Ministerium für Bildung und Kultur
SAARLAND

Lehrplan

Mathematik

Gymnasiale Oberstufe

Einführungsphase

- Erprobungsphase -

2014

Inhalt

Der Beitrag des Faches Mathematik zur gymnasialen Bildung

Der Mathematikunterricht fördert maßgeblich die Persönlichkeitsentwicklung junger Menschen durch das Vermitteln von Methodenkompetenz, Sachwissen und inneren Haltungen und stärkt so die vernunftbetonte Selbstbestimmung. Hiermit leistet der Mathematikunterricht einen wesentlichen Beitrag zu einer vertieften Allgemeinbildung.

Schulische Mathematikkenntnisse sind somit wesentlicher Bestandteil der allgemeinen Studierfähigkeit und bilden die fachlichen Grundlagen für diejenigen jungen Menschen, die nach der Schule ein durch mathematische Denkweisen geprägtes Studium oder Berufsfeld wählen. Neben den mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächern sind dies heute verstärkt auch Arbeitsgebiete im wirtschaftlichen und sozialwissenschaftlichen Bereich.

Die Fähigkeit, Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen, ist aber auch ein eigenständiger intellektueller Wert und stellt einen wichtigen Beitrag der Mathematik zu unserer Kultur dar. Sie ermöglicht eine kritische Wertung von gesellschaftlichen Entwicklungen und leitet zu verantwortungsbewusstem Handeln an. In weiten Teilen des Alltagslebens und in nahezu allen Bereichen des Berufslebens, in denen höher qualifizierte Tätigkeiten ausgeübt werden, ist es von Bedeutung, quantitative Zusammenhänge und abstrakte Strukturen zu erfassen und weiter zu bearbeiten. Dabei kommen verstärkt heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren zum Tragen, die weit über die elementaren Rechentechniken hinausgehen. Gerade der Einsatz von Computern macht es häufig nötig, die zu Grunde liegenden mathematischen Methoden zu verstehen, da es nur so gelingen kann, Möglichkeiten und Grenzen dieser Hilfsmittel zu beurteilen und sie sinnvoll einzusetzen.

Zentrale Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichtes bis zum Abitur

Die nachstehend genannten Aspekte beschreiben das Spannungsfeld und den **Rahmen**, in dem sich der Mathematikunterricht bewegt.

- Mathematik als Mittlerin zwischen materialer und formaler Welt
- Mathematik als deduzierende, beweisende und als experimentelle, heuristische Wissenschaft
- Mathematik als anwendungsbezogene alltagsrelevante Wissenschaft, auch vor dem Hintergrund außerschulischer Anforderungen
- Mathematik als Spielwiese von Kreativität und Fantasie
- Mathematik in ihrer historischen, kulturellen und philosophischen Entwicklung
- Mathematik in der Vernetzung ihrer einzelnen Teildisziplinen und mit anderen Wissenschaften
- Mathematik als Übungsfeld von Arbeitstechniken sowie als Entwicklungsfeld von kognitiven Strategien und von Persönlichkeitsmerkmalen.

Entsprechend ergeben sich die folgenden **zentralen Ziele** des Mathematikunterrichts im Gymnasium.

- Der Unterricht erzieht zu begrifflicher Präzision; er vermittelt die Fähigkeit, Aussagen exakt zu formulieren und logische Schlussfolgerungen zu ziehen. Er fördert die Bereitschaft und die Kompetenz zum Argumentieren und Kritisieren. Er verwendet verschiedene Stufen des Argumentierens, vom beispielgebundenen Verdeutlichen bis zum formalen Beweisen.
- Der Unterricht schult das Mathematisieren, d.h. die Fähigkeit, reale Situationen in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, die entwickelten Modelle mathematisch zu bearbeiten und die Ergebnisse zu interpretieren.
- Der Unterricht fördert das entdeckende Lernen. Die Ausbildung heuristischer Strategien beim Experimentieren und Probieren befähigt die Schülerinnen und Schüler, Beziehungen und Strukturen zu entdecken und sie zu analysieren.
- Der Unterricht versetzt die Schülerinnen und Schüler in die Lage, aus einer Menge von Informationen die für eine anstehende Aufgabe wesentlichen Informationen heraus zu filtern.
- Der Unterricht stärkt und erweitert das Kommunikationsvermögen. Mathematische Sachverhalte werden mündlich und schriftlich dargestellt oder graphisch veranschaulicht. Das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen, das Formalisieren und das algorithmische und kalkülhafte Arbeiten sind spezifische Formen des mathematischen Ausdrucks. Die Beherrschung der Fachsprache öffnet den Zugang zu vielen Disziplinen, insbesondere den naturwissenschaftlichen, technischen und wirtschaftswissenschaftlichen Fächern.
- Der Unterricht fördert die Kreativität und Fantasie, indem er auch Elemente des Spielerischen aufweist und die Ästhetik von Darstellungen betont.
- Der Unterricht gibt exemplarisch Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Gesellschaft.
- Der Unterricht leitet die Schülerinnen und Schüler sowohl zum selbstständigen als auch zum kooperativen Lernen an. Er trägt zur Entwicklung von Selbstbewusstsein und Selbstdisziplin, von Leistungsbereitschaft und Konzentrationsfähigkeit bei.

Nachhaltige und dauerhafte Lernerfolge setzen eine sorgfältige Auswahl und Variation **methodischer Vorgehensweisen** voraus. Zu beachten ist insbesondere:

- Der Unterricht trägt zum Aufbau angemessener Grundvorstellungen zu wesentlichen fachlichen Inhalten und Strategien bei.
- Der Unterricht widmet dem Vernetzen der Inhalte und dem Herstellen von Querbezügen auch zu anderen Fächern besondere Aufmerksamkeit und ermöglicht so Phasen des systematischen Wiederholens.

- Im Unterricht kann der Einsatz zeitgemäßer Medien (z. B. graphikfähige Taschenrechner, Taschencomputer, Computer, elektronische Whiteboards) den Zugang zu mathematischen Inhalten erleichtern. Die Schülerinnen und Schüler sind zu einem verständigen Umgang anzuleiten.
- Der Unterricht befasst sich verstärkt mit Aufgabenstellungen oder Lernumgebungen, die einem situativen Kontext entspringen, wobei auch ergebnisoffene Formulierungen gewählt werden.

Kompetenzen im Mathematikunterricht

Der fachspezifische Anspruch der Bildungsstandards im Fach Mathematik wird durch das folgende **Kompetenzschema** abgebildet, auf das sich auch der Lehrplan bezieht.

inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen (Leitideen)	**prozessbezogene mathematische Kompetenzen (allg. math. Kompetenzen)**	**Anforderungsbereiche**
L1 Algorithmus und Zahl	K1 Mathematisch argumentieren	A1 Reproduzieren
L2 Messen	K2 Probleme mathematisch lösen	A2 Zusammenhänge herstellen
L3 Raum und Form	K3 Mathematisch modellieren	A3 Verallgemeinern und Reflektieren
L4 Funktionaler Zusammenhang	K4 Mathematische Darstellungen verwenden	
L5 Daten und Zufall	K5 Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen	
L6 Grenzprozesse und Näherungsverfahren	K6 Mathematisch kommunizieren	

Die in diesem Schema genannten sechs **prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen** erfassen ein weites Spektrum mathematischen Arbeitens. Die kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten werden in aktiver Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben. Sie lassen sich dabei nicht scharf voneinander abgrenzen, da beim mathematischen Arbeiten oftmals mehrere Kompetenzen zugleich angesprochen werden.

Für den Erwerb der Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen werden **Leitideen** zugeordnet und können damit zur Vernetzung der traditionellen Stoffgebiete beitragen.

Im Sinne eines spiralförmigen Vernetzens wechseln sich die Leitideen in der Abfolge aufbauend und wiederholend ab. Soweit keine fachlichen Erfordernisse einer veränderten Abfolge entgegenstehen, bleibt die Reihenfolge der unterrichtlichen Erfüllung des Lehrplans der Lehrkraft überlassen

Die Berücksichtigung von **Anforderungsbereichen** trägt wesentlich dazu bei, ein ausgewogenes Verhältnis der Anforderungen zu erreichen. Im vorliegenden Lehrplan wird auf eine explizite Ausweisung von Anforderungsbereichen in den einzelnen Lernbereichen verzichtet.

Anforderungsbereich 1: Reproduzieren
umfasst in der Regel leichtere Aufgaben wie
- die Wiedergabe von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich 2: Zusammenhänge herstellen
umfasst in der Regel mittelschwere Aufgaben wie
- selbstständiges Auswählen, Anordnen und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Üben bekannten Zusammenhang und ähnlich zu Vorgehensweisen im Unterricht,

- Selbstständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen geht.

Anforderungsbereich 3: Verallgemeinern und Reflektieren
umfasst in der Regel schwierigere Aufgaben wie
- planmäßiges und kreatives Bearbeiten komplexer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen,
- bewusstes und selbstständiges Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Methoden und Verfahren in neuartigen Situationen.

Im vorliegenden Lehrplan Mathematik durchzieht der ständige Abgleich mit den Kompetenzen alle Fachgebiete der Sekundarstufe I (**Arithmetik**, **Algebra, Geometrie, Funktionenlehre** und **Stochastik)** und wird dann in der Sekundarstufe II (**Analysis, Analytische Geometrie** und **Stochastik)** weitergeführt. In der Sekundarstufe II bilden die „Allgemeinen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung" den Rahmen, in den sich die Unterrichtsgegenstände und das Anforderungsprofil einfügen.

Zum Umgang mit dem Lehrplan

Die jahrgangsbezogenen Teile des Lehrplans sind nach Lernbereichen gegliedert, denen jeweils erläuternde Einleitungstexte vorangestellt sind.

Daran anschließend sind in zwei Spalten das verbindliche Fachwissen und die verbindlichen Kompetenzschwerpunkte aufgeführt. Die Schwerpunkte knüpfen an die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards an. Die im Lehrplan beschriebenen Schülertätigkeiten sind geeignet, die jeweils zugeordnete Kompetenz zu fördern. Die Zuordnung schließt nicht aus, dass weitere Kompetenzen angesprochen werden können. Etwaige fakultative Inhalte finden sich unter den Hinweisen am Ende eines jeden Lernbereichs.

Die Kompetenzschwerpunkte sind bewusst detailliert beschrieben. Dies geschieht mit dem Ziel, die Intensität der Bearbeitung möglichst präzise festzulegen. So kann vermieden werden, dass Lernbereiche entweder zu intensiv oder zu oberflächlich behandelt werden. Die detaillierte Darstellung darf hierbei nicht als Stofffülle missverstanden werden. Der Lehrplan beschränkt sich vielmehr auf wesentliche Inhalte und Themen, die auch Bezugspunkte für schulische und schulübergreifende Leistungsüberprüfungen sind.

Als Richtwerte für die Gewichtung der verbindlich zu behandelnden Lernbereiche bei der Planung des Unterrichts sind Prozentwerte angegeben. Darüber hinaus lässt der Lehrplan Zeit für Vertiefungen, individuelle Schwerpunktsetzungen, fächerübergreifende Bezüge und die Behandlung aktueller Themen.

Die Reihenfolge der Lernbereiche ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Darüber hinaus nimmt sie aber die methodisch-didaktischen Entscheidungen der Lehrkraft nicht vorweg.

Jede Beschreibung eines Lernbereichs schließt im Lehrplan mit Hinweisen ab. Die Hinweise sind inhaltlich gegliedert nach den Gesichtspunkten:

- Methodische und fachdidaktische Erläuterungen
- Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit
- Querverbindungen im Lehrplan
- Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte
- Einsatz digitaler Werkzeuge
- Fakultative Inhalte

Didaktisches Vorwort zum Lehrplan für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe

Der Lehrplan für die Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe bringt die Funktionenlehre und die klassische Geometrie der Sekundarstufe I zu einem vorläufigen Abschluss. Die Lerninhalte der Einführungsphase kommen in zahlreichen Berufsfeldern zum Tragen. Die Sinusfunktion als Grundmodell periodischer Vorgänge, die Stereometrie als Modellierung für Körper des Anschauungsraumes und schließlich die mathematische Beschreibung von exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozessen ermöglichen vielfältige Alltagsbezüge.

Der Lernbereich Stetigkeit verbindet sodann die Funktionenlehre und die Geometrie mit den Anfängen der Differentialrechnung. Die Untersuchung des Grenzwertverhaltens bei infinitesimalen Prozessen ist gekennzeichnet durch zunehmende Abstraktion und markiert den Übergang zur Mathematik der Sekundarstufe II.

So führen die Begriffe „Stetigkeit“ und „Differenzierbarkeit“ in die mathematisch-abstrakte Begriffswelt, bevor sich die Mächtigkeit der hier entwickelten Werkzeuge in konkreten Anwendungen niederschlägt.

Die in den Bildungsstandards[1] beschriebenen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sind im Lehrplan berücksichtigt. Sie bilden zugleich die Grundlage für einen erfolgreichen Unterricht in der Hauptphase der Oberstufe.

[1] „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“
Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003
„Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife“
Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012

Lernbereiche der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe

Lernbereiche Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe	**Mathematik**
1. Allgemeine Sinusfunktion	etwa 20 Prozent der Unterrichtszeit
Periodizität Sinusfunktion Operationen mit der Sinusfunktion Hinweise	
2. Stereometrie	etwa 15 Prozent der Unterrichtszeit
Prisma und Zylinder Pyramide und Kegel Das Prinzip von Cavalieri Halbkugel und Kugel Hinweise	
3. Exponentialfunktionen	etwa 15 Prozent der Unterrichtszeit
Exponentielles Wachstum Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot b^x$ Logarithmen und Logarithmengesetze Hinweise	
4. Stetigkeit	etwa 10 Prozent der Unterrichtszeit
Grenzwert Stetigkeit Monotonie Eigenschaften stetiger Funktionen Hinweise	
5. Einstieg in die Differentialrechnung	etwa 20 Prozent der Unterrichtszeit
Globale und lokale Änderungsrate Differenzierbarkeit und Differentialrechnung Hinweise	
6. Ganzrationale Funktionen	etwa 20 Prozent der Unterrichtszeit
Definition der ganzrationalen Funktion Nullstellen Untersuchung von f mit Hilfe von f' Untersuchung von f mit Hilfe von f'' Anwendungen Hinweise	

Das Spektrum der Eigenschaften von Funktionen wird durch die Behandlung der Sinusfunktion um die Begriffe „Periode“ und „Amplitude“ erweitert. Änderungen in der Periode bei sonst gleichartigem Funktionsverlauf entsprechen einer Streckung des Graphen in x-Richtung. Mit Hilfe der neuen Begriffe und unter Einführung des Bogenmaßes rücken bei dem aus der Dreieckslehre bekannten Sinus die funktionalen Eigenschaften in den Mittelpunkt. Damit bietet der Mathematikunterricht eine erste Grundlage zur Beschreibung periodischer Vorgänge in Natur und Technik. Der naturwissenschaftliche Unterricht der Oberstufe muss entsprechend seiner fachspezifischen Erfordernisse das Thema weiterführen. Demgemäß wird in diesem Lernbereich auf das Lösen aufwändiger trigonometrischer Gleichungen verzichtet.

Angesprochen ist in diesem Lernbereich primär die Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“.

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Periodizität • periodische Vorgänge im Alltag – zeitlich – räumlich • periodische Funktionen • <u>Definition:</u> Die kleinste positive Zahl p mit der Eigenschaft $f(x+p)=f(x)$ für alle $x \in D$ heißt Periode. • periodische Bewegung auf einem Kreis	Die Schülerinnen und Schüler • nennen periodische Vorgängen aus der Alltagswelt und geben jeweils die Periodendauer bzw. die Periodenlänge an **(K6)** • entnehmen aus graphischen Darstellungen die Periode **(K4)** • entwickeln Graphen periodischer Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften **(K4)** • erläutern anhand von Beispielen, unter welchen Bedingungen die Bewegung auf einem Kreis ein periodischen Vorgang ist **(K1)**
Sinusfunktion • Erweiterung des Winkelbegriffs auf Winkelmaße größer 360° und kleiner 0° • <u>Definition:</u> Die Maßzahl der zu einem Mittelpunktswinkel gehörigen orientierten Bogenlänge am Einheitskreis heißt Bogenmaß des Winkels. • fiktive Einheit Radiant (rad) des Bogenmaßes • Verhältnisgleichung $\frac{x}{2\pi}=\frac{\varphi}{360°}$ mit Gradmaß φ und Bogenmaß x	Die Schülerinnen und Schüler • verwenden Winkelmaße größer 360°, um das mehrfache Durchlaufen eines Kreises zu beschreiben **(K4)** • nennen das Bogenmaß besonderer Winkel als Bruchteile bzw. Vielfache von π (-180°, 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°, 540°) **(K6)** • rechnen Winkelmaße vom Grad- ins Bogenmaß um und umgekehrt **(K5)** • berechnen Kreisbogenlängen als Produkt aus Radius und Bogenmaß **(K5)**

1. Allgemeine Sinusfunktion	**Mathematik Einführungsphase**
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Sinusfunktion (Fortsetzung) • Erweiterung der Definition von $\sin(\alpha)$ bzw. $\sin(x)$ auf alle Winkelwerte • <u>Definition:</u> Die Funktion $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sin(x)$ heißt Sinusfunktion, ihr Graph heißt Sinuskurve. • Eigenschaften – Definitionsmenge $\mathbb{R}$ – Wertemenge $[-1;1]$ – Periode 2π – Nullstellen $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ – Amplitude 1 – Symmetrie – Extremstellen – Graph • Sinusgleichungen der Form $\sin(x) = u$	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen Werte der Sinusfunktion durch Projektion von Punkten des Einheitskreises auf die y-Achse **(K4)** • erstellen eine Wertetabelle zur Sinusfunktion mit dem Taschenrechner **(K5)** • begründen am Einheitskreis die Eigenschaften der Sinusfunktion **(K1)** • begründen den Zusammenhang $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ **(K1)** • identifizieren die Punktsymmetrie zum Ursprung mit der Allgemeingültigkeit der Gleichung $\sin(-x) = -\sin(x)$ **(K4)** • nennen die besonderen Werte der Sinusfunktion für 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π und nutzen sie beim Lösen von Sinusgleichungen **(K6)** • skizzieren den Graphen der Sinusfunktion über mehrere Perioden unter Berücksichtigung charakteristischer Eigenschaften **(K5)** • bestimmen mit Hilfe graphischer Darstellungen Näherungslösungen von Sinusgleichungen in $\mathbb{R}$ **(K4)** • bestimmen mit dem Taschenrechner eine Näherungslösung einer Sinusgleichung und geben weitere in $\mathbb{R}$ an **(K5)**
Operationen mit der Sinusfunktion • Streckung in y-Richtung – $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto a \cdot \sin(x)$, $a \in \mathbb{R}^*$ – Streckfaktor a in y-Richtung – Amplitude $\lvert a \rvert$ • Parallelverschiebung in y-Richtung – $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sin(x) + d$, $d \in \mathbb{R}$ – y-Achsenabschnitt d • Streckung in x-Richtung: – $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sin(b \cdot x)$, $b \in \mathbb{R}^+$ – Streckfaktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung – Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ • Parallelverschiebung in x-Richtung – $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sin(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – Nullstelle x_0	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben die jeweilige Auswirkung der Variation der Parameter a, d, b und x_0 auf den Graphen der Sinusfunktion **(K6)** • zeichnen die Funktionsgraphen von Hand und mit Hilfe eines Funktionenplotters (auch mit Schiebereglern) **(K4)** • erstellen Graphen anhand verbal vorgegebener Eigenschaften oder Vorgaben zur Entstehung **(K3)** • führen eine Streckung in y-Richtung mit negativen Streckfaktor a aus, indem sie zunächst an der x-Achse spiegeln **(K5)** • berechnen aus der Periode p den zugehörigen Parameter b und umgekehrt **(K5)** • lesen die Parameterwerte bei den einzelnen Variationen sowie bei Kombinationen der Variationen am Graphen ab und geben die Funktionsterme an **(K2)**

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Operationen mit der Sinusfunktion (Fortsetzung) • Allgemeine Sinusfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x - x_0)) + d$ • Sinusgleichungen der Form $a \cdot \sin(b \cdot x) = u$ – graphisches Lösen – rechnerisches Lösen (mit dem WTR) – Periodizität der Lösungen • Kosinusfunktion – $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \cos(x)$ – $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	Die Schülerinnen und Schüler • zeichnen ausgehend von den Parameterwerten den Graph zu einem gegebenen Funktionsterm **(K4)** • ordnen Graphen und Funktionsterme begründet einander zu **(K1)** • bestimmen mit Hilfe graphischer Darstellungen Näherungslösungen von Sinusgleichungen in $\mathbb{R}$ **(K4)** • bestimmen mit dem Taschenrechner eine Näherungslösung einer Sinusgleichung und geben weitere in $\mathbb{R}$ an **(K5)** • identifizieren den Graph der Kosinusfunktion als eine um $\frac{\pi}{2}$ in negativer x-Richtung verschobene Sinuskurve **(K2)** • bestimmen besondere Werte der Kosinusfunktion anhand der entsprechenden Werte der Sinusfunktion **(K5)** • zeichnen den Graph der Kosinusfunktion unter Berücksichtigung charakteristischer Eigenschaften **(K4)**

Hinweise

zu Lernbereich 1 (Allgemeine Sinusfunktion)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Die Parameter Amplitude und Periode können durch Variation von Schallwellen eines Tongenerators über ein Oszillogramm unmittelbar erfahrbar gemacht werden.
- Beispiele für periodische Vorgänge in der Natur liefern Schwingungen von Federpendel und Fadenpendel oder die Bewegung eines Planeten um einen Zentralkörper (zeitlich) sowie Bewegungen mit Zykloiden als Bahnkurven (räumlich).
- Im Unterricht sollte auf eine nicht passende Einstellung des Taschenrechners auf Radiant- bzw. Gradmodus als eine häufige Fehlerquelle hingewiesen werden.
- Auf die Verwendung einer Schablone zum Zeichnen der Sinusfunktion kann verzichtet werden. Bei Handskizzen kann die x – Achse geeignet skaliert werden.
- Die Schreibweise in der Form $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto a \cdot \sin\left(b \cdot \left(x - x_0\right)\right) + d$ verdeutlicht insbesondere die Verschiebung in x -Richtung. Ein Vergleich mit der Scheitelpunktform der Parabel betont die Allgemeinheit der Operationen.
- Die Untersuchung der allgemeinen Sinusfunktion soll sich auf Funktionen einer angemessene Komplexität beschränken.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Projekt: Sonnenauf- und -untergangszeiten im Verlauf eines Jahres (Tageslichtdauer)
- Erfassung/Darstellung der Bewegung verschiedener Pendelkörper

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Lineare Funktionen
- Klassenstufe 9: Operationen mit der Normalparabel $y = a \cdot (x - x_0)^2 + d$
- Klassenstufe 9: Sinus, Kosinus, Tangens
- Lernbereich 5: Einführung in die Differentialrechnung

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Herzrhythmus / Elektrokardiogramm, Vegetationsperioden, Uhrenpendel, Planetenbewegung, Rhythmen in der Musik, Versmaß, Tapetenmuster, Ornamente, Gezeitenkalender, Temperaturkurven in der Natur, Klimadiagramme, CO_2-Konzentration in der Atmosphäre
- Kristallgitter (z. B. unter www.chemie.uni-jena.de)
- Wellen (zeitlich und räumlich periodisch)
- Kippspannung am Oszilloskop

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Applets zur dynamischen Erzeugung der Sinuskurve anhand der Sinusuhr
- Funktionenplotter (mit Schiebereglern zur Variation der Parameter)
- Virtueller Tongenerator mit Oszillogramm (z. B. bei www.planet-schule.de)

Fakultative Inhalte

- Tangensfunktion
- Aliasing-Effekt

Wesentliche Inhalte des Unterrichts im Lernbereich Stereometrie sind die Entwicklung von mathematischen Modellen und die Anwendung in konkreten Fällen. Selbstverständlich sind dabei sowohl das räumliche Anschauungsvermögen als auch algebraische Fertigkeiten zu schulen. Bei den Sachverhalten, deren Herleitung nicht ausdrücklich eingefordert wird, reicht eine Beschränkung auf Plausibilitätsbetrachtungen aus.

Eine vertiefte Behandlung des Volumenproblems bleibt der Oberstufe im Zusammenhang mit dem Integralbegriff vorbehalten. Ausschöpfungen, z. B. durch Treppenkörper, können in leistungsstarken Klassen in Vorbereitung des Grenzwertbegriffs thematisiert werden.

In der Auseinandersetzung mit Problemstellungen aus der Stereometrie werden wichtige Inhalte zurückliegender Klassenstufen wieder aufgegriffen und so Grundwissen gefestigt.

Naturgemäß geht es in diesem Lernbereich um die Leitidee „Raum und Form“; mit dem Einsatz von Formeln wird diese mit den Leitideen „Funktionaler Zusammenhang“ und „Messen“ verbunden.

Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Prisma und Zylinder • Vorkommen in Alltag und Technik • Prisma als überstrichene Punktmenge bei einer Parallelverschiebung eines Vielecks im Raum • Zylinder als überstrichene Punktmenge bei einer Parallelverschiebung eines Kreises im Raum • Eigenschaften von Prisma und Zylinder – Klassifizierung in gerade bzw. schiefe Körper – parallele und kongruente Strecken und Flächen – abwickelbare Oberfläche • Quader (insbesondere Würfel) als Sonderfall • gerader Kreiszylinder als Sonderfall • Eigenschaften gerader Prismen und Zylinder mit der Höhe h, einer Grundfläche mit dem Umfang U und dem Flächeninhalt G – Mantelinhalt $M = U \cdot h$ – Oberflächeninhalt $O = M + 2 \cdot G$ • Rauminhalt V von Prismen und Zylindern mit der Höhe h und einer Grundfläche mit dem Flächeninhalt G $V = G \cdot h$	Die Schülerinnen und Schüler • modellieren geeignete Gegenstände ihrer Umwelt als Prismen bzw. Zylinder **(K3)** • verwenden die Fachbegriffe Ecke, Grundkante, Grundkreis, Grundfläche, Seitenkante, Seitenfläche, Mantel, Mantellinie, Höhe und Oberfläche **(K6)** • klassifizieren Prismen auch nach der Anzahl ihrer Seitenflächen **(K6)** • erläutern, dass alle zur Grundfläche parallelen Schnittflächen kongruent zur Grundfläche sind **(K1)** • entwickeln aus der Gleichung für das Volumen des Quaders die Gleichung für das Volumen des geraden Prismas **(K5)** • machen plausibel, dass gerade und schiefe Prismen mit kongruenter Grundfläche und gleicher Höhe volumengleich sind **(K1)** • beschreiben, wie sich Zylinder durch Prismen ausschöpfen lassen **(K6)** • berechnen das Volumen von Prismen und Zylindern **(K5)** • zeichnen Netze von geraden Prismen und geraden Kreiszylindern **(K4)** • berechnen den Mantelinhalt und den Oberflächeninhalt gerader Körper **(K5)** • formulieren, wie sich Oberflächeninhalt und Volumen von Körpern bei maßstabsgerechten Vergrößerungen bzw. Verkleinerungen verändern **(K6)** • belegen an Beispielen, dass sich der Oberflächeninhalt beim Zerlegen bzw. Ergänzen von Körpern nicht additiv verhält **(K1)** • berechnen längste Strecken innerhalb von Körpern **(K2)**

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Pyramide und Kegel • Vorkommen in Alltag und Technik • Zerlegung eines Würfels in sechs kongruente quadratische Pyramiden • Eigenschaften von Pyramide und Kegel – Vielecke, bzw. Kreis als Grundfläche – abwickelbare Oberfläche – gerade Körper bei einer Grundfläche mit Umkreis als Sonderfall – schiefe Körper – regelmäßige Pyramide als Sonderfall • Rechteck-Pyramide, Dreieck-Pyramide • regelmäßiges Tetraeder als Sonderfall • gerader Kegel als Sonderfall – Mantelinhalt bei Grundkreisumfang U und Länge h_s der Mantellinie: $M = \frac{1}{2} \cdot U \cdot h_s$	Die Schülerinnen und Schüler • modellieren geeignete Gegenstände ihrer Umwelt als Pyramiden bzw. Kegel **(K3)** • verwenden die Fachbegriffe Grundfläche, Spitze, Mantellinie und Körperhöhe **(K6)** • zeichnen Schrägbilder von Pyramiden **(K4)** • verwenden Kreisausschnitte zum Bauen von Kegelmodellen **(K3)** • identifizieren bei Pyramide und Kegel rechte Winkel in geeigneten Schnitten und in Schrägbildern **(K3)** • leiten beim geraden Kegel den Zusammenhang zwischen Grundkreisradius, Körperhöhe und Länge der Mantellinie her **(K2)** • berechnen den Winkel zwischen einer Kante und einer Fläche als Winkel zwischen der Kante und ihrer senkrechten Projektion in die Fläche **(K1)** • berechnen Mantelinhalt und Oberflächeninhalt gerader Körper **(K5)** • überprüfen die Eulersche Polyederformel an Prismen und Pyramiden **(K1)**
Das Prinzip von Cavalieri • <u>Prinzip von Cavalieri:</u> Wenn zwei Körper mit inhaltsgleichen Grundflächen in jeder zur Grundfläche parallelen Schnittebene inhaltsgleiche Schnittflächen haben, dann haben beide Körper das gleiche Volumen. • <u>Satz:</u> Prismen sowie Pyramiden mit inhaltsgleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben das gleiche Volumen. • Zerlegung eines geraden dreiseitigen Prismas in drei volumengleiche dreiseitige Pyramiden • Rauminhalt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ für Pyramiden mit Grundflächeninhalt G und Körperhöhe h	Die Schülerinnen und Schüler • begründen anhand eines Beispiels, dass das Prinzip von Cavalieri nicht umkehrbar ist **(K1)** • berechnen den Flächeninhalt von zur Grundfläche parallelen Schnittflächen an Pyramiden und Kegeln **(K5)** • begründen die Volumengleichheit der drei Pyramiden bei der spezifischen Zerlegung des dreiseitigen Prismas und damit die Volumenformel der Pyramide **(K1)** • berechnen Volumina von Pyramiden **(K5)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben **(K3)**

2. Stereometrie	Mathematik Einführungsphase
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Halbkugel • Vorkommen in Alltag und Technik • archimedischer Restkörper • Eigenschaften der Halbkugel mit Grundflächeninhalt G und Grundkreisradius h – Rauminhalt $V = \frac{2}{3} \cdot G \cdot h$ – Mantel nicht abwickelbar	Die Schülerinnen und Schüler • leiten die Volumenformel für die Halbkugel mit Hilfe des archimedischen Restkörpers her **(K1)** • legen dar, dass Kegel, Halbkugel und Zylinder mit gleichem Radius und gleicher Höhe das Volumenverhältnis 1:2:3 haben **(K6)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben **(K3)**
Kugel • Vorkommen in Alltag und Technik • Eigenschaften der Kugel mit Radius r – Rauminhalt $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ – Oberflächeninhalt $O = 4\pi \cdot r^2$ – Oberfläche nicht abwickelbar – Körper mit kleinstem Oberflächeninhalt bei vorgegebenem Volumen – Körper mit größtem Volumen bei vorgegebenem Oberflächeninhalt	Die Schülerinnen und Schüler • zerlegen die Kugel mittels Zerlegung der Oberfläche näherungsweise in Pyramiden mit dem Kugelradius als Höhe und begründen damit die Gleichung für den Oberflächeninhalt **(K3)** • begründen, dass für den Mantelinhalt von Zylinder und Halbkugel die gleiche Formel $M = U \cdot h$ gilt **(K1)** • vergleichen die Oberflächeninhalte verschiedener Körper gleichen Volumens mit dem der Kugel **(K2)** • nennen Beispiele aus der Natur, bei denen das Verhältnis von Oberflächeninhalt und Volumen von Bedeutung ist **(K6)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben **(K5)**

Hinweise

zu Lernbereich 2 (Stereometrie)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Als Definitionen für Körper können exakte Beschreibungen ihres Entstehens gewählt werden.
- Auf den Unterschied zwischen schiefem Kreiszylinder und dem angeschnittenen geraden Kreiszylinder sollte im Unterricht hingewiesen werden.
- In Anwendungsaufgaben sollten auch aus unterschiedlichen Körpern zusammengesetzte Objekte betrachtet werden.
- Die Stereometrie bietet Gelegenheit zum immanenten Wiederaufgreifen der Lerninhalte zur „Pythagoreischen Satzgruppe" und zu „Sinus und Kosinus".
- Das Prinzip von Cavalieri lässt sich mit Hilfe von Münz- oder Papierstapeln veranschaulichen.
- Formeln stellen stets auch funktionale Zusammenhänge dar.
- Am Ende der Klassenstufe 10 ist es möglich, den Oberflächeninhalt der Kugel als Beispiel für die Ableitung des Volumens nach dem Radius zu thematisieren: $\mathrm{d}V = O \cdot \mathrm{d}r$.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Basteln von Körpermodellen (Faltmodelle, Kantenmodelle)
- Umfüllexperimente
- Bearbeiten raumgeometrischer Fermi-Aufgaben
- Berechnung der Gewindeganglänge einer Maschinenschraube

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 5: Rechtecke
- Klassenstufe 6: Körper
- Klassenstufe 7: Besondere Linien und Punkte im Dreieck
- Klassenstufe 8: Satzgruppe des Pythagoras
- Klassenstufe 9: Ähnlichkeit, Haus der Vierecke, Kreis
- Lernbereich 5: Differenzierbarkeit

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Schattenkegel von Erde und Mond; Sonnen- bzw. Mondfinsternis
- Veränderungen des Wasserpegels bei ruhenden Gewässern
- Prismen in der Optik
- ägyptische Pyramiden, Baukörper in der Architektur, Dachkonstruktionen
- Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Leonhard Euler (1707-1783)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Veranschaulichen von Körpern und ebenen Schnitten mit 3D-Software
- Computeranimationen zu Ausschöpfungen
- numerische Begleitung von Annäherungsprozessen durch Excel-Tabellen

Fakultative Inhalte

- Platonische und Archimedische Körper
- Metamorphosen des Würfels durch Abtragen von den Würfelecken her
- Füllgraphen
- Sehnensatz (Beweis an der Halbkugel)
- Operativer Beweis des Eulerschen Polyedersatzes

Lineare und exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse werden auf der Grundlage des Folgenbegriffs zunächst im Rahmen diskreter Modelle behandelt. Der Einsatz digitaler Werkzeuge beim Erzeugen und Veranschaulichen der Modellierungen unterstützt geeignete Grundvorstellungen und fördert das Verständnis. Der auf reelle Exponenten erweiterte Potenzbegriff erlaubt die Definition von Exponentialfunktionen und die Modellierung mit Hilfe stetiger Modelle. Der Modellbildungskreislauf mit Modellieren/Mathematisieren – Deduzieren/Kalkulieren – Interpretieren – Validieren sollte in dieser Klassenstufe vermittelt werden.

Der Logarithmus als tragender Begriff der Umkehroperation ist sowohl innermathematisch wie auch in vielen Anwendungsbereichen von Bedeutung. Die Logarithmengesetze ergeben sich unmittelbar aus den Potenzgesetzen. Die Einführung der Logarithmusfunktionen bleibt der Hauptphase vorbehalten.

Angesprochen ist in diesem Lernbereich in erster Linie die Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“.

Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Lineares Wachstum • lineares Wachstum im Alltag • arithmetische Folgen – Bezeichnung: n-tes Glied der Folge, Symbol a_n – $a_{n+1} = a_n + d$ (rekursiv) – $a_n = a_0 + n \cdot d$ (explizit) • charakteristische Merkmale – konstante Differenz $a_{n+1} - a_n$ als konstante Wachstumsrate – Anfangswert a_0 – Graph aus diskreten Punkten auf einer Geraden – Wachstumsverhalten – unbeschränktes Wachstum – Grenzwertsymbolik	Die Schülerinnen und Schüler • nennen Beispiele aus dem Alltag für lineare Wachstumsprozesse **(K3)** • erstellen Terme arithmetischer Folgen zu innermathematischen Aufgabenstellungen, z. B. zur Folge der ungeraden Zahlen **(K2)** • erstellen Tabellen zu arithmetischen Folgen mit Hilfe digitaler Werkzeuge **(K5)** • zeichnen Graphen arithmetischer Folgen, auch mit Hilfe digitaler Werkzeuge **(K4)** • entscheiden, ob eine vorgegebene Folge arithmetisch ist **(K1)** • stellen den Zusammenhang zwischen Termen bzw. Graphen arithmetischer Folgen und linearer Funktionen her **(K4)** • beschreiben das Wachstumsverhalten mit Hilfe der Begriffe „streng monoton wachsend“, „streng monoton fallend“ bzw. „konstant“ **(K6)** • verwenden die Schreibweisen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ **(K4)**
Exponentielles Wachstum • exponentielles Wachstum im Alltag • geometrische Folgen mit $a_0, q > 0$ – $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (rekursiv) – $a_n = a_0 \cdot q^n$ (explizit)	Die Schülerinnen und Schüler • nennen Beispiele aus dem Alltag für exponentielle Wachstumsprozesse **(K3)** • erstellen Terme geometrischer Folgen in Kontexten **(K2)** • erstellen Tabellen zu geometrischen Folgen mit Hilfe einer Tabellenkalkulation **(K5)** • zeichnen Graphen geometrischer Folgen, auch mit Hilfe digitaler Werkzeuge **(K4)**

3. Exponentialfunktionen	Mathematik Einführungsphase
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Exponentielles Wachstum (Fortsetzung) • charakteristische Merkmale – konstanter Quotient $a_{n+1} : a_n$ als konstanter Wachstumsfaktor – Anfangswert a_0 – Wachstumsverhalten in Abhängigkeit vom Wachstumsfaktor q mit $0 < q < 1$ bzw. $q > 1$ – Grenzwertverhalten • Grenzwertsymbolik • Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$	Die Schülerinnen und Schüler • grenzen exponentielles und lineares Wachstum gegeneinander ab **(K1)** • verwenden bei $0 < q < 1$ die Sprechweise „a_n liegt beliebig nahe bei 0, wenn n nur hinreichend groß ist“ **(K6)** • verwenden bei $0 < q < 1$ die Sprechweise „a_n konvergiert gegen 0" und die Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **(K6)** • bearbeiten Anwendungsaufgaben zu gesuchten Endwerten, Wachstumsfaktoren oder Zeiträumen, auch mit Hilfe einer Tabellenkalkulation **(K2)**
Exponentialfunktionen • Potenzbegriff für reelle Exponenten • Exponentialfunktion der Form $f: D \to \mathbb{R};\ x \mapsto a \cdot b^x$, wobei $a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$ • Eigenschaften – Definitionsmenge – Graph – Wertemenge – Monotonie – Umkehrbarkeit – x-Achse als Asymptote für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$ – y-Achsenabschnitt a – Funktionaleigenschaft $f(x+1) = b \cdot f(x)$ – Eindeutigkeit der Parameter bei Vorgabe zweier Punkte des Graphen	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen näherungsweise Potenzen mit reellen Exponenten mit Hilfe digitaler Werkzeuge **(K5)** • erstellen Wertetabellen zu Exponentialfunktionen bei verschiedenen Parameterwerten, auch mittels Tabellenkalkulation, und skizzieren die Funktionsgraphen **(K4)** • beschreiben die jeweilige Auswirkung der Variation der Parameter a und b auf den Graphen der Funktion **(K6)** • stellen den Zusammenhang zwischen Termen bzw. Graphen geometrischer Folgen und Exponentialfunktionen her **(K4)** • beschreiben mit Hilfe der Definition der Monotonie das Monotonieverhalten **(K4)** • lesen am Graph bei gegebenem Funktionswert den zugehörigen x-Wert ab **(K2)** • begründen, dass die Spiegelung der Exponentialkurve zur Basis b an der y-Achse die Exponentialkurve zur Basis $\frac{1}{b}$ ergibt: $b^{-x} = (1/b)^x$ **(K1)** • beschreiben das asymptotische Verhalten in Abhängigkeit von der Basis b **(K6)** • begründen die Funktionaleigenschaft **(K1)** • erläutern an einem Beispiel, dass die Funktionaleigenschaft sowohl eine Verschiebung in x-Richtung als auch eine Streckung in y-Richtung beschreibt **(K1)** • stellen aus zwei Punkten des Graphen die Funktionsgleichung auf **(K5)**

3. Exponentialfunktionen	**Mathematik Einführungsphase**
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Logarithmen • Logarithmus von y zur Basis b – Symbol $\log_b(y)$ – $\log_b(y)$ als Lösung von $b^x = y$ – $\log_b(1) = 0$ – $\log_b(b) = 1$ • Logarithmus zur Basis 10 – Bezeichnung lg • Logarithmengesetze – $\log(y_1 \cdot y_2) = \log(y_1) + \log(y_2)$ – $\log(y^r) = r \cdot \log(y)$	Die Schülerinnen und Schüler • ermitteln zu einem exponentiellen Wachstumsprozess graphisch den Zeitpunkt des Erreichens eines gewissen Wertes **(K2)** • erläutern den Begriff des Logarithmus im Kontext und grenzen ihn ab gegen den Begriff der n-ten Wurzel **(K6)** • erläutern, dass der Logarithmus $\log_b(c)$ die Zahl ist, mit der man b potenzieren muss, um c zu erhalten **(K6)** • geben in einfachen Fällen bei Potenzen mit rationalem Exponent den Logarithmus zu einer geeigneten Basis an **(K5)** • schätzen mit Hilfe der Stufenzahlen der Basis positive Logarithmen ganzzahlig ab **(K5)** • begründen die Logarithmengesetze mit Hilfe der Potenzgesetze **(K1)** • verbalisieren die Logarithmengesetze **(K6)** • wenden die Logarithmengesetze beim Berechnen von Logarithmen an **(K5)** • berechnen Logarithmen näherungsweise mit Hilfe digitaler Werkzeuge **(K5)** • lösen Exponentialgleichungen der Form $a \cdot b^x = c$ und bestimmen Näherungslösungen mit dem Taschenrechner **(K5)**
Modellieren von exponentiellen Wachstumsprozessen mit Hilfe von Exponentialfunktionen mit $x \mapsto a \cdot b^x$ • Anwendungsaufgaben • Charakteristische Größen – Anfangswert – Wachstumsfaktor – Halbwertszeit, Verdopplungszeit • Faustregel für Kapitalverdopplung: $t \approx \frac{70}{p}$	Die Schülerinnen und Schüler • bearbeiten Aufgaben zu exponentiellen Wachstumsprozessen mit Hilfe von Exponentialfunktionen **(K2)** • bestimmen charakteristische Größen bei Wachstumsprozessen **(K5)** • bewerten im Rahmen der Modellbildung den Realitätsbezug ihrer Vorgehensweise und der gefundenen Ergebnisse **(K6)**

Hinweise

zu Lernbereich 3 (Exponentialfunktionen)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Der Begriff Wachstum wird übergeordnet sowohl bei wachsenden als auch bei fallenden Folgen bzw. Funktionen verwendet.
- Folgen sind Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$.
- Diskrete Messungen bei kontinuierlichen Vorgängen liefern Folgen von Messdaten.
- Es ist nicht vorgesehen die (strenge) Monotonie von Folgen zu formalisieren.
- Eine konstante Folge ist sowohl eine arithmetische als auch eine geometrische Folge.
- Die Grenzwertbegriffe für Folgen und Funktionen werden nicht definiert sondern nur veranschaulicht.
- Die formale Definition des Begriffs Asymptote bleibt der Hauptphase vorbehalten.
- Die e-Funktion und die ln-Funktion werden in der Hauptphase behandelt.
- Die Einschränkungen bei der Definition der Exponentialfunktion auf positive Streckfaktoren ist vorläufig und den auftretenden Kontexten geschuldet.
- Wegen $\log_b(y) = -\log_{\left(\frac{1}{b}\right)}(y)$ kann man sich auf Basen $b > 1$ beschränken.
- Die Existenz des Logarithmus ergibt sich aus der Umkehrbarkeit der Exponentialfunktionen.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Recherchieren von Daten zum Bevölkerungswachstum in unterschiedlichen Regionen
- Modellieren des exponentiellen Zerfalls im Würfelexperiment

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Lineare Funktionen
- Klassenstufe 8: Terme, reelle Zahlen
- Klassenstufe 9: Definition der strengen Monotonie
- Klassenstufe 9: Potenzen mit reellen Exponenten (fakultativ)
- Hauptphase: e-Funktion, ln-Funktion

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Anwendungsbeispiele: Schachbrettlegende, sukzessives Falten, Radioaktiver Zerfall, Radio-Karbon-Methode, barometrische Höhenformel, Pflanzenwachstum, pH-Wert, Preisentwicklungen, zeitliche Abnahme des Wirkstoffgehaltes im Blut
- Leonhard Euler (1707-1783)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Tabellenkalkulation
- Funktionenplotter

Fakultative Inhalte

- Wechsel zwischen rekursiver und iterativer Darstellung von Folgen
- beschränktes Wachstum
- logistisches Wachstum
- Definition der eulerschen Zahl $\mathrm{e} := \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; Näherungswert $\mathrm{e} \approx 2{,}73$
- Basiswechsel: $\log_b(y) = \dfrac{\log_c(y)}{\log_c(b)}$ bzw. $b^x = c^{x \cdot \log_c(b)}$

Der vorliegende Lernbereich sollte genutzt werden, um die in den vorangegangenen Klassenstufen behandelten typischen Eigenschaften der Grundfunktionen und ihrer Graphen zu wiederholen. Die Untersuchung allgemeiner Eigenschaften von Funktionen löst die isolierte Betrachtung von Funktionen gemäß den Funktionsklassen ab.

Im Vordergrund steht eine anschauliche Erarbeitung der Begriffe Grenzwert und Stetigkeit mit dem Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs erfassen.

Im Hinblick auf Lernbereich 5 sollten Funktionsterme bei der Untersuchung von Grenzwerten so gewählt werden, dass sie auch als Vorbereitung für Grenzwertuntersuchungen von Differenzenquotienten dienen.

Mit Hilfe des Grenzwertbegriffs für Funktionen erhält man eine eingängige Beschreibung des Begriffs der lokalen Stetigkeit, der auf die globale Stetigkeit ausgeweitet wird.

Im Vordergrund steht in diesem Lernbereich die Leitidee „funktionaler Zusammenhang“.

Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Grenzwert • Bezeichnung: Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion f für x gegen x_0, wenn die Funktionswerte $f(x)$ beliebig nahe bei g liegen, falls die x-Werte nur hinreichend nahe bei x_0 liegen. • Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ • einseitige Grenzwerte – Annäherung von links: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ – Annäherung von rechts: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$	Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen das Verhalten einer Funktion f, indem sie die x-Werte einer vorgegebene Zahl x_0 annähern und die zugehörigen Funktionswerte berechnen, auch mit Hilfe einer Tabellenkalkulation **(K5)** • bestimmen Grenzwerte in den Fällen – $x_0 \in D$ mit $D = [a, b]$ – $x_0 \notin D$ mit $D = [a, b] \setminus \{x_0\}$ **(K5)** • begründen, dass eine vorgegebene Zahl nicht Grenzwert einer Funktion f an der Stelle x_0 ist **(K1)** • untersuchen linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte, z. B. bei abschnittsweise definierten Funktionen oder bei zeitabhängigen Tarifen (Handy, Parkhaus) **(K2)** • untersuchen anhand des Graphen, ob die Funktion an einer vorgegebenen Stelle x_0 einen Grenzwert besitzt **(K1)**

4. Stetigkeit	Mathematik Einführungsphase
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Stetigkeit • <u>Definition:</u> Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn gilt: 1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und 2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ • lokale und globale Stetigkeit • Veranschaulichung am Graphen • Stetigkeit von Funktionsklassen – lineare Funktionen – quadratische Funktionen – Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten – Wurzelfunktion – Sinus- und Kosinusfunktion – Exponentialfunktionen	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern die Stetigkeit an einfachen Beispielen **(K1)** • untersuchen Funktionen auf Stetigkeit an der Stelle $x_0 \in D$ **(K5)** • begründen, dass der Graph einer über einem Intervall definierten stetigen Funktion eine zusammenhängende Linie ist **(K1)** • nennen Beispiele für nichtstetige Funktionen, z. B. bei zeitabhängigen Tarifen **(K5)** • begründen, dass die Kehrwertfunktion auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion ist **(K1)**
Monotonie auf einem Intervall • streng monoton wachsend bzw. fallend auf einem Intervall I mit $I \subset D$, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$ • Monotonieintervalle • Extremstellen und Extrema bei Monotoniewechsel • konstante Funktion als Sonderfall	Die Schülerinnen und Schüler • verwenden die Begriffe Minimumstelle / Maximumstelle, Minimum / Maximum und Tiefpunkt / Hochpunkt **(K6)** • beschreiben den Verlauf von Funktionsgraphen unter der Verwendung der Fachsprache **(K6)** • entnehmen dem Funktionsgraphen die Monotonieintervalle und bestimmen damit die Extremstellen **(K4)**
Eigenschaften stetiger Funktionen • Nullstellensatz • Satz vom Minimum und Maximum	Die Schülerinnen und Schüler • begründen mit Hilfe der entsprechenden Sätze die Existenz von Nullstellen bzw. Extremstellen **(K1)** • veranschaulichen den Nullstellensatz und den Satz vom Minimum und Maximum an Funktionsgraphen **(K4)** • begründen anhand eines Beispiels, dass stetige Funktionen auf offenen Intervallen keine Extrema annehmen müssen **(K1)**

Hinweise

zu Lernbereich 4 (Stetigkeit)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Die den entsprechenden Sätzen zugrunde liegende Vollständigkeit der reellen Zahlen wird nicht thematisiert.
- Die Grenzwert-Betrachtungen beschränken sich auf Fälle, bei denen x_0 Häufungspunkt von D ist. Der Begriff Häufungspunkt sollte im Unterricht vermieden werden.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Präsentation der Grundfunktionen

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Lineare Funktionen
- Klassenstufe 9: Quadratische Funktionen
- Klassenstufe 9: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten
- Klassenstufe 9: Wurzelfunktionen
- Lernbereich 1: Sinus- und Kosinusfunktion
- Lernbereich 3: Exponentialfunktion

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Untersuchung von zeitabhängigen Tarifen (Handy- und Parktarife)
- Untersuchung von Höhenprofilen

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Tabellenkalkulation
- Funktionenplotter

Fakultative Inhalte

- Grenzwertsätze
- Stetigkeitssätze
- Zwischenwertsatz
- Intervallsatz

5. Einstieg in die Differentialrechnung	**Mathematik Einführungsphase**

Die Einführung des Ableitungsbegriffs folgt dem didaktischen Konzept des Übergangs von der globalen zur lokalen Änderungsrate. Damit wird die inhaltliche Bedeutung dieses zentralen Begriffs mit seinen weitreichenden Anwendungen in den Mittelpunkt gestellt.

Der Ableitungsbegriff wird zunächst durch Sachaufgaben thematisiert. Die anschließende geometrische Vorgehensweise entspricht dem klassischen Weg von der Sekanten- zur Tangentensteigung. Bei der Bestimmung des Grenzwerts des Differenzenquotienten kann zunächst thematisiert werden, dass die betrachtete Stelle gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner ist. Erst algebraische Umformungen des Differenzenquotienten ermöglichen die Berechnung der Ableitung.

Im Vordergrund stehen in diesem Lernbereich die Leitideen „Funktionaler Zusammenhang“ sowie „Algorithmus und Zahl“.

Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Globale und lokale Änderungsrate • globale Änderungsrate: – durchschnittliche Steigung eines Weges – Durchschnittsgeschwindigkeit einer Bewegung • mittlere Steigung als Sekantensteigung eines Graphen auf einem abgeschlossenen Intervall • Differenzenquotient • lokale Änderungsrate • lokale Steigung • <u>Definition:</u> $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt die Ableitung von *f* an der Stelle x_0. – Symbol: $f'(x_0)$ • Ableitung bei Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten • Tangente in einem Punkt des Graphen als Gerade mit der lokalen Steigung • Gleichung der Tangente in einem Punkt des Graphen	Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen Graphen, – die den Höhenverlauf eines Weges beschreiben, hinsichtlich der durchschnittlichen Steigung **(K4)** – die die Bewegung eines Körpers beschreiben, hinsichtlich der Durchschnittsgeschwindigkeit **(K4)** • deuten eine Abnahmerate als negative Wachstumsrate **(K1)** • berechnen Sekantensteigungen mit Hilfe des Differenzenquotienten **(K5)** • identifizieren die Sekantensteigung als mittlere Steigung **(K6)** • erläutern, dass die lokale Steigung durch Grenzwertbildung der Sekantensteigung festgelegt ist **(K1)** • untersuchen die Sekantensteigung, wenn sich die Werte von x beliebig x_0 annähern, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge **(K2)** • erklären die Semantik der Gleichung $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **(K6)** • ermitteln $f'(x_0)$ bei Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten für $n \le 3$ **(K5)** • interpretieren den Grenzwert der Sekantensteigungen als Steigung der Tangente **(K4)** • bestimmen die Gleichung der Tangente in einem Punkt des Graphen **(K5)**

Verbindliches Fachwissen	Verbindliche Kompetenzschwerpunkte
Differenzierbarkeit und Differentialrechnung • Begriff der (lokalen) Differenzierbarkeit • Begriff der (globalen) Differenzierbarkeit auf einem Intervall • Ableitungsfunktion f' auf einem Intervall • Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponent • Ableitungsregeln: – Faktorregel – Summenregel • Zusammenhang zwischen den Graphen von f und f' • Mittelwertsatz der Differentialrechnung • Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen	Die Schülerinnen und Schüler • unterscheiden die Begriffe lokale und globale Differenzierbarkeit und verwenden jeweils die passende Symbolik **(K6)** • begründen, dass die Betragsfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist **(K1)** • formulieren die Ableitungsregel für Potenzfunktionen durch eine Verallgemeinerung der Beispiele **(K1)** • wenden die Faktor- und die Summenregel an **(K6)** • skizzieren zum vorgegebenen Graph der Funktion f den Graph von f' und erläutern den Zusammenhang **(K1)** • bestätigen den Mittelwertsatz rechnerisch anhand geeigneter Beispiele und veranschaulichen seine Aussage zeichnerisch **(K4)** • begründen das Monotoniekriterium mit Hilfe des Mittelwertsatzes **(K1)** • wenden das Monotoniekriterium zur Bestimmung von Monotonieintervallen an **(K5)**

Hinweise

zu Lernbereich 5 (Einstieg in die Differentialrechnung)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Im Gegensatz zu dem den Schülern bekannten globalen Tangentenbegriff am Kreis liegt hier nur noch ein lokaler Tangentenbegriff vor: Die Tangente kann den Graphen an einer anderen Stelle schneiden.
- Die Faktor- und die Summenregel werden durch geeignete Umformung des Differenzenquotienten und intuitiver Anwendung der Grenzwertsätze begründet; auf die Grenzwertsätze selbst und deren Beweise wird nicht eingegangen.
- Die Verwendung der h-Methode kann herangezogen werden.
- Die Differenzierbarkeitsmenge kann in geeigneten Fällen – z. B. bei der Betragsfunktion oder bei der Wurzelfunktion – thematisiert werden.
- Die algebraische Behandlung des Ableitungsbegriffs sollte zunächst ohne digitale Werkzeuge erfolgen.
- Zur Motivation des Begriffs „lokale Änderungsrate“ eignet sich die Arbeit mit einem Funktionenmikroskop.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Präsentation des Steigungsverhaltens der Grundfunktionen mit Hilfe eines Funktionenplotters

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 7: Lineare Funktionen und Steigungsdreieck
- Klassenstufe 8: Terme und binomische Formeln
- Klassenstufe 9: Quadratische Funktionen, Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
- Hauptphase: Produkt-, Quotienten-, Kettenregel

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Geschwindigkeitsbegriff in der Physik (Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit)
- Bevölkerungsentwicklung, Temperaturverlauf, Füllgraph eines Gefäßes
- Isaac Newton (1643-1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Tabellenkalkulation
- Funktionenplotter
- Funktionenplotter als Funktionenmikroskop

Fakultative Inhalte

- einseitige Differenzierbarkeit
- allgemeiner Beweis der Ableitungsregel für Potenzfunktionen
- Steigungswinkel von Tangenten
- Ableitung von Kehrwert- und Wurzelfunktion
- Newtonverfahren
- Tangente(n) von einem Punkt außerhalb des Graphen

6. Ganzrationale Funktionen	Mathematik Einführungsphase
Die in den Lernbereichen 4 und 5 erarbeiteten allgemeinen Verfahren zur Charakterisierung von Funktionen werden nun auf ganzrationale Funktionen angewendet und vertieft. Mit Hilfe der Differentialrechnung werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrem- und Wendestellen erarbeitet. Dabei sollen die Eigenschaften nicht ausschließlich schematisch abgearbeitet werden; sie sollen auch kontextbezogen behandelt werden. Zudem lassen sich mittels Nullstellenuntersuchung elementare Eigenschaften dieser Funktionen auch ohne Differentialrechnung erschließen. Angesprochen ist in diesem Lernbereich primär die Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“.	
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Definition der ganzrationalen Funktion • <u>Definition:</u> Eine Funktion der Form $f: \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$; $x \mapsto a_n \cdot x^n + ... + a_1 x + a_0$, mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathrm{IR}$ und $a_n \neq 0$ heißt ganzrationale Funktion oder Polynomfunktion vom Grad *n*. Der Term heißt Polynom.	Die Schülerinnen und Schüler • identifizieren ganzrationale Funktionen in innermathematischen und in Sachkontexten **(K1)** • erläutern, dass lineare Funktionen, quadratische Funktionen und Potenzfunktionen mit natürlichem Exponent Sonderfälle der ganzrationalen Funktionen sind **(K6)** • bestimmen den Grad einer ganzrationalen Funktion **(K5)** • begründen anhand des Graphen die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit ganzrationaler Funktionen **(K1)**
Nullstellen • Faktorisieren des Funktionsterms • Polynomdivision • maximale Anzahl von Nullstellen • Vielfachheit von Nullstellen	Die Schülerinnen und Schüler • ermitteln die Nullstellen bei Funktionstermen in faktorisierter Form unter Verwendung des Nullproduktsatzes **(K5)** • begründen, dass das Polynom genau dann ohne Rest durch den Linearfaktor $(x - x_0)$ teilbar ist, wenn x_0 eine Nullstelle des Polynoms ist **(K1)** • bestimmen die faktorisierte Form eines Polynoms höchstens dritten Grades mittels Polynomdivision **(K5)** • erläutern, dass die Anzahl der Nullstellen den Grad *n* des Polynoms nicht übersteigen kann **(K1)** • identifizieren bei vollständiger Linearfaktorzerlegung die Vielfachheiten der Nullstellen **(K4)** • entwickeln aus Wertetabellen und Vorzeichenbetrachtung von f den Zusammenhang zwischen der Vielfachheit einer Nullstelle und dem Verlauf des Graphen an dieser Stelle **(K1)** • skizzieren einen möglichen Graph bei vorgegebenen Nullstellen und deren Vielfachheit **(K4)** • geben zu vorgegebenem Graphen einen möglichen Funktionsterm an **(K4)**

6. Ganzrationale Funktionen	Mathematik Einführungsphase
Verbindliches Fachwissen	**Verbindliche Kompetenzschwerpunkte**
Untersuchung von f mit Hilfe von f' • Extremstellen und Extrempunkte – lokale und globale Extrema (Minima und Maxima) – lokale und globale Extrempunkte (Tiefpunkte und Hochpunkte) • Nullstelle mit geradzahliger Vielfachheit: Extrempunkt auf der x-Achse • Extremstellenkriterium – $f'(x_0)=0$ als notwendige Bedingung im Innern von D – Vorzeichenwechsel von f' als hinreichende Bedingung • Sattelpunkt – Punkt, der kein Extrempunkt ist und in dem der Graph die Steigung 0 hat – Nullstelle mit ungeradzahliger Vielfachheit >1: Sattelpunkt auf der x-Achse	Die Schülerinnen und Schüler • verwenden die Fachtermini zur Beschreibung von Extremstellen und Extrempunkten bei Graphen ganzrationaler Funktionen **(K6)** • erläutern das Extremstellenkriterium **(K1)** • begründen am Beispiel eines Sattelpunkts, dass die Bedingung $f'(x_0)=0$ nicht hinreichend für Extremstellen ist **(K1)** • nutzen die erste Ableitung zur Bestimmung des Monotonieverhaltens und der Extremstellen **(K5)** • wenden das Extremstellenkriterium an **(K5)**
Untersuchung von f mit Hilfe von f'' • Krümmung – Krümmungsart als Drehverhalten der Tangenten beim Durchlaufen des Graphen von links nach rechts – Links- bzw. Rechtskrümmung – Krümmungsintervalle – Monotonieverhalten der ersten Ableitung („Änderung der Änderung“) • Wendestellen und Wendepunkte • Wendestellenkriterium – $f''(x_w)=0$ als notwendige Bedingung im Innern von D – Vorzeichenwechsel von f'' als hinreichende Bedingung	Die Schülerinnen und Schüler • beschreiben die Änderung der Tangentensteigung beim Durchlaufen des Graphen (auch unter Nutzung eines geeigneten digitalen Werkzeugs) **(K6)** • beschreiben bei Zunahme der Tangentensteigung den Graph als linksgekrümmt, bei Abnahme als rechtsgekrümmt **(K1)** • bestimmen Krümmungsintervalle zu gegebenen Graphen **(K5)** • begründen, dass bei Rechtskrümmung f' streng monoton fallend und bei Linkskrümmung f' streng monoton wachsend ist **(K1)** • erklären den Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten von f' und dem Vorzeichenverhalten von f'' **(K1)** • bestimmen die Krümmungsintervalle rechnerisch mit Hilfe des Vorzeichenverhaltens von f'' **(K5)** • erläutern anhand der Normalparabel, dass f'' keine quantitative Krümmungsbeschreibung eines Graphen liefert **(K5)** • begründen, dass an einer Wendestelle die Steigung ein lokales Extremum besitzt **(K1)** • nutzen die zweite Ableitung zur Bestimmung von Krümmung und Wendestellen **(K5)**

<table>
<tr><th>6. Ganzrationale Funktionen</th><th>Mathematik Einführungsphase</th></tr>
<tr><th>Verbindliches Fachwissen</th><th>Verbindliche Kompetenzschwerpunkte</th></tr>
<tr><td>Anwendungen
• Änderung in physikalischen Situationen</td><td>Die Schülerinnen und Schüler
• untersuchen Graphen im Hinblick auf Extrem- und Wendestellen und interpretieren im Kontext (z. B. Temperaturen, Pegelstände, Höhenprofile) (K3)</td></tr>
</table>

Hinweise

zu Lernbereich 6 (Ganzrationale Funktionen)

Methodische und fachdidaktische Erläuterungen

- Die Begriffe und Methoden der Differentialrechnung sollen ohne CAS-Unterstützung beherrscht werden.
- Der Vorzeichenwechsel von f' beim Extremstellenkriterium ist bei ganzrationalen Funktionen auch notwendig.
- Da bei Polynomfunktionen die maximale Definitionsmenge $\mathbb{R}$ gewählt wird, kann hier auf die Untersuchung von Randextrema verzichtet werden.
- In der Hauptphase der gymnasialen Oberstufe werden bei der Untersuchung weiterer Funktionsklassen die Methoden der Differentialrechnung zur Bestimmung von Eigenschaften von Funktionen wiederholt und erweitert. Dort spielen auch Überlegungen zur Differenzierbarkeit, die in der Einführungsphase als gegeben vorausgesetzt wird, eine Rolle.

Anregungen zur selbstständigen Schülerarbeit

- Untersuchung der Graphen ganzrationaler Funktionen bei sukzessivem Hinzufügen von Linearfaktoren mit Hilfe eines Funktionenplotters

Querverbindungen im Lehrplan

- Klassenstufe 9: Potenzfunktionen, Polynomdivision
- Hauptphase: Extremwertaufgaben
- Hauptphase: Zweites Extremstellenkriterium, zweites Wendestellenkriterium

Fächerverbindende und fachübergreifende Aspekte

- Untersuchung kontextbezogener Diagramme (z. B. Temperatur, Bevölkerung, Wirtschaftswachstum)

Einsatz digitaler Werkzeuge

- Tabellenkalkulationsprogramm
- Funktionenplotter (mit Schieberegler)

Fakultative Inhalte

- Grenzwert von f für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$
- Normalengleichung
- Krümmungsmaß