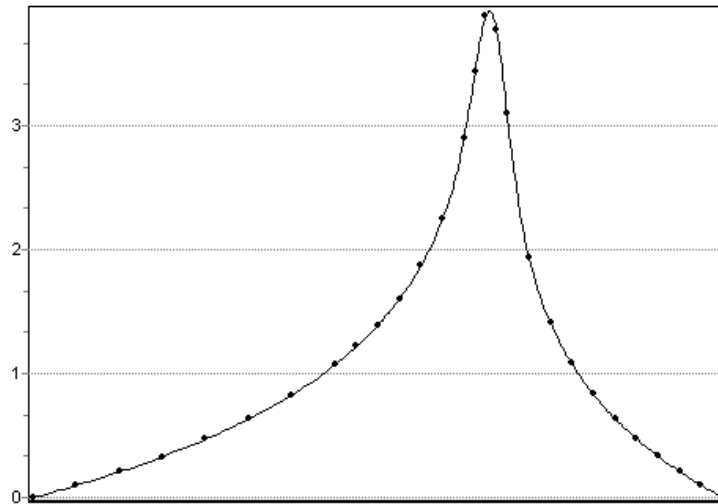


Рисунок 2.3 – Графік чисельного розв'язку (квадратичні апроксимації, 27 елементів)

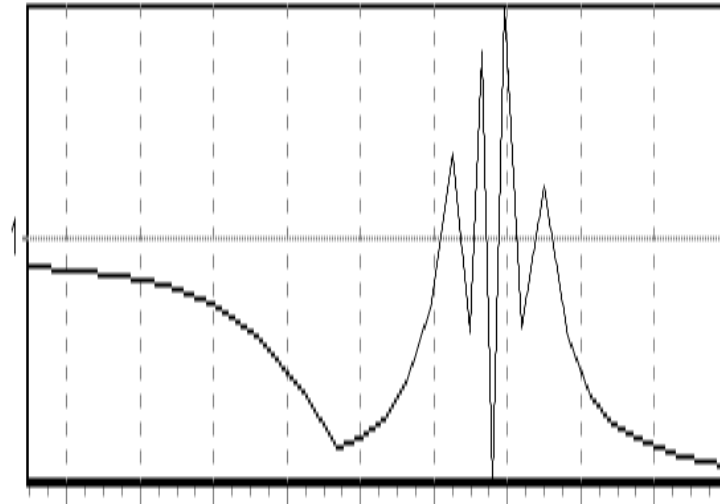


Рисунок 2.4 – Розподіл відносних похибок частинами квадратичних апроксимацій (27 елементів) на скінченних елементах, обчислений після останнього кроку алгоритму

Таблиця 2.2 – Характеристики h -адаптивного МСЕ з частинами квадратичними апроксимаціями

m	N	$\ e_h\ _V$	$\ u_h\ _V$	p_1	$ e_h _H$	$ u_h _H$	p_0	δ_{\max}
0	4	89.2692	59.1331		1.91545	1.50004		123.58
1	8	39.7882	54.9451	1.166	0.614825	1.38325	1.639	72.34
2	16	3.37218	54.6502	2.363	0.030465	1.37365	2.987	17.67
3	22	1.98262	54.6967	2.233	0.015793	1.37505	2.815	7.04
4	27	0.42426	54.7219	2.801	0.002306	1.37575	3.521	1.92

2.1.7.3 Результати h -адаптування з частинами кубічними апроксимаціями

Результати h -адаптування з частинами кубічними апроксимаціями зображено на рис. 2.5, 2.6 та табл. 2.3. Зауважимо, що збільшення порядку

поліноміальної апроксимації поряд із зменшенням кількості кроків адаптування приводить до суттєвого зменшення енергетичної норми похибки.

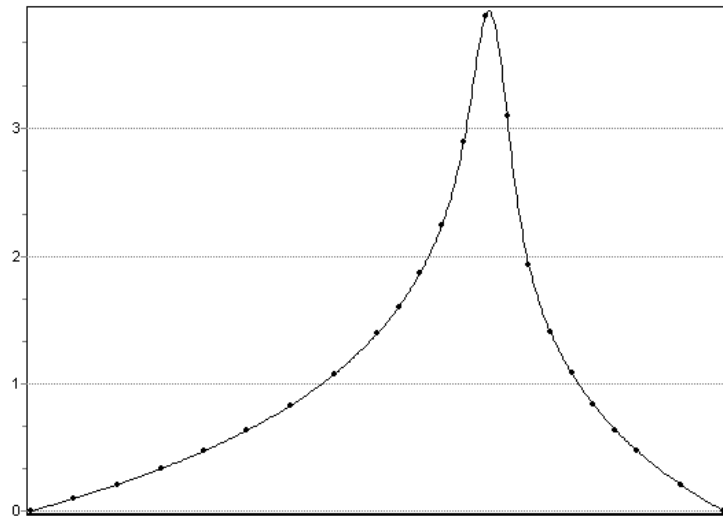


Рисунок 2.5 – Графік побудованої ермітової апроксимації МСЕ, точками відзначено її величини у вузлах знайденої сітки

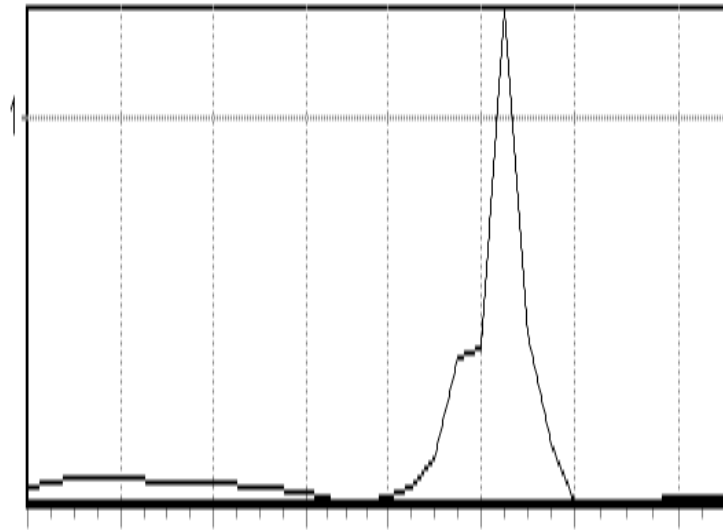


Рисунок 2.6 – Розподіл відносних похибок ермітових апроксимацій між скінченними елементами після останнього кроку адаптування

Таблиця 2.3 – Збіжність характеристик ермітових апроксимацій МСЕ в процесі адаптування

m	N	$\ e_h\ _V$	$\ u_h\ _V$	p_1	$ e_h _H$	$ u_h _H$	p_0	δ_{\max}
0	4	17.2437	58.2447		0.419208	1.48196		51.23
1	6	14.2349	56.1691	0.473	0.331512	1.41588	0.579	36.36
2	12	3.93944	55.0118	1.344	0.071125	1.38339	1.615	9.95
3	22	0.17562	54.7327	2.691	0.001516	1.37604	3.298	1.28

2.1.8 Висновки

Ми побудували адаптивні схеми МСЕ для розв'язування лінійних крайових задач зі звичайними диференціальними рівняннями другого порядку. Основу цих схем становить класична процедура Гальоркіна з просторами апроксимацій, що породжуються локально визначеними квадратичними або кубічними базисними функціями на кожному зі скінченних елементів нерівномірних сіток. Враховуючи теорему про середнє для обчислення інтеграла від добутку неперервних функцій сформульовано правила аналітичного обчислення складників системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ на скінченому елементі і в твердженнях 2.1 та 2.2 подано їхні значення, які є точними у випадку частинами постійних даних задачі для квадратичних і кубічних базисних функцій. Зауважимо, що на підставі цих співвідношень із застосуванням конденсації внутрішніх параметрів результуючі матриці кожної системи рівнянь МСЕ можна трансформувати до тридіагонального вигляду, притаманному випадку використання базисних функцій Куранта.

Щоб мати змогу обчислювати апроксимації МСЕ з наперед гарантованою точністю, кожна з запропонованих схем доповнена апостеріорними оцінювачами їхніх похибок, значення енергетичних норм яких обчислюються

на кожному скінченному елементі незалежно від решти складових сітки. З огляду на задачу про лишок біжучої апроксимації МСЕ та допущення стосовно її достатньо точних вузлових значень сконструйовані АОП визначаються поліномом третього або четвертого порядків на скінченному елементі, коефіцієнти та норми яких подано у теоремах 2.1 та 2.2.

Зрештою, маючи за мету досягнення рівномірного розподілу норм похибок апроксимації на всіх скінченних елементах, тут запозичено стратегію локального згущення сіток із праць [69].

Апробація обчислювальних властивостей обох вище описаних числових схем засвідчила, що послідовне уточнення апроксимацій МСЕ із вжитою стратегією локального адаптування сіток здатне монотонно поліпшувати структури шуканих розв'язків із асимптотичними показниками порядків швидкості збіжності їхніх похибок до нульових значень енергетичних норм.

2.2 *hp*-адаптивні схеми МСЕ

2.2.1 Формулювання задачі

2.2.1.1 Стратегії локального адаптування поділів на скінченні елементи та\або вибору порядку апроксимації МСЕ на скінченному елементі

Метод скінченних елементів (МСЕ) є універсальним інструментом розв'язування крайових задач як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь у частинних похідних. Сильна сторона цього методу – можливість роботи з областю (в якій розв'язується задача) складної геометричної структури (згадана особливість проявляє себе у 2- та 3-вимірних задачах).

За останні десятиліття алгоритми МСЕ було значно вдосконалено, зокрема з'явилося поняття адаптивного методу скінченних елементів. Мета адаптивного МСЕ – досягти заданого рівня похибки наближеного розв'язку за мінімальних обчислювальних затрат. Вона досягається шляхом побудови апостеріорних оцінок похибок наближеного розв'язку на вихідній сітці скінченних елементів, на основі яких відбувається часткове переконструювання (адаптування) сітки. Процес:

{знаходження розв'язку} \rightarrow {оцінка похибок} \rightarrow {перебудова сітки}

виконується циклічно, доки не буде досягнуто заданого рівня похибки та її рівномірного розподілу між скінченними елементами.

Можна виділити такі основні підходи до побудови алгоритмів адаптування сіток:

- *h*-адаптування: степінь апроксимуючих поліномів на всіх елементах однаковий і незмінний в процесі роботи алгоритму, а нова сітка вузлів отримується в результаті включення нових вузлів у початкову (поділ елементів);
- *p*-адаптування: сітка вузлів незмінна, змінюються лише степені апроксимуючих поліномів на вибраних скінченних елементах;
- *hp*-адаптування: комбінація поділу елементів та зміни степенів поліномів на вибраних елементах.

Схеми *hp*-адаптування є дуже привабливим з точки зору ефективності, оскільки показано [59], що використання *hp*-апроксимацій у деяких випадках дає змогу отримати послідовність наближень до розв'язку задачі, похибки яких спадають експоненціально по відношенню до кількості змінних, тобто існують сталі $C, \alpha > 0$ такі що L^1 - норма похибки наближення на сітці, що породжує N невідомих змінних, задовольняє наступну оцінку:

$$\|u - u_{hp}\|_1 \leq C e^{-\alpha N}.$$

Загалом можна стверджувати, що на даний момент немає завершеної теорії *hp*-адаптивних алгоритмів МСЕ. Також немає готових індустріальних продуктів (комерційних), що побудовані на їх основі. Оскільки розробка таких рішень є дуже важливою задачею, то посилюється інтерес до алгоритмів на основі так званого *reference solution*. Такі алгоритми є дуже загальними і дають можливість розв'язувати практично будь-які задачі. Є деякі *opensource*-проекти (наприклад див. <http://hpfem.org/>), що пропонують імплементацію алгоритмів згаданого типу. Загальність алгоритмів на основі *reference solution* породжує суттєвий недолік – важкість їх теоретичного дослідження та обґрунтування коректності. На даний момент невідомо доведень збіжності таких алгоритмів. Якщо ж оглянути теоретичні дослідження алгоритмів *hp*-адаптування, то загалом вони проведені для дуже простих задач і теоретично обґрунтовані алгоритми мають дуже вузьке застосування. Це приводить до того, що, з одного боку, ми маємо програмне забезпечення, яке вже може використовуватися інженерами, а з іншого – застосування його не дає ніяких гарантій ефективності. Можна вважати, що останній факт гальмує розробку потужних комерційних продуктів на основі *hp*-адаптивних алгоритмів МСЕ.

Метою даної роботи є розробка та дослідження *hp*-адаптивних алгоритмів. Побудовано два алгоритми. Перший – на основі *reference solution*. Другий алгоритм базується на комбінуванні явних та неявних апостеріорних оцінювачів похибки (АОП) і для нього проведено просте теоретичне дослідження коректності та умов застосування. Також, оскільки використовуються поліноміальні апроксимації високих порядків, то увагу приділено деяким важливим допоміжним задачам, що пов'язані з ефективною імплементацією алгоритмів. Тут слід відзначити проблему побудови локального базису, проблему ефективного розв'язування СЛАР та задачу побудови квадратурних формул Гаусса довільного порядку. Для останньої задачі проведено детальний опис та обґрунтування способу її вирішення.

2.2.1.2 Загальна характеристика проблеми та аналіз можливих шляхів її вирішення

Розглянемо таку крайову задачу:

знайти функцію $u = u(x)$ таку, що

$$\begin{cases} -(\mu u')' + \beta u' + \sigma u = f, & x \in (0, L) \\ (\mu u')|_{x=0} = \alpha u(0) - \bar{u}_0, & -(\mu u')|_{x=L} = \gamma u(L) - \bar{u}_L, \end{cases}$$

де

$$\alpha, \gamma \geq 0, \mu(x) \geq \mu_0 > 0, \sigma(x) \geq 0 \text{ майже скрізь на } (0, L], \\ \mu, \beta, \sigma \in L^\infty(0, L), f \in L^2(0, L]$$

Дана крайова задача має важливі застосування в екології, напівпровідниках, прогнозуванні епідемій тощо. Більшість реальних задач такого вигляду є сингулярно збуреними, тобто містять малі коефіцієнти при старших похідних [20].

2.2.1.3 Варіаційне формулювання крайової задачі

Наведена крайова задача допускає таке варіаційне формулювання:

знайти функцію $u \in V$ таку, що задовольняє рівняння

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V,$$

де

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_0^L \mu u' v' + \beta u' v + \sigma uv \, dx \\ &\quad + \alpha u(0)v(0) + \gamma u(L)v(L), \\ \langle l, v \rangle &:= \int_0^L f v \, dx + \alpha \bar{u}_0 v(0) + \gamma \bar{u}_L v(L), \quad \forall u, v \in V := H^1(0, L). \end{aligned}$$

Отриману варіаційну задачу дискретизують, розв'язуючи її на вибраному належним чином скінченновимірному підпросторі $V_h \subset V$.

2.2.2 Застосування МСЕ до розв'язування задачі

У методі Гальоркіна наближений розв'язок варіаційної задачі відшуковують у вигляді лінійної комбінації $u_h(x) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x)$, де $\phi_k(x)$ - система вибраних певним чином лінійно незалежних функцій (детальніше див. [119]). Коефіцієнти c_k знаходять з умови:

$$a(u_h, \phi_j) = \langle l, \phi_j \rangle, \quad j = \overline{0, n}.$$

Підставивши вираз наближеного розв'язку отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{k=0}^n c_k a(\phi_k, \phi_j) = \langle l, \phi_j \rangle, \quad j = \overline{0, n}.$$

За способом побудови наближеного розв'язку метод скінченних елементів співпадає з методом Гальоркіна. Різниця між методами полягає в тому, що МСЕ, на відміну від методу Гальоркіна, дає конкретний спосіб побудови системи функцій $\phi_k(x)$. Основна ідея полягає у тому, щоб використовувати функції з локальними носіями, що в результаті приведе до розрідженої СЛАР.

Розглянемо детальніше процес отримання наближення у методі скінченних елементів.

Нехай $\mathcal{T} = \{x_i\}_{i=0}^N$ - поділ відрізка $[0, L]$: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$, $[x_{k-1}, x_k]$ - k -ий скінчений елемент і $h_k = x_k - x_{k-1}$. Виходячи з варіаційного формулювання поставленої задачі введемо такі позначення:

$$a_k(u, v) \cong \mu_{k-1/2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'v'dx + \beta_{k-1/2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} u'vdx + \sigma_{k-1/2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} uvdx + \\ + \alpha u(0)v(0) \delta_{1,k} + \gamma u(L)v(L) \delta_{N,k},$$

$$\langle l_k, v \rangle \cong f_{k-1/2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} vdx + \alpha \bar{u}_0 v(0) \delta_{1,k} + \gamma \bar{u}_L v(L) \delta_{N,k},$$

де $\mu_{k-1/2} = \mu \left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right)$ і т.д., $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Тоді для k -го скінченного елемента компоненти локальної СЛАР $KU=F$ обчислюються таким чином:

$$K_{ij} = a_k(\phi_j, \phi_i), \quad F_i = \langle l_k, \phi_i \rangle,$$

де ϕ_i - i -та базисна функція k -го елемента.

Наприклад, для лінійного елемента можна вибрати такі базисні функції:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{1}{h_k}(x - x_{k-1}), \quad \phi_2(x) = \frac{1}{h_k}(x - x_{k-1}).$$

За такого вибору базисних функцій наближений розв'язок на скінченному елементі матиме вигляд: $u_h(x) = u_{i-1}\phi_1(x) + u_i\phi_2(x)$, де $u_i = u_h(x_i)$ - значення наближеного розв'язку у вузлі сітки (вибраного поділу).

Маючи матриці K та вектори F для всіх скінченних елементів можна застосувати алгоритм синтезу глобальної матриці жорсткості та вектора навантажень (детальніше див. [38]). Розв'язавши глобальну систему рівнянь МСЕ, знайдемо всі коефіцієнти наближеного розв'язку.

2.2.3 Алгоритм синтезу глобальної СЛАР

Проілюструємо на прикладі алгоритм побудови глобальної системи рівнянь МСЕ. Нехай як і в попередньому пункті $\mathfrak{T} = x_i \big|_{i=0}^N$ - поділ відрізка $[0, L] : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$, $[x_{k-1}, x_k]$ - k -ий скінчений елемент і $h_k = x_k - x_{k-1}$. В якості системи функцій $\phi_k(x)$, що використовується в методі Гальоркіна, виберемо систему функцій Куранта (англ. *hat functions*):

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{h_k}, & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1} - x}{h_{k+1}}, & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases} .$$

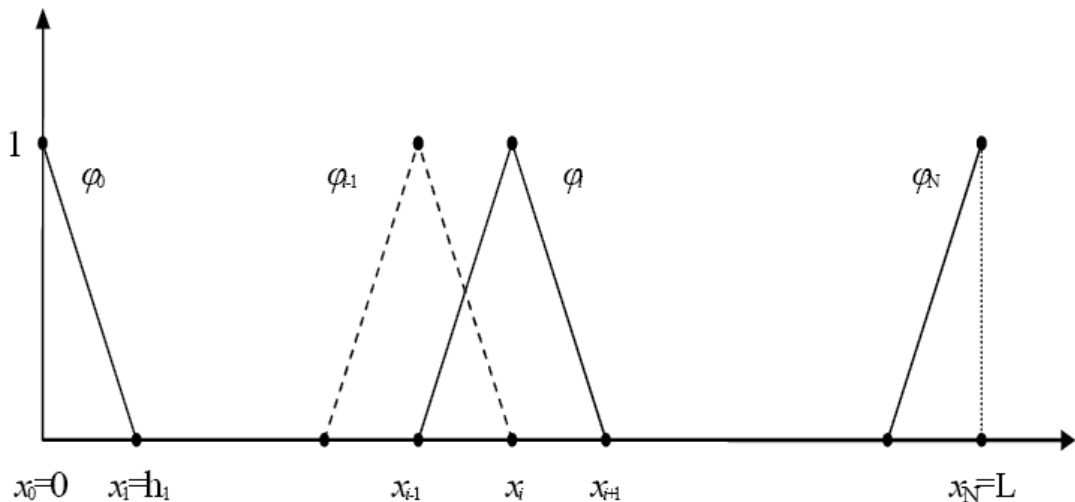


Рисунок 2.7 – Графіки функцій Куранта

Шукатимемо розв'язок у вигляді: $u_h(x) = \sum_{k=0}^N q_k \phi_k(x)$. Невідомі коефіцієнти знайдемо з системи $a(\sum_{k=0}^N q_k \phi_k, \phi_j) = \langle l, \phi_j \rangle$, $j = \overline{0, N}$.

Використовуючи введені вище позначення і вигляд функцій Куранта, можемо отриману систему рівнянь записати таким чином:

$$\sum_{i=1}^N a_i(q_{i-1}\phi_{i-1} + q_i\phi_i, \phi_j) = \sum_{i=1}^N \langle l_i, \phi_j \rangle, \quad j = \overline{0, N},$$

або, враховуючи, що $\text{supp}(\phi_j) = [x_{j-1}, x_{j+1}]$, $j = \overline{1, N-1}$, $\text{supp}(\phi_0) = [x_0, x_1]$, $\text{supp}(\phi_N) = [x_{N-1}, x_N]$ отримуємо:

$$a_1(q_0\phi_0 + q_1\phi_1, \phi_0) = \langle l_1, \phi_0 \rangle,$$

$$a_j(q_{j-1}\phi_{j-1} + q_j\phi_j, \phi_j) + a_{j+1}(q_j\phi_j + q_{j+1}\phi_{j+1}, \phi_j) = \langle l_j, \phi_j \rangle + \langle l_{j+1}, \phi_j \rangle, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$a_N(q_{N-1}\phi_{N-1} + q_N\phi_N, \phi_N) = \langle l_N, \phi_N \rangle.$$

Запишемо отриману СЛАР в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} q_0 \underline{a_1(\phi_0, \phi_0)} + q_1 \underline{a_1(\phi_1, \phi_0)} &= \underline{\langle l_1, \phi_0 \rangle}, \\ q_0 \underline{a_1(\phi_0, \phi_1)} + q_1 [\underline{a_1(\phi_1, \phi_1)} + \underline{a_2(\phi_1, \phi_1)}] + q_2 \underline{a_2(\phi_2, \phi_1)} &= \underline{\langle l_1, \phi_1 \rangle} + \underline{\langle l_2, \phi_1 \rangle} \\ q_1 \underline{a_2(\phi_1, \phi_2)} + q_2 [\underline{a_2(\phi_2, \phi_2)} + a_3(\phi_2, \phi_2)] + \dots &= \underline{\langle l_2, \phi_2 \rangle} + \langle l_3, \phi_2 \rangle, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \\ q_{N-1} a_N(\phi_{N-1}, \phi_N) + q_N a_N(\phi_N, \phi_N) &= \langle l_N, \phi_N \rangle. \end{aligned}$$

З вигляду глобальної системи рівнянь стає зрозумілим спосіб її утворення.

2.2.3.1 Алгоритм побудови глобальної СЛАР:

1. Для i -го скінченного елемента ($i = \overline{1, N}$):

- Вибрати дві базисні функції $\tilde{\phi}_1^i(x) \equiv \phi_{i-1}(x)$, $\tilde{\phi}_2^i(x) \equiv \phi_i(x)$, що не тотожно рівні 0 на ньому (локальний базис; див. рис. 2.8):

$$\left(\tilde{\phi}_1^i(x) = 1 - \frac{1}{h_i}(x - x_{i-1}), \quad \tilde{\phi}_2^i(x) = \frac{1}{h_i}(x - x_{i-1}) \right).$$

- Аналогічно як у методі Гальоркіна побудувати на основі вибраних базисних функцій локальну СЛАР $KU=F$ з такою матрицею і правою частиною:

$$K^i = \begin{pmatrix} a_i(\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_0) & a_i(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_0) \\ a_i(\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1) & a_i(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_1) \end{pmatrix}, \quad F^i = \begin{pmatrix} \langle l_i, \tilde{\phi}_0 \rangle \\ \langle l_i, \tilde{\phi}_1 \rangle \end{pmatrix}.$$

2. На основі знайдених локальних матриць K^i та векторів F^i утворити глобальну СЛАР, як відзначено підкресленнями для перших елементів у наведеному вище розгорнутому записі глобальної системи (приклад з локальними матрицями 3×3 див рис. 2.9).

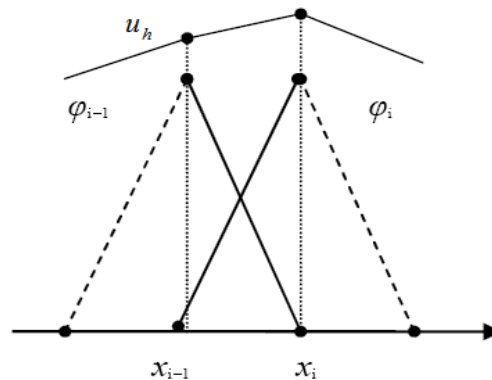


Рисунок 2.8 – Локальний базис

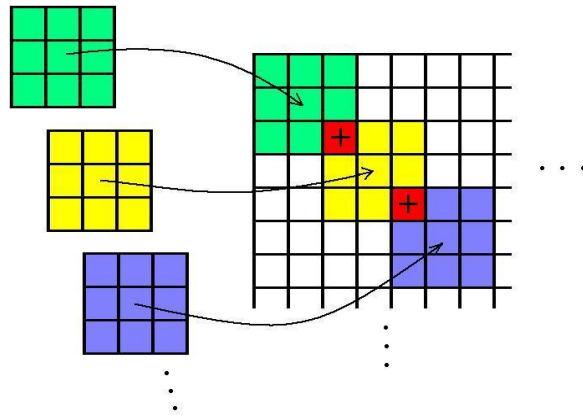


Рисунок 2.9 – Локальні матриці

2.2.3.2 Метод статичної конденсації

В підпункті 2.2.3.1 наведено алгоритм побудови глобальної СЛАР у випадку лінійних елементів (оскільки лінійна комбінація лінійних базисних функцій елемента є поліномом 1-го степеня). В результаті роботи алгоритму отримується СЛАР із тридіагональною матрицею, для розв'язування якої можна застосувати ефективний метод прогонки [126]. Проте, якщо використовувати в якості базисних функцій поліноми вищих порядків, то локальні матриці для кожного елемента будуть мати більшу розмірність, і це приведе до глобальної матриці з структурою, яку у випадку квадратичних поліномів можна побачити на рис. 2.9. Для ефективного розв'язування систем з такими матрицями в загальному випадку потрібно застосовувати алгоритми, що спеціально призначені для розріджених матриць [126]. Структура матриці дозволяє використати інший підхід – виконати *статичну конденсацію внутрішніх змінних*. Ця процедура (детально її описано в [61]) дає змогу отримати систему з тридіагональною матрицею.

Не зменшуючи загальності, розглянемо метод статичної конденсації (МСК) на прикладі з використанням кубічних базисних функцій.

Базисні функції можна вибрати так, щоб на i -му скінченному елементі наближений розв'язок мав вигляд

$$u_h(x) = u_{i-1} \tilde{\phi}_1(x) + u_{i-1/2} \tilde{\phi}_2(x) + u'_{i-1/2} \tilde{\phi}_3(x) + u_i \tilde{\phi}_4(x),$$

де u_{i-1}, u_i - значення наближеного розв'язку на кінцях елемента (у вузлах x_{i-1}, x_i), $u_{i-1/2}, u'_{i-1/2}$ - значення наближеного розв'язку та його похідної у центрі скінченого елемента (в точці $x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$; конкретний вигляд функцій буде подано у наступних пунктах). Для зручності змінимо індексацію локальних базисних функцій. Отримаємо: $u_h(x) = u_{i-1} \tilde{\phi}_1(x) + u_i \tilde{\phi}_2(x) + u_{i-1/2} \tilde{\phi}_3(x) + u'_{i-1/2} \tilde{\phi}_4(x)$. В останньому виразі спочатку йдуть базисні функції, і відповідні змінні, які фігуруватимуть у сусідніх елементах - u_{i-1}, u_i (назвемо їх глобальними), а потім змінні $u_{i-1/2}, u'_{i-1/2}$ (назвемо їх локальними). В блоковому вигляді локальну систему рівнянь на i -му елементі можна записати таким чином:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

де A, B, C, D - матриці 2×2 , F_1, F_2 - вектори-стовпці висотою 2, $G = \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} u_{i-1/2} \\ u'_{i-1/2} \end{pmatrix}$ - вектори глобальних та локальних змінних відповідно.

Локальну систему можна переписати так:

$$\begin{cases} AG + BL = F_1 \\ CG + DL = F_2 \end{cases}$$

Виразимо L з другого рівняння:

$$L = D^{-1}(F_2 - CG),$$

і підставимо у перше рівняння:

$$\underbrace{(A - BD^{-1}C)}_K G = \underbrace{F_1 - BD^{-1}F_2}_F.$$

Тепер можна застосувати алгоритм побудови глобальної матриці, але з використанням отриманих в результаті конденсації 2×2 -матриць \hat{K} і векторів \hat{F} . В результаті отримаємо СЛАР із тридіагональною матрицею, яку можна розв'язати методом прогонки. Знайшовши таким чином вузлові значення наближеного розв'язку зможемо знайти для кожного елемента його внутрішні змінні. Коректність такого алгоритму детальніше висвітлено у [61].

2.2.3.3 Обчислення компонент локальної СЛАР

Для обчислення компонент локальних матриць і векторів на k -му елементі потрібно знаходити значення інтегралів:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi'_j \phi'_i dx, \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi'_j \phi_i dx, \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_j \phi_i dx, \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_i dx,$$

де ϕ_i - i -та базисна функція k -го елемента.

Для k -го скінченного елемента введемо допоміжну змінну ξ , що пов'язана з змінною x наступним чином: $x = x_{k-1/2} + \xi \cdot h_k / 2$. Введемо позначення для базисних функцій у локальних координатах: $\phi_i(\xi) = \phi_i(x_{k-1/2} + \xi \cdot h_k / 2)$. Тоді перейшовши в інтегралах до локальної змінної ξ і використавши базисні функції у локальних координатах одержимо:

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi'_j \phi'_i dx &= \frac{2}{h_k} \int_{-1}^1 \phi'_j \phi'_i d\xi, & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_j \phi_i dx &= \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 \phi_j \phi_i d\xi, \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi'_j \phi_i dx &= \int_{-1}^1 \phi'_j \phi_i d\xi, & \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi_i dx &= \frac{h_k}{2} \int_{-1}^1 \phi_i d\xi. \end{aligned}$$

Для обчислення отриманих інтегралів можна успішно використати квадратурні формули Гауса [119]. Оскільки підінтегральні функції є

многочленами, то ці формули даватимуть дуже точний результат (присутня лише похибка заокруглення).

Зауваження 2.3. До цього моменту було описано загальний алгоритм методу скінченних елементів. Далі буде детально розглянуто алгоритм *hp*-адаптування на основі *reference solution*.

2.2.4 Збіжність *hp*-адаптивних схем: аналіз результатів числових експериментів з модельними сингулярно збуреними задачами

Алгоритм, що буде описано далі запропоновано у [19]. Він складається із двох основних частин:

Отримання «контрольного» розв’язку (*reference solution*). Під цим ми розуміємо розв’язок МСЕ на вдвічі згущеній сітці (по відношенню до заданої початкової), в якій на кожному новоутвореному елементі додатково збільшено степінь апроксимуючих поліномів на 1 в порівнянні із батьківським елементом. Цей розв’язок надалі буде використовуватися для оцінки похибки. Ідея полягає в тому, щоб замінити обчислення похибки як різниці між точним розв’язком (який є невідомим!) і наближеним на початковій сітці обчисленням різниці між *reference solution* і наближенням на початковій сітці (або, для забезпечення можливості незалежного вибору оптимального переконструювання кожного елемента, проекцією, в певному сенсі, *reference solution* на простір апроксимацій, що визначається початковою сіткою). В цьому є сенс, оскільки введення достатньої кількості нових змінних призводить до того, що *reference solution* містить в собі більше, в порівнянні з розв’язком на вихідній сітці, інформації про точний розв’язок і, відповідно, це вже дає змогу робити певний вибір відносно оптимальної перебудови сітки.

Вибір оптимальної сітки. Тут ідея полягає у виборі такої сітки, яка дасть змогу максимально зменшити похибку при мінімальному прирості кількості невідомих змінних. Більш формально, позначивши $u = u_{h/2, p+1}$ (*reference solution*), питання вибору нової сітки $h_{p_{opt}}$ зводиться до наступної задачі оптимізації: *знайти сітку $h_{p_{opt}}$, таку що:*

$$\frac{\left|u - \Pi_{h_p} u\right|_{H^1(0,L)}^2 - \left|u - \Pi_{h_{p_{opt}}} u\right|_{H^1(0,L)}^2}{N_{h_{p_{opt}}} - N_{h_p}} \rightarrow \max.$$

Тут Π_{\bullet} - оператор проектування (інтерполювання) на простір апроксимацій, заданий відповідною сіткою (буде детально розглянутий далі), N_{\bullet} - кількість невідомих змінних на відповідній сітці, $|\cdot|_{H^1(0,L)}$ - напівнорма в просторі Соболева $H^1(0,L)$:

$$\left|u\right|_{H^1(0,L)}^2 = \int_0^L (u')^2 dx.$$

Зауваження 2.4. Далі, для зручності, опускатимемо нижній індекс в позначенні введеної напівнорми, розуміючи під $|\bullet|$ або $|\bullet|_{H^1(0,L)}$, або $|\bullet|_{H^1(K)}$, в залежності від контексту (K - скінченний елемент).

2.2.4.1 Знаходження проєкцій

Перш ніж розглядати алгоритм побудови оптимальної сітки, визначимо оператор Π_{\bullet} та покажемо, що вибір в якості оцінки похибки виразу $\left|u - \Pi_{\bullet} u\right|_{H^1(0,L)}$ дає змогу наближено обчислювати її незалежно (а при можливості – паралельно) на кожному скінченному елементі.

Нехай $X_{hp}(0, L)$ – простір неперервних кусково-поліноміальних функцій визначених на $(0, L)$, причому цей простір будується на деякій сітці вузлів $\mathfrak{J} = \{x_i\}_{i=0}^N$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$ як простір апроксимацій методу скінченних елементів із довільними степенями апроксимуючих поліномів. Тоді для функції $u \in H^1(0, L)$ проекція $w_{hp} = \Pi_{hp} u$ визначається наступним чином:

$$\begin{cases} w_{hp} \in X_{hp}(0, L) \\ w_{hp}(0) = u(0), w_{hp}(L) = u(L) \\ |u - w_{hp}|_{H^1(0, L)} \leq |u - v_{hp}|_{H^1(0, L)}, \quad \forall v_{hp} \in X_{hp}(0, L). \end{cases}$$

Остання нерівність еквівалентна умові:

$$|u - w_{hp}|_{H^1(0, L)} = \min_{v_{hp} \in X_{hp}(0, L)} |u - v_{hp}|_{H^1(0, L)}.$$

Безпосередньо з означення, знайти $w_{hp} = \Pi_{hp} u$ важко. Перейдемо до іншої, еквівалентної, задачі. Для цього зафіксуємо довільну функцію $v \in X_{hp}(0, L)$, $v(0) = v(L) = 0$. Нехай $w_{hp} = \Pi_{hp} u$. Тоді $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ можемо записати:

$$|w_{hp} + \varepsilon v - u|^2 = \int_0^L (w'_{hp} + \varepsilon v' - u')^2 dx = |w_{hp} - u|^2 + 2\varepsilon \int_0^L (w'_{hp} - u')v' dx + \varepsilon^2 |v|^2.$$

З цієї рівності очевидно, що остання умова з означення оператора Π , еквівалентна умові:

$$\int_0^L (w'_{hp} - u')v' dx = 0, \quad \forall v \in X_{hp}(0, L), v(0) = v(L) = 0.$$

Отже:

$$w_{hp} = \Pi_{hp} u \Leftrightarrow \begin{cases} w_{hp} \in X_{hp}(0, L) \\ w_{hp}(0) = u(0), w_{hp}(L) = u(L) \\ \int_0^L (w'_{hp} - u')v' dx = 0, \quad \forall v \in X_{hp}(0, L), v(0) = v(L) = 0. \end{cases}$$

Розглянемо тепер простір $X_{hp}(0, L)$. В ньому можна вибрати деякий базис, що складається із вузлових функцій Куранта ϕ_j та бабл-функцій ψ_i . Покажемо, що у випадку коли u - неперервно диференційовна, то $w_{hp} = \Pi_{hp} u$ є інтерполяційною функцією для u відносно системи вузлів $\mathfrak{S} = x_i \Big|_{i=0}^N$, тобто $w_{hp}(x_j) = u(x_j)$. Очевидно, що для граничних вузлів потрібне співвідношення виконується (це впливає із означення оператора проектування). Підставивши у рівність

$$\int_0^L (w'_{hp} - u')v' dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^L w'_{hp} v' dx = \int_0^L u' v' dx$$

в якості v функцію Куранта ϕ_j , що відповідає внутрішньому вузлу сітки отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^L w'_{hp} \phi'_j dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} w'_{hp} \phi'_j dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} w'_{hp} \phi'_j dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} w'_{hp} \phi'_j dx = \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} w'_{hp} dx - \frac{1}{h_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} w'_{hp} dx = \\ &= \frac{1}{h_j} w_{hp} \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{1}{h_{j+1}} w_{hp} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = \\ &= -\frac{1}{h_j} w_{hp}(x_{j-1}) + \left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \right) w_{hp}(x_j) - \frac{1}{h_{j+1}} w_{hp}(x_{j+1}) = \int_0^L u' \phi'_j dx. \end{aligned}$$

Отже для знаходження значень $w_{hp}(x_j)$ отримали (врахувавши значення у граничних вузлах) СЛАР.

Аналогічно, провівши такі ж перетворення як у попередньому випадку для лівої частини рівності

$$\int_0^L u'v' dx = \int_0^L u'v' dx.$$

Отримаємо

$$-\frac{1}{h_j}u(x_{j-1}) + \left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}}\right)u(x_j) - \frac{1}{h_{j+1}}u(x_{j+1}) = \int_0^L u'\phi'_j dx.$$

Порівнюючи з попередніми співвідношеннями для $w_{hp}(x_j)$ бачимо, що значення $w_{hp}(x_j)$ і $u(x_j)$ знаходяться із однакових СЛАР, а отже вони співпадають. \square

Враховуючи доведену вище властивість, неважко побачити, що задача знаходження проекції w_{hp} еквівалентна такій

$$w_{hp} = \Pi_{hp} u \left| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_{hp} \in X_{hp}(0, L) \\ w_{hp}(x_j) = u(x_j), \quad j = \overline{0, N} \\ \int_0^L (w'_{hp} - u')v' dx = 0, \quad \forall v \in X_{hp}(0, L), v(x_j) = 0, \quad j = \overline{0, N}. \end{array} \right.$$

і її можемо звести до знаходження проекції на кожному елементі окремо, тобто до розв'язування сукупності задач

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{hp} \in X_{hp}(x_{j-1}, x_j) \\ w_{hp}(x_{j-1}) = u(x_{j-1}), w_{hp}(x_j) = u(x_j) \\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} (w'_{hp} - u')v' dx = 0, \quad \forall v \in X_{hp}(x_{j-1}, x_j), v(x_{j-1}) = v(x_j) = 0 \end{array} \right| \quad j = \overline{1, N}. \quad (\Pi)$$

Кожну із задач отриманої послідовності легко безпосередньо звести до СЛАР використавши стандартний підхід МСЕ.

Знайшовши $w_{hp} = \prod_{hp} u$ можемо обчислити оцінку похибки

$$\|u - w_{hp}\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u' - w'_{hp})^2 dx$$

на кожному скінченному елементі, використовуючи квадратурні формули Гауса.

Зауваження 2.5. Вищеописане обґрунтовує вибір в якості міри оцінювача похибки напівнорми $|\bullet|_{H^1(K)}$

Зауваження 2.6. Як буде описано далі, для потреб адаптування, проекцію потрібно будувати або на одному скінченному елементі, або на двох, утворених в результаті поділу деякого елемента, причому таку побудову потрібно виконувати багатократно на кожному скінченному елементі. Це загалом досить ресурсоємна процедура, оскільки знаходження проекції потребує розв'язування СЛАР. Якщо знаходити аналітично матрицю $A = \{a_{ij}\}$ системи для знаходження проекції, то неважко отримати таку формулу для обчислення її елементів:

$$a_{ij} = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}'_j \tilde{\phi}'_i d\xi$$

причому в матриці $A = \{a_{ij}\}$: $i, j = \overline{1, p}$ або $i, j = 0, 2, 3, \dots, p$. Тут $\tilde{\phi}_j$ – j -та базисна функція у локальних координатах. $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1$ – лінійні вузлові базисні функції, $\tilde{\phi}_j, j \geq 2$ – бабл-функції ($\deg(\tilde{\phi}_j) = j, j \geq 2$). Для того, щоб не розв'язувати СЛАР базисні функції у локальних координатах можна вибрати так, щоб матриця A була діагональною. Про такий вибір базису мова піде у наступному розділі цієї роботи.

2.2.4.2 Побудова базису в локальних координатах

Виходячи з потреби ефективного обчислення похибки, базис у локальних координатах будемо задавати наступним чином:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_0(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \tilde{\phi}_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ \tilde{\phi}_n(\xi) &= \int_{-1}^{\xi} p_{n-1}(t) dt, \quad n = \overline{2, d}\end{aligned}$$

тут p_{n-1} - многочлен Лежандра (див розділ 6), d - максимальний степінь базисного многочлена. Неважко побачити, що $\tilde{\phi}_n(-1) = \tilde{\phi}_n(1) = 0$, $n = \overline{2, d}$, крім того матриця A , введена в попередньому пункті, при такому виборі базису буде діагональною.

Обчислення значень базисних функцій $\tilde{\phi}_n(\xi)$ з використанням комп'ютера безпосередньо за наведеною формулою є неефективним. Виведемо ефективнішу формулу.

Для цього розглянемо тривіальну тотожність:

$$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} [(x^2 - 1)^n] = 2nx(x^2 - 1)^n.$$

Продиференціювавши її $n + 1$ раз використовуючи правило Лейбніца для диференціювання добутку та врахувавши, що

$$p_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

отримаємо рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx} [(x^2 - 1) \frac{dp_n}{dx}] = n(n + 1) p_n.$$

Замість n підставивши $n-1$ та проінтегрувавши його на відрізку $[-1, \xi]$ прийдемо до альтернативного подання базисних бабл-функцій:

$$\tilde{\phi}_n(\xi) = (\xi^2 - 1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} \frac{dp_{n-1}}{d\xi}, \quad n = \overline{2, d}.$$

Тепер, використовуючи двокрокове рекурентне співвідношення для многочленів Лежандра (див. р.6), можна побудувати відповідні рекурентні співвідношення для похідних від цих многочленів і на їх основі обчислювати значення функцій $\tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}'_n, \quad n = \overline{2, d}$.

2.2.4.3 Алгоритм адаптування

Розглянемо одну ітерацію алгоритму, тобто перехід від заданої сітки до наступної. Вона складається з таких кроків:

Крок 1. Побудова розв'язку на вихідній сітці u_{hp} та «контрольного розв'язку» $u_{h/2, p+1}$ (*reference solution*).

Крок 2. Обчислюємо відносну похибку розв'язку

$$\eta = \frac{|u_{h/2, p+1} - u_{hp}|}{|u_{h/2, p+1}|} \cdot 100\%.$$

Якщо похибка менша за допустимий рівень то алгоритм припиняє роботу

Крок 3. Для кожного скінченного елемента вихідної сітки: зробити вибір між збільшенням степеня апроксимуючих поліномів і поділом його навпіл та обчислити *показник ефективності*.

Розглядатимемо лише переконструювання одного скінченного елемента порядку p , які призводять до зростання кількості змінних на 1, а саме збільшення порядку елемента на 1 (степеня многочленів на ньому) або поділи елемента навпіл на скінченні елементи із порядками p_1, p_2 такими, що

$p_1 + p_2 = p + 1$. Отже для одного елемента маємо $p + 1$ варіантів перебудови.

Для кожного із них обчислюємо *показник спадання похибки*

$$\frac{|u_{h/2,p+1} - w_{hp}|^2 - |u_{h/2,p+1} - w_{hp}^{new}|^2}{1},$$

де w_{hp} , w_{hp}^{new} - відповідні проекції на вихідний елемент та на відповідну сітку-результат переконструювання вихідного елемента. Серед обчислених показників вибираємо максимальний. Якщо він відповідає одному із варіантів поділу елемента, то в подальшому якщо цей елемент буде вибрано для перебудови, то його буде поділено на два, в іншому ж випадку порядок апроксимації на цьому елементі буде збільшено на 1.

Далі обчислюємо *показник ефективності* β_K (*guaranteed rate* див. у [19] обґрунтування потреби в цьому). Для цього починаючи із поділу елемента з найвищим *показником спадання похибки* будуємо послідовність поділів, для кожного із яких обчислюємо складові похибки дочірніх елементів і збільшуємо порядок тих дочірніх елементів, похибка яких є більшою ніж, наприклад, 70% від максимальної (рекомендовано вибирати число від 50% до 90%). Причому для кожного такого поділу на елементи з порядками p_1, p_2 обчислюємо величину

$$\mu_j = \frac{|u_{h/2,p+1} - w_{hp}|^2 - |u_{h/2,p+1} - w_{hp}^{(j)}|^2}{p_1 + p_2 - p}.$$

Тут $w_{hp}^{(j)}$ - відповідна проекція. Побудову послідовності зупиняємо, коли $p_1 = p_2 = p + 1$. Тепер обчислюємо

$$\beta_K = \max_j \mu_j.$$

Описаний процес продемонстровано на рис. 2.10.

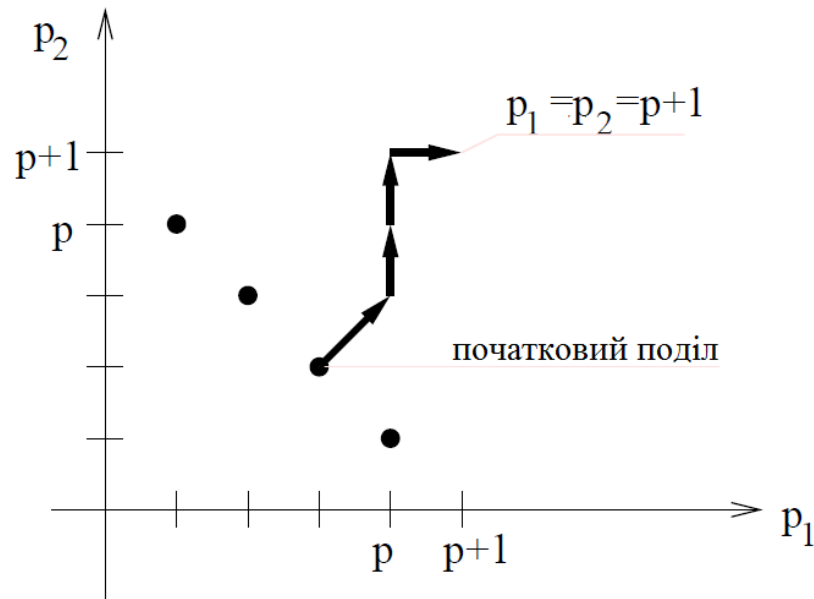


Рисунок 2.10 – Процес адаптування початкової сітки.

Крок 4: Перебудова вихідної сітки.

Обчислюємо максимальний показник ефективності на вихідній сітці

$$\beta_{\max} = \max_K \beta_K.$$

Елемент K для якого $\beta_K > \frac{1}{3}\beta_{\max}$ перебудовуємо. Якщо на кроці 3 для нього вибір був зроблений на користь збільшення порядку і таке збільшення не призведе до перевищення максимального порядку заданого користувачем, то порядок елемента збільшується на 1. В іншому випадку виконується процедура, аналогічна як на кроці 3 для визначення β_K , але тепер побудова послідовності припиняється у випадку коли $\mu_j > \frac{1}{3}\beta_{\max} \geq \mu_{j+1}$, причому від'ємні μ_i ігноруються. В результаті виконання описаної процедури отримаємо порядки дочірніх елементів p_1, p_2 (які відповідають μ_j). Елемент K ділиться на два скінченні елементи із знайденими порядками p_1, p_2 .

Крок 5: Повернутись на Крок 1.

2.2.4.4 Програмна реалізація

Реалізацію описаного алгоритму методу скінченних елементів та побудованого на його основі алгоритму адаптування сітки здійснено на основі платформи Microsoft .NET. Програмний код написано на мові С#.

2.2.4.5 Результати обчислюваних експериментів

Вихідні дані:задачі 1:

$$\mu = 1, \beta = 100, \sigma = 0, f = 100, \alpha = \gamma = 10^3, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1.$$

Наближення до розв'язку знайдено з точністю 1%. Максимальний порядок поліномів – 8.

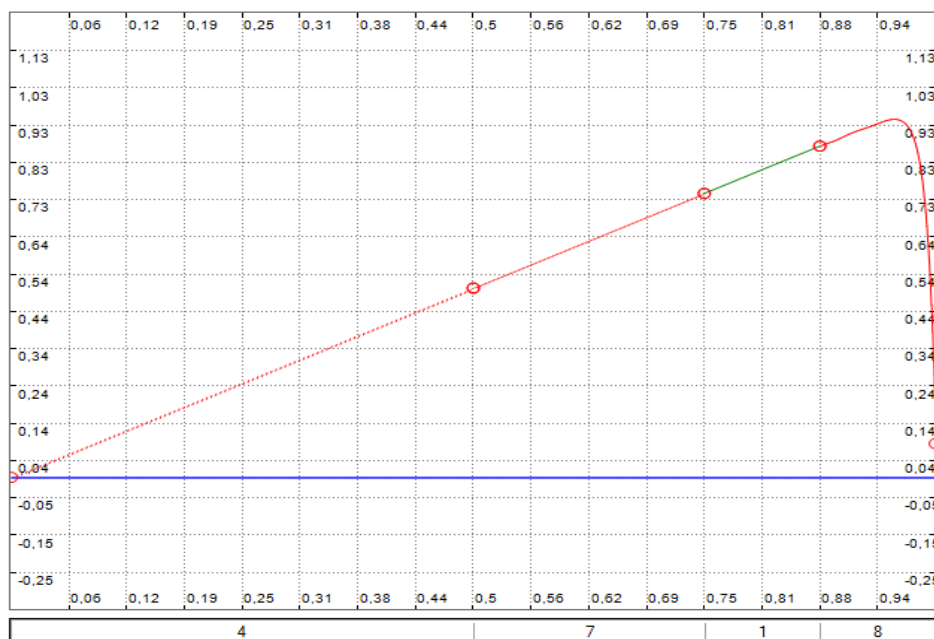


Рисунок 2.11 – Остаточне наближення (знизу показано степені використаних поліномів на кожному із елементів)

Таблиця 2.4 – Збіжність апроксимацій MSE: n – номер ітерації, N_{dof} – кількість змінних, $\varepsilon_n^\Omega = |u_{h/2,p+1}^{(n)} - u_{hp}^{(n)}|$ – абсолютна похибка,

$$r_n^\Omega = \frac{|u_{h/2,p+1}^{(n)} - u_{hp}^{(n)}|}{|u_{h/2,p+1}^{(n)}|} \cdot 100\% \text{ – відносна похибка}$$

n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	3	12.91	115.96
1	4	6.29	242.03
2	5	9.15	92.37
3	6	5.14	120.39
4	11	2.81	43.34
5	12	1.75	27.54
6	15	1.03	16.08
7	18	0.56	8.79
8	21	0.05	0.81

Для порівняння із h -адаптивністю використано лінійні та кубічні скінченні елементи. Отримані результати подано на рис. 2.12 і у табл. 2.5:

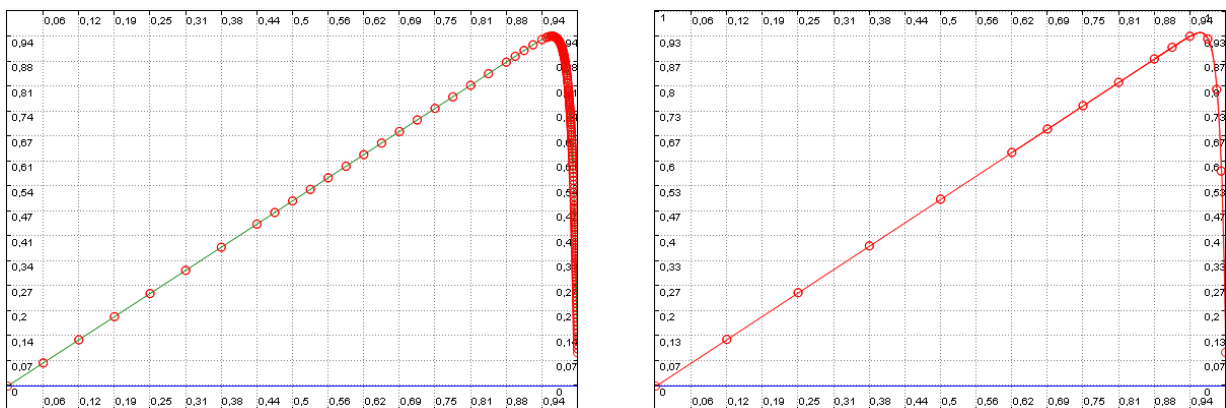


Рисунок 2.12 – Остаточні наближені розв’язки на сітках з лінійних (зліва) та кубічних (справа) елементів

Таблиця 2.5 – Збіжність апроксимацій МСЕ

Частинами лінійні апроксимації				Частинами кубічні апроксимації			
n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω	n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	5	75.73	98.79	0	13	11.20	84.3
... ..				1	25	4.77	56.33
6	40	0.72	10.3	2	34	1.62	22.58
7	51	0.36	5.17	3	40	0.38	5.43
... ..				4	43	0.06	0.93
14	156	0.03	0.55	5	46	0.02	0.32

Вихідні дані задачі 2:

$$\mu = 1, \beta = 100 \cdot (x - 0.5), \sigma = f = 10^3, \alpha = \gamma = 10^3, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1.$$

Наближення до розв'язку знайдено з точністю 1%. Максимальний порядок поліномів – 8.

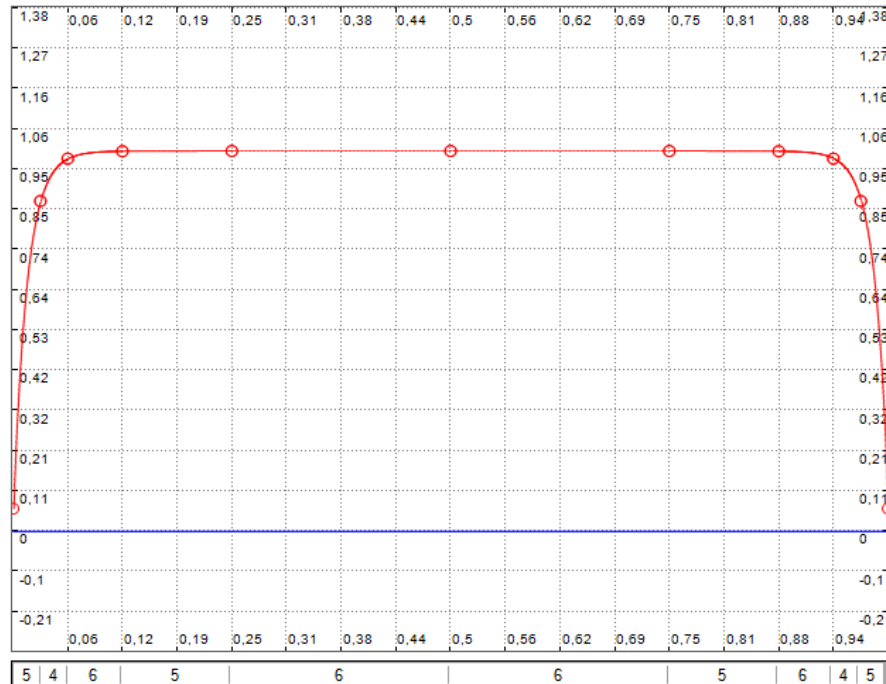


Рисунок 2.13 – – Остаточні наближення

Таблиця 2.6 – Збіжність апроксимацій МСЕ

n	N_{dof}	\mathcal{E}_n^Ω	r_n^Ω
0	3	5.25	186.82
1	5	5.34	131.19
2	7	4.95	99.06
3	9	4.00	71.08
4	11	2.93	48.25
5	13	2.02	31.96
6	15	1.39	21.60
7	17	1.04	15.95
8	19	0.41	5.88
9	23	0.20	2.68
10	29	0.08	1.14
11	37	0.08	1.12
12	45	0.08	1.12
13	53	0.03	0.35

Порівняння із h -адаптивністю. Отримані результати подано на рис. 2.24 і у табл. 2.7:

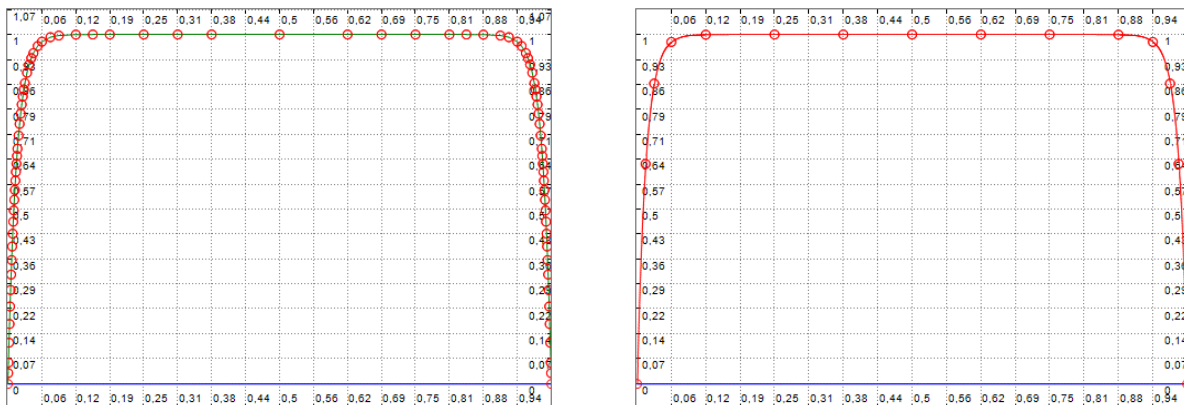


Рисунок 2.14 – Остаточні наближені розв’язки на сітках з лінійних (зліва) та кубічних (справа) елементів

Таблиця 2.7 – Збіжність апроксимацій МСЕ

Частинами лінійні апроксимації				Частинами кубічні апроксимації			
n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω	n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	5	9.99	31.8	0	13	4.07	13.0
1	9	9.41	29.3	1	25	2.32	7.5
... ..				2	31	0.75	2.4
9	81	0.19	0.60	3	37	0.15	0.5
10	83	0.18	0.59	4	43	0.03	0.1

2.2.5 Альтернативні стратегії адаптування

У цьому підрозділі розглянемо концептуально інший спосіб побудови алгоритмів *hp*-адаптування. Він є не таким загальним як попередній алгоритм, проте він ґрунтується на конструкціях, що дозволяють здійснювати теоретичне обґрунтування методу.

2.2.5.1 Явний апостеріорний оцінювач похибки

Описаний у попередніх розділах оцінювач похибки базувався на *reference solution*. Основною перевагою оцінювачів такого типу є їхня загальність і незалежність від конкретної крайової задачі. Це, в свою чергу, породжує недолік – відсутність прямого зв'язку між оцінювачем і даними задачі, що, зокрема, майже унеможливорює теоретичний аналіз алгоритмів адаптування.

Є низка інших підходів, що ґрунтується на *варіаційній задачі для похибки*. Повернемося до вихідного варіаційного рівняння (див. розділ 2.1.3):

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Введемо в розгляд похибку

$$e = u - u_h,$$

де u_h – наближення МСЕ (тобто розв'язок рівняння

$$a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle, \forall v_h \in V_h \subset V),$$

тоді

$$a(e, v) = a(u, v) - a(u_h, v) = \langle l, v \rangle - a(u_h, v), \quad \forall v \in V.$$

Отже отримали рівняння для похибки:

$$a(e, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle, \quad \forall v \in V,$$

де $\langle \rho(u_h), v \rangle = \langle l, v \rangle - a(u_h, v)$ - функціонал джерел похибки. Функціонал $\rho(u_h)$ є репрезентацією нев'язки вихідного диференціального рівняння і він є центральним елементом при побудові так званих *явних оцінювачів похибки* (і неявних також. Див. розділ 2.2.4, ітерація алгоритму, крок 4, локальна задача про похибку). Основна ідея останніх полягає у побудові оцінок для норми функціонала джерел похибки. Розглянемо побудову такого оцінювача для нашої задачі. Почнемо з запису рівняння для похибки:

$$a(e, v) = \langle l, v \rangle - a(u_h, v) = \int_0^L f v - \mu u_h' v' - \beta u_h' v - \sigma u_h v \, dx + \\ + v(0)\alpha[\bar{u}_0 - u_h(0)] + v(L)\gamma[\bar{u}_L - u_h(L)].$$

Нехай маємо сітку вузлів $\mathfrak{J} = x_i, \quad i=0, \dots, N$. Розглянемо декомпозицію функціонала джерел похибки на локальні (по елементні) складові. З попереднього виразу маємо:

$$a(e, v) = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f v - \mu u_h^k v' - \beta u_h^k v - \sigma u_h^k v] dx + \\ + v\alpha[\bar{u}_0 - u_h^1] \Big|_{x=x_0} + v\gamma[\bar{u}_L - u_h^N] \Big|_{x=x_N}.$$

В останньому виразі u_h^k є звуженням u_h на відповідний скінченний елемент.

Застосовуючи інтегрування частинами до другого доданку під інтегралом отримаємо:

$$a(e, v) = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f + (\mu u_h^k)'] - \beta u_h^k - \sigma u_h^k] v dx - \sum_{k=1}^N v \mu u_h^k \Big|_{x=x_{k-1}+0}^{x=x_k-0} + v \alpha [\bar{u}_0 - u_h^1] \Big|_{x=x_0} + v \gamma [\bar{u}_L - u_h^N] \Big|_{x=x_N}.$$

Вводячи позначення

$$R[u_h^k] := f + (\mu u_h^k)' - \beta u_h^k - \sigma u_h^k$$

та перегрупувати доданки після першої суми отримаємо потрібний вираз:

$$a(e, v) = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} R[u_h^k] v dx + \sum_{k=1}^{N-1} v \mu [u_h^{k+1} - u_h^k] \Big|_{x=x_k} + v \alpha [\bar{u}_0 - u_h^1] \Big|_{x=x_0} + v \gamma [\bar{u}_L - u_h^N] \Big|_{x=x_N}.$$

Враховуючи ортогональність наближення Гальоркіна

$a(e, v_h) = 0, \forall v_h \in V_h$ отримаємо

$$a(e, v) = a(e, v - v_h), \quad \forall v \in V, \forall v_h \in V_h.$$

Вибравши тепер в якості $v_h \in V_h$ інтерполянт функції v відносно системи вузлів $\mathcal{I} = \{x_i\}_{i=0}^N : v_h := I_h v$, отримаємо:

$$a(e, v) = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} R[u_h] \{v - I_h v\} dx. \quad (2.41)$$

Зокрема

$$a(e, e) = \int_0^L R[u_h] \{u - I_h u\} dx.$$

Розглянемо деякі допоміжні твердження.

Позначимо $\omega_K(x) := (x_k - x)(x - x_{k-1})$.

Твердження 2.3. Існує оператор інтерполявання $I_h : V \rightarrow V_h$ такий, що на кожному скінченному елементі $K = [x_{k-1}, x_k]$ виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v - I_h v}{\sqrt{\omega_K}} \right\|_{L^2(K)} &\leq \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \|(v - I_h v)'\|_{L^2(K)}, \\ \|(I_h v)'\|_{L^2(K)} &\leq \|v'\|_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

де $p = \deg(I_h v)$ (див. [22]).

Твердження 2.4.

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} R[u_h] \{v - I_h v\} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \|\sqrt{\omega_K} R[u_h]\|_{L^2(K)} \|v'\|_{L^2(K)}.$$

Доведення:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} R[u_h] \{v - I_h v\} dx \right| &= \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{\omega_K} R[u_h] \frac{v - I_h v}{\sqrt{\omega_K}} dx \right| \leq \|\sqrt{\omega_K} R[u_h]\|_{L^2(K)} \left\| \frac{v - I_h v}{\sqrt{\omega_K}} \right\|_{L^2(K)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \|\sqrt{\omega_K} R[u_h]\|_{L^2(K)} \|(v - I_h v)'\|_{L^2(K)} \leq \frac{2}{\sqrt{p(p+1)}} \|\sqrt{\omega_K} R[u_h]\|_{L^2(K)} \|v'\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

□

про структуру рівнянь МСЕ з кубічною апроксимацією.

Твердження 2.5. Якщо виконуються умови

$$\beta(0) \leq 0, \quad \beta(L) \geq 0, \quad \mu(x) \geq \mu_0 > 0, \quad \sigma(x) - \frac{\beta'(x)}{2} \geq \sigma_0 > 0.$$

То у просторі V можна визначити енергетичну норму

$$\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}$$

причому виконується нерівність:

$$\|u\|_E^2 \geq \min\{\mu_0, \sigma_0\} \|u\|_{H^1(0,L)}^2$$

(H^1 -еліптичність).

Доведення потрібне твердження очевидно випливає із поданого нижче перетвореного виразу для $a(u, u)$:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^L [\mu(u')^2 + \frac{\beta}{2}(u^2)' + \sigma u^2] dx = \\ &= \int_0^L [\mu(u')^2 + \left(\sigma - \frac{\beta'}{2}\right) u^2] dx + \frac{\beta}{2} u^2 \Big|_{x=0}^{x=L}. \end{aligned}$$

□

Із останніх двох тверджень легко отримуємо

$$\|e\|_E^2 \leq \frac{4}{\min\{\mu_0, \sigma_0\}} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{1}{p_k(p_k + 1)} \left\| \sqrt{\omega_K} R[u_h^k] \right\|_{L^2(K)}^2.$$

де $p_k = \deg(u_h^k)$.

2.2.5.2 Алгоритм адаптування

Ініціалізація: Обчислити:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \min_{x \in [0, L]} \mu(x), & \sigma_0 &= \min_{x \in [0, L]} \left\{ \sigma(x) - \frac{\beta'(x)}{2} \right\}, \\ C &= 2 \cdot \left[\min \mu_0, \sigma_0 \right]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Ітерація:

Крок 1: Знайти розв'язок на поточній сітці - u_h .

Крок 2: Перевірка умови зупинки.

Для кожного елемента K обчислити

$$\eta_K = \frac{C}{\sqrt{p_K(p_K + 1)}} \left\| \sqrt{\omega_K} R[u_h^K] \right\|_{L^2(K)}.$$

Нехай $\eta := \sqrt{\sum_K \eta_K^2}$ тоді, якщо $\frac{\eta}{\|u_h\|_E} \times 100\% < TOL$ то робота алгоритму припиняється (TOL - допустима відносна похибка), інакше:

Крок 3: Виділити елементи, що призначені для зміни. Обчислити $\eta_{\max} = \max_K \eta_K$.

Зміні підлягатимуть ті елементи K , для яких $\eta_K > (1 - \theta)\eta_{\max}$, $\theta \in (0, 1)$ - фіксоване число. Множину цих елементів позначимо A_θ .

Крок 4: Перебудова сітки.

Для кожного вибраного елемента $K = [x_{k-1}, x_k]$ ($p_K := \deg(u_h^K)$) вибрати між поділом навпіл та збільшенням степеня полінома на одиницю. Якщо $p_K = p_{\max}$ то елемент ділимо навпіл із порядками новоутворених елементів (p_K, p_K) , інакше:

Нехай $X^p(a, b)$ - простір поліномів степеня p на відрізку $[a, b]$. Визначимо простори $V_{hp}^m(K), m = 1, 2$ таким чином:

$$V_{hp}^1(K) = \{v \in C(K) \mid v \in X^{p_K}(x_{k-1}, [x_{k-1} + x_k]/2), v \in X^{p_K}([x_{k-1} + x_k]/2, x_k), v|_{\partial K} = 0\}$$

$$V_{hp}^2(K) = \{v \in X^{p_K+1}(K) \mid v|_{\partial K} = 0\}.$$

Для $m = 1, 2$ розв'язати наступні задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти : } e_h^m \in V_{hp}^m(K) \text{ таку, що} \\ a(e_h^m, v_h) = \int_K R[u_h^k] v_h dx, \quad \forall v_h \in V_{hp}^m(K). \end{array} \right.$$

Обчислимо $r_m = \|e_h^m\|_E$, $m = 1, 2$. Для наступних потреб, введемо функцію e_h^K таким чином: нехай число m_K таке, що $\|e_h^{m_K}\|_E = \max_{m=1,2} \|e_h^m\|_E$, тоді

$$e_h^K(x) := \begin{cases} e_h^{m_K}(x), & x \in K \\ 0, & x \notin K \end{cases}.$$

Розглянемо величину $\Delta = r_2 - r_1$. Якщо $\Delta > \delta$ де δ - задане число, то на елементі збільшуємо порядок апроксимаційного полінома на одиницю, інакше виконуємо поділ елемента на два з порядками (p_K, p_K) .

Крок 5: Повернутись на Крок 1.

Зауваження 2.7. Теоретично потрібно вибирати $\delta = 0$ проте на практиці, оскільки в обчисленнях присутні похибки квадратурних формул та заокруглення, а максимальний порядок апроксимуючого полінома – обмежений, то є сенс, у випадках коли величина Δ є близькою до нуля, віддавати перевагу поділу елемента навпіл. Для цього достатньо вибрати мале число $\delta > 0$.

Зауваження 2.8. Алгоритм вибору способу локальної зміни сітки, у випадку, коли задача симетрична, ґрунтується на рівності $\|u - u_h\|_E^2 = \|u\|_E^2 - \|u_h\|_E^2$.

Переконаємось, що вона виконується:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_E^2 &= a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) \\ &= \|u\|_E^2 - a(u_h, u) = \|u\|_E^2 - a(u, u_h) \\ &= \|u\|_E^2 - \langle l, u_h \rangle = \|u\|_E^2 - \|u_h\|_E^2. \end{aligned}$$

Оскільки задача для похибки є задачею із тією самою білінійною формою, то для наближення до похибки e_h також виконується аналогічна рівність:

$$\|e - e_h\|_E^2 = \|e\|_E^2 - \|e_h\|_E^2 \quad (2.42)$$

(неважко, зокрема, побачити, що при знаходженні похибки локально із використанням бабл-функцій в якості базисних на кожному елементі окремо ця рівність теж виконується).

З останньої рівності видно, що зі збільшенням енергетичної норми наближення до похибки, точність цього наближення зростає. На початку ітерації ми маємо розв'язок $u_h \in V_h$. Розглянемо похибку $e = u - u_h$. Рівність (2.42) можемо записати таким чином

$$\|u - (u_h + e_h)\|_E^2 = \|u - u_h\|_E^2 - \|e_h\|_E^2. \quad (2.43)$$

Отже бачимо, що при збільшенні норми наближення до похибки зростає точність *уточненого розв'язку* $u_h + e_h$. Для побудови розв'язку на початку наступної ітерації ми будемо використовувати скінченновимірний підпростір $\tilde{V}_h = V_h + E_h \subset V$, де E_h - простір для наближеного знаходження похибки, побудований із використанням бабл-функцій, згідно алгоритму адаптування ($e_h \in E_h$). Оскільки ми розглядаємо випадок симетричної задачі, то:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_E \leq \|u - \tilde{v}_h\|_E, \quad \forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h,$$

де $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$ - розв'язок на перебудованій сітці (початок наступної ітерації).

Дійсно:

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}_h\|_E^2 &= a(u - \tilde{u}_h, u - \tilde{u}_h) = a(u - \tilde{u}_h, u) = \\ &= a(u - \tilde{u}_h, u - \tilde{v}_h) \stackrel{КБШ}{\leq} \\ &\leq \|u - \tilde{u}_h\|_E \|u - \tilde{v}_h\|_E, \quad \forall \tilde{v}_h \in \tilde{V}_h. \end{aligned}$$

Поділивши на $\|u - \tilde{u}_h\|_E$, отримаємо потрібне. Врахувавши отриману нерівність та (2.43), оскільки $u_h + e_h \in \tilde{V}_h$ маємо:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_E^2 \leq \|u - u_h\|_E^2 - \|e_h\|_E^2.$$

Виконуючи декомпозицію квадрату норми наближення до похибки на локальні складові, отримуємо остаточно нерівність, що гарантує її монотонне спадання:

$$\|u - \tilde{u}_h\|_E^2 \leq \|u - u_h\|_E^2 - \sum_{K \in A_\theta} \|e_h^K\|_E^2.$$

Остання і є мотивацією для використання такого способу локальної перебудови сітки, який дає змогу знайти наближення до похибки з максимальною нормою, оскільки похибка розв'язку на наступній ітерації буде найменшою у цьому випадку.

Невирішеною проблемою залишається побудова адекватного аналога рівності $\|u - u_h\|_E^2 = \|u\|_E^2 - \|u_h\|_E^2$ для задач із несиметричними білінійними формами.

2.2.5.3 Критерій оцінки швидкості збіжності

У випадку, коли розв'язок крайової задачі має примежеві шари з великим градієнтом, то доведено (див. [19]), що можна побудувати послідовність hp -сіток для якої відповідна послідовність норм похибок наближень методу скінченних елементів спадає експоненційно по відношенню до $\sqrt{N_{dof}}$:

$$\|e_h^N\|_E \sim C e^{-\alpha \sqrt{N_{dof}}}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (2.44)$$

де N_{dof} – кількість невідомих на N -ій ітерації.

Виконуючи логарифмування у (2.44), неважко переконатися, що у цьому випадку

$$-\alpha \sim \frac{\ln \|e_h^N\|_E}{\sqrt{N_{dof}}}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.45)$$

Безпосередньо використовуючи наведену асимптотику, можемо наближено обчислити порядок $-\alpha$ для побудованого алгоритму адаптування:

$$-\alpha \approx \frac{\ln \eta}{\sqrt{N_{dof}}}. \quad (2.46)$$

Зауваження 2.9. Слід зазначити, що за наближене значення величини $-\alpha$ слід вибрати праву частину останнього співвідношення, обчислену на одній із (останніх) ітерацій, для котрих спостерігається «стабілізація» обчислюваного відношення. Згадана «стабілізація» та від'ємне значення величини є показниками того, що алгоритм забезпечує експоненційну збіжність.

Зауваження 2.10. Обчислювальні експерименти показали, що формула (2.46) малоприсадатна для обчислень. Це можна пояснити ігноруванням у (2.44) та відповідно у (2.46) доданку $\ln C / \sqrt{N_{dof}}$ (що є асимптотично еквівалентним нулю). У випадку, коли експоненційна збіжність не досягається і якщо константа C - достатньо велика, то останнє відношення акумулюватиме велику похибку обчислення за формулою (2.46). Крім цього видно, що збурення з ростом кількості невідомих N_{dof} прямує до нуля дуже повільно. На практиці це проявляється на графіку величини $\ln \eta / \sqrt{N_{dof}}$ в залежності від кількості невідомих, а саме, спочатку простежується «оманлива» стабілізація величини, що може навести на думку, що маємо експоненційну збіжність, і лише при дуже густих сітках можна помітити, що величина повільно зростає (і теоретично прямує до нуля, див. далі):

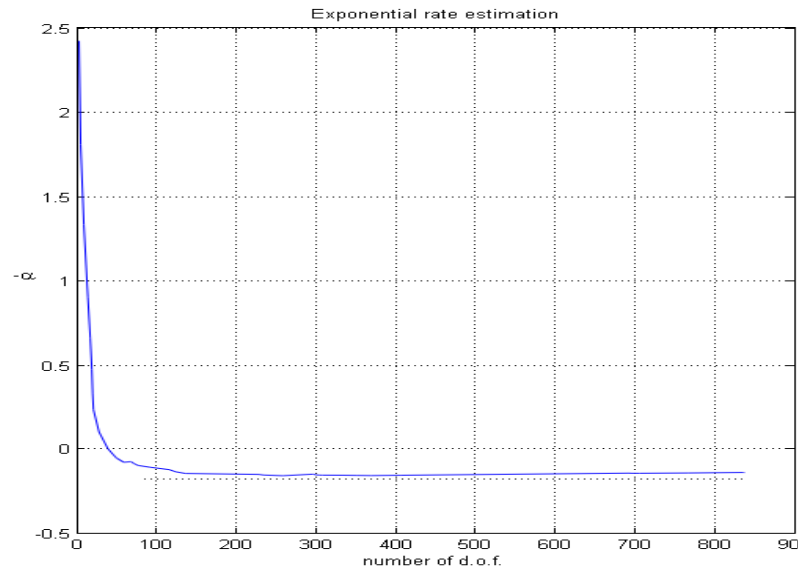


Рисунок 2.15 – Залежність величини $\ln \eta / \sqrt{N_{dof}}$ від кількості невідомих

Щоб переконатись, що у прикладі з графіком, який наведено на рис. 2.15 дійсно не спостерігається експоненційна збіжність, можна скористатися іншим методом оцінки порядку збіжності, в якому невідома константа C явно виключається із отримуваних співвідношень. Це буде описано далі.

Також слід зауважити, що наявність примежевого шару є суттєвою умовою для виконання (2.43). У випадку, коли в околі межі області функція є аналітичною, то швидкість спадання послідовності норм похибок визначається співвідношенням [19]:

$$\|e_h^N\|_E \sim C e^{-\alpha N^\beta}, \quad N \rightarrow \infty,$$

де $\beta > \frac{1}{2}$.

2.2.5.4 Алгебричний порядок збіжності

Якщо степінь використовуваних поліномів фіксований, то гарантувати експоненційну збіжність не можна. У такому випадку маємо збіжність деякого алгебраїчного порядку $p > 0$, тобто виконується співвідношення:

$$\|e_h^N\|_E \sim CN_{dof}^{-p}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

Аналогічно, як і у випадку експоненційної збіжності, отримуємо:

$$-p \sim \frac{\ln \|e_h^N\|_E}{\ln N_{dof}}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.48)$$

Або наближено:

$$-p \approx \frac{\ln \eta}{\ln N_{dof}}. \quad (2.49)$$

Зауваження 2.11. Якщо збіжність є експоненційною, то $-p \sim -\infty$, $N \rightarrow \infty$.

Якщо маємо збіжність порядку p , то $-\alpha \sim 0$, $N \rightarrow \infty$. Легко бачити, що експоненційна збіжність швидша, ніж збіжність із будь-яким порядком p .

Зауваження 2.12. Як і у випадку експоненційної збіжності, формула (2.49) теж не має практичної цінності.

Зауваження 2.13. На практиці важливо оцінити алгебричний порядок збіжності або констатувати факт наявності експоненційної збіжності (без оцінки порядку). В останньому випадку формально $p = +\infty$.

На підставі зауваження 2.13 розглянемо оцінку лише алгебраїчного порядку збіжності (повністю аналогічно можна оцінити порядок $-\alpha$).

З (2.47) легко отримуємо:

$$\ln \|e_h^N\|_E \sim -p \ln N_{dof} + \ln C, \quad N \rightarrow \infty \quad (2.50)$$

Або наближено, при великих N :

$$\ln \|e_h^N\|_E \approx -p \ln N_{dof} + \ln C. \quad (2.51)$$

Отже наближено, при густих сітках, отримуємо лінійну залежність величини $\ln \|e_h^N\|_E$ від $\ln N_{dof}$ (з кутовим коефіцієнтом $-p$). Таким чином оцінку для порядку збіжності можна отримати візуально аналізуючи графік похибки в логарифмічних осях координат або ж використавши інформацію із двох послідовних ітерацій, обчислити відповідне наближення. Для цього потрібно відняти два рівняння (2.51), що записані для цих ітерацій (при цьому доданок $\ln C$ виключається) та виразити з отримуваного співвідношення, наприклад, кутовий коефіцієнт $-p$:

$$-p \approx \frac{\ln \|e_h^{N^{(2)}}\|_E - \ln \|e_h^{N^{(1)}}\|_E}{\ln N_{dof}^{(2)} - \ln N_{dof}^{(1)}}. \quad (2.52)$$

З використанням явних оцінювачів, для побудованого алгоритму можна записати:

$$-p \approx \frac{\ln \eta^{(2)} - \ln \eta^{(1)}}{\ln N_{dof}^{(2)} - \ln N_{dof}^{(1)}}. \quad (2.53)$$

Верхні індекси у формулах (2.52) і (2.53) вказують на віднесення відповідної величини до однієї із двох послідовних ітерацій. На рис. 2.16 для задачі, для якої побудовано графік (рис. 2.15), наведено графіки оцінювача похибки в логарифмічних осях та величини $-p$, обчисленої згідно (2.53).

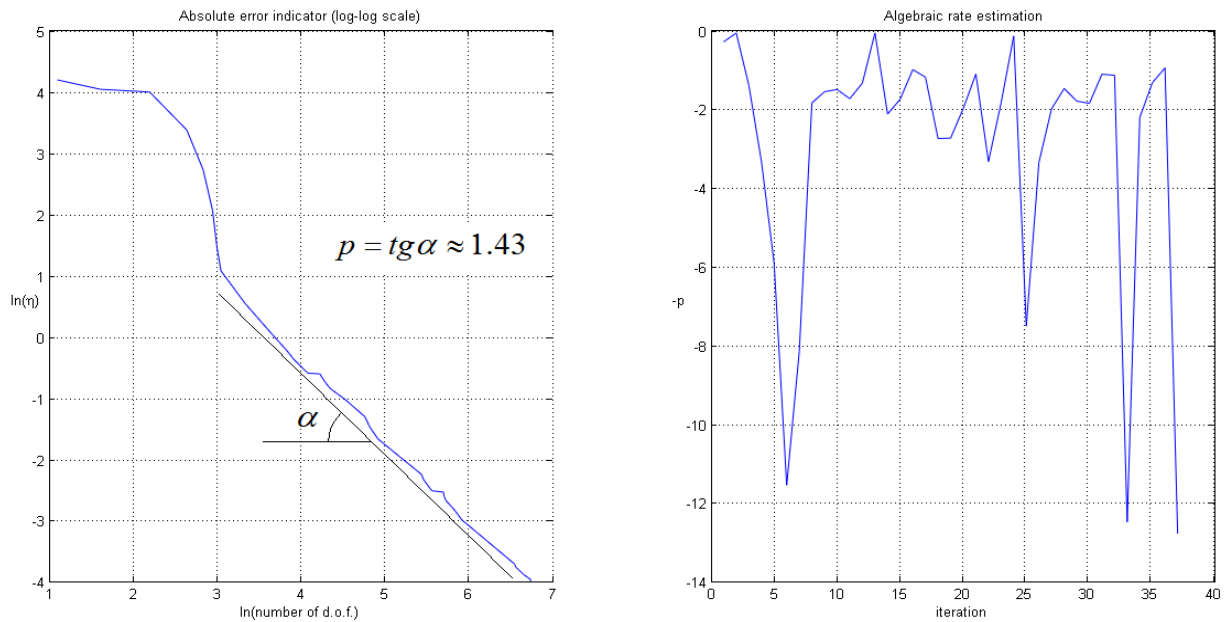


Рисунок 2.16 – Візуальна оцінка порядку збіжності та графік поведінки

$$\text{величини } \frac{\ln \eta^{(2)} - \ln \eta^{(1)}}{\ln N_{dof}^{(2)} - \ln N_{dof}^{(1)}}$$

Чітко видно, що у даному випадку алгоритм не забезпечує експоненційної збіжності. Правий графік на рис. 2.16 показує, що безпосереднє застосування формули (2.53) приводить до результату, який важко проаналізувати, на відміну від візуального аналізу поведінки похибки. Це легко пояснити тим, що формула у (2.53) дає наближене значення кутового коефіцієнта до графіка похибки на рис. 2.16 у фіксованій точці (котре може досить сильно змінюватися, і не відобразити адекватно порядку збіжності), а візуальний аналіз дає змогу визначити деяке усереднене його значення. Це наводить на думку використати певне усереднення при обчисленнях за формулою (2.53).

Нехай p_i – наближення до порядку, обчисленого на i -ій ітерації. Введемо вагові коефіцієнти $w_i := \ln N_{dof}^{(i)} - \ln N_{dof}^{(i-1)}$ (тут $i = 2, 3, \dots$; $N_{dof}^{(i)}$ – кількість невідомих на i -ій ітерації). Тепер можна знайти наближення до p , обчисливши зважене середнє арифметичне:

$$p \approx \frac{\sum_i p_i w_i}{\sum_i w_i}. \quad (2.54)$$

Для розглядуваної задачі отримаємо $p \approx 1,45$. Отримане значення дає достатньо адекватну оцінку для порядку збіжності (див. лівий графік на рис. 2.16).

Зауваження 2.14. Використання у формулі (2.54) специфічних вагових коефіцієнтів w_i обумовлене необхідністю надання більшого впливу на результуюче значення порядку тій величині p_i , котра визначає кутовий коефіцієнт графіка похибки в логарифмічних осях на більшому проміжку на координатній осі $\ln N_{dof}$.

2.2.5.5 Результати обчислювальних експериментів

Далі буде розглянуто результати застосування описаного вище алгоритму до розв'язування деяких сингулярно збурених крайових задач. Також для порівняння наведено результати розв'язування тих самих задач за допомогою алгоритму, що ґрунтується на reference solution.

Вихідні дані задачі:

$$\mu = 1, \beta = 0, \sigma = 10^6, f = 10^6, \alpha = \gamma = 10^8, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1.$$

Наближення до розв'язку знайдено з точністю 1%. Максимальний порядок поліномів – 9. Параметри алгоритму: $\delta = 10^{-8}$, $\theta = 0.2$.

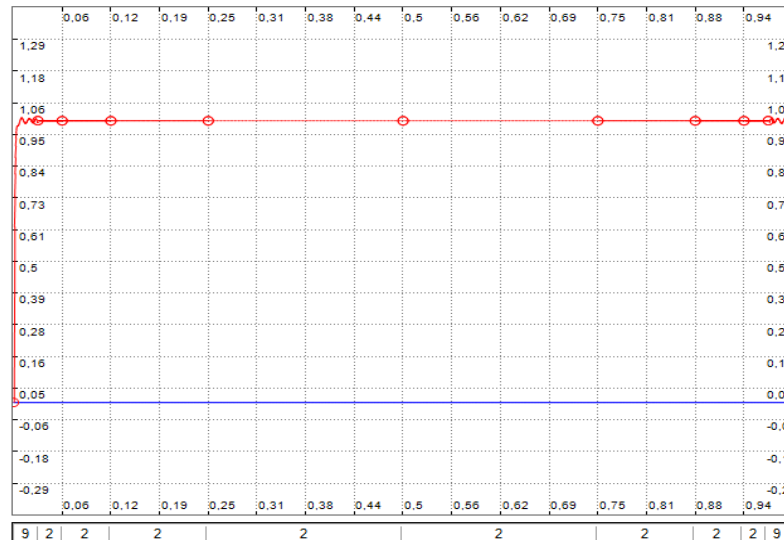


Рисунок 2.17 – Остаточне наближення (знизу показано степені використаних поліномів на кожному із елементів)

Таблиця 2.8 – Збіжність апроксимацій: n - номер ітерації, N_{dof} -

кількість невідомих, $\varepsilon_n^\Omega = \eta$ - індикатор абсолютної

похибки, $r_n^\Omega = \frac{\eta}{\|u_h\|_E} \times 100\%$ - відносна похибка

n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	3	120611,32	13927,08
1	5	38696,50	4104,42
2	9	14465,76	1491,12
... ..			
8	27	86,01	8,61
9	29	49,84	4,99
10	31	28,71	2,87
11	33	16,13	1,61
12	35	9,69	0,97

Зауваження 2.15. Велике значення похибки на початку роботи алгоритму зумовлене використанням енергетичної норми (коефіцієнти рівняння є достатньо великими).

Алгоритм на основі reference solution

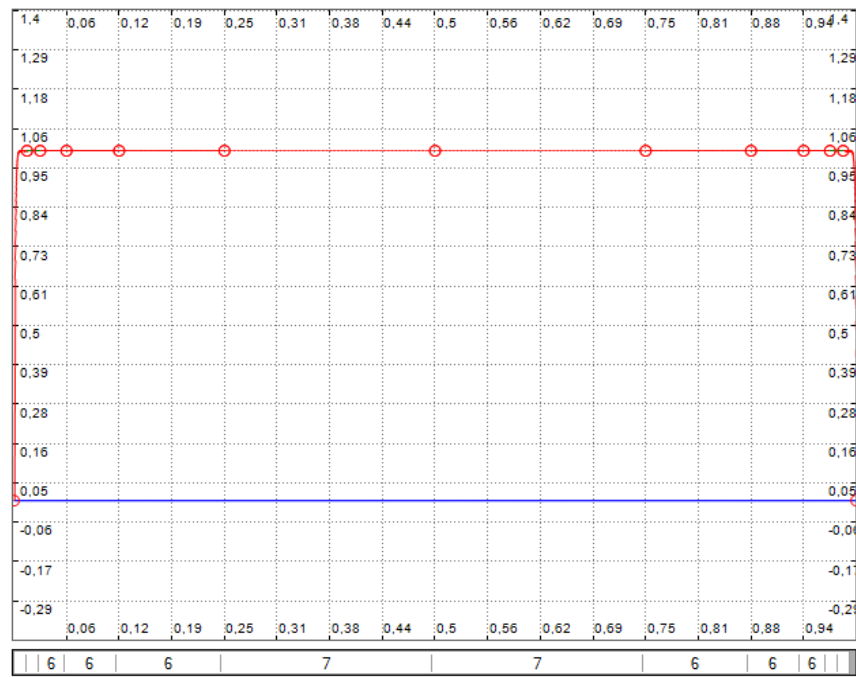


Рисунок 2.18 – Остаточне наближення

Таблиця 2.9 – Збіжність апроксимацій MSE

n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	3	5,21	174,05
1	5	5,85	143,79
2	7	6,67	130,29
... ..			
8	51	4,20	13,64
9	61	2,46	7,85
10	71	0,22	0,69

Побудований алгоритм демонструє процес розв'язування у два рази ефективніший ніж алгоритм на основі reference solution, якщо проводити порівняння максимальних порядків отримуваних систем (35 – 71), при майже однаковій кількості ітерацій.

Вихідні дані задачі 2:

$$\mu = 1, \beta = 0, \sigma = 10^4 x^2 + 1, f = 10^4, \alpha = \gamma = 10^8, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1.$$

Наближення до розв'язку знайдено з точністю 5%. Максимальний порядок поліномів – 9.

Параметри алгоритму: $\delta = 40$, $\theta = 0.2$.

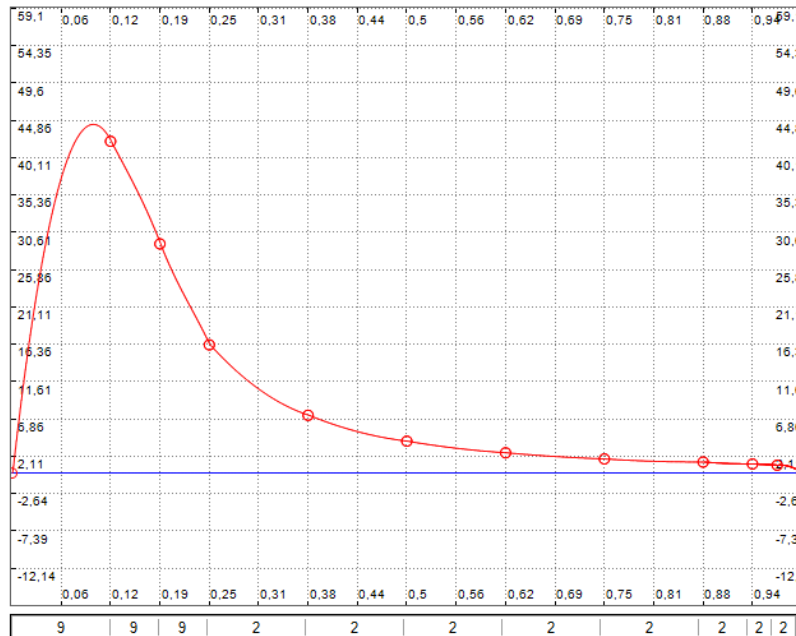


Рисунок 2.19 – Остаточне наближення

Таблиця 2.10 – Збіжність апроксимацій MSE

n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	3	1776,07	1224,31
1	4	1064,98	367,11
2	6	657,02	197,19
... ..			
11	29	51,12	16,04
12	33	18,46	5,77
13	44	9,38	2,83

Алгоритм на основі reference solution

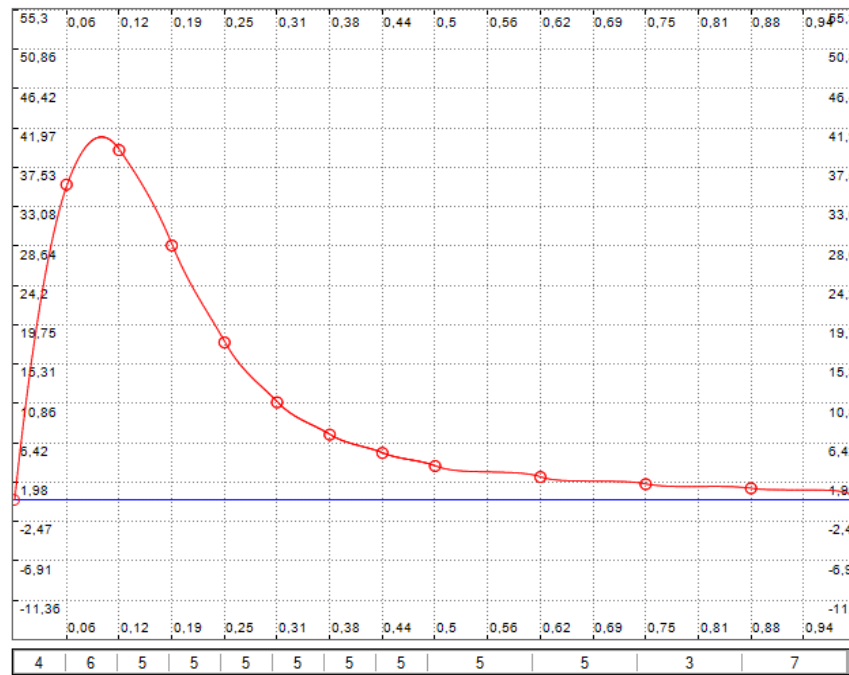


Рисунок 2.20 – Остаточне наближення

Таблиця 2.11 – Збіжність апроксимацій МСЕ

n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	3	164,66	1722,30
1	4	145,49	261,13
2	7	84,55	50,49
... ..			
15	49	25,48	14,98
16	55	25,46	14,97
17	61	8,19	4,86

Вихідні дані задачі 3:

$$\mu = 1, \beta = 0, \sigma = 10^5 e^x, f = 10^5, \alpha = \gamma = 10^8, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1.$$

Наближення до розв'язку знайдено з точністю 5%. Максимальний порядок поліномів – 9.

Параметри алгоритму: $\delta = 2, \theta = 0.6$.

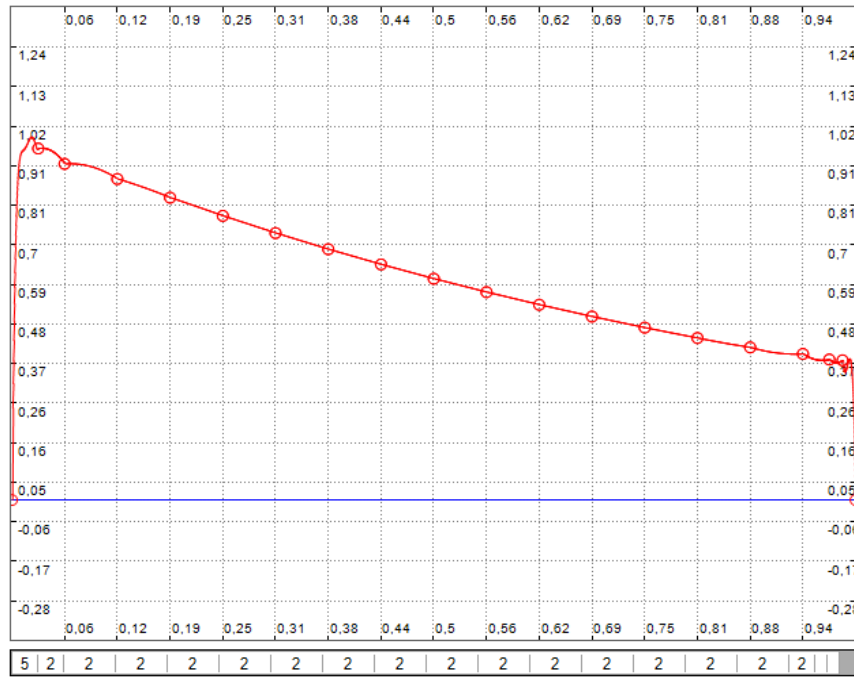


Рисунок 2.21 – Остаточне наближення

Таблиця 2.12 – Збіжність апроксимацій МСЕ

n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	3	12579,37	6045,54
1	5	3998,07	1695,35
2	9	1457,71	599,36
... ..			
7	34	25,53	10,19
8	39	24,94	9,95
9	43	7,59	3,03

Алгоритм на основі reference solution

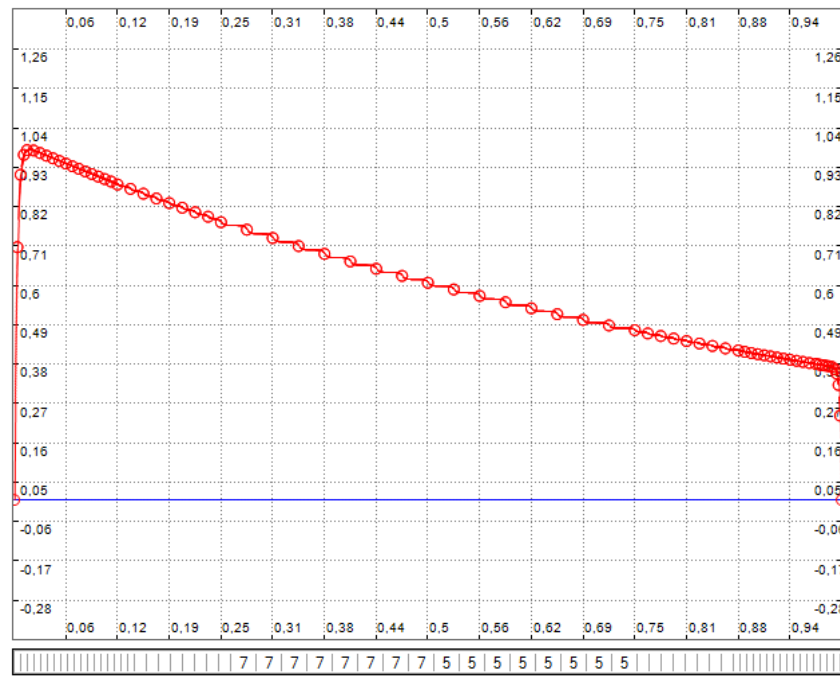


Рисунок 2.22 – Остаточне наближення

Таблиця 2.13 – Збіжність апроксимацій МСЕ

n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
... ..			
12	32	3,60	28,08
13	35	3,14	23,81
... ..			
30	333	0,77	5,52
31	379	0,70	5,04
32	437	0,58	4,19

Можна спостерігати у три рази меншу кількість ітерацій для побудованого алгоритму та у 10 разів (!) меншу розмірність фінальної СЛАР.

Вихідні дані задачі 4:

$$\mu = 1, \beta = e^{2x} - 200, \quad \sigma = 100(\cos x + 2), \quad f = 1000e^{-100(x-0.5)^2},$$

$$\alpha = \gamma = 10^8, \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, \quad L = 1.$$

Наближення до розв'язку знайдено з точністю 5%. Максимальний порядок поліномів – 9.

Параметри алгоритму: $\delta = 0$, $\theta = 0.6$.

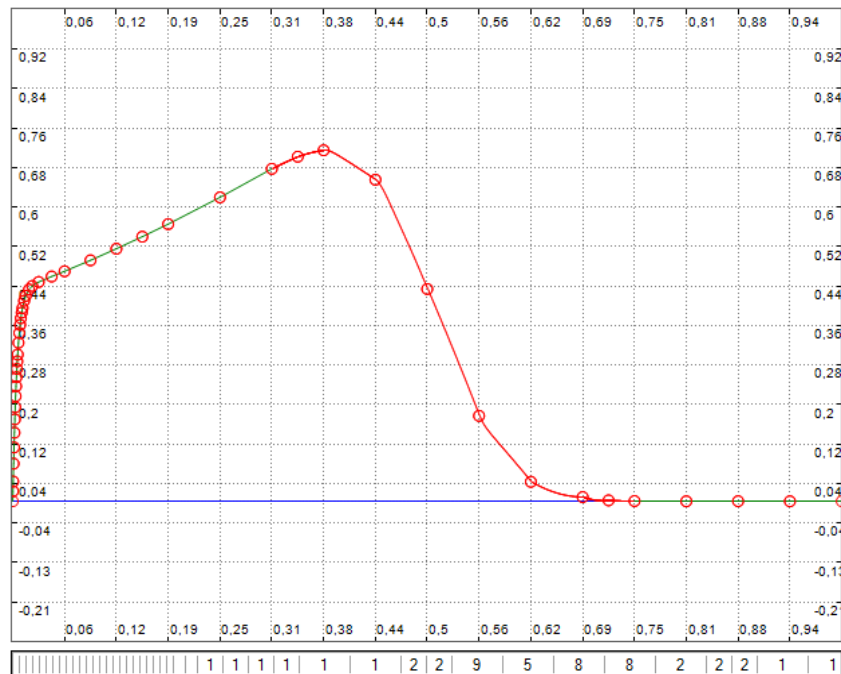


Рисунок 2.23 – Остаточне наближення

Таблиця 2.14 – Збіжність апроксимацій MSE

n	N_{dof}	ε_n^Ω	r_n^Ω
0	3	65,86	47675,34
1	5	56,51	580,77
2	9	54,02	296,95
... ..			
13	68	0,55	5,72
14	72	0,49	5,07
15	77	0,43	4,51

Алгоритм на основі reference solution

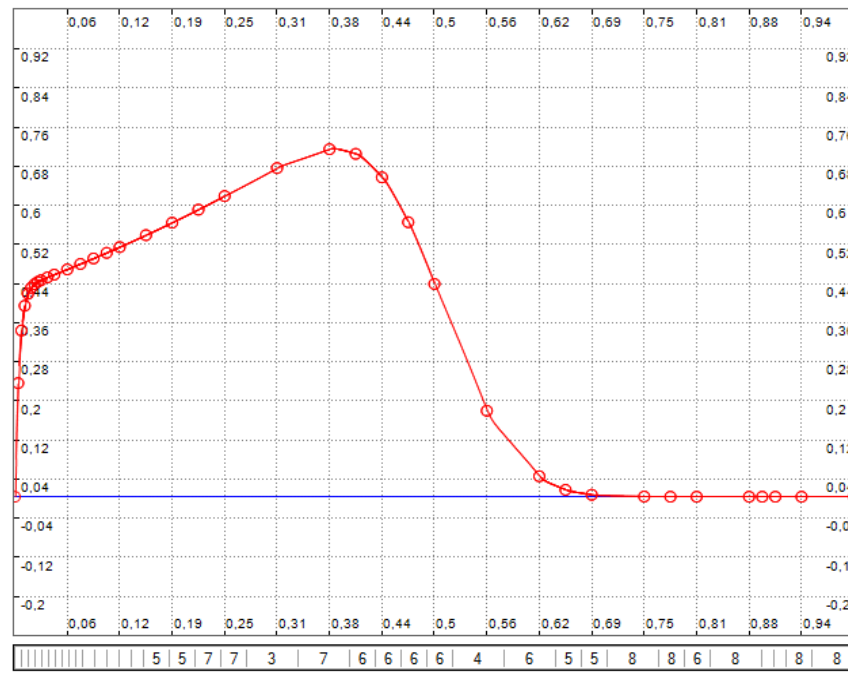


Рисунок 2.24 – Остаточне наближення

Таблиця 2.15 – Збіжність апроксимацій МСЕ

n	N_{dof}	\mathcal{E}_n^Ω	r_n^Ω
... ..			
14	39	2,11	131,42
15	46	2,10	130,70
... ..			
31	171	0,45	9,92
32	196	0,43	9,43
33	224	0,18	3,85

Можна спостерігати у два рази меншу кількість ітерацій для побудованого алгоритму та у три рази меншу розмірність остаточної СЛАР.

Крім цього можемо бачити, що на розглянутому прикладі алгоритм побудував «еталонну» сітку: інтенсивне використання h -адаптивності та поліномів малого порядку в околі примежового шару з великим градієнтом розв'язку та використання поліномів високого порядку (p -адаптивність) у

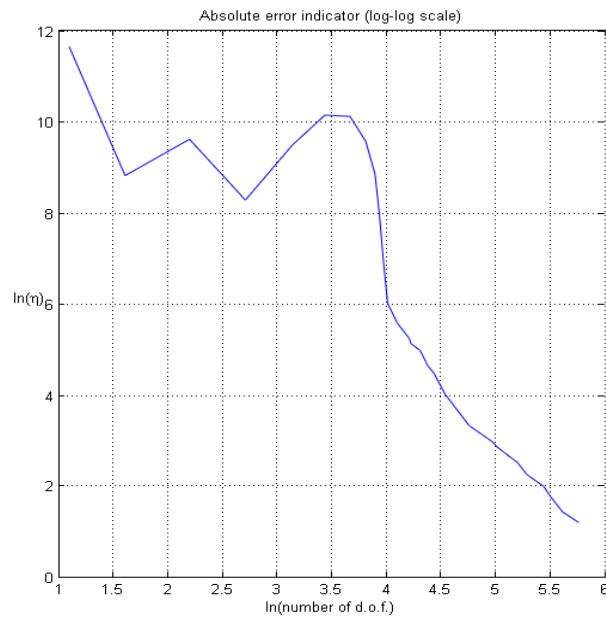


Рисунок 2.26 – Графік, що відображає поведінку індикатора абсолютної похибки

З рис. 2.25 стає зрозумілим, що для несиметричних задач розглянутий в алгоритмі критерій вибору між перебудовою сітки і підвищенням порядку полінома не є коректним. Кажучи більш точно, наближення MSE із більшою нормою не є загалом більш точні.

2.2.5.6 Загальні зауваження щодо отриманих результатів

Побудований алгоритм продемонстрував кращу ефективність у порівнянні із алгоритмом на основі reference solution. У всіх випадках застосування до симетричних задач маємо монотонну збіжність (це стосується як відносних так і абсолютних похибок). При побудові розв'язків параметри δ і θ підбиралися для досягнення оптимального результату. На деяких наборах вихідних даних простежувалась достатньо сильна залежність ефективності роботи алгоритму від параметра δ . Однією із невирішених є проблема автоматизації вибору δ і θ на кожній ітерації алгоритму.

Слід відзначити, що зміст параметрів алгоритму такий:

- δ задає співвідношення пріоритету між поділом елемента та збільшенням його порядку: 0 – однаковий пріоритет, збільшення параметра – збільшення пріоритету для поділу, зменшення – збільшення пріоритету для підвищення порядку;
- θ визначає відсоток елементів (за рівнем індикатора похибки), що підлягає зміні.

2.2.6 Підсумки і висновки

У даній роботі розглянуто загальну схему методу скінченних елементів проведено дослідження та аналіз двох підходів до проектування алгоритмів *hp*-адаптування. Розроблено та імплементовано відповідні алгоритми. Обґрунтовано критерій вибору між поділом елемента та збільшенням порядку для одного із них. Також значну увагу приділено питанням, що пов'язані з ефективною реалізацією алгоритму. Зокрема, для ефективного розв'язування отримуваної в процесі роботи алгоритму глобальної СЛАР, розглянуто і використано у програмній реалізації метод статичної конденсації, який дає змогу, виключаючи внутрішні змінні (що відповідають базисним бабл-функціям), звести задачу до розв'язування системи із тридіагональною матрицею. Крім цього розглянуто питання автоматизації генерування вузлів і вагових коефіцієнтів квадратурних формул Гауса.

Ефективність розглянутих алгоритмів проаналізовано на прикладах сингулярно збурених крайових задач.

Огляд і порівняння багатьох інших стратегій *hp*-адаптування можна знайти у [43].

3 ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВІ СХЕМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ

3.1 Формулювання, коректність та апроксимація початково-крайової задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини

На підставі законів збереження сформульовано лінійну початково-крайову та відповідну їй варіаційну задачу у термінах невідомих вектора зміщень та температури, яка описує процес поширення акустичних хвиль у в'язкій теплопровідній рідині з урахуванням зв'язаності механічного та температурного полів. Окреслено клас регулярності вхідних даних варіаційної задачі, який гарантує єдність та неперервну залежність шуканого розв'язку в енергетичній нормі задачі. На додаток доведено існування розв'язку розглядуваної задачі як границі послідовності напівдискретних (за просторовими змінними) апроксимацій Гальоркіна.

3.1.1 Вступ

У більшості застосувань при розгляді акустичних коливань в'язкістю рідини нехтують, таким чином, вважаючи її "ідеальною". Однак існує значне число задач, в першу чергу пов'язаних з поширенням високочастотних коливань та коливань на близьких до резонансу частотах, в яких нехтування в'язкістю середовища навіть для традиційно "ідеальних" води чи повітря призводить до суттєвих неточностей у розв'язках [74, 91]. Що більше, аналіз дисипативних втрат енергії у таких задачах, а також оцінка взаємовпливу акустичних та температурних процесів неможливі без уведення до моделі в'язкості середовища [85]. Загальні засади побудови відповідних моделей

акустики в'язкої теплопровідної рідини (часто уживаним є термін "дисипативна акустика") розглянуто у працях [6, 10, 94, 95. , 102, 104].

У праці [129] для числового аналізу задач дисипативної акустики за додаткового допущення безвихрового руху у рідині запропоновано використовувати скінченноелементні апроксимації Рав'яра-Тома та побудовано схеми інтегрування напівдискретизованої за методом Гальоркіна задачі за часом. Однак раніше, авторами [74] доведено коректність застосування класичних апроксимацій методу скінченних елементів для розв'язування задач поширення акустичних хвиль у в'язких рідинах та гідропружних системах у термінах невідомих зміщень без додаткових допущень. Аналогічний підхід пропонується застосувати і для задач термогідроакустики.

3.1.2 Фундаментальні рівняння термогідродинаміки ньютонівської рідини

Нижче ми будемо розглядати математичні моделі, що описують рух в'язкої рідини, яка в кожен момент часу $t \in [0, T], 0 < T < +\infty$, займає зв'язну обмежену область Ω точок $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ евклідового простору \mathbb{R}^d (в застосуваннях $d = 1, 2$ або 3). Позначимо через Γ множину точок, які утворюють межу області $\Omega, \Gamma = \partial\Omega$, і будемо припускати, що вона є неперервною за Ліпшицем. Остання гіпотеза гарантує, що майже скрізь на поверхні Γ можна побудувати одиничний вектор зовнішньої нормалі $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d), n_i := \cos(\mathbf{n}, x_i)$.

Добре відомо, що фізичні властивості рідини визначаються коефіцієнтами об'ємної в'язкості η та зсувної в'язкості $\mu = \text{const} > 0$, а її стан можна охарактеризувати за допомогою вектора швидкості $\mathbf{v} = \{v_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$ її частинок, густиною її маси $\rho = \rho(\mathbf{x}, t) \geq 0$ та скалярного поля гідростатичного тиску

$p = p(\mathbf{x}, t)$. Якщо названі характеристики рідини визначено, то за допомогою співвідношень Коші знаходяться складові тензора швидкостей деформацій

$$e_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (3.1)$$

та складові тензора напружень

$$\sigma_{ij}(\mathbf{v}, p) := -p\delta_{ij} + \tau_{ij}(\mathbf{v}), \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (3.2)$$

де $\tau_{ij}(\mathbf{v})$ - складові тензора в'язких напружень,

$$\tau_{ij}(\mathbf{v}) := 2\mu e_{ij}(\mathbf{v}) + (\eta - \frac{2}{3}\mu)\delta_{ij}\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (3.3)$$

δ_{ij} - символ Кронекера, $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Моделювання потоків рідини зводиться до початково-крайових задач для системи рівнянь в частинних похідних, які будуються на законах збереження маси, кількості руху, енергії тощо [10, 54]. Так, наприклад, закон збереження маси суцільного середовища стверджує, що за відсутності джерел притоку маси густина $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ та вектор швидкості рідини $\mathbf{v} = \{v_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$ задовольняють так зване рівняння нерозривності маси

$$D_t \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T]. \quad (3.4)$$

В той же час закон збереження кількості руху можна виразити у вигляді системи рівнянь Нав'є-Стокса

$$\rho D_t v_i - \frac{\partial}{\partial x_m} \sigma_{im}(\mathbf{v}, p) = \rho f_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T], \quad (3.5)$$

де вектор $\mathbf{f} = \{f_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$ описує об'ємні сили, що діють на розглядувану рідину. Нарешті, закон збереження енергії приводить до рівняння нерозривності ентропії $s = s(\mathbf{x}, t)$ вигляду

$$\rho\theta D_t s + \nabla \cdot \mathbf{q}(\theta) - \tau(\mathbf{v}) : e(\mathbf{v}) = \rho g \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (3.6)$$

де $g = g(\mathbf{x}, t)$ - інтенсивність розподілених в об'ємі рідини джерел тепла, $\mathbf{q} = \{q_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$ - вектор потоку тепла, який в більшості важливих випадків пов'язаний з температурою $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ та коефіцієнтом теплопровідності $\chi > 0$ рідини феноменологічним законом Фур'є

$$\mathbf{q}(\theta) = -\chi \nabla \theta \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \quad (3.7)$$

Тут і далі ми користуємося правилом підсумовування від 1 до d за індексами, що повторюються, з упусканням самого знака суми; тоді, наприклад, скалярний добуток в просторі \mathbb{R}^d записується як

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_i b_i := \sum_{i=1}^d a_i b_i \quad \forall \mathbf{a} = a_i \Big|_{i=1}^d, \mathbf{b} = b_i \Big|_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d,$$

а згортка тензорів

$$\sigma : e \equiv \sigma_{mi} e_{im} := \sum_{i,m=1}^d \sigma_{mi} e_{im} \quad \forall \sigma = \sigma_{ij} \Big|_{i,j=1}^d, e = e_{ij} \Big|_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Нарешті, в рівняннях (3.4)-(3.7) ми використовуємо часто вживані позначення для повної і часткової похідних скалярної функції за часовою змінною та її градієнта за просторовими змінними

$$D_t w := w' + \mathbf{v} \cdot \nabla w, \quad w' := \frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{x}, t), \quad \nabla w := \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_m} \right\}_{m=1}^d.$$

Доповнимо систему (3.1)-(3.7) належними крайовими та початковими умовами. Якщо на зовнішню частину поверхні рідини $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$ діє прикладений вектор напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$, то закон збереження кількості руху приводить до такої крайової умови на напруження в точках розглядуваної поверхні

$$\sigma_{ij}(\mathbf{v}, p) n_j = \hat{\sigma}_i \quad i = 1, \dots, d, \quad \text{на } \Gamma_\sigma \times [0, T]. \quad (3.8)$$

Подібно, якщо на деяку частину межі $\Gamma_q \subset \Gamma$ діє тепловий потік, нормальна складова якого вимірюється функцією $\hat{q} = \hat{q}(\mathbf{x}, t)$, то згідно закону збереження енергії крайова умова буде мати вигляд

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}(\theta) = \hat{q} \quad \text{на } \Gamma_q \times [0, T]. \quad (3.9)$$

Нарешті, якщо, скажімо, частинки решти поверхні рідини $\Gamma_v := \Gamma \setminus \Gamma_\sigma$ рухаються за відомим правилом із швидкістю $\hat{\mathbf{v}} = \{\hat{v}_i(\mathbf{x}, t)\}$, то крайова умова на цій частині поверхні повинна виражатися рівністю

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} \quad \text{на } \Gamma_v \times [0, T], \quad \Gamma_v := \Gamma \setminus \Gamma_\sigma. \quad (3.10)$$

Подібно, якщо відомо, що частина поверхні $\Gamma_\theta := \Gamma \setminus \Gamma_q$ підтримується із заданою температурою $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$, то їй приписується крайова умова

$$\theta = \hat{\theta} \quad \text{на } \Gamma_\theta \times [0, T], \quad \Gamma_\theta := \Gamma \setminus \Gamma_q. \quad (3.11)$$

Зауважимо, що в застосуваннях можуть зустрічатися й крайові умови іншого гатунку, як правило, у вигляді лінійних комбінацій складових умов (3.8), (3.9) та (3.10), (3.11).

Нарешті, з огляду на специфіку структури співвідношень та системи рівнянь (3.1)-(3.7), а саме, відсутність в ній похідних тиску за змінною часу, приходимо до висновку, що під час розгляду руху в'язкої рідини досить обмежитися розглядом початкових умов на значення густини маси, вектора швидкості та температури,

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega \quad (3.12)$$

Одержана нелінійна задача термогідродинаміки (3.1)-(3.12) містить менше рівнянь $(d + 2)$, ніж невідомих $(d + 4)$, і повинна бути доповнена додатковими співвідношеннями, заснованими на феноменологічних міркуваннях. З цією метою ми будемо вживати гіпотези акустичного наближення, які дозволять нам знайти не лише замкнену систему рівнянь, але й лінеаризувати її.

3.1.3 Лінеаризована система рівнянь дисипативної акустики в термінах пружного зміщення і температури

Нижче ми припускаємо, що з тих чи інших міркувань поміж невідомими $\{\rho, p, s, \theta\}$ існують зв'язки вигляду

$$p = p(\rho, \theta), \quad s = s(\rho, \theta).$$

Відомо, що тиск пов'язаний з густиною та температурою такими термодинамічними зв'язками [10]:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\theta} = \frac{c^2}{\gamma}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{\rho} = \frac{c^2 \rho \alpha}{\gamma}, \quad (3.13)$$

де c – швидкість звуку, α – коефіцієнт теплового розширення, $\gamma = c_p c_v^{-1}$, c_p та c_v – питомі теплоємності рідини при постійному тиску та об'ємі відповідно. Тоді з точністю до адитивної сталої

$$p = p_0 + c^2 \gamma^{-1} [\rho + \rho \alpha \theta].$$

На додаток до цього ми ще й лінеаризуємо одержане правило в такий спосіб

$$p(\mathbf{x}, t) \cong p_0 + c^2 \gamma^{-1} [\rho(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \alpha \theta(\mathbf{x}, t)], \quad (3.14)$$

де ρ_0 – розподіл густини маси рідини в незбуреному акустичними чинниками стані. Тут ми в неявній формі припускаємо, що густина маси рідини допускає таку декомпозицію

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho_*(\mathbf{x}, t) & \forall x \in \Omega \quad \forall t \in [0, T], \\ \rho_*|_{t=0} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \|\rho_*\| \ll \|\rho_0\|. \end{cases} \quad (3.15)$$

Тепер подамо швидкість руху рідини як суму вигляду

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_*(\mathbf{x}, t) & \forall x \in \Omega \quad \forall t \in [0, T], \\ \mathbf{v}_*|_{t=0} = 0 \text{ в } \Omega, & \|\mathbf{v}_*\| \ll \|\mathbf{v}_0\|. \end{cases} \quad (3.16)$$

і звернемося до рівняння нерозривності із (1.17). Враховуючи гіпотези (3.15) і (3.16), лінеаризуємо його у такий спосіб

$$\begin{aligned} \rho' + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &\cong \rho_*' + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_* + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_* \cong \\ &\cong \rho_*' + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_* = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \end{aligned} \quad (3.17)$$

а пізніше зінтегруємо одержане наближення на інтервалі часу $(0, t)$, $0 < t \leq T$. В результаті знаходимо, що

$$\begin{aligned} \rho_*(\mathbf{x}, t) &= -\rho_0 \nabla \cdot \int_0^t \mathbf{v}_*(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \\ &= -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.18)$$

де $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ - вектор акустичного зміщення частинок рідини

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \int_0^t \mathbf{v}_*(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \quad (3.19)$$

З огляду на (3.14) та (3.18) приходимо до остаточного виразу для лінійного наближення акустичного тиску у рідині

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &\cong p_0 + c^2 \gamma^{-1} [\rho_*(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \alpha \theta(\mathbf{x}, t)] \cong \\ &\cong p_0 + c^2 \gamma^{-1} \rho_0 [-\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \alpha \theta(\mathbf{x}, t)] \cong \\ &\equiv p_0 + \pi(\mathbf{u}, \theta) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Введення вектора акустичних зміщень $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ приводить також до зміни запису та структури тензора напружень рідини, а саме,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{v}, p) &= -p \delta_{ij} + \tau_{ij}(\mathbf{v}) \cong \\ &\cong -p_0 \delta_{ij} + \pi(\mathbf{u}, \theta) \delta_{ij} + \tau_{ij}(\mathbf{u}') \\ &= -p_0 \delta_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, \theta) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.21)$$

іншими словами, з огляду на співвідношення (3.20) тиск у визначенні тензора напружень виключається, натомість з'являється залежність його компонент від температури рідини.

Із врахуванням гіпотез акустики та лінеаризації конвективних складових рівняння руху (3.17) набувають відповідних змін, а саме,

$$\begin{aligned} & \rho[v'_i(t) + v_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m}] - \frac{\partial \sigma_{im}(\mathbf{v}, p)}{\partial x_m} - \rho f_i \cong \\ & \cong \rho_0 u''_i(t) + \frac{\partial}{\partial x_i} p_0 - \frac{\partial \bar{\sigma}_{im}(\mathbf{u}')}{\partial x_m} - \rho_0 f_i = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, врахування гіпотез акустики та виконана вище лінеаризація рівнянь руху призводить до виключення з числа невідомих тиску та густини і після цієї процедури рівняння руху набувають вигляду

$$\begin{aligned} & \rho_0 u''_i(t) - \frac{\partial \bar{\sigma}_{im}(\mathbf{u}')}{\partial x_m} = \rho_0 f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} p_0, \\ & \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}) := -\pi(\mathbf{u}, \theta) \delta_{ij} + \tau_{im}(\mathbf{u}') \\ & \pi(\mathbf{u}, \theta) := c^2 \gamma^{-1} \rho_0 [-\nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha \theta], \\ & \tau_{ij}(\mathbf{u}') := 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}') + (\eta - \frac{2}{3}\mu) \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}', \\ & e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Оскільки ентропія пов'язана з густиною та температурою термодинамічними зв'язками вигляду [10]

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_\theta = -\frac{c^2 \alpha}{\rho \gamma}, \quad \frac{\partial s}{\partial \theta} \Big|_\rho = \frac{c_v}{\theta}, \quad (3.23)$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= -\frac{c^2 \alpha}{\rho \gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{c_v}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \cong -\frac{c^2 \alpha}{\rho_0 \gamma} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{c_v}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} \cong \\ & \cong \frac{c^2 \alpha}{\rho_0 \gamma} \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}' + \frac{c_v}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{c^2 \alpha}{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \frac{c_v}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

і після підстановки цього виразу до рівняння збереження ентропії в (3.18) та його лінеаризації прийдемо до рівняння теплопровідності в'язкої рідини

$$\begin{aligned} & \rho \theta D_t s + \nabla \cdot \mathbf{q} + \tau(\mathbf{u}') : e(\mathbf{u}') - \rho g \cong \\ & \cong \rho_0 \theta_0 \left[\frac{c^2 \alpha}{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \frac{c_v}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right] - \nabla \cdot [\chi \nabla \theta] - \tau(\mathbf{u}') : e(\mathbf{u}') - \rho_0 g, \end{aligned}$$

або

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot [\chi \nabla \theta] + c^2 \gamma^{-1} \rho_0 \theta_0 \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}' = \rho_0 g \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \quad (3.25)$$

3.1.4 Лінеаризована початково-крайова задача дисипативної акустики

Підсумовуючи міркування п.3 приходимо до такої лінеаризованої початково-крайової задачі акустики із замкненою системою фундаментальних рівнянь:

знайти зміщення $\mathbf{u} = u_i(\mathbf{x}, t)$ ^d і температуру $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ такі, що задовольняють лінеаризовану систему рівнянь дисипативної акустики

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 c_v \theta_0^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \theta_0^{-1} \nabla \cdot [\chi \nabla \theta] + c^2 \gamma^{-1} \rho_0 \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}' = \rho_0 \theta_0^{-1} g, \\ \rho_0 u_i''(t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \pi(\mathbf{u}, \theta) - \frac{\partial \tau_{im}(\mathbf{u}')}{\partial x_m} = \rho_0 f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} p_0, \\ \pi(\mathbf{u}, \theta) := c^2 \gamma^{-1} \rho_0 [-\nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha \theta], \\ \tau_{ij}(\mathbf{u}') := 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}') + (\eta - \frac{2}{3}\mu) \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}', \\ e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \end{array} \right. \quad (3.26)$$

початкові умови

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.27)$$

та крайові умови

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i, \quad \text{на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma \subset \Gamma, \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}, \quad \text{на } \Gamma_\nu \times [0, T], \Gamma_\nu := \Gamma \setminus \Gamma_\sigma, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \hat{q}, \quad \text{на } \Gamma_q \times [0, T], \Gamma_q \subset \Gamma, \\ \theta = \hat{\theta} \quad \text{на } \Gamma_\theta \times [0, T], \Gamma_\theta := \Gamma \setminus \Gamma_q. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

3.1.5 Варіаційна задача дисипативної акустики

Щоб побудувати варіаційне формулювання початково-крайової задачі (3.26)-(3.28), спочатку (з огляду на її крайові умови Діріхле) введемо простір допустимих векторів зміщень

$$\mathbf{V} := \{ \mathbf{v} = \{v_i\}_{i=1}^d \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \text{ на } \Gamma_u \}$$

та простір допустимих температур

$$G := \{ \zeta \in H^1(\Omega) : \zeta = 0 \text{ на } \Gamma_\theta \}$$

відповідно.

Тепер помножимо рівняння теплопровідності із задачі (3.26)-(3.28) на довільну функцію $\zeta \in G$ і результат проінтегруємо по області Ω з використанням інтегрування частинами

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_0 \theta_0^{-1} g(t) \zeta dx &= \\ &= \int_{\Omega} \{ \rho_0 c_v \theta_0^{-1} \theta'(t) - \theta_0^{-1} \nabla \cdot [\chi \nabla \theta(t)] + c^2 \gamma^{-1} \rho_0 \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}'(t) \} \zeta dx \rho_0 = \\ &= \int_{\Omega} \{ \rho_0 c_v \theta_0^{-1} \theta'(t) \zeta + \theta_0^{-1} \nabla \zeta \cdot [\chi \nabla \theta(t)] + c^2 \gamma^{-1} \rho_0 \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}'(t) \} dx + \\ &+ \int_{\Gamma_q} \theta_0^{-1} \zeta q_m(\theta) n_m d\gamma = \\ &= \int_{\Omega} [\rho_0 c_v \theta_0^{-1} \theta'(t) \zeta + \theta_0^{-1} \nabla \zeta \cdot [\chi \nabla \theta(t)] + c^2 \gamma^{-1} \rho_0 \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}'(t)] dx + \\ &+ \int_{\Gamma_q} \theta_0^{-1} \hat{q}(t) \zeta d\gamma \quad \forall \zeta \in G. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Введемо білінійні та лінійну форми такого гатунку

$$\begin{cases} \chi(\theta, \zeta) := \int_{\Omega} \theta_0^{-1} \chi \nabla \zeta \cdot \nabla \theta dx \\ s(\theta, \zeta) := \int_{\Omega} \rho_0 c_v \theta_0^{-1} \theta \zeta dx \quad \forall \theta, \zeta \in G, \\ b(\mathbf{v}, \zeta) := \int_{\Omega} c^2 \gamma^{-1} \rho_0 \alpha \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \forall \zeta \in G. \end{cases} \tag{3.30}$$

та

$$\langle z, \zeta \rangle := \int_{\Omega} \rho_0 \theta_0^{-1} g \zeta dx - \int_{\Gamma_q} \theta_0^{-1} \hat{q} \zeta d\gamma \quad \forall \zeta \in G, \quad (3.31)$$

і запишемо одержане вище рівняння у вигляді

$$s(\theta'(t), \zeta) + \chi(\theta(t), \zeta) + b(\mathbf{u}'(t), \zeta) = \langle z(t), \zeta \rangle \quad \forall \zeta \in G.$$

Подібним чином домножимо скалярно рівняння руху із задачі (3.26)-(3.28) на довільний вектор $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ і результат зінтегруємо по області Ω з використанням інтегрування частинами

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} dx = \\ & = \int_{\Omega} \left\{ \rho_0 u_i''(t) + \frac{\partial}{\partial x_m} [\pi[\mathbf{u}(t), \theta(t)] \delta_{im} - \tau_{im}(\mathbf{u}'(t))] \right\} v_i dx \\ & = \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}''(t) dx + \int_{\Omega} c^2 \gamma^{-1} \rho_0 [\nabla \cdot \mathbf{u}(t)] (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx - \\ & \quad - \int_{\Omega} c^2 \gamma^{-1} \rho_0 \alpha \theta(t) \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \\ & \quad + \int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}'(t)) : e(\mathbf{v}) dx - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{g}}(t) d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

З огляду на одержане рівняння введемо форми

$$\left\{ \begin{aligned} m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} \tau(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v}) dx \equiv \\ &\equiv \int_{\Omega} [2\mu e(\mathbf{u}) : e(\mathbf{v}) + (\eta - \frac{2}{3}\mu)(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})] dx, \\ c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \int_{\Omega} c^2 \gamma^{-1} \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \right. \quad (3.33)$$

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle := m(\mathbf{f} - \rho_0^{-1} \nabla p_0, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{g}} d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.34)$$

і подамо варіаційне формулювання початково-крайової задачі дисипативної акустики у остаточному записі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти пару } \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\} \in \mathbf{V} \times G \text{ таку, що} \\ m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - \\ \quad - b(\mathbf{v}, \theta(t)) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \\ s(\theta'(t), \zeta) + \chi(\theta(t), \zeta) + b(\mathbf{u}'(t), \zeta) = \\ \quad = \langle z(t), \zeta \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad a(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in G. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Відзначимо тут, що власне білінійна форма $b(\cdot, \cdot): G \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, визначена нами у (3.30), пов'язує варіаційні рівняння задачі (3.35) у неподільну систему для визначення теплового та механічного полів акустичної хвилі. З іншого боку, як ми побачимо пізніше, ця білінійна форма описує механізм перетворення теплової енергії в механічну і, оскільки вона присутня в обох варіаційних рівняннях, навпаки.

3.1.6 Властивості складників варіаційної задачі дисипативної акустики

Щоб виконати аналіз властивостей білінійних форм та лінійних функціоналів, які складають структуру варіаційної задачі (3.35), введемо спочатку такі позначення для просторів скалярних та векторних функцій

$$H := L^2(\Omega), \quad \mathbf{H} := H^d, \quad \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}: \nabla \cdot \mathbf{v} \in H\}. \quad (3.36)$$

З огляду на додатні значення даних задачі (3.35) неважко зауважити, що неперервні симетричні білінійні форми

$$\begin{aligned} m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ s(\theta, \zeta) &= \int_{\Omega} \rho_0 c_v \theta^{-1} \theta \zeta dx \quad \forall \theta, \zeta \in H \end{aligned} \quad (3.37)$$

є скалярними добутками на просторах \mathbf{H} та H відповідно і, як наслідок, утворюють на них норми

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} &:= \sqrt{m(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \|\zeta\|_H &:= \sqrt{s(\zeta, \zeta)} \quad \forall \zeta \in H, \end{aligned} \quad (3.38)$$

еквівалентні нормам просторів $[L^2(\Omega)]^d$ та $L^2(\Omega)$ відповідно.

Подібним чином, зокрема, з огляду на нерівність Корна, неперервні симетричні білінійні форми

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} [2\mu e_{ij}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{v}) + (\eta - \frac{2}{3}\mu)(\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v})] dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \chi(\theta, \zeta) &= \int_{\Omega} \theta_0^{-1}(\chi \nabla \theta) \cdot (\nabla \zeta) dx \quad \forall \theta, \zeta \in G \end{aligned} \quad (3.39)$$

є скалярними добутками на просторах \mathbf{V} та G відповідно і, як наслідок, утворюють на них норми

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} &:= \sqrt{a(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (\text{еквівалентна } \|\cdot\|_{[H^1(\Omega)]^d}), \\ \|\zeta\|_G &:= \sqrt{\chi(\zeta, \zeta)} \quad \forall \zeta \in G \quad (\text{еквівалентна } \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Відзначені тут властивості білінійних форм варіаційної задачі є добре знаними для задач еластодинаміки та теплопровідності, які, по суті, і формують основу структури варіаційної задачі дисипативної акустики.

Одну із специфічних властивостей задачі дисипативної акустики демонструє неперервна симетрична білінійна форма

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} c^2 \rho_0 \gamma^{-1} (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (3.41)$$

яка є невід'ємною на просторі допустимих зміщень \mathbf{V} і утворює напівнорму в просторі $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$. Нижче останню ми будемо позначати в такий спосіб:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} := \sqrt{c(\mathbf{v}, \mathbf{v})} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (3.42)$$

І, нарешті, білінійна форма

$$b(\mathbf{v}, \zeta) := \int_{\Omega} c^2 \gamma^{-1} \rho_0 \alpha \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \forall \zeta \in G, \quad (3.43)$$

яка визначає механізм взаємодії теплового та механічного полів в процесі поширення акустичних хвиль, є неперервною на просторі $\mathbf{V} \times G$. Цією властивістю володіють і лінійні функціонали

$$\langle z, \zeta \rangle = \int_{\Omega} \rho_0 \theta_0^{-1} g \zeta dx - \int_{\Gamma_q} \theta_0^{-1} \hat{q} \zeta d\gamma \quad \forall \zeta \in G, \quad (3.44)$$

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle = m(\mathbf{f} - \rho_0^{-1} \nabla p_0, \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{f}} d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (3.45)$$

якщо зовнішні джерела надходження механічної та теплової енергії задачі володіють такими властивостями регулярності

$$g \in H, \quad \hat{q} \in L^2(\Gamma_q), \quad p_0 \in H^1(\Omega), \quad (3.46)$$

$$\mathbf{f} \in \mathbf{H}, \quad \hat{\mathbf{f}} \in [L^2(\Gamma_\sigma)]^d. \quad (3.47)$$

3.1.7 Енергетичні рівності дисипативної акустики

Прийmemo в рівняннях задачі (3.35) за допустимі функції $\mathbf{v} = \mathbf{u}'(t)$ та $\zeta = \theta(t)$ і додамо першу пару варіаційних рівнянь. В результаті анулювання доданків зі значеннями білінійної форми $b(\mathbf{u}'(t), \theta(t))$ (що вказує на перетворення енергії без втрат!) і використання норм із п.6 отримаємо рівняння балансу енергій цієї задачі

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(t)\|_H^2] + \|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(t)\|_G^2 = \\ = \langle l(t), \mathbf{u}'(t) \rangle + \langle z(t), \theta(t) \rangle \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Або після інтегрування на довільному проміжку часу $[0, t]$, $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(t)\|_H^2] + \int_0^t [\|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(\tau)\|_G^2] d\tau = \\ = \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}(0)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(0)\|_H^2] + \\ + \int_0^t [\langle l(\tau), \mathbf{u}'(\tau) \rangle + \langle z(\tau), \theta(\tau) \rangle] d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} K_S[\mathbf{u}'(t)] + P_S[\mathbf{u}(t)] + P_C[\theta(t)] + \int_0^t \{D_S[\mathbf{u}(\tau)] + D_C[\theta(\tau)]\} d\tau = \\ = K_S[\mathbf{v}_0] + P_S[\mathbf{u}_0] + P_C[\theta_0] + Q_S[\mathbf{u}'(t)] + Q_C[\theta(t)] \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.50)$$

де

$$K_S[\mathbf{u}'(t)] := \frac{1}{2} \|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{H}}^2, \quad P_S[\mathbf{u}(t)] := \frac{1}{2} |\mathbf{u}(t)|_{\mathbf{V}}^2, \quad D_S[\mathbf{u}'(t)] := \|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \quad (3.51)$$

є миттєвими значеннями кінетичної, потенціальної енергії та її дисипації, зумовлені механічним рухом рідини, функції

$$P_C[\theta(t)] := \|\theta(t)\|_H^2, \quad D_C[\theta(t)] := \|\theta(t)\|_G^2 \quad (3.52)$$

є миттєвими значеннями енергії та її втрат, зумовлені наявністю температурного поля рідини,

$$Q_S[\mathbf{u}'(t)] := \int_0^t \langle l(\tau), \mathbf{u}'(\tau) \rangle d\tau, \quad Q_C[\theta(t)] := \int_0^t \langle \mu(\tau), \theta(\tau) \rangle d\tau \quad (3.53)$$

описують притік енергії, зумовлений зовнішніми механічними та тепловими чинниками.

3.1.8 Регулярність даних задачі дисипативної акустики

Допустимі умови гладкості даних варіаційної задачі (3.35), як функцій просторових змінних і часу, можна визначити на підставі аналізу рівності (3.49). Зокрема, щоб сума доданків, які визначають повну енергію акустичного поля рідини,

$$E[\mathbf{u}(t), \theta(t)] := \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + |\mathbf{u}(t)|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(t)\|_H^2]. \quad (3.54)$$

набувала в кожен момент часу $t \in (0, T]$ скінченних значень, потрібно вимагати, щоб виконувалися умови

$$\mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}), \mathbf{u} \in L^\infty[0, T; \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)], \theta \in L^\infty(0, T; H). \quad (3.55)$$

Подібно, щоб сума доданків, які визначають втрати акустичного поля рідини,

$$D[\mathbf{u}(t), \theta(t)] := \int_0^t [\|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(\tau)\|_G^2] d\tau. \quad (3.56)$$

набувала на кожному проміжку часу $(0, t] \subset (0, T]$ скінченних значень, потрібно, щоб виконувалися умови

$$\mathbf{u}' \in L^2(0, T; \mathbf{V}), \theta \in L^2(0, T; G). \quad (3.57)$$

Звідси доходимо висновку, що змістовні розв'язки варіаційної задачі дисипативної акустики повинні задовольняти умовам

$$\begin{cases} \mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ \mathbf{u} \in L^\infty[0, T; \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)], \\ \theta \in L^\infty(0, T; H) \cap \theta \in L^2(0, T; G). \end{cases} \quad (3.58)$$

Тепер із вимоги

$$\left| \int_0^t [\langle l(\tau), \mathbf{u}'(\tau) \rangle + \langle z(\tau), \theta(\tau) \rangle] d\tau \right| < +\infty \quad \forall t \in (0, T]$$

знаходимо достатні вимоги регулярності на джерела надходження енергії акустичного поля, а саме,

$$l \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad z \in L^2(0, T; G'), \quad (3.59)$$

чи більш докладно з огляду на структури (3.44) та (3.45) цих функціоналів

$$\begin{cases} \mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \hat{\sigma} \in L^2(0, T; [L^2(\Gamma_\sigma)]^d), \\ g \in L^2(0, T; H), \quad \hat{q} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_q)). \end{cases} \quad (3.60)$$

Тут символи \mathbf{V}' та G' вжито нами для позначення спряжених до просторів \mathbf{V} та G відповідно.

Остання сума доданків

$$E[\mathbf{u}(0), \theta(0)] := \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}'(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}(0)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(0)\|_H^2]$$

енергетичної рівності (3.49) показує, що повна енергія акустичного поля в початковий момент часу $t=0$ матиме скінченні значення, якщо початкові дані задачі дисипативної акустики вибрано згідно правил

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \theta_0 \in H. \quad (3.61)$$

3.1.9 Єдиність та обмеженість розв'язку варіаційної задачі дисипативної акустики

Тепер ми готові довести, що буде правильною така

Теорема 3.1 про єдиність та обмеженість розв'язку задачі акустики.

Нехай варіаційна задача дисипативної акустики (3.35), дані якої задовольняють умови регулярності

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \theta_0 \in H \quad (3.62)$$

та

$$\begin{cases} \mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}), \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in L^2(0, T; [L^2(\Gamma_\sigma)]^d), \\ g \in L^2(0, T; H), \hat{q} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_q)), \end{cases} \quad (3.63)$$

має розв'язок $\boldsymbol{\Psi}(t) = \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\}$. Тоді пара $\boldsymbol{\Psi}(t) = \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\}$ буде єдиним розв'язком задачі (3.35) і при цьому

$$\begin{cases} L^\infty[0, T; \mathbf{H}(\text{div}; \Omega)], \quad \mathbf{u}' \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ \theta \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; G). \end{cases} \quad (3.64)$$

Більше цього, розв'язок $\boldsymbol{\Psi}(t) = \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\}$ неперервно залежить від даних задачі (3.35) і за цих умов буде правильною апріорна оцінка

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(t)\|_{\mathbf{H}}^2] + \int_0^t [\|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(\tau)\|_{\mathbf{G}}^2] d\tau \leq \\
& \leq C [\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta_0\|_{\mathbf{H}}^2] + \\
& \quad + \int_0^t [\|l(\tau)\|_{\mathbf{V}'}^2 + \|z(\tau)\|_{\mathbf{G}'}^2] d\tau \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{3.65}$$

зі сталою $C > 0$, значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.

Доведення. З огляду на умови (3.63)

$$l \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad z \in L^2(0, T; \mathbf{G}'),$$

внаслідок чого будуть правильними оцінки

$$\begin{aligned}
| \langle l(\tau), \mathbf{u}'(\tau) \rangle | & \leq \|l(\tau)\|_{\mathbf{V}'} \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2} \|l(\tau)\|_{\mathbf{V}'}^2, \\
| \langle z(\tau), \theta(\tau) \rangle | & \leq \frac{1}{2} \|\theta(\tau)\|_{\mathbf{G}'}^2 + \frac{1}{2} \|z(\tau)\|_{\mathbf{G}'}^2 \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Із початкової умови задачі (3.35)

$$m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}$$

після підставлення $\mathbf{v} = \mathbf{u}'(0)$ та $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ одержимо, що

$$\|\mathbf{u}'(0)\|_{\mathbf{H}}^2 = m(\mathbf{u}'(0), \mathbf{v}_0) = m(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}'(0)) = m(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) = \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}}^2. \tag{3.67}$$

На цих самих засадах

$$\|\mathbf{u}(0)\|_{\mathbf{V}} = \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}, \quad \|\theta(0)\|_{\mathbf{H}} = \|\theta_0\|_{\mathbf{H}}. \tag{3.68}$$

Далі, з огляду на результати п.6 знайдеться $C = \text{const} > 0$ така, що

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{3.69}$$

і, зокрема,

$$\|\mathbf{u}(0)\|_{\mathbf{V}} \leq C \|\mathbf{u}(0)\|_{\mathbf{V}} = C \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}. \tag{3.70}$$

Збираючи тепер (3.66)-(3.68) та (3.70) у енергетичній рівності (3.49), прийдемо до оцінки (3.65).

На підставі ж цієї оцінки міркуваннями від супротивного доводиться єдиність розв'язку задачі (3.35). ▲

Наслідок 3.1 про норму розв'язку задачі акустики.

Нехай виконано гіпотези теореми 3.1 відносно варіаційної задачі дисипативної акустики (3.35).

Тоді природною нормою для її розв'язку $\boldsymbol{\psi}(t) = \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\} \in$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\psi}(t)\|^2 := & \|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \\ & + \int_0^t [\|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(\tau)\|_{\mathbf{G}}^2] d\tau \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.1.10 Напівдискретизація Гальоркіна варіаційної задачі дисипативної акустики

Нехай $\{\mathbf{V}_h\}$ та $\{G_h\}$ - послідовності скінченновимірних просторів, такі що

$$\begin{cases} \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}, G_h \subset G \quad \forall h > 0, \\ \dim \mathbf{V}_h = N = N(h) \rightarrow \infty, \dim G_h = M = M(h) \rightarrow \infty, \text{ якщо } h \rightarrow 0, \\ \bigcup_{h>0} \mathbf{V}_h \text{ щільне в } \mathbf{V}, \bigcup_{h>0} G_h \text{ щільне в } G. \end{cases} \quad (3.72)$$

На цій основі визначимо послідовність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна $\{\boldsymbol{\psi}_h\}_{h>0} = \{(\mathbf{u}_h, \theta_h)\}_{h>0}$ у вигляді розв'язків таких варіаційних задач:

задано $h > 0$; знайти пару $\boldsymbol{\psi}_h(t) = (\mathbf{u}_h(t), \theta_h(t)) \in \mathbf{V}_h \times G_h$ таку, що

$$\begin{cases} m(\mathbf{u}_h''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_h'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) - \\ \quad - b(\theta_h(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \\ s(\theta_h'(t), \zeta) + k(\theta_h(t), \zeta) + b(\zeta, \mathbf{u}_h'(t)) = \langle z(t), \zeta \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}_h'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, a(\mathbf{u}_h(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \\ s(\theta_h(0) - \theta_0, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in G_h. \end{cases} \quad (3.73)$$

Щоб конкретизувати структуру як щойно сформульованих задач, так і шуканих апроксимацій $(\mathbf{u}_h, \theta_h) \in L^2(0, T; \mathbf{V}_h \times G_h)$, зафіксуємо деякі базиси $\{\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^N$ та $\{\phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^M$ просторів \mathbf{V}_h та G_h відповідно. Цей вибір, по перше, однозначно визначає вигляд кожного члена послідовності напівдискретних апроксимацій як лінійні комбінації

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) \boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x}), \quad \theta_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^M \mathcal{G}_k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (3.74)$$

з невідомими коефіцієнтами $\mathbf{U}(t) = \{u_k(t)\}_{k=1}^N$ та $\Theta(t) = \{\mathcal{G}_m(t)\}_{m=1}^M$, а, по друге, після застосування процедури Гальоркіна дозволяє одержати задачу Коші для обчислення щойно згаданих коефіцієнтів

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{U}''(t) + \mathbf{A}\mathbf{U}'(t) + \mathbf{C}\mathbf{U}(t) - \mathbf{B}\Theta(t) = \mathbf{L}(t), \\ \mathbf{S}\Theta'(t) + \mathbf{K}\Theta(t) + \mathbf{B}^T\mathbf{U}'(t) = \mathbf{Z}(t) \quad \forall t \in (0, T], \\ \mathbf{M}\mathbf{U}'(0) = \mathbf{Y}^0, \quad \mathbf{A}\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}^0, \\ \mathbf{S}\Theta(0) = \Theta^0. \end{cases} \quad (3.75)$$

Тут складові матриць та векторів правих частин рівнянь обчислюються згідно правил

$$\mathbf{C} = \{c(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_k)\}_{i,k=1}^N, \quad \mathbf{B} = \{b(\phi_i, \boldsymbol{\varphi}_k)\}_{i,k=1}^{M,N}, \quad \mathbf{K} = \{k(\phi_i, \phi_k)\}_{i,k=1}^M, \quad (3.76)$$

$$\mathbf{L}(t) = \{\langle l(t), \boldsymbol{\varphi}_i \rangle\}_{i=1}^N, \quad \mathbf{Z}(t) = \{\langle z(t), \phi_i \rangle\}_{i=1}^M \quad \forall T \in (0, t], \quad (3.77)$$

та

$$\mathbf{Y}_0 = \{m(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\varphi}_k)\}_{k=1}^N, \quad \mathbf{U}_0 = \{a(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\varphi}_k)\}_{k=1}^N, \quad \Theta_0 = \{s(\theta_0, \phi_i)\}_{i=1}^M. \quad (3.78)$$

Оскільки решта матриць

$$\mathbf{M} = \{m(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_k)\}_{i,k=1}^N, \quad \mathbf{A} = \{a(\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_k)\}_{i,k=1}^N, \quad \mathbf{S} = \{s(\phi_i, \phi_k)\}_{i,k=1}^M \quad (3.79)$$

є матрицями Грама систем лінійно незалежних функцій $\{\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^N$ та $\{\phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^M$ (відносно скалярних добутків, окреслених в п.6, див. (3.37) і (3.39)), а, отже, і

додатно визначеними. Цей факт гарантує можливість однозначного розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь задачі Коші (3.75) відносно старших похідних, а також систем лінійних алгебричних рівнянь її початкових умов відносно векторів $\mathbf{U}(0), \mathbf{U}'(0)$ та $\Theta(0)$. Звідси приходимо до висновку, що для кожного фіксованого $h > 0$ задача Коші (3.75) має єдиний розв'язок $\{\mathbf{U}(t), \Theta(t)\}$, який дозволяє однозначно відшукати напівдискретну апроксимацію Гальоркіна $(\mathbf{u}_h, \theta_h) \in L^2(0, T; \mathbf{V}_h \times G_h)$ у вигляді розвинень (3.73).

Теорема 3.2 про коректність напівдискретизованої задачі акустики.

Нехай дані варіаційної задачі дисипативної акустики (3.35) характеризуються умовами регулярності

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \quad \theta_0 \in H \quad (3.80)$$

та

$$\begin{cases} \mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in L^2(0, T; [L^2(\Gamma_\sigma)]^d), \\ g \in L^2(0, T; H), \quad \hat{q} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_q)). \end{cases} \quad (3.81)$$

Тоді для кожного значення параметра дискретизації $h > 0$ будуть правильними такі твердження:

(i) Напівдискретизована задача (3.73) має єдиний розв'язок $\boldsymbol{\psi}_h = \{\mathbf{u}_h, \theta_h\}$ і при цьому

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \in L^\infty[0, T; \mathbf{H}(\text{div}; \Omega)], \quad \mathbf{u}'_h \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ \theta_h \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; G); \end{cases} \quad (3.82)$$

(ii) Напівдискретна апроксимація $\boldsymbol{\psi}_h = \{\mathbf{u}_h, \theta_h\}$ неперервно залежить від даних задачі (3.35), точніше, буде правильною апіорна оцінка

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}'_h(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}_h(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta_h(t)\|_H^2] + \int_0^t [\|\mathbf{u}'_h(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta_h(\tau)\|_G^2] d\tau \leq \\
& \leq C [\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta_0\|_H^2] + \\
& \quad + \int_0^t [\|l(\tau)\|_{\mathbf{V}'}^2 + \|z(\tau)\|_{G'}^2] d\tau \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall h > 0.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

зі сталою $C > 0$, значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.

3.1.11 Існування розв'язку варіаційної задачі дисипативної акустики

Теорема 3.3 про коректність варіаційної задачі дисипативної акустики.

Нехай дані варіаційної задачі дисипативної акустики (3.35) характеризуються умовами регулярності (3.62) та (3.63).

Тоді варіаційна задача (3.35) має єдиний розв'язок $\Psi = \{\mathbf{u}, \theta\}$ і при цьому

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \in L^\infty[0, T; \mathbf{H}(\text{div}; \Omega)], & \mathbf{u}'_h \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ \theta_h \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; G); \end{cases} \tag{3.85}$$

більше цього

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [\|\mathbf{u}'(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(t)\|_H^2] + \int_0^t [\|\mathbf{u}'(\tau)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta(\tau)\|_G^2] d\tau \leq \\
& \leq C [\|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\theta_0\|_H^2] + \int_0^t [\|l(\tau)\|_{\mathbf{V}'}^2 + \|z(\tau)\|_{G'}^2] d\tau \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{3.86}$$

зі сталою $C > 0$, значення якої не залежить від величин, що нас цікавлять.

Доведення. З огляду на теорему 3.1 залишилося встановити існування розв'язку (3.35).

Як впливає із теореми 3.2, послідовність напівдискретних апроксимацій Гальоркіна $\Psi_h = \{\mathbf{u}_h, \theta_h\}$ (а також $\{\mathbf{u}'_h\}$) утворюють при $h \rightarrow 0$ обмежені множини в просторі $L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \times [L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; G)]$ (відповідно $L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$).

Тому з них можна вибрати збіжну підпослідовність $\Psi_\Delta = \{\mathbf{u}_\Delta, \theta_\Delta\}$ і $\{\mathbf{u}'_\Delta\}$ такі, що

$$\begin{cases} \Psi_\Delta = \{\mathbf{u}_\Delta, \theta_\Delta\} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \Psi = \{\mathbf{u}, \theta\} \text{ в } L^2(0, T; \mathbf{V} \times G) \text{ слабко,} \\ \mathbf{u}'_\Delta \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \mathbf{u}' \text{ в } L^2(0, T; \mathbf{V}) \text{ слабко.} \end{cases} \quad (3.87)$$

Після цього лишається показати, що знайдена в такий спосіб границя $\Psi = \{\mathbf{u}, \theta\}$ з простору $L^2(0, T; \mathbf{V} \times G)$ є розв'язком задачі (3.35); точніше, безпосередньою перевіркою переконуємося, що пара $\Psi = \{\mathbf{u}, \theta\}$ задовольняє рівняння цієї задачі.

Для цього виберемо простори $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$, $G_h \subset G$ та $W := \{g \in C^1([0, T]) \mid g(T) = 0\}$. Нехай, як і раніше, $\{\boldsymbol{\varphi}_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^N$ та $\{\phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^M$ є базисами просторів \mathbf{V}_h та G_h відповідно і

$$\mathbf{v}_h(t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \boldsymbol{\varphi}_i \in \mathbf{V}_h \quad \forall q_i \in W, \quad g_h(t) = \sum_{i=1}^k \eta_i(T) \phi_i \in G_h \quad \forall \eta_i \in W.$$

В силу задачі (3.73) маємо

$$\begin{cases} m(\mathbf{u}'_\Delta(t), \mathbf{v}_h(t)) + a(\mathbf{u}'_\Delta(t), \mathbf{v}_h(t)) + c(\mathbf{u}_\Delta(t), \mathbf{v}_h(t)) - \\ \quad - b(\theta_\Delta(t), \mathbf{v}_h(t)) = \langle l(t), \mathbf{v}_h(t) \rangle, \\ s(\theta'_\Delta(t), g_h(t)) + k(\theta_\Delta(t), g_h(t)) + b(g_h(t), \mathbf{u}'_\Delta(t)) = \\ \quad = \langle \mu(t), g_h(t) \rangle \quad \forall t \in (0, T]. \end{cases}$$

Після інтегрування за часом на проміжку $(0, T)$ з використанням інтегрування частинами та початкових умов із (10.2) отримуємо

$$\begin{cases} \int_0^T \{-m(\mathbf{u}'_\Delta, \mathbf{v}'_h) + a(\mathbf{u}'_\Delta, \mathbf{v}_h) + c(\mathbf{u}_\Delta, \mathbf{v}_h) - b(\theta_\Delta, \mathbf{v}_h) - \langle l, \mathbf{v}_h \rangle\} d\tau = \\ \quad = -m(\mathbf{u}'_\Delta(0), \mathbf{v}_h(0)) = -m(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_h(0)), \\ \int_0^T \{-s(\theta_\Delta, g'_h) + k(\theta_\Delta, g_h) + b(g_h, \mathbf{u}'_\Delta) - \langle \mu, g_h \rangle\} d\tau = -s(\theta_\Delta(0), g_h(0)) = -s(\theta_0, g_h(0)). \end{cases}$$

Перейдемо у одержаних рівняннях до границі з $\Delta \rightarrow 0$ та знову виконаємо інтегрування частинами, отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \{m(\mathbf{u}'', \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}', \mathbf{v}_h) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - b(\theta, \mathbf{v}_h) - \langle l, \mathbf{v}_h \rangle\} d\tau = \\ \qquad \qquad \qquad = m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_h(0)) \quad \forall \mathbf{v}_h \in C^1([0, T]; \mathbf{V}_h) \\ \int_0^T \{s(\theta', g_h) + k(\theta, g_h) + b(g_h, \mathbf{u}') - \langle \mu, g_h \rangle\} d\tau = \\ \qquad \qquad \qquad = s(\theta(0) - \theta_0, g_h(0)) \quad \forall g_h \in C^1([0, T]; G_h). \end{array} \right.$$

Оскільки \mathbf{V}_h щільний у просторі \mathbf{V} та G_h щільний у просторі G , то останні рівняння виконуються для кожного $\mathbf{v} \in C^1([0, T]; \mathbf{V})$ та $g \in C^1([0, T]; G)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\mathbf{u}'', \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\theta, \mathbf{v}) = \langle l, \mathbf{v} \rangle, \\ \qquad \qquad \qquad s(\theta', g) + k(\theta, g) + b(g, \mathbf{u}') = \langle \mu, g \rangle, \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad s(\theta(0) - \theta_0, g) = 0 \quad \forall g \in G. \end{array} \right.$$

Нарешті з початкових умов та огляду на (3.73)

$$a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}_\Delta(0), \mathbf{v}) \rightarrow a(\mathbf{u}(0), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Таким чином, пара $\boldsymbol{\psi} = \{\mathbf{u}, \theta\}$ є розв'язком варіаційної задачі (3.35). Більше цього, для розв'язку лишається справедливим енергетичне рівняння (3.49) та оцінка (3.65). Єдиність розв'язку варіаційної задачі (3.35) є наслідком з нерівності (3.65) та міркувань від супротивного. \blacktriangle

3.1.12 Висновки

На підставі законів збереження сформульовано фундаментальні рівняння, феноменологічні співвідношення крайові та початкові умови, що описують рух ньютонівської в'язкої теплопровідної рідини в термінах густини маси, вектора швидкості, тиску, ентропії та температури. Застосовуючи до цієї незамкненої

моделі гідродинаміки гіпотези щодо акустичних збурень руху рідини шляхом лінеаризації знайдено початково-крайову та відповідну їй варіаційну задачу лише у термінах вектора акустичних зміщень та приросту температури, яка описує процес поширення акустичних хвиль з урахуванням зв'язаності механічного та температурного полів. Окреслено клас регулярності вхідних даних варіаційної задачі, які гарантують єдність та неперервну залежність шуканого розв'язку в енергетичній нормі задачі. На додаток доведено існування розв'язку розглядуваної задачі як границю послідовності напівдискретних (за просторовими змінними) апроксимацій Гальоркіна.

Одержані результати складають повноцінну основу для успішної побудови та аналізу числових схем розв'язування задач дисипативної акустики. Зокрема, одну із таких схем можна одержати безпосереднім застосуванням однокрокових рекурентних схем для інтегрування в часі напівдискретизованої варіаційної задачі (3.73) з використанням класичних просторів апроксимацій методу скінченних елементів [129]. В подальшому планується побудувати та проаналізувати умови збіжності такої схеми.

3.2 Апроксимація початково-крайових задач п'єзо- та піроелектрики

Досліджено поведінку та взаємодію механічних та електричних полів в п'єзоелектричному стержні, що перебуває під дією імпульсного навантаження. В якості математичної моделі використано початково-крайову задачу теорії п'єзоелектриків. Алгоритм знаходження розв'язку включає формулювання відповідної варіаційної задачі, напівдискретизацію варіаційної задачі та побудову однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі. Для побудови базису напівдискретизованої задачі застосовується метод скінченних елементів.

3.2.1 Вступ

Практичне застосування «розумних матеріалів», зокрема п'єзоелектриків, вимагає від інженера знання та розуміння їх роботи як на макро- (напр. енергетичні характеристики, максимальні напруження) так і на мікрорівні (напр. вигляд хвилі зміщення, потенціалу). Відомості щодо їх роботи можуть бути отримані або з використанням «дорогих» практичних експериментів, або використовуючи «дешевший» інструмент такий як комп'ютерне(чисельне) моделювання. Використання цього інструменту передбачає побудову адекватної математичної моделі та конструювання відповідної числової схеми знаходження її розв'язку. Сучасні дослідження [17, 68], дозволяють в тій чи іншій мірі вирішити ці задачі, при цьому залишаючи відкритими деякі питання аналізу швидкоплинних хвильових процесів, які виникають при зовнішніх чи внутрішніх навантаженнях в п'єзоелектрику, їх впливу на стійкість результатів отриманих при застосуванні побудованої числової схеми.

Таким чином, дослідження зосереджено на побудові такого інструменту, зокрема: формулюванні початково-крайової задачі теорії п'єзоелектриків, побудови ОРС інтегрування в часі для знаходження її розв'язків. Конструювання ОРС передбачає формулювання варіаційної та напівдискретизованої задачі. Побудова базисів апроксимацій напівдискретизованої задачі здійснюється з використанням МСЕ. Конкретно у дослідженні використано лінійні апроксимації для наближення шуканих невідомих. У розв'язаних експериментальних задачах в якості моделі використовувався стержень виготовлений з кварцу.

3.2.2 Формулювання задач динаміки п'єзоелектриків

Нехай Ω – обмежена зв'язна область точок $x=(x_1, \dots, x_d)$ евклідового простору R^d з неперервною за Ліпшицем границею Γ та одиничним вектором зовнішньої нормалі $n=(n_1, \dots, n_n)$, де $n_i = \cos(n, x_i)$. Час $t \in 0, T$, $0 < T < +\infty$. Необхідно знайти вектор пружних зміщень $u = u_i(x, t)_{i=1}^d$ і електричний потенціал $p = p(x, t)$, що задовольняють наступним рівнянням (тут і скрізь нижче передбачається звичайне підсумовування за індексами, які повторюються)

$$\begin{cases} \rho u_i'' - f_i - \sigma_{ij,j} = 0, \\ \sigma_{ij} = c_{ijkm} \varepsilon_{km}(u) + a_{ijkm} \varepsilon_{km}(u') - e_{kij} E_k p, \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (3.88)$$

$$\begin{cases} D'_{m,m} + J_{m,m} = 0, \\ D_k = g_{km} E_m(p) + e_{kij} \varepsilon_{ij}(u), \\ J_k = z_{km} E_m p, \\ E_k p = -p_{,k} \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (3.89)$$

крайовим умовам

$$\begin{cases} u_i = 0 \quad \text{на } \Gamma_u, \Gamma_u \subset \Gamma, \text{mes } \Gamma_u > 0, \\ \sigma_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{на } \Gamma_\sigma, \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \\ p = 0 \quad \text{на } \Gamma_p, \Gamma_p \subset \Gamma, \text{mes } \Gamma_p > 0, \\ D'_k + J_k n_k = 0 \quad \text{на } \Gamma_d \times 0, T, \Gamma_d \subset \Gamma, \Gamma_d \cap \Gamma_p = \emptyset, \\ \int_{\Gamma_e} D'_k + J_k n_k dy = I \quad \text{на } \Gamma_e \times 0, T, \Gamma_e = \Gamma \setminus \Gamma_d \cap \Gamma_p, \\ E_k p - n_k E_m p n_m = 0 \quad \text{на } \Gamma_e \times 0, T, \end{cases} \quad (3.90)$$

та початковим умовам

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = v_0, \quad p|_{t=0} = p_0 \quad \text{в } \Omega. \quad (3.91)$$

Тут $\rho = \rho(x)$ - густина маси п'єзоелектрика, $f_i = f_i(x,t)$ - вектор об'ємних сил, $\sigma_{ij}(x,t)$ і $\varepsilon_{ij}(x,t)$ - компоненти симетричних тензорів напружень і деформацій відповідно, $D_k(x,t)$, $J_k(x,t)$ і $E_k(x,t)$ компоненти векторів індукції, струму зміщення і напруженості електричного поля відповідно. Складові $a_{ijkm}(x,t)$ і $c_{ijkm}(x,t)$ описують тензори в'язкості і пружності п'єзоелектрика зі звичайними властивостями симетрії та еліптичності, $e_{kij}(x)$, $z_{km}(x)$ і $g_{ij}(x)$ визначають модулі п'єзоелектрики, електричної провідності і діелектричної проникності відповідно, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_i(x,t)$ та $I = I(t)$ - заданий вектор поверхневих сил та струму на електроді. Детальні відомості стосовно фізико-механічних характеристик п'єзоелектриків можна знайти у монографіях [27, 101, 109] та ін.

Введемо простори допустимих пружних зміщень та електричних потенціалів

$$V = \{v \in [H^1(\Omega)]^d : v = 0 \text{ на } \Gamma_u\},$$

$$Q = \{q \in H^1(\Omega) : q = 0 \text{ на } \Gamma_p, q = \text{const на } \Gamma_e\}$$

відповідно і позначимо через $\Phi := V \times Q$ та спряжений до нього простір $\Phi' := V' \times Q'$. З огляду на початково-крайову задачу п'єзоелектрики (3.88)-(3.91) сформулюємо відповідну їй варіаційну постановку [127]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \psi_0 = u_0, p_0 \in \Phi, v_0 \in H \text{ і } l, r \in L^2(0, T; \Phi'); \\ \text{знайти } \psi = u, p \in L^2(0, T; \Phi) \text{ таке, що} \\ m u''(t, v) + a u'(t, v) + c u(t, v) - e p(t, v) = \langle l(t, v) \rangle, \\ \quad g p'(t, q) + z p(t, q) + e q u'(t) = \langle r(t, q) \rangle, \quad \forall t \in (0, T), \\ m u'(0, v) - v_0, v = 0, c u(0, v) - u_0, v = 0 \quad \forall v \in V, \\ \quad g p(0, q) - p_0, q = 0 \quad \forall q \in Q, \end{array} \right. \quad (3.92)$$

де білінійні і лінійні форми визначаються такими виразами

$$\begin{aligned}
m \ u, v &= \int_{\Omega} \rho u_i v_i dx, & a \ u, v &= \int_{\Omega} a_{ijkm} \varepsilon_{ij} \ u \ \varepsilon_{km} \ v \ dx, \\
c \ u, v &= \int_{\Omega} c_{ijkm} \varepsilon_{ij} \ u \ \varepsilon_{km} \ v \ dx, & e \ q, v &= \int_{\Omega} e_{kij} E_k \ q \ \varepsilon_{ij} \ v \ dx, \\
z \ p, q &= \int_{\Omega} z_{km} E_k \ p \ E_m \ q \ dx, & g \ p, q &= \int_{\Omega} g_{km} E_k \ p \ E_m \ q \ dx, \\
\langle l, v \rangle &= \int_{\Omega} \rho f_i v_i dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma}_i v_i d\gamma, & \langle r, q \rangle &= -Iq|_{\Gamma_e} \quad \forall v \in V, \quad \forall q \in Q.
\end{aligned}$$

3.2.3 Напівдискретизація варіаційної задачі п'єзоелектрики

Виділимо в просторі допустимих функцій Φ послідовність скінченновимірних підпросторів апроксимацій $\Phi_h = V_h \times Q_h$, $\dim \Phi_h \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$. Для кожного фіксованого $h > 0$ розв'язок $\psi_h = u_h, p_h$ задачі

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{задано } h = \text{const} > 0, \ \psi_0 = u_0, p_0 \in V \times Q \\
v_0 \in H, \ \ell = l, r \in L^2(0, T, \Phi'); \\
\text{знайти вектор } \psi_h = u_h, p_h \in L^2(0, T, \Phi_h) \text{ такий, що} \\
m \ u_h''(t), v + a \ u_h'(t), v + c \ u_h(t), v - e \ p_h(t), v = \langle l(t), v \rangle, \\
g \ p_h'(t), q + e \ q, u_h'(t) + z \ p_h(t), q = \langle r(t), q \rangle, \\
m \ u_h'(0) - v_0, v = 0, \ c \ u_h(0) - u_0, v = 0, \\
g \ p_h(0) - p_0, q = 0 \quad \forall \phi = v, q \in \Phi_h
\end{array} \right. \quad (3.93)$$

будемо називати напівдискретизованою апроксимацією Гальоркіна для розв'язку $\psi = u, p$. Якщо зафіксувати деякі базиси v_i, p_i в просторах апроксимацій V_h, Q_h відповідно, то можна отримати задачу Коші для визначення коефіцієнтів $U(t) = U_i(t), P(t) = P_i(t)$ розкладів компонент напівдискретизованої апроксимації u_h, p_h по цим базисам; згадана задача Коші має наступну структуру:

$$\left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \begin{pmatrix} A & 0 \\ E & G \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} C & -E^T \\ 0 & Z \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} U & t \\ P & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & t \\ R & t \end{pmatrix} \quad \forall t \in (0, T], \quad (3.94)$$

$$MU' 0 = V^0, \quad CU 0 = U^0, \quad GP 0 = P^0.$$

3.2.4 Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі.

Щоб побудувати однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі скористаємося міркуваннями з [128].

Для фіксованого натурального N розглянемо рівномірне розбиття відрізка часу $0, T$ вузлами $t_j = j\Delta t$, $j=0, \dots, N+1$. $T = N+1 \Delta t$. На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ для апроксимації розв'язку $\psi_h t = u_h t, p_h t$ задачі (напівдискретизованої) будемо використовувати поліноми виду

$$u_h t \simeq [1 - \omega^2 t] u^j + \Delta t \omega t [1 - \omega t] v^j + \omega^2 t u^{j+1}, \quad \omega t = \frac{t - t_j}{\Delta t} \quad (3.95)$$

$$p_h t \simeq [1 - \omega t] p^j + \omega t p^{j+1} \text{ на } [t_j, t_{j+1}].$$

На основі наближень (3.95) побудуємо однокрокову рекурентна схему інтегрування задачі (6) в часі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \Delta t > 0, \alpha = \text{const} \geq 0, y^j = v^j, \psi^j \in V_h \times \Phi_h, \ell_j = l_j, r_j \in \Phi' \\ \text{знайти } y^{j+1} = v^{j+1}, \psi^{j+1} \in V_h \times \Phi_h \text{ такий, що} \\ m \dot{v}^{j+1/2}, v + a v^{j+\alpha}, v + c u^{j+\alpha}, v - e p^{j+1/2}, v = \langle l_j, v \rangle, \\ g \dot{p}^{j+1/2}, q + e q, v^{j+1/2} + z p^{j+\alpha}, q = \langle r_j, q \rangle, \\ \forall \phi = v, q \in \Phi_h, v^{j+1/2} = \dot{u}^{j+1/2}, j = 0, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.96)$$

тут використані наступні позначення

$$w^{j+1/2} = \frac{1}{2} w^{j+1} - w^j, \quad \dot{w}^{j+1/2} = \frac{1}{\Delta t} w^{j+1} - w^j, \quad (3.97)$$

$$w^{j+\alpha} = w^{j+1/2} + \alpha - \frac{1}{2} \Delta t \dot{w}^{j+1/2}.$$

Підстановкою наближень (3.95) в початкові умови задачі (3.93) отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} m v^0 - v_{0,v} &= 0, c u^0 - u_{0,v} = 0 \\ g p^0 - p_{0,q} &= 0 \quad \forall \varphi = (v, q) \in \Phi_h \end{aligned} \quad (3.98)$$

для визначення вектора $y^0 = v^0, \psi^0$, який є необхідним для початку обчислень за схемою (3.96).

Наведемо систему лінійних алгебричних рівнянь для однокрокової рекурентної схеми (3.96)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} M + \alpha \Delta t & A + \frac{1}{2} \Delta t C & -\frac{1}{2} \Delta t E^T \\ \frac{1}{2} \Delta t E & G + \alpha \Delta t Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^{j+1/2} \\ P^{j+1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Delta t \begin{pmatrix} L_j \\ R_j \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} M + \Delta \tilde{t} A & -\frac{1}{2} \Delta t C & 0 \\ 0 & 0 & G + \Delta \tilde{t} Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^j \\ U^j \\ P^j \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

де $\Delta \tilde{t} = \alpha - \frac{1}{2} \Delta t$, $V^{j+1/2} = 2V^{j+1/2} - V^j$, $U^{j+1} = U^j + \Delta t V^{j+1/2}$,
 $P^{j+1} = 2P^{j+1/2} - P^j \quad j = 0, \dots, N$.

3.2.5 Обчислення енергетичних характеристик.

Введені в задачі (3.92) білінійні форми дозволяють задати еквівалентні енергетичні норми в просторах V і Q

$$\begin{aligned} \|u\|_V &= \sqrt{c u, u}, |u|_V = \sqrt{a u, u} \quad \forall u \in V, \\ \|p\|_Q &= \sqrt{g p, p}, |p|_Q = \sqrt{z(p, p)} \quad \forall p \in Q. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Окрім цього ці форми визначають вирази для обчислень різних видів енергій, зокрема:

$\frac{1}{2} c u t , u t + g p t , p t$ - потенціальна енергія,

$a u' t , u' t + z p t , p t$ - енергія дисипації,

$\frac{1}{2} m u' t , u' t$ - кінетична енергія.

Зазначимо, що вираз $\frac{1}{2} c u t , u t$ визначає значення механічної потенціальної енергії, а вираз $\frac{1}{2} g p t , p t$ - електричної. Відповідно вирази $a u' t , u' t$ та $z p t , p t$ визначають енергію дисипації механічного та електричного полів. Функція $k = k t = e p t , u' t$ встановлює значення динамічного коефіцієнта електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) полів в п'єзоелектрику, який встановлює кількість енергії, яка в даний момент може перетворитись з механічної в електричну і навпаки.

3.2.6 Числові експерименти.

Запропонована чисельна схема була реалізована для аналізу поширення хвилі в кварцовому п'єзоелектричному стрижні довжиною $L = 0.01 m$ і з такими фізичними властивостями: густина маси $\rho = 2651 kg / m^3$, модуль пружності $c_{1111} = 8.67 \cdot 10^{10} N / m^2$, модуль п'єзоелектрики $e_{111} = -0.195 K / m$, діелектрична проникливість $g_{11} = 39.21 \cdot 10^{-12} F / m$ і електропровідність $z_{11} = 10^{-14} \Omega^{-1} m^{-1}$. Лівий кінець стрижня ($x = 0$) – закріплений і заземлений. Протягом початкового часового проміжку $[0, T_0]$, $T_0 = 3 \cdot 10^{-7} s$, правий кінець стрижня ($x = L$) отримує навантаження $\bar{\sigma} = 5 \cdot 10^6 N / m^2$. Поведінка хвилі досліджується протягом часу $[0, T]$, $T = 3 \cdot 10^{-6} s$. Чисельні експерименти були проведені на рівномірній сітці з 512 скінченних елементів з лінійними

апроксимаціями розв'язку з кроком інтегрування в часі $\Delta t = 10^{-9} s$ і параметром схеми $\alpha = 1/2$.

Типові перехідні характеристики отриманих апроксимацій хвиль показані на рис. 3.1 – 3.6.

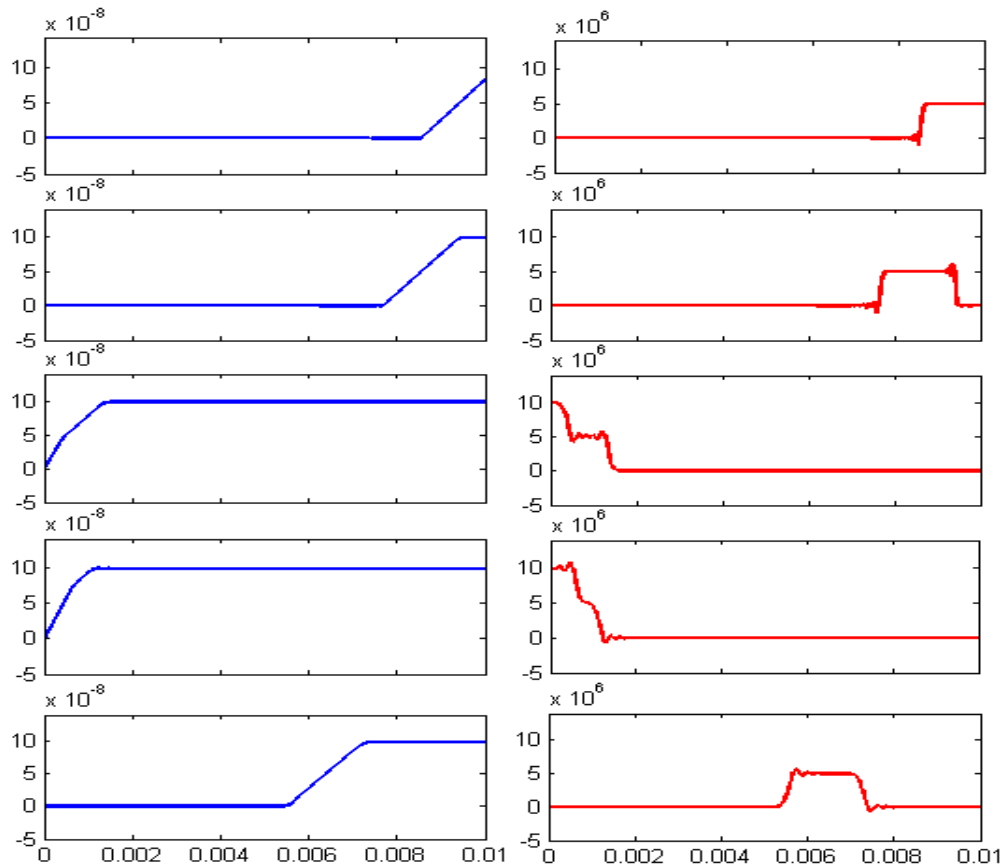


Рисунок 3.1 – Профілі зміщень (зліва) і механічного напруження (справа) при $t = 2.5 \cdot 10^{-7} s, 4 \cdot 10^{-7} s, 18 \cdot 10^{-7} s, 19.3 \cdot 10^{-7} s, 30 \cdot 10^{-7} s$.

Перший рядок на рис. 3.1 показує формування профілів зміщення та механічного напруження під дією навантаження. В другому рядку ми показуємо відповідні хвильові структури після зняття навантаження. Наступні 2 рядки показують перетворення хвилі перед та після відбиття від закріпленого кінця. Останній рядок ілюструє хвильові профілі протягом руху після відбиття. Як можна бачити, в особливі моменти часу під час відбиття, максимальне значення напруження подвоюється.

Використовуючи той самий підхід, рис. 3.2 ілюструє профілі швидкості пружного зміщення та його прискорення.

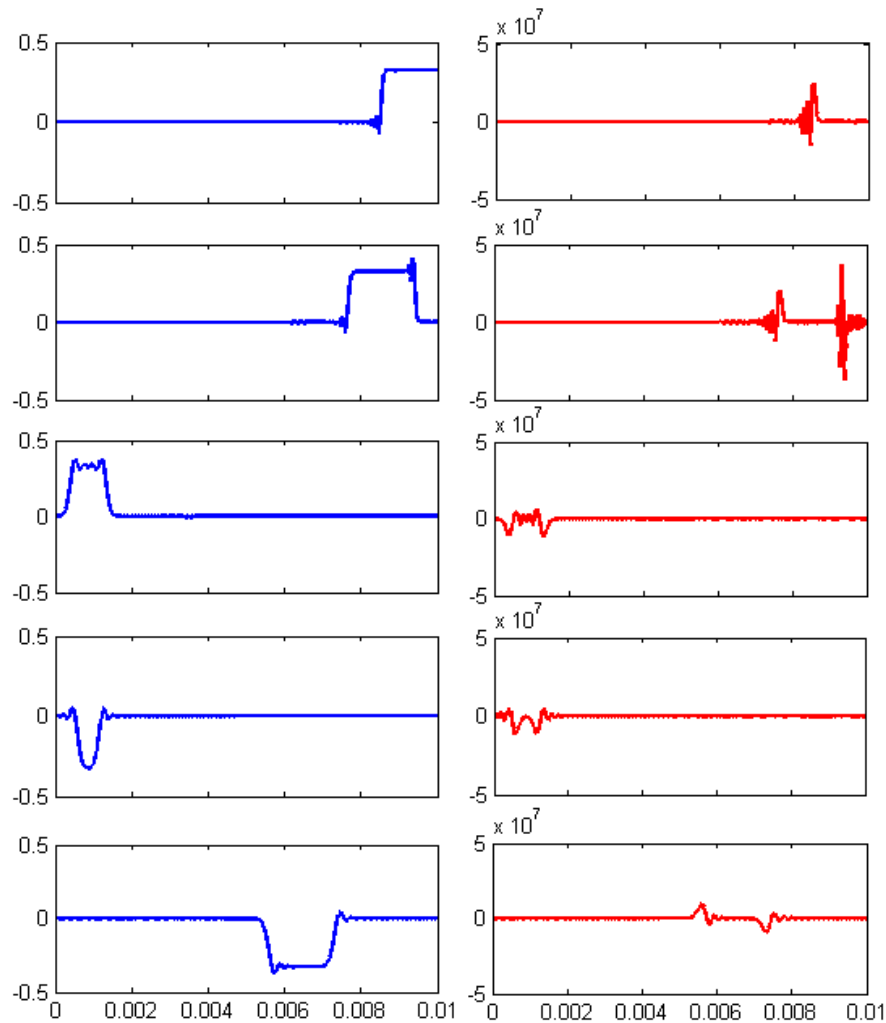


Рисунок 3.2 – Профілі швидкості зміщення(зліва) і прискорення (справа) при
 $t = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ s}, 4 \cdot 10^{-7} \text{ s}, 18 \cdot 10^{-7} \text{ s}, 19.3 \cdot 10^{-7} \text{ s}, 30 \cdot 10^{-7} \text{ s}.$

Відзначимо, що точність обчислення прискорення є гіршою, ніж пружного зміщення. Також профіль швидкості дещо нагадує нам графік механічного напруження. Крім того, після відбиття від закріпленого кінця, ми можемо бачити взаємодію переднього і заднього фронтів хвилі і після завершення цієї стадії швидкість змінює свій знак, хоча амплітуда залишається такою самою. Прискорення є ненульовим лише на передньому та задньому фронтах хвилі і затухає в часі. Це зумовлено штучною в'язкістю нашої чисельної схеми.

На рис. 3.3 ми можемо бачити, що профілі напруженості електричного поля та електричного струму мають такі самі структури, як і профіль механічного напруження.

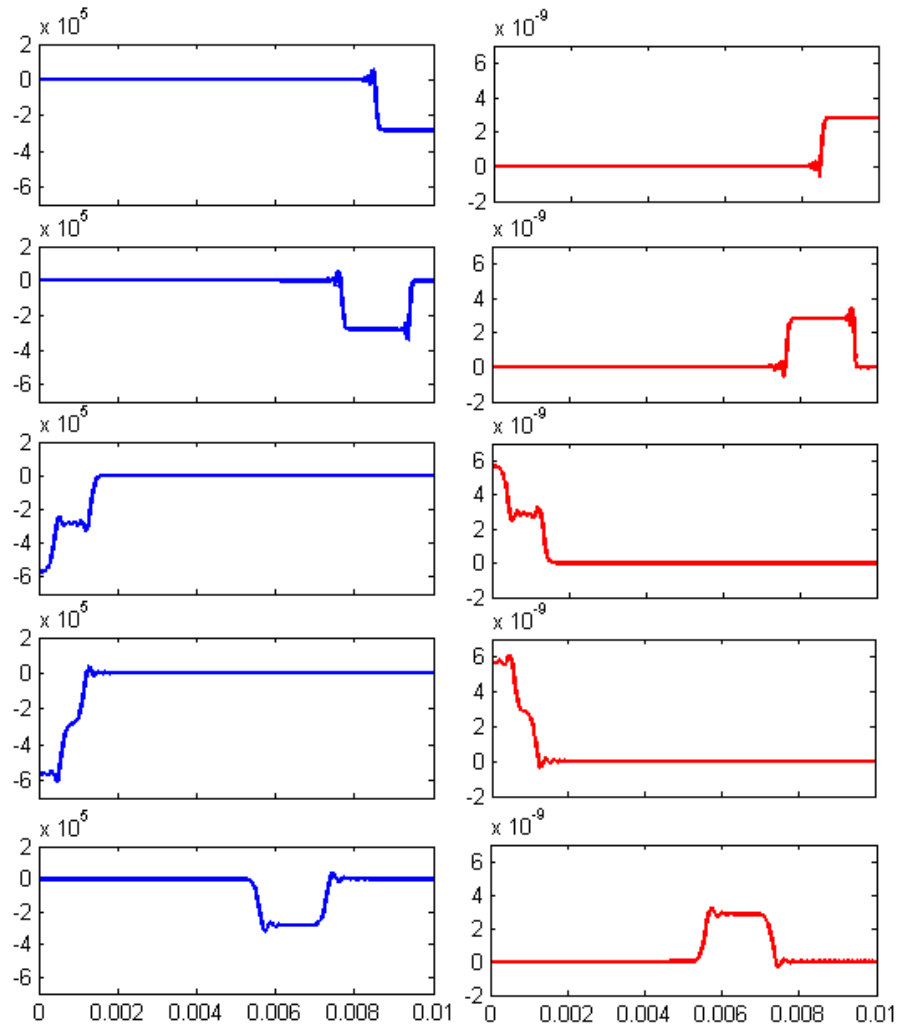


Рисунок 3.3 – Профілі напруженості електричного поля (зліва) і електричного струму (справа) при $t = 2.5 \cdot 10^{-7} s$, $4 \cdot 10^{-7} s$, $18 \cdot 10^{-7} s$, $19.3 \cdot 10^{-7} s$, $30 \cdot 10^{-7} s$.

Варто зауважити, що ми застосовували і кусково-лінійні, і кусково-квадратичні апроксимації методу скінченних елементів. Щоб порівняти точність цих апроксимацій між собою, було взято 256 скінченних елементів, всі інші параметри були такими самими як і в попередніх обчисленнях.

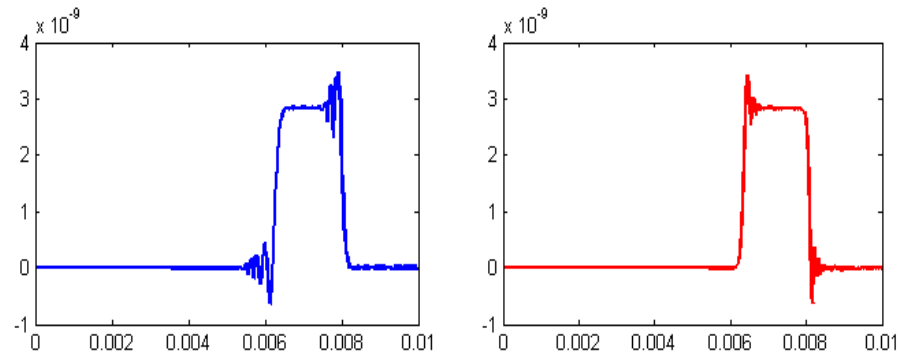


Рисунок 3.4 – Порівняння профілів електричного струму, обчислених за допомогою лінійних(зліва) та квадратичних(справа) апроксимацій в момент часу $t = 6.4 \cdot 10^{-7} \text{ s}$.

Тут ми можемо бачити, що кусково-квадратичні апроксимації дають нам дещо кращу точність, ніж лінійні.

Рис. 3.5 підтверджує виконання закону збереження енергії, і рис. 3.6 показує зв'язок між механічним та електричним полями – коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ).

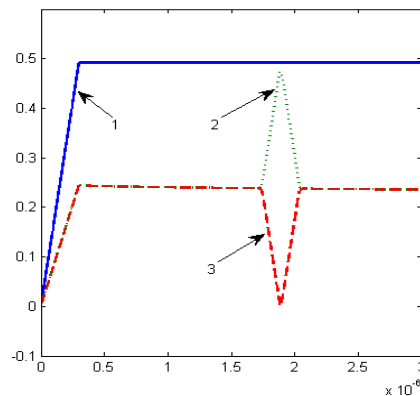


Рисунок 3.5 – Розподіл в часі складових енергії (1 – повна, 2 – потенціальна, 3 – кінетична).

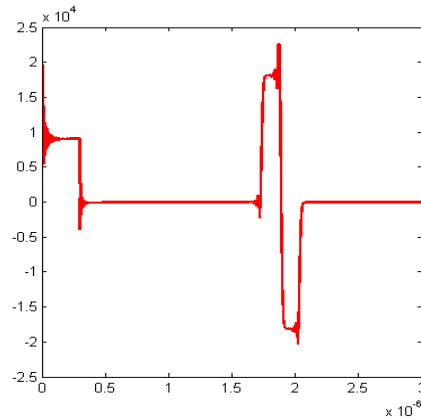


Рисунок 3.6 – Динаміка КЕМЗ протягом періоду спостереження.

Дивлячись на рис. 3.5, ми можемо бачити, що повна енергія зростає поки подається навантаження, далі вона залишається константою. Зауважимо, що кінетична енергія є близькою до нуля, коли хвиля досягає закріпленого кінця стрижня, і потенціальна енергія має в цей момент часу своє максимальне значення. Додатні значення КЕМЗ показують нам, що енергія переходить з механічного в електричне поле, від'ємні значення спостерігаються, коли енергія трансформується з електричного в механічне поле. Таким чином, з рис. 3.6 ми можемо бачити, що енергія переходить з механічного поля в електричне протягом періоду, поки прикладається зовнішнє механічне навантаження і коли хвиля досягає закріпленого кінця. Трансформація енергії в іншому напрямку спостерігається, коли хвиля тільки що залишила закріплений кінець стрижня.

3.2.7 Висновки

З використання методів варіаційного числення, методу Гальоркіна та МСЕ побудований інструмент комп'ютерного моделювання поведінки п'єзоелектричного тіла. З допомогою розробленого інструменту отримані числові результати, що наочно підтверджують ефективність та надійність

запропонованих числових схем. Проведений аналіз числових результатів, дав відповіді на питання щодо характеристик зміщення, напруження, кількості енергії, що даний п'єзоелектрик здатен перетворити.

3.3 Формулювання та аналіз задач термопружності оболонок: напівдискретизація за змінною товщини варіаційних задач термопружності

Цей підрозділ презентує варіаційну задачу термопружності для тонких пружних оболонок, податливих до зсуву та стиснення під впливом нестационарного теплового та силового навантаження. Побудову цієї моделі виконано за допомогою напівдискретизації Гальоркіна варіаційної задачі тривимірної термопружності з використанням гіпотез Тимошенка-Міндліна стосовно лінійності зміщень та температури за змінною товщини так, що шуканими функціями є вектори: пружних зміщень і поворотів нормалі, температури і її градієнта, визначені на серединній поверхні оболонки. Більш детально розглянуто випадок квазістатичної задачі, для якої досліджено умови коректності і подано результати скінченноелементного аналізу задачі термопружності для сталюї смуги-пластини.

3.3.1 Вступ

Поряд із суттєво тривимірними складовими реальні інженерні конструкції містять елементи, які мають один, а то й два просторові виміри, значно менші від решти. Наявність об'єктів різної вимірності свідчить, з одного боку, про певну раціональність попереднього проектування, а з іншого боку, значно ускладнює доведення конструктивних параметрів до оптимальних значень як за допомогою традиційних розрахунків, так і комп'ютерного моделювання.

Спроби числового аналізу напружено-деформованого стану таких конструкцій на основі тривимірних (за просторовими змінними) рівнянь задачі динамічної термопружності приводять до сингулярно збурених задач і, зазвичай, супроводжуються значним зростанням вимог до комп'ютерних ресурсів та переосмислення вжитих засобів математичного моделювання.

Одним із підходів стосовно підвищення ефективності моделювання таких конструкцій є перехід до адекватних спрощених моделей розрахунку тонкостінних елементів на основі теорії пластин та оболонок [115]. В контексті технології методу скінченних елементів такий підхід відомий під назвою d -адаптивності [80, 103]. Можливості технології d -адаптування для задач теплопровідності у тонкому криволінійному шарі були продемонстровані у [78] і розвинуті у [128]. Мета праці – поширення цієї методики на побудову задач термопружності тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення, на базі тривимірних задач термопружності.

3.3.2 Початково-крайова та варіаційна задачі термопружності.

Нехай, пружне тіло займає у просторі \mathbb{R}^3 обмежену область D з неперервною за Ліпшицем границею $S = \partial D$.

Припускаємо, що на нього діють масові сили $\{F_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$, поверхневі навантаження $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ на $S_\sigma \subset S$, внутрішні джерела тепла $g = g(\mathbf{x}, t)$ і тепловий потік $\hat{q} = \hat{q}(\mathbf{x}, t)$ на границі $S_q \subset S$, під впливом яких виникають переміщення $\mathbf{U} = \{U_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ зміни температури $\theta(\mathbf{x}, t)$ відносно початкової температури $\theta_0(\mathbf{x})$. Вважаємо, що ці характеристики задовольняють рівняння лінійної термопружності [46, 47]

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt} U_i - \sigma_{ki,k}(\mathbf{U}, \theta) &= \rho f_k, \\ c_\varepsilon \partial_t \theta - \partial_k (\lambda_{ki} \partial_k \theta) + \theta_0 \beta_{ki} E_{ki} (\partial_t \mathbf{U}) &= g \quad \text{в } D \times (0, T], \end{aligned} \quad (3.101)$$

де $\{\sigma_{ik}\}_{i,k=1}^3$ - тензор напружень,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{U}, \theta) := c_{ijkl} E_{km}(\mathbf{U}) - \beta_{ij} \theta = \sigma_{ij}^e(\mathbf{U}) - \beta_{ij} \theta = \sigma_{ij}^e(\mathbf{U}) + \sigma_{ij}^{temp}(\theta), \quad (3.102)$$

а $\{E_{ik}(\mathbf{U})\}_{i,k=1}^3$ – тензор лінійних деформацій,

$$E_{ik}(\mathbf{U}) := \frac{1}{2}(\partial_i U_k + \partial_k U_i) \quad (3.103)$$

відповідно. Властивості матеріалу пружного тіла характеризуються густиною маси $\rho = \rho(\mathbf{x})$, коефіцієнтами пружності $\{c_{ijkl}(\mathbf{x})\}_{i,j,k,m=1}^3$, теплопровідності $\{\lambda_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^3$, температурних напружень $\{\beta_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^3$, які володіють звичайними властивостями симетрії та еліптичності і, нарешті, коефіцієнтом питомої теплоємності при сталих деформаціях $c_\varepsilon = c_\varepsilon(\mathbf{x})$; докладніше див. [46].

Для ізотропного матеріалу коефіцієнти пружності c_{ijkl} повністю визначаються параметрами Ляме λ та μ , і записуються так:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}),$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. Зазвичай λ і μ визначають через модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

За цих умов співвідношення Дюгамеля-Неймана (3.102) набувають вигляду

$$\sigma_{ij}(\mathbf{U}, \theta) := 2\mu + \lambda \delta_{ij} E_{ij}(\mathbf{U}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \theta \delta_{ij}, \quad (3.104)$$

де α_T є коефіцієнтом лінійного температурного розширення.

Доповнимо основні рівняння (3.101)-(3.103) початковими

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \quad \partial_t \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{V}_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } D \quad (3.105)$$

та крайовими умовами вигляду

$$\mathbf{U} = 0 \text{ на } S_u \times [0, T], \quad S_u \subset S, \quad \sigma_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i \text{ на } S_\sigma \times [0, T], \quad S_\sigma = S \setminus S_u, \quad (3.106)$$

$$\theta = 0 \text{ на } S_\theta \times [0, T], \quad -n_i \lambda_{ik} \partial_k \theta = \kappa \theta + \hat{q} \text{ на } S_q \times [0, T], \quad S_q = S \setminus S_\theta, \quad (3.107)$$

де κ – відомий коефіцієнт теплообміну.

Надалі будемо використовувати позначення $\mathbf{v}'(t) := \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}''(t) := \partial_{tt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, визначимо простори допустимих переміщень і температур

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{V} \in [H^1(D)]^3 : \mathbf{V} = 0 \text{ на } S_u\} \text{ та } G = \{\xi \in H^1(D) : \xi = 0 \text{ на } S_\theta\}$$

відповідно, і запишемо варіаційне формулювання початково-крайової задачі термопружності (3.101)-(3.105):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \mathbf{U}_0 \in \mathbf{Y}, \mathbf{V}_0 \in \mathbf{H} := [L^2(D)]^d, \theta_0 \in Z := L^2(D); \\ m(\mathbf{U}''(t), \mathbf{V}) + c(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}) - b(\theta(t), \mathbf{V}) = \langle l_s(t), \mathbf{V} \rangle, \\ \text{знайти } \{\mathbf{U}, \theta\} \in L^2(0, T; \mathbf{Y} \times G) \text{ такі, що} \\ s(\theta'(t), \xi) + \lambda(\theta(t), \xi) + b(\xi, \mathbf{U}'(t)) = \langle l_c(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{U}'(0) - \mathbf{V}_0, \mathbf{V}) = 0, \quad c(\mathbf{U}(0) - \mathbf{U}_0, \mathbf{V}) = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{Y}, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in G, \end{array} \right. \quad (3.108)$$

де

$$\begin{aligned} m(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &:= \iiint_D \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} dD, \quad \langle l_s, \mathbf{V} \rangle := \iiint_D \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dD + \iint_{S_q} \hat{\sigma} \cdot \mathbf{V} dS, \\ c(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &:= \iiint_D \sigma^e(\mathbf{U}) : E(\mathbf{V}) dD, \\ b(\theta, \mathbf{V}) &:= \iiint_D \beta \theta : E(\mathbf{V}) dD \quad \forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbf{Y} \quad \forall \theta \in G, \\ s(\theta, \xi) &:= \iiint_D \theta_0^{-1} c_\varepsilon \theta \xi dD, \quad \lambda(\theta, \xi) := \iiint_D \theta_0^{-1} (\lambda \nabla \theta) \cdot \nabla \xi dD + \iint_{S_q} \kappa \theta \xi dS, \\ \langle l_c, \xi \rangle &:= \iiint_D \theta_0^{-1} g \xi dD - \iint_{S_q} \theta_0^{-1} \hat{q} \xi dS \quad \forall \theta, \xi \in G. \end{aligned} \quad (3.109)$$

3.3.3 Припущення малості товщини.

3.3.3.1. Вважатимемо, що пружне тіло $D \in \mathbb{R}^3$ можна описати у криволінійній ортогональній системі координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, що:

$$D := \{\mathbf{r} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \alpha_3 \in (-\frac{1}{2}h, +\frac{1}{2}h)\},$$

де товщина $h = \text{const}$ є малою відносно інших розмірів тіла, $h/\text{diam}\Omega \ll 1$.

Множину $\Omega = \{\mathbf{r} = (\boldsymbol{\alpha}, 0) \in D\}$ назвемо серединною поверхнею оболонки. Позначимо елементи поверхні Ω та області D оболонки символами $d\Omega$ та dD , відповідно,

$$\begin{aligned} d\Omega &= H_1 H_2 d\boldsymbol{\alpha}, & H_i &= A_i(1 + \alpha_3 k_i), \quad i = 1, 2, \\ dD &= H_1 H_2 H_3 d\boldsymbol{\alpha} d\alpha_3 = d\Omega d\alpha_3, & H_3 &= A_3 \equiv 1, \end{aligned}$$

де $A_i = A_i(\boldsymbol{\alpha})$ та $k_i = k_i(\boldsymbol{\alpha})$ – коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини поверхні, див. рис. 3.7.

На основі кінематичних гіпотез Тимошенка-Міндліна напівдискретизуємо вектор переміщень $\mathbf{U} = U_i \mathbf{r}_{i=1}^3$ за змінною товщини зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні [67]. Іншими словами, розкладемо в ряд Маклорена в околі серединної поверхні оболонки із збереженням лінійних членів:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) + \alpha_3 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}) + O(h^2), \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, \alpha_3) \in D. \quad (3.110)$$

Тут $\mathbf{u} = u_i \boldsymbol{\alpha}_{i=1}^3 = U_i \boldsymbol{\alpha}, 0_{i=1}^3$ – вектор переміщень серединної поверхні, а $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_i \boldsymbol{\alpha}_{i=1}^3$ – вектор кутів поворотів нормалі до серединної поверхні Ω , компоненти якого визначаються наступним чином:

$$\gamma_i(\boldsymbol{\alpha}) = \partial_3 U_i(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv \partial U_i(\boldsymbol{\alpha}, 0) / \partial \alpha_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

За умови, що $\gamma_3(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$, можна говорити, що товщина оболонки може змінювати свою величину під дією силового та теплового навантаження. Характер цих навантажень конкретизуємо нижче.

Аналогічно до переміщень апроксимуємо температуру

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \theta_1(\boldsymbol{\alpha}, t) + \alpha_3 \theta_2(\boldsymbol{\alpha}, t) + O(h^2), \quad \forall(\boldsymbol{\alpha}, \alpha_3) \in D. \quad (3.111)$$

Тепер, нехтуючи величинами порядку $O(h^2)$, напружено-деформований стан оболонки D будемо характеризувати векторами розвинень, переміщень $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = (\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}))$ та температури $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1(\boldsymbol{\alpha}), \theta_2(\boldsymbol{\alpha}))$.

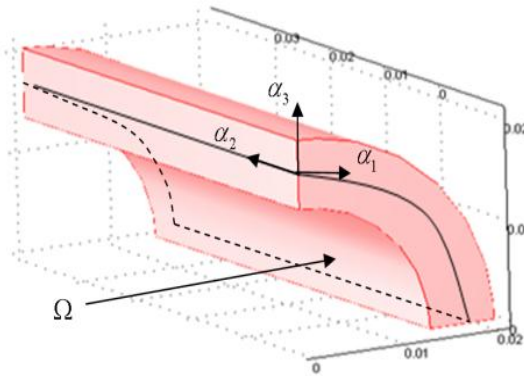


Рисунок 3.7 – Область D та серединна поверхня Ω , описані у криволінійній ортогональній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

3.3.3.2. Надалі розглядатимемо лінійний тензор деформацій $\mathbf{E} = \{E_{ik}(\mathbf{U})\}_{i,k=1}^3$,

$$\begin{aligned} E_{ii}(\mathbf{U}) &:= H_i^{-1}(\partial_i U_i + H_j^{-1} U_j \partial_j H_i + H_k^{-1} U_k \partial_k H_i), \\ E_{ij}(\mathbf{U}) &:= (H_i H_j)^{-1} [H_j^2 \partial_i (H_j^{-1} U_j) + H_i^2 \partial_j (H_i^{-1} U_i)], \end{aligned} \quad (3.112)$$

компоненти якого визначаються циклічною перестановкою індексів $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$ від 1 до 3. Оскільки застосовуємо апроксимацію (3.110), то нехтуємо величинами порядку $O(h^2)$. Тоді рівняння (3.112) у термінах тензорів $\{e_{mn}(\mathbf{s})\}$ та $\{K_{mn}(\mathbf{s})\}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} E_{ii}(\mathbf{U}) &\cong (1 + \alpha_3 k_i)^{-1} [e_{ii}(\mathbf{s}) + \alpha_3 K_{ii}(\mathbf{s})], \quad E_{33} = \gamma_3, \\ E_{ij}(\mathbf{U}) &:= (H_i H_j)^{-1} A_i A_j H_k [e_{ij}(\mathbf{s}) + \alpha_3 K_{ij}(\mathbf{s})], \quad i=1,2, \quad j=1,2,3, \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} e_{ii}(\mathbf{s}) &= (A_1 A_2)^{-1} \{ (2-i)[A_2 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 A_1] + (1-i)[A_1 \partial_2 u_2 + u_1 \partial_1 A_2] + k_i u_3 \}, \\ e_{ij}(\mathbf{s}) &= (A_1 A_2)^{-1} \left\{ (1-i) \frac{\partial_i u_3}{A_i} + (2-i) \left[A_2^2 \partial_i \frac{u_j}{A_j} + A_1^2 \partial_j \frac{u_i}{A_i} \right] \right\} + (2-j)[k_i u_i - \gamma_i], \\ e_{33}(\mathbf{s}) &= \gamma_3, \quad i=1,2, \quad j=2,3, \quad i < j, \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} K_{ii}(\mathbf{s}) &= (A_1 A_2)^{-1} [(1-i) \gamma_1 \partial_1 A_2 + (2-i) \gamma_2 \partial_2 A_1] + \frac{\partial_i \gamma_i}{A_i} + k_i \gamma_3, \\ K_{ij}(\mathbf{s}) &= \frac{(3-j)}{A_1 A_2} \left[A_1 k_1 \partial_2 u_1 + A_2 k_2 \partial_1 u_2 - k_1 \partial_1 A_2 u_2 - k_2 \partial_2 A_1 u_1 + \right. \\ &\quad \left. + A_1^2 \partial_2 \frac{\gamma_1}{A_1} + A_2^2 \partial_1 \frac{\gamma_2}{A_2} \right] + \frac{\partial_i \gamma_j}{A_i}, \quad i=1,2, \quad j=2,3, \quad i < j. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Застосовуючи введені позначення (3.114), (3.115) можна перейти від тензора деформацій до матриці-вектора деформацій оболонки $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) = e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{13}, K_{23}^T$, компоненти якої пов'язані з вектором переміщень наступним чином:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{s},$$

де

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\cdot}{A_1} \right) & \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\cdot}{A_2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & k_2 \\ \frac{1}{2A_1 A_2} \left(k_1 A_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - k_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) & \frac{1}{2A_1 A_2} \left(k_2 A_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - k_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) & 0 & \frac{A_1}{2A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\cdot}{A_1} \right) & \frac{A_2}{2A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\cdot}{A_2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \end{pmatrix}.$$

3.3.3.3. Вважаємо, що оболонка знаходиться під впливом масових сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, поверхневих навантажень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t) = \{\hat{\sigma}_i(\mathbf{r}, t)\}_{i=1}^3$, внутрішніх розподілених джерел тепла $g(\mathbf{r}, t)$ і поверхневого теплового потоку $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, t) = \{\hat{q}_i(\mathbf{r}, t)\}_{i=1}^3$ так, що $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \{f_i(\boldsymbol{\alpha}, t) + \alpha_3 \varphi_i(\boldsymbol{\alpha}, t)\}_{i=1}^3 = \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\alpha}, t) + \alpha_3 \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\alpha}, t)$, $g(\mathbf{r}, t) = g_1(\boldsymbol{\alpha}, t) + \alpha_3 g_2(\boldsymbol{\alpha}, t)$.

Для простоти будемо припускаємо, що

$$S_u = S_\theta = \Sigma := \mathbf{r} \in D: \boldsymbol{\alpha} \in \Gamma = \partial\Omega, \quad |\alpha_3| \leq \frac{1}{2}h,$$

$$S_\sigma = S_q = \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad \Omega_\pm := \mathbf{r} \in \bar{V}: \boldsymbol{\alpha} \in \Omega, \quad \alpha_3 = \pm \frac{1}{2}h, \quad (3.116)$$

$$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \hat{q}^+ \boldsymbol{\alpha}, t & \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_+, \\ \hat{q}^- \boldsymbol{\alpha}, t & \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_-, \end{cases} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^+ \boldsymbol{\alpha}, t = \{\hat{\sigma}_i^+ \boldsymbol{\alpha}, t\}_{i=1}^3 & \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_+, \\ \boldsymbol{\sigma}^- \boldsymbol{\alpha}, t = \{\hat{\sigma}_i^- \boldsymbol{\alpha}, t\}_{i=1}^3 & \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_-. \end{cases}$$

3.3.3.4. Напівдискретизація варіаційної задачі за змінною товщини. Введемо підпростори просторів допустимих переміщень та температур

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h &= \{\mathbf{V} \in [H^1(D)]^3 : \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}) + \alpha_3 \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}); \mathbf{V} = 0 \text{ на } S_u\}, Z = L^2(\Omega), \\ G_h &= \{\xi \in H^1(D) : \xi(\mathbf{r}) = \xi_1(\boldsymbol{\alpha}) + \alpha_3 \xi_2(\boldsymbol{\alpha}); \xi = 0, S_\theta\}, \text{ на } \mathbf{H} = Z^3, \\ W_h &= \{\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^6 : \mathbf{w} = 0 \text{ на } S_u\}, Q_h = \{\xi \in [H^1(\Omega)]^2 : \xi = 0 \text{ на } S_\theta\}. \end{aligned}$$

Тепер для всіх $\theta, \xi \in G_h$ білінійна форма визначена у (3.109) має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\theta, \xi) &= s(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2, \xi_1 + \alpha_3 \xi_2) = \iiint_D \theta_0^{-1} c_\varepsilon (\theta_1 + \alpha_3 \theta_2) (\xi_1 + \alpha_3 \xi_2) dD = \\ &= \theta_0^{-1} c_\varepsilon \iint_\Omega A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} (\theta_1 + \alpha_3 \theta_2) (\xi_1 + \alpha_3 \xi_2) (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3 = \\ &= c_\varepsilon \mathcal{G}_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in Q_h, \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{G}_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) = \theta_0^{-1} \sum_{i,j=1}^2 \iint_\Omega \phi^{i+j-2} \theta_i \xi_j A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}, \quad \phi^n(\boldsymbol{\xi}) := \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n (1 + \alpha_3 k_1(\boldsymbol{\alpha})) (1 + \alpha_3 k_2(\boldsymbol{\alpha})) d\alpha_3.$$

Подібно для іншої білінійної форми з (3.109):

$$\begin{aligned} \lambda(\theta, \xi) &= \lambda(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2, \xi_1 + \alpha_3 \xi_2) = \iiint_D \theta_0^{-1} \lambda \nabla(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2) \cdot \nabla[\xi_1 + \alpha_3 \xi_2] dD + \\ &+ \iint_{S_q} \kappa(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2) (\xi_1 + \alpha_3 \xi_2) dS = \\ &= \iint_\Omega A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \{ \theta_0^{-1} [\lambda \nabla(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2)] \cdot \nabla[\xi_1 + \alpha_3 \xi_2] (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) + \\ &+ \kappa^+ [\theta_1 + \frac{h}{2} \theta_2] [\xi_1 + \frac{h}{2} \xi_2] (1 + \frac{h}{2} k_1) (1 + \frac{h}{2} k_2) + \\ &+ \kappa^- [\theta_1 - \frac{h}{2} \theta_2] [\xi_1 - \frac{h}{2} \xi_2] (1 - \frac{h}{2} k_1) (1 - \frac{h}{2} k_2) \} d\alpha_3 = \\ &= \lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) + \kappa_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi} \in Q_h, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) &= \theta_0^{-1} \iint_\Omega \lambda \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k^{i+j-2}}{A_k^2} \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_k} + ij - i - j + 1 \phi^{i+j-4} \theta_i \xi_j \right] A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}, \\ \gamma_i^n(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n \gamma_i d\alpha_3, \quad \gamma_i(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1 + \alpha_3 k_1(\boldsymbol{\alpha}) (1 + \alpha_3 k_2(\boldsymbol{\alpha}))}{1 + \alpha_3 k_i(\boldsymbol{\alpha})^2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Оскільки ми припускаємо лінійну апроксимацію переміщень та температури, тут й у наступних визначеннях відкидаємо величини порядку $O(h^2)$:

$$\kappa_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) = \theta_0^{-1} \iint_{\Omega} (\kappa^+ + \kappa^-) \theta_1 \xi_1 + (\kappa^+ - \kappa^-) \frac{h}{2} (k_1 + k_2) \theta_1 \xi_1 + (\theta_1 \xi_2 + \theta_2 \xi_1) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}.$$

Тут κ^+, κ^- – коефіцієнти теплообміну на поверхнях Ω_+, Ω_- , відповідно.

Необхідно також з врахуванням (3.111) перетворити лінійний функціонал $\langle l_c, \boldsymbol{\xi} \rangle$, визначений в (3.109):

$$\begin{aligned} \langle l_c, \boldsymbol{\xi} \rangle &= \iiint_D \theta_0^{-1} g \boldsymbol{\xi} dD - \iint_{S_q} \theta_0^{-1} \hat{\mathbf{q}} \boldsymbol{\xi} dS = \\ &= \iint_{\Omega} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \theta_0^{-1} (g_1 + \alpha_3 g_2) (\xi_1 + \alpha_3 \xi_2) (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3 - \\ &- \iint_{\Omega} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \theta_0^{-1} q^+ (\xi_1 + \frac{h}{2} \xi_2) (1 + \frac{h}{2} k_1) (1 + \frac{h}{2} k_2) + \\ &+ q^- (\xi_1 - \frac{h}{2} \xi_2) (1 - \frac{h}{2} k_1) (1 - \frac{h}{2} k_2) d\alpha_3 = \mathcal{G}_{\Omega}(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) - \langle l_{c_{\Omega}}, \boldsymbol{\xi} \rangle, \end{aligned}$$

$$\langle l_{c_{\Omega}}, \boldsymbol{\xi} \rangle = \theta_0^{-1} \iint_{\Omega} [(q^+ + q^-) + (q^+ - q^-) \frac{h}{2} (1 + k_1 + k_2)] \xi_1 + (q^+ - q^-) \frac{h}{2} \xi_2 A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} + O(h^2),$$

$$\forall \mathbf{g}, \boldsymbol{\xi} \in Q_h.$$

Тут q^+, q^- – задані теплові потоки на Ω_+, Ω_- .

Надалі будемо вживати таке:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &\simeq m(\mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_2, \mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2) = \iiint_D \rho(\mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2) dD = \\ &= \rho \sum_{i,j=1}^2 \iint_{\Omega} \phi^{i+j-2} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{v}_j A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = m_{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in W_h. \end{aligned}$$

Тепер напівдискретизуємо функціонал:

$$\begin{aligned}
\langle l_s, \mathbf{V} \rangle &= \iiint_D \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dD - \iint_{S_\sigma} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{V} dS = \\
&= \iint_{\Omega} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \sum_{i=1}^3 \int_{-h/2}^{h/2} \rho [\mathbf{f}_1 + \alpha_3 \mathbf{f}_2] \cdot [\mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2] (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3 - \\
&\quad - \iint_{\Omega_+} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^+ \cdot [\mathbf{v}_1 + \frac{h}{2} \mathbf{v}_2] (1 + \frac{h}{2} k_1) (1 + \frac{h}{2} k_2) d\alpha_3 - \\
&\quad - \iint_{\Omega_-} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^- \cdot [\mathbf{v}_1 - \frac{h}{2} \mathbf{v}_2] (1 - \frac{h}{2} k_1) (1 - \frac{h}{2} k_2) d\alpha_3 = \\
&= m_{\Omega}(\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle l_{s\Omega}, \mathbf{v} \rangle, \\
\langle l_{s\Omega}, \mathbf{v} \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 \iint_{\Omega} \{ [(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^-) + (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^-) \frac{h}{2} (1 + k_1 + k_2)] \mathbf{v}_1 + \\
&\quad + (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^-) \frac{h}{2} \mathbf{v}_2 \} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} + O(h^2), \quad \forall \mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in W_h.
\end{aligned}$$

Перед тим, як інтегрувати білінійну форму $c(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ за змінною товщини, введемо такі інтегральні характеристики тензора напружень [47]:

$$\begin{aligned}
N_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{temp}] (1 + \alpha_3 k_{3-i}) d\alpha_3 = \\
&= N_{ij}^e - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T h \theta_1 \delta_{ij} = N_{ij}^e + N_{ij}^{temp}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \\
N_{33} &= N_{33}^e + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T h \theta_1 = N_{33}^e + N_{33}^{temp},
\end{aligned} \tag{3.117}$$

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{temp}] (1 + \alpha_3 k_{3-i}) \alpha_3 d\alpha_3 = M_{ij}^e - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{h^3}{12} \theta_2 \delta_{ij} = M_{ij}^e + M_{ij}^{temp}.$$

Тоді компоненти тензора напружень $\{\sigma_{ik}\}_{i,k=1}^3$ обчислюються таким чином:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{1}{h} \left[N_{ij} + \alpha_3 \frac{12}{h^2} M_{ij} \right], \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \\
\sigma_{33} &= \frac{1}{h} \left[N_{33} + \alpha_3 \frac{6\nu}{h^2} (M_{11} + M_{22}) \right].
\end{aligned}$$

Останні формули отримано із співвідношень (3.104) та (3.113) із врахуванням (3.114), (3.115) та (3.117).

Використовуючи з точністю до $O(h^2)$ рівність крутних моментів

$$H = M_{12} = M_{21}$$

та симетричне зусилля Новожилова [110]

$$S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12},$$

зберемо визначені у (3.117) внутрішні зусилля і моменти у вектор $\Pi = N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23}$ та покажемо його зв'язок із вектором деформацій оболонки $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s})$ і вектором температури $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1(\boldsymbol{\alpha}), \theta_2(\boldsymbol{\alpha}))$:

$$\Pi = \Pi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) - \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) = \Pi^e(\mathbf{s}) - \Pi^{temp}(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.118)$$

де \mathbf{B} – симетрична матриця пружних констант, розмірності 11×11 , ненульові компоненти якої обчислюються згідно формул:

$$\begin{aligned} B^{11} = B^{22} = B^{33} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} h, & B^{12} = B^{13} = B^{23} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} h, \\ B^{44} = B^{55} = B^{66} &= \frac{E}{(1+\nu)} h, & B^{77} = B^{88} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{h^3}{12}, \\ B^{78} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{h^3}{12}, & B^{99} = B^{1010} = B^{1111} &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{h^3}{12}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

а вектор $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta})$ визначено таким чином:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) = \Phi^i(\boldsymbol{\theta}) \Big|_{i=1}^{11} = \left\{ h\theta_1, h\theta_1, h\theta_1, 0, 0, 0, \frac{h^3}{12}\theta_2, \frac{h^3}{12}\theta_2, 0, 0, 0 \right\}^T.$$

Перетворення білінійної форми $c(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ приводить її до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \iiint_D \sigma^e(\mathbf{U}) : E(\mathbf{V}) dD \simeq \iint_{\Omega} \Pi^e(\mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_2) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = \\ &= \iint_{\Omega} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = c_{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{v} \in W_h. \end{aligned}$$

Тепер інтегруємо білінійну форму $b(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{V})$ за змінною товщини:

$$\begin{aligned}
b(\theta, \mathbf{V}) &= \iiint_D \sigma^T(\mathbf{U}) : E(\mathbf{V}) dD = \iiint_D \beta \xi E(\mathbf{V}) dD = \iint_{\Omega} \Pi^{temp}(\mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_2) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = \\
&\cong \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \iint_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{\theta}) \cdot (C \mathbf{v}) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = b_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}), \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in Q_h, \quad \forall \mathbf{v} \in W_h.
\end{aligned}$$

Підсумовуючи наші результати стосовно напівдискретизації за змінною товщини приходимо до такого варіаційного формулювання задачі термопружності тонких оболонок:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{задано } \mathbf{s}_0, \mathbf{v}_0 \in W_h, \quad \boldsymbol{\theta}_0 \in Z^2; \\
\text{знайти } \mathbf{s}(t), \boldsymbol{\theta}(t) \in L^2(0, T; W_h \times Q_h) \text{ такі, що:} \\
m_{\Omega}(\mathbf{s}''(t), \mathbf{v}) + c_{\Omega}(\mathbf{s}(t), \mathbf{v}) - b_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{v}) = m_{\Omega}(\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) - \langle l_{s_{\Omega}}(t), \mathbf{v} \rangle, \\
c_{\varepsilon} \mathcal{G}_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}'(t), \boldsymbol{\xi}) + \lambda_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) + \kappa_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) + \\
\quad + b_{\Omega}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}'(t)) = \mathcal{G}_{\Omega}(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\xi}) - \langle l_{c_{\Omega}}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\
m_{\Omega}(\mathbf{s}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c_{\Omega}(\mathbf{s}(0) - \mathbf{s}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in W_h, \\
\mathcal{G}_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in Q_h.
\end{array} \right. \quad (3.120)$$

3.3.4 Квazістатична задача термопружності оболонок

Як перший крок у дослідженні щойно побудованої задачі (3.120) розглянемо практично важливий випадок настільки малих швидкостей переміщень $\mathbf{s}'(t)$, що ними, а також прискореннями $\mathbf{s}''(t)$, можна знехтувати. В результаті задача (3.120) поділяється на дві послідовно розв'язувані задачі:

1) теплопровідності тонких оболонок:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{задано } \boldsymbol{\theta}_0 \in Z^2; \text{ знайти } \boldsymbol{\theta} \in L^2(0, T; G_h) \text{ такий, що:} \\
c_{\varepsilon} \mathcal{G}_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}'(t), \boldsymbol{\xi}) + \lambda_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{G}_{\Omega}(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\xi}) - \langle l_{c_{\Omega}}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \quad \forall t \in (0, T] \\
\mathcal{G}_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in W_h, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in Q_h;
\end{array} \right. \quad (3.121)$$

2) статички тонких оболонок:

$$\begin{cases} \text{задано } \boldsymbol{\theta} = \theta_1, \theta_2^T \in Z^2, \langle l, \mathbf{v} \rangle \in W'_h, \\ \text{знайти } \mathbf{s} \in W_h \text{ такий, що} \\ c_\Omega(\mathbf{s}(t), \mathbf{v}) = \langle l(t), \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in W_h \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in G_h, \end{cases} \quad (3.122)$$

де W'_h - простір спряжений до W_h , а змінна часу t відіграє роль параметру. Тут білінійна форма $c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v})$ та лінійний функціонал визначені у такий спосіб:

$$c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \iint_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) A_1 A_2 d\alpha = \iint_{\Omega} (\mathbf{C}\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} \mathbf{C}\mathbf{v} A_1 A_2 d\alpha, \quad (3.123)$$

$$\langle l(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{v} \rangle = b_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) + m_\Omega(\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle l_{s_\Omega}, \mathbf{v} \rangle. \quad (3.124)$$

Перепишемо лінійний функціонал (3.124) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \langle l(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{v} \rangle &= \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \iint_{\Omega} (\mathbf{C}\mathbf{v}) \cdot \Phi(\boldsymbol{\theta}) A_1 A_2 d\alpha + \iint_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_2 A_1 A_2 d\alpha, \\ &\quad \forall \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \in W_h, \end{aligned} \quad (3.125)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_i \mathbf{e}_{i=1}^3, \quad P_i = [(\sigma_i^+ + \sigma_i^-) + (\sigma_i^+ + \sigma_i^-) \frac{h}{2} (1 + k_1 + k_2)] + \phi^0 f_i, \\ \mathbf{m} &= m_i \mathbf{e}_{i=1}^3, \quad m_i = (\sigma_i^+ + \sigma_i^-) \frac{h}{2} + \phi^1 \phi_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Також ми припускаємо, що дані задачі (3.122) задовольняють умови регулярності:

$$\mathbf{P} = P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3 \in Z^6, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta_1, \theta_2^T \in Z^2, \quad (3.126)$$

Варіаційна задача теплопровідності (3.121) досить повно була досліджена авторами [78, 107] стосовно коректності формулювання та числових методів її розв'язування. Тому припустивши, що задача (3.121) має єдиний розв'язок $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(t)$, обмежимося далі аналізом задачі статики (3.122).

3.3.4.1 Еліптичність білінійної форми

Ключовим моментом встановлення коректності варіаційної задачі є W_h – еліптичність білінійної форми варіаційного рівняння (3.122).

Далі скористаємось результатом праці [47], який формулюємо таким чином:

Теорема 3.4 про W_h – еліптичність білінійної форми $c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v})$.

Нехай серединна поверхня Ω ізотропної оболонки утворює обмежену область точок простору \mathbb{R}^2 з неперервною за Ліпшицем межею Γ . Тоді

(1) матриця \mathbf{B} пружних сталей (3.119) додатно визначена;

(2) симетрична білінійна форма $c_\Omega(\cdot, \cdot): W_h \times W_h \rightarrow \mathbb{R}$,

$$c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \iint_{\Omega} (\mathbf{C}\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{v} \, d\Omega \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{v} \in W_h,$$

неперервна та W_h – еліптична, тобто,

$$|c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{s}\|_{[H^1(\Omega)]^6} \|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^6}, \quad M = \text{const} > 0,$$

$$|c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{s})| \geq \omega \|\mathbf{s}\|_{[H^1(\Omega)]^6}^2, \quad \omega = \text{const} > 0, \quad \forall \mathbf{s} \in W_h;$$

(3) білінійна форма (3.123) визначає скалярний добуток на просторі кінематично допустимих векторів зміщень W_h і норму

$$|\mathbf{v}|_{W_h} = \sqrt{c_\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{v})}, \quad \forall \mathbf{v} \in W_h, \quad (3.127)$$

еквівалентну нормі $\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^6}$.

Доведення. З огляду на припущення теореми 3.4 праці [47] достатньо показати, що симетрична матриця пружних характеристик \mathbf{B}

$$\begin{aligned}
C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Ax_1 + Dx_2 \\ Dx_1 + Ax_2 \end{pmatrix} = \frac{h^2}{12(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu)x_1 + \nu x_2 \\ \nu x_1 + (1-\nu)x_2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{h^2}{12(1-2\nu)} \left[(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2) + 2\nu x_1 x_2 \right] = \frac{h^2}{12(1-2\nu)} (1-2\nu) [x_1^2 + x_2^2] + \nu (x_1 + x_2)^2 \geq \\
&\geq \frac{h^2}{12} (x_1^2 + x_2^2).
\end{aligned}$$

Збираючи одержані вище оцінки приходимо до висновку, що

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} &\geq \frac{E}{(1+\nu)} h \left[y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \frac{h^2}{12} (x_1^2 + x_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \right] \geq \\
&\geq \frac{E}{(1+\nu)} \frac{h^3}{12} \left[y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \right] = \\
&= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{h^3}{12} \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^{11}}^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{11}.
\end{aligned}$$

Таким чином, симетрична матриця \mathbf{B} є додатно визначеною. Решта тверджень є наслідком теореми 3.4 з [47]. \blacktriangle

3.3.4.2 Коректність квазістатичної задачі термопружності

Підсумовуючи результати, отримані у 4.1, можна встановити основний результат стосовно варіаційної задачі (3.122).

Теорема 3.5 про коректність варіаційної задачі квазістатичної термопружності.

Припустимо, що дані задачі (3.120) задовольняють умови регулярності (3.126) і виконуються умови теореми 3.4.

Тоді варіаційна задача термопружності оболонок (3.122) має єдиний розв'язок $\mathbf{s} = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T \in W_h$ такий, що

$$\|\mathbf{s}\|_{W_h} \leq \omega^{-1} \|l(\boldsymbol{\theta})\|_* = \omega^{-1} C \left\{ \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} + \left[\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Тут значення сталих $C > 0$ не залежать від величин, що нас цікавлять.

Доведення цього твердження базується на теоремі Лакса-Мільграма-Вишика про коректність абстрактних варіаційних задач [46]. Тому з огляду на щойно доведену теорему 3.4, яка встановлює неперервність та W_h -еліптичність білінійної форми $c_{\Omega}(\cdot, \cdot) : W_h \times W_h \rightarrow \mathbb{R}$, лишається показати обмеженість (лінійного функціоналу (3.124). З огляду на умови (3.126) маємо:

$$\begin{aligned} |\langle l(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{s} \rangle| &\leq |b_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})| + |m_{\Omega}(\mathbf{f}, \mathbf{s})| + |\langle l_{s_{\Omega}}, \mathbf{s} \rangle| \leq \\ &\leq C_1 \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} \|\mathbf{v}\|_{W_h} + \|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}} \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}} + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}} \|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{H}} \leq \\ &\leq C_1 \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} \|\mathbf{v}\|_{W_h} + \left(\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= C_1 \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} \|\mathbf{v}\|_{W_h} + C_2 \left(\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{W_h} \leq \\ &\leq \left\{ C_1 \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} + C_2 \left[\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \|\mathbf{v}\|_{W_h} = \\ &= \|l(\boldsymbol{\theta})\|_* \|\mathbf{v}\|_{W_h} \quad \forall \mathbf{v} \in W_h, \end{aligned}$$

де сталі $C_1, C_2 > 0$ не залежать від величин, що нас цікавлять. Таким чином задача (3.122) є коректно сформульована, іншими словами, має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від даних задачі. \blacktriangle

Встановлення коректності варіаційної задачі квазістатичної термопружності для тонких оболонок (3.122) підтверджує обґрунтованість розвиненої теорії для застосування та вказує на можливість використання проєкційно-сіткових методів розв'язування даної проблеми, а саме методу скінченних елементів (МСЕ).

3.3.5 Числовий експеримент

Розглянемо задачу про визначення термопружного стану смуги-пластини довжини $L=1.0$ м, навантаженої рівномірним тиском $P_3 = -1 \cdot 10^6$ Н/м², та знаходиться під впливом температурного поля, яке описують усереднені температурні характеристики $T_1 = e^{-\alpha_1}$ та $T_2 = 0$. Властивості матеріалу оболонки визначають наступні параметри: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, модуль Юнга $E = 0.8001 \cdot 10^{11}$ Н/м², коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha_T = 0.23 \cdot 10^{-4}$ 1/град. Лівий край пластини $\alpha_1 = 0$ жорстко защемлений, а $\alpha_1 = L$ – вільний.

Отримали наближені розв'язки: компоненти вектора переміщень $\mathbf{s} = u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3^T$ та використали їх для обчислення напружень вздовж смуги-пластини. Оскільки це одновимірна задача (серединна поверхня $\Omega = [0, L]$ визначається тільки змінною α_1), невідомими є такі компоненти вектора переміщень \mathbf{s} : $u_1, u_3, \gamma_1, \gamma_3$, за допомогою яких визначаються напруження σ_{11}, σ_{13} . Значення вищезазначених розв'язків, отримані із застосуванням ізопараметричних апроксимацій МСЕ, проаналізовано на різних сітках розбиття поверхні Ω .

Табл. 3.1 містить максимальні та мінімальні швидкості збіжності наближених переміщень та напружень. У стовпцях таблиці із заголовками вигляду $\mathbf{p}_{8,16,32}$ наведено значення порядків збіжності, обчислених у вузлах скінченних елементів $x_i \in [0, L]$ за формулою:

$$\mathbf{p}_{h,h/2,h/4} = \log_2 \frac{u_h - u_{h/2}}{u_{h/2} - u_{h/4}}. \quad (3.130)$$

Під $h, h/2, h/4$ розглядаємо такі діаметри сітки розбиття, кожний наступний з яких менший від попереднього вдвічі, починаючи із розбиття на 8

елементів, наступні на 16, 32, і т.д. елементів по довжині смуги-пластини. Стовпці \mathbf{p}_n визначають мінімальні та максимальні швидкості збіжності таких норм похибок знайдених розв'язків

$$\|u_h - u_{h/2}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [u_h(x_i) - u_{h/2}(x_i)]^2}. \quad (3.131)$$

Як видно із табл. 3.1 швидкість збіжності за визначенням (3.130) набуває значень від мінімального 1.05 (для σ_{11}^+) до максимального 7.68 (для γ_3). Тире у таблиці відображають відсутність зміни розв'язків за наступного згущення сітки. Серед обчислених швидкостей збіжності норм похибок (3.131) максимальна досягається для $\gamma_3: \mathbf{p}_n = 5.17$. У останній колонці маємо максимальні відносні похибки норм розв'язків. Знову ж найбільше значення $\max \delta = 5.73\%$ для γ_3 .

Таблиця 3.1 – Аналіз апроксимацій МСЕ для смуги-пластини

Переміщення / напруження	Швидкості збіжності								$\max \left(\frac{\ u_h - u_{h/2}\ }{\ u_h\ } \cdot 100\% \right)$
	$\mathbf{p}_{8,16,32}$		$\mathbf{p}_{16,32,64}$		$\mathbf{p}_{32,64,128}$		$\mathbf{p}_n = \log_2 \frac{\ u_h - u_{h/2}\ }{\ u_{h/2} - u_{h/4}\ }$		
	min	max	min	max	min	max	min	max	
$u_1 \times \frac{E}{P_3 L}$	1.39	3.23	2.19	2.66	3.34	3.50	1.79	2.53	0.43%
$u_3 \times \frac{E}{P_3 h}$	3.41	3.43	3.82	3.82	3.95	3.95	3.39	3.81	0.28%
$\gamma_3 \times \frac{2E}{P_3 h}$	1.06	5.70	2.43	7.68	3.79	5.15	1.50	5.17	5.73%
σ_{11}^+	2.30	2.30	1.05	2.64	—	—	2.24	2.32	2.21%
σ_{13}^+	1.43	6.82	—	4.99	—	—	2.29	2.67	2.14%

Отже, викладена тут методика дає результати з очікуваними швидкостями збіжності та за досить малих відносних похибок.

3.3.6 Висновки

У п.3.3.3 сформульовано початково-крайові задачі загальної термопружності. Математична модель заснована на лінійній теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення. Фізичні співвідношення відображають гіпотезу Дюгамеля-Неймана. Деформаційні співвідношення визначають лінійний розподіл тензора кутів поворотів за товщиною оболонки. Еволюція температурного поля під впливом внутрішніх і поверхневих розподілених джерел тепла відбувається шляхом відокремлення незалежної змінної товщини теплопровідного шару з використанням лінійної апроксимації температури. Також сформульована відповідна варіаційна задача. Невідомими варіаційної задачі квазістатичної термопружності оболонок, податливих на зсув та стиснення, виступають вектор пружного зміщення точок серединної поверхні і вектор кутів повороту нормалі серединної поверхні.

Основним результатом цієї роботи є умови коректності варіаційної задачі квазістатичної термопружності оболонок, податливих на зсув та стиснення, що створює сприятливі умови для вибору чисельних схем розв'язування. Окрім того, перехід до варіаційного формулювання дозволяє встановити умови гладкості сили навантаження, що важливо для інженерної практики.

Проведені дослідження знайдуть свій розвиток у розширенні класу задач, які розглядаються у даній праці. Саме застосування розробленої методики до задачі динамічної термопружності та дослідження умов коректності відповідної варіаційної задачі, а також дослідження властивостей апроксимацій методу скінченних елементів та співставлення із даними числових експериментів

дозволить узагальнити та розширити висвітлений тут підхід до розв'язування еволюційних задач термопружності.

3.4 Апроксимація початково-крайових задач термопружності

Розглянуто процес поширення тепла в заготовці під час фрикційного зміцнення зубчастим інструментом прямокутної деталі. Побудовано початково-крайову та відповідну їй варіаційну задачу для рівняння теплопровідності з мішаними крайовими умовами. В процесі дослідження вдалося довести коректність останнього та отримано апріорні оцінки розв'язуваної задачі. Побудовано та проаналізовано однокрокову рекурентну схему (ОРС) інтегрування в часі задачі про поширення тепла у оброблюваній заготовці під час її фрикційного зміцнення зубчастим інструментом. Опісля було проаналізовано характеристики збіжності отриманих апроксимацій та застосовано обчислювальну схему до практичної задачі.

3.4.1 Вступ

В процесі експлуатації машин важливу роль відіграють їх складові частини. Вони контактують між собою, з іншими об'єктами та із зовнішнім середовищем. Найбільше навантаження у цих процесах несуть поверхневі шари деталей, фізико-хімічні характеристики яких прямо пов'язані з надійністю машин [11].

Процес поверхневого зміцнення деталей дозволяє збільшувати їх термін експлуатації, показники зносостійкості та міцності. Одним з його видів є зміцнення з використанням висококонцентрованих джерел енергії [114]. Висококонцентроване джерело створюється в зоні контакту між інструментом та заготовкою від тертя двох притиснених робочих поверхонь. При контакті із

зубчастим диском в цій зоні відбувається значне збільшення температури та, відповідно, охолодження при його відсутності [92]. В результаті фрикційного зміцнення деталі, прогрітої над критичну температуру, утворюється білий шар з якісно кращими фізико-хімічними властивостями.

В даній статті розглядається задача теплопровідності [5], з огляду на те, що основним показником, який нас цікавить є температура деталі. Це дозволить нам апробувати загальний підхід, який буде застосовано при врахуванні взаємодії термомеханічних полів [11].

Задачі поширення тепла в технологічних процесах, пов'язаних зі зміцненням, є актуальними та широко розглядуваними у технічній літературі [40, 41].

Особливістю нашої задачі є зубчастість інструменту, яка породжує режим тертя, тобто джерела теплової енергії. Ця особливість вносить свої корективи у формулювання початково-крайової задачі та вимагає додаткового теоретичного обґрунтування при доведенні коректності відповідної варіаційної задачі.

У підрозділі 3.4 формулюється початково-крайову задачу теплопровідності для деталі [5]. Використання крайових умов на теплообмін в динамічній зоні контакту та теплообміну із зовнішнім середовищем на решті границі дозволяє відобразити основні джерела притоку та відтоку теплової енергії з цих тіл. Далі відбувається побудова відповідної варіаційної задачі, з подальшою просторовою напівдискретизацією Гальоркіна та формуванням відповідної задачі Коші. Виходячи з властивостей складових частин варіаційного рівняння, показується однозначність розв'язку задачі Коші. Наступним кроком ми будемо енергетичне рівняння та виводимо деякі апріорні оцінки, базуючись на оцінці згори лінійного функціоналу. Як наслідок з цього, отримується коректність напівдискретної задачі. Після цього, базуючись на обмеженості послідовності напівдискретних апроксимацій та апріорних оцінках лінійного функціоналу, показується коректність варіаційного формулювання сформульованої на початку початково-крайової задачі.

Як останній крок побудови числової схеми, дискретизується вже напівдискретна задача в просторі за часом; доводиться збіжність та стабільність результуючої однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі.

В результаті отриману схему було реалізовано в середовищі програми FreeFEM++ [31] з використанням квадратичних апроксимацій. Перевірено показники збіжності задачі на найпростішому варіанті даної задачі, який враховує період контакту та безконтактний період. Опісля схему було застосовано до задачі зміцнення заготовки. Проаналізовано отримані результати та приведено графічні ілюстрації розв'язку.

3.4.2 Постановка задачі

Нехай деталь займає обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) з неперервною за Ліпшицем границею Γ . Будемо позначати через $x = (x_1, \dots, x_d)$ довільну точку замикання $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ та t – довільний момент часу з проміжку $[0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Будемо припускати, що внаслідок дії внутрішніх джерел тепла $f = \{f_i(x, t)\}_{i=1}^d$ та поверхневих теплових потоків $\hat{q} = \hat{q}(x, t)$ в області відбуваються зміни температури $u(x, t)$ (відносно її початкового розподілу), які задовольняють рівняння теплопровідності вигляду

$$\rho c_v \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla u) = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (3.132)$$

де $\rho = \rho(x) > 0$ - густина маси деталі, $c_v = c_v(x) > 0$ - її коефіцієнт теплоємності і $\lambda = \{\lambda_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d$ - матриця коефіцієнтів теплопровідності, яка є симетричною і додатно визначеною, іншими словами,

$$\begin{cases} \lambda_{km}(x) = \lambda_{mk}(x), \\ \lambda_{km}(x) \xi_k \xi_m \geq \lambda_0 \xi_k \xi_m, \quad \lambda_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_k \in \mathbb{R} \text{ в } \Omega. \end{cases} \quad (3.133)$$

Рівняння (3.132) доповнені комбінацією крайових умов на тепловий потік для контакту з шліфувальним диском і звичайними умовами теплообміну з зовнішнім середовищем на границі :

$$-\lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial n_j} = \alpha(u - \hat{u})(1 - \delta) + \hat{q}\delta \quad \Gamma \times [0, T], \quad (3.134)$$

де $\hat{u} = \hat{u}(x, t)$ - температура зовнішнього середовища, $\alpha = \alpha(x, t)$ - характеризує тепловіддачу середовища та $n = n_i \mathbf{e}_i$, $n_i = \cos n, x_i$ - вектор, i , відповідно, компоненти вектора зовнішньої нормалі. Також слід зауважити, що функція дельта приймає два значення: 1 - у відповідній зоні при наявності контакту, та 0 - у всіх інших випадках.

Припускається, що в початковий момент часу температура в області розподілена згідно $u_0 = u_0(x)$.

Таким чином, отримуємо наступну початково-крайову задачу теплопровідності:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } \lambda = \{\lambda_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d, \quad \rho = \rho(x), \quad c_v = c_v(x), \\ u_0 = u_0(x), \quad \alpha = \alpha(x, t), \quad \hat{q} = \hat{q}(x, t), \quad f = f(x, t), \\ \delta = \delta(x, t), \quad \hat{u} = \hat{u}(x, t); \\ \text{знайти розподіл температури } u = u(x, t) \text{ такий, що} \end{array} \right. \quad (3.135)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_v \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla u) = \rho c_v f \quad \text{в } \Omega \times [0, T], \\ -n \cdot (\lambda \nabla u) = \alpha(u - \hat{u})(1 - \delta) + \hat{q}\delta \text{ на } \Gamma \times [0, T], \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в } \Omega. \end{array} \right.$$

Крім цього, будемо вважати, що для даних початково-крайової задачі (3.135) виконуються такі умови:

$$\begin{cases} \rho, c_v, \lambda_{ij} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad u_0 \in L^2(\Omega), \\ f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \alpha, \hat{q} \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)), \\ \hat{u} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)). \end{cases} \quad (3.136)$$

3.4.3 Варіаційне формулювання

Введемо простори допустимих температур

$$V = H^1(\Omega), \quad (3.137)$$

спряжений до нього простір V' та простори $H = L^2(\Omega)$, $Z = L^2(\Gamma)$.

Далі будемо використовувати наступні позначення

$$\begin{aligned} u|_t &= u(x, t) && - \text{функція } x \rightarrow u(x, t), \\ u'|_t &= \partial u / \partial t && - \text{функція } x \rightarrow \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Помножимо рівняння теплопровідності із задачі (3.135) на довільну функцію $v \in V$ і результат проінтегруємо за областю Ω . Використавши формулу Гріна та крайову умову цієї задачі, знайдемо, що

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \rho c_v u'(t) - \nabla \cdot [\lambda \nabla u(t)] - f(t) v dx \\ &= \int_{\Omega} \rho c_v u'(t) v dx + \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot [\lambda \nabla u(t)] dx - \int_{\Omega} f(t) v dx + \int_{\Gamma} \alpha(t) u(t) [1 - \delta(t)] v d\gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \alpha(t) \hat{u}(t) [1 - \delta(t)] v d\gamma - \int_{\Gamma} \hat{q}(t) \delta(t) v d\gamma \quad \forall t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Наступним кроком введемо білінійні форми

$$s(u, v) = \int_{\Omega} \rho c_v u v dx \quad \forall u, v \in H, \quad (3.139)$$

$$\lambda(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla v) \cdot [\lambda \nabla u(t)] dx + \int_{\Gamma} \alpha(t) u(t) [1 - \delta(t)] v d\gamma \quad \forall u, v \in V, \quad (3.140)$$

та лінійний функціонал

$$\langle l, v \rangle = \int_{\Omega} \rho c_v f v dx + \int_{\Gamma} [\alpha \hat{u}(1 - \delta) + \hat{q} \delta] v d\gamma \quad \forall v \in V. \quad (3.141)$$

Тоді задачу (3.135) можна представити через таке варіаційне формулювання:

$$\begin{cases} \text{знайти розподіл теплоти } u(x, t) \text{ такий, що} \\ s(u'(t), v) + \lambda(u(t), v) = \langle l(t), v \rangle \quad \forall t \in 0; T, \\ s(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.142)$$

3.4.4 Властивості складових частин варіаційного рівняння

З визначення білінійних форм випливає наступне твердження (див. напр. [129]):

$$\begin{cases} \text{симетрична неперервна білінійна форма } s(\cdot, \cdot) \text{ з (2.3)} \\ \text{є } H\text{-еліптичною і породжує норму } \|u\|_H = s^{\frac{1}{2}} u, u \quad \forall u \in H, \\ \text{еквівалентну нормі } \|\cdot\|_{0, \Omega}. \end{cases} \quad (3.143)$$

Для другої білінійної форми ці твердження не є такими очевидними та потребують окремих доведень.

Теорема 3.6 про неперервність білінійної форми.

Визначена у (3.140) білінійна форма $\lambda(\cdot, \cdot)$ є неперервна, при цьому правильна оцінка згори

$$|\lambda(u, v)| \leq \left[\|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} C \right] \|u\|_V \|v\|_V.$$

Доведення. З огляду на те, що білінійна форма (3.140) діє з добутку лінійних просторів, для доведення неперервності слід показати її обмеженість. Для цього використаємо нерівності Коші-Буняковського-Шварца і теорему про слід функції з простору $H^1(\Omega)$ [46] для оцінки другого доданку відповідно.

$$\begin{aligned}
|\lambda(u, v)| &\leq |\lambda_1(u, v)| + |\lambda_2(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| + \left| \int_{\Gamma} \alpha u (1 - \delta) v \, d\gamma \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |\lambda \nabla u| \cdot |\nabla v| \, dx + \int_{\Gamma} |\alpha u v| \, d\gamma \leq \left\{ \int_{\Omega} |\lambda \nabla u|^2 \, dx \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left\{ \int_{\Gamma} |\alpha u|^2 |v|^2 \, d\gamma \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|\lambda \nabla u\|_H \|\nabla v\|_H + \|\alpha u\|_Z \|v\|_Z \leq \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_V \|v\|_V \\
&\quad + \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} C \|u\|_V \|v\|_V \leq \left[\|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} C \right] \|u\|_V \|v\|_V.
\end{aligned}$$

Це означає, що білінійна форма $\lambda(\cdot, \cdot)$ обмежена в просторі V , тобто є неперервною. \blacktriangle

Теорема 3.7 про V -еліптичність білінійної форми.

Визначена у (3.140) білінійна форма $\lambda(\cdot, \cdot)$ - V -еліптична і для неї справджується така нерівність:

$$\lambda(u, u) \geq \frac{\min\{1, m_0, C_{PF}\}}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Доведення. Використовуючи нерівності Коші-Буняковського-Шварца, Коші та Фрідрікса, ми отримуємо наступну оцінку

$$\begin{aligned}
\lambda(u, u) &\geq \lambda_{\max} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma} \alpha u^2 (1 - \delta) \, d\gamma \\
&\geq \min\{\lambda_{\max}, \alpha_0\} \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma} u^2 \, d\gamma \right] \\
&\geq \min\{\lambda_{\max}, \alpha_0\} \left[\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma} u^2 \, d\gamma \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Gamma} u^2 \, d\gamma \right) \right] \\
&\geq m_0 \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{C_{PF}}{2} \int_{\Omega} u^2 \, dx \right] \geq \frac{\min\{1, m_0, C_{PF}\}}{2} \|u\|_V^2. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Таким чином, ми довели наступне

Твердження 3.1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{симетрична неперервна білінійна форма } \lambda(\cdot, \cdot) \text{ з (2.4)} \\ \text{є } V\text{-еліптичною і породжує норму } \|u\|_V = \lambda^{\frac{1}{2}}(u, u) \quad \forall u \in V, \text{ (3.144)} \\ \text{еквівалентну нормі } \|\cdot\|_{1, \Omega}. \end{array} \right.$$

Тепер оцінимо згори лінійний функціонал (3.141). Розпочнемо зі звичайних оцінок за допомогою нерівності Коші-Бунаковського-Шварца

$$\begin{aligned}
| \langle l, v \rangle | &= \left| \int_{\Omega} \rho c_v f v dx + \int_{\Gamma} \alpha \hat{u} (1 - \delta) v d\gamma + \int_{\Gamma} \hat{q} \delta v d\gamma \right| \\
&= \left| \rho c_v (f, v)_H + \alpha (1 - \delta) (\hat{u}, v)_Z + \delta (\hat{q}, v)_Z \right| \\
&\leq \max_{\Omega} \{ \rho c_v \} |(f, v)_H| + \max_{\Gamma} \{ (1 - \delta) \alpha \} |(\hat{u}, v)_Z| + \max_{\Gamma} \{ \delta \} |(\hat{q}, v)_Z| \\
&\leq \max_{\Omega} \{ \rho c_v, \alpha, 1 \} (|(f, v)_H| + |(\hat{u}, v)_Z| + |(\hat{q}, v)_Z|) \\
&\leq \max_{\Omega} \{ \rho c_v, \alpha, 1 \} \left[\|f\|_H \|v\|_H + \|\hat{u}\|_Z \|v\|_Z + \|\hat{q}\|_Z \|v\|_Z \right], \quad \forall v \in V.
\end{aligned}$$

Використавши теорему про слід функції з $H^1(\Omega)$ на межі Ω , отримаємо наступну теорему.

Теорема 3.8 про неперервність лінійного функціоналу.

Визначений у (3.141) лінійний функціонал $\langle l, v \rangle$ є неперервним і для нього виконується наступна оцінка згори

$$| \langle l, v \rangle | \leq z_0 \|v\|_H \left[\|f\|_H + \|\hat{u}\|_Z + \|\hat{q}\|_Z \right] \quad \forall v \in V,$$

де $z_0 = \max_{\Omega} \{ \rho c_v, \alpha, 1 \}$.

3.4.5 Напівдискретизація Гальоркіна

Нехай послідовність скінченновимірних підпросторів V_h з простору V така, що

$$\bigcup_{h>0} V_h \text{ щільно вкладена в } V, \dim V_h = N(h) = N \xrightarrow{h \rightarrow 0} \infty. \quad (3.145)$$

Тоді для будь-якого $h > 0$ отримуємо таку форму напівдискретної апроксимації (Гальоркіна по просторових змінних) розв'язку варіаційної задачі теплопровідності (3.142):

$$\begin{cases} \text{Задано } u_0 \in V, \\ \text{Знайти } u_h(x,t) \in L^2(0,T;V) : \\ s(u_h'(t), v) + \lambda(u_h(t), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ s(u_h(0) - u_0, v) = 0, \forall v \in V_h, \forall t \in [0; T]. \end{cases} \quad (3.146)$$

Далі виділимо послідовність функцій $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, які творитимуть базис простору V_h . Тоді розв'язок задачі (3.146) можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$u_h(x,t) = \sum_{m=1}^N U_m(t) \varphi_m(x) \quad (3.147)$$

з невідомими коефіцієнтами $U_1(t), \dots, U_N(t)$. Підставляючи (3.147) у (3.146), отримуємо таку задачу

$$\begin{cases} \text{Задано } u_0 \in V, \quad ? u(x,t) \in L^2(0,T;V) : \\ \sum_{m=1}^N U_m'(t) s(\varphi_m(x), v) + \sum_{m=1}^N U_m(t) \lambda(\varphi_m(x), v) = \langle l(t), v \rangle, \\ \sum_{m=1}^N U_m(0) s(\varphi_m(x), v) = s(u_0, v), \quad \forall v \in V_h, \forall t \in [0; T]. \end{cases} \quad (3.148)$$

Далі ми формуємо задачу Коші послідовною підстановкою $v = \varphi_i$ ($i=1, \dots, N$) у задачу (3.148). В результаті отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} SU'(t) + \Lambda U(t) = R(t), \\ SU(0) = S^0. \end{cases} \quad \forall t \in (0, T]. \quad (3.149)$$

Внаслідок тверджень (3.143) – (3.144), матриці S, Λ є матрицями Грама лінійно незалежних функцій $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ відносно скалярних добутків $s(\cdot, \cdot)$ та $\lambda(\cdot, \cdot)$. Тому

$$\begin{cases} \text{симетричні матриці} \\ M = \{m(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, \quad \Lambda = \{\lambda(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N \\ \text{– додатно визначені.} \end{cases} \quad (3.150)$$

Таким чином задача Коші (3.149) розв'язується однозначно.

3.4.6 Енергетичні рівняння

Поклавши $v = u_h$ у рівнянні (3.146), отримаємо наступну систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[s(u_h(t), u_h(t))] + \lambda(u_h(t), u_h(t)) = \langle l(t), u_h(t) \rangle, \\ s(u_h(0), u_h(0)) = s(u_0, u_h(0)) \quad \forall t \in (0, T] \end{cases} \quad (3.151)$$

або з огляду на (3.143) – (3.144)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_V^2 = \langle l(t), u_h(t) \rangle, \\ \|u_h(0)\|_H^2 = s(u_0, u_h(0)). \end{cases} \quad (3.152)$$

Інтегруючи рівняння (3.151) по t , знайдемо

$$\frac{1}{2} \|u_h(t)\|_H^2 + \int_0^t \|u_h(\tau)\|_V^2 d\tau = \frac{1}{2} \|u_h(0)\|_H^2 + \int_0^t \langle l(\tau), u_h(\tau) \rangle d\tau. \quad (3.153)$$

3.4.7 Деякі апріорні оцінки та коректність варіаційного формулювання

Застосуємо нерівність

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (3.154)$$

та

$$\|v\|_V \geq \zeta \|v\|_H \quad \forall v \in V, \quad \zeta = \text{const} > 0 \quad (3.155)$$

обчислимо, що

$$\begin{aligned}
\langle l, v \rangle &= \int_{\Omega} \rho c_v f u_h dx + \int_{\Gamma} [\alpha \hat{u}(1 - \delta) + \hat{q} \delta] u_h d\gamma \leq \\
&\leq \|\rho c_v\|_{\infty} \cdot \|f\|_H \cdot \|u_h\|_H + \|\alpha\|_{\infty} \cdot \|\hat{u}\|_Z \cdot \|u_h\|_Z + \|\hat{q}\|_Z \cdot \|u_h\|_Z \leq \\
&\leq \|\rho c_v\|_{\infty} \cdot \|f\|_H \cdot \|u_h\|_H + C_1 \|\alpha\|_{\infty} \cdot \|\hat{u}\|_Z \cdot \|u_h\|_H + C_2 \|\hat{q}\|_Z \cdot \|u_h\|_H \leq \\
&\leq \zeta^{-1} \|u_h\|_V \|\rho c_v\|_{\infty} \cdot \|f\|_H + C_1 \|\alpha\|_{\infty} \cdot \|\hat{u}\|_Z + C_2 \|\hat{q}\|_Z \leq \quad (3.156) \\
&\leq \frac{1}{2} \|u_h\|_V + \frac{1}{2\zeta^2} \|\rho c_v\|_{\infty} \cdot \|f\|_H + C_1 \|\alpha\|_{\infty} \cdot \|\hat{u}\|_Z + C_2 \|\hat{q}\|_Z, \\
\langle l, v \rangle &\leq \frac{1}{2} \|u_h\|_V + \frac{1}{2\zeta^2} \left(\|\rho c_v\|_{\infty} \cdot \|f\|_H + C_1 \|\alpha\|_{\infty} \cdot \|\hat{u}\|_Z + C_2 \|\hat{q}\|_Z \right)
\end{aligned}$$

Таким чином, використовуючи рівняння (3.153) та оцінку (3.156), отримуємо

$$\begin{cases} \text{напівдискретні апроксимації Гальоркіна } u_h \\ \text{утворюють обмежену множину в просторі} \\ L^{\infty} 0, T; H \cap L^2 0, T; V \text{ при } h \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.157)$$

Це є ствердженням стійкості напівдискретних апроксимацій. Більше того, справедливою є теорема:

Теорема 3.9 про напівдискретні апроксимації.

Нехай задано фіксоване значення параметра дискретизації $h > 0$ і $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ – базис простору апроксимацій V_h . Тоді напівдискретизована задача (3.149) допускає єдиний розв'язок $U_h \in L^{\infty} 0, T; H \cap L^2 0, T; V$, який одночасно визначається задачею Коші (3.140) та розкладом за вибраним базисом.

Наслідок 3.2.

Для кожного $h > 0$ напівдискретизована задача (3.144) є коректно поставлена.

Теорема 3.10 про коректність варіаційної задачі.

Нехай задано $u_0 \in H$, $l \in L^2 0, T; V'$. Тоді варіаційна задача теплопровідності (3.142) має єдиний розв'язок $u \in L^{\infty} 0, T; H \cap L^2 0, T; V$,

причому $u' \in L^2(0, T; V')$. Більш того, відображення $l, u_0 \rightarrow u$ неперервне з $L^2(0, T; V') \times H$ у $L^2(0, T; V') \cap L^\infty(0, T; H)$.

Доведення цієї теореми можна знайти у [108].

3.4.8 Побудова однокрокової рекурентної схеми

Для побудови чисельної схеми розв'язання варіаційної задачі (3.142) нам необхідно дискретизувати задачу (3.146) ще й в часі. Для цього скористаємося проєкційним методом.

Розіб'ємо відрізок часу $[0, T]$ на $(N + 1)$ рівних (хоча це не обов'язково) частин $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N + 1$. Тоді кроком дискретизації або параметром дискретизації називатимемо величину $\Delta t = t_{j+1} - t_j$.

На кожному відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ розв'язок $u_h(t) \in V_h$ задачі (3.146) будемо апроксимувати функцією

$$\begin{aligned} u_{\Delta t}(t) &= [1 - \omega(t_j, t)]u^j + \omega(t_j, t)u^{j+1}, \\ \omega(t_j, t) &= \frac{t - t_j}{\Delta t}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N_T. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Функції (3.158) можна надати такого вигляду:

$$\begin{aligned} u_{\Delta t}(t) &= u^j + \Delta t \omega(t_j, t) \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} = \\ &= \frac{1}{2}(u^{j+1} + u^j) + \Delta t (\omega(t_j, t) - \frac{1}{2}) \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} = \\ &= u^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t (\omega(t_j, t) - \frac{1}{2}) \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}, \quad \text{де } \dot{u}^{j+\frac{1}{2}} = (u^{j+1} - u^j) / \Delta t. \end{aligned} \quad (3.159)$$

Лінійний же функціонал будемо апроксимувати кусково-сталими функціями:

$$l_{\Delta t}(t) = l_{j+\frac{1}{2}} = l(t_{j+\frac{1}{2}}), \quad t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{1}{2} \Delta t. \quad (3.160)$$

При підстановці (3.159) і (3.160) у (3.146) отримаємо таку систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } u^0 \\ \text{знайти } \dot{u}^{j+1/2}, u^{j+1} \text{ такі, що:} \\ s(\dot{u}^{j+1/2}, v) + \Delta t \omega(t_j, t) \lambda(\dot{u}^{j+1/2}, v) \\ \quad = \langle l_{j+1/2}, v \rangle - \lambda(u^j, v), \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t \dot{u}^{j+1/2}, \quad \forall v \in V, \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \\ s(u^0 - u(0), v) = 0, \quad j = 0, \dots, N_T. \end{array} \right. \quad (3.161)$$

Наступним кроком є побудова проєкційних рівнянь. Позначимо символом \cdot, \cdot скалярний добуток у просторі $L^2((t_j, t_{j+1}))$ і виберемо у цьому просторі функцію $\xi(t)$, таку, що

$$\xi, 1 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t) dt \neq 0.$$

Вважатимемо, що одержана нев'язка (3.157) була ортогональна до функції $\xi(t)$ відносно скалярного добутку \cdot, \cdot , іншими словами

$$\begin{aligned} \xi, 1 s(\dot{u}^{j+1/2}, v) + \Delta t \xi, \omega \lambda(\dot{u}^{j+1/2}, v) \\ = \xi, 1 \langle l_{j+1/2}, v \rangle - \xi, 1 \lambda(u^j, v), \quad \forall v \in V, \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N_T, \end{aligned}$$

Розділимо цю рівність $\xi, 1$ та позначимо $\theta = \frac{\omega, \xi}{\xi, 1}$. Отримаємо

$$\begin{aligned} s(\dot{u}^{j+1/2}, v) + \Delta t \theta \lambda(\dot{u}^{j+1/2}, v) = \langle l_{j+1/2}, v \rangle - \lambda(u^j, v), \\ \forall v \in V, \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N_T, \quad \forall \theta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Тепер ми можемо записати відповідну однокрокову рекурентну схему (далі ОРС) інтегрування в часі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Задано } \theta \in 0,1, u^0 \\ \text{знайти } \dot{u}^{j+1/2}, u^{j+1} \text{ такі, що:} \\ s(\dot{u}^{j+1/2}, v) + \Delta t \theta \lambda(\dot{u}^{j+1/2}, v) = \langle l_{j+1/2}, v \rangle - \lambda(u^j, v), \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t \dot{u}^{j+1/2}, \quad \forall v \in V, \forall t \in [t_j, t_{j+1}], j = 0, \dots, N_T, \forall \theta \in 0,1, \\ s(u^0 - u(0), v) = 0. \end{array} \right. \quad (3.162)$$

З огляду на H – та V –еліптичність неперервних білінійних форм $s(\cdot, \cdot)$, $\lambda(\cdot, \cdot)$ та лему Лакса-Мільграма-Вишика [2], однокрокова рекурентна схема (3.162) однозначно розв’язується відносно u^0 , $\dot{u}^{j+1/2}$ та u^{j+1} .

Таким чином, кусково-лінійна апроксимація $u_{h\Delta t} t \in V_h$ розв’язку $U_h t \in V_h$ варіаційної задачі (3.146) визначається однозначно за допомогою розв’язків однокрокової рекурентної схеми (3.162).

Особлива увага також приділяється питанням стійкості та збіжності ОРС, про які йдеться у двох наступних теоремах. З огляду на результати теорем 3.6 – 3.9, доведення наступних теорем еквівалентно доведенням схожих теорем з [129].

Теорема 3.11 про достатня умова стійкості ОРС.

Нехай дані варіаційної задачі (3.142) задовольняють умовам (3.142). Тоді ОРС (3.162) з параметрами Δt та θ :

1) безумовно (по відношенню до вибору Δt) стійка в просторах H і V , якщо

$$\text{параметр } \theta \geq \frac{1}{2};$$

2) умовно стійка в просторах H і V , якщо параметр θ задовольняє нерівності:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\alpha(1-2\theta)}.$$

Теорема 3.12 про збіжність ОРС.

Нехай розв'язок $u_h(t)$ задачі (3.144) такий, що $u_h''' \in C(0, T; V)$ і нехай $u_{h\Delta t}(t)$ - його кусково-лінійна апроксимація, отримана за допомогою безумовно стійкої ОРС з параметром $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Тоді значення $u_{h\Delta t}(t_m)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ збігаються (відносно норм $\|\cdot\|_H$ і $\|\cdot\|_V$) до значень $u_h(t_m)$, $m = 1, \dots, N_T + 1$.

Отримані ж в процесі доведення апіорні оцінки збіжності показують, що оптимальний порядок збіжності (що дорівнює двом) схеми (3.162) досягається при виборі

$$\theta = \frac{1}{2} + O(\Delta t).$$

Таким чином, ми маємо стійкі та збіжні чисельні методи для розв'язування двох, описаних вище, задач теплопровідності і встановили стійкість та збіжність ОРС їх інтегрування в часі.

3.4.9 Апробація чисельної схеми

З огляду на те, що аналітичний розв'язок початково-крайової задачі теплопровідності з динамічними крайовими умовами не є відомим, провести порівняльний аналіз з точним розв'язком, який враховує всі особливості задачі, неможливо. Тому ми обмежимося розглядом апостеріорних порядків збіжності апроксимацій методу скінченних елементів, які мають збігатися з теоретичними показниками для використаних (квадратичних) апроксимацій.

З цією метою розглянемо початково-крайову задачу (3.135) з наступними характеристиками:

$$\begin{aligned}
l &= 41 \cdot 10^{-4} \text{ [м]}, & b &= 55 \cdot 10^{-5} \text{ [м]}, & T &= 56 \cdot 10^{-5} \text{ [с]}, \\
t_c &= 48 \cdot 10^{-5} \text{ [с]}, & \hat{q} &= 8.2 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right], & \rho &= 7850 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right], \\
c_v &= 466 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right], & \lambda &= 41 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right], & \alpha &= 500 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right], \\
v_h &= 4 \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right] & v_d &= 60 \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right], & n_z &= 24, & l_c &= 3 \cdot 10^{-3} \text{ [м]},
\end{aligned}$$

де l – довжина заготовки, а b – її глибина. Ці характеристики відповідають практичній задачі, окрім лінійних розмірів розглядуваної області, які взяті з врахуванням зони зміни температури за час експерименту і були встановлені чисельним способом. Дана задача розглядає період в часі, який еквівалентний періоду між контактами двох зубців. Таким чином є враховані всі особливості: контактний, безконтактний періоди та перехід між ними.

Функцію дельта ми визначаємо наступним чином:

$$\delta(x, t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \gamma(t), t \in [t_{k-1}, t_k], t - t_k \leq t_c, \\ 0, & t - t_k > t_c, \quad k = 1, \dots, N, \end{cases}$$

де $\gamma(t) = [(x_1, x_2) : x_1 \in \{v_h t - \frac{1}{2}l_c, v_h t + \frac{1}{2}l_c\}, x_2 = b]$ – зона динамічного джерела, t_k – час початку контакту k зуба, t_c – час контакту одного зубця, l_c – довжина зони контакту та v_h – горизонтальна швидкість зони контакту.

Для перевірки точності наближених розв'язків оцінюватимемо порядки збіжності окремо за параметрами просторової та часової дискретизації у наступних нормах (як це було проведено у [82]):

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \|u\|_m^2 = \sum_{\alpha \leq m} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u \right)^2 dx, \quad \|u\|_T^2 = \frac{1}{2} \|u(T)\|_{H^0(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\nabla u(t)\|_{H^0(\Omega)}^2 dt. \quad (3.163)$$

Ввівши такі норми, обчислюватимемо наступні показники порядків збіжності:

$$\begin{aligned}
 p_{\Delta t}^m(u) &= \log_2 \frac{\|u_{\Delta t} - u_{\Delta t/2}\|_m}{\|u_{\Delta t/2} - u_{\Delta t/4}\|_m}, & p_{\Delta t}(u) &= \log_2 \frac{\|u_{\Delta t} - u_{\Delta t/2}\|_T}{\|u_{\Delta t/2} - u_{\Delta t/4}\|_T}, \\
 p_h^m(u) &= \log_2 \frac{\|u_h - u_{h/2}\|_m}{\|u_{h/2} - u_{h/4}\|_m}, & p_h(u) &= \log_2 \frac{\|u_h - u_{h/2}\|_T}{\|u_{h/2} - u_{h/4}\|_T}.
 \end{aligned}
 \tag{3.164}$$

3.4.9.1 Збіжність просторових апроксимацій

Для дослідження збіжності розв'язків задачі (3.162) використаємо послідовність рівномірних сіток в просторі E, E_2, E_4, \dots скінченних елементів. Результати приведені для моменту часу T з кроком інтегрування в часі $\Delta t = \frac{T}{224} = 2,5 \cdot 10^{-7}$ [с].

Для аналізу збіжності використовуватимемо норми (3.163) та показники абсолютної та відносної збіжності похибок у цих нормах:

$$\begin{aligned}
 e_h^m(u) &= \|u_h - u_{h/2}\|_m, & \varepsilon_h^m(u) &= \frac{\|u_h - u_{h/2}\|_m}{\|u_{h/2}\|_m} \times 100\%, \\
 e_h(u) &= \|u_h - u_{h/2}\|_T, & \varepsilon_h(u) &= \frac{\|u_h - u_{h/2}\|_T}{\|u_{h/2}\|_T} \times 100\%.
 \end{aligned}
 \tag{3.165}$$

Таблиця 3.2 – Збіжності просторових апроксимацій у нормах (3.163)

h	$e_{\Delta t}^0(\theta) \times 10^{-3}$	$e_h^1(\theta)$	$e_h(\theta)$	$p_h^0(\theta)$	$p_h^1(\theta)$	$p_h(\theta)$	$\varepsilon_h^0(\theta)$	$\varepsilon_h^1(\theta)$	$\varepsilon_h(\theta)$
1/14φ	4,22	158,08	5,15	1,49	0,47	0,45	0,92	39,74	39,77
1/28	1,94	122,18	2,71	1,12	0,37	0,92	0,42	31,06	20,77
1/56	0,41	31,88	1,18	2,23	1,94	1,20	0,09	8,08	9,02
1/128	0,04	7,30	0,48	3,30	2,13	1,29	0,01	1,85	3,70

З огляду на те, що нами використовувалися квадратичні апроксимації МСЕ, порядки збіжності для наступних просторів мусіли б бути такими $p_h^0(\theta) = 3$, $p_h^1(\theta) = 2$ та $p_h(\theta) = 1$.

Застосування норми $\|u\|_T$ дає змогу запобігти випадковому потраплянню показника у “зручний час” для підтвердження попередніх висновків і відображає накопичення похибки просторової дискретизації за весь пройдений період часу.

Отримані нами результати свідчать про можливість використання даної ОРС для отримання якісних результатів.

3.4.9.2 Збіжність у часі

Тепер за незмінної просторової сітки 256×64 елементів початкового розбиття проведемо аналіз порядків збіжності при послідовному згущенні кроку інтегрування в часі вдвічі. Показники приведено у наступних позначеннях:

$$\begin{aligned}
 e_{\Delta t}^m(u) &= \|u_{\Delta t} - u_{\Delta t/2}\|_m, & \varepsilon_{\Delta t}^m(u) &= \frac{\|u_{\Delta t} - u_{\Delta t/2}\|_m}{\|u_{\Delta t/2}\|_m} \times 100\%, \\
 e_{\Delta t}(u) &= \|u_{\Delta t} - u_{\Delta t/2}\|_T, & \varepsilon_{\Delta t}(u) &= \frac{\|u_{\Delta t} - u_{\Delta t/2}\|_T}{\|u_{\Delta t/2}\|_T} \times 100\%.
 \end{aligned}
 \tag{3.166}$$

Таблиця 3.3 – Збіжності у часі норм розв’язку у нормах (3.163)

Δt	$e_{\Delta t}^0(\theta) \times 1$	$e_{\Delta t}^1(\theta)$	$e_{\Delta t}(\theta)$	$p_{\Delta t}^0(\theta)$	$p_{\Delta t}^1(\theta)$	$p_{\Delta t}(\theta)$	$\varepsilon_{\Delta t}^0(\theta)$	$\varepsilon_{\Delta t}^1(\theta)$	$\varepsilon_{\Delta t}(\theta)$
1/56	2,73	453,85	6,38	1,99	1,53	0,74	0,59	102,82	46,78
1/112	0,69	157,31	3,81	1,31	0,81	0,83	0,15	38,56	28,67
1/224	0,28	89,71	2,14	2,03	1,80	1,01	0,06	22,71	16,33
1/448	0,07	25,76	1,06	1,62	5,91	1,09	0,01	6,53	8,12

З даної таблиці можна стверджувати, що схема (3.162) досягає теоретичних порядків збіжності і в часі. Відповідні порядки збіжності мали б бути рівними 2, 2 (ці числа зумовлені використанням схеми Кранка-Ніколсона інтегрування задачі Коші в часі) та 1.

3.4.10 Числові приклади

Розглянемо процес повного проходження шліфувальним диском всієї заготовки з наступними лінійними розмірами:

$$l = 44 \cdot 10^{-4} \text{ [м]}, \quad b = 65 \cdot 10^{-5} \text{ [м]}.$$

Заготовка виконана зі сталі марки Сталь-45 з такими характеристиками:

$$\rho = 7850 \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right], \quad c_v = 466 \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right], \quad \lambda = 41 \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right].$$

Заготовка жорстко закріплена на столі, який рухається з лінійною швидкістю $v_h = 4 \text{ [м/с]}$ та в початковий момент має температуру $\hat{\theta} = 293 \text{ [К]}$. Точки поверхні шліфувального круга обертаються з швидкістю $v_d = 60 \text{ [м/с]}$. В результаті взаємодії круга та деталі виникає зона контакту довжиною $l_c = 3 \cdot 10^{-3} \text{ [м]}$, на якій породжується тепловий потік потужністю $\hat{q} = 8.2 \cdot 10^7 \text{ [Вт/м}^2\text{]}$. Водночас зазначимо, що у зв'язку із зубчастістю інструменту контакт інструмента з деталлю носить періодичний характер. На цей режим впливає швидкість точок зовнішньої границі інструменту v_d , довжини дуг на зовнішній границі, які відповідають одиничному зубцю l_z та заглибленню l_p і кількість зубців n . Також до уваги береться горизонтальна швидкість пристосування v_h та ширина контактної ділянки l_c . З деяким узагальненням приймемо, що одиничний контакт займає $t_c = 48 \cdot 10^{-5} \text{ [с]}$, а безконтактний період рівний $t_p = 8 \cdot 10^{-5} \text{ [с]}$.

Для завершеності опису технологічного процесу слід зазначити, що у зону контакту подається охолоджувальна рідина, коефіцієнт тепловіддачі між заготовкою і нею рівний $\alpha = 500$ [Вт/(м² · К)].

Після незначних математичних перетворень можемо обчислити загальний час проведення експерименту та вказати загальну кількість контактів за цей час. Оскільки ми враховуємо, що деталь повністю проїжджає під інструментом, то виходить, що час експерименту рівний $T = 280 \cdot 10^{-5}$ [с].

В результаті чисельного експерименту отримано наступні розподіли температур в деталі (див. рис.3.8), які показують динаміку розподілу тепла по всій області деталі.

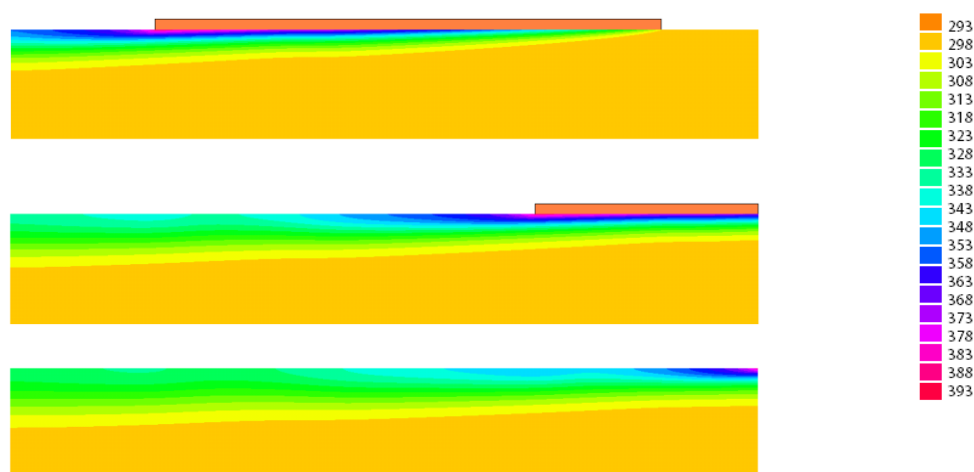


Рисунок 3.8 – Розподіл температури в деталі після контакту з другим (перший графік згори), третім та четвертим зубцями інструменту. Оранжевим прямокутником вказано місце контакту.

Також особливу увагу зверталось на значення максимальної температури, яка чітко показує внесок заглиблень на поверхні інструменту у технологічний процес (див. рис.3.9)

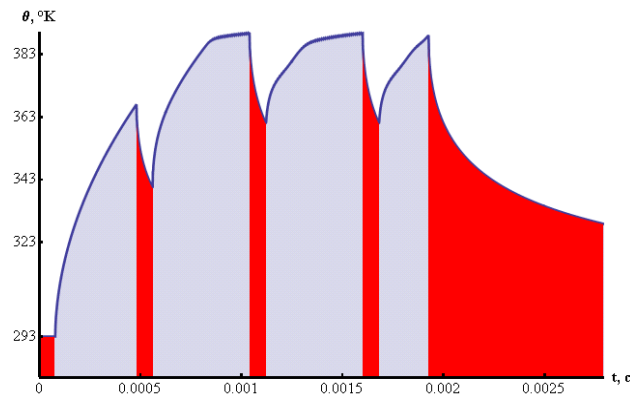
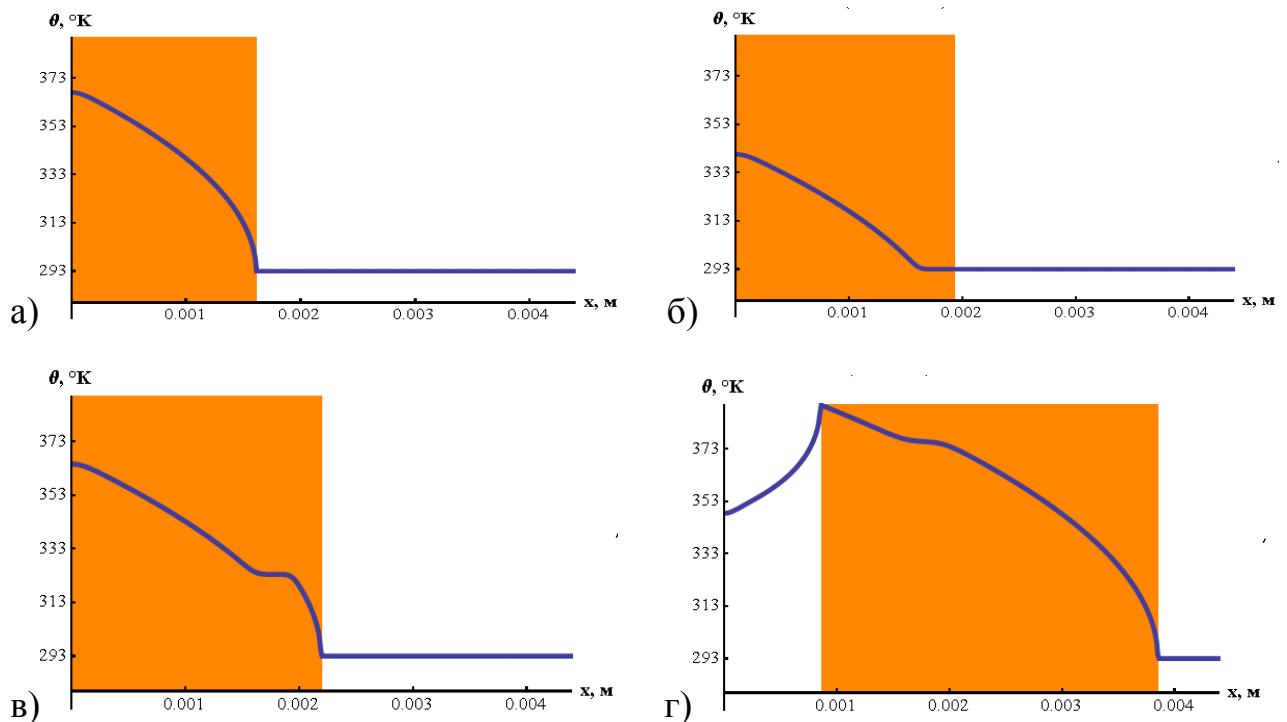


Рисунок 3.9 – Еволюція максимальної температури під час експерименту (іншим кольором вказано періоди відсутності контакту між інструментом та деталлю).

Остання характеристика містить лишень агрегований показник максимальної температури, не вказуючи місця, де вона виникає. Ця інформація для нас теж є важливою, тому нижче наведено графіки розподілу температур на границі контакту в особливі моменти (див. рис. 3.10). Слід зауважити, що на рис. 3.10 зону контакту відображено суцільною смугою.



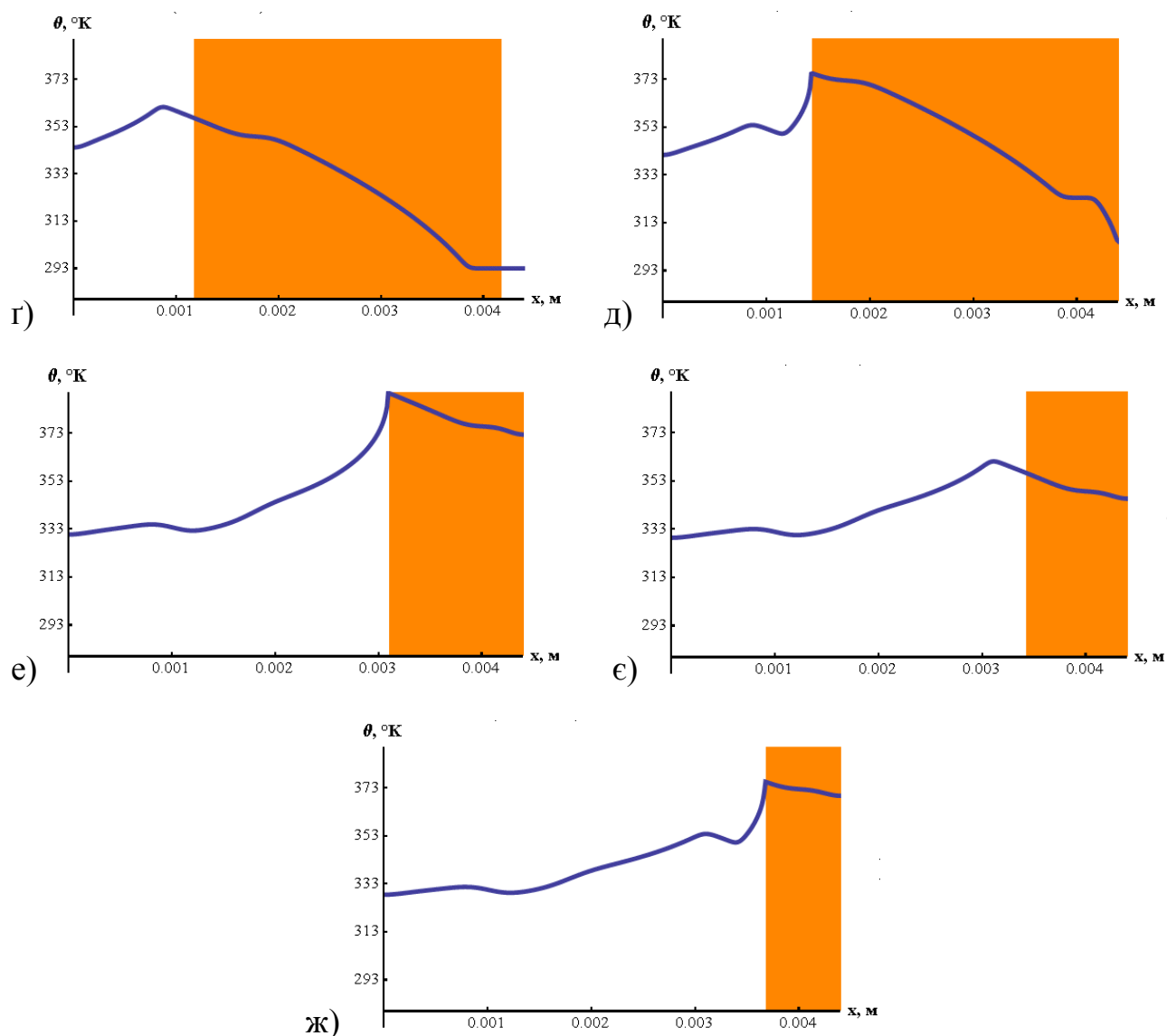


Рисунок 3.10 – Розподіл температури на контактній границі в такі моменти часу а) 0.00048 с, б) 0.00055875 с, в) 0.000625 с, г) 0.00104 с, г) 0.00111875 с, д) 0.001185 с, е) 0.0016 с, е) 0.00168 с, ж) 0.001745 с. (прямокутником виділено зони контакту).

На вищенаведених ілюстраціях можна побачити особливості еволюції профілю температури на контактній поверхні, які породжуються зубчастістю інструменту. На рисунках а) і б) зображено, відповідно, профілі температури на моменти останнього контакту першого зубця перед контактною паузою та останнього моменту першої паузи. Профіль температури в) ілюструє появу

особливостей, які вносять певний внесок у температурний профіль, як видно на г). На наступних графіках можна побачити подальшу еволюцію в часі температури на границі.

Дані рисунки наочно відкривають цікаві властивості вхідної задачі. Як видно з графіків, швидкість поширення теплоти в деталі є меншою за швидкість руху зони контакту. Якщо записати відповідне співвідношення у безрозмірному вигляді, то отримуємо число Пекле для конкретної задачі [114]:

$$Pe = v_h \cdot l_d \cdot (\lambda / c_v \rho)^{-1} \approx \frac{4 \cdot 0,003}{1,121 \cdot 10^{-5}} \approx 1070.$$

З огляду на величину числа Пекле (для сингулярно не збурених задач $Pe < 10$), можемо ствердити, що дана задача сингулярно збурена.

3.4.11 Висновки

В процесі дослідження було проведено аналіз початково-крайової задачі для процесу поширення тепла в заготовці при фрикційному зміцненні та досліджено на коректність її варіаційну постановку. Особливим чином також було доведено твердження про V-еліптичність білінійної форми, в яку входить доданок від крайової умови Ньютона на теплообмін. Це дало змогу поширити відомі результати [129] на нашу задачу.

В процесі дослідження фрикційного зміцнення виникають певні труднощі, пов'язані з математичною моделлю даного процесу. Вони проявляють себе у вигляді динамічних крайових умов на тепловий потік та теплообмін з зовнішнім середовищем. Також через величину числа Пекле, задача, яку ми досліджуємо, є сингулярно збуреною, що в майбутньому доведеться враховувати та використовувати відповідні методи (напр. для апріорного згущення сітки в місцях контакту [33]).

4 ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ФІЗИКИ ТА МЕХАНІКИ

4.1 Вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення

Сформульовано лінійну початково-крайову задачу для тонких оболонок, податливих на зсув і стиснення. Записано ключові рівняння для визначення власних частот вільних коливань розглядуваних оболонок. Специфіка використаної моделі полягає в тому, що за основу взята гіпотеза оболонок типу Тимошенка, згідно з якою нормальний елемент недеформованої оболонки після її навантаження залишається прямолінійним, але може змінювати свою довжину та не бути ортогональним до деформованої серединної поверхні. Розв'язано задачу про вільні коливання кругової циліндричної оболонки. Порівняно отримані числові розв'язки із наведеними в літературі.

4.1.1 Вступ

Дослідження динамічної поведінки та визначення власних частот є необхідне для проектування оболонкових конструкцій, щоб запобігти резонансним явищам, які можуть призвести до їх руйнування. Адже більшість дефектів і руйнувань під час експлуатації таких конструкцій виникають саме внаслідок дії змінних у часі навантажень. Методика розв'язування задач про вільні коливання оболонок досить складна та, зазвичай, потребує числових методів, заснованих, зокрема, на варіаційній побудові розглядуваних задач [3, 81]. Здебільш у дослідженнях використовують класичну гіпотезу Кірхгофа-Лява та гіпотезу Тимошенка–Міндліна (так звана п'ятимодальна теорія, у якій поле переміщень характеризується п'ятьма незалежними функціями: трьома переміщеннями серединної поверхні та двома функціями, що описують

незалежний поворот нормалі оболонки) [37, 87, 116]. Теорію оболонок типу Тимошенка, податливих на зсув та стиснення (варіант шестимодальної теорії, в якій поле переміщень характеризується шістьма функціями, що описують поворот та стиснення нормалі), вивчали в працях [79, 86, 115]. Нижче записано ключові співвідношення для визначення власних частот вільних коливань оболонок, податливих на зсув та стиснення. Для зручності застосування числових методів [3, 73, 115], зокрема, методу скінченних елементів, усі співвідношення записано в матричному вигляді.

4.1.2 Основні припущення та співвідношення теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення

Розглянемо оболонку як тривимірне тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала проти інших розмірів тіла. Серединну поверхню оболонки Ω віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \leq h/2$. Вважаємо, що координатні лінії α_1, α_2 збігаються із лініями головних кривин. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω .

Переміщення довільної точки оболонки під час її деформування можна описати за допомогою такого розвинення в ряд Тейлора в околі значень $\alpha_3 = 0$ (з огляду на малу порівняно з іншими характерними розмірами товщину h оболонки) [111]:

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, \alpha_3) &= u_1(\alpha) + \alpha_3 \gamma_1(\alpha), \\ U_2(\alpha, \alpha_3) &= u_2(\alpha) + \alpha_3 \gamma_2(\alpha), \\ U_3(\alpha, \alpha_3) &= u_3(\alpha) + \alpha_3 \gamma_3(\alpha). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Тут $u_i \alpha = U_i \alpha, 0 \quad i = \overline{1,3}$ описують переміщення точок серединної поверхні Ω оболонки, а $\gamma_i \alpha = \frac{\partial U_i \alpha, 0}{\partial \alpha_3} \quad i = \overline{1,3}$ характеризують залишкові члени ряду Тейлора і визначають кут повороту нормалі незалежно від компонент вектора переміщень точок серединної поверхні. Оскільки $\gamma_3 \alpha \neq 0$, то апроксимація (4.1) припускає зміну довжини елемента нормалі під час деформування.

Отже, вектор переміщень довільної точки оболонки повністю визначають компоненти вектора переміщень $u_i \alpha \quad i = \overline{1,3}$ та вектора кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки $\gamma_i \alpha \quad i = \overline{1,3}$. Таким чином, для аналізу напружено-деформованого стану оболонок, податливих на зсув і стиснення, потрібно записати систему з шести рівнянь рівноваги для визначення вектора узагальнених переміщень серединної поверхні $u = u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3^T$ та доповнити її відповідними крайовими умовами на межі серединної поверхні.

Деформаційні співвідношення, що пов'язують компоненти тензора лінійної деформації з переміщеннями, запишемо для зручності у матричному вигляді:

$$e = C_l u, \quad (4.2)$$

де $e = e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23}^T$ – вектор компонент тензора лінійної деформації; C_l – матриця диференціальних операторів, що має вигляд

$$C_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial_1}{A_1} & \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} & \frac{\partial_2}{A_2} & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{A_1}{2A_2} \partial_2 \frac{\dot{}}{A_1} & \frac{A_2}{2A_1} \partial_1 \frac{\dot{}}{A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{2} & 0 & \frac{\partial_1}{2A_1} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{2} & \frac{\partial_2}{2A_2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_1}{A_1} & \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} & k_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} & \frac{\partial_2}{A_2} & k_2 \\ \frac{1}{2} \left(k_1 \frac{\partial_2}{A_2} - k_2 \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} \right) & \frac{1}{2} \left(k_2 \frac{\partial_1}{A_1} - k_1 \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} \right) & 0 & \frac{A_1}{2A_2} \partial_2 \frac{\dot{}}{A_1} & \frac{A_2}{2A_1} \partial_1 \frac{\dot{}}{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial_1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial_2}{A_2} \end{pmatrix}.$$

Тут $A_i = A_i \alpha$ і $k_i = k_i \alpha$ $i=1,2$ – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки Ω та її головні кривини відповідно.

Систему рівнянь рівноваги оболонок, податливих на зсув і стиснення, та статичні крайові умови отримаємо з принципу можливих переміщень [79] та запишемо для зручності у матричній формі:

$$C_\sigma \sigma + P = 0, \quad (4.3)$$

$$G_\sigma \sigma|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g. \quad (4.4)$$

Для встановлення кінематичної визначеності побудованої моделі оболонок необхідно додати крайові умови в зміщеннях на частині Γ_u контуру серединної поверхні оболонки $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ [79]:

$$G_u u|_{\Gamma_u} = u_g, \quad \Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_\sigma. \quad (4.5)$$

У формулах (4.3)–(4.5) введено такі позначення:
 $\sigma = N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23}^T$ – вектор симетричних зусиль-моментів; $P = P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3^T$ – вектор зовнішнього навантаження;
 $\sigma_g = N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n^T$ – вектор крайових зусиль-моментів;
 $u_g = u_t^B, u_s^B, u_n^B, \gamma_t^B, \gamma_s^B, \gamma_n^B^T$ – вектор крайових зміщень; C_σ – матриця диференціальних операторів розмірності 6×11 , ненульові компоненти якої мають вигляд:

$$\begin{aligned} C_\sigma^{1,1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \partial_1 A_2 \cdot, & C_\sigma^{1,2} &= -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, & C_\sigma^{1,4} &= \frac{\partial_2 A_1 + A_1 \partial_2}{A_1 A_2}, \\ C_\sigma^{1,5} &= k_1, & C_\sigma^{1,9} &= \frac{1}{2 A_1 A_2} \partial_2 A_1 k_1 \cdot + k_2 \partial_2 A_1, \\ C_\sigma^{2,1} &= -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, & C_\sigma^{2,2} &= \frac{1}{A_1 A_2} \partial_2 A_1 \cdot, & C_\sigma^{2,4} &= \frac{\partial_1 A_2 + A_2 \partial_1}{A_1 A_2}, \\ C_\sigma^{2,6} &= k_2, & C_\sigma^{2,9} &= \frac{1}{2 A_1 A_2} \partial_1 A_2 k_2 \cdot + k_1 \partial_1 A_2, \\ C_\sigma^{3,1} &= -k_1, & C_\sigma^{3,2} &= -k_2, & C_\sigma^{3,5} &= \frac{1}{A_1 A_2} \partial_1 \langle A_2 \cdot \rangle, & C_\sigma^{3,6} &= \frac{1}{A_1 A_2} \partial_2 \langle A_1 \cdot \rangle \\ C_\sigma^{4,5} &= -1, & C_\sigma^{4,7} &= \frac{1}{A_1 A_2} \partial_1 \langle A_2 \cdot \rangle, & C_\sigma^{4,8} &= -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, & C_\sigma^{4,9} &= \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} + \frac{\partial_2}{A_2}, \\ C_\sigma^{5,6} &= -1, & C_\sigma^{5,7} &= -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, & C_\sigma^{5,8} &= \frac{1}{A_1 A_2} \partial_2 \langle A_1 \cdot \rangle, & C_\sigma^{5,9} &= \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} + \frac{\partial_1}{A_1}, \\ C_\sigma^{6,3} &= -1, & C_\sigma^{6,7} &= -k_1, & C_\sigma^{6,8} &= -k_2, \\ C_\sigma^{6,10} &= \frac{1}{A_1 A_2} \partial_1 \langle A_2 \cdot \rangle, & C_\sigma^{6,11} &= \frac{1}{A_1 A_2} \partial_2 \langle A_1 \cdot \rangle \end{aligned}$$

G_σ, G_u – матриці змінних коефіцієнтів розмірності 6×11 і 6×6 відповідно, ненульові коефіцієнти яких

$$\begin{aligned}
 G_\sigma^{1,1} &= G_\sigma^{4,7} = \cos^2 n, \alpha_1, & G_\sigma^{1,2} &= G_\sigma^{4,8} = \sin^2 n, \alpha_1, \\
 G_\sigma^{1,4} &= -G_\sigma^{2,1} = G_\sigma^{2,2} = G_\sigma^{4,9} = -G_\sigma^{5,7} = G_\sigma^{5,8} = \frac{1}{2} \sin 2 n, \alpha_1, \\
 G_\sigma^{1,9} &= \frac{1}{4} k_1 + k_2 \sin 2 n, \alpha_1, & G_\sigma^{2,4} &= G_\sigma^{5,9} = \cos^2 n, \alpha_1 - \sin^2 n, \alpha_1, \\
 G_\sigma^{3,5} &= G_\sigma^{6,10} = \cos n, \alpha_1, & G_\sigma^{3,6} &= G_\sigma^{6,11} = \sin n, \alpha_1, \\
 G_\sigma^{2,9} &= \frac{1}{2} \left(k_2 \cos^2 (n, \alpha_1) - k_1 \sin^2 (n, \alpha_1) \right) \\
 G_u^{1,1} &= G_u^{2,2} = G_u^{4,4} = G_u^{5,5} = \cos (n, \alpha_1) \\
 G_u^{1,2} &= -G_u^{2,1} = G_u^{4,5} = -G_u^{5,4} = \sin (n, \alpha_1), & G_u^{3,3} &= -G_u^{6,6} = -1.
 \end{aligned}$$

Щоб отримати замкнену систему, яка описує лінійне деформування оболонки, податливих на зсув і стиснення, до наведених вище рівнянь необхідно додати співвідношення пружності, які пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами:

$$\sigma = B e, \quad (4.6)$$

де B – матриця пружних характеристик матеріалу розмірності 11×11 . Ненульові компоненти матриці B для ізотропної оболонки

$$\begin{aligned}
 B^{1,1} = B^{2,2} = B^{3,3} &= \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{Eh}{1 - 2\nu}, & B^{1,2} = B^{2,1} = B^{1,3} = B^{3,1} = B^{2,3} = B^{3,2} &= \frac{\nu Eh}{1 + \nu} \frac{1}{1 - 2\nu}, \\
 B^{4,4} = B^{5,5} = B^{6,6} &= \frac{Eh}{1 + \nu}, & B^{7,7} = B^{8,8} &= \frac{1 - \nu}{12} \frac{Eh^3}{1 + \nu} \frac{1}{1 - 2\nu}, \\
 B^{7,8} = B^{8,7} &= \frac{\nu Eh^3}{12} \frac{1}{1 + \nu} \frac{1}{1 - 2\nu}, & B^{9,9} = B^{10,10} = B^{11,11} &= \frac{Eh^3}{12} \frac{1}{1 + \nu}.
 \end{aligned}$$

4.1.3 Лінійна початково-крайова задача теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення, та її варіаційне формулювання

Якщо компоненти зовнішнього навантаження, що діє на оболонку, залежать як від координат α_i , $i = \overline{1,3}$, так і від часу t , то викликані ними переміщення, деформації та напруження теж є функціями часу. Рівняння руху тонких оболонок, податливих на зсув і стиснення, які отримуємо з варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [81], запишемо в матричному вигляді:

$$C_\sigma \sigma + P - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0., \quad (4.7)$$

де m - діагональна матриця розмірності 6×6 , ненульові компоненти якої

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \rho h, \quad m_{44} = m_{55} = m_{66} = \rho \frac{h^3}{12},$$

ρ - густина матеріалу оболонки.

Для однозначного інтегрування системи рівнянь (4.37), окрім статичних (4.4) та геометричних (4.5) крайових умов, необхідно задати ще початкові умови

$$u_{\alpha,0} = u^0_{\alpha}, \quad \dot{u}_{\alpha,0} = u^1_{\alpha}. \quad (4.8)$$

Розв'язок системи (4.7) із крайовими та початковими умовами визначає реакцію оболонки на дію змінного в часі зовнішнього навантаження та масових сил.

Розв'язують задачі про деформування тонких оболонок, податливих на зсув і стиснення, методом скінченних елементів [3, 73, 115]. Тому наведемо варіаційне формулювання початково-крайової задачі лінійної теорії розглянутих оболонок. Для цього введемо функціональні простори

$$G = v = v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [L^2 \Omega]^6,$$

$$V = v = v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [W_2^1 \Omega]^6 | v = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_\sigma.$$

Тут $W_2^1(\Omega)$ – простір Соболева функцій, квадрати яких разом зі своїми першими похідними інтегровані за Лебегом в області Ω .

Вважаємо, що для даних розглядуваної задачі справедливі включення $P = P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3 \in [L^2 \Omega]^6$, $\sigma_g = N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n^T \in [L^2 \Omega]^6$, а також $u^0 \in V$, $u^1 \in G$.

Фіксуючи момент часу $t \in 0, T$, $0 < T < +\infty$, помножимо скалярно рівняння руху (4.7) на довільний вектор $v \in V$ та проінтегруємо результат по області Ω . Отримаємо варіаційне рівняння

$$\mu \ddot{u}(t, v) + a(u, v) = \langle l(t, v) \rangle \quad \forall t \in 0, T.$$

Тут білінійні форми $a(u, v)$, $\mu(u, v)$ та лінійний функціонал $\langle l, v \rangle$ мають вигляд

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \iint_{\Omega} C_l v^T E_0 B C_l u d\Omega, \\ \mu(u, v) &= \iint_{\Omega} \rho \left(\sum_{i=1}^3 \left(u_i v_i + \frac{h^2}{12} \gamma_i \xi_i \right) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \\ \langle l, v \rangle &= \sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega} P_i v_i + m_i \xi_i A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ &+ \int_{\Gamma_\sigma} N_t v_t + N_s v_s + N_n v_n + M_t \xi_t + M_s \xi_s + M_n \xi_n d\Gamma. \end{aligned}$$

Наведемо варіаційне формулювання початково-крайової задачі (4.7) лінійної теорії зсувних оболонок, податливих на зсув і стиснення: задано

$l \in L^2(0, T; V')$; $u^0 \in V$, $u^1 \in G$; знайти такий вектор узагальнених переміщень $u \in L^2(0, T; V)$, що

$$\begin{aligned} \mu \ddot{u}(t, v) + a(u)(t, v) &= \langle l(t, v) \rangle \quad \forall t \in (0, T), \\ \mu \dot{u}(0, v) - u^1, v &= 0, \quad a(u)(0, v) - u^0, v = 0 \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Формулювання задачі про вільні коливання оболонок. Проаналізуємо оболонку, вільну від дії зовнішніх сил $P_i(\alpha, t)$, $m_i(\alpha, t)$ $i = \overline{1, 3}$, на контурі якої задані однорідні крайові умови

$$G_u u = 0, \quad \alpha \in \Gamma_u, \quad G_\sigma \sigma = 0, \quad \alpha \in \Gamma_\sigma, \quad (4.9)$$

Розв'язок рівняння руху (4.7) шукаємо у вигляді

$$u(\alpha, t) = \tilde{u}(\alpha) e^{i\omega t} = \sum_l \tilde{q}_l(t) \phi_l(\alpha) e^{i\omega t}, \quad (4.10)$$

де $i^2 = -1$; ω – кругова частота власних коливань; $\tilde{q}_l(t) = \tilde{q}_l(t)$ – невідомі коефіцієнти, які є функціями часу; $\phi_l(\alpha)$ – вектор базису простору V .

Підставляючи (4.10) у рівняння динамічної рівноваги (4.7) і крайові умови (4.9), отримаємо систему рівнянь

$$-M\tilde{q}\omega^2 e^{i\omega t} + K\tilde{q}e^{i\omega t} = 0 \quad (4.11)$$

та крайові умови

$$G_u \tilde{q} = 0, \quad \alpha \in \Gamma_u, \quad G_\sigma \tilde{\sigma} = 0, \quad \alpha \in \Gamma_\sigma. \quad (4.12)$$

Тут K і M – матриці жорсткості та мас, коефіцієнти яких

$$K = K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad M = m_{ij} = \mu(\phi_i, \phi_j),$$

Система рівнянь (4.11) за однорідних крайових умов (4.12) має очевидний тривіальний розв'язок $\tilde{u} = 0$. Однак за деяких значень параметра $\omega = \omega_k$ можливий і ненульовий розв'язок \tilde{u}_k .

Важливою особливістю гармонічних коливань є те, що реакція деформованого тіла на періодичне зовнішнє навантаження суттєво залежить від частоти зміни зовнішніх сил. За певних частот збурення $\omega_1, \omega_2, \dots$, які називають власними або резонансними, амплітуди коливань тіла значно зростають (явище резонансу), що може викликати руйнування конструкції. Ці частоти можна знайти з умови рівності нулю визначника системи рівнянь

$$K - \omega^2 M \tilde{q} = P, \quad (4.13)$$

тобто

$$\det [K - \omega^2 M] = 0, \quad (4.14)$$

за виконання якої малі навантаження P призводять до нескінченних переміщень u .

На практиці замість рівності (4.14) зазвичай використовують інші методи знаходження частот і форм власних коливань. Оскільки власні частоти не залежать від вектора P , то його можна вважати нульовим. Тоді перейдемо від системи (4.13) до так званої узагальненої задачі на власні значення:

$$K\tilde{q} = \omega^2 M\tilde{q}. \quad (4.15)$$

Для знаходження власних чисел і власних векторів системи (4.15) в числових методах лінійної алгебри відомий є метод ітерацій у підпросторі, степеневий метод тощо [73, 115].

Числові приклади. Дліджували задачу про вільні коливання кругової циліндричної оболонки радіуса $R = 10$ м, довжини $l = 10$ м і товщини $h = 0,05$ м. Задачу про вільні її коливання розглянуто у працях [87, 116].

У табл. 4.1 порівняно результати числового розрахунку значень $\omega^2 \cdot 10^3$ для цієї задачі, розглянутих у праці [116] (у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка-Міндліна), з результатами реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної у цьому дослідженні,

за послідовного згущення сітки скінченних елементів. Аналітичний розв'язок цієї задачі за теорією Кірхгофа–Лява наведено у праці [87]: $\omega^2 \cdot 10^3 = 0,3034370$. Розрахунок виконано за таких параметрів: модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 1$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, густина $\rho = 1$ кг/м³.

Також розглядали задачу про визначення частот власних коливань затиснутої по торцях циліндричної оболонки. Зважаючи на симетрію крайових умов і форм коливань, вивчали половину довжини оболонки з сектором π/n , де n – число хвиль по окружності власної форми коливань. Крайові умови в цьому випадку такі: $u_1 = u_2 = u_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ при $\alpha_1 = 0$; $u_1 = \gamma_1 = 0$ при $\alpha_1 = L/2$ для симетричних по довжині оболонки форм коливань. При цьому на вузлових лініях по окружності оболонки крайові умови такі: $u_2 = \gamma_2 = 0$ при $\phi = 0, \frac{\pi}{n}$.

Розраховували за таких параметрів оболонки: модуль Юнга матеріалу оболонки $E = 104$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,2$, густина $\rho = 1$ кг/м³, радіус $R = 1$ м, $L = 3$ м, $h/R = 0,0525$. Розглядали власну форму коливань з числом хвиль по окружності $n = 3$ і з числом півхвиль по довжині оболонки $m = 1$. В табл. 4.2 порівняно результати числового розрахунку нижньої частоти системи (4.15) залежно від кількості блоків розбиття, наведені у праці [115] (в межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна), з результатами, отриманими за описаною у цій роботі моделлю зсувних оболонок. Результати наведено у безрозмірному вигляді: $\omega_* = \omega R \sqrt{\rho (1 - \nu^2) / E}$. Оцінено збіжність отриманих розв'язків.

Таблиця 4.1 – Порівняння значень $\omega^2 \cdot 10^3$

Розбиття	$\omega^2 \cdot 10^3$ (п'ятимодальний варіант [116])	$\omega^2 \cdot 10^3$ (шестимодальний варіант)
3×3	0,3305068	0,3583986
4×4	0,3024595	0,3401321
5×5	0,2974929	0,3288990
6×6	0,2958501	0,3202398

Таблиця 4.2 – Порівняння значень нижньої частоти

Розбиття	Кількість ітерацій	$\omega_* = \omega R \sqrt{\rho \frac{1-v^2}{E}}$ (п'ятимодальний варіант [115])	$\omega_* = \omega R \sqrt{\rho \frac{1-v^2}{E}}$ (шестимодальний варіант)
2×2	5	0,2534	0,27473
3×3	5	0,2244	0,22858
4×4	5	0,2179	0,22084
5×5	6	0,2159	0,21800

З аналізу наведених результатів видно, що значення частот власних коливань, знайдені за шестимодальною теорією оболонок, податливих на зсув і стиснення, є більші порівняно з обчисленими згідно з іншими теоріями оболонок. Врахування обтиску показує, що оболонка швидше може піддатися резонансу, а отже, й руйнуванню.

4.2 Технологія моделювання руху води відкритими каналами

Завданням даного проекту є розробка технології, яка б дала змогу використовувати ArcGIS-розширення, тобто GIS-компоненти, для Web-застосувань на базі ArcGIS Server'а. Такі технології забезпечують просте та зручне інтегрування та використання GIS-компонент на WEB-сайті.

Програмне забезпечення повинно володіти наступними можливостями:

- динамічне додавання та видалення шарів карт;
- підтримка основних операцій з об'єктами на шарах;
- організацію різних запитів про характеристики об'єктів на шарах.

Також додатково типовому шару надаються можливості моделювання та розв'язування прикладних задач з даними характеристиками об'єктів шару.

Дана технологія буде суттєво зменшувати вартість програмного забезпечення, яке б мало бути на комп'ютері кінцевого користувача (клієнта) тому, що на ньому не потрібно встановлювати програмне забезпечення сімейства ArcGIS, і, відповідно, не витрачаються кошти на придбання ArcGIS-ліцензії для роботи з ним.

Вимоги, які забезпечує дана технологія:

- дизайн GIS-компонент повинен бути аналогічний до дизайну Windows-компонент;
- на стороні клієнта не потрібно встановлювати програмного забезпечення ArcGIS, а лише операційні системи сімейства Windows, WEB-browser Internet Explorer 5 та .NET Framework 2.0;
- безпека:
 - HTTPS (HTTP Security protocol);
 - система логування;
- інтеграція у вже існуючі WEB-сайти, створені на основі ArcGIS Server Web ADF та ArcGIS Server Manager;
- мінімальне використання ArcObjects на стороні сервера та робота компонент на стороні клієнта без використання ArcObjects.

Покажемо використання такої технології для створення GIS-компоненти web-сайту гідрологічної системи вибраної території.

4.2.1 Опис розробленої технології

Дана технологія розроблена таким чином, щоб GIS- компоненти, які використовують для ArcMap, можна було використовувати і для Веб-сайту створеного на основі ArcGIS сервера. Технологія складається з наступних трьох головних частин:

1. Core;
2. Implementation Framework для ArcMap;
3. Implementation Framework для ArcGIS Server Web ADF.

Частина Core – реалізовує функціональність яка використовується у ArcMap і у Web та містить:

- a. Abstract Framework – містить загальну функціональність для GIS- компонент;
- b. Persistence Layer Framework – для роботи з базою даних (використовує ArcObjects);
- c. WebRemoting – об’єктно-орієнтований розширений механізм для віддаленого зв’язку який не потребує дозволу повного доступу до даних на стороні клієнта;
- d. GIS UI Framework – windows forms компоненти для відображення та редагування даних отриманих через Persistence Layer Framework.

Implementation Framework для ArcMap – призначений для роботи компонент під ArcMap;

Implementation Framework для ArcGIS Server Web ADF – призначений для роботи компонент у Веб-сайті на основі ArcGIS Server та складається із:

- e. Browser Part – містить функціональність для ініціалізації GIS- компонент та компонент для роботи з ними а також функціональність для здійснення віддалених викликів на сервер;

- f. Web Server Part – містить функціональність для додавання GIS-компонент до сайту (компонента AdfWebPageExtension) а також функціональність для збереження даних для певного користувача у сесію та використання механізму WebRemoting за допомогою Webservice;
- g. ArcGIS Server Part – містить функціональність для отримання ArcObject-ів із ArcGIS Server та роботи з ними.

На рис. 4.1 зображено графічне розташування частин та взаємозв'язки між ними даної технології.

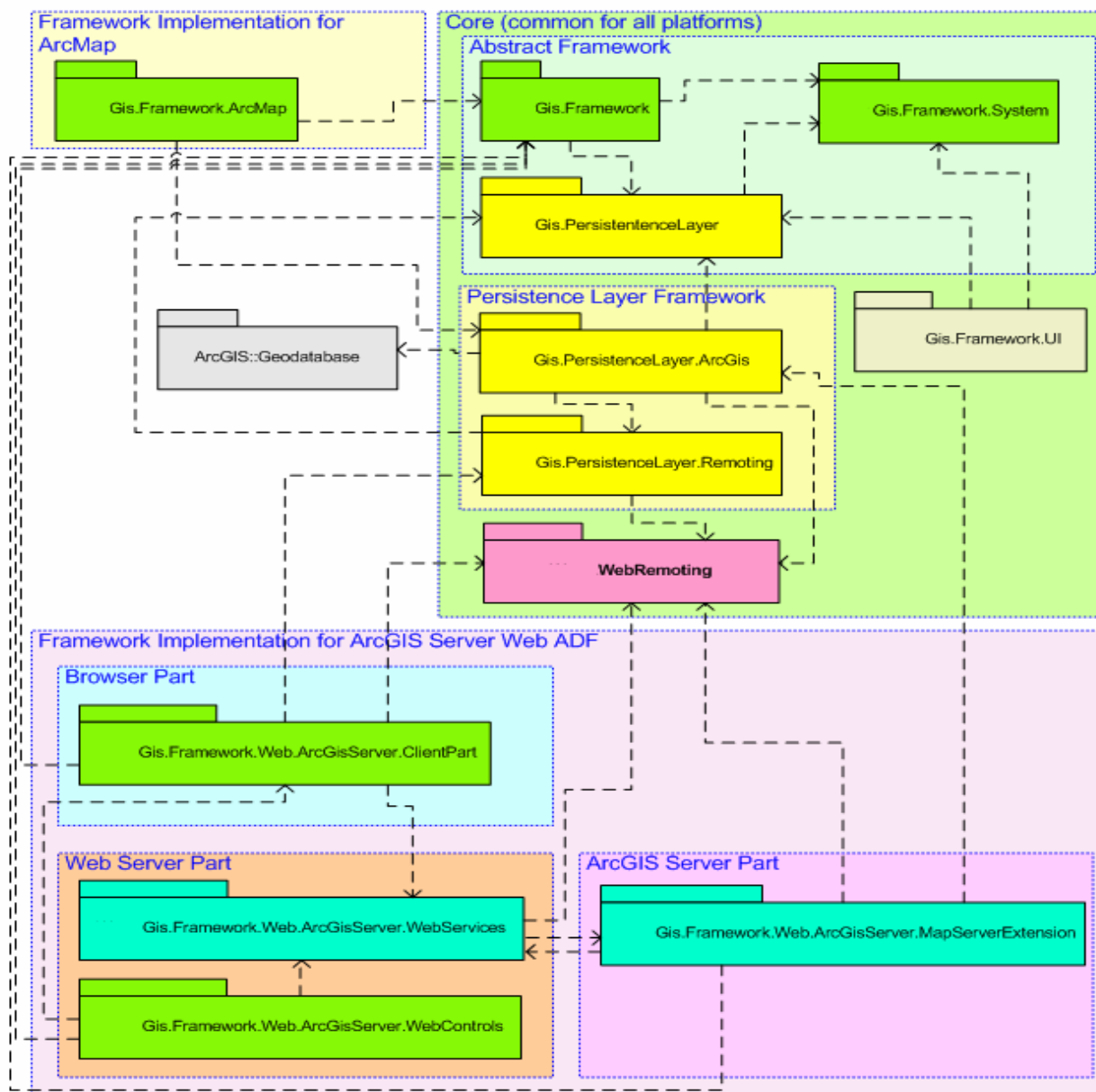


Рисунок 4.1 – Розташування та взаємозв'язки частин системи.

4.2.1.1 Опис системи для ArcGIS Server

На рис. 4.2 зображено розміщення та взаємозв'язки між об'єктами.

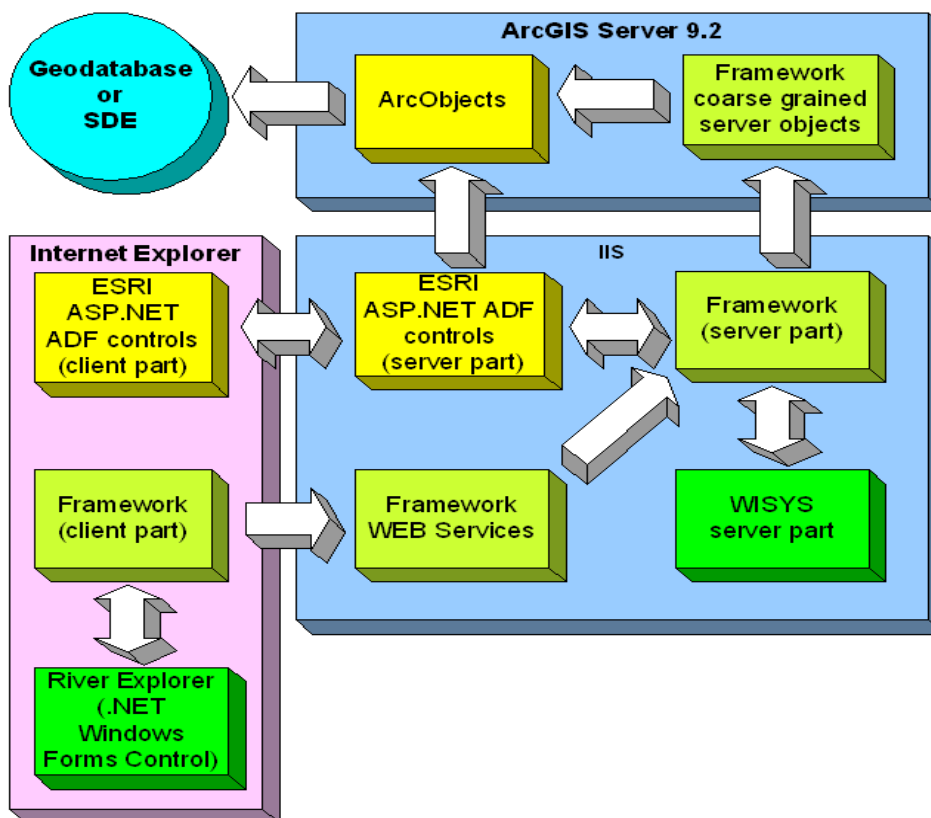


Рисунок 4.2 – Архітектура розміщення об'єктів системи.

Як бачимо на рис. 4.2, GIS-компоненти знаходяться на клієнтській стороні і через певний набір методів (Framework(client part)) зв'язуються з Веб-сервісом, який знаходиться на Веб-сервері. Веб-сервіс служить для зв'язку з ArcGIS Server-ом, де через ArcObject обмінюється даними з базою даних, та збереження даних в сесії. Також на серверній стороні використовуються компоненти ESRI ASP.NET ADF, які тісно пов'язані з відповідними компонентами на Веб-сервері. На Веб-сервері ці компоненти зв'язані з Веб-сервісом через набір методів з Framework(server part), а також передають дані в базу даних через ArcObjects. Такий механізм забезпечує надійну роботу серверів та зв'язків між певними їхніми частинами. За таким механізмом і повинно працювати розширення сайтів на основі ArcGIS Server.

4.2.1.2 Опис роботи GIS-компоненти на сайті.

Оскільки GIS-компоненти - це звичайні Windows Forms компоненти, то на Веб-сайт їх можна додати за допомогою ActiveX технології. Дані компоненти повинні підтримувати COM-технологію. Додавши простий скрипт-код:

```
<object id="RiverExplorer"
  classid="http:<ім'я збірки (з розширенням (наприклад
RiverExplorerClientControl.dll))>
  #<ім'я простору імен>.<ім'я класу> (наприклад
PersistenceLayerClientControl.RiverExplorer)"
  height="100%"
  width="100%">
  <param name="Ім'я властивості" value="значення
властивості" />
</object>
```

Компонента використовуючи функціональність Client Part викликає методи класу MapServerExtesion, який є розширенням ArcGIS Server. Дані виклики відбуваються через ремоутінг механізм (WebRemoting). Виконавши свою функціональність дані заносяться у сесію і коли перемальовується карта дані отримуються із сесії і відображаються або використовуються сайтом.

Великою перевагою створення таких GIS-компонент на сайті є відсутність використання ArcObject, що економить час передавання даних та вартість використання GIS-системи. Це досягається тим, що ArcObjects використовуються лише на сервері. У MapServerExtension ці дані перетворюються у прості та зберігаються у сесії, а тоді вже пересилаються до клієнта через ремоутінг механізм. Тобто у клієнта відсутні ArcObjects.

4.2.1.3 Економне використання ArcObjects.

Ще однією важливою перевагою системи є те, що для роботи з базою даних він економно використовує ArcObjects. Чому економно?

На сервері ArcObjects, до яких сервер дає доступ, можна налаштувати на два види. Це так звані *pooled objects* і *not-pooled objects*. Що це за об'єкти і яка між ними різниця:

Pooled objects – це ArcObjects, які є на сервері (які є в Pool-i), доступ до яких є загальний для всіх користувачів. Тобто, коли користувач використовує певний ArcObject, то він його використовує лише деякий проміжок часу і об'єкт повертається на сервер.

Not-pooled objects – це ArcObjects, які є на сервері, але доступ до яких має лише певний користувач. Тобто для кожного користувача існує свій об'єкт, який закріплений за ним протягом всього процесу роботи. І тільки по закінченню роботи об'єкт через певний час (час встановлюється в налаштуваннях сервера) повертається на сервер для використання його іншим користувачем.

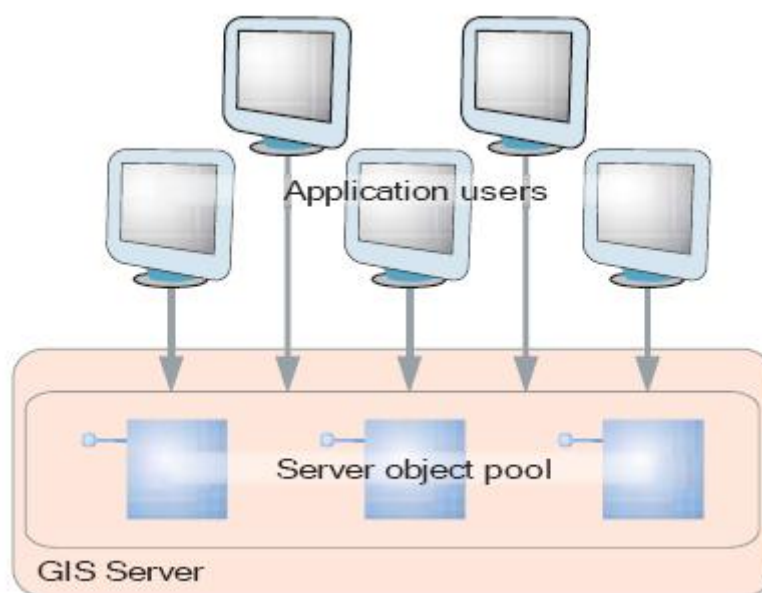


Рисунок 4.3 – Контейнер ArcObjects на GIS Server.

Для побудови розширених Веб-GIS аплікацій або здійснення розширення вже існуючих Веб-GIS аплікацій потрібно, щоб кожен користувач бачив тільки свої зміни! Тобто потрібно використовувати pooled конфігурацію. Але така конфігурація не підходить через наступні причини:

1. обмежене число користувачів.
2. чим більше користувачів – тим більшу кількість ArcObjects потрібно використати (тобто, збільшується вартість їхнього використання).

Тому дана система розроблена для використання Pooled конфігурації, але таким чином, щоб кожен користувач бачив лише свої зміни. Це досягається тим, що коли користувач отримує об'єкт із сервера, об'єкт ініціалізується даними із сесії, а коли об'єкт звільняється, то в сесії зберігається поточний стан (для того, щоб при наступному використанні об'єкта (можливо вже не того самого) він відновив ті зміни (стани), які зробив з попереднім об'єктом) та відновлюється на початковий стан. Таким чином кожен користувач бачить лише свої зміни. Така можливість використання Pooled конфігурації є дуже важливою для розробки таких розширень Веб-GIS аплікацій.

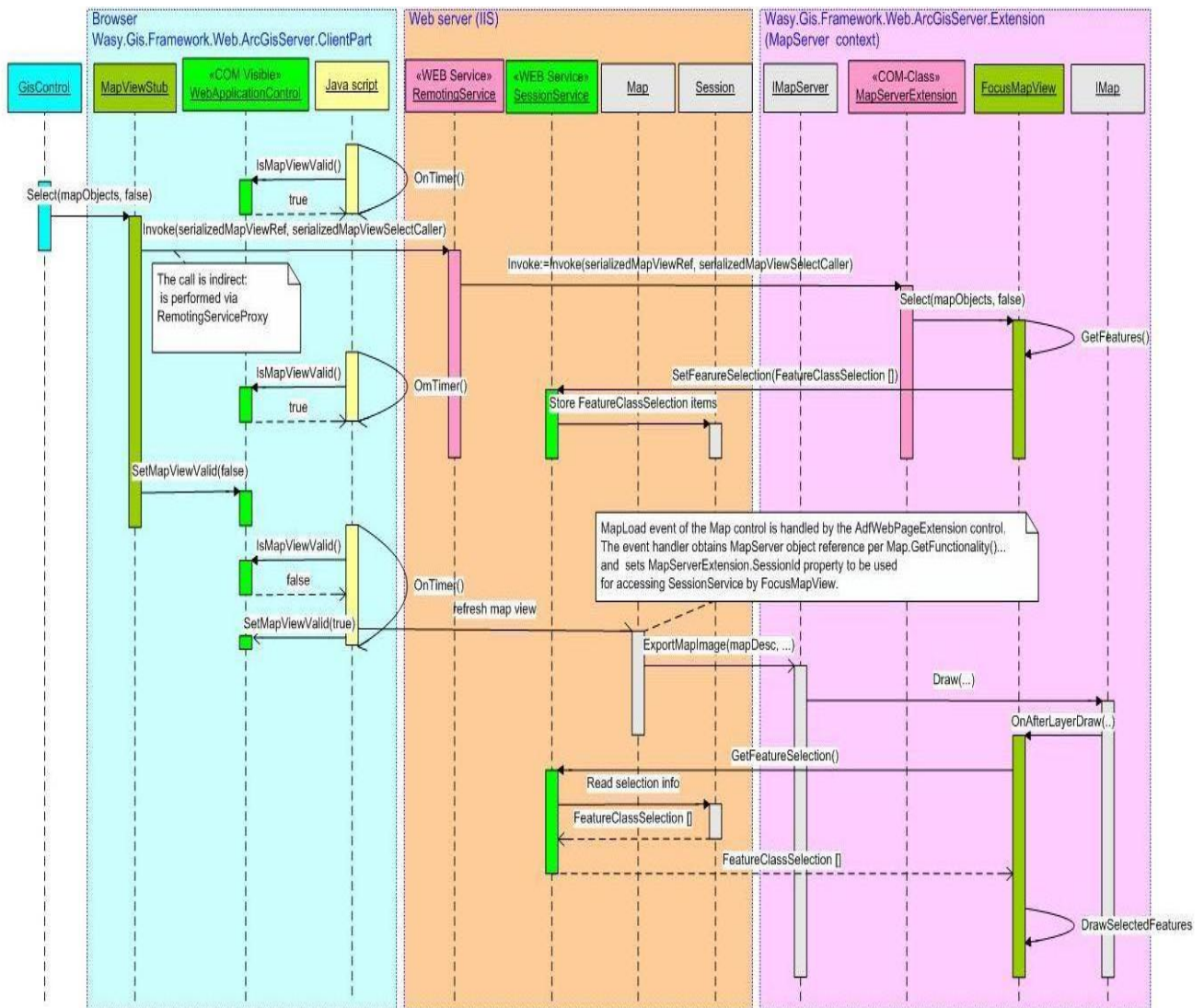


Рисунок 4.4 – Механізм виділення об’єкта на карті.

На рис. 4.4 зображена схема (принцип) роботи виділення геометрій об’єктів (Features). Як бачимо, GIS-компонента через складний механізм класів та об’єктів звертається до сервера. Через JavaScript перевіряється зміна властивості `ValidMap` (чи потрібно перемалювати карту) компоненти `WebApplication`, тобто, якщо стан був змінений, то посилається команда на оновлення карти, і відновлюється стан GIS-компоненти. Під час оновлення карти дані зчитуються з сервера, і в події, яка виникає перед відображенням карти, виділяє об’єкти, ID яких були занесені перед тим. За таким механізмом працює виділення об’єктів на карті.

Збільшення об'єкту працює наступним чином: GIS-компонента отримує із серверу область відображення даного об'єкта (Extent) по його імені і змінюється стан GIS-компоненти. AdfWebPageExtension збільшує даний об'єкт з отриманої області. Через JavaScript перевіряється зміна стану GIS-компоненти, і, якщо стан змінився, то виконується оновлення карти, а в кінцевому результаті – збільшення об'єкту.

Підсвічування об'єктів відбувається за допомогою команди виділити: об'єкт виділяється і через деякий час виділення зникає через виділення пустої множини об'єктів.

Інформація про виділений об'єкт виводиться в окремій Win-формі. GIS-компонента посилає дані на сервер, і там по імені об'єкта з бази отримуються всі дані про об'єкт та відсилаються назад GIS-компоненті, де вони записуються у таблицю (компонента GridView).

На рис. 4.5 зображено роботу WebRemoting механізм.

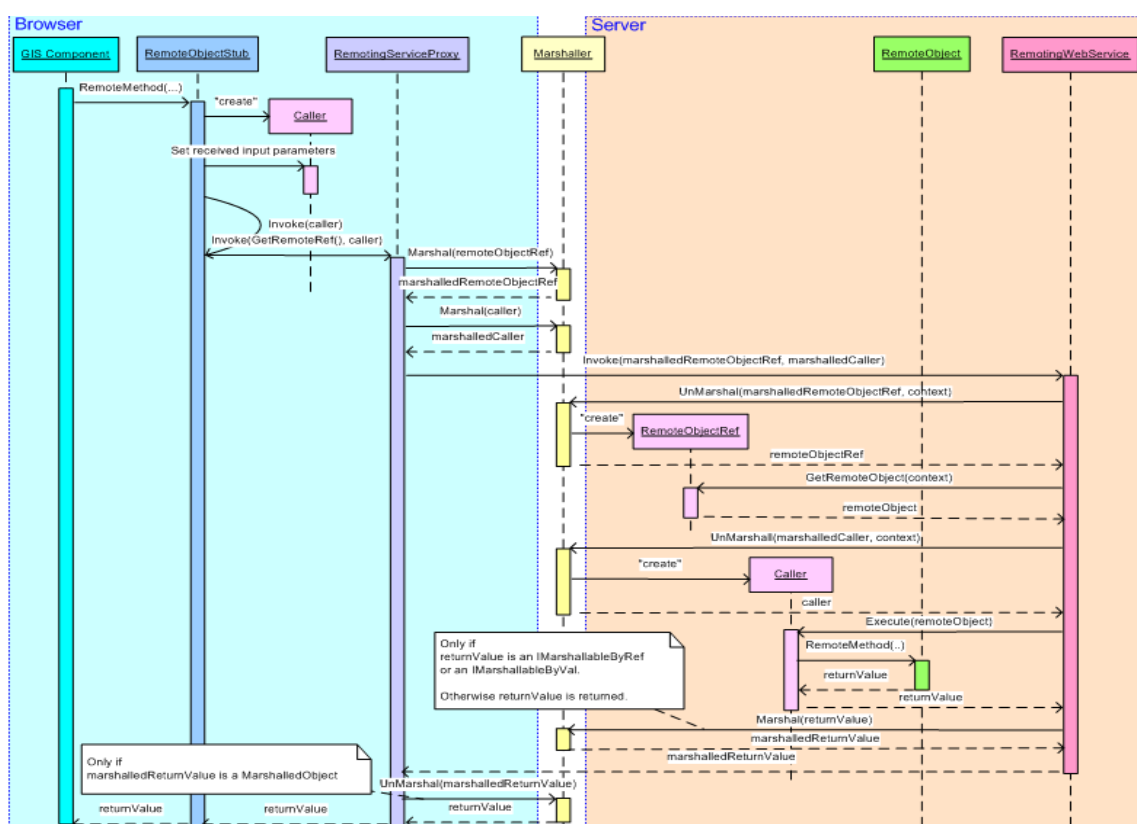


Рисунок 4.5 – Принцип WebRemoting.

Інші результати досліджень та те, як зроблена функціональність компоненти для розширення сайту представлені у табл. 4.1.

4.2.1.4 Опис системи для ArcMap.

Компоненти для ArcMap використовують частину Core. Для того щоб компоненту можна було додати до ArcMap використовується стандартна функціональність для додавання, тобто створення класу породженого від BaseCommand. де реєструється компонента і заповнюється певними властивостями. Сама компонента використовується та ж що і для ArcGIS Server технології.

4.2.1.5 Використання GIS-компонент під ArcMap і під ArcGIS Server.

Чим же досягаються така універсальність компонент? Оскільки Implementation Framework для ArcMap та Implementation Framework для ArcGIS Server Web ADF використовують інтерфейс IMapView (для роботи з картою) то для того, щоб використовувати GIS- компоненту під ArcMap чи під ArcGIS Server потрібно лише представити ту чи іншу реалізацію даного інтерфейсу. Тобто додавши реалізацію для ArcMap можна використовувати одну і ту ж компоненту під ArcGIS Server та ArcMap.

4.2.2 Приклад використання компоненти для розробки сайту водних ресурсів України

Створено Web-застосування інформаційної системи водних ресурсів України, яке використовує дану технологію універсального розширення. Створено та вбудовано GIS-компоненту, яка використовує наступні можливості розширення Веб-сайту:

1. виділення певної річки;
2. збільшення певної річки;
3. підсвічування певної річки;
4. інформація про певну річку;
5. розв'язування задачі на моделювання потоку річки

Вигляд GIS-компоненти зображено на рис 4.6.

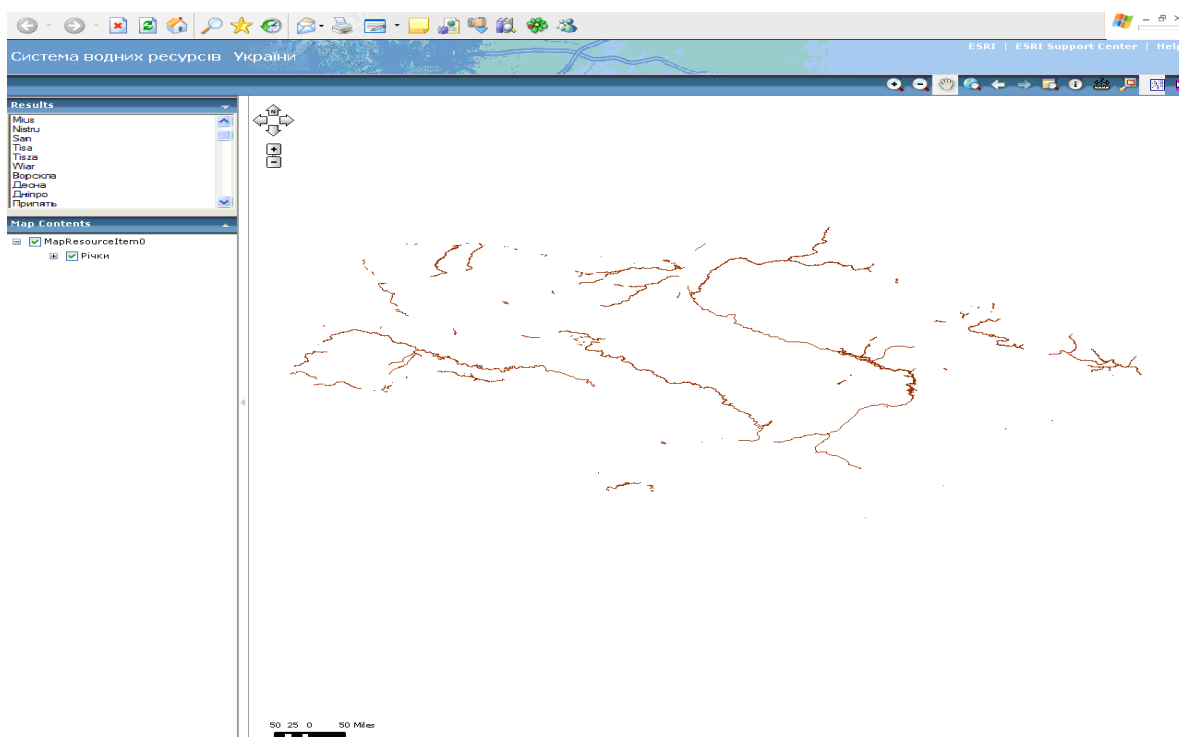


Рисунок 4.6 – GIS-компонента із списком річок.

На рис. 4.7 зображено результат виділення та збільшення річки «Дніпро» для реалізації для ArcMap.

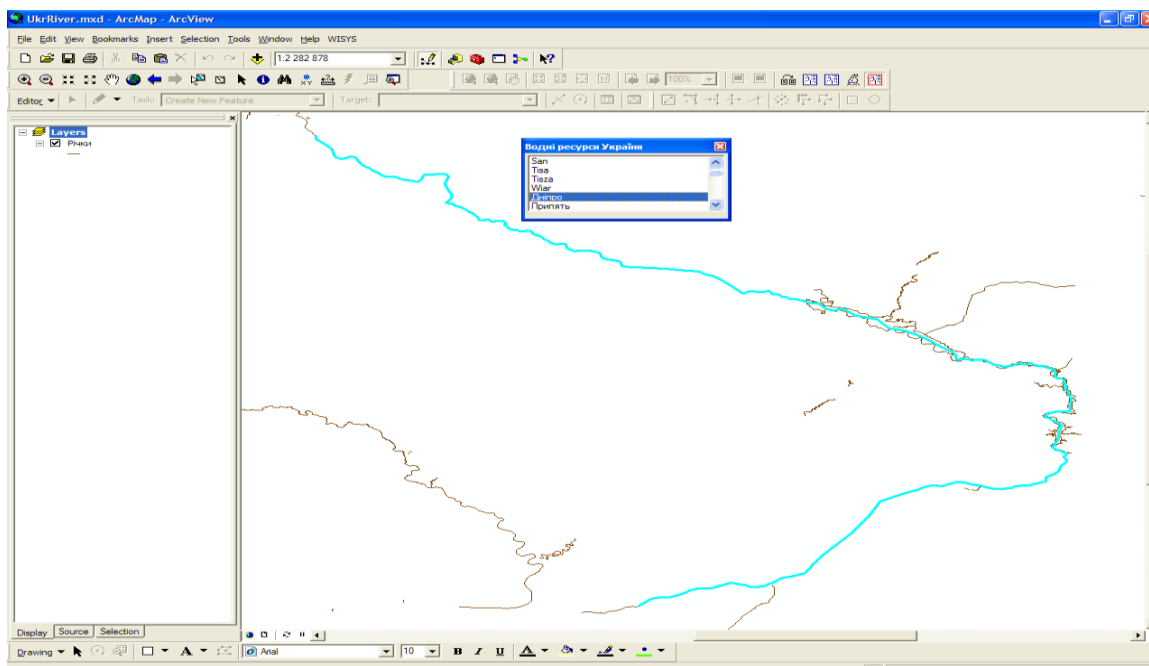


Рисунок 4.7 – Виділення та збільшення річки.

Для переходу до вводу даних про характеристики річки необхідно перейти до наступного рівня пункту меню.

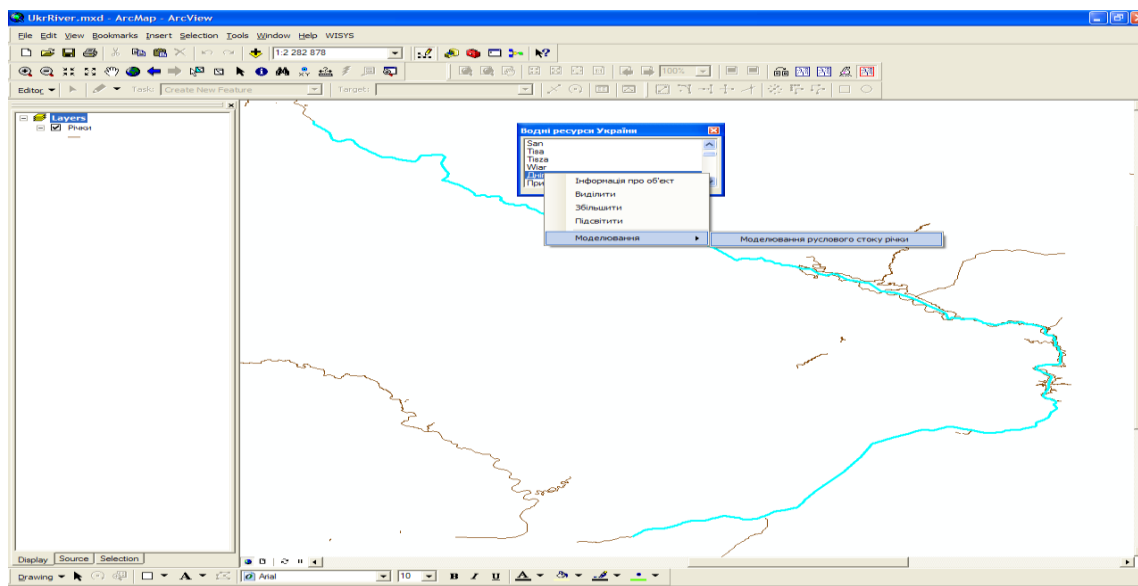


Рисунок 4.8 – Вибір меню моделювання потоку річки.

Підключення системи моделювання руслового потоку річки показано на наступному рисунку. Результати роботи програми показуються візуально на відповідному шарі і таблично у вигляді набору текстових файлів.

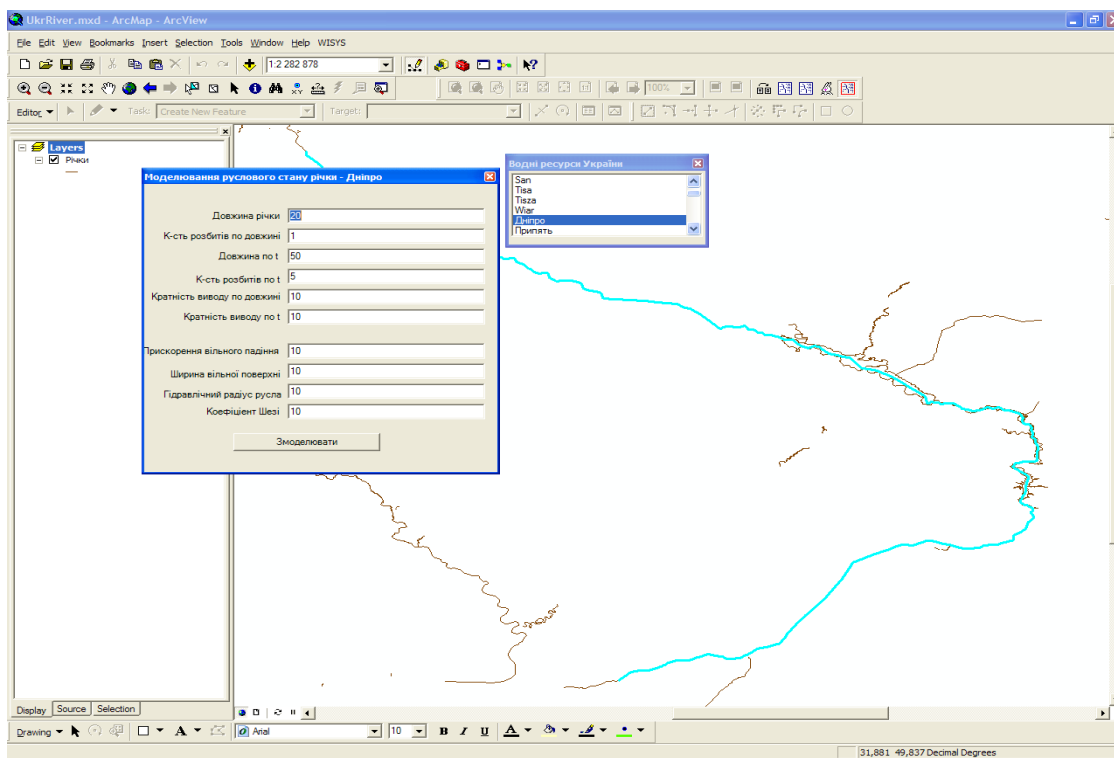


Рисунок 4.9 – Форма для розв’язування задачі моделювання руху води в руслі річки.

4.2.3 Проблеми реалізації функцій системи та шляхи їх вирішення

Наступна таблиця містить інформацію про дослідження системи, проблеми реалізації даної системи та шляхи вирішення цих проблем.

Таблиця 4.3 – Проблеми реалізації системи та шляхи їх вирішення

В чому проблема	Опис проблеми	Вирішення проблеми
Додавання/ видалення Шарів	Як використовувати об'єкти з ArcGIS Server так, щоб вони не були змінені для інших користувачів (при використанні Pooled конфігурації об'єктів).	Під час додавання/ видалення шарів їхні імена і номери позицій зберігаються в сесію. Якщо додавати новий шар, то в події MapLoad() об'єкту Map (карта) до сесії додається нове ім'я та номер позиції. В серверному «розширенні» додається шар на карту. В події MapUnload() з сесії зчитуються імена доданих шарів і видаляються з карти.
Обновлювання Тос (легенди) компоненти	Під час додавання або видалення шарів не обновлюється Тос.	В події MapLoad() об'єкту Map в об'єкті MapDescription (властивість компоненти Map) обновити дані про кількість шарів і виконати обновлення Тос (але лише при першому додаванні нового шару)
Зміна видимості шарів карти	Не змінюється видимість шарів на карті, при їх зміні в Тос.	Змінювати видимість шарів в об'єкті MapDescription (для нових шарів) відповідно до зміни їх у Тос. Список видимих шарів зберігати у сесії.
Малювання виділених об'єктів через ToolSelect (кнопка на панелі інструментів)	Як відбувається малювання.	При кліку по карті (команда Identify) дані зчитуються з сервера і записуються у дерево результатів (TreeNode). Створюється ще один (GraphicsLayer – спеціальний шар для відображення графічних об'єктів) шар, на якому малюються виділені об'єкти.

Продовження таблиці 4.3 – Проблеми реалізації системи
та шляхи їх вирішення

Win-Control і Web-Site	Додавання WinControls (віндовс компоненти) на Web-Site.	Використовуючи ActiveX, можна додавати WinCotrol, дописавши певний HTML-код на сторінку Веб-сайт
Win-Control і Web-Site	Динамічне додавання компонент на Web-Site.	HTML-код можна записати у.xml файл. Тоді при завантаженні сторінки зчитувати із файлу та додавати до коду сторінки.
Win-Control і Web-Site	Взаємодія між Web-Site та Win-Control	Взаємодія відбувається через Веб-сервіс. Дані передаються через сесію.
Виділення об'єктів	Як виділити об'єкти за допомогою RiverExplorer Control	Компонента записує у сесію ID вибраних об'єктів, вони передаються на сайт, де малюються при першому малюванні карти. Через JavaScript відбувається оновлення карти.
Розширення сервера	Створення.	Створюється клас, який унаслідуює інтерфейс IserverObjectExtension і клас ServicedComponent.
Розширення сервера	Отримання класу на ArcGIS Server.	У програмному коді об'єкт створюється наступним чином: <code><type> t = (<type>) IServerObjectExtension Manager.FindExtensionByTypeName("ім'я типу");</code> далі можна викликати методи об'єкта типу <code><type></code> .
Властивості Map, Toc, Toolbar компоненти GISComponentContainerControl	Вибір ID компонент потрібного типу для відповідних властивостей.	Реалізувати інтерфейс IbuddyControlSupport, і при виборі відповідних властивостей в методі GetSupportedBuddyControlTypes() (метод інтерфейсу IbuddyControlSupport) повертати тип відповідної компоненти.
Властивості Map, Toc, Toolbar компоненти GISComponentContainerControl	Заповнення відповідних властивостей.	В події OnInit () (компоненти GISComponentContainerControl) відповідні компоненти (Map, Toc and Toolbar) можна отримати через метод FindControl(string id) властивості Page.

Продовження таблиці 4.3 – Проблеми реалізації системи
та шляхи їх вирішення

Підсвічування	Як зробити підсвічування так, як через Task (компонента для виконання різних операцій: виділення, запитів, тощо), але без використання TreeNode.	В «розширенні» сервера по іменах отримувати типи геометрій об'єктів, Переконвертувати їх з типу ESRI.ArcGIS.Geometry.IGeometry до ESRI.ArcGIS.ADF.Web.Geometry.Geometry Додати динамічно до MapResourceManager GraphicsLayer Створити GraphicsElement (елемент графічного шару карти) і додати до нього типи геометрій об'єктів, Обновити карту, Тоді намалюється дане зображення геометрії.
Перетворення типів геометрій	Час який витрачається на перетворення.	1. Якщо використовувати метод Converter.COMObjectToValueObject (), то перетворення типу однієї геометрії триває 1-2 сек., 2. Якщо тип однієї геометрії перетворювати у масив точок, а тоді поступово утворювати потрібні типи геометрій, то перетворення триває 0.001-0.009 сек.
Підсвічування	Як зробити так, щоб не обновлювалася вся карта, а лише GraphicsLayer.	Потрібно викликати метод RefreshResource (string resourcename) компоненти Map.
Виділення об'єктів	Як отримати ID Features (елементів), отриманих за допомогою виконання роботи Task-ів	В події TaskResult_Load(), компоненти TaskResult, можна слідкувати за зміною кількості Nodes (гілок) (властивість Nodes.Count). Тоді з третього(і т.д.) рівня об'єктів гілок у дереві можна отримати список ID.

Даний підрозділ присвячений побудові та аналізу однокрокової рекурентної схеми (ОРС) інтегрування в часі поширення акустичних хвиль у в'язкій теплопровідній ньютонівській рідині. В основу згаданої схеми покладено змішану варіаційну задачу для системи лінеаризованих рівнянь гідротермодинаміки у термінах переміщення і температури та процедура Петрова-Гальоркіна з покровою частинами квадратичною апроксимацією зміщень і частинами лінійною апроксимацією температури. З огляду на обчислювальні аспекти відзначено, що розв'язування системи рекурентних рівнянь ОРС еквівалентне відшукуванню сідлової точки певного квадратичного функціоналу. Для аналізу стійкості ОРС використано рівняння балансу енергії дискретизованої задачі і подано достатній критерій безумовної її стійкості. Апроксимативність ОРС охарактеризовано апостеріорними оцінками похибок, які з огляду на теорему Лакса-Філіпова і встановлюють порядки швидкості збіжності пропонованої схеми

4.3 Загартування поверхні металу дією рухомими імпульсними джерелами тепла та тиску

Надійність роботи машин безпосередньо пов'язана з станом поверхневого шару деталей, які в процесі експлуатації контактують одна з одною та з навколишнім середовищем. Від якості поверхневого шару залежать експлуатаційні властивості – опір втомному руйнуванню, зносостійкість, корозійна стійкість та інше. Зв'язок характеристик якості поверхневого шару з експлуатаційними властивостями деталей свідчить про те, що оптимальна поверхня повинна бути достатньо твердою, мати залишкові напруження стиску, дрібнодисперсну структуру, згладжену форму мікронерівностей з великою площею опорної поверхні. Експлуатаційні характеристики деталей машин та механізмів нерідко залежать не стільки від якості металу всього перерізу,

скільки від фізико-хімічних властивостей поверхневого шару та стану поверхні виробів, які формуються на кінцевих стадіях виготовлення деталей. Необхідні властивості та параметри поверхневого шару та поверхні можна отримувати модифікуванням та нанесенням різного роду покриттів на робочі поверхні виробів [71].

Процеси, що протікають у поверхневому шарі деталі при її експлуатації, а також службові характеристики залежать від стану шару, отриманого при технологічній обробці, умов навантаження, особливостей контактної взаємодії. Використання поверхневого зміцнення дозволяє підвищити ресурс роботи виробу. Способи зміцнення можуть впливати як на мікрогеометрію поверхні, так і на фізико-хімічні властивості приповерхневих об'ємів металу, їх структуру і фазовий склад, який визначає стан поверхневого шару. Механічні властивості матеріалів пов'язують з початковою мікроструктурою, тоді як експлуатаційні властивості визначаються динамічною структурою, яка формується при деформації. Недостатнє врахування цього чинника значно обмежує цілеспрямоване керування структурою і властивостями поверхневих шарів деталей і практично не дозволяє одержувати вироби із заданими характеристиками [70].

При виготовленні деталей машин необхідно забезпечити оптимальні показники якості поверхні, зокрема шорсткість, макро- і мікроструктуру матеріалу, твердість, величину і знак залишкових макронапружень та інші. На практиці застосовуються методи поверхневого зміцнення з використанням висококонцентрованих джерел енергії, суть яких полягає у дії на відносно невеликі об'єми металу з великими швидкостями концентрованих потоків енергії високої інтенсивності з наступним їх швидким охолодженням. При таких умовах обробки отримуються специфічні фізико-механічні та експлуатаційні характеристики поверхневих шарів деталей машин. До таких методів належить і фрикційне зміцнення, висококонцентрований потік енергії

утворюється у зоні контакту інструмент-деталь при терті з високими швидкостями металевому диску по оброблюваній поверхні.

Фрикційне зміцнення відноситься до методів поверхневого зміцнення із застосуванням висококонцентрованих потоків енергії. Такий потік енергії створюється на локальній поверхні оброблюваної деталі у зоні контакту інструмент-деталь при високошвидкісному терті диска по поверхні. Під час тертя відбувається одночасне швидкісне зсувне деформування локального поверхневого шару металу. Швидкість нагріву поверхневого шару у зоні контакту інструмент-деталь досягає 10^5 - 10^6 К/с. Локальні поверхневі шари деталі нагріваються до температур вище точки фазових перетворень A_{c3} . Час дії концентрованого джерела на локальні об'єми металу є малим, товщина металу, яка прогрівається до високих температур у порівнянні з основним об'ємом, є також незначною, то охолодження за рахунок тепловідводу у глибину металу відбувається з великими швидкостями. Швидкість охолодження досягає 10^4 - 10^5 К/с. У поверхневому шарі деталей машин формується специфічний структурно-напружений стан металу – білий шар. Структура білого шару представляє собою високодисперсний мартенсит, залишковий аустеніт і дуже дисперсні карбіди [39, 93].

Для забезпечення отримання необхідних параметрів і властивостей поверхневого шару деталей необхідно визначити температурно-напружений стан у зоні контакту інструмент-деталь під час фрикційної обробки, яка є швидкоплинною. Експериментально визначити розподіл температури та деформацій у зоні контакту інструмент-деталь є проблематично. Запропоновані теоретичні викладки не завжди відповідають реальним процесам.

Метою даної роботи є визначення розподілу температур та напружень по глибині зміцненого шару під час фрикційного зміцнення деталей машин.

Для інтенсифікації зсувного деформування поверхневого шару оброблюваної деталі у процесі фрикційного зміцнення робочу поверхню інструменту було виготовлено перервною. На ній були нарізані поперечні пази.

Ширина нарізаного пазу на робочій поверхні інструменту вибиралась з умови повного виходу інструменту з контакту з оброблюваною поверхнею. У зоні контакту інструмент-деталь діють імпульси теплової енергії.

Побудову математичної моделі для визначення термопружного стану по глибині поверхневого шару оброблюваної деталі здійснювали методом скінчених елементів [45]. Для визначення розподілу температури по глибині оброблюваної деталі під час фрикційного зміцнення приймаємо, що температура в зоні контакту інструмент-деталь на поверхнях контактуючих тіл є однаковою; відомим є закон розподілу нормальних і дотичних напружень в зоні контакту інструмент-деталь. Зона контакту інструмент-деталь розглядається як адіабатичний стрижень до торця якого прикладено джерело теплової енергії та навантаження (рис. 4.10).

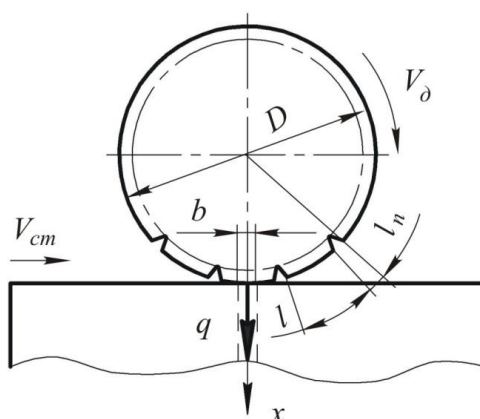


Рисунок 4.10 – Схема фрикційного зміцнення деталей машин інструментом з перервною робочою частиною.

4.3.1 Математична модель: початково-крайова задача поверхневого зміцнювання

Нехай пружне тіло (інструмент або деталь) займає обмежену область Ω в евклідовому просторі \mathbb{R}^d ($d = 1, 2$ або 3) з неперервною за Ліпшицем границею

Г. Вважатимемо, що в початковий момент часу $t=0$ температурне поле ненапруженого тіла описується функцією $T_0(\mathbf{x})$.

Через дію об'ємних сил $\mathbf{f} = \{f_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$, поверхневих навантажень $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$, внутрішніх розподілених джерел тепла $w = w(\mathbf{x}, t)$ та теплових потоків $\hat{q} = \hat{q}(\mathbf{x}, t)$ на границі області, частинки тіла отримують зміщення $\mathbf{u} = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^d$ та зміни температури $\theta(\mathbf{x}, t) + T_0(\mathbf{x})$. Нехай всі ці характеристики еластичного тіла задовольняють наступним рівнянням термопружності [47]

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{u}, \theta) = \rho f_i, \\ C_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + T_0 \gamma_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial t} = w \quad \text{в } \Omega \times (0; T], \end{cases} \quad (4.16)$$

де

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}, \theta) := c_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} - \alpha_{ij} \theta \right) + a_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m \partial t}. \quad (4.17)$$

Ми припускаємо, що пружне тіло характеризується густиною маси $\rho = \rho(\mathbf{x}) > 0$, коефіцієнтами пружності $\{c_{ijkl}(\mathbf{x})\}_{i,j,k,m=1}^d$ та в'язкості $\{a_{ijkl}(\mathbf{x})\}_{i,j,k,m=1}^d$ зі звичайними властивостями симетричності та еліптичності

$$\begin{cases} c_{ijkl} = c_{jikm} = c_{kmij}, \\ c_{ijkl} e_{ij} e_{km} \geq c_0 e_{ij} e_{ij}, \quad c_0 = \text{const} > 0 \quad \forall e_{ij} = e_{ji} \in \mathbb{R} \quad \text{в } \Omega, \\ a_{ijkl} = a_{jikm} = a_{kmij}, \\ a_{ijkl} e_{ij} e_{km} \geq a_0 e_{ij} e_{ij}, \quad a_0 = \text{const} > 0 \quad \forall e_{ij} = e_{ji} \in \mathbb{R} \quad \text{в } \Omega, \end{cases}$$

коефіцієнтом об'ємної теплоємності за постійної деформації $C_\varepsilon = C_\varepsilon(\mathbf{x}) > 0$,

коефіцієнтами теплопровідності $\{\lambda_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^d$ такими, що

$$\begin{cases} \lambda_{km} = \lambda_{mk}, \\ \lambda_{km} \xi_k \xi_m \geq \lambda_0 \xi_k \xi_m, \quad \lambda_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_k \in \mathbb{R} \text{ в } \Omega, \end{cases}$$

коефіцієнтом теплового розширення $\{\alpha_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^d$ з наступними властивостями

$$\begin{cases} \alpha_{km} = \alpha_{mk}, \\ \alpha_{km} \xi_k \xi_m \geq \alpha_0 \xi_k \xi_m, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_k \in \mathbb{R} \text{ в } \Omega, \end{cases}$$

і коефіцієнтами тензора температурних напружень $\{\gamma_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^d$, який визначається таким чином

$$\gamma_{ij} = c_{ijkm} \alpha_{km} \text{ в } \Omega.$$

На додачу до системи рівнянь (2.1), (2.2) ми розглядаємо початкові умови

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (4.18)$$

крайові умови для складових механічного поля

$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 & \text{на } \Gamma_u \times [0, T], \Gamma_u \subset \Gamma, \\ \sigma_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i & \text{на } \Gamma_\sigma \times [0, T], \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u, \end{cases} \quad (4.19)$$

та для складових температурного поля

$$\begin{cases} -\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial n_j} = \alpha(\theta - \hat{\theta}_k) & \text{на } \Gamma_N \times [0, T], \Gamma_N \subset \Gamma, \\ -\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial n_j} = \hat{q} & \text{на } \Gamma_q \times [0, T], \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.20)$$

Тут $\alpha = \alpha(\mathbf{x}, t) \geq 0$ є коефіцієнтом температурної взаємодії тіла з навколишнім середовищем з температурою $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$.

Таким чином, початково-крайова задача поверхневого зміцнення визначається рівняннями (4.16), (4.17), початковими (4.18) та крайовими умовами (4.19), (4.20).

4.3.2 Варіаційна постановка задачі

Введемо наступні позначення $v_i(t) = v_i(\mathbf{x}, t), v_i'(t) = \partial v_i(\mathbf{x}, t) / \partial t$,
 $v_i''(t) := \partial^2 v_i(\mathbf{x}, t) / \partial t^2$ та простори допустимих зміщень і температур

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_u\}, & G = \{\xi \in H^1(\Omega)\}, \\ Z = L^2(\Omega), & \mathbf{H} = Z^d \end{cases} \quad (4.21)$$

та відповідну (4.16)-(4.20) варіаційну задачу термопружності

$$\begin{cases} \text{дано } \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \theta_0 \in Z; \\ \text{знайти } \{\mathbf{u}(t), \theta(t)\} \in L^2(0, T; \mathbf{V} \times G) \text{ таку, що:} \\ m(\mathbf{u}''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \\ \quad - b(\theta(t), \mathbf{v}) = \langle l_s(t), \mathbf{v} \rangle, \\ s(\theta'(t), \xi) + \lambda(\theta(t), \xi) + b(\xi, \mathbf{u}'(t)) = \langle l_c(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T] \\ m(\mathbf{u}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c(\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0, \\ s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \forall \xi \in G, \end{cases} \quad (4.22)$$

де

$$\begin{aligned} m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, & c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} dx, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} a_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} dx, & \langle l_s, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma}_i v_i d\gamma, \\ b(\xi, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} c_{ijkl} \alpha_{km} \xi \frac{\partial v_l}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \gamma_{ij} \xi \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ s(\theta, \xi) &= \int_{\Omega} T_0^{-1} C_{\varepsilon} \theta \xi dx, \\ \lambda(\theta, \xi) &= \int_{\Omega} T_0^{-1} \lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} dx + \int_{\Gamma_N} T_0^{-1} \alpha \theta \xi d\gamma, \\ \langle l_c, \xi \rangle &= \int_{\Omega} T_0^{-1} w \xi dx + \int_{\Gamma_N} T_0^{-1} \alpha \hat{\theta} \xi d\gamma + \int_{\Gamma_q} T_0^{-1} \hat{q} \xi d\gamma \quad \forall \theta, \xi \in G. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Варіаційна задача (4.22) буде основним об'єктом дослідження даної статті. Наступним кроком нашого дослідження є побудова числової схеми розв'язку задачі (4.22).

4.3.3 Напівдискретизація варіаційної задачі

Для обчислення апроксимацій розв'язку варіаційної задачі (4.22), введемо послідовності скінченновимірних підпросторів $\{\mathbf{V}_h\} \subset \mathbf{V}$ таких, що $\dim \mathbf{V}_h = N(h) = N \rightarrow \infty$, при $h \rightarrow 0$, та таку послідовність $\{G_h\} \subset G$, що $\dim G_h = K(h) = K \rightarrow \infty$, при $h \rightarrow 0$. Далі ми позначаємо через $\{\boldsymbol{\varphi}_i\}_{i=1}^N$ та $\{\phi_i\}_{i=1}^K$ базиси просторів \mathbf{V}_h та, відповідно, G_h . Таким чином, шукані апроксимації можна буде записати у вигляді

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^N u_m(t) \boldsymbol{\varphi}_m(\mathbf{x}), \\ \theta(\mathbf{x}, t) \approx \theta_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^K \theta_n(t) \phi_n(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (4.24)$$

що дозволить після застосування процедури Гальоркіна до (4.22) отримати

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{дано } h = \text{const} > 0, \mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}, \theta_0 \in Z; \\ \text{знайти таку пару } \{\mathbf{u}_h(t), \theta_h(t)\} \in L^2(0, T; \mathbf{V}_h \times G_h), \text{ що:} \\ m(\mathbf{u}_h''(t), \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_h'(t), \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) \\ \quad - b(\theta_h(t), \mathbf{v}) = \langle l_s(t), \mathbf{v} \rangle, \\ s(\theta_h'(t), \xi) + \lambda(\theta_h(t), \xi) + b(\xi, \mathbf{u}_h'(t)) = \langle l_c(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(\mathbf{u}_h'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, c(\mathbf{u}_h(0) - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \\ s(\theta_h(0) - \theta_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in G_h. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Послідовна підстановка $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}_m(x)$, $m = 1, \dots, N$, та $\xi = \phi_n(x)$, $n = 1, \dots, K$, в (4.25) результату в задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} MU''(t) + AU'(t) + CU(t) - B\Theta(t) = \mathbf{L}_s(t), \\ S\Theta'(t) + \Lambda\Theta(t) + B^T \mathbf{U}(t) = \mathbf{L}_c(t) \quad \forall t \in (0, T], \\ M(\mathbf{U}'(0) - \dot{\mathbf{U}}_0) = 0, \quad A(\mathbf{U}(0) - \mathbf{U}_0) = 0, \\ S(\Theta(0) - \Theta_0) = 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

з невідомими векторами $\mathbf{U}(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))^T$ та $\Theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_K(t))^T$. Тут матриці при невідомих визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} M &= \{m_{ij}\}_{i,j=1}^N = \{m(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, & A &= \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N = \{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, \\ C &= \{c_{ij}\}_{i,j=1}^N = \{c(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^N, & B &= \{b_{ij}\}_{i=1, j=1}^{N, K} = \{b(\varphi_i, \phi_j)\}_{i=1, j=1}^{N, K}, \\ S &= \{s_{ij}\}_{i,j=1}^K = \{s(\phi_i, \phi_j)\}_{i,j=1}^K, & \Lambda &= \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^K = \{\lambda(\phi_i, \phi_j)\}_{i,j=1}^K, \\ L_s(t) &= \{\langle l_s(t), \varphi_i \rangle\}_{i=1}^N, & L_c(t) &= \{\langle l_c(t), \phi_i \rangle\}_{i=1}^K. \end{aligned}$$

Матриці M, A, C, S та Λ є матрицями Грама для систем лінійно незалежних функцій $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ та $\{\phi_i\}_{i=1}^K$ відносно, відповідно, скалярних добутків $m(u, v), a(u, v), c(u, v), s(u, v)$ та $\lambda(u, v)$. Отже, симетричні матриці M, A, C, S та Λ є додатно визначеними, що дає можливість стверджувати існування та єдиність розв'язку задачі (1.14).

Таким чином, для кожного фіксованого значення параметру дискретизації $h > 0$ напівдискретні апроксимації Гальоркіна $\mathbf{u}_h(t) \in \mathbf{V}_h, \theta_h(t) \in G_h$ однозначно визначаються задачею Коші (4.26) та декомпозицією (4.24).

4.3.4 Однокрокова рекурентна схема інтегрування в часі

Поділимо часовий проміжок $0, T$ на P відрізків t_k, t_{k+1} , $k = 0, \dots, P-1$, зі сталим кроком $\Delta t = t_{k+1} - t_k > 0$.

На кожному кроці в часі $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, P-1$, розв'язок $\mathbf{U}(t), \Theta(t)$ задачі (4.26) будемо апроксимувати такими поліномами $\mathbf{U}_{\Delta t}(t), \Theta_{\Delta t}(t)$, що

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{\Delta t}(t) = \mathbf{U}^k + \Delta t \omega_k(t) \dot{\mathbf{U}}^k + \frac{1}{2} [\Delta t \omega_k(t)]^2 \ddot{\mathbf{U}}^{k+\frac{1}{2}}, \\ \Theta_{\Delta t}(t) = [1 - \omega_k(t)] \Theta^k + \omega_k(t) \dot{\Theta}^{k+\frac{1}{2}}, \\ \omega_k(t) = \frac{t - t_k}{\Delta t} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases} \quad (4.27)$$

з невідомими трійками $\mathbf{U}^k, \dot{\mathbf{U}}^k, \ddot{\mathbf{U}}^{k+\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^N$ і парами $\Theta^k, \dot{\Theta}^{k+\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^K$. В загальному, на проміжку $0, T$, функції $\mathbf{U}_{\Delta t}(t)$ та $\Theta_{\Delta t}(t)$ є неперервними кусково-квадратичними та кусково-лінійними функціями відповідно.

Можна показати, що після підстановки апроксимацій (4.27) в (4.26), з подальшим застосуванням методу Петрова-Гальоркіна ми отримуємо однокрокову чисельну рекурентну схему інтегрування задачі Коші в часі (4.27)

$$\begin{cases} \text{дано параметри } \gamma, \beta \in [0, 1], \Delta t > 0 \text{ і трійку } \{\mathbf{U}^k, \dot{\mathbf{U}}^k, \Theta^k\}; \\ \text{знайти такі трійку } \{\ddot{\mathbf{U}}^{k+\frac{1}{2}}, \dot{\mathbf{U}}^{k+1}, \mathbf{U}^{k+1}\} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ \text{та пару } \{\dot{\Theta}^{k+\frac{1}{2}}, \Theta^{k+1}\} \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K, \text{ що} \\ \left[M + \Delta t \gamma A + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta C \right] \ddot{\mathbf{U}}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta t \gamma B \dot{\Theta}^{k+\frac{1}{2}} \\ \quad = \mathbf{L}_s(t_{k+\frac{1}{2}}) - A + \Delta t \gamma C \dot{\mathbf{U}}^k - C \mathbf{U}^k + B \Theta^k, \\ \Delta t \gamma B^T \ddot{\mathbf{U}}^{k+\frac{1}{2}} + \left[\mathbf{E} + \Delta t \gamma \Lambda \right] \dot{\Theta}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{L}_c(t_{k+\frac{1}{2}}) - B^T \dot{\mathbf{U}}^k - \Lambda \Theta^k, \\ \dot{\mathbf{U}}^{k+1} = \dot{\mathbf{U}}^k + \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^{k+\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^k + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}^{k+\frac{1}{2}}, \\ \Theta^{k+1} = \Theta^k + \Delta t \dot{\Theta}^{k+\frac{1}{2}} \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4.28)$$

Також можна довести, що однокрокова рекурентна схема (4.28) є безумовно (відносно кроку в часі Δt) сіткою, якщо параметри β, γ задовольняють умови

$$\frac{1}{2} \leq \gamma \leq \beta \leq 1. \quad (4.29)$$

Дана схема має другий порядок збіжності, при $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$. Більше того, оскільки чисельна схема (4.28) моделює процес поширення хвиль у пружному тілі, крок інтегрування в часі мусить задовольняти умову Куранта-Фрідрікса-Леві

$$c\Delta t \leq \frac{1}{2}h \quad (4.30)$$

де $c > 0$ є швидкістю поширення хвилі в пружному тілі.

4.3.5 Чисельні експерименти та обговорення

На основі вказаних рівнянь визначаємо розподіл температури по глибині, зміну теплового потоку, зміну потенціальної та кінетичної енергії, у зоні контакту інструмент-деталь під час фрикційного зміцнення деталей.

Розглянемо розподіл температури під зоною контакту інструмент-деталь при зміцненні сталі 40X у загартованому і низьковідпущеному стані інструментом виготовленим зі сталі 45 у стані постачання з нарізаними пазами на його робочій частині.

При фрикційному зміцненні у зоні контакту інструмент-деталь діє джерело теплової енергії дуже великої інтенсивності за рахунок швидкообертового металевого інструмента-диска (60-70 м/с) по оброблюваній поверхні деталі. Швидкість переміщення деталі є малою (0,01-0,1 м/с) у порівнянні зі швидкістю обертання диску. Інструмент притискається до оброблюваної поверхні з силою (600-1000 Н) у залежності від режимів обробки та ширини зони контакту [39].

Теплова енергія, яка утворюється у зоні контакту частково йде у поверхневий шар оброблюваної деталі, а частково переноситься в інструмент. Частка теплової енергії, яка йде у деталь становить 25-35 % енергії, яка утворилася у зоні контакту інструмент-деталь. При проходженні пазу над

оброблюваною поверхнею відбувається її охолодження. Співвідношення ширини пазу до гладкої частини на робочій частині було вибрано у співвідношенні 1 : 10.

Так як ми маємо рухоме джерело енергії, час його дії на одиничний об'єм поверхневого шару металу оброблюваної деталі буде визначатися часом проходження зони інструмент-деталь над певною точкою поверхні. Після проходження джерела теплової енергії над одиничною точкою оброблюваної поверхні вона починає інтенсивно охолоджуватись. Так як швидкість переміщення стола верстата, а відповідно зони контакту є невеликою у порівнянні зі швидкістю обертання інструменту, то у зоні контакту інструмент-деталь відбувається декілька циклів нагрівання і охолодження поверхневого шару металу оброблюваної поверхні за рахунок проходження по чергово через неї гладкої поверхні і пазу.

Спочатку розглянемо зміну температури по глибині поверхневого шару при фрикційному зміцненні одиничного виступу та пазу, а також частини наступного виступу на робочій поверхні інструменту. При вибраних режимах зміцнення (швидкість на периферії робочої частини інструменту, швидкість переміщення стола верстата, вертикальна подача інструменту, поперечна подача стола верстата) час контакту виступу склав $5 \cdot 10^{-4}$ с, а час проходження паза – $6 \cdot 10^{-5}$ с.

У початковий момент часу при входженні у контакт гладкої поверхні інструменту з оброблюваною поверхнею швидкість нагрівання поверхневого шару різко зростає і біля поверхні сягає $6 \cdot 10^6$ К/с. З глибиною вона зменшується, аналогічно змінюється і температура. Густина теплового потоку, який іде у деталь, є найбільшою на поверхні оброблюваної деталі і становить $1,4 \cdot 10^6$ Дж/(с·м²), з глибиною зменшується. З часом, який становить проходження половини довжини гладкої частини одного виступу інструменту ($\sim 2,5 \cdot 10^{-4}$ с) швидкість зміни температури суттєво змінилася і на поверхні сягає вже $3,7 \cdot 10^5$ К/с. З глибиною плавно зменшується і на глибині близько 1 мм

сягає $2,5 \cdot 10^5$ К/с. Інтенсивно зростає температура поверхневого шару. На поверхні оброблюваної деталі вона досягає до 180 °С.

Розглянемо зону контакту у момент часу, коли перша гладка частина інструменту починає виходити з контакту з оброблюваною поверхнею. Швидкість нагрівання поверхневого шару значно зменшилась у порівнянні з початком тертя і складає $2,6 \cdot 10^5$ К/с на поверхні оброблюваної деталі. Температура оброблюваної поверхні зросла до 260 °С. На глибині $0,4$ мм метал нагрівається до температури 110 °С (рис.4.11).

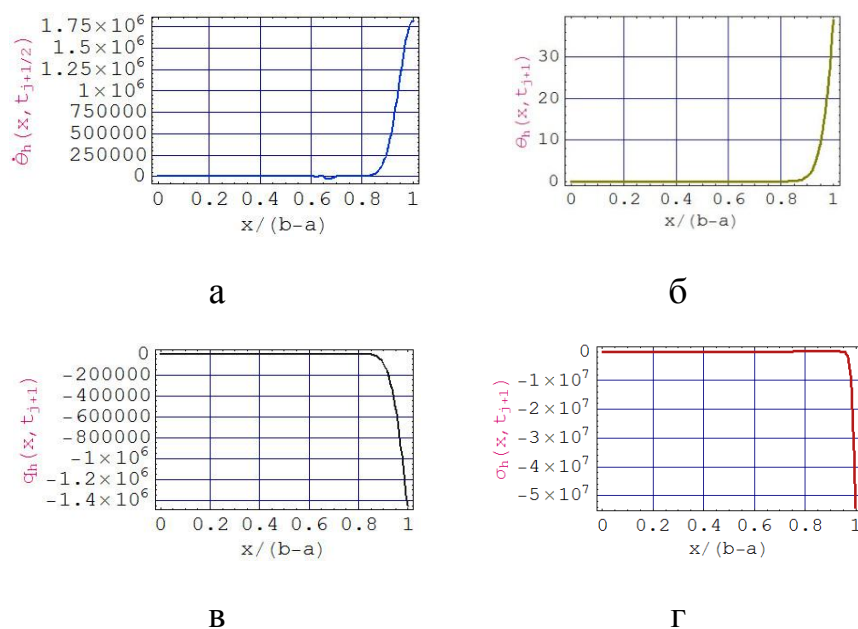


Рисунок 4.11 – Зміна швидкості нагрівання (а), температури по глибині поверхневого шару (б), величини теплового потоку (в) та напруження у поверхневому шарі деталі під час фрикційного зміцнення.

При виході з контакту гладкої частини робочої поверхні інструменту і проходженні над зоною контакту пази процес тертя інструменту припиняється. Оброблювана поверхня в зоні контакту починає охолоджуватись. Швидкість охолодження оброблюваної поверхні досягає $3 \cdot 10^6$ К/с. Тепловий потік на

поверхні рівний нулеві, але потік від дії попередньої гладкої частини інструменту продовжує переміщуватись у глибину оброблюваної деталі, але його інтенсивність зменшується. Швидкість охолодження поверхневого шару з глибиною різко зменшується, бо під поверхнею ще продовжує дія попереднього теплового потоку.

При входженні в контакт наступної гладкої поверхні інструменту з оброблюваною поверхнею, температура якої зменшилась до $170\text{ }^{\circ}\text{C}$ (спад температури складає біля $80\text{ }^{\circ}\text{C}$) починає знову процес інтенсивного нагрівання. Швидкість нагрівання складає $1,7 \cdot 10^6\text{ K/s}$. З часом тертя наступної гладкої частини інструменту швидкість нагрівання дещо зменшується.

У процесі фрикційного зміцнення інструментом з перервною робочою частиною, тобто з нанесеними поперечними пазми на робочій частині, спостерігаємо зміну швидкості нагрівання поверхневого шару оброблюваного металу. Процес нагрівання поверхневих шарів має хвильовий характер. У момент входження гладкої частини інструменту швидкість нагрівання є максимальною і при даних режимах обробки складає біля $1,7 \cdot 10^6\text{ K/s}$. У процесі тертя швидкість нагрівання поверхневих шарів зменшується. При виході з контакту гладкої частини інструменту відбувається різке охолодження поверхневого шару.

При входженні у контакт з оброблюваною поверхнею гладкої частини інструменту різко збільшуються напруження на поверхні зони контакту інструмент-деталь. У початковий момент часу на поверхні вони досягають $5 \cdot 10^7\text{ Па}$. З часом величина напружень збільшується, а також вони розповсюджуються у глибину оброблюваної деталі. Інтенсивність наростання напружень з часом зменшується і при виході з контакту гладкої частини інструменту вони становлять біля $1,2 \cdot 10^9\text{ Па}$. Характер зміни напружень по глибині зміцненого шару подібний до зміни теплового потоку. При закінченні обробки одиничного контакту напруження збільшуються до величини $5 \cdot 10^7\text{ Па}$.

При заданих режимах зміцнення одинична зона контакту нагрівається при проходженні 16 відрізків (гладка частина і паз) робочої частини інструменту. За цей час метал зони контакту інструмент-деталь нагрівається до температури 1200 °С. По завершенні дії теплового потоку відбувається високошвидкісне охолодження поверхневого шару металу.

Інструмент під час фрикційного зміцнення притискається до оброблюваної деталі, що створює у поверхневому шарі певний напружений стан. Напруження виникають також від ударної дії перервної поверхні інструмента. При проходженні паза над зоною контакту, вона розвантажується. Вхідження гладкої частини інструменту в контакт з оброблюваною поверхнею сприяє виникненню імпульсу енергії.

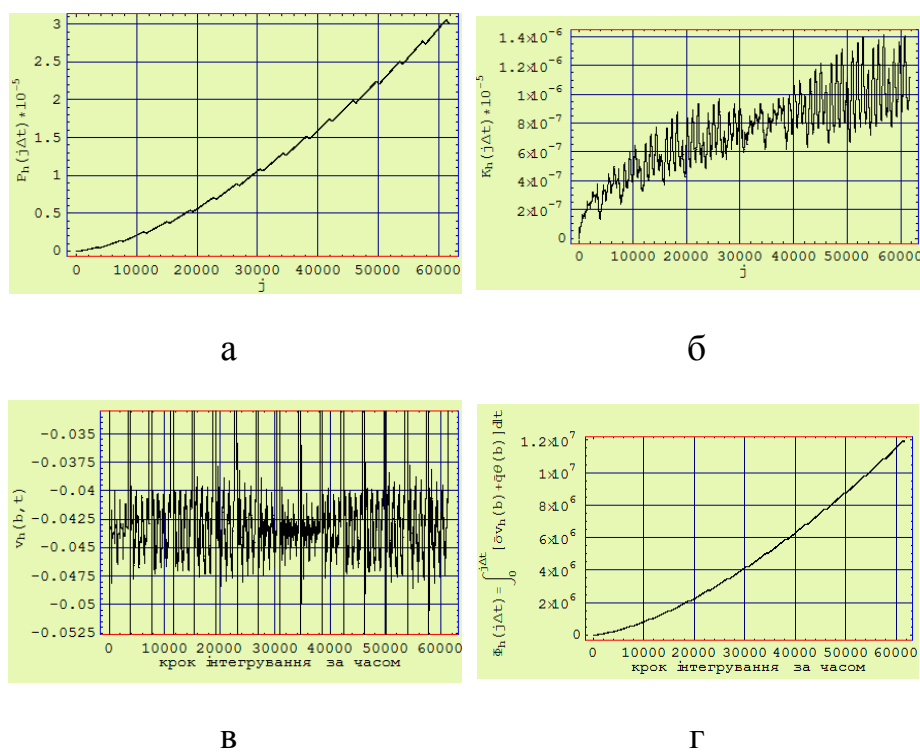


Рисунок 4.12 – Зміна потенціальної енергії (а), кінетичної енергії (б), швидкості навантаження поверхні зони контакту (в) та енергії навантаження поверхні деталі під час фрикційного зміцнення одиничної зони контакту.

Потенціальна енергія металу у зоні контакту інструмент-деталь при проходженні гладкої частини інструменту над зоною контакту монотонно зростає, при проходженні пазу – дещо спадає. Кінетична енергія у зоні контакту при проходженні першої гладкої частини різко зростає до величини $2,5 \cdot 10^7$ Дж, при проходженні паза над зоною контакту (зона контакту розвантажена) вона різко падає до значення $0,8 \cdot 10^7$ Па. Вхідження нової гладкої частини приводить до різкого зростання кінетичної енергії. У подальшому зміна кінематичної енергії має хвильовий характер і змінюється від $8 \cdot 10^{-7}$ Дж до $1,4 \cdot 10^{-6}$ Дж. Проходження пазу приводить до різкого спаду енергії до $6 \cdot 10^{-7}$ Дж.

При входженні в контакт з оброблюваною поверхнею гладкої частини інструменту різко зростає швидкість навантаження зони контакту. У зоні контакту відбуваються коливальні процеси, які поступово частково затухають до моменту розвантаження зони контакту, коли проходить над нею паз на робочій частині інструменту. Вхідження наступної гладкої частини приводить до виникнення ударного навантаження зони контакту. У момент удару зміна швидкості навантаження зони контакту становить від 0,045 м/с до 0,025 м/с. Перед виходом з контакту гладкої частини швидкість навантаження поверхневого шару змінюється в межах 0,032-0,052 м/с. Даний процес повторюється циклічно під проходження кожного паза інструменту.

Енергія, яка затрачується на процес зміцнення поверхневого зміцнення монотонно зростає. При зміцненні одиничної зони контакту до неї підводиться біля $6 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Підведена енергія до одиничної зони контакту інструмент-деталь розповсюджується, в основному, у глибину оброблюваної деталі. Чим більша енергія підведена до одиничної зони, тим на більшу глибину може прогрітись поверхневий шар металу і зміцнений шар буде мати більшу товщину. Підведена енергія до одиничної зони контакту при проходженні першої гладкої частини відводиться у глибину деталі і частково розсіюється. Кількість відведеної енергії поступово зростає і досягає величини майже 6000 Дж.

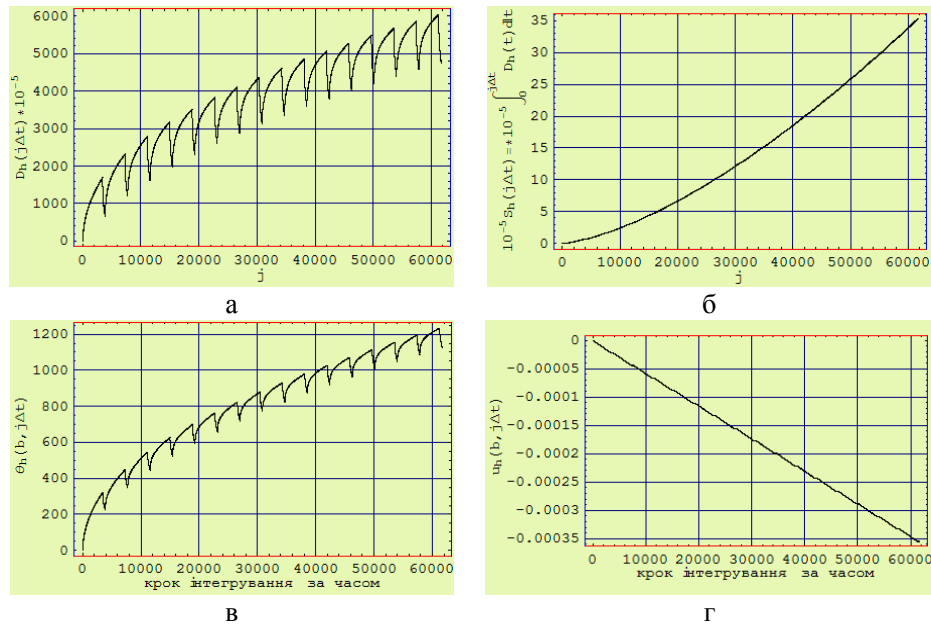


Рисунок 4.13 – Зміна розсіювання енергії (а), теплової енергії (б), температури (в) та переміщення на поверхні зони контакту деталі під час фрикційного зміцнення.

При дії теплового потоку на поверхневий шар металу деталі відбувається його лінійне розширення, тобто збільшення його розміру по висоті. Під час зміцнення одиначної зони контакту, вона збільшується по висоті приблизно на $3,5 \cdot 10^{-4}$ мм, що слід врахувати при дослідженні точності обробленої поверхні.

4.3.5 Висновки

На основі проведених досліджень ми можемо сформулювати наступні висновки:

На основі досліджень математичної моделі отримали графічні залежності зміни температури, напружень та переміщень по глибині над зоною контакту інструмент-деталь у залежності від параметрів фрикційного зміцнення та інструмента.

Для прогнозування фізико-механічних властивостей поверхневих шарів металу деталей машин та керування ними у процесі зміцнення, необхідно знати функціональні зв'язки цих параметрів з термічними процесами, які протікають у зоні зміцнення.

4.4 Нелінійне деформування тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення

З використанням співвідношень геометрично нелінійної теорії тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення (шестимодальний варіант), записано ключові рівняння для визначення їх напружено-деформованого стану. Методом скінченних елементів отримано числові розв'язки задач про деформування пластини-смуги та катеноїда на основі розглядуваної теорії, проведено порівняння цих розв'язків із розв'язками, побудованими на основі теорій оболонок Кірхгофа-Лява та Тимошенка-Міндліна (п'ятимодальний варіант).

4.4.1 Вступ

Визначення напружено-деформованого стану тонких гнучких оболонок у зв'язку з підвищенням інтенсивності експлуатації оболонкових конструкцій та висуванням жорстких вимог щодо забезпечення їх високої надійності, займає вагоме місце серед задач механіки деформівного твердого тіла.

Фундаментальні результати розробки геометрично нелінійної теорії оболонок наведені у праці [110], де викладено загальний підхід до проблеми деформації гнучких тіл. В інженерній практиці, головним чином, використовують математичні моделі тонких оболонок, що ґрунтуються на класичних гіпотезах Кірхгофа-Лява та Тимошенка-Міндліна (п'ятимодальний

варіант) [37, 75]. Однак, широкого розповсюдження набули уточнені математичні моделі оболонок, що враховують поперечні лінійні та зсувні деформації [7, 90, 111].

Розрахунок гнучких оболонкових конструкцій призводить до розв'язування нелінійних задач, що викликає певні труднощі, подолати які можна, застосувавши числові методи [73, 115], засновані, зокрема, на варіаційних постановках розглядуваних задач.

У цій статті записано ключові рівняння для визначення напружено-деформованого стану гнучких оболонок, податливих до зсуву та стиснення, розрахунок яких базується на методі скінченних елементів [3, 73, 115].

4.4.2 Вихідні гіпотези теорії оболонок

Вихідні гіпотези теорії оболонок. Розглянемо оболонку, як тривимірне тіло, що в недеформованому стані віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha_i \quad i = \overline{1,3}$, причому напрям α_3 є нормальним до серединної поверхні Ω оболонки

$$V = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega, -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2 .$$

Вважатимемо, що координатні лінії α_1, α_2 серединної поверхні Ω співпадають з лініями головних кривин, а товщина h є суттєво меншою від характерних розмірів оболонки.

Згідно з кінематичною гіпотезою теорії оболонок типу Тимошенка, переміщення точок оболонки в процесі її деформування можна подати у вигляді

$$U_i \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = u_i \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 \gamma_i \alpha_1, \alpha_2 , \quad i = \overline{1,3}, \quad (4.31)$$

де u_i – переміщення точок серединної поверхні Ω оболонки, γ_i – компоненти вектора кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки [111]

$$\vec{\gamma} = -\gamma_2 \vec{e}_1 + \gamma_1 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3,$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орти ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, причому вектор \vec{e}_3 напрямлено в сторону опуклості серединної поверхні.

Припустимо, що розглядувана оболонка є лінійно пружною [112]. Таке припущення справедливе у випадку малих деформацій при немалих поворотах. Тоді для ортотропного матеріалу оболонки компоненти тензорів напружень σ_{ij}^* $i, j = \overline{1,3}$ та деформацій ϵ_{ij} $i, j = \overline{1,3}$ пов'язані між собою такими залежностями:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= a_{11} \epsilon_{11} + a_{12} \epsilon_{22} + a_{13} \epsilon_{33}, & \sigma_{12}^* &= a_{44} \epsilon_{12}, \\ \sigma_{22}^* &= a_{21} \epsilon_{11} + a_{22} \epsilon_{22} + a_{23} \epsilon_{33}, & \sigma_{13}^* &= a_{55} \epsilon_{13}, \\ \sigma_{33}^* &= a_{31} \epsilon_{11} + a_{32} \epsilon_{22} + a_{33} \epsilon_{33}, & \sigma_{23}^* &= a_{66} \epsilon_{23}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

де σ_{ij}^* – компоненти тензора напружень на площадках в деформованому стані, причому при малих деформаціях $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ji}^*$ [89]. Надалі символ (*) при компонентах напружень для зручності використовувати не будемо. Коефіцієнти a_{ij} визначаються за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} a_{11} &= E_1 (1 - \nu_{23} \nu_{32}) / D, & a_{22} &= E_2 (1 - \nu_{13} \nu_{31}) / D, \\ a_{33} &= E_3 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) / D, & a_{44} &= G_{12}, & a_{55} &= G_{13}, \\ a_{66} &= G_{23}, & a_{12} &= a_{21} = E_1 (\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{32}) / D, \\ a_{13} &= a_{31} = E_1 (\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) / D, & a_{23} &= a_{32} = E_2 (\nu_{23} + \nu_{13} \nu_{21}) / D, \\ D &= 1 - \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} - \nu_{13} \nu_{21} \nu_{32} - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{13} \nu_{31} - \nu_{23} \nu_{32}, \end{aligned}$$

де E_i – модулі Юнга матеріалу в осях ортотропії оболонки, ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона в осях ортотропії оболонки, G_{ij} – модулі зсуву в площадках, перпендикулярних до серединної поверхні.

На відміну від математичних моделей оболонок з жорсткою нормаллю, постулювання ненульового γ_3 дозволяє моделювати напружено-деформований стан оболонки з ненульовою апроксимацією σ_{33} .

4.4.3 Деформація оболонки

Згідно з [110], співвідношення для компонент тензора деформацій \mathcal{E}_{ij} для тонкостінних гнучких тіл пов'язані з лінійними деформаціями E_{ij} та кутами повороту ω_n формулами:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{11} &= E_{11} + \frac{1}{2} \omega_2^2 + \omega_3^2, \\ \mathcal{E}_{12} &= E_{12} - \omega_1 \omega_2, \quad 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Видовження E_{ii} , зсуви E_{ij} $i \neq j$ та кути повороту ω_n , що входять у (4.33), мають вигляд:

$$\begin{aligned}E_{ii} &= \frac{e_{ii} + \alpha_3 \kappa_{ii}}{1 + \alpha_3 k_i}, \quad E_{33} = e_{33}, \quad i = 1, 2, \\ E_{12} &= \frac{2e_{12} + \alpha_3 2\kappa_{12}}{1 + \alpha_3 k_1} \quad 1 + \alpha_3 k_2, \quad E_{i3} = \frac{2e_{i3} + \alpha_3 2\kappa_{i3}}{1 + \alpha_3 k_i},\end{aligned}\quad (4.34)$$

$$\omega_1 = \frac{0 \quad 1}{1 + \alpha_3 k_2} \omega_1, \quad \omega_2 = \frac{0 \quad 1}{1 + \alpha_3 k_1} \omega_2, \quad \omega_3 = \frac{0 \quad 1}{1 + \alpha_3 k_1} \frac{0 \quad 1}{1 + \alpha_3 k_2} \omega_3, \quad (4.35)$$

де e_{ij} та κ_{ij} – тангенціальні та згинні компоненти тензора деформацій,

$$\begin{aligned}
\omega_1^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_2 u_3}{A_2} - \gamma_2 - k_2 u_2 \right), & \omega_2^0 &= \frac{1}{2} \left(\gamma_1 + k_1 u_1 - \frac{\partial_1 u_3}{A_1} \right), \\
\omega_3^0 &= \frac{\partial_1 A_2 u_2}{2A_1 A_2} - \frac{\partial_2 A_1 u_1}{2A_1 A_2}, & \omega_1^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial_2 \gamma_3}{A_2} - k_2 \gamma_2, \\
\omega_2^1 &= k_1 \gamma_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial_1 \gamma_3}{A_1}, & \omega_3^1 &= \frac{\partial_1 A_2 \gamma_2}{2A_1 A_2} - \frac{\partial_2 A_1 \gamma_1}{2A_1 A_2}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Тут $A_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $A_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки Ω ; $k_1 = k_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $k_2 = k_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – її головні кривини відповідно. В формулах (4.36) та надалі введено позначення

$$\partial_1 = \partial / \partial \alpha_1, \quad \partial_2 = \partial / \partial \alpha_2, \quad \partial_3 = \partial / \partial \alpha_3.$$

Таким чином, враховуючи (4.34) та (4.35), від деформаційних співвідношень (4.33) перейдемо до наступних:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{ii} &= \frac{\varepsilon_{ii} + \alpha_3 \chi_{ii}}{1 + \alpha_3 k_i}, & \mathcal{E}_{33} &= \varepsilon_{33}, \\
\mathcal{E}_{12} &= \frac{2\varepsilon_{12} + \alpha_3 2\chi_{12}}{1 + \alpha_3 k_1} \quad 1 + \alpha_3 k_2, & \mathcal{E}_{i3} &= \frac{2\varepsilon_{i3} + \alpha_3 2\chi_{i3}}{1 + \alpha_3 k_i}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

де

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} \omega_3^2, & \varepsilon_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \omega_3^2, \\
\varepsilon_{33} &= e_{33}, & \varepsilon_{12} &= e_{12} - \omega_1 \omega_2, & 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3, \\
\chi_{11} &= K_{11} + \omega_2 \omega_2 + \omega_3 \omega_3 - \frac{1}{2} k_1 \omega_2^2 - \frac{1}{2} k_1 + 2k_2 \omega_3^2, \\
\chi_{22} &= K_{22} + \omega_1 \omega_1 + \omega_3 \omega_3 - \frac{1}{2} k_2 \omega_1^2 - \frac{1}{2} 2k_1 + k_2 \omega_3^2, \\
\chi_{12} &= K_{12} - \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2 - \frac{1}{2} \omega_1 \omega_2, \\
\chi_{13} &= K_{13} - \frac{1}{2} \omega_1 \omega_3 - \frac{1}{2} \omega_1 \omega_3 + k_2 \omega_1 \omega_3, \\
\chi_{23} &= K_{23} - \frac{1}{2} \omega_2 \omega_3 - \frac{1}{2} \omega_2 \omega_3 + k_1 \omega_2 \omega_3.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

4.4.4 Рівняння рівноваги та фізичні співвідношення

Диференціальні рівняння, що описують рівновагу деформованого тіла, та статичні крайові умови можна записати з принципу можливих переміщень [110].

$$\begin{aligned}
&\partial_1(N_{11}A_2) - N_{22}\partial_1A_2 + (N_{12}^* + N_{21}^* \partial_2A_1 + A_1\partial_2N_{12}^* + k_1A_1A_2N_{13}^* \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_2((M_{12}^* + M_{21}^*)k_1A_1) + \frac{1}{2}(M_{12}^* + M_{21}^*)k_2\partial_2A_1 = -P_1A_1A_2, \\
&-N_{11}\partial_2A_1 + \partial_2(N_{22}A_1) + (N_{12}^* + N_{21}^*)\partial_1A_2 + A_2\partial_1N_{21}^* + k_2A_1A_2N_{23}^* + k_2A_1A_2N_{23}^* \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_1((M_{12}^* + M_{21}^*)k_2A_2) + \frac{1}{2}(M_{12}^* + M_{21}^*)k_1\partial_1A_2 = -P_2A_1A_2, \tag{4.39} \\
&-A_1A_2(N_{11}k_1 + N_{22}k_2) + \partial_1(N_{13}^*A_2) + \partial_2(N_{23}^*A_1) = -P_3A_1A_2, \\
&-A_1A_2N_{31}^* + \partial_1(M_{11}A_2) - M_{22}\partial_1A_2 + (M_{12}^* + M_{21}^*)\partial_2A_1 + A_1\partial_2M_{12}^* = -A_1A_2m_1, \\
&-A_1A_2N_{32}^* - M_{11}\partial_2A_1 + \partial_2(M_{22}A_1) + (M_{12}^* + M_{21}^*)\partial_1A_2 + A_2\partial_1M_{21}^* = -A_1A_2m_2, \\
&-A_1A_2(N_{33} + k_1M_{11} + k_2M_{22}) + \partial_1(A_2M_{13}^*) + \partial_2(A_1M_{23}^*) = -A_1A_2m_3,
\end{aligned}$$

де N_{ij}, M_{ij} – інтегральні характеристики напружень [111], P_i, m_i – усереднені характеристики навантаження [111], N_{ij}^*, M_{ij}^* – нововведені характеристики напружень

$$\begin{aligned}
N_{12}^* &= S - \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_3 (N_{11} + N_{22} - (k_1 + 2k_2)M_{11} - (2k_1 + k_2)M_{22}) - \overset{1}{\omega}_1 M_{13} + \right. \\
&\quad \left. + \overset{0}{\omega}_1 (2k_2 M_{13} - N_{13}) + \overset{0}{\omega}_2 (2k_1 M_{23} - N_{23}) + \overset{1}{\omega}_3 (M_{11} + M_{22}) - \overset{1}{\omega}_2 M_{23} \right), \\
N_{21}^* &= S + \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_3 (N_{11} + N_{22} - (k_1 + 2k_2)M_{11} - (2k_1 + k_2)M_{22}) - \overset{1}{\omega}_1 M_{13} + \right. \\
&\quad \left. + \overset{0}{\omega}_1 (2k_2 M_{13} - N_{13}) + \overset{0}{\omega}_2 (2k_1 M_{23} - N_{23}) + \overset{1}{\omega}_3 (M_{11} + M_{22}) - \overset{1}{\omega}_2 M_{23} \right), \\
N_{13}^* &= N_{13} - \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_2 (N_{11} - k_1 M_{11}) - \overset{0}{\omega}_1 S + \overset{0}{\omega}_3 (2k_1 M_{23} - N_{23}) + \overset{1}{\omega}_2 M_{11} - \overset{1}{\omega}_1 H - \overset{1}{\omega}_3 M_{23} \right), \\
N_{31}^* &= N_{13} + \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_2 (N_{11} + k_1 M_{11}) - \overset{1}{\omega}_3 M_{23} + \overset{1}{\omega}_2 M_{11} - \overset{0}{\omega}_1 (S + 2k_1 H) - \overset{0}{\omega}_3 N_{23} - \overset{1}{\omega}_1 H \right), \\
N_{23}^* &= N_{23} + \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_1 (N_{22} - k_2 M_{22}) - \overset{0}{\omega}_2 S + \overset{0}{\omega}_3 (2k_2 M_{13} - N_{13}) + \overset{1}{\omega}_1 M_{22} - \overset{1}{\omega}_2 H - \overset{1}{\omega}_3 M_{13} \right), \\
N_{32}^* &= N_{23} - \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_1 (N_{22} + k_2 M_{22}) - \overset{1}{\omega}_3 M_{13} + \overset{1}{\omega}_1 M_{22} - \overset{0}{\omega}_2 (S + 2k_2 H) - \overset{0}{\omega}_3 N_{13} - \overset{1}{\omega}_2 H \right), \\
M_{12}^* &= H - \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_3 (M_{11} + M_{22}) - \overset{0}{\omega}_1 M_{13} - \overset{0}{\omega}_2 M_{23} \right), \\
M_{21}^* &= H + \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_3 (M_{11} + M_{22}) - \overset{0}{\omega}_1 M_{13} - \overset{0}{\omega}_2 M_{23} \right), \\
M_{13}^* &= M_{13} - \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_2 M_{11} - \overset{0}{\omega}_1 H - \overset{0}{\omega}_3 M_{23} \right), \\
M_{23}^* &= M_{23} + \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\omega}_1 M_{22} - \overset{0}{\omega}_2 H - \overset{0}{\omega}_3 M_{13} \right).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Тут введені позначення $H = M_{12} = M_{21}$, $S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}$.

Запишемо вирази для статичних крайових умов на напруження на частині Γ_σ контуру Γ серединної поверхні

$$\begin{aligned}
N_t &= N_{11} \cos^2 n, \alpha_1 + N_{22} \sin^2 n, \alpha_1 + \frac{1}{2} N_{12}^* + N_{21}^* \sin 2 n, \alpha_1 + \\
&\quad + \frac{1}{4} k_1 + k_2 M_{12}^* + M_{21}^* \sin 2 n, \alpha_1 , \\
N_s &= \frac{1}{2} N_{22} - N_{11} \sin 2 n, \alpha_1 - N_{12}^* \sin^2 n, \alpha_1 + N_{21}^* \cos^2 n, \alpha_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2} k_2 \cos^2 n, \alpha_1 - k_1 \sin^2 n, \alpha_1 M_{12}^* + M_{21}^* , \\
N_n &= N_{13}^* \cos n, \alpha_1 + N_{23}^* \sin n, \alpha_1 , \\
M_t &= M_{11} \cos^2 n, \alpha_1 + M_{22} \sin^2 n, \alpha_1 + \frac{1}{2} M_{12}^* + M_{21}^* \sin 2 n, \alpha_1 , \\
M_s &= \frac{1}{2} M_{22} - M_{11} \sin 2 n, \alpha_1 - M_{12}^* \sin^2 n, \alpha_1 + M_{21}^* \cos^2 n, \alpha_1 , \\
M_n &= M_{13}^* \cos n, \alpha_1 + M_{23}^* \sin n, \alpha_1 .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Тут через n позначено нормаль до межі серединної поверхні оболонки.

Для встановлення кінематичної визначеності системи необхідно додати також крайові умови в зміщеннях [111] на $\Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_\sigma$:

$$\begin{aligned}
u_t^b &= u_1 \cos n, \alpha_1 + u_2 \sin n, \alpha_1 , \quad u_s^b = -u_1 \sin n, \alpha_1 + u_2 \cos n, \alpha_1 , \\
u_n^b &= -u_3, \quad \gamma_t^b = \gamma_1 \cos n, \alpha_1 + \gamma_2 \sin n, \alpha_1 , \\
\gamma_s^b &= -\gamma_1 \sin n, \alpha_1 + \gamma_2 \cos n, \alpha_1 , \quad \gamma_n^b = \gamma_3 .
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Щоб отримати замкнену систему, що описує процес нелінійного деформування оболонок, податливих до зсуву та стиснення, наведені вище рівняння слід доповнити фізичними співвідношеннями, що пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами. Для цього підставимо в пружний потенціал

$$2W = \sigma_{11} \mathcal{E}_{11} + \sigma_{22} \mathcal{E}_{22} + \sigma_{33} \mathcal{E}_{33} + \sigma_{12} \mathcal{E}_{12} + \sigma_{13} \mathcal{E}_{13} + \sigma_{23} \mathcal{E}_{23} \tag{4.43}$$

закон пружності тривимірної теорії (4.32)

$$W = \frac{1}{2} a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^2 + a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_{22}^2 + a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_{33}^2 + a_{44}\boldsymbol{\varepsilon}_{12}^2 + a_{55}\boldsymbol{\varepsilon}_{13}^2 + a_{66}\boldsymbol{\varepsilon}_{23}^2 + a_{12} + a_{21} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_{22} +$$

$$+ a_{13} + a_{31} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_{33} + a_{23} + a_{32} \boldsymbol{\varepsilon}_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_{33} . \quad (4.44)$$

Співвідношення пружності теорії оболонок отримаємо із формул [111]

$$N_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{11}} = h \left(a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_{11} + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\boldsymbol{\varepsilon}_{22} + \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})\boldsymbol{\varepsilon}_{33} \right),$$

$$N_{22} = \frac{\partial W_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{22}} = h \left(a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_{22} + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\boldsymbol{\varepsilon}_{11} + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})\boldsymbol{\varepsilon}_{33} \right),$$

$$N_{33} = \frac{\partial W_0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{33}} = h \left(a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_{33} + \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31})\boldsymbol{\varepsilon}_{11} + \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32})\boldsymbol{\varepsilon}_{22} \right),$$

$$S = \frac{\partial W_0}{\partial 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12}} = 2a_{44}h\boldsymbol{\varepsilon}_{12}, \quad N_{13} = \frac{\partial W_0}{\partial 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13}} = 2a_{55}h\boldsymbol{\varepsilon}_{13},$$

$$N_{23} = \frac{\partial W_0}{\partial 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23}} = 2a_{66}h\boldsymbol{\varepsilon}_{23}, \quad M_{11} = \frac{\partial W_0}{\partial \chi_{11}} = \frac{h^3}{12} \left(a_{11}\chi_{11} + \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\chi_{22} \right),$$

$$H = \frac{\partial W_0}{\partial 2\chi_{12}} = \frac{h^3}{6} a_{44}\chi_{12}, \quad M_{13} = \frac{\partial W_0}{\partial 2\chi_{13}} = \frac{h^3}{6} a_{55}\chi_{13}, \quad M_{23} = \frac{\partial W_0}{\partial 2\chi_{23}} = \frac{h^3}{6} a_{66}\chi_{23}$$
(4.45)

де $W_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} W \, 1 + \alpha_3 k_1 \quad 1 + \alpha_3 k_2 \quad d\alpha_3$ – питома енергія деформації.

Таким чином, напружено-деформований стан оболонок, податливих до зсуву та стиснення, повністю описується деформаційними співвідношеннями (4.38), рівняннями рівноваги (4.39) з відповідними статичними (4.41) та кінематичними (4.42) крайовими умовами, співвідношеннями пружності (4.45).

Розв'язування задач механіки деформування оболонок у даній праці здійснюється методом скінченних елементів [1, 73, 115] з використанням біквдратичних ізопараметричних апроксимацій серендипового типу, що базується на варіаційних принципах. Варіаційне формулювання задачі нелінійної теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, та обчислювальні аспекти методу скінченних елементів наведено у праці [130].

4.4.5 Числові приклади

Розглядалась оболонка, утворена обертанням лінії $y = a \operatorname{ch} x/a$ навколо осі ox , серединна поверхня якої – поверхня обертання змінної від’ємної гаусової кривизни $k_1 = -a/y^2$ [89]. Контур оболонки $x=0$ вільний, а контур $x=x_n$ жорстко закріплений. Оболонка деформується під дією рівномірно розподіленого осьового поверхневого навантаження q .

Розрахунок проведений для наступних вхідних параметрів: $a=0,4$ м, $x_n=0,8$ м, $E=0,7 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu=0,3$, $h=0,02$ м, $q=17$ кг/см² [89].

На рис. 4.14-4.15 наведено графіки переміщення серединної поверхні оболонки u_3 та меридіального напруження σ_{11} на внутрішній поверхні оболонки. Цифрами 1 та 2 позначено розв’язки по геометрично лінійній та нелінійній теоріях. Маркерами позначено числовий розв’язок, наведений у [89] в межах теорії Кірхгофа-Лява, зокрема, квадратами – лінійний розв’язок, зірочками - нелінійний.

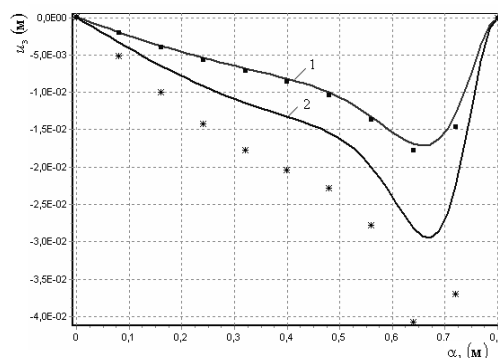


Рисунок 4.14 – Переміщення u_3 вздовж меридіану катеноїда.

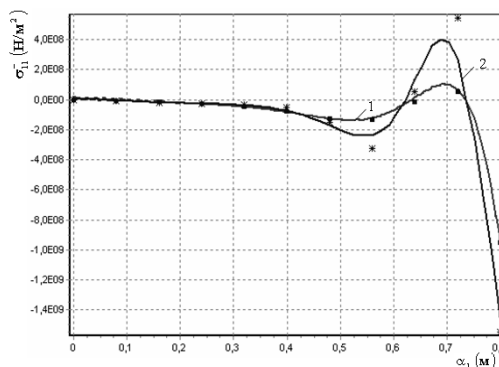


Рисунок 4.15 – Меридіальне напруження на внутрішній поверхні катеноїда.

Як видно з рис. 4.14-4.15, числові результати, отримані з використанням розглядуваної теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, якісно погоджуються з числовими розв'язками даної задачі по теорії Кірхгофа-Лява, наведеними у праці [89] (значення відносної товщини розглядуваного катеноїда не перевищує $1/20$).

Також розглядалась задача про визначення переміщень в пластині-смузі довжини l , що знаходиться під дією рівномірного навантаження P_3 . Край пластини-смуги $\alpha_1 = 0$ жорстко закріплений, а $\alpha_1 = l$ – вільний.

Здійснено порівняльний аналіз числових розв'язків цієї задачі, отриманих на основі розглядуваної у даній праці шестимодальної теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, числових розв'язків на основі п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка-Міндліна [76] та аналітичного розв'язку за п'ятимодальною теорією [76].

Числовий розв'язок задачі отримано при наступних вхідних значеннях: $l = 1$ м; $h = 0,05$ м; $\nu = 0,3$; $E = 10^6$ Н/м²; $P_3 = 1$ Н/м².

У табл. 4.4 наведено значення прогинів u_3 , отриманих при розв'язуванні задачі в лінійній та нелінійній (виділено курсивом у кожному рядку) постановках. Значення прогинів наведено при послідовному згущенні сітки скінченних елементів. Цифрами позначено: 1 – аналітичний розв'язок [76]; 2, 4, 6 – числові розв'язки (шестимодальний варіант) при використанні 5, 10 та 20

скінченних елементів по довжині пластини; 3, 5, 7 – числові розв’язки (п’ятимодальний варіант) [76] при цьому ж скінченноелементному розбитті. Табл. 4.5 містить аналогічні значення для переміщень u_1 .

Як видно із наведених таблиць, задовільний розв’язок задачі для пластини-смуги з відносною товщиною $1/20$ отримуємо на сітці вже з 5-ти скінченних елементів.

Таблиця 4.4 – Прогини $u_3 \cdot 10^2$ (м) пластини-смуги

	1	2	3	4	5	6	7
α_1 (м)	Аналітичн. розв.	5 елементів		10 елементів		20 елементів	
		6-ти мод.	5-ти мод.	6-ти мод.	5-ти мод.	6-ти мод.	5-ти мод.
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-0.0210	-	-	-	-	-	-
		0.015504	0.019711	0.016739	0.020882	0.016902	0.021003
0.2	-0.0774	-	-	-	-	-	-
		0.015503	0.019711	0.016739	0.020882	0.016902	0.021003
0.3	-0.1617	-	-	-	-	-	-
		0.059983	0.074887	0.062413	0.077169	0.062721	0.077399
0.4	-0.2675	-	-	-	-	-	-
		0.059982	0.074885	0.062413	0.077169	0.062721	0.077399
0.5	-0.3890	-	-	-	-	-	-
		0.127564	0.158236	0.130960	0.161436	0.131396	0.161762
0.6	-0.5215	-	-	-	-	-	-
		0.127562	0.158233	0.130960	0.161436	0.131396	0.161762
0.7	-0.6609	-	-	-	-	-	-
		0.212709	0.263072	0.217030	0.267130	0.217578	0.267539
0.8	-0.8043	-	-	-	-	-	-
		0.212707	0.263067	0.217030	0.267130	0.217578	0.267539
0.9	-0.9495	-	-	-	-	-	-
		0.310973	0.383852	0.315990	0.388573	0.316632	0.389052
1.0	-1.0951	-	-	-	-	-	-
		0.310969	0.383845	0.315989	0.388573	0.316632	0.389052
0.1	-0.0210	-	-	-	-	-	-
		0.418244	0.515634	0.423915	0.520960	0.424634	0.521497
0.2	-0.0774	-	-	-	-	-	-
		0.418239	0.515625	0.423915	0.520960	0.424634	0.521497
0.3	-0.1617	-	-	-	-	-	-
		0.531501	0.654625	0.537598	0.660360	0.538377	0.660941
0.4	-0.2675	-	-	-	-	-	-
		0.531496	0.654614	0.537598	0.660360	0.538377	0.660941
0.5	-0.3890	-	-	-	-	-	-
		0.648061	0.797629	0.654542	0.803716	0.655364	0.804329
0.6	-0.5215	-	-	-	-	-	-
		0.648054	0.797616	0.654542	0.803715	0.655364	0.804329
0.7	-0.6609	-	-	-	-	-	-
		0.766328	0.942600	0.772965	0.948843	0.773812	0.949475
0.8	-0.8043	-	-	-	-	-	-
		0.766320	0.942585	0.772964	0.948842	0.773812	0.949475
0.9	-0.9495	-	-	-	-	-	-
		0.885044	1.088091	0.891796	1.094431	0.892652	1.095069
1.0	-1.0951	-	-	-	-	-	-
		0.885035	1.088073	0.891795	1.094430	0.862937	1.095069

Таблиця 4.5 – Переміщення $u_1 \cdot 10^5$ (м) пластини-смуги

	1	2	3	4	5	6	7
α_1 (м)	Аналітичн. розв.	5 елементів		10 елементів		20 елементів	
		6-ти мод.	5-ти мод.	6-ти мод.	5-ти мод.	6-ти мод.	5-ти мод.
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	-0.0279	-0.001273	0.0	-0.001641	0.0	-0.001694	0.0
		-0.017697	-0.024582	-0.019534	-0.027666	-0.019687	-0.027916
0.2	-0.1896	-0.003415	0.0	-0.003569	0.0	-0.003644	0.0
		-0.121465	-0.180105	-0.127823	-0.188741	-0.128655	-0.189600
0.3	-0.5461	-0.005291	0.0	-0.0055182	0.0	-0.005594	0.0
		-0.351968	-0.527660	-0.365681	-0.544332	-0.367405	-0.545997
0.4	-1.1049	-0.007262	0.0	-0.0074681	0.0	-0.007544	0.0
		-0.717287	-1.076750	-0.738342	-1.102172	-0.741032	-1.104713
0.5	-1.8418	-0.009203	0.0	-0.0094181	0.0	-0.009494	0.0
		-1.201584	-1.804631	-1.229859	-1.838237	-1.233487	-1.841631
0.6	-2.7175	-0.011156	0.0	-0.0113681	0.0	-0.011444	0.0
		-1.778793	-2.671515	-1.813948	-2.713023	-1.818412	-2.717179
0.7	-3.6883	-0.031053	0.0	-0.013318	0.0	-0.013394	0.0
		-2.421744	-3.635971	-2.4617925	-3.683240	-2.466940	-3.688020
0.8	-4.7153	-0.015055	0.0	-0.0152681	0.0	-0.015344	0.0
		-3.102720	-4.657394	-3.147288	-4.709692	-3.152939	-4.714932
0.9	-5.7680	-0.017005	0.0	-0.0172181	0.0	-0.017294	0.0
		-3.803895	-5.707513	-3.850272	-5.762107	-3.856228	-5.767626
1.0	-6.8277	-0.018955	0.0	-0.0191681	0.0	-0.019244	0.0
		-4.510453	-6.765634	-4.558215	-6.821670	-4.564268	-6.827284

4.4.6 Висновки

Порівнюючи розв'язки даної задачі, зазначимо, що лише шестимодальний варіант теорії оболонок типу Тимошенка-Міндліна дає можливість вже в лінійному наближенні врахувати переміщення u_1 , тоді як п'ятимодальний варіант теорії оболонок типу Тимошенка-Міндліна дозволяє врахувати переміщення лише в нелінійній постановці. У подальшому аналогічні дослідження доцільно виконати для оболонок більш складної геометрії.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Ainsworth M. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis / M. Ainsworth, J. T. Oden. – New York: John Wiley & Sons, 2000. – 240 p.
2. Atkinson K. E. Theoretical Numerical Analysis / K. E. Atkinson // A Functional Analysis Framework [3rd ed. ed.]. – Springer, 2009. – P. 336-338.
3. Babuska I. Finite elements: an introduction to the method and error estimation / I. Babuska, J. R. Whiteman, T. Strouboulis. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 352 p.
4. Bangerth W. Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations / W. Bangerth, R. Rannacher. – Basel: Birkhauser, 2003. – 207 p.
5. Bergheau J.-M. Finite Element Simulation of Heat Transfer / Jean-Michel Bergheau, Roland Fortunier . – Wiley-ISTE. – 2008. – 302 p.
6. Bermudez A. Two discretization schemes for a time-domain dissipative acoustics problem /A. Bermudez, R. Rodrigues, D. Santamarina // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. – 2006. – Vol. 16, Issue 10. – P. 1559-1598.
7. Bernakevych I.E. A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression / I. E. Bernakevych, P. P. Vahin, I. Ya. Shot // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 181, № 4. – P. 497–505.
8. Braess D. Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Elasticity Theory / D. Braess. – Cambridge University Press, 2007.
9. Brenner S. The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S. Brenner, L. Scott. – Springer, 2008. – 404 p.
10. Bruneau M. Fundamentals of acoustics / M. Bruneau. – London: ISTE. – 2006. – 636 p.
11. Chyr I. Computer simulation of friction hardening of superficial layers of machine details / I. Chyr, M. Jachymek, I. Hurey, V. Gurey, H. Shynkarenko //

- Manufacturing Processes. Some Problems. Vol. 1. Basic science applications: M. Gajek, O. Hachkewych, A. Stanik-Besler eds. – Opole: Politechnika Opolska. – 2012. – P. 49-62.
12. Chyr I. Finite element analysis of the temperature fields of the frictional hardening with the moving heat source / I. Chyr, H. Shynkarenko // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів. – Рівне: Ред.-вид. ц. НУ вод. госп. та природокор, 2013. – С. 203.
 13. Chyr I. Finite element modeling of temperature fields generated by moving impulse heat sources / I. Chyr, H. Shynkarenko // Матеріали VI міжн. наук. конф. “Обчислювальна та прикладна математика”. – Київ: КНУ, 2013. – С. 15-17.
 14. Chyr I. Initial-boundary value problem of thermoelastic subsurface hardening and correctness of its variational form / I. Chyr, H. Shynkarenko // Abstracts and reports of International Conference dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach. – Lviv: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2012. – С. 186.
 15. Chyr I. A. Relativistic heat conduction during the process of frictional hardening with a jagged tool / I. A. Chyr // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: матеріали конференції КМН-2013. – Львів: ФМІ, 2013. – С. 109-112.
 16. Chyr I. A. Numerical modelling of thermoelastic and heat transfer processes with dynamic sources of surface heat inflow / I. A. Chyr, H. A. Shynkarenko // Матеріали V міжн. наук. конф. “Обчислювальна та прикладна математика”. – Київ: КНУ. – 2012. – С. 17.
 17. Danko O. Чисельне дослідження одновимірних задач п'єзоелектрики / O. Danko, H. Shynkarenko // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – № 46. – С. 17-25.

18. Demkowicz L. A class of discontinuous Petrov-Galerkin methods. Part III: Adaptivity / L. Demkowicz, J. Gopalakrishna, A. Niemi // ScienceDirect, Applied Numerical Mathematics.– 2012. – No.62. – P. 396–427.
19. Demkowicz L. Computing with hp-adaptive finite elements. I. One- and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems / L. Demkowicz. – Austin, 2005. – 418 p.
20. Doolan E. P. Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers / E. P. Doolan, J. J. H. Miller, W. H. A. Schilders. – Dublin: BOOLE PRESS. – 1980. – 198 p.
21. Dorfler W. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation / W. Dorfler // SIAM Journal Numerical Analysis. – 1996. – No. 3. – P. 1106-1124.
22. Dorfler W. Convergence of an adaptive hp finite element strategy in one space dimension / W. Dorfler, V. Heuveline // ScienceDirect, Applied Numerical Mathematics. – 2007. – No. 57. – P. 1108–1124.
23. Dunavant D. A. High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle / D. A. Dunavant // Int. J. Numer. Meth. Eng.– No. 21. – 1985. – P. 1129-1148.
24. Fasino D. Structured eigenvalue problems for rational gauss quadrature / D. Fasino, L. Gemignani. – Springer Science, 2009. – 15 p.
25. Gander W. Polynomial recurrence, newton correction and continued fractions / W. Gander, P. Gonnet. – Springer Science. – 2007. – 10 p.
26. Gautschi W. Orthogonal polynomials and Quadrature / W. Gautschi. – Kent State University, Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 9, 1999.– P. 65-76.
27. Gniazdowski Z. Krzemowe piezorezystywne czujniki wielkosci mechanicznych / Z. Gniazdowski // Biblioteka Elektroniki Warszawa. – 2005. – 198 p.
28. Golub G. Calculation of gauss quadrature rules / G. Golub, J. Welsch. // American Mathematical Society, Mathematics of Computation.– 1969. – Vol. 23. – No. 106. – P. 221-230.

29. Gratsch T. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis / T. Gratsch, K. Bathe // ScienceDirect, Computers and Structures.– 2005. – No. 83. – P. 235–265.
30. Hesthaven J. Nodal Discontinuous Galerkin Methods Algorithms, Analysis, and Applications / J. Hesthaven, T. Warburton.– Springer Science+Business Media, LLC. – 2008. – 512 p.
31. Hetch F. FreeFEM++. Electronic resource / F. Hetch. – 2013. – [Cited 2013, 9 January]. – Available from: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>.
32. Horlatch V. Formulation and well-posedness of the variational problem of viscous heat-conduction fluid acoustics / V. Horlatch, I. Klymenko, H. Shynkarenko // J. Appl. Numer. Math. – 2012. – No. 3 (109). – P. 53-71.
33. Kim C. -K. Adaptive finite element solution for the heat conduction with a moving heat source / Chi-Kyung Kim // Journal of Mechanical Science and Technology. – Springer, 2012. – Volume 26, Issue 3. – P. 967–972.
34. Kozarevska J.S. Analysis of similarity criteria and sensitivity of substance migration problems solutions to coefficient perturbations / J. S. Kozarevska, H. A. Shynkarenko // Visnyk of Lviv University. Appl. Math. Comput. Science Series. – No. 2. –2000. – P. 116-125.
35. Krylov V. I. Approximate calculation of integrals / V. I. Krylov. – New York, Mineola, Dover Publications, 2005. – 368 p.
36. Kvasnytsya G. A. Adaptive finite element approximations for elastostatic problem / G. A. Kvasnytsya, H. A. Shynkarenko // Visnyk of Lviv University. Appl. Math. Comput. Science Series. – 5 (2002) . – P. 95-106 (in Ukrainian).
37. Libai A. The nonlinear theory of elastic shells / A. Libai, J. G. Simmonds – Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 1998. – 560 p.
38. Logg A. Automating the Finite Element Method / A. Logg // Sixth Winter School in Computational Mathematics Geilo, March 5-10 2006. – 60 p.

39. Mahdi M. The finite element thermal analysis of grinding processes by ADINA / M. Mahd, Z. Liangchi // *Computers and Structures*, 1995. – V. 56. – No. 2/3. – P. 313-320
40. Malkin S. Thermal analysis of grinding / S. Malkin, C. Guo // *CIRP Annals - Manufacturing Technology*. – Elsevier, 2007. – Volume 56, issue 2. – P. 760-782.
41. Markopoulos A. P. Finite Element Method in Machining Processes / A. P. Markopoulos // *SpringerBriefs in applied sciences and technology: Manufacturing and surface engineering*. – Springer, 2013. – 92 p.
42. Mekchay K. Convergence of adaptive finite element methods for general second order linear elliptic PDE / K. Mekchay, R. Nochetto // *SIAM J. Numer. Analysis*. – P. 43, 2002. – P. 1803-1827.
43. Mitchell F. Survey of hp-Adaptive Strategies for Elliptic Partial Differential Equations / F. Mitchell, M. A. McClain // *Mathematical and Computational Sciences Division, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg*. – 2009. – MD 20899-8910. – 27 p.
44. Mitchell W.E. A comparison of adaptive refinement techniques for elliptic problems / F. Mitchell // *ACM Trans. Math. Software*. – 15, 1989. – P. 327-346.
45. Neale M. A Guide to Wear Problems and Testing for Industry / M. Neale, M. Gee. – William Andrew, New York, 2001. – 157 p.
46. Necas J. Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction / J. Necas and I. Hlavacek // *Studies in Applied Mechanics*. – Amsterdam:Elsevier Scientific Publishing Co., 1981 – Volume 3. – 342 p.
47. Nowacki W. Teoria sprężystosci / W. Nowacki. – PWN, Warszawa 1970. – 769 p.
48. Ostapov O. Yu. A posteriori error estimations for finite element approximations on quadrilateral meshes / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // VI Int. conf. named by I. I. Lyashko “Computational and applied mathematics”.

- Taras Shevchenko National University of Kyiv, September 5-6, 2013. – P. 31-34.
49. Ostapov O. Yu. A posteriori error estimator and h-adaptive finite element method for diffusion-advection-reaction problems / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // 20th Int. Conf. on Comp. Meth. in Mech. (CMM 2013): Short Papers. (August 27-31, 2013.). – Poznan: A.R.COMPRINT, 2013. – P. MS10:3-4.
 50. Ostapov O. Yu. Finite element adaptive refinement techniques for diffusion-advection-reaction problems / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // Manufacturing Processes. Actual Problems-2013. M. Gajek, O. Hachkewych, A. Stanik-Besler eds. Politechnika Opolska, Opole. – 2013. – Vol. 1.: Basic science applications. – P. 31–46.
 51. Ostapov O. Yu. A posteriori error estimations for serendipity finite element approximations on quadrilateral meshes / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko, O. V. Vovk // XIX Ukrainian science conf. “Modern problems of applied mathematics and computer science”, October 3-4, 2013. – Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2013. – P. 17-18.
 52. Ostapov O. Yu. A posteriori error estimator for diffusion-advection-reaction boundary value problems: piecewise linear approximations on triangles / O. Yu. Ostapov, H. A. Shynkarenko // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – 2, № 105. – P. 111-123.
 53. Ostapov O. Yu. H-adaptive finite element method for nonlinear problems with mixed boundary conditions / O. Yu. Ostapov, O. V. Vovk // YSC-2013. Karpenko Physico-Mechanical Institute. Lviv, October 23-25, 2013. – P. 349-352.
 54. Pierce A. D. Acoustics: An introduction to its physical principles and applications / A. D. Pierce. – NY: ASA, 1991. – 678 p.
 55. Quarteroni A. Numerical Mathematics / A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri // New York: Springer-Verlag, 2000.

56. Rivara M. C. Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques / M. C. Rivara // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – No. 20, 1984. – P. 745-756.
57. Rosenberg I. G. A lower bound on the angles of triangles constructed by bisecting the longest side / I. G. Rosenberg , F. Stenger // *Math. Comput.* – No. 29, 1975. – P. 390-395.
58. Rowe W. Principles in modern grinding technology / W. Rowe . – Oxford, 2009. – 416 p.
59. Schwab Ch. p and hp-Finite Element Methods / Ch. Schwab. – Oxford: Clarendon Press, 1998. – 392 p.
60. Segeth K. A review of some a posteriori error estimates for adaptive finite element methods / K. Segeth // *ScienceDirect, Mathematics and Computers in Simulation.* – 2010. – No. 80. – P. 1589–1600.
61. Solin P. Static Condensation, Partial Orthogonalization of Basis Functions, and ILU Preconditioning in the hp-FEM / P. Solin, T. Vejchodsky // *The University of Texas at El Paso, Department of Mathematical Sciences Research Reports Series, Research Report.*–2007. – No. 4 – P. 16.
62. Stroud A. H. Gaussian quadrature formulas / A. H. Stroud, D. Secrest – London: Prentice-Hall, 1966. – 369 p.
63. Stynes M. Steady-state convection-diffusion problems / M. Stynes // *Acta Numerica.* – 2005. – P. 445–508.
64. Szego G. Orthogonal polynomials / G. Szego // *American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.* – 1939. – 440 p.
65. Venherskyi P. Application of Gis-Technology for Modelling Motion Water in the Open Channels / P. Venherskyi, Y. Kokovska // *Modern problems of radio engineering, telecommunications and computer science: Proc. of the XI Int. Conf. TCSET'2012.* – Lviv–Slavske, 2012. – P. 393-395.
66. Verfurth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement technique / R. Verfurth. – Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.

67. Wisnietsky K. Finite Rotation Shells. Basic Equations and Finite Elements for Reissner Kinematics / K. Wisnietsky. – Springer, 2010. – 483 с.
68. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method, Vol. 1: The Basis, fifth ed. / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Butterworth–Heinemann. – Oxford, 2000. – 707 p.
69. Абрамов Є. Кусково-лінійні апроксимації h-адаптивного методу скінчених елементів для одновимірних крайових задач / Є. Абрамов, О. Ліпіна, Г. Шинкаренко, А. Ямелинець // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 3-18.
70. Бабей Ю. Поверхневе зміцнення металів / Ю. Бабей, Б. Бутаков, В. Сисоєв. – Наукова думка. – Київ, 1995. – 256 с. (рос.)
71. Базаров Б. Модульна теорія в машинобудуванні / Б. Базаров. – Машинобудування. – Москва, 1995. – 358 с.
72. Баландин М. Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности / М. Ю. Баландин, Э. П. Шурина. – Новосибирск. – Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.
73. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
74. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды / Д. И. Блохинцев. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
75. Бурак Я. Й. Аналітична механіка локально навантажених оболонок / Я. Й. Бурак, Ю. К. Рудавський, М. А. Сухорольський. – Львів: "Інтелект-Захід", 2007. – 240 с.
76. Вагин П. П. Численное решение задач механики деформирования гибких оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Автореф. диссерт. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1990. – 17 с.
77. Вагін П. П. Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення / П. П. Вагін, І. Я. Шот // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.

78. Вагін П. П. Напівдискретизація за товщиною задачі теплопровідності у тонкому криволінійному шарі / П. П. Вагін, Р. Б. Малець, Г. А. Шинкаренко // Математичні студії. – 2006. – 26, № 1. – С. 71-80.
79. Вагін П. П. Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок / П. П. Вагін, Н. В. Іванова, Г. А. Шинкаренко // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 54-59.
80. Вагін П. П. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статички зсувних оболонок / П. П. Вагін, Н. В. Іванова, Г. А. Шинкаренко // Матем. методи та фіз.-мат. поля. – 1999. – 42, № 2. – С. 53-61.
81. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
82. Вовк О. Проекційно сіткова схема розв'язування еволюційних задач окиснення чадного газу на поверхні платини / О. Вовк, Н. Павленко, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. пр. матем. та інф. – 2012. – Вип. 18. – С. 54–69.
83. Вовк О. В. Ітераційні методи розв'язування нелінійних крайових задач дифузії-конвекції-реакції з гарантованим рівнем похибки / О. В. Вовк, О. Ю. Остапов, Г. А. Шинкаренко // Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки та математики», Львів, 21-25 травня 2013. – Інст. прикл. пробл. мех. і матем. ім. Я. С. Підстригача, 2013. – С. 23-25.
84. Вовк О. В. Ітераційні схеми розв'язування нелінійних задач дифузії-конвекції-реакції h -адаптивним методом скінченних елементів / О. В. Вовк, О. Ю. Остапов, Г. А. Шинкаренко // Всеукр. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів», Нац. університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, 22-23 лютого 2013. – 2013. – С. 47.
85. Войтович В. М. Математична модель акустики гідропружних систем у термінах переміщень / В. М. Войтович, В. М. Горлач, Я. В. Кондратюк,

- Г. А. Шинкаренко // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2005. – № 2. – С. 108-118.
86. Галимов К. З. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / К. З. Галимов. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 211 с.
87. Гольденвейзер А. Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
88. Горлач В. Побудова та аналіз однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі варіаційної задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини / В. Горлач, І. Клименко, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. – 2012. – Вип. 18. – С. 76–95.
89. Григоренко Я. М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. – Киев: Вища школа, 1983. – 286 с.
90. Григоренко Я. М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К.: ИД “Академпериодика”, 2006. – 472 с.
91. Грінченко В. Т. Основи акустики / В. Т. Грінченко, Ш. В. Вовк, В. Т. Маципура. – К.: Наукова думка, 2007. – 640 с.
92. Гурей І. В. Технологічне забезпечення якості та експлуатаційних властивостей виробів параметрами імпульсної фрикційної обробки: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 05.02.08 “Технологія машинобудування” / Гурей Ігор Володимирович. – Одеса, 2002. – 36 с.
93. Гурей І. Характеристики зміцненого шару після фрикційного оброблення. – Машинознавство, 2004. – № 5. – С. 35-39.
94. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж. - Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
95. Исакович М. А. Общая акустика / М. А. Исакович. – М.: Наука, 1973. – 502 с.

96. Квасниця Г. Аналіз задач про вимушені гармонійні вібрування пружних тіл та побудова надійних апроксимацій МСЕ для їхніх розв'язків / Г. Квасниця, Ф. Чабан, Г. Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2013. – Вип. 20. – С. 19-33.
97. Квасниця Г. Адаптивні апроксимації методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 95–106.
98. Квасниця Г. Порівняння простих апостеріорних оцінювачів похибок методу скінченних елементів для задач еластостатики / Г. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісн. Львів ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2005. – Вип. 7. – С. 162–174.
99. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
100. Козаревська Ю. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h-адаптивний метод скінченних елементів. Частина 1. / Ю. Квасниця, Г. Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. інформ. – 2002. – Вип. 5. – С. 153–164.
101. Короткина М. Р. Электромагнитоупругость / М. Р. Короткина. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 304 с.
102. Красильников В. А. Введение в физическую акустику / В. А. Красильников, В. В. Крылов. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
103. Кревс В. Ієрархічні моделі та метод декомпозиції області у D-адаптивних моделях теплопровідності / В. Кревс, Я. Савула // Вісник Львів. ун-ту, серія прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 2. – С. 142-150.
104. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: Т. 6 Гидродинамика /Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
105. Лещук Е. Визначення ділянок силових напружень у зубі під дією функціонально-оклюзійного навантаження / Е. Лещук, С. Лещук, Т. Мандзюк // Современная стоматология. – №1 (65) – 2013. – С. 122–125.

106. Макеев В. Ф. Якісна картина напружено-деформованого стану системи "зуб-періодонт-щелепа" в умовах функціонального навантаження / В. Ф. Макеев, Л. С. Лещук, В. Д. Вовк // Український стоматологічний альманах. – №5 – 2012. – С.43-47.
107. Малець Р. Б. Моделювання процесів теплопровідності в тонкому тривимірному шарі / Р. Б Малець // Вісник Львів. ун-та. Сер. мех.-мат. задачі та методи прикладної математики. – Вип. 15. – 2009. – С. 240-250.
108. Михлин С. Г. Проблема мінімуму квадратичного функціонала / С. Г. Михлин – М.: Гостехиздат, 1952. - 254 с.
109. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
110. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 211 с.
111. Пелех Б. Л. Обобщенная теория оболочек / Б. Л. Пелех. – Львов: Вища школа, 1978. – 159 с.
112. Победря Б. Е. О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле вектора перемещений / Б. Е. Победря // Изв. АН Армянской ССР. Механика. – 1987. – 40, № 4. – С. 15–26.
113. Подстригач Я.С. Квазистатическая задача термодиффузии для деформируемых твердых тел / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец, В. С. Павлина // Прикл. механика. – 1971. – 7, № 12. – С. 11–16.
114. Резников А. Н. Теплофизика процессов механической обработки материалов / А. Н. Резников. – М. : Машиностроение, 1981. – 281 с.
115. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р. Б. Рикардс. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
116. Савула Я. Г. Расчет и оптимизация оболочек с разными срединными поверхностями / Я. Г. Савула, Н. П. Флейшман. – Львов: Вищ. шк., 1989. – 172 с.

117. Смелянський В.: Механіка зміцнення деталей поверхневим пластичним деформуванням / В. Смелянський. – Машинобудування, Москва, 2002. – 300 с.
118. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
119. Цегелик Г. Г. Чисельні методи / Г. Г. Цегелик– Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2007. – 407 с.
120. Чабан Ф. Розрахунок енергетичних характеристик п'єзоелектричних перетворювачів методом скінченних елементів з оцінювачем похибок. / Ф. Чабан, Г. Шинкаренко // Актуальні задачі механіки неоднорідних структур. Матеріали конф., Львів 5-9 вересня 2007. – С. 82-83.
121. Чабан Ф. Числове моделювання взаємодії механічного й електричного полів у п'єзоелектрику / Ф. Чабан // Фіз. -мат. моделювання та інформаційні технології. – № 12, 2010. – С. 170-179.
122. Чир І. Числовий аналіз теплових полів в задачах фрикційного зміцнення зубчастим інструментом / І. Чир, Г. Шинкаренко // Збірник наукових праць конференції Сучасні проблеми механіки та математики в 3 томах / під заг. ред. Р. М. Кушніра, Б. Й. Пташника – Львів: Досл.-вид. ц. НТШ, 2013. – Т. 1. – С. 244-245.
123. Чир І. А. Аналіз безрозмірних критерії початково-крайової задачі теплопровідності для процесу фрикційного зміцнення / І. А. Чир // Збірник тез доповідей всеукр. наук.-практ. конф. асп., мол. вч. і студ. “Інформаційні технології в освіті, техніці та промисловості”. – Івано-Франківськ: ІФНУНГ, 2013. – С.121-123.
124. Чир І. А. Постановка початково-крайової задачі динамічної термопружності та коректність її варіаційного формулювання / І. А. Чир, Г. А. Шинкаренко // Матеріали ХІХ Всеукраїнської наукової конференції Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2013. – С. 133-134.

125. Чир І. А. Числовий аналіз теплових полів процесу фрикційного зміцнення, створюваного рухомим джерелом тепла / І. А. Чир, Г. А. Шинкаренко // Матеріали XVIII Всеукраїнської наукової конференції Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2012. – С. 157-158.
126. Шахно С. М. Чисельні методи лінійної алгебри / С. М. Шахно. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2007. – 243 с.
127. Шинкаренко Г. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. I. Постановка задач и анализ установившихся вынужденных колебаний / Г. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 2, № 7. – С. 1252-1260.
128. Шинкаренко Г. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. II. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач / Г. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 2. – С. 317-325.
129. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач / Г. А. Шинкаренко. К.: НМК МВО, 1991. – 88 с.
130. Шот І. Я. Чисельне розв'язування задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення / І. Я. Шот // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т. 18. – Вип. 1 (4.47). – С. 132–141.
-

ЧАСТИНА 2

5. МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Метод граничних інтегральних рівнянь є ефективним підходом до розв'язування різних прикладних задач. В наступних розділах продемонстровано його переваги для наближеного розв'язування задач нестационарної теплопровідності та теорії потенціалу.

У цьому розділі для наближеного розв'язування першої початково-крайової задачі для параболічного рівняння у необмежених тривимірних областях розглядається поєднання перетворення Лагерра за часовою змінною і метод граничних інтегральних рівнянь. У підсумку задача редукується до послідовності інтегральних рівнянь по границі області, для чисельного розв'язування яких застосовано дискретний проєкційний метод зі сферичними функціями. Подано приклади чисельних експериментів.

5.1 Про чисельне розв'язування задач нестационарної теплопровідності в тривимірних необмежених областях

Метод інтегральних рівнянь відіграє важливу роль для наближеного розв'язування й дослідження крайових задач, зокрема в необмежених областях. Це зумовлено тим, що їхнє переформулювання у вигляді інтегральних рівнянь не тільки зменшує розмірність задачі, а й допомагає звести її до задачі в обмеженій області.

Особливий інтерес становить використання інтегральних рівнянь для задач з параметричним зображенням границі. В цьому випадку можна отримати чисельний розв'язок з досить високим порядком збіжності.

Наша мета – розглянути наближене розв’язування початково-крайової задачі для параболічного рівняння у тривимірній необмеженій області за допомогою перетворення Лагерра і граничних інтегральних рівнянь [3]. Чисельне розв’язування послідовності інтегральних рівнянь виконують дискретним методом Гальоркіна з використанням апроксимації за сферичними функціями [1,5,6,8].

5.2 Формулювання задачі

Нехай $D \subset R^3$ необмежена область така, що її доповнення обмежене й однозв’язне. Припустимо, що границя Γ області D належить класу C^2 й існує взаємно-однозначне відображення $q: \Omega \rightarrow \Gamma$, де Ω – одинична сфера. Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння теплопровідності з коефіцієнтом теплопровідності $c > 0$. Отже, будемо шукати розв’язок рівняння

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \text{ в } D \times (0, \infty), \quad (5.1)$$

який двічі неперервно-диференційований стосовно просторових змінних і неперервно-диференційований стосовно часової змінної в $D \times (0, \infty)$ та задовольняє однорідну початкову умову

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in D, \quad (5.2)$$

і граничну умову

$$u(x, t) = f(x, t), \text{ в } \Gamma \times [0, \infty), \quad (5.3)$$

де f – задана функція, яка задовольняє умову погодженості

$$f(x, 0) = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Також будемо вважати, що на нескінченності виконується умова

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

рівномірно стосовно всіх напрямів $\frac{x}{|x|}$ і всіх $t \in [0, \infty)$.

В [2] показано коректність сформульованої задачі (5.1)-(5.4).

5.3 Часткова дискретизація за часом

Для виконання часткової дискретизації за часом використаємо інтегральне перетворення Лагерра [3,4], яке має вигляд

$$v_N(x) = \int_0^{\infty} e^{-kt} L_N(kt) v(x,t) dt, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

де v – оригінал; v_N – образ; $k > 0$ – фіксований параметр; L_N – поліном Лагерра степеня N . Обернене перетворення виконується підсумуванням ряду Фур'є-Лагерра

$$v(x,t) = k \sum_{N=0}^{\infty} v_N(x) L_N(kt).$$

Отже, застосувавши перетворення Лагерра до вихідної задачі (5.1)-(5.4), отримаємо нескінченну послідовність стаціонарних граничних задач

$$\Delta u_N - \gamma^2 u_N = \beta \sum_{m=0}^{N-1} u_m \quad \text{в } D, \quad (5.5)$$

$$u_N = f_N, \quad \text{на } \Gamma, \quad (5.6)$$

$$u_N(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

рівномірно в усіх напрямках. Тут $\beta = \frac{k}{c}$, $\gamma^2 = \beta^2$, u_N і f_N – образи функцій u та f і $N = 0, 1, 2, \dots$,

Теорема 5.1. Послідовність стаціонарних задач (5.5)-(5.7) має не більше одного розв'язку.

Доведення. Легко отримується за методом математичної індукції з використанням принципу максимуму для рівняння Клейна-Гордона.

Подамо розв'язок задачі (5.1)-(5.4) у вигляді

$$u(x,t) = k \sum_{N=0}^{\infty} u_N(x) L_N(kt). \quad (5.8)$$

Не важко довести еквівалентність вихідної нестационарної задачі (5.1)-(5.4) і послідовності стаціонарних задач (5.5)-(5.7) через подання (5.8).

Теорема 5.2. Подання (5.8) є розв'язком задачі (5.1)-(5.4) тоді і лише тоді, коли $\{u_N\}_{N=0}^{\infty}$ є розв'язками послідовності стаціонарних задач (5.5)-(5.7).

5.4 Метод потенціалів для граничних задач

Введемо для рівнянь (5.5) потенціали простого шару

$$U_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^N \int_{\Gamma} g_m(y) \Phi_{N-m}(x,y) ds(y), \quad x \in R^3 \setminus \Gamma, \quad (5.9)$$

де $g_m \in C(\Gamma)$ – невідомі густини; Φ_m – фундаментальний розв'язок k -го рівняння з послідовності (5.5), який має вигляд [7]

$$\Phi_n(x,y) = \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} \sum_{m=0}^n a_{n,m} |x-y|^m, \quad (5.10)$$

з коефіцієнтами, які визначають за рекурентними формулами

$$a_{n,0} = 1, \quad a_{n,n} = \frac{-\gamma}{2n} a_{n-1,n-1},$$

$$a_{n,k} = \frac{1}{2k\gamma} \left[k(k+1)a_{n,k+1} - \beta \sum_{m=k-1}^{n-1} a_{m,k-1} \right], \quad k = n-1, \dots, 1,$$

для $n = 1, 2, \dots$

Введені потенціали простого шару мають такі самі властивості, що і відповідний потенціал для рівняння Лапласа. Враховуючи теореми про стрибки потенціалів і граничні умови (5.6), правильним є такий результат.

Теорема 5.3. Потенціали простого шару (5.9) є розв'язками послідовності стаціонарних задач (5.5)-(5.7), якщо їхні густини є розв'язками послідовності інтегральних рівнянь першого роду

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} g_N(y) \Phi_0(x, y) ds(y) = f_N(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\Gamma} g_m(y) \Phi_{N-m}(x, y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (5.11)$$

для $N = 0, 1, 2, \dots$

Отже, розв'язки послідовності стаціонарних задач можна подати у вигляді (5.9) і для знаходження невідомих густин g_N треба розв'язати послідовність двовимірних інтегральних рівнянь (5.11), де інтегральний оператор при кожному $N = 0, 1, 2, \dots$ не змінюється, а змінюється тільки права частина, яка також містить інтеграли по границі області.

Використовуючи теорію поверхневих потенціалів і теорію Рісса-Фредгольма [7], можна довести таку теорему.

Теорема 5.4. Для будь-яких правих частин $\{f_N\}_{N=0}^{\infty}$ з простору Гьольдера $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ послідовність інтегральних рівнянь (5.11) має єдиний розв'язок $\{g_N\}_{N=0}^{\infty}$ з простору $C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

5.5 Проекційний метод для двовимірних інтегральних рівнянь

Інтегральне рівняння (5.11) має слабку особливість при $x = y$. Виділимо її, подавши ядро у вигляді

$$\Phi_0(x, y) = \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} = \frac{\text{ch}(-\gamma|x-y|) + \text{sh}(-\gamma|x-y|)}{|x-y|} = \frac{K_1(x, y)}{|x-y|} + K_2(x, y),$$

де $K_1(x, y) = \text{ch}(-\gamma|x-y|)$, $K_2(x, y) = \frac{\text{sh}(-\gamma|x-y|)}{|x-y|}$.

Також для подальшого забезпечення хорошої збіжності квадратурних формул при обчисленні інтегралів подамо фундаментальні розв'язки

послідовності граничних задач, які фігурують у правій частині в такому вигляді:

$$\Phi_n(x, y) = \frac{A_n(x, y)}{|x - y|} + B_n(x, y),$$

де

$$A_n(x, y) = \operatorname{ch}(-\gamma |x - y|) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n,2k} |x - y|^{2k} + \operatorname{sh}(-\gamma |x - y|) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n,2k+1} |x - y|^{2k+1},$$

$$B_n(x, y) = \operatorname{ch}(-\gamma |x - y|) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{n,2k+1} |x - y|^{2k} + \frac{\operatorname{sh}(-\gamma |x - y|)}{|x - y|} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n,2k} |x - y|^{2k}.$$

Тоді інтегральні рівняння (5.11) можна переписати в такому вигляді:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} g_N(y) \left[\frac{K_1(x, y)}{|x - y|} + K_2(x, y) \right] ds(y) = F_N(x), \quad x \in \Gamma, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

з правими частинами

$$F_N(x) = f_N(x) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \int_{\Gamma} g_m(y) \left[\frac{A_{N-m}(x, y)}{|x - y|} + B_{N-m}(x, y) \right] ds(y).$$

Позаяк існує взаємно-однозначне відображення $q: \Omega \rightarrow \Gamma$, то перейдемо в інтегральних рівняннях (5.12) від границі Γ до Ω . Нехай $\tilde{x}, \tilde{y} \in \Omega$, $q(\tilde{x}) = x$, $q(\tilde{y}) = y$. Введемо позначення

$$\tilde{g}_N(\tilde{y}) = g_N(q(\tilde{y})), \quad \tilde{F}_N(\tilde{x}) = F_N(q(\tilde{x})),$$

$$\tilde{K}_i(\tilde{x}, \tilde{y}) = K_i(q(\tilde{x}), q(\tilde{y})) \quad i = 1, 2, \quad \text{та} \quad R(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{|q(\tilde{x}) - q(\tilde{y})|}.$$

У підсумку отримаємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \tilde{g}_N(\tilde{y}) \left[\frac{\tilde{K}_1(\tilde{x}, \tilde{y})}{|\tilde{x} - \tilde{y}|} R(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{K}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) \right] J_q(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) = \tilde{F}_N(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega, \quad (5.13)$$

де J_q – якобіан відображення q , $N = 0, 1, 2, \dots$

Для обчислення подвійних інтегралів у (5.13) використаємо такі квадратурні формули [8]:

$$\int_{\Omega} f(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) \approx \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{a}_{s'} f(p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})), \quad (5.14)$$

$$\int_{\Omega} \frac{f(\tilde{y})}{|\tilde{n} - \tilde{y}|} ds(\tilde{y}) \approx \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \tilde{b}_{s'} f(p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'})), \quad \tilde{n} = (0, 0, 1)^T. \quad (5.15)$$

Тут $\tilde{y} = p(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ параметризація Ω ,

$$\varphi_{\rho'} = \frac{\rho' \pi}{n'+1}, \quad \theta_{s'} = \arccos(z_{s'}), \quad \tilde{\mu}_{\rho'} = \frac{\pi}{n'+1},$$

$$\tilde{a}_{s'} = \frac{2(1 - z_{s'}^2)}{[(n'+1)P_{n'}(z_{s'})]^2}, \quad \tilde{b}_{s'} = \tilde{a}_{s'} \sum_{l=0}^{n'} P_l(z_{s'}),$$

і $z_{s'}$ – нулі полінома Лежандра $P_{n'+1}$, який має вигляд

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n (n+1)!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n].$$

Квадратури (5.14)-(5.15) мають супералгебричну швидкість збіжності, а для випадку аналітичних функцій – експоненціальну [5,6,8].

Щоб застосувати квадратури (5.14)-(5.15), перепишемо рівняння (5.13). Перемістимо довільну точку $\tilde{x} \in \Omega$ у північний полюс сфери $\tilde{n} = (0, 0, 1)^T$. Для цього введемо лінійне ортогональне перетворення $T_{\tilde{x}} = D_F(\varphi) D_T(\theta) D_F(-\varphi)$ таке, що $T_{\tilde{x}} \tilde{x} = \tilde{n}$, $\tilde{x} \in \Omega$,

$$D_F(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_T(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\tilde{\eta} = T_{\tilde{x}} \tilde{y}$, $\tilde{y} \in \Omega$, отримаємо, що

$$|\tilde{x} - \tilde{y}| = |T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{n} - T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\eta}| = |T_{\tilde{x}}^{-1} (\tilde{n} - \tilde{\eta})| = |\tilde{n} - \tilde{\eta}|.$$

У підсумку перейдемо від (5.13) до таких інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \tilde{g}_N(T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\eta}) \left[\frac{\tilde{K}_1(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\eta})}{|\tilde{n} - \tilde{\eta}|} R(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\eta}) + \tilde{K}_2(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\eta}) \right] J_q(T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\eta}) ds(T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{\eta}) = \tilde{F}_N(\tilde{x}),$$

де $\tilde{x} \in \Omega$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Застосувавши до них квадратурні формули (5.14)-(5.15), одержимо апроксимаційні рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \hat{g}_N(T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) \tilde{\mu}_{\rho'} [\tilde{b}_s \tilde{K}_1(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) R(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) + \\ & + \tilde{a}_s \tilde{K}_2(\tilde{x}, T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'})] J_q(T_{\tilde{x}}^{-1} \tilde{y}_{s'\rho'}) = \tilde{F}_N(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega \\ & \tilde{y}_{s'\rho'} = p(\theta_{s'}, \varphi_{\rho'}), \quad N = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

Для повної дискретизації (5.16) використаємо проєкційний метод Гальоркіна. Подамо розв'язки рівнянь у вигляді

$$\hat{g}_N = \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k a_k^{N,l} Y_{k,l}^R, \quad (5.17)$$

де

$$Y_{k,l}^R = \begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{Im} Y_{k,|l|}, & 0 < l \leq k, \\ \operatorname{Re} Y_{k,|l|}, & l = 0, \\ \sqrt{2} \operatorname{Re} Y_{k,|l|}, & -k \leq l < 0. \end{cases}$$

Тут $Y_{k,l}$ – сферичні функції, які обчислюють за формулою

$$Y_{k,l}(\theta, \varphi) = c_k^l P_k^{|l|}(\cos \theta) e^{il\varphi}, \quad l = -k \dots k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$c_k^l = (-1)^{\frac{|l|-l}{2}} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi} \frac{(k-|l|)!}{(k+|l|)!}}$, $P_k^{|l|}$ – асоційовані функції Лежандра вигляду

$$P_k^{|l|}(t) = (1-t^2)^{\frac{|l|}{2}} \frac{d^{|l|} P_k(t)}{dt^{|l|}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Далі розглянемо скалярний добуток

$$(v, w) = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho a_s v(\tilde{y}_{s\rho}) w(\tilde{y}_{s\rho}),$$

Помноживши рівняння (5.16) скалярно на базисні функції $Y_{k,l}^R$ і врахувавши подання невідомих густин (5.17), отримаємо послідовність систем лінійних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \sum_{l=-k}^k a_k^{N,l} R_{kk'}^{ll'} = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho a_s \tilde{F}_N(\tilde{x}_{s\rho}) Y_{k'l'}^R(\tilde{x}_{s,\rho}), \quad (5.18)$$

$k' = 0, \dots, n$, $l' = -k, \dots, k$, $N = 0, 1, 2, \dots$, де

$$R_{kk'}^{ll'} = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{\rho=0}^{2n+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \mu_{\rho} a_s [\tilde{b}_s \hat{K}_1(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) + \tilde{a}_s \hat{K}_2(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'})] Y_{k',l'}^R(\tilde{x}_{s\rho}) Y_{k,l}^R(\tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}),$$

$$\hat{K}_1(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) = \tilde{K}_1(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) R(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) J_q(\tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}),$$

$$\hat{K}_2(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) = \tilde{K}_2(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) J_q(\tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}),$$

$$\tilde{F}_N(\tilde{x}_{s\rho}) = f_N(\tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \hat{g}_N(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) \tilde{\mu}_{\rho'} [\tilde{b}_s \hat{A}_{N-m}(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) + \tilde{a}_s \hat{B}_{N-m}(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'})],$$

$$\hat{A}_{N-m}(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) = A_{N-m}(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) R(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) J_q(\tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}),$$

$$\hat{B}_{N-m}(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) = B_{N-m}(\tilde{x}_{s\rho}, \tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) J_q(\tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}).$$

5.6 Імплементация методу

Обчислення коефіцієнтів $R_{kk'}^{ll'}$ матриці системи (5.18) потребує великої кількості операцій. Розглянемо спосіб формування матриці через послідовне обчислення деяких матриць, що дасть змогу зменшити кількість обчислень.

Зауважимо, що дійсні сферичні та повернуті сферичні функції обчислюють за формулами (див., наприклад, [5])

$$Y_{k',l'}^R(\tilde{x}_{s\rho}) = \begin{cases} \sqrt{2} c_k^{l'} P_k^{l'}(\cos \theta_s) \sin(|l'| \varphi_\rho), & 0 < l', \\ 1, & l' = 0, \\ \sqrt{2} c_k^{l'} P_k^{l'}(\cos \theta_s) \cos(|l'| \varphi_\rho), & l' < 0, \end{cases}$$

$$Y_{k,l}^R(\tilde{y}_{s\rho}^{s'\rho'}) = \sum_{|j| \leq k} Y_{k,j}(\tilde{y}_{s'\rho'}) e^{-ij\varphi_\rho} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}i} (F_{skj|l} e^{i|l|\varphi_\rho} - (-1)^{|l|} F_{skj-|l|} e^{-i|l|\varphi_\rho}), & l > 0, \\ F_{skj|l}, & l = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}i} (F_{skj|l} e^{i|l|\varphi_\rho} + (-1)^{|l|} F_{skj-|l|} e^{-i|l|\varphi_\rho}), & l < 0, \end{cases}$$

де

$$F_{skjl} = e^{i(l-j)\pi/2} \sum_{|r|\leq k} d_{jr}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) d_{lr}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) e^{ir\theta_s},$$

$$d_{lr}^{(k)} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^l \sqrt{\frac{(k+l)!(k-l)!}{(k+r)!(k-r)!}} P_{k+l}^{(r-l, -r-l)}(0),$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}$ – нормалізований поліном Якобі.

Коефіцієнти матриці можна записати в такому вигляді:

$$R_{kk'}^{ll'} = \sum_{s=1}^{n+1} a_s c_{k'}^{l'} P_{k'}^{ll'}(\cos\theta_s) \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_\rho \begin{cases} \sqrt{2} c_{k'}^{l'} P_{k'}^{ll'}(\cos\theta_s) \sin(|l'| \varphi_\rho), & 0 < l' \\ 1, & l' = 0 \\ \sqrt{2} c_{k'}^{l'} P_{k'}^{ll'}(\cos\theta_s) \cos(|l'| \varphi_\rho), & l' < 0 \end{cases} \times$$

$$\times \sum_{|j|\leq k} e^{-ij\varphi_\rho} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skjl} e^{il\varphi_\rho} - (-1)^{|l|} F_{skj-l} e^{-il\varphi_\rho}), & l > 0 \\ F_{skjl}, & l = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skjl} e^{il\varphi_\rho} + (-1)^{|l|} F_{skj-l} e^{-il\varphi_\rho}), & l < 0 \end{cases} \sum_{s'=1}^{n'+1} c_k^j P_k^{jl}(\cos\theta_{s'}) \times$$

$$\left(\tilde{b}_{s'} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \hat{K}_1(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) e^{ij\varphi_{\rho'}} + \tilde{a}_{s'} \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \hat{K}_1(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) e^{ij\varphi_{\rho'}} \right),$$

й обчислення виконують через послідовне обчислення таких матриць:

$$E_{sps'j}^{\tilde{k}} = \sum_{\rho'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{\rho'} \hat{K}_{\tilde{k}}(\tilde{x}_{sp}, \tilde{y}_{sp}^{s'\rho'}) e^{ij\varphi_{\rho'}}, \quad \tilde{k} = 1, 2,$$

$$D_{spkj} = \sum_{s'=1}^{n'+1} c_k^j P_k^{jl}(\cos\theta_{s'}) (\tilde{b}_{s'} E_{sps'j}^1 + \tilde{a}_{s'} E_{sps'j}^2),$$

$$C_{spkl} = \sum_{|j|\leq k} e^{-ij\varphi_\rho} D_{spkj} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skjl} e^{il\varphi_\rho} - (-1)^{|l|} F_{skj-l} e^{-il\varphi_\rho}), & l > 0 \\ F_{skjl}, & l = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2i}} (F_{skjl} e^{il\varphi_\rho} + (-1)^{|l|} F_{skj-l} e^{-il\varphi_\rho}), & l < 0 \end{cases},$$

$$B_{sl'kl} = \sum_{\rho=0}^{2n+1} \mu_{\rho} C_{s\rho kl} \begin{cases} \sqrt{2}c_k^{l'} P_{k'}^{l'}(\cos\theta_s) \sin(|l'| \varphi_{\rho}), & 0 < l' \\ 1, & l' = 0 \\ \sqrt{2}c_k^{l'} P_{k'}^{l'}(\cos\theta_s) \cos(|l'| \varphi_{\rho}), & l' < 0 \end{cases},$$

$$A_{k'l'kl} = \sum_{s=1}^{n+1} a_s B_{sl'kl} c_k^{l'} P_{k'}^{l'}(\cos\theta_s).$$

5.7 Чисельні експерименти

Приклад 5.1. Нехай границя області Γ – еліпсоїд (див. рис. 5.1)

$$\Gamma = \{x(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, 0.5 \sin\theta \sin\varphi, 0.75 \cos\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Спершу протестуємо запропонований метод розв'язування послідовності стаціонарних задач. Для цього виберемо граничні функції як звуження фундаментальних розв'язків еліптичних рівнянь послідовності (5.5) на границю

$$f_N(x) = \Phi_N(x, y^*), \quad x \in \Gamma, \quad y^* = (0, 0, 0) \notin D.$$

Результати обчислень в точці $x = (0, 3, 1.8)$ при $c = 1, k = 1$ подані в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Абсолютні похибки розв'язку системи
стаціонарних задач

	$N = 0$	$N = 5$	$N = 10$
$n = 4$	4.4577e-006	6.5935e-007	3.9836e-007
$n = 8$	3.0786e-008	5.1536e-009	2.2737e-009
$n = 16$	2.4270e-012	4.0194e-013	1.7046e-013
$n = 24$	2.6671e-016	7.0811e-017	1.9203e-017

Приймемо граничну функцію як звуження фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi ct)^3}} \exp\left(\frac{-|x-y^*|^2}{4ct}\right), \quad x \in \Gamma, \quad y^* = (0,0,0) \notin D.$$

Результати обчислень в точці $x = (0.1, 0.2, 1)$ у різні моменти часу подані в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Абсолютні похибки розв'язку нестационарної задачі

t	n	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$
0.2	8	2.1957e-002	8.7304e-003	2.5347e-003
	16	2.1953e-002	8.7315e-003	2.5316e-003
0.6	8	9.0483e-003	2.7328e-003	1.1313e-003
	16	9.0477e-003	2.7325e-003	1.1308e-003
1	8	3.8550e-003	5.1043e-003	6.9577e-004
	16	3.8545e-003	5.1042e-003	6.9601e-004
1.5	8	6.0473e-003	3.1748e-003	4.8202e-004
	16	6.0468e-003	3.1749e-003	4.8270e-004

Приклад 5.2. Нехай границя області задана так (див. рис. 5.1):

$$\Gamma = \{x(\theta, \varphi) = 0.8\sqrt{0.8 + 0.5(\cos 2\varphi - 1)(\cos 4\theta - 1)}p(\theta, \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

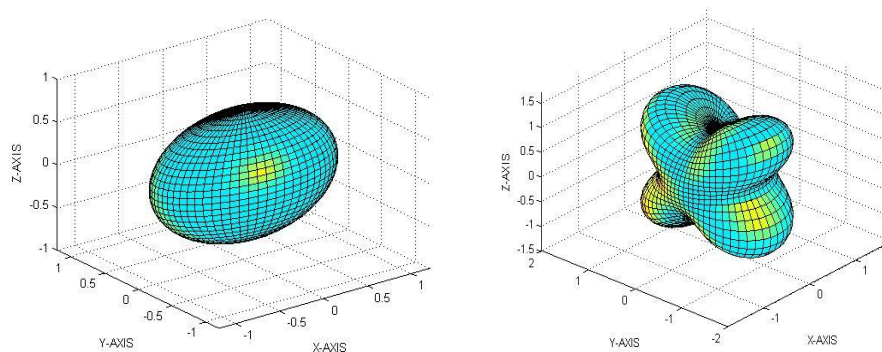


Рисунок 5.1 – Границі областей для прикладів 5.1 та 5.2, відповідно

Виберемо граничну умову $f(x,t) = 4t^2 e^{-4t+2}$, параметри $c=1$ та $k=1$. Результати обчислень нестационарної задачі при $n=16$ і різних значеннях t подані в табл. 5.3 і на рис. 5.2.

Таблиця 5.3 – Чисельні результати розв'язування нестационарної задачі

	$x = (0.5, 1.5, 2.1)$		$x = (1, -0.3, 1.8)$	
t	$N = 20$	$N = 30$	$N = 20$	$N = 30$
0.2	0.0018	0.0039	0.0103	0.0112
0.6	0.0987	0.0973	0.1898	0.1896
1	0.1529	0.1554	0.2547	0.2565
1.4	0.1418	0.1407	0.2031	0.2014
1.8	0.1054	0.1028	0.1283	0.1269
2.2	0.0729	0.0741	0.0788	0.0827
2.6	0.0532	0.0568	0.0567	0.0602

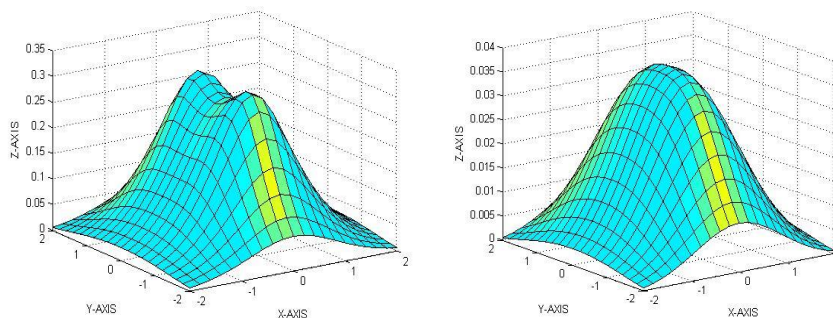


Рисунок 5.2 – Наближені розв’язки при $t = 0.5$, $z = 1.8$ та $z = 2.7$ для прикладу 5.2

5.8 Висновки

Запропоновано чисельний метод для початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності в необмеженій тривимірній області. Використавши для часткової дискретизації за часом інтегральне перетворення Лагерра, задачу зведено до розв’язування послідовності стаціонарних задач для еліптичних рівнянь. За допомогою методу потенціалів еліптичні задачі редуковано до послідовності коректних граничних інтегральних рівнянь першого роду. Після перетворення отриманих інтегральних рівнянь від границі області до поверхні одиничної сфери, застосування відповідних квадратур для обчислення подвійних інтегралів і використання методу Гальоркіна для повної дискретизації, було отримано чисельні розв’язки послідовності стаціонарних задач, які за оберненим перетворенням Фур’є-Лагерра визначають розв’язок вихідної нестационарної задачі. Наведені приклади чисельних експериментів підтверджують застосовність і ефективність запропонованого методу.

6 УЗАГАЛЬНЕННЯ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

У процесі проектування електронно-променевого приладу постає проблема визначення електростатичного поля, утвореного сукупністю заряджених електродів, яку називають електронно-оптичною системою. Будуючи відповідну математичну модель, окремі електроди доцільно подавати у вигляді розімкнених поверхонь, на яких задають граничні значення потенціалу. Однак наявність досить складних форм сучасних конструкцій електродів суттєво ускладнює традиційне застосування методу ІР, оскільки воно пов'язане із знаходженням невідомих величин саме на граничних поверхнях.

Розглянуто узагальнення чисельно-аналітичної процедури розв'язування двовимірного інтегрального рівняння першого роду зі слабкою особливістю в ядрі у випадку складних граничних поверхонь. Такі рівняння використовують у процесі моделювання електростатичних полів у суттєво просторовому формулюванні. Враховуючи існування в окремих випадках просторового поля стосовно простої осесиметричної моделі, продемонстровано доцільність залучення саме двовимірних інтегральних рівнянь. Проаналізовано питання, пов'язані з уточненням отримуваних розв'язків.

6.1 Загальна характеристика проблеми

Останнім часом для дослідження та розв'язування практично важливих задач математичної фізики використовують метод граничних інтегральних рівнянь. Особливо ефективним цей метод виявився в разі суттєво просторового моделювання окремих фізичних явищ за наявності розімкнених граничних

поверхонь. Відомо [10], що, наприклад, електростатичне поле електронно-оптичної системи (ЕОС) створюють N ідеально провідні електроди, які в сукупності моделюють багатозв'язною поверхнею $S := \bigcup_{i=1}^N S_i$, де $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Кожен електрод $S_i \in S$ пов'язують із заданим на ньому значенням потенціалу $U_0^{(i)}$.

Опираючись на відомі результати теорії потенціалу, з'ясовано, що для розрахунку електростатичного поля розглядуваної ЕОС треба розв'язати інтегральне рівняння (ІР) вигляду [10, 14]

$$(A\sigma)(M) \equiv \int_S \sigma(P) |M - P|^{-1} dS_p = U_0^{(i)}(M), \quad M \in S_i \quad (i = \overline{1, N}). \quad (6.1)$$

Тут $\sigma(P)$ – шукана сукупна густина розподілу зарядів на S , тобто $\sigma(P) := \{\sigma_i(P), P \in S_i; i = \overline{1, N}\}$, а $U_0^{(i)}(M)$ – граничне значення потенціалу на електроді, змодельованому поверхнею S_i , яка може бути і розімкненою.

Проводити аналіз розв'язності ІР (6.1), – враховуючи класи, до яких належить багатозв'язна поверхня S , – можна в різних функціональних просторах. Бажано зважати на особливу поведінку шуканої густини розподілу зарядів в околі контуру розімкненої поверхні та лінії її зламу. В такому контексті, не зменшуючи загальності, можемо керуватися відомим у теорії інтегральних рівнянь твердженням, яке виражає розв'язність ІР (6.1) [14]: якщо S – незамкнена Ліпшицева поверхня в \mathbf{R}^3 , то $A: H_{00}^{-1/2}(S) \rightarrow H^{1/2}(S)$ – ізоморфізм, причому

$$m_1 \|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)} \leq \|A\sigma\|_{H^{1/2}(S)} \leq m_2 \|\sigma\|_{H_{00}^{-1/2}(S)}, \quad 0 < m_1 \leq m_2.$$

Щодо отримуваних двовимірних ІР типу (6.1), то їх можна чисельно розв'язувати методом колокації з використанням кусково-постійної, білінійної, біквадратичної та бікубічної апроксимацій невідомої густини $\sigma(P)$. Є потреба обчислити значну кількість невластних інтегралів, ускладнених наявністю певних вагових функцій, які відображають сингулярні властивості шуканих

розв'язків. Варто зауважити, що на вибір конкретного алгоритму наближеного розв'язування IP (6.1) суттєво впливає визначення класів розглядуваних граничних поверхонь і способів їхнього подання. Наприклад, досить ефективні розв'язки задач у суттєво просторовому формулюванні можна отримати, якщо заряджені електроди змодельовано деякою сукупністю прямокутних або трапецевидних пластин. Методику, яка ґрунтується на такому припущенні, ми називаємо чисельно-аналітичною [9, 12]. Ще одна її перевага – можливість досить просто зображати відповідну вагову функцію, яка адекватно враховує властивості шуканого розв'язку. Нехай, не зменшуючи загальності, S – одна прямокутна пластина, розташована перпендикулярно до осі Oz обраної прямокутної системи координат xuz , зі сторонами паралельними до осей Ox і Oy . Оскільки вагова функція $1/\omega(x, y)$ повинна відбивати сингулярну поведінку розв'язку в околі вершин пластини, які мають координати $x = \pm a$ і $y = \pm b$, а також при наближенні до її ребер, то $\omega(x, y)$ пропонуємо подавати в такому вигляді:

$$\omega(x, y) := \frac{[(1 - \lambda x)(1 - \mu y)]^{1/2}}{(1 - \lambda x)^\gamma + (1 - \mu y)^\gamma}, \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b,$$

де $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$, а γ – деяка відома фізична стала [13]. Однак таке зваження особливості суттєво ускладнює алгоритми наближеного обчислення відповідних подвійних невластних інтегралів, які з'являються під час розв'язування (6.1) методом колокації, хоча від цих особливостей теоретично можна позбавитись шляхом запровадження спеціальних заміन змінних.

6.2 Апостеріорний метод оцінки похибки

При наближеному розв'язуванні IP (6.1) актуальною є проблема оцінки похибки отримуваних результатів. Приймаючи наведені аргументи щодо характеру поведінки $\sigma(P)$, доцільним виявився апостеріорний метод.

Використовуючи відомі загальні ідеї [11], пропонуємо такий його варіант, придатний саме до IP типу (6.1) [12]. Нехай $\sigma_h(P)$ – розв’язок (6.1), який належить до обраного простору апроксимацій. Цей розв’язок, з врахуванням його інтегрального подання, породжує наближене значення потенціалу в будь-якій точці M міжелектродного простору

$$U_h(M) = (A\sigma_h)(M).$$

Функцію похибки e_U обчислюємо за формулою

$$e_U = A\sigma - A\sigma_h = A(\sigma - \sigma_h) = Ae_\sigma,$$

причому e_σ є розв’язком IP $(Ae_\sigma)(M) = U_0 - (A\sigma_h)(M)$, $M \in S$, де U_0 – задане граничне значення потенціалу на поверхні S .

Розв’язок IP (6.1) поводить себе нерегулярно лише в околі контуру розімкненої поверхні S . Тому відтворюємо функцію e_U тільки на елементах D^e , які з’являються під час дискретизації S , і де e_U може набувати максимальні значення. Ми називаємо такі елементи “екстремальними”. Далі перевіряємо умову досягнення наперед заданої точності

$$\frac{\|e_\sigma\|_{L_{2,\omega}(D^e)}}{\sqrt{\|\sigma_h\|_{L_{2,\omega}(D^e)}^2 + \|e_\sigma\|_{L_{2,\omega}(D^e)}^2}} < TOL. \quad (6.2)$$

Якщо на “екстремальному” елементі умова (6.2) не виконується, то необхідно виконати його поділ на кілька і розв’язати задачу на густішій сітці.

6.2 Врахування специфіки граничних поверхонь

Особливе місце у наших дослідженнях займають окремі випадки IP (6.1), а також певні їхні спрощені аналоги. Мета – вивчити можливості використання одновимірних IP при аналізі електростатичних полів, які утворюють строго визначеними класами поверхонь – електродів. Найбільший інтерес становлять задачі за наявності осьової симетрії електростатичного поля. Нехай у

півплощині zr ($r > 0$) відоме параметричне зображення певного набору

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i \text{ дуг}$$

$$\Gamma_i = \{(z_i(\tau), r_i(\tau)), \alpha_i \leq \tau \leq \beta_i; i = \overline{1, m}\}.$$

Вони обертанням навколо осі Oz обраної циліндричної системи координат (φ, z, r) утворюють сукупність поверхонь, яка і моделює досліджувану ЕОС. Можна довести [10], що в так званому осесиметричному випадку просторове поле не залежить від однієї координати, а саме, φ . Це дає підстави подати відповідний аналог (6.1) у вигляді одновимірного ІР зі слабкою особливістю в ядрі. Зауважимо, що запроваджена так осесиметрична модель, як досить проста, стає в нагоді під час дослідження електростатичних полів з малими порушеннями осьової симетрії. Ці задачі, звісно, можна трактувати як суттєво просторові. В такому випадку, володіючи чисельно-аналітичною процедурою розв'язання двовимірних ІР, можна завжди перевірити достовірність отримуваних за осесиметричною моделлю результатів. З'ясуємо як чисельно-аналітичну процедуру можна узагальнити за наявності досить складних граничних поверхонь.

Не зменшуючи загальності, розглянемо випадок, коли поверхня S , що наявна в (6.1), є бічною поверхнею обмеженого еліптичного циліндра, розташованого довільно у просторі. ІР (6.1), з урахуванням параметризації S

$$P := \{x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta)\};$$

$$M := \{x(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), y(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), z(\bar{\alpha}, \bar{\beta})\}; (\alpha, \beta), (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \Delta := [\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2],$$

набуває вигляду

$$\iint_{\Delta} \sigma(\alpha, \beta) \frac{F(\alpha, \beta)}{R(\alpha, \beta; \bar{\alpha}, \bar{\beta})} d\alpha d\beta = U_0(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \equiv \text{const}, \quad (6.3)$$

де

$$R(\alpha, \beta; \bar{\alpha}, \bar{\beta}) := \left\{ [x(\alpha, \beta) - x(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2 + [y(\alpha, \beta) - y(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2 + [z(\alpha, \beta) - z(\bar{\alpha}, \bar{\beta})]^2 \right\}^{1/2}$$

а $F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$ виражає елемент поверхні S у локальних координатах α і β .
Зауважимо, що в (6.3) для простоти збережені позначення з (6.1). У локальній системі координат, пов'язаній із S , параметричні рівняння цієї поверхні набувають вигляду

$$\begin{aligned} x'(\alpha, \beta) &= a \cos \alpha, \\ y'(\alpha, \beta) &= b \sin \alpha, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \\ z'(\alpha, \beta) &= \beta, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \end{aligned}$$

причому ортогональну систему координат $x'y'z'$ (див. рис. 6.1-6.3) отримано з основної за два кроки.

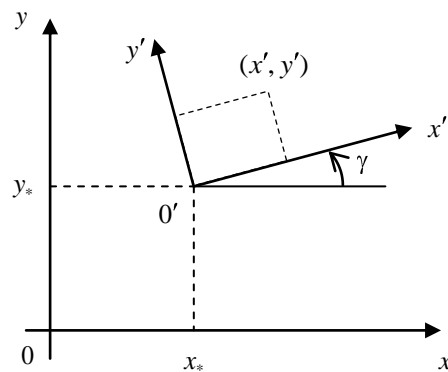


Рисунок 6.1 – Поворот осей у площині $xу$

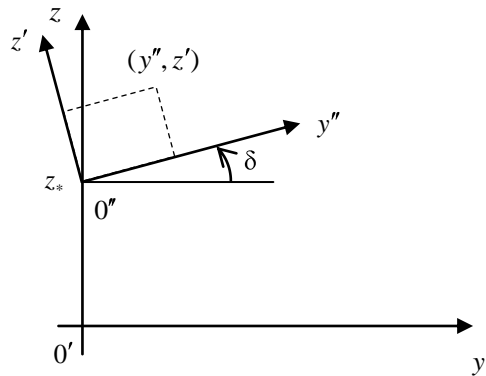


Рисунок 6.2 – Перенесення системи в напрямі осі Oz
та поворот у площині xz

На першому кроці виконано перенесення та поворот осей на кут γ у площині xu , а далі – перенесення в напрямі осі Oz та поворот на кут δ у площині xu . Штрихи при y означають те, що вісь Oy у процесі переміщення займала два положення. Основна система координат (назвемо її глобальною) xuz пов'язана з $x'y''z'$ за посередництвом таких співвідношень:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \gamma - y'' \cos \delta \sin \gamma + z' \sin \delta \sin \gamma + x_*, \\y &= x' \sin \gamma + y'' \cos \delta \cos \gamma - z' \sin \delta \cos \gamma + y_*, \\z &= y'' \sin \delta + z' \cos \delta + z_*.\end{aligned}$$

Враховуючи останні співвідношення, отримаємо параметричні рівняння, які задають бічну поверхню (або її частину) еліптичного циліндра:

$$\begin{aligned}x(\alpha, \beta) &= a \cos \alpha \cos \gamma - b \sin \alpha \cos \delta \sin \gamma + \beta \sin \delta \sin \gamma + x_*, \\y(\alpha, \beta) &= a \cos \alpha \sin \gamma + b \sin \alpha \cos \delta \cos \gamma - \beta \sin \delta \cos \gamma + y_*, \\z(\alpha, \beta) &= b \sin \alpha \sin \delta + \beta \cos \delta + z_*.\end{aligned} \tag{6.4}$$

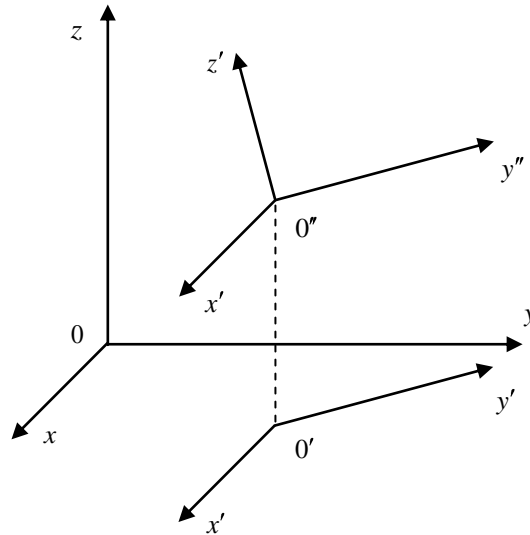


Рисунок 6.3 – Перехід від глобальної системи координат до локальної у випадку \mathbf{R}^3

Легко бачити, що тепер, враховуючи (6.4), ІР (6.3) можна подати у вигляді

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sigma(\alpha, \beta) \frac{F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{(\alpha - \bar{\alpha})^2 T(\alpha, \bar{\alpha}) + (\beta - \bar{\beta})^2}} = U(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \quad (6.5)$$

причому

$$T(\alpha, \bar{\alpha}) := \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2}\right)^2} \left[a^2 \sin^2\left(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}\right) + b^2 \cos^2\left(\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}\right) \right],$$

а $F(\alpha, \beta) \equiv \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}$, a, b – півосі відповідного еліпса. Рівняння (6.5) розв'язували методом колокації з апроксимацією шуканої густини розподілу зарядів $\sigma(\alpha, \beta)$ уздовж бічної поверхні циліндра за допомогою кусково-постійних базисних функцій. Результатом є система лінійних алгебричних рівнянь, матриця якої містить по діагоналі такі невласні інтегралі:

$$\int_{\bar{\alpha} - \frac{h_a}{2}}^{\bar{\alpha} + \frac{h_a}{2}} \int_{\bar{\beta} - \frac{h_b}{2}}^{\bar{\beta} + \frac{h_b}{2}} \frac{F_1(\alpha) d\alpha d\beta}{\sqrt{(\alpha - \bar{\alpha})^2 T(\alpha, \bar{\alpha}) + (\beta - \bar{\beta})^2}}, \quad (6.6)$$

де h_a, h_β – відповідно, кроки сітки по α і β при дискретизації заданої області інтегрування, $F_1(\alpha) := (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}$. Далі в (6.6) перейдемо від інтегрування по незалежній змінній α до інтегрування по величині l , яка має значення довжини дуги еліпса, яке відраховують від деякого початкового положення. Нехай цьому початкові відповідає значення параметра α_0 , а \bar{l} – довжина дуги, яка відповідає $\alpha = \bar{\alpha}$. Тоді в (6.6) за досить малих h_a і h_β

$$(\alpha - \bar{\alpha})^2 T(\alpha, \bar{\alpha}) + (\beta - \bar{\beta})^2 \approx (l - \bar{l})^2 + (\beta - \bar{\beta})^2,$$

причому

$$\bar{l} = \int_{\alpha_0}^{\bar{\alpha}} F_1(\alpha) d\alpha,$$

а l перебуває у межах від l_1 до l_2 , де

$$l_1 := \int_{\alpha_0}^{\bar{\alpha} - \frac{h_a}{2}} F_1(\alpha) d\alpha, \quad l_2 := \int_{\alpha_0}^{\bar{\alpha} + \frac{h_a}{2}} F_1(\alpha) d\alpha.$$

Отже, (6.6) набуває вигляду

$$\int_{l_1}^{l_2} \int_{\bar{\beta} - \frac{h_\beta}{2}}^{\bar{\beta} + \frac{h_\beta}{2}} \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{(l - \bar{l})^2 + (\beta - \bar{\beta})^2}}$$

і до нього можна застосувати відому формулу [9]

$$\begin{aligned} & \int_s^t \int_p^q [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{-1/2} dx dy = \\ & = G(v, r, w) + G(u, r, w) + G(r, v, u) + G(w, v, u), \end{aligned}$$

де $u := t - x_0$, $v := x_0 - s$, $w := q - y_0$, $r := y_0 - p$, а

$$G(m, n, k) := m [\ln(k + \sqrt{k^2 + m^2}) - \ln(-n + \sqrt{n^2 + m^2})],$$

причому $s \leq x_0 \leq t$, $p \leq y_0 \leq q$. Решту інтегралів з неперервними підінтегральними функціями обчислюємо за допомогою кубатурних формул із наперед заданою точністю. Такий спосіб обчислення значної кількості

коефіцієнтів матриці виявився ефективнішим (з погляду витрат комп'ютерного часу), ніж методи, в основу яких покладено процедуру послаблення особливостей у відповідних невластних інтегралах.

У контексті наведених нижче міркувань розглянемо задачу розрахунку параметрів електростатичного поля ЕОС, який є катодом, змодельованим площиною $z=0$, та обмежений електрод, який змодельовано бічною поверхнею циліндра, вісь якого незначно відхиляється від осі Oz (див. рис. 6.4).

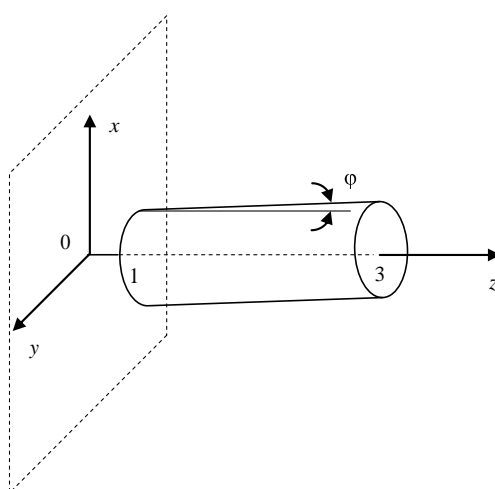
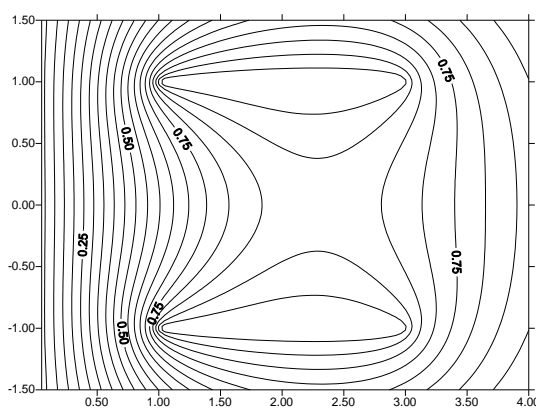


Рисунок 6.4 – ЕОС з порушеною осьовою симетрією в R^3

Припустимо, що циліндр радіуса $R=1$ розташований вздовж осі Oz в межах від 1 до 3 з порушеною осьовою симетрією, яка виражається кутом φ зі значенням близьким до 10^{-1} . На бічній поверхні циліндра граничне значення потенціалу становило 1, а в площині $xy - 0$. Для наближеного розв'язання ІР вигляду (6.5) використовували метод колокації з апроксимацією $\sigma(\alpha, \beta)$ кусково-поліноміальними базисними функціями.

Рисунок 6.5 – Розподіл ліній рівня вздовж Oz

На рис. 6.5 зображено розподіл ліній рівного потенціалу вздовж осі Oz , розрахований згідно з описаною методикою з використанням лінійної апроксимації шуканої густини ρ і сумарному виборі 200 точок колокації для відображення бічної поверхні циліндра та площини $z = 0$. Значення потенціалу електростатичного поля у деяких контрольованих точках подано в табл. 6.1.

Таблиця 6.1 – Потенціал електростатичного поля в точках осі Oz

z	$r = x$	u
0.10	0.00	0.0640
1.00	0.00	0.5952
1.00	0.95	0.8572
1.00	1.00	0.9260
2.00	0.00	0.8683
2.50	0.00	0.8763
3.00	0.00	0.8227
3.00	1.00	0.9618
3.50	0.00	0.7299

Для поліпшення точності обчислень треба збільшувати кількість точок колокації та підвищувати порядок апроксимації шуканих величин. Це може призвести до суттєвого зростання розмірності СЛАР, особливо за умов розв'язання задачі в суттєво просторовому формулюванні. Ситуація також погіршується при непомірному збільшенні кількості поверхонь – електродів та зростанні їхніх геометричних розмірів. Водночас врахування різного типу симетрій у зображенні ЕОС дає підстави понизити розмірність задачі і суттєво зменшити обсяг обчислень.

На завершення варто додати, що розглядувана бічна поверхня не є замкненою, тому в околі її контуру наближені значення отримуваної густини підлягають уточненню згідно з описаною вище методикою.

6.4 Висновки

Врахування наявної осьової симетрії досліджуваного поля дає змогу понизити розмірність відповідної системи лінійних рівнянь та, відповідно, суттєво зменшити обсяг обчислень. У багатьох випадках при суттєвому порушенні осьової симетрії доцільним виявився повільний перехід до використання просторової моделі, яка виконує роль наближеного аналог осесиметричної моделі і дає змогу контролювати межі ефективного застосування останньої. Застосування апостеріорного методу оцінки похибки допомагає отримувати розв'язки інтегральних рівнянь з потрібною точністю, що особливо актуально для розв'язування граничних задач у суттєво просторовому формулюванні на незамкнених поверхнях.

7 ЗБІЖНІСТЬ КОМБІНОВАНОГО МЕТОДУ НЬЮТОНА-ХОРД І ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

У даному розділі розглянуто ітераційний процес для розв'язування нелінійних операторних рівнянь, який побудовано на базі методу Ньютона та методу хорд. Уведено узагальнені умови Ліпшиця для поділених різниць, в яких замість сталої Ліпшиця використано деякі додатні інтегровні функції. Проведено дослідження локальної збіжності ітераційного процесу, коли похідні Фреше та поділені різниці першого порядку задовольняють узагальнені умови Ліпшиця. Запропоновано методику доведення збіжності. Встановлено порядок збіжності та область єдиності розв'язку. Як часткові випадки, отримано результати для сталих Ліпшиця.

7.1 Опис проблеми

Математичні моделі багатьох об'єктів, процесів чи систем нелінійні і часто зводяться до нелінійних операторних рівнянь, систем нелінійних алгебричних або трансцендентних рівнянь у класичному сенсі або в сенсі найменших квадратів. Вони розв'язуються, зазвичай, ітеративним способом. Відомо багато методів розв'язування нелінійних рівнянь. Проте для рівнянь з недиференційованими операторами методи розв'язування вивчені недостатньо. Для розв'язування рівнянь з нелійними операторами, які містять диференційовану і недиференційовану частини, нами застосовано комбінований метод Ньютона-хорд та обґрунтовано його збіжність при доволі слабких узагальнених умовах Ліпшиця на оператори похідних та поділених різниць.

Розглянемо нелінійне рівняння

$$H(x) = F(x) + G(x) = 0, \quad (7.1)$$

де оператори F і G визначені на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значенням в банаховому просторі Y . F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого не вимагається. Потрібно знайти розв'язок $x^* \in D$, який задовольняє рівняння (7.1).

Найвідомішим методом розв'язування рівняння (7.1) є класичний метод Ньютона [13, 14], який має квадратичний порядок збіжності у разі неперервності за Ліпшицем похідної першого порядку від оператора $F + G$

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k) + G'(x_k)]^{-1}(F(x_k) + G(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

Проте він незастосовний у разі відсутності аналітичного задання похідних. У цьому випадку можна використовувати метод хорд [14-16]

$$x_{k+1} = x_k - [F(x_k, x_{k-1}) + G(x_k, x_{k-1})]^{-1}(F(x_k) + G(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.3)$$

де $G(x_k, x_{k-1})$ – поділена різниця першого порядку, x_0, x_{-1} – початкові значення, або комбіновані методи, які використовують похідні для диференційованої частини та поділені різниці для недиференційованої частини нелінійного оператора. Зазначимо, що метод (7.3) має порядок збіжності, який дорівнює $(1 + \sqrt{5})/2$.

Розглянемо метод, побудований на базі методів Ньютона та хорд. Комбінований метод Ньютона-хорд має вигляд [17]

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k) + G(x_k, x_{k-1})]^{-1}(F(x_k) + G(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

У [17] наведено ітераційну формулу (7.4) і показано на прикладах, що він швидше збігається, ніж метод тільки з використанням $F'(x_k)$, але без врахування $G(x_k, x_{k-1})$. У праці [18] вивчено напівлокальну збіжність методу (7.4), однак встановлено лише лінійну збіжність. У статті [19] досліджено збіжність методу з використанням комбінації $F'(x_k) + G(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1})$ за

звичайних умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку і встановлено порядок збіжності $(1 + \sqrt{5})/2$.

У праці [20] під час дослідження методу Ньютона запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для оператора похідної, в яких замість сталої L використано деяку додатну інтегровну функцію. Автором у праці [21] запропоновано узагальнені умови Ліпшиця для поділеної різниці першого порядку нелінійного оператора і за цих умов досліджено збіжність методу хорд [21, 22] і двокрокового різницевого методу [23] для розв'язування нелінійних операторних рівнянь.

У цій праці обгрунтовано локальну збіжність комбінованого методу (7.4) з порядком $(1 + \sqrt{5})/2$ за узагальнених умов Ліпшиця для похідних Фреше і поділених різниць першого порядку та встановлено область єдиності розв'язку нелінійного рівняння.

7.2 Звичайні та узагальнені умови Ліпшиця для нелінійного оператора та поділених різниць

Наведемо означення поділених різниць першого порядку від оператора F та умов Ліпшиця для нелінійного оператора та для поділених різниць першого порядку від нелінійного оператора.

Нехай F – нелінійний оператор, визначений на підмножині D лінійного простору X зі значеннями в лінійному просторі Y і x, y – дві фіксовані точки з D . Лінійний оператор з X в Y , позначуваний $F(x, y)$, називається поділеною різницею від F за точками x і y , якщо він задовольняє умову

$$F(x, y)(x - y) = F(x) - F(y). \quad (7.5)$$

У випадку $x = y$ будемо вважати $F(x, x) = F'(x)$, де F' – похідна Фреше нелінійного оператора F .

Позначимо через $B(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$ відкриту, а через $\overline{B(x_0, r)} = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$ – замкнену кулі радіуса r з центром у точці x_0 .

Умову на оператор F

$$\|F(x) - F(x^\tau)\| \leq L \|x - x^\tau\| \quad \forall x, x^\tau \in D$$

називають умовою Лібшиця в області D зі сталою L . Якщо область D є кулею $B(x_0, r)$ з центром x_0 і радіусом r , $x \in B(x_0, r)$, то відрізок прямої $x^\tau = x_0 + \tau(x - x_0)$ з'єднує точки x і x_0 кулі $B(x_0, r)$, де $0 \leq \tau \leq 1$, $\rho(x) = \|x - x_0\|$.

Тоді умову

$$\|F(x) - F(x^\tau)\| \leq L \|x - x^\tau\| \quad \forall x \in B(x_0, r), 0 \leq \tau \leq 1, \quad (7.6)$$

називають радіальною умовою Лібшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L .

Якщо виконується умова

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq L \|x - x_0\| \quad \forall x \in B(x_0, r), \quad (7.7)$$

то її називають центральною умовою Лібшиця у кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L .

Проте L в умовах Лібшиця не обов'язково має бути сталою, а може бути додатною інтегрованою функцією. У цьому випадку (7.6) і (7.7) будуть замінені [20] відповідно на

$$\|F(x) - F(x^\tau)\| \leq \int_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)} L(u) du \quad \forall x \in B(x_0, r), 0 \leq \tau \leq 1, \quad (7.8)$$

та

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leq \int_0^{\rho(x)} L(u) du \quad \forall x \in B(x_0, r). \quad (7.9)$$

Умови (7.8) і (7.9) називають узагальненими умовами Лібшиця або такими, що містять L у середньому.

Тепер розглянемо умови Лібшиця для поділених різниць нелінійного оператора.

Умову на оператор поділеної різниці $F(x, y)$

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq L(\|x - u\| + \|y - v\|) \quad \forall x, y, u, v \in D \quad (7.10)$$

називають умовою Ліпшиця в області D зі сталою Ліпшиця L .

Якщо виконується умова

$$\|F(x, y) - F'(x_0)\| \leq L(\|x - x_0\| + \|y - x_0\|) \quad \forall x, y \in B(x_0, r), \quad (7.11)$$

то її називають центральною умовою Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L .

Якщо ж виконується умова

$$\|F'(x_0)^{-1}(F(x, x_0) - F'(x_0))\| \leq L\|x - x_0\| \quad \forall x \in B(x_0, r), \quad (7.12)$$

то це радіальна умова Ліпшиця в кулі $B(x_0, r)$ зі сталою L . Умови (7.10)-(7.12) називають звичайними умовами Ліпшиця.

Якщо ж L в умовах Ліпшиця не стала величина, а додатна інтегровна функція, то в цьому разі умови (7.10)-(7.12) замінюються [21, 22] відповідно на

$$\|F(x, y) - F(u, v)\| \leq \int_{\|x-u\|+\|y-v\|}^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(u) du \quad \forall x, y, u, v \in D, \quad (7.13)$$

$$\|F'(x_0)^{-1}(F(x, y) - F'(x_0))\| \leq \int_{\|x-x_0\|+\|y-x_0\|}^{\|x-x_0\|+\|y-x_0\|} L(u) du \quad \forall x, y \in B(x_0, r) \quad (7.14)$$

та

$$\|F'(x_0)^{-1}(F(x, x_0) - F'(x_0))\| \leq \int_0^{\|x-x_0\|} L(u) du \quad \forall x \in B(x_0, r). \quad (7.15)$$

Умови (7.13)-(7.15) називаємо відповідними узагальненими умовами Ліпшиця або умовами Ліпшиця з L в середньому для поділених різниць першого порядку.

Наведемо деякі леми, необхідні для отримання головних результатів.

Лема 7.1 [22]. Нехай $h(t) = \frac{1}{t} \int_0^t G(u) du$, $0 \leq t \leq r$, де $G(u)$ – додатна

інтегровна і неспадна функція на $[0, r]$. Тоді $h(t)$ неспадна відносно t на $[0, r]$.

Лема 7.2 [20]. Нехай $g(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t Q(u)u du$, $0 \leq t \leq r$, де $Q(u)$ – додатна інтегровна і неспадна функція на $[0, r]$. Тоді $g(t)$ неспадна відносно t на $[0, r]$.

7.3 Збіжність ітераційного процесу (7.4)

Теорема 7.1 Нехай F і G – нелінійні оператори, які діють з відкритої опуклої множини D банахового простору X у банахів простір Y . F – диференційований за Фреше оператор, G – неперервний оператор. Нехай $G(\cdot, \cdot)$ – поділені різниці першого порядку оператора G , визначені на множині D . Припустимо, що: 1) рівняння (7.1) має розв'язок $x^* \in D$, у якому існує оператор $H'(x^*) = F'(x^*) + G(x^*, x^*)$, і він є оборотний; 2) виконуються такі узагальнені умови Ліпшиця:

$$\|H'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(x^*))\| \leq \int_{\tau\rho(x)}^{\rho(x)} P(u) du, \quad (7.16)$$

$$\|H'(x^*)^{-1}(G(x, y) - G(u, v))\| \leq \int_0^{\|x-u\| + \|y-v\|} Q(u) du, \quad (7.17)$$

де $x, y, u, v \in B(x^*, r)$, $\rho(x) = \|x - x^*\|$ і P, Q додатні неспадні функції. Нехай r задовольняє нерівність

$$\frac{1}{r} \left(\int_0^r P(u)u du + r \int_0^r Q(u) du \right) \left(1 - \int_0^r P(u) du - \int_0^{2r} Q(u) du \right)^{-1} \leq 1. \quad (7.18)$$

Тоді метод Ньютона-хорд (7.4) збігається до розв'язку x^* для всіх $x_{-1}, x_0 \in B(x^*, r)$ і справджуються оцінки

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{q}{\rho_{\max}} \|x_{k-1} - x^*\| \|x_k - x^*\| \leq q^{\Phi_{k+2}-1} \|x_0 - x^*\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.19)$$

де

$$q = \left(\frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} P(u)u du + \int_0^{\rho_{\max}} Q(u) du \right) \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u) du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u) du \right)^{-1} \quad (7.20)$$

менше одиниці, $\rho_{\max} = \max\{\rho(x_{-1}), \rho(x_0)\}$, $\Phi_{-1} = 0$, $\Phi_0 = 1$, $\Phi_k = \Phi_{k-1} + \Phi_{k-2}$, $k = 1, 2, \dots$

Доведення. Виберемо довільно $x_{-1}, x_0 \in B(x^*, r)$, де r задовольняє (7.18), тоді q , визначене за (7.20), буде менше одиниці. Справді, при монотонності

P, Q за лемами 7.1 та 7.2 маємо, що $h(t) = \frac{1}{t} \int_0^t G(u) du$ і $g(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t Q(u) u du$

неспадні відносно t . Так, ми маємо

$$\begin{aligned} q &= \left(\frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} P(u)u du + \int_0^{\rho_{\max}} Q(u) du \right) \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u) du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u) du \right)^{-1} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} P(u)u du \rho_{\max} + \frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} Q(u) du \rho_{\max} \right) \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u) du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u) du \right)^{-1} \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r P(u)u du \rho_{\max} + \frac{1}{r} \int_0^r Q(u) du \rho_{\max} \right) \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u) du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u) du \right)^{-1} \leq \\ &\leq \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \int_0^r P(u)u du + \int_0^r Q(u) du \right) \rho_{\max} \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u) du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u) du \right)^{-1} \leq \frac{\rho_{\max}}{r} < 1. \end{aligned}$$

Покладемо $A_k = F'(x_k) + G(x_{k-1}, x_k)$. Якщо $x_k \in B(x^*, r)$, то згідно (7.16), (7.17) за теоремою Банаха про обернений оператор [13] отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} \|A_k^{-1} H'(x^*)\| &\leq \left\| \left(I - (I - H'(x^*)^{-1} A_k) \right)^{-1} \right\| \leq \left\| \left(I - H'(x^*)^{-1} (H'(x^*) - A_k) \right)^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \left\| \left(I - H'(x^*)^{-1} (F'(x^*) - F'(x_k) + G'(x^*) - G(x_{k-1}, x_k)) \right)^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \left(1 - \int_0^{\rho(x_k)} P(u) du - \int_0^{\rho(x_{k-1}) + \rho(x_k)} Q(u) du \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Виконавши тотожні перетворення

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - A_k^{-1}(F(x_k) + G(x_k) - F(x^*) - G(x^*)) = \\
&= -A_k^{-1}[F(x_k) + G(x_k) - F(x^*) - G(x^*) - (F'(x_k) + G(x_{k-1}, x_k))(x_k - x^*)] = \\
&= A_k^{-1}H'(x^*)H'(x^*)^{-1} \times \\
&\times \left(\int_0^1 (F'(x_k) - F'(x_k^\tau))(x_k - x^*) d\tau + (-G(x^*, x_k) + G(x_{k-1}, x_k))(x_k - x^*) \right),
\end{aligned}$$

де $x_k^\tau = x^* + \tau(x_k - x^*)$, за лемами 7.1 та 7.2 з використанням попередньої нерівності дістанемо оцінки

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\| &\leq \|A_k^{-1}H'(x^*)\| \times \\
&\times \left\| H'(x^*)^{-1} \left(\int_0^1 (F'(x_k) - F'(x_k^\tau))(x_k - x^*) d\tau + (G(x_{k-1}, x_k) - G(x^*, x_k))(x_k - x^*) \right) \right\| \leq \\
&\leq \|A_k^{-1}H'(x^*)\| \left(\left\| H'(x^*)^{-1} \int_0^1 (F'(x_k) - F'(x_k^\tau))(x_k - x^*) d\tau \right\| + \right. \\
&\quad \left. + \left\| H'(x^*)^{-1} (G(x_{k-1}, x_k) - G(x^*, x_k))(x_k - x^*) \right\| \right) \leq \\
&\leq \|A_k^{-1}H'(x^*)\| \left(\int_0^1 \int_{\tau\rho(x_k)}^{\rho(x_k)} P(u) du d\tau + \int_0^{\rho(x_{k-1})} Q(u) du \right) \|x_k - x^*\| \leq \\
&\leq \|A_k^{-1}H'(x^*)\| \left(\int_0^{\rho(x_k)} P(u) u du + \int_0^{\rho(x_{k-1})} Q(u) du \rho(x_k) \right) \leq \\
&\leq \left(\int_0^{\rho(x_k)} P(u) u du + \int_0^{\rho(x_{k-1})} Q(u) du \rho(x_k) \right) \left(1 - \int_0^{\rho(x_k)} P(u) du - \int_0^{\rho(x_{k-1})+\rho(x_k)} Q(u) du \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Далі, для $k=0$

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x^*\| &\leq \left(\frac{1}{\rho(x_0)^2} \int_0^{\rho(x_0)} P(u) u du \rho(x_0)^2 + \frac{1}{\rho(x_{-1})} \int_0^{\rho(x_{-1})} Q(u) du \rho(x_{-1}) \rho(x_0) \right) \times \\
&\quad \times \left(1 - \int_0^{\rho(x_0)} P(u) du - \int_0^{\rho(x_{-1})+\rho(x_0)} Q(u) du \right)^{-1} \leq \\
&\leq \left(\frac{1}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} P(u) u du \rho_{\max} \rho(x_0) + \frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} Q(u) du \rho_{\max} \rho(x_0) \right) \times
\end{aligned}$$

$$\times \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u) du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u) du \right)^{-1} = q\rho x_0 = q \|x_0 - x^*\| < \|x_0 - x^*\|.$$

Отже, $x_1 \in B(x^*, r)$. Тоді для всіх $k = 1, 2, \dots$ можна повторити

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1} - x^*\| \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\rho(x_k)^2} \int_0^{\rho(x_k)} P(u) u du \rho(x_k)^2 + \frac{1}{\rho(x_{k-1})} \int_0^{\rho(x_{k-1})} Q(u) du \rho(x_{k-1}) \rho(x_k) \right) \times \\ & \quad \times \left(1 - \int_0^{\rho(x_k)} P(u) du - \int_0^{\rho(x_{k-1}) + \rho(x_k)} Q(u) du \right)^{-1} \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} P(u) u du \rho(x_k)^2 + \frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} Q(u) du \rho(x_{k-1}) \rho(x_k) \right) \times \\ & \quad \times \left(1 - \int_0^{\rho(x_k)} P(u) du - \int_0^{\rho(x_{k-1}) + \rho(x_k)} Q(u) du \right)^{-1} \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} P(u) u du + \frac{1}{\rho_{\max}} \int_0^{\rho_{\max}} Q(u) du \right) \times \\ & \quad \times \left(1 - \int_0^{\rho_{\max}} P(u) du - \int_0^{2\rho_{\max}} Q(u) du \right)^{-1} \rho(x_{k-1}) \rho(x_k) = \\ & = \frac{q}{\rho_{\max}} \rho(x_{k-1}) \rho(x_k) < q\rho(x_k) < \rho(x_k). \end{aligned} \tag{7.21}$$

За математичною індукцією, всі $x_k \in B(x^*, r)$ і $\rho(x_k) = \|x - x^*\|$ монотонно спадає.

Тому для всіх $k = 0, 1, 2, \dots$ одержимо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{q}{\rho_{\max}} \rho(x_{k-1}) \rho(x_k) \leq q^{\Phi_{k+2}-1} \|x_0 - x^*\|.$$

Таким чином, отримали (7.19). З нерівності (7.19) випливає, що порядок збіжності методу Ньютона-хорд дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Зауважимо, що у випадку $G(x) \equiv 0$ з (7.21) випливає квадратична збіжність ітераційного процесу (7.4), який збігається з методом Ньютона.

7.4 Область єдиності розв'язку

Лема 7.3 [20]. Нехай $g(t) = \frac{1}{t} \int_0^t P(u)(t-u)du$, $0 \leq t \leq r$, де $P(u)$ – додатна

інтегрована функція на $[0, r]$. Тоді $g(t)$ монотонно зростаюча відносно t .

Теорема 7.2. Нехай $H(x^*) = 0$, $H'(x^*)^{-1}$ існує, F має неперервну похідну, а G має поділені різниці, які задовольняють узагальнені умови Ліпшиця

$$\|H'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(x^*))\| \leq \int_0^{\rho(x)} P(u)du, \quad (7.22)$$

$$\|H'(x^*)^{-1}(G(x, x^*) - G'(x^*))\| \leq \int_0^{\rho(x)} Q(u)du, \quad (7.23)$$

де $x \in B(x^*, r)$, $\rho(x) = \|x - x^*\|$ і P, Q додатні інтегровані функції. Нехай r задовольняє нерівність

$$\frac{1}{r} \int_0^r P(u)(r-u)du + \int_0^r Q(u)du \leq 1 \quad (7.24)$$

Тоді рівняння $H(x) = 0$ має єдиний розв'язок x в $B(x^*, r)$.

Доведення. Виберемо довільно $x_0 \in B(x^*, r)$ і розглянемо ітерацію

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x^*) + G'(x^*)]^{-1}(F(x_k) + G(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.25)$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= -H'(x^*)^{-1}(F(x_0) + G(x_0) - F(x^*) - G(x^*) + H'(x^*)(x_0 - x^*)) = \\ &= \int_0^1 H'(x^*)^{-1}(F'(x^*) - F'(x_0^\tau))(x_0 - x^*)dt + H'(x^*)^{-1}(G(x^*, x_0) - G'(x^*))(x_0 - x^*), \end{aligned}$$

де $x_0^\tau = x^* + \tau(x_0 - x^*)$. Тоді за умов (7.22), (7.23) отримуємо

$$\begin{aligned}
& \|x_1 - x^*\| = \\
& = \left\| \int_0^1 \int_0^{\tau \rho(x_0)} P(u) du \rho(x_0) d\tau + H'(x^*)^{-1} (G(x^*, x_0) - G'(x^*))(x_0 - x^*) \right\| \leq \\
& \leq \int_0^{\rho(x_0)} P(u) (\rho(x_0) - u) du + \left\| H'(x^*)^{-1} (G(x^*, x_0) - G'(x^*))(x_0 - x^*) \right\| \leq \\
& \leq \int_0^{\rho(x_0)} P(u) (\rho(x_0) - u) du + \int_0^{\rho(x_0)} Q(u) du \rho(x_0).
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Звідси, згідно (7.24) за лемою 3 отримуємо

$$\begin{aligned}
q_0 & := \frac{1}{\rho(x_0)} \int_0^{\rho(x_0)} P(u) (\rho(x_0) - u) du + \int_0^{\rho(x_0)} Q(u) du < \\
& < \frac{1}{r} \int_0^r P(u) (r - u) du + \int_0^r Q(u) du \leq 1.
\end{aligned}$$

З нерівності (7.26) випливає

$$\|x_1 - x^*\| \leq q_0 \|x_0 - x^*\|.$$

Отже, ітераційний процес (7.25) можна продовжити нескінченно і

$$\|x_k - x^*\| \leq q_0^k \|x_0 - x^*\|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тому $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$. Але якщо x_0 задовольняє $F(x_0) + G(x_0) = 0$, то $x_k = x_0$.

Таким чином, виходить, що $x_0 = x^*$.

7.5 Наслідки

Традиційними припущеннями при вивченні ітераційних процесів Ньютона та хорд є звичайні умови Ліпшиця, які використовують сталі Ліпшиця.

Наслідок 7.1. Нехай $H(x) = F(x) + G(x) = 0$, існує $H'(x^*)^{-1}$, F має неперервні похідні і G має поділені різниці, які задовольняють умови Ліпшиця

$$\|H'(x^*)^{-1} (F'(x) - F'(x^* + \tau(x - x^*)))\| \leq (1 - \tau)P \|x - x^*\|,$$

$$\|H'(x^*)^{-1}(G(x, y) - G(u, v))\| \leq Q(\|x - u\| + \|y - v\|)$$

для всіх $x, y, u, v \in B(x^*, r)$, $0 \leq \tau \leq 1$, де P, Q – додатні числа і $r = \frac{2}{3(P+2Q)}$.

Тоді метод Ньютона-хорд (7.4) збігається до розв'язку x^* для всіх $x_{-1}, x_0 \in B(x^*, r)$ і для $q = \frac{1}{2} \frac{(P+2Q)\rho_{\max}}{(1-(P+2Q)\rho_{\max})}$ справджуються оцінки (7.19).

Зазначимо, що отриманий радіус збіжності співпадає з $r = \frac{2}{3P}$ для методу Ньютона розв'язування рівняння $F(x) = 0$ [15, 20] і з $r = \frac{1}{3Q}$ для методу хорд розв'язування рівняння $G(x) = 0$ [15, 16].

Наслідок 7.2. Нехай $H(x) = F(x) + G(x) = 0$, існує $H'(x^*)^{-1}$, F має неперервні похідні і G має поділені різниці, які задовольняють умови Ліпшиця

$$\|H'(x^*)^{-1}(F'(x) - F'(x^*))\| \leq P\|x - x^*\|,$$

$$\|H'(x^*)^{-1}(G(x, x^*) - G'(x^*))\| \leq Q\|x - x^*\|$$

для всіх $x \in B(x^*, r)$, де P, Q – додатні числа і $r = \frac{2}{P+2Q}$. Тоді рівняння

$H(x) = 0$ має єдиний розв'язок в $B(x^*, r)$.

Зауважимо, що отриманий радіус області єдиності розв'язку збігається з $r = \frac{2}{P}$ для методу Ньютона розв'язування рівняння $F(x) = 0$ [20] і з $r = \frac{1}{Q}$ для методу хорд розв'язування рівняння $G(x) = 0$ [15, 16].

7.6 Висновки

Для розв'язування нелінійних операторних рівнянь, які містять диференційовану і недиференційовану частини, застосовано комбінований

метод Ньютона-хорд. Уведено узагальнені умови Ліпшиця для поділених різниць, частковим випадком яких є звичайні умови з константою Ліпшиця. Запропоновано методику доведення локальної збіжності ітераційного процесу, за якою встановлено умови та порядок збіжності комбінованого методу Ньютона-хорд, встановлено область єдиності розв'язку. Цю методику можна застосувати для дослідження інших комбінованих методів розв'язування нелінійних задач.

8 АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ ДВОТОЧКОВОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИМ ОПЕРАТОРОМ

В даному розділі проведені дослідження напівлокальної збіжності двоточкового методу для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором, побудованого на основі методу Ньютона і хорд та встановлено порядок збіжності. На тестових прикладах проведено числовий експеримент.

8.1 Вступ

Розглянемо нелінійне операторне рівняння:

$$F(x) + G(x) = 0, \quad (8.1)$$

де оператори F і G визначені на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y . F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого не вимагається. Потрібно знайти наближений розв'язок $x^* \in D$, який задовольняє рівняння(1).

Для розв'язування поставленої задачі ми будемо використовувати диференціально–різницеві методи:

$$\begin{aligned} x_{-1}, x_0 &\in D, \\ x_{n+1} &= x_n - A_n^{-1} F(x_n) + G(x_n), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

де $A_n = A(x_{n-1}, x_n)$ – лінійний обмежений оператор.

В працях [26, 27] розглядається метод (8.2), в якому $A_n = F'(x_n)$, тобто в ітераційній формулі використовується лише похідна від диференційовної частини. Такий метод збігається до розв'язку з лінійною швидкістю. Більш ефективним для розв'язування (8.1) є ітераційно–різницеві або різницеві методи,

які використовують крім похідної $F'(x_n)$ або її апроксимації поділені різниці недиференційовної частини G .

У цьому роздільно будемо розглядати метод, побудований на основі методів Ньютона та хорд. Поклавши у формулі (8.2) $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$, отримаємо комбінований метод Ньютона та хорд

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)]^{-1}(F(x_n) + G(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.3)$$

В [3] наведено ітераційну формулу (8.3) і показано на прикладах, що він швидше збігається, ніж метод з $A_n = F'(x_n)$. У статті [28] вивчено напівлокальну збіжність методу (8.3), однак встановлено лише лінійну збіжність. У статті [25] досліджено збіжність методу (8.2) з $A_n = F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ за умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку і встановлено порядок збіжності $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

У цій праці обґрунтовано напівлокальну збіжність методу (8.3) з порядком $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ також за умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку і на чисельних експериментах показано ефективність (8.3) та методу (8.2) з різними виборами оператора A_n .

8.2 Аналіз збіжності

Нехай $L(X, Y)$ – простір лінійних обмежених операторів з X в Y .

Означення 1. Обмежений лінійний оператор, який діє з X в Y , позначуваний $G(x, y)$, будемо називати поділеною різницею першого порядку для оператора G за фіксованими точками x і y ($x \neq y$), якщо виконується рівність

$$G(x, y)(x - y) = G(x) - G(y).$$

Теорема 8.1. Нехай F і G – нелінійні оператори, які діють з відкритої опуклої множини D банахового простору X у банахів простір Y . F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор. Нехай $G(\cdot, \cdot)$ – поділені різниці першого порядку оператора G , визначені на множині $U = \{x: \|x - x_0\| \leq r_0\}$. Припустимо, що лінійний оператор $A_0 = F'(x_0) + G(x_{-1}, x_0)$, де $x_{-1}, x_0 \in U$, є оборотний і виконуються умови

$$\|A_0^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \leq 2p_0 \|x - y\|, \quad (8.4)$$

$$\|A_0^{-1} G(x, y) - G(u, v)\| \leq q_0(\|x - u\| + \|y - v\|). \quad (8.5)$$

Нехай a, c, r_0 – невід'ємні числа, такі що

$$\|x_0 - x_{-1}\| \leq a, \|A_0^{-1}(F(x_0) + G(x_0))\| \leq c, c > a, \quad (8.6)$$

$$r_0 \geq c / (1 - \gamma), q_0 a + 2p_0 r_0 + 2q_0 r_0 < 1, \quad (8.7)$$

$$\gamma = \frac{p_0 r_0 + q_0 (r_0 + a)}{1 - q_0 a - 2p_0 r_0 - 2q_0 r_0}, 0 \leq \gamma < 1.$$

Нехай замкнена куля U міститься в D . Тоді для всіх $n \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ правильні нерівності

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leq t_n - t_{n+1}, \quad (8.8)$$

$$\|x_n - x^*\| \leq t_n - t^*, \quad (8.9)$$

де

$$t_{-1} = r_0 + a, t_0 = r_0, t_1 = r_0 - c, \\ t_{n+1} - t_{n+2} = \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_{n+1})}{1 - q_0 a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})} (t_n - t_{n+1}), n \geq 0, \quad (8.10)$$

$\{t_n\}_{n \geq 0}$ – спадна невід'ємна послідовність, яка збігається до t^* $r_0 - c / (1 - \gamma) \leq t^* < t_0$; ітераційний процес (8.3) є добре визначений і генерована ним послідовність збігається до розв'язку x^* рівняння $F(x) + G(x) = 0$.

Доведення. Методом математичної індукції покажемо, що для всіх $k \geq 0$ виконується

$$t_{k+1} \geq t_{k+2} \geq r_0 - \frac{1-\gamma^{k+2}}{1-\gamma}c \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0, \quad (8.11)$$

$$t_{k+1} - t_{k+2} \leq \gamma(t_k - t_{k+1}). \quad (8.12)$$

З (8.10) для $k = 0$ отримаємо

$$t_1 - t_2 = \frac{p_0(t_0 - t_1) + q_0(t_{-1} - t_1)}{1 - q_0a - 2p_0(t_0 - t_1) - q_0(2t_0 - t_0 - t_1)}(t_0 - t_1) \leq \gamma(t_0 - t_1),$$

$$t_0 \geq t_1, \quad t_1 \geq t_2 \geq t_1 - \gamma(t_0 - t_1) \geq r_0 - (1 + \gamma)c = r_0 - \frac{(1 - \gamma^2)c}{1 - \gamma} \geq r_0 - \frac{c}{1 - \gamma} \geq 0.$$

Припустимо, що (8.11) та (8.12) виконуються для $k = 0, 1, \dots, n-1$. Тоді для $k = n$ отримаємо

$$t_{n+1} - t_{n+2} = \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_{n+1})}{1 - q_0a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}) \leq$$

$$\leq \frac{p_0t_n + q_0t_{n-1}}{1 - q_0a - 2p_0t_0 - 2q_0t_0}(t_n - t_{n+1}) \leq \gamma(t_n - t_{n+1}),$$

$$t_{n+1} \geq t_{n+2} \geq t_{n+1} - \gamma(t_n - t_{n+1}) \geq r_0 - \frac{1 - \gamma^{n+2}}{1 - \gamma}c \geq r_0 - \frac{c}{1 - \gamma} \geq 0.$$

Отже, ми довели, що $\{t_n\}_{n \geq 0}$ – спадна, невід'ємна послідовність і збігається до $t^* \geq 0$.

Методом математичної індукції доведемо, що ітераційний процес (8.3) є коректно визначений і для всіх n виконується нерівність (8.8).

Враховуючи (8.6) і те, що $t_{-1} - t_0 = a, t_0 - t_1 = c$, ми отримаємо, що $x_1 \in U_0$ і (8.8) виконується для $n \in \{-1, 0\}$.

Позначимо $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$. Використовуючи умови Ліпшиця (8.4) та (8.5), матимемо

$$\begin{aligned}
\|I - A_0^{-1}A_{n+1}\| &= \|A_0^{-1} A_0 - A_{n+1}\| \leq \|A_0^{-1} F' x_0 - F' x_{n+1}\| + \\
&+ \|A_0^{-1} G(x_{-1}, x_0) - G(x_n, x_0) + G(x_n, x_0) - G(x_n, x_{n+1})\| \leq \\
&\leq 2p_0 \|x_0 - x_{n+1}\| + q_0 \|x_{-1} - x_0\| + \|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_{n+1}\| \leq \\
&\leq 2p_0 \|x_0 - x_{n+1}\| + q_0 a + q_0 \|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_{n+1}\| \leq \\
&\leq q_0 a + 2p_0(t_0 - t_{n+1}) + q_0(2t_0 - t_{n+1} - t_n) \leq q_0 a + 2p_0 r_0 + 2q_0 r_0 < 1.
\end{aligned}$$

За теоремою Банаха про обернений оператор маємо, що A_{n+1} є оборотний і

$$\|A_{n+1}^{-1}A_0\| \leq 1 - p_0 \|x_0 - x_{n+1}\| - q_0 a - q_0 \|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_{n+1}\|^{-1}.$$

Доведемо, що ітераційний процес (8.3) є добре визначений для $k = n + 1$.

Враховуючи означення поділеної різниці і умови (8.4), (8.5), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\|A_0^{-1} F x_{n+1} + G x_{n+1}\| = \\
&= \|A_0^{-1} F(x_{n+1}) + G(x_{n+1}) - F(x_n) - G(x_n) - A_n(x_n - x_{n+1})\| \leq \\
&\leq \left\| A_0^{-1} \left(\int_0^1 \{F'(x_{n+1} + t(x_n - x_{n+1})) - F'(x_n)\} dt \right) \right\| \|x_n - x_{n+1}\| + \\
&\quad + \|A_0^{-1} G(x_{n+1}, x_n) - G(x_{n+1}, x_n)\| \|x_n - x_{n+1}\| \leq \\
&\leq p_0 \|x_n - x_{n+1}\| + q_0 \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \|x_n - x_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

Звідси, врахувавши умову (8.8), маємо

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x_{n+2}\| = \|A_{n+1}^{-1} F x_{n+1} + G x_{n+1}\| \leq \\
&\leq \|A_{n+1}^{-1}A_0\| \|A_0^{-1} F x_{n+1} + G x_{n+1}\| \leq \\
&\leq \frac{p_0 \|x_n - x_{n+1}\| + q_0 \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|}{1 - q_0 a - 2p_0 \|x_0 - x_{n+1}\| - q_0 \|x_0 - x_{n+1}\| + \|x_0 - x_n\|} \|x_n - x_{n+1}\| \leq \\
&\leq \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_{n+1})}{1 - q_0 a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})} (t_n - t_{n+1}) = t_{n+1} - t_{n+2}.
\end{aligned}$$

Отже, ітераційний процес (8.3) добре визначений для всіх n . Звідси випливає, що

$$\|x_n - x_k\| \leq t_n - t_k, \quad -1 \leq n \leq k, \quad (8.13)$$

тобто послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ є фундаментальною і збіжною в просторі X . З (8.13) при $k \rightarrow \infty$ випливає нерівність (8.9). Покажемо, що x^* є коренем рівняння $F(x) + G(x) = 0$. Справді

$$\begin{aligned} A_0^{-1} F x_{n+1} + G x_{n+1} &= \left\| A_0^{-1} F(x_{n+1}, x_n) + G(x_{n+1}, x_n) - A_n x_{n+1} - x_n \right\| \leq \\ &\leq p_0 \|x_n - x_{n+1}\| + q_0 \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n-1} - x_n\| \|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, $F(x^*) + G(x^*) = 0$. Теорема доведена.

Наслідок 8.1. *Порядок збіжності методу (8.3) дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Доведення. З (8.10), врахувавши, що $t_n - t_{n+1} < t_{n-1} - t_n$, отримаємо.

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_{n+2} &= \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_n - t_{n+1} + t_{n-1} - t_n)}{1 - q_0 a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})} (t_n - t_{n+1}) \leq \\ &\leq \frac{p_0(t_{n-1} - t_n) + 2q_0(t_{n-1} - t_n)}{1 - q_0 a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})} (t_n - t_{n+1}) = \\ &= \frac{p_0 + 2q_0}{1 - q_0 a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})} (t_n - t_{n+1})(t_{n-1} - t_n) \leq \\ &\leq \frac{p_0 + 2q_0}{1 - q_0 a - 2p_0 t_0 - 2q_0 t_0} (t_n - t_{n+1})(t_{n-1} - t_n). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що порядок збіжності послідовності $\{t_n\}_{n \geq 0}$ дорівнює $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ і, згідно з (8.9), послідовність $\{x_n\}_{n \geq 0}$ збігається з тим же порядком.

Зауваження 8.1. У праці [28] проведено дослідження методу (8.3) за умови

$$\|G(x; y) - G(u; v)\| \leq \omega(\|x - u\|, \|y - v\|), \quad x, y, u, v \in D, \quad (8.14)$$

де $\omega: R_+ \times R_+ \rightarrow R_+$, – неперервна неспадна функція двох аргументів. Ця умова узагальнює класичні умову Лібшиця при $\omega(u_1, u_2) = k(u_1 + u_2)$ та умову Гьольдера при $\omega(u_1, u_2) = k(u_1^p + u_2^p)$, $p \in (0; 1]$ для поділених різниць першого порядку. Якщо ж $\omega(0, 0) = 0$, то G є диференційовною [29] і

$G'(x) = G(x, x)$, $x \in D$. В загальному, умова (8.14) не включає диференційовності G . За умови (8.14) в [28] показано лінійну збіжність методу (8.3).

Зауваження 8.2. Очевидно, для умови (8.5) $\omega(0,0) = 0$, а тому G є диференційовною за Фреше в D .

8.3 Числові експерименти

Є різні способи обчислення A_n . Розглянемо дев'ять з них:

1. $A_n = F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ (комбінований метод Ньютона і Курчатова);
2. $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$ (комбінований метод Ньютона і хорд);
3. $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ (метод Курчатова);
4. $A_n = F(x_{n-1}, x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$ (метод хорд);
5. $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) + G(x_{n-1}, x_n)$ (комбінація методів Курчатова і хорд);
6. $A_n = F(x_{n-1}, x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ (комбінація методів хорд і Курчатова);
7. $A_n = F'(x_n)$;
8. $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$;
9. $A_n = F(x_{n-1}, x_n)$.

Протестуємо дані методи на конкретних прикладах.

Приклад 8.1.

$$\begin{cases} 3x^2y + y^2 - 1 + |x - 1| = 0 \\ x^4 + xy^3 - 1 + |y| = 0. \end{cases}$$

$$(x^*, y^*) = (0.894655373334687, 0.327826521746298)$$

Приклад 8.2.

$$\begin{cases} z^2(1 - y) - xy + |y - z^2| = 0 \\ z^2(x^3 - x) - y^2 + |3y^2 - z^2 + 1| = 0 \\ 6xy^3 + y^2z^2 - xy^2z + |x + z - y| = 0 \end{cases}$$

$$(x^*, y^*, z^*) = (-1, 2, 3)$$

Для прикладу 8.1 будемо використовувати різні початкові наближення. Спочатку протестуємо методи для початкового наближення $x_{-1} = (5, 5)$, $x_0 = (1, 0)$.

Використовуючи метод (8.2), де $A_n = F(x_{n-1}, x_n)$, ми отримаємо результати за 34 ітерації, вони наведені в табл. 8.1. Якщо ж $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$, одержимо такі ж результати за 33 ітерації, а у випадку $A_n = F' x_n$ – за 32 ітерації.

Таблиця 8.1 – Значення наближення до розв'язку та норми різниці сусідніх наближень на кожній ітерації

k	x_k^1	x_k^2	$\ x_k - x_{k-1}\ $
-1	5	5	
0	1	0	5
1	0.979967948717949	0.125	0.125
2	0.966502751493615	0.329328641002962	0.204328641002962
3	0.902223759075871	0.347369698786863	0.0642789924177439
4	0.889009618177178	0.334225418908924	0.013214140898693
5	0.892486007014052	0.327217005051413	0.0070084138575110
6	0.894978941391213	0.326935017281376	0.0024929343771609
7	0.894970253888772	0.327751235034817	0.0008162177534406
8	0.894672251439099	0.327919802556644	0.0002980024496731
9	0.89462069271032	0.32785201832512	6.778423152414E-05
10	0.894647242887576	0.327819856289015	3.216203610462E-05
11	0.894657381536873	0.3278195212349	1.987429559502E-05
...			
34	0.894655373334687	0.327826521746298	2.220446049250E-16

Методи з використанням різного типу поділених різниць мало відрізняються. Для покращення результату методу з поділеними різницями, як в методі Курчатова, необхідно, щоб початкові наближення були близькими.

Протестуємо комбіновані методи хорд та Курчатова на нашому прикладі. В табл. 8.2 подані результати, отримані застосуванням методу (8.2) з вибором $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) + G(x_{n-1}, x_n)$.

Таблиця 8.2 – Результати обчислень для прикладу 8.1

k	x_k^1	x_k^2	$\ x_k - x_{k-1}\ $
-1	5	5	
0	1	0	5
1	1.00986009327115	0.025716189207195	0.0257161892071952
2	0.916852152330765	0.342283312935211	0.316567123728016
3	0.901254325615224	0.315239706817256	0.0270436061179551
4	0.89453509002626	0.328453921801031	0.0132142149837743
5	0.894657514977907	0.327821395420722	0.000632526380308973
6	0.894655372808128	0.327826523144891	5.12772416932927E-06
7	0.894655373334687	0.327826521746297	1.39859390735353E-09
8	0.894655373334687	0.327826521746298	6.10622663543836E-16

За таку ж кількість ітерацій отримано розв'язок методом (8.2) у випадку $A_n = F(x_{n-1}, x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$.

Для комбінацій методів Курчатова та хорд ми отримали приблизно однакові результати, тому можемо використовувати будь-який з цих методів.

Розглянемо тепер методи хорд та Курчатова. Застосовуючи метод (8.2), де $A_n = F(x_{n-1}, x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$, тобто метод хорд, і метод Курчатова, в якому $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$, ми отримаємо розв'язок за 8 ітерацій.

Протестувавши метод хорд та метод Курчатова, одержали результати, подібні до результатів комбінованих методів Курчатова та хорд. Найкращих результатів можна досягнути при використанні аналітично заданих похідних для F та поділених різниць для G . Такими методами є комбінація методів Ньютона та хорд або Ньютона та Курчатова. Для методу (8.2), де $A_n = F' x_n + G(x_{n-1}, x_n)$, тобто для комбінації методів Ньютона та хорд одержані результати, подані в табл. 8.3.

Таблиця 8.3 – Значення наближення до розв'язку та норми різниці сусідніх наближень на кожній ітерації

k	x_k^1	x_k^2	$\ x_k - x_{k-1}\ $
-1	5	5	
0	1	0	5
1	0.909090909090909	0.363636363636364	0.363636363636364
2	0.894886945874111	0.32909863820309	0.0345377254332734
3	0.894655531991499	0.327827544745569	0.00127109345752119
4	0.894655373334794	0.327826521746906	1.0229986626142E-06
5	0.894655373334687	0.327826521746298	6.0895732900689E-13
6	0.894655373334687	0.327826521746298	5.5511151231257E-17

У разі комбінації методів Ньютона та Курчатова, тобто поклавши в (8.2) $A_n = F' x_n + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$, ми отримаємо результати, наведені в табл. 8.4.

Таблиця 8.4 – Значення наближення до розв'язку та норми різниці сусідніх наближень на кожній ітерації

k	x_k^1	x_k^2	$\ x_k - x_{k-1}\ $
-1	5	5	
0	1	0	5
1	1	0.3333333333333333	0.3333333333333333
2	0.90030518819939	0.357409291285181	0.0996948118006104
3	0.894757260793432	0.328371436759816	0.0290378545253656
4	0.894655402114655	0.327826712442772	0.000544724317043943
5	0.89465537333469	0.327826521746318	1.90696453461481E-07
6	0.894655373334687	0.327826521746298	2.08721928629529E-14
7	0.894655373334687	0.327826521746298	5.55111512312578E-17

Як бачимо, метод хорд виявився швидшим. Це пояснюється тим, що початкові наближення не є близькі між собою. Як відомо, метод Курчатова добре працює при близьких початкових наближеннях, це буде показано нижче.

У таблицях 8.1-8.4 точність наближеного розв'язку $\varepsilon = 10^{-15}$.

Приклад 8.1 показує, що методи (8.2) з використанням 1) – 6) збігаються з надлінійною швидкістю збіжності, а методи з використанням 7) – 9) збігаються гірше, з лінійною швидкістю.

Змінимо початкове наближення та точність наближеного розв'язку. Виберемо початкове наближення $x_0 = (1,0)d$, $x_{-1} = x_0 - 10^{-4}$, де $d = 1, 10, 100$. Точність наближеного розв'язку $\varepsilon = 10^{-5}, 10^{-15}$. Отримані результати подані в табл. 8.5.

Таблиця 8.5 – Кількість ітерацій, необхідних для знаходження розв'язку прикладу 8.1 методом (8.2)

d	ε	Вибір A_n								
		1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
1	10^{-5}	5	6	6	6	7	6	11	11	11
	10^{-15}	7	8	8	9	9	8	33	33	32
10	10^{-5}	13	13	15	17	14	18	20	19	23
	10^{-15}	14	15	16	20	16	20	41	41	45
100	10^{-5}	21	21	23	29	23	29	27	29	34
	10^{-15}	22	23	25	31	26	31	49	51	56

Як бачимо, методи з використанням поділених різниць з методу Курчатова дещо швидше збігаються, ніж методи з використанням поділених різниць з методу хорд. Це пояснюється тим, що були вибрані близькі між собою початкові наближення.

Для прикладу 8.2 виберемо початкове наближення $x_0 = (-1.5, 2.5, 3.5)$, $x_{-1} = x_0 - 10^{-4}$. Точність наближеного розв'язку $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$. Отримані результати зведені в табл. 8.6.

Таблиця 8.6 – Кількість ітерацій, необхідних для знаходження розв'язку прикладу 8.2 методом (8.2)

ε	Вибір A_n								
	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
10^{-3}	5	5	5	6	5	6	11	49	12
10^{-6}	7	7	7	8	7	8	33	111	75
10^{-9}	8	8	8	10	8	10	55	174	137

Можна зауважити, що методи, які не використовують в операторі A_n оператор G , збігається дуже повільно. Тому варто використовувати методи, які для оператора A_n використовують не тільки оператор F , але ще й G .

8.4 Висновки

В даному розділі розглянуті диференціально-різницеві методи для нелінійних рівнянь з недиференційовними операторами. Було досліджено напівлокальну збіжність (8.3) і проведено порівняння його на тестових задачах з іншими комбінованими методами. Ці методи є модифікаціями методу Ньютона. Сам метод Ньютона не можна використовувати для недиференційовних операторів, оскільки він потребує аналітично заданих похідних.

На двох прикладах було показано, як відрізняється збіжність методів. Найшвидшими методами виявилися ті, які використовували аналітично задану похідну для оператора F та поділені різниці для F , тобто, 1) і 2) (комбінований метод Ньютона та Курчатова та комбінований метод Ньютона та хорд). Тести показали, що методи, які використовували будь-які комбінації тільки поділених різниць (8.3-6)), збігаються дещо гірше. А методи, які не використовували оператор A_n за формулами (8.7)-(8.9) збігаються найгірше. Методи, які використовували поділені різниці, як у методі Курчатова, давали кращий результат, ніж методи з використанням поділених різниць, як у методі хорд, коли були задані близькі між собою початкові наближення. В іншому випадку вибір поділених різниць не відігравав суттєвої ролі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Процюк О. Б. Чисельне розв'язування просторової задачі стаціонарної теплопровідності у півпросторі з шаром за допомогою функцій Гріна / О. Б. Процюк, Р. С. Хапко // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2011. – 54 – С. 188–198.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968.
3. Chapko R. On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // *Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications.* – 2000. – Vol. 2. – P. 55–69.
4. Chapko R. On the numerical solution of the Dirichlet initial boundary-value problem for the heat equation in the case of a torus / R. Chapko // *Journal of Engineering Mathematics.* – 2002. – 43. – P. 45–87.
5. Ganesh M. A high-order algorithm for obstacle scattering in three dimensions / M. Ganesh, I. G. Graham // *J. Comput. Phys.* – 2004. – 198. – P. 211–242.
6. Graham I. G. Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in \mathbb{R}^3 / I. G. Graham, I. H. Sloan // *Numer. Math.* – 2002. – 92. – P. 289–323.
7. Kress R. Linear integral equations / R. Kress. – New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. – 1999. – 365 p.
8. Wienert L. Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^3 / L. Wienert // PhD thesis, University of Göttingen. – 1990.
9. Гарасим Я. С. Виявлення ефективної методики наближеного розв'язування двовимірних інтегральних рівнянь теорії потенціалу на основі

- обчислювальних експериментів / Я. С. Гарасим, Б. А. Остудін // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2004. – Вип. 9. – С. 47–53.
10. Ильин В. П. Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем / В. П. Ильин, В. А. Катешов, Ю. В. Куликов, М. А. Монастырский. – Новосибирск: Наука, 1987. – 192 с.
 11. Eriksson K. Introduction to Adaptive Method for Differential Equation / K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson // Acta Numerica. – 1995. – P. 1–54.
 12. Garasym Ya. S. A posteriori error estimate for some two-dimensional integral equations of the first kind on unclosed surfaces in potential theory/ Ya. S. Garasym, B. A. Ostudin // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – Vol. 97, No 1. – P. 57–69.
 13. Morrison J. A. Charge singularity at the corner of a flat plate / J. A. Morrison, J. A. Lewis // SIAM J. Appl. Math. – 1976. – Vol. 31. – No 2. – P. 233–250.
 14. Sybil Yu. M. Three dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu. M. Sybil // Матем. студії. – 1997. – Т. 8, № 2. – С. 79–96.
 13. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов – М.: – Наука, 1984. – 752 с.
 14. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: – Мир, 1975. – 558 с.
 15. Argyros I. K. On an algorithm for solving nonlinear operator equation / I. K. Argyros // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1991. – Vol. 10, № 1. – P. 83-92.
 16. Шахно С. М. Застосування нелінійних мажорант для дослідження методу хорд розв'язування нелінійних рівнянь / С. М. Шахно // Математичні студії. – 2004. – Т. 22, № 1. – С. 9-86.

17. Argyros I. A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space / I. K Argyros // *J. Math. Anal. Appl.* – 2004. – Т. 298. – Р. 374-397.
18. Hernandez M. A. The Secant method for nondifferentiable operators / M. A. Hernandez, M. J. Rubio // *Appl. Math. Lett.* – 2002. – Vol. 15. – Р. 395-399.
19. Шахно С. М. Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором / С. М. Шахно, Г. П. Ярмола // *Математичні студії.* – 2010. – Т. 36, № 2. – С. 213-220.
20. Wang X. Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space / X. Wang // *IMA Journal of Numerical Analysis.* – 2000. – Vol. 20. – Р. 123-134.
21. Shakhno S. M. On the Secant method under the generalized Lipschitz conditions for the divided difference operator / S. M. Shakhno // *PAMM – Proc. Appl. Math. Mech.* – 2007. – Vol. 7. – Issue 1. – Р. 2060083- 2060084.
22. Шахно С. М. Метод хорд при узагальнених умовах Ліпшиця для розділених різниць першого порядку / С. М. Шахно // *Математичний вісник НТШ.* – 2007. – Т. 4. – С. 296-305.
23. Shakhno S. M. On a two-step iterative process under generalized Lipschitz conditions for first-order divided differences / S. M. Shakhno // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2010. – Vol. 168, No 4. – Р. 576-584.
24. Курчатов В. А. Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений / В. А. Курчатов // *Докл. АН СССР. Сер. Математика. Физика.* – 1971. – 198, № 3. – С. 524-526.
25. Шахно С. М. Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором / С. М. Шахно, Г. П. Ярмола // *Математичні студії.* – 2010. – 36, № 2. – С. 213-220.

26. Argyros I. A. Unifying local–semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space / I. A. Argyros // *J. Math. Anal. Appl.* – 2004. – 298. – P. 374-397.
27. Argyros I. A. Improving the rate of convergence of Newton methods on Banach spaces with a convergence structure and applications / I. A. Argyros // *Appl. Math. Lett.* – 1997. – Vol. 6. – P. 21-28.
28. Hernandez M. A. The Secant method for nondifferentiable operators / M. A. Hernandez, M. J. Rubio // *Appl. Math. Lett.* – 2002. – 15. – P. 395-399.
29. Hernandez M. A. A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations / M. A. Hernandez, M. J. Rubio // *J. Math. Anal. Appl.* – 2002. – 275. – P. 821–834.

ВИСНОВКИ

Для сингулярно збурених лінійних та нелінійних крайових задач механіки та фізики розвинуто високоточні схеми методу скінченних елементів, здатні якісно відтворювати структури примежових та внутрішніх шарів шуканих розв'язків з наперед гарантованою точністю.

З цією метою для двовимірних крайових задач з еліптичними рівняннями, які розв'язуються з використанням частинами лінійних, квадратичних та білінійних і серендипових апроксимацій МСЕ сконструйовано поелементно визначені квадратичні та кубічні апостеріорні оцінювачі похибок, знаходження яких вимагає обчислень послідовним переглядом елементів триангуляції.

Побудова h -адаптивних схем МСЕ ґрунтується на обчисленні розподілу апостеріорних оцінювачів похибок на скінченних елементах та критеріях керування структурою розрахункових триангуляцій, здатної відшукати апроксимації з наперед заданою точністю в природних нормах розглядуваної задачі.

Ефективність та надійність запропонованих h -адаптивних схем ілюструється низкою розв'язків двовимірних задач міграції домішок, усталених коливань, п'єзоелектрики тощо. Частина побудованих оцінювачів здатна обчислювати двосторонні оцінки похибок апроксимацій МСЕ.

В роботі, за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь побудовано чисельні розв'язки для еволюційних задач осесиметричного слошингу; обернених граничних задач теплопровідності в частково-необмежених областях; проведено дослідження ітераційно-різницевих методів розв'язування відповідних нелінійних рівнянь. Для деяких з вище перелічених задач побудовано та досліджено відповідні наближені схеми розв'язування інтегральних рівнянь із різним характером особливостей в ядрах. Запроваджено чисельно-аналітичний метод до розв'язування суттєво просторових задач

електронної оптики та теорії тріщин на основі методу інтегральних рівнянь, розв'язування відповідних одновимірних та двовимірних інтегральних рівнянь теорії потенціалу із різними особливостями в ядрах на визначених класах контурів і поверхонь.

Досліджено методи розв'язування просторових задач електростатики; проаналізовано методику, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь та декомпозиція складних областей; досліджено наближені схеми розв'язування відповідних інтегральних рівнянь зі слабкою особливістю в ядрі.

В роботі запропонований новий підхід для дослідження різницевого методу з порядком $1 + \sqrt{2}$ для розв'язування нелінійних рівнянь в банахових просторах. Визначені поділені різниці для типових нелінійних операторів і побудовано деякі спеціальні алгоритми для рівнянь з цими операторами. Доведені теореми про локальну і напівлокальну збіжність методів до локально єдиного розв'язку при умовах Гьольдера для поділених різниць першого порядку нелінійного оператора.

Практичне застосування результатів проекту можливе в таких галузях: гідромеханіка (еволюційні задачі з вільними поверхнями), прогнозування забруднення ґрунтів та атмосфери (еволюційні задачі адвекції-дифузії), медична томографія та корозія металів (обернені граничні задачі нестационарної теплопровідності), розрахунок електронно-оптичних систем для генерації і транспортування електронних пучків, механіка руйнування, діагностика руйнування та сейсмології (динамічні задачі теорії тріщин та тонких включень).

Поставлені у науково-дослідній роботі завдання виконано повністю, що відображено в 43 публікаціях у вітчизняних та міжнародних наукових журналах з прикладної математики та чисельного аналізу, а також представлено в 94 доповідях на наукових конференціях. Протягом звітнього періоду за тематикою науково-дослідної роботи захищено захищено дві дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук та одна на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.