

Capitolo 2

Linee di trasmissione

2.1 Circuiti a costanti concentrate

Nei circuiti a *costanti concentrate* le proprietà elettriche del circuito (resistenza, induttanza, capacità ecc.) si considerano tutte contenute nei relativi componenti circuitali; i collegamenti tra un componente e l'altro si suppongono fatti con conduttori ideali, cioè privi di resistenza, induttanza o capacità.

Questa schematizzazione è valida fino a che le dimensioni geometriche dei componenti e le lunghezze dei collegamenti rimangono piccole rispetto alle lunghezze d'onda associate ai segnali presenti nel circuito, come definito più avanti.

Oppure, in termini equivalenti, fino a che il tempo di propagazione dei segnali tra due punti del circuito è piccolo rispetto ai tempi di variazione dei segnali stessi.

2.2 Linee di trasmissione

Una linea di trasmissione è invece un sistema di conduttori idealmente paralleli con sezione e caratteristiche costanti su tutta la lunghezza, le cui proprietà elettriche rilevanti sono proprio quelle distribuite sulla lunghezza.

Due esempi di linee di trasmissione molto diffuse e utilizzate sono la linea bifilare ed il cavo coassiale:

1) linea bifilare (o *piattina*): due conduttori rettilinei, di solito a sezione cilindrica, tenuti separati e paralleli da un supporto isolante (fig. 2.1).

2) cavo coassiale: un conduttore centrale cilindrico che corre coassiale ad un secondo conduttore tubolare esterno, detto *schermo*; lo spazio tra i due conduttori è riempito da un materiale isolante (tipicamente polietilene o teflon) (fig. 2.2).

2.3 Circuito equivalente di una linea di trasmissione

Ogni linea di trasmissione può essere considerata composta da infiniti elementi di lunghezza infinitesima Δx , ciascuno equivalente ad un circuito contenente una induttanza, capacità, resistenza e conduttanza infinitesime, come illustrato in fig. 2.3. I simboli L , C , R , G , Z e Y indicano in questa figura (ed in questo capitolo) rispettivamente induttanza, capacità, resistenza, conduttanza, impedenza ed ammettenza per unità di lunghezza del sistema di conduttori che costituiscono la linea.



Figura 2.1: Linea bifilare.

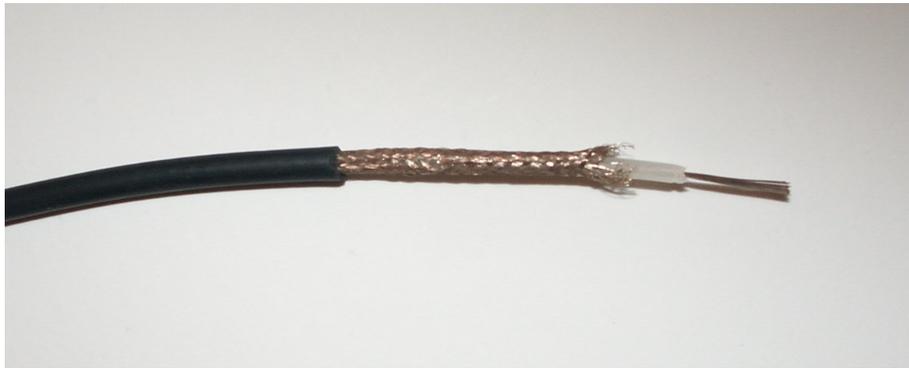


Figura 2.2: Cavo coassiale.

In alternativa, l'impedenza $Z\Delta x$ propria di ognuno degli elementi infinitesimi della linea può essere associata per metà ($Z\Delta x/2$) al conduttore superiore e per l'altra metà al conduttore inferiore (fig. 2.4). I calcoli svolti nei paragrafi seguenti sono identici e portano agli stessi risultati in entrambi i casi. La situazione riportata in fig. 2.3 corrisponde meglio al caso del cavo coassiale, almeno nel caso del cavo ideale, in cui i campi elettrici e magnetici sono confinati completamente all'interno della cavità cilindrica del conduttore di schermo: questo conduttore rimane esternamente una superficie equipotenziale ed è possibile collegarne insieme le due estremità senza influire in alcun modo sul comportamento dei segnali. La descrizione alternativa rispecchia invece la simmetria della linea di trasmissione bifilare e fa risaltare il fatto che il campo elettrico è distribuito sulla lunghezza di entrambi i conduttori. Non è possibile collegare insieme le due estremità di uno dei conduttori di una linea bifilare senza alterarne il funzionamento.

2.3.1 Cavo coassiale

Nel caso del cavo coassiale L e C possono essere calcolati con relativa facilità: ¹

¹A rigore l'espressione per L vale solo per il caso di due conduttori tubolari coassiali di spessore molto sottile.

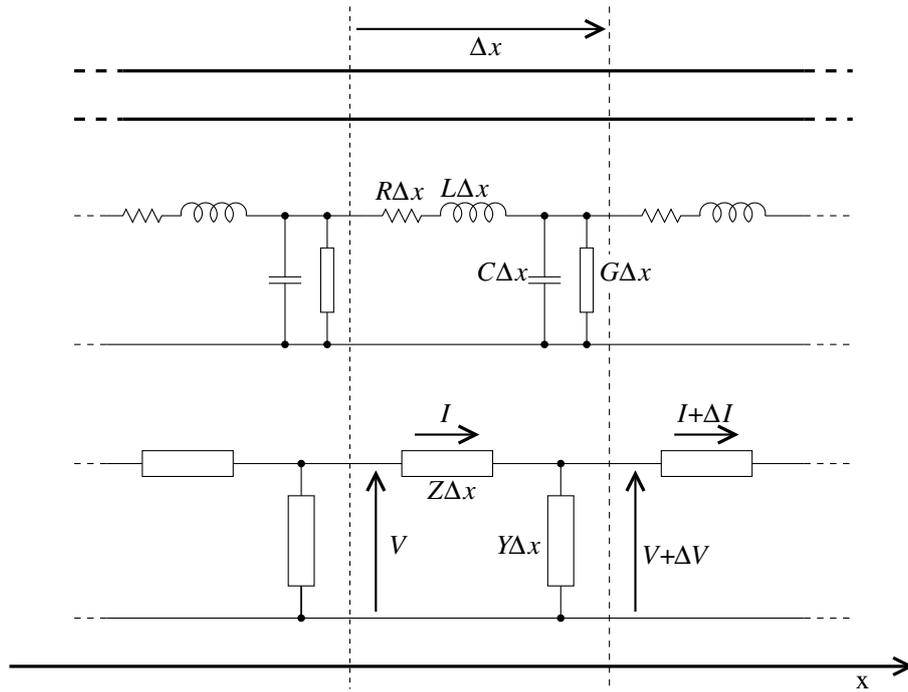


Figura 2.3: Circuito equivalente di una linea di trasmissione. L , C , R , G sono induttanza, capacità, resistenza e conduttanza per unità di lunghezza. $Z = R + j\omega L$ e $Y = G + j\omega C$ sono impedenza e ammettenza per unità di lunghezza. La corrente I è positiva quando scorre verso destra nel conduttore superiore; la tensione V è quella del conduttore superiore rispetto a quello inferiore.

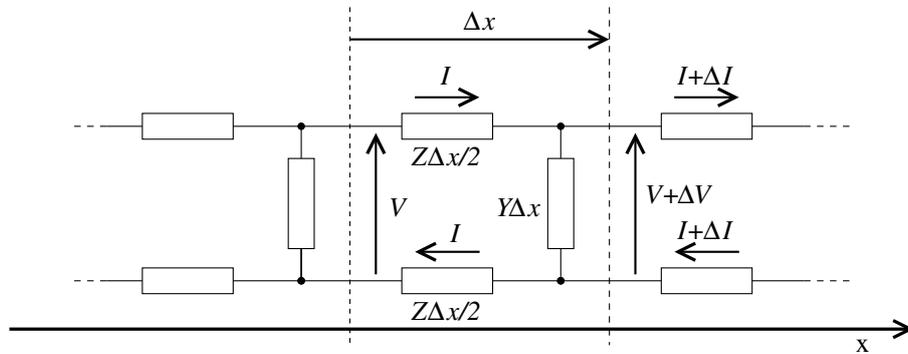


Figura 2.4: Descrizione alternativa delle costanti distribuite della linea di fig. 2.3, più aderente alla geometria della linea bifilare. Le equazioni che descrivono la propagazione dei segnali lungo la linea sono le stesse in entrambi i casi.

$$L = \mu \cdot \frac{\log(D_2/D_1)}{2\pi} \qquad C = \epsilon \cdot \frac{2\pi}{\log(D_2/D_1)} \qquad (2.1)$$

Le quantità D_1 e D_2 rappresentano rispettivamente il raggio esterno del conduttore interno ed il raggio interno del conduttore esterno; ϵ e μ sono la permeabilità dielettrica e magnetica del materiale isolante che riempie lo spazio tra i due conduttori.

Nel caso di una linea con geometria diversa da quella del cavo coassiale, lo schema di figura 2.3 continuerà ad essere valido, ma i valori dei parametri L e C saranno dati da espressioni diverse dalle eq. 2.1.

2.4 Correnti e tensioni lungo la linea

Per scrivere le equazioni per le tensioni e le correnti lungo la linea si utilizzano le convenzioni riportate in fig. 2.3: la coordinata x individua la posizione lungo la linea ed ha direzione positiva verso destra; una corrente è positiva quando scorre verso destra nel conduttore superiore (e verso sinistra in quello inferiore); le tensioni indicano il potenziale del conduttore superiore rispetto a quello inferiore.

Con queste convenzioni, applicando la legge di Ohm generalizzata ai circuiti in corrente alternata, si possono scrivere per ciascuna cella infinitesima che compone la linea due equazioni:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -ZI \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -YV \quad (2.2)$$

dove $Z = R + j\omega L$ e $Y = G + j\omega C$ ². V ed I sono due quantità complesse che rappresentano ampiezza e fase di tensione e corrente lungo la linea per una componente alternata di frequenza f e frequenza angolare $\omega = 2\pi f$.

Derivando entrambe le equazioni rispetto alla x e sostituendo si ottiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -Z \frac{\partial I}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -Y \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - ZYV = 0 \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - ZYI = 0 \quad (2.4)$$

Le (2.4) sono equazioni differenziali lineari del secondo ordine ed hanno soluzioni:

$$V(x) = V_1 e^{+\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x} \quad (2.5)$$

$$I(x) = I_1 e^{+\gamma x} + I_2 e^{-\gamma x} \quad (2.6)$$

La quantità complessa

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (2.7)$$

è detta *costante di propagazione* o *coefficiente di propagazione*; la parte reale α (*neper/metro*) è la *costante di attenuazione* e misura la perdita di segnale lungo la linea a causa degli elementi dissipativi R e G ; la parte immaginaria β (*radianti/metro*) è la costante di fase e misura la differenza di fase tra punti diversi della linea ad un medesimo istante di tempo; $V_{1,2}, I_{1,2}$ sono costanti determinate dalle condizioni alle estremità della linea.

²Come già notato, in elettrotecnica ed in elettronica l'unità immaginaria è indicata di solito con la lettera j , in quanto la i è usata di preferenza per indicare la corrente.

2.5 Linea senza perdite

Nel caso ideale di una linea senza perdite si avrà $R = 0$ e $G = 0$ e quindi

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (2.8)$$

L'espressione completa della tensione lungo la linea, inserendo esplicitamente anche la dipendenza dal tempo, è:

$$V(x, t) = V_1 e^{j(\omega t + \beta x)} + V_2 e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (2.9)$$

Analogamente per la corrente:

$$I(x, t) = I_1 e^{j(\omega t + \beta x)} + I_2 e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (2.10)$$

Queste due espressioni rappresentano la tensione e la corrente di due segnali con andamento sinusoidale in funzione del tempo e dello spazio, che si propagano lungo la linea. Dalla condizione $\omega t \pm \beta x = \text{costante}$, si ottiene la velocità

$$u = \frac{dx}{dt} = \mp \frac{\omega}{\beta} = \mp \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.11)$$

Il primo termine (V_1, I_1), con velocità negativa, prende il nome di onda regressiva, o riflessa, e si propaga da destra verso sinistra; il secondo termine (V_2, I_2), con velocità positiva, prende il nome di onda progressiva, o diretta e si propaga da sinistra verso destra.

Sostituendo nell'eq. 2.11 il valore di L e C per il cavo coassiale (eq. 2.1) si ottiene:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (2.12)$$

da cui per una linea ideale senza perdite

$$|u| = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (2.13)$$

cioè la stessa velocità che avrebbe un'onda elettromagnetica che si propagasse nel mezzo dielettrico che riempie lo spazio tra i due conduttori.

In un dielettrico ideale μ ed ϵ sono costanti, in particolare non dipendono da ω . In questo caso, in un segnale composto dalla sovrapposizione di più componenti di frequenze diverse, ciascuna componente avrà la stessa velocità u , dando luogo ad una propagazione senza *dispersione*. In queste condizioni *velocità di fase* e *velocità di gruppo* (vedi par. 2.17) coincidono e la velocità data dalla (2.13) sarà valida per qualsiasi tipo di segnale.

Nel caso che il materiale isolante sia l'aria o il vuoto:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c} \quad (2.14)$$

dove μ_0 , ϵ_0 e c sono la permeabilità dielettrica e magnetica e la velocità della luce nel vuoto. È possibile realizzare un tale cavo inserendo tra i due conduttori coassiali una striscia elicoidale di materiale isolante di spessore molto sottile, in modo che il dielettrico sia formato praticamente quasi solo da aria (fig. 2.5).



Figura 2.5: Cavo coassiale per grosse potenze con aria come dielettrico. La striscia elicoidale di polietilene mantiene coassiali i due cilindri conduttori in rame, occupando solo una minima parte del volume. Alla frequenza di 2 MHz il cavo può trasportare una potenza di circa 300 kW . Diametro del conduttore interno: 32 mm ; diametro del conduttore esterno: 76 mm . La moneta appoggiata sul bordo per evidenziare le dimensioni ha un diametro di 26 mm . Resistenza caratteristica: $50\ \Omega$.

2.6 Lunghezza d'onda, lunghezza elettrica

Un segnale con andamento sinusoidale si ripete lungo la linea con periodicità $\beta x = 2\pi$. La quantità $\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi u/\omega$ prende il nome di lunghezza d'onda.

Per un elemento circuitale di lunghezza $l \ll \lambda$ si potranno considerare le tensioni e le correnti uniformi su tutto l'elemento e ignorare le variazioni tra un punto ed un altro. Si potrà cioè considerare l'elemento come *puntiforme* e supporre le proprietà elettriche *concentrate* tutte nel punto. La condizione $l \ll \lambda$ equivale alla condizione $t \ll \tau$, dove $\tau = 2\pi/\omega$ è il periodo del segnale e $t = l/u$ è il tempo necessario a percorrere la lunghezza l : un circuito può essere considerato a *costanti concentrate* fino a che il tempo di propagazione dei segnali da un punto ad un altro è trascurabile rispetto ai periodi propri delle componenti di frequenza più alta nei segnali stessi.

Con il termine *lunghezza elettrica* di una linea si intende la lunghezza di una linea avente il vuoto come dielettrico e con lo stesso tempo di propagazione dei segnali della linea data: $\text{lunghezza elettrica} = c \cdot \text{lunghezza geometrica}/u$. Spesso, con lo stesso termine *lunghezza elettrica* si indica direttamente il tempo di propagazione $t = \text{lunghezza geometrica}/u$ di un segnale sulla lunghezza della linea. Il contesto (e le unità di misura) evitano qualunque possibilità di fraintendimento.

2.7 Linea con perdite. Condizioni di Heaviside

Nel caso di una linea con perdite ($R, G \neq 0$) si ha:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (2.15)$$

In generale questa condizione comporta che la velocità di propagazione sia funzione della frequenza e quindi che si abbia dispersione. Nel caso particolare che le due quantità complesse $R + j\omega L$ e $G + j\omega C$ abbiano lo stesso argomento, cioè si abbia

$L/R = C/G$ (condizioni di Heaviside), si ottiene $\alpha = \sqrt{RG}$ e $\beta = \omega\sqrt{LC}$ e quindi ancora velocità costante e propagazione non dispersiva, anche se si tratta di una linea non ideale.

Il termine α descrive l'attenuazione del segnale lungo la linea per effetto delle perdite:

$$V(x, t) = V_1 e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} + V_2 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (2.16)$$

Il primo termine rappresenta un segnale che si propaga da destra verso sinistra e che si attenua quindi procedendo verso la direzione negativa delle x . Indicando con V_0 l'ampiezza del segnale nell'origine, si ha rispettivamente, per le componenti di onda regressiva e progressiva:

$$\left| \frac{V(x)}{V_0} \right| = e^{\pm \alpha x} \quad (2.17)$$

Volendo esprimere l'attenuazione A in decibel:

$$A = 20 \log_{10} (e^{\pm \alpha x}) = \pm 20 \alpha x \log_{10}(e) \simeq \pm 8.7 \alpha x \quad (2.18)$$

Se x ed $1/\alpha$ sono espressi in metri, la quantità 8.7α rappresenta l'attenuazione della linea di trasmissione in dB/m (decibel per metro).

2.8 Impedenza caratteristica della linea

Dalle eq. (2.5) e (2.6) si può calcolare il rapporto tra tensione e corrente in ogni punto della linea:

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}}{I_1 e^{\gamma x} + I_2 e^{-\gamma x}} \quad (2.19)$$

I valori di I_1 e I_2 si ottengono dalla prima delle eq. (2.2):

$$I(x) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -\frac{\gamma}{Z} V_1 e^{+\gamma x} + \frac{\gamma}{Z} V_2 e^{-\gamma x} \quad (2.20)$$

e confrontando questo risultato con l'eq. 2.6 (tenendo anche conto della 2.7):

$$I_1 = -\sqrt{\frac{Y}{Z}} V_1 \quad I_2 = \sqrt{\frac{Y}{Z}} V_2 \quad (2.21)$$

Sostituendo questi coefficienti nella (2.19):

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \frac{V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}}{-V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}} \quad (2.22)$$

Oppure, nel caso di una linea senza perdite,

$$\frac{V(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \frac{V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}}{-V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}} \quad (2.23)$$

Nel caso sulla linea sia presente una sola onda, ad esempio l'onda diretta, il rapporto tra tensione e corrente è:

$$\frac{V_2(x)}{I_2(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_0 \quad (2.24)$$

Questo rapporto è costante su tutta la linea, ha le dimensioni di una resistenza e prende il nome di *resistenza* o *impedenza caratteristica* della linea. Nel caso di linea ideale senza perdite, o di linea con perdite ma nelle condizioni di Heaviside, Z_0 è reale, cioè è una resistenza pura senza componente reattiva e non dipende dalla frequenza:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0 \quad (2.25)$$

Facendo il rapporto tra tensione e corrente per un'onda riflessa, si ottiene:

$$\frac{V_1(x)}{I_1(x)} = -\sqrt{\frac{Z}{Y}} = -Z_0 \quad (2.26)$$

Il segno meno in questo risultato indica che ad uno stesso valore di tensione in un generico punto lungo la linea è associata, nel caso di un'onda riflessa, una corrente di valore opposto rispetto a quella di un'onda diretta.

Per il cavo coassiale

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_R}{\epsilon_0 \epsilon_R}} \cdot \log \frac{D_2}{D_1} \simeq \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} \cdot \log \frac{D_2}{D_1} \cdot 60 \Omega \quad (2.27)$$

Per i cavi coassiali comunemente in uso nella strumentazione di laboratorio ed in radiotecnica $\log(D_2/D_1)$ è dell'ordine dell'unità, $\mu_R = 1$ ed $\epsilon_R \simeq 2$ (isolante polietilene o teflon). I valori di R_0 che si ottengono sono dell'ordine di $50 \dots 100 \Omega$. Per ottenere valori di R_0 di un ordine di grandezza diverso, a causa della dipendenza logaritmica che compare nella eq. 2.27, occorrerebbero valori di D_2/D_1 di difficile realizzazione pratica.

2.9 Linea di trasmissione chiusa sulla sua resistenza caratteristica

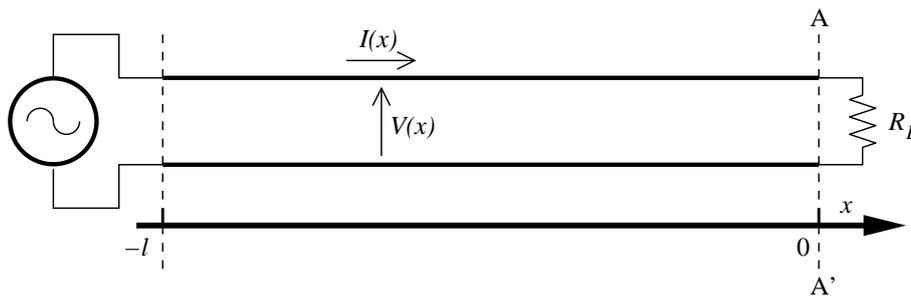


Figura 2.6: Linea terminata sulla sua resistenza caratteristica.

Nella fig. 2.6 è riportato un tratto di linea di trasmissione alimentata a sinistra da un generatore e collegata a destra ad una resistenza (*terminazione*) di valore $R_L = R_0$. Durante la propagazione del segnale inviato dal generatore, considerando la sola onda diretta, si ha in ogni punto della linea $V(x)/I(x) = R_0$; questo vale anche alla terminazione $A - A'$ della linea, dove però deve valere anche l'ulteriore

condizione $V/I = R_L$ (che però è ancora eguale ad R_0). Si vede quindi che le condizioni al contorno imposte dalla resistenza di terminazione sono soddisfatte da una soluzione composta dalla sola onda diretta.

2.10 Coefficiente di riflessione.

Riferendosi sempre alla fig. 2.6, supponiamo di avere $R_L \neq R_0$; in presenza della sola onda diretta il rapporto V/I vale R_0 in tutti i punti della linea a sinistra e fino ad $A - A'$, mentre deve valere R_L in $A - A'$. La presenza della sola onda diretta non è quindi in grado in questo caso di soddisfare alle condizioni al contorno imposte dalla resistenza di terminazione $R_L \neq R_0$; il segnale che si propaga da sinistra verso destra non può essere interamente assorbito dalla resistenza R_L , ma viene in parte *riflesso*. In presenza di entrambe le onde, diretta e riflessa, il rapporto V/I è quello dato dalla eq. 2.23:

$$\frac{V(x)}{I(x)} = R_0 \frac{V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}}{-V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}} \quad (2.28)$$

Convienne porre l'origine della coordinata x in $A - A'$; il generatore verrà ad avere coordinata $x = -l$, con l lunghezza della linea. Quindi, in $A - A'$:

$$\frac{V(0)}{I(0)} = R_0 \frac{V_1 + V_2}{-V_1 + V_2} = R_L \quad (2.29)$$

Da questa

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} = \rho_v \quad (2.30)$$

La quantità ρ_v prende il nome di coefficiente di riflessione di tensione ed esprime il rapporto tra l'ampiezza dell'onda riflessa da una terminazione e l'ampiezza dell'onda diretta.

Viceversa, dalla conoscenza del coefficiente di riflessione ρ_v è possibile determinare il rapporto

$$\frac{R_L}{R_0} = \frac{1 + \rho_v}{1 - \rho_v} \quad (2.31)$$

Nel caso più generale che la terminazione sia una impedenza complessa Z_L invece di una resistenza pura R_L , anche il coefficiente di riflessione ρ_v sarà una quantità complessa.

2.11 Onde stazionarie.

La sovrapposizione lungo la linea delle onde diretta e riflessa da origine ad un fenomeno di interferenza. Supponendo che la linea abbia perdite nulle, o comunque trascurabili ($\alpha \simeq 0$):

$$V(x, t) = V_1 e^{j(\omega t + \beta x)} + V_2 e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (2.32)$$

Spostandosi lungo la linea, ad esempio verso destra, l'onda diretta arriva con un ritardo di fase via via maggiore, mentre la fase dell'onda riflessa risulta anticipata: si attraversano una serie di regioni in cui le due onde si sovrappongono

dando luogo alternativamente ad interferenza costruttiva e distruttiva. Per vedere quantitativamente questo effetto, calcoliamo

$$|V(x, t)|^2 = |e^{j\omega t}|^2 \cdot (V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}) \cdot (V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x})^* \quad (2.33)$$

Scrivendo V_1 e V_2 in notazione polare

$$V_1 = |V_1| e^{j\varphi} \quad , \quad V_2 = |V_2| e^{j\psi} \quad (2.34)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} |V(x, t)|^2 &= (|V_1| e^{j(\beta x + \varphi)} + |V_2| e^{-j(\beta x + \psi)}) \\ &\quad \cdot (|V_1| e^{-j(\beta x + \varphi)} + |V_2| e^{j(\beta x + \psi)}) \\ &= |V_1|^2 + |V_2|^2 + 2|V_1| \cdot |V_2| \cdot \cos(2\beta x + \varphi + \psi) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Si vede che il modulo di $V(x, t)$ oscilla tra un massimo $V_{max} = |V_2| + |V_1|$ ed un minimo $V_{min} = |V_2| - |V_1|$, corrispondenti rispettivamente ad interferenza massimamente costruttiva e distruttiva. Nel caso di riflessione completa $V_{max} = 2|V_2|$ e $V_{min} = 0$. La quantità

$$SWR = \frac{|V_2| + |V_1|}{|V_2| - |V_1|} \quad (2.36)$$

prende il nome di *rapporto di onde stazionarie* (*Standing Wave Ratio*).

La distanza tra due massimi e due minimi consecutivi di $|V|$ si ha quando la differenza di fase tra onda diretta e riflessa compie una variazione complessiva di 2π , cioè quando $\Delta x = \pi/\beta = \lambda/2$.

2.11.1 Trasformazione di impedenza.

Per effetto dell'interferenza tra onda diretta ed onda riflessa descritta al par. 2.11 il rapporto tra tensione e corrente varia da punto a punto lungo la linea. Dalla eq. 2.23 si ha:

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = R_0 \frac{V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}}{-V_1 e^{j\beta x} + V_2 e^{-j\beta x}} \quad (2.37)$$

e poichè $V_1 = V_2(Z_L - R_0)/(Z_L + R_0)$

$$\begin{aligned} Z(x) &= R_0 \frac{Z_L(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) - R_0(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x})}{-Z_L(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) + R_0(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x})} \\ &= R_0 \frac{Z_L \cos(\beta x) - jR_0 \sin(\beta x)}{-jZ_L \sin(\beta x) + R_0 \cos(\beta x)} \\ &= R_0 \frac{Z_L - jR_0 \tan(\beta x)}{R_0 - jZ_L \tan(\beta x)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Questo risultato ci dice che un generatore, collegato ad un tratto di linea di trasmissione di resistenza caratteristica R_0 e chiusa su una impedenza Z_L , vede una

impedenza $Z_l = Z(-l)$ che dipende dalla lunghezza l della linea. Nel caso di linee con perdite, l'eq. 2.38 diventa

$$Z(x) = R_0 \frac{Z_L(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) - R_0(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})}{-Z_L(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) + R_0(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})} = R_0 \frac{Z_L - R_0 \tanh(\gamma x)}{R_0 - Z_L \tanh(\gamma x)} \quad (2.39)$$

Alcuni esempi:

1. Linea chiusa in cortocircuito ($Z_L = 0$): $Z_l = -jR_0 \tan(\beta x) = jR_0 \tan(\beta l)$ in assenza di perdite. L'impedenza è una reattanza pura, che per valori di βl (cioè di l/λ) piccoli è di tipo induttivo; per $\beta l \rightarrow \pi/2$ si ha $Z_l \rightarrow \infty$: il generatore vede attraverso un pezzo di linea di lunghezza $l = \pi/(2\beta) = \lambda/4$ il cortocircuito trasformato in un circuito aperto. Per $l > \lambda/4$ la reattanza diventa negativa, cioè di tipo capacitivo, fino a $l = \lambda/2$, ecc. Questo andamento è riportato in fig. 2.7 (curve in blu), per una linea di lunghezza elettrica $l = 1.5 m$, per frequenze da 0 a 300 MHz. La frequenza è riportata sull'asse x come f/f_λ , dove $f_\lambda = 200 MHz$ è la frequenza la cui lunghezza d'onda è eguale alla lunghezza l della linea. In rosso è riportata l'impedenza $Z_l = R_0 \tanh(\gamma l)$ della stessa linea, in presenza di una perdita di 0.2 dB/m. In questo caso la parte reale non è più identicamente nulla ed in corrispondenza di $l = \lambda/4, 3\lambda/4$ ecc. l'impedenza non diverge più a infinito, ma diventa reale e finita.
2. Linea aperta ($Z_L = \infty$): $Z_l = -jR_0/\tan(\beta l) = -jR_0 \cot(\beta l)$ in assenza di perdite e $Z_l = -R_0 \coth(\gamma l)$ nel caso di linea con perdite. A causa della complementarità tra le funzioni $\tan()$ e $\cot()$, si hanno gli stessi comportamenti del caso precedente, con una traslazione di $1/4$ sull'asse x . Nelle stesse condizioni dell'esempio precedente risulta ancora valido il grafico di fig. 2.7, con i valori dell'asse x riportati in alto. Quindi per $f \ll f_\lambda$ la linea si comporta come un condensatore; per $f = f_\lambda/4$ la terminazione a circuito aperto viene trasformata in un cortocircuito ecc.
3. Linea senza perdite lunga esattamente $l = \lambda/2$ o un suo multiplo intero e terminata su una impedenza qualsiasi Z_x : $Z_l = Z_x$.

Quando $|\gamma l| \ll 1$, nella eq. 2.39 si può sostituire a $\tanh(\gamma x)$ il suo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine. Si ottiene:

$$1. Z_l = R_0 \gamma l = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \cdot \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \cdot l = (R + j\omega L) \cdot l$$

$$2. Z_l = \frac{R_0}{\gamma l} = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} \bigg/ \frac{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}}{l} = \frac{1}{(G + j\omega C) \cdot l}$$

Quindi un tratto di linea molto corta equivale ad elementi circuitali *concentrati*: se la linea è aperta si comporta come un condensatore (con una conduttanza in parallelo), se è chiusa in cortocircuito come una induttanza (con una resistenza in serie), con i valori degli elementi propri del tratto di linea considerato.

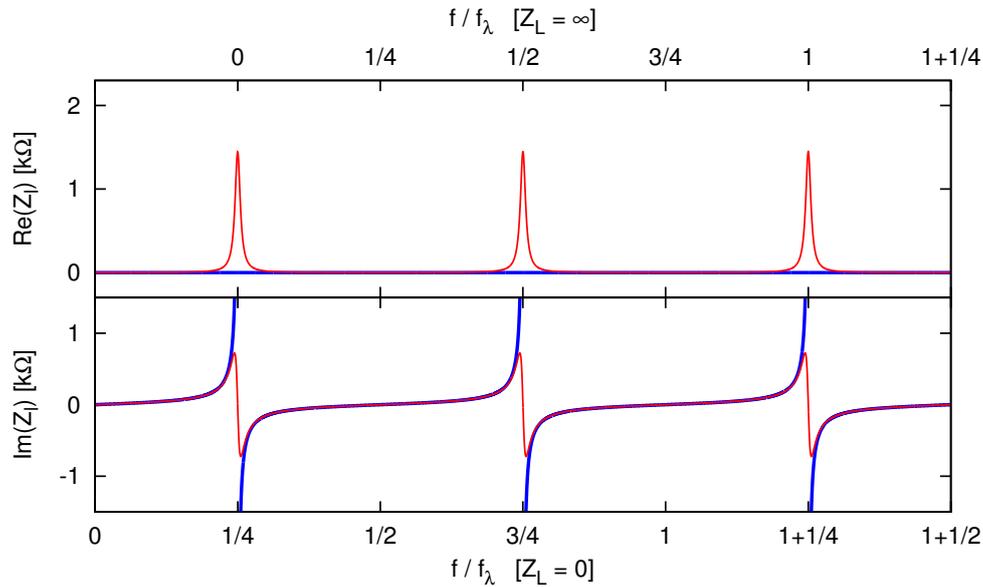


Figura 2.7: Parte reale ed immaginaria dell'impedenza Z_l in funzione della frequenza f per una linea di lunghezza elettrica $l = 1.5 m$, con $R_0 = 50 \Omega$ e chiusa in cortocircuito ($Z_L = 0$) oppure terminata a circuito aperto ($Z_L = \infty$). Le curve in blu corrispondono ad una linea senza perdite; le curve in rosso ad una linea con una perdita di $0.2 dB/m$ ($\alpha = 0.023 m^{-1}$). La frequenza f_λ è quella frequenza per cui la lunghezza d'onda λ è eguale alla lunghezza l della linea. Le curve per i due casi $Z_L = 0$ e $Z_L = \infty$ differiscono solo per una traslazione di $1/4$ sull'asse x .

2.11.2 Linea di lunghezza variabile

I grafici in fig. 2.7 sono stati ottenuti considerando una linea di lunghezza pre-

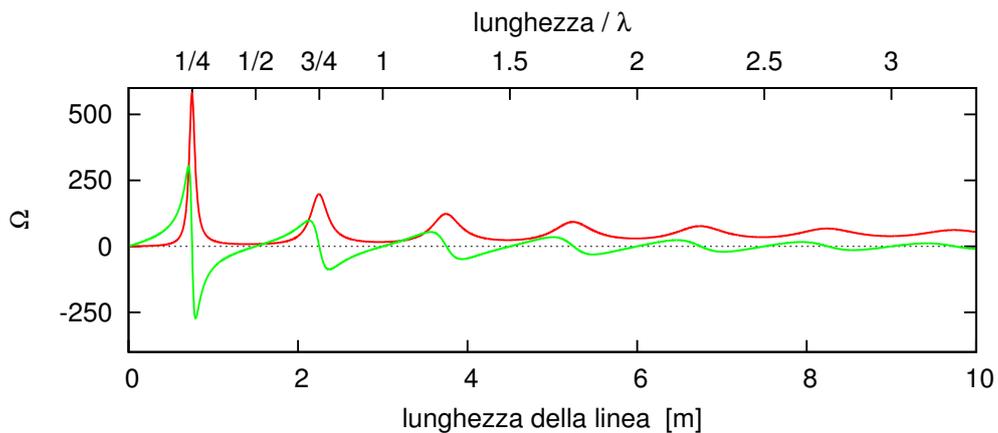


Figura 2.8: Impedenza equivalente di una linea chiusa in cortocircuito, di lunghezza variabile $0 \dots 10 m$, con resistenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ e perdite di $1 dB/m$, alla frequenza $f = 100 MHz$. Rosso: parte reale; verde: parte immaginaria.

fissata (1.5 m) ed una frequenza variabile (0... 300 MHz). In fig. 2.8 è riportato il grafico della eq. 2.39 calcolato alla frequenza fissa $f = 100 \text{ MHz}$, per una linea di lunghezza variabile 0... 10 m chiusa in cortocircuito e con un coefficiente di perdita di 1.0 dB/m. Anche in questo caso compaiono i picchi in corrispondenza di $f/f_\lambda = 1/4, 3/4 \dots$ ecc. Ma al crescere della lunghezza della linea i picchi si fanno sempre più piccoli a causa dell'aumento delle perdite, fino a che, per $l \rightarrow \infty$ si ha $Z_l \rightarrow R_0$. Un grafico analogo si otterrebbe per la stessa linea aperta, con le differenze già viste per fig. 2.7.

È da notare che nel mondo reale una misura effettuata nelle condizioni di fig. 2.7 produrrebbe un grafico con un andamento analogo a quello di fig. 2.8, perchè in una linea reale le perdite tendono sempre ad aumentare al crescere della frequenza.

2.11.3 Tensioni alle estremità della linea

Il calcolo della tensione presente al termine di una linea di trasmissione, conoscendo la tensione applicata all'ingresso e le caratteristiche e la terminazione della linea, richiede di tenere conto del fenomeno delle onde stazionarie.

Le tensioni V_i e V_t , presenti rispettivamente all'inizio ed al termine di una linea di lunghezza l e coefficiente di propagazione γ , risultano dalla somma dell'onda diretta V_2 e dell'onda riflessa V_1 :

$$V_i = V_1(0) + V_2(0) \qquad V_t = V_1(l) + V_2(l) \qquad (2.40)$$

dove la coordinata 0 corrisponde all'inizio della linea e la coordinata l all'altra estremità. Per effetto della riflessione alla terminazione, secondo la eq. 2.30, vale la relazione

$$V_1(l) = \rho_v V_2(l) \qquad (2.41)$$

mentre per effetto della propagazione tra i valori di V_1 e V_2 alle due estremità valgono le relazioni

$$V_2(l) = V_2(0)e^{-\gamma l} \qquad V_1(0) = V_1(l)e^{-\gamma l} \qquad (2.42)$$

Sostituendo le espressioni 2.41 e 2.42 nelle 2.40 si ottiene

$$\begin{aligned} V_i &= V_2(0) \left(1 + \rho_v e^{-2\gamma l} \right) \\ V_t &= V_2(0) \left(e^{-\gamma l} + \rho_v e^{-\gamma l} \right) \end{aligned} \qquad (2.43)$$

Dividendo tra loro le 2.43 e semplificando:

$$\frac{V_t}{V_i} = \frac{1 + \rho_v}{e^{\gamma l} + \rho_v e^{-\gamma l}} \qquad (2.44)$$

Per $\rho_v = 0$, cioè per una linea correttamente terminata, si ha:

$$\frac{V_t}{V_i} = e^{-\gamma l} \qquad (2.45)$$

cioè la normale propagazione senza riflessione. Per una linea aperta ($\rho_v = 1$):

$$\frac{V_t}{V_i} = \frac{2}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = \frac{2}{\cos(\beta l) (e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}) + j \sin(\beta l) (e^{\alpha l} - e^{-\alpha l})} \qquad (2.46)$$

Quando βl diventa $\pi/2$, $3\pi/2$, ecc., il termine in coseno a denominatore si annulla e per valori di α piccoli rimane

$$\frac{V_t}{V_i} = \pm \frac{1}{j\alpha l} \quad (2.47)$$

Alimentando una linea aperta con un generatore a bassa resistenza interna, in grado di mantenere una tensione V_i anche su una impedenza che tende ad un cortocircuito (vedi esempio 2 del paragrafo precedente), la tensione alla terminazione della linea può assumere valori molto elevati. Per una linea chiusa in cortocircuito ($\rho_v = -1$)

$$\frac{V_t}{V_i} = 0 \quad (2.48)$$

come è ovvio che sia.

2.12 Segnali a banda larga e a banda stretta.

Quanto detto nei paragrafi precedenti si riferisce a segnali di tipo monocromatico, cioè segnali il cui spettro di Fourier contiene una singola componente di frequenza f (o frequenza angolare $\omega = 2\pi f$). Molti segnali di interesse fisico sono invece caratterizzati da uno spettro di Fourier ricco di componenti aventi frequenze diverse. L'intervallo nello spettro di un segnale compreso tra la componente di frequenza più bassa (f_{min}) e quella di frequenza più alta (f_{max}) costituisce la larghezza di banda (o occupazione di banda) del segnale.

In figura (2.9) sono riportate le bande di frequenza caratteristiche di vari tipi di segnale:

1. Segnale audio: $20Hz \div 20kHz$. Larghezza di banda $\simeq 20kHz$; rapporto $f_{max}/f_{min} = 10^3$
2. Impulsi generati da un fotomoltiplicatore: $20kHz \div 500MHz$. Larghezza di banda $\simeq 500MHz$; rapporto $f_{max}/f_{min} = 2.5 \cdot 10^4$
3. Segnale televisivo in banda UHF, canale 61: $790 \div 798MHz$. Larghezza di banda $= 8MHz$; rapporto $f_{max}/f_{min} = 1.01$

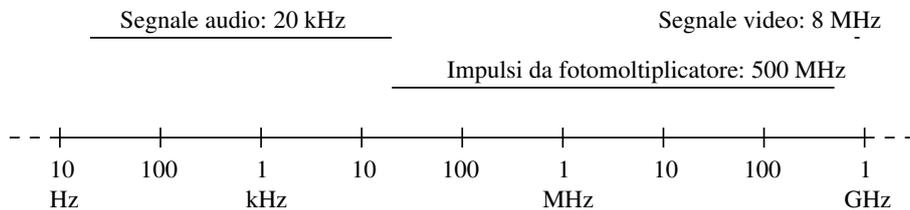


Figura 2.9: Occupazione di banda per vari tipi di segnali.

Il primo ed il secondo di questi esempi rappresentano segnali detti *a banda larga*; il terzo rappresenta un segnale *a banda stretta*. In questa classificazione l'aspetto importante non è la larghezza di banda in Hz o in kHz , ma il rapporto tra frequenza

massima e minima dello spettro del segnale. Un segnale in cui questo rapporto è molto vicino ad uno, come nel terzo esempio, può essere considerato come un segnale per molti aspetti monocromatico. Le equazioni del par. 2.11 si possono applicare al segnale del terzo esempio, a condizione che βx vari solo di poco nella banda di frequenze interessate. Prendendo come valore di x tutta la lunghezza l della linea e ricordando che $\beta = \omega/u$ (eq. 2.13), la condizione richiesta diventa $l\Delta\omega/u \ll 2\pi$, cioè $\Delta\omega \ll 2\pi u/l = \omega\lambda/l$ e quindi

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta f}{f} \ll \frac{\lambda}{l} \quad (2.49)$$

Se si considera una linea lunga anche solo poche lunghezze d'onda, si vede che solo il segnale riportato nel terzo esempio può soddisfare alla condizione richiesta. Le equazioni del par. 2.11 applicate ai segnali degli esempi (1) e (2) danno risultati che sono funzione di ω , cioè diversi per ogni componente dello spettro e in genere di scarsa utilità.

2.13 Riflessione di un segnale a banda larga

Consideriamo come segnale a banda larga un breve impulso (fig. 2.10). Se l'im-



Figura 2.10: Impulso di durata τ

pulso si ripete nel tempo con cadenza f il suo spettro di Fourier contiene la frequenza fondamentale f e le armoniche $2f$, $3f$ ecc., di intensità via via decrescente. Nel caso limite di un impulso infinitamente stretto, cioè di una δ di Dirac, tutte le frequenze armoniche hanno la stessa ampiezza. Riducendo via via la frequenza f le componenti armoniche dello spettro diventano sempre più fitte e nel caso limite di una singola δ di Dirac, corrispondente a $f = 0$, si ha uno spettro continuo che contiene tutte le frequenze, tutte con la stessa ampiezza³.

Supponendo che la linea sia ideale o almeno soddisfi alle condizioni di Heaviside, la propagazione avverrà senza dispersione e quindi tutte le componenti armoniche si propagheranno con la stessa velocità u ; anche l'impulso quindi si propagherà lungo la linea con velocità u senza deformarsi.

³Più correttamente: con la stessa *densità spettrale*, perchè dopo il passaggio al limite non si può più parlare dell'ampiezza di una singola componente $a(f)$, ma solo di una densità spettrale da/df .

Al termine della linea ognuna delle componenti armoniche subirà una riflessione, come previsto dall'equazione 2.30. Se la resistenza R_L di terminazione della linea è una resistenza pura, non dipendente dalla frequenza, tutte le armoniche verranno riflesse nella stessa misura e la loro combinazione nell'onda riflessa darà un impulso di forma eguale a quello originario, ma scalato in ampiezza per il coefficiente ρ_v .

Negli esempi che seguono si considerano alcuni casi di riflessione di impulsi in una linea che abbia perdite trascurabili e sia terminata su una resistenza pura. Si suppone anche che gli impulsi si susseguano con una cadenza lenta abbastanza perchè tutti i fenomeni prodotti da un impulso lungo la linea siano scomparsi prima dell'inizio dell'impulso successivo.

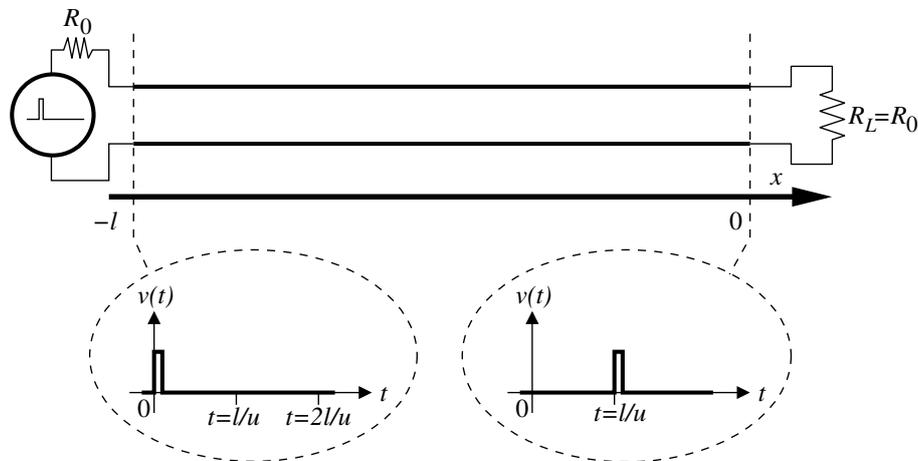


Figura 2.11: Propagazione di un impulso in una linea terminata sulla sua resistenza caratteristica. L'impulso parte dall'estremità sinistra al tempo $t = 0$ e raggiunge l'estremità destra dopo un tempo $t = l/u$.

1) $R_L = R_0$; $\rho_v = 0$: non si ha onda riflessa. L'impulso viene emesso dal generatore al tempo $t = 0$; viaggia lungo la linea da sinistra verso destra e dopo un tempo $t = l/u$ raggiunge la resistenza di terminazione R_L dove la sua energia viene interamente assorbita. (fig. 2.11).

2) $R_L > R_0$; $\rho_v > 0$: quando l'impulso arriva alla resistenza di terminazione viene in parte assorbito ed in parte riflesso, generando un impulso che torna indietro verso il generatore. L'impulso riflesso ha la stessa forma ed una ampiezza pari alla frazione ρ_v dell'impulso originale. Nel caso limite $R_L = \infty$, si ha $\rho_v = 1$ e l'impulso viene interamente riflesso, riportando indietro tutta l'energia verso il generatore (una resistenza di valore infinito non può assorbire alcuna energia dalla linea) (fig. 2.12).

3) $R_L < R_0$; $\rho_v < 0$: valgono le stesse considerazioni del punto 2, con la sola differenza che l'impulso riflesso ha polarità opposta a quella dell'impulso originale. Nel caso limite $R_L = 0$, si ha $\rho_v = -1$ e quindi ancora riflessione totale, ma con l'inversione della polarità dell'impulso (anche una resistenza di valore zero non può assorbire alcuna energia) (fig. 2.13).

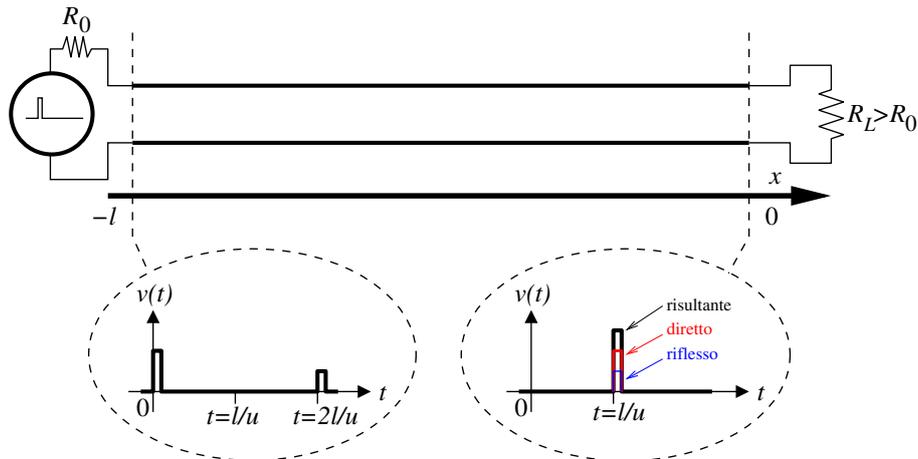


Figura 2.12: Propagazione di un impulso in una linea terminata su una resistenza $R_L > R_0$.

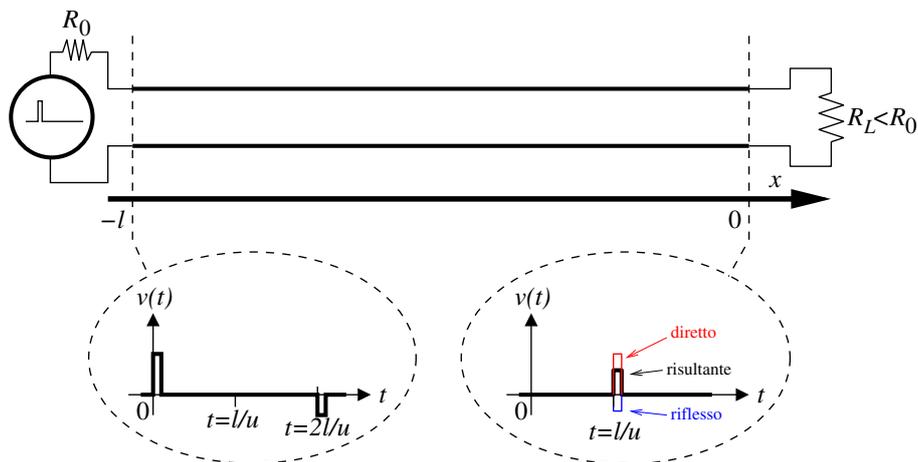


Figura 2.13: Propagazione di un impulso in una linea terminata su una resistenza $R_L < R_0$.

2.14 Resistenza interna del generatore

Nelle fig. 2.11–2.13 è stato indicato un generatore di tensione ideale, con in serie una resistenza interna pari alla resistenza caratteristica della linea; questo accorgimento è importante, anche nella pratica di laboratorio, se si vuole evitare che un impulso riflesso, una volta tornato all'inizio della linea di trasmissione, venga riflesso nuovamente, dando luogo al fenomeno delle riflessioni multiple.

In tutti e tre i casi se il generatore invia un impulso di ampiezza V_G , si ha una ampiezza $V_I = V_G/2$ all'estremità sinistra della linea. Infatti in presenza della sola onda diretta la linea si presenta come una resistenza di valore R_0 , che forma un partitore con rapporto 1/2 con la resistenza R_0 del generatore. All'estremità destra,

al termine della linea, il segnale ha ampiezza

$$V_E = V_I \cdot (1 + \rho_v) = \frac{V_G}{2} \cdot \left(1 + \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0}\right) = V_G \cdot \frac{R_L}{R_L + R_0} \quad (2.50)$$

secondo la legge del normale partitore resistivo. Quindi *un generatore con impedenza interna R_0 collegato ad una linea di trasmissione con impedenza caratteristica R_0 appare al suo carico come se la linea non ci fosse*, a parte il ritardo nella propagazione del segnale ed eventuali attenuazioni nel caso di linea con perdite.

Questa è la ragione per cui nella strumentazione di laboratorio le impedenze interne degli apparecchi sono per lo più normalizzate al valore 50Ω e si usano per i collegamenti cavi coassiali con impedenze caratteristiche di 50Ω .

2.15 Riflessione di un segnale a gradino

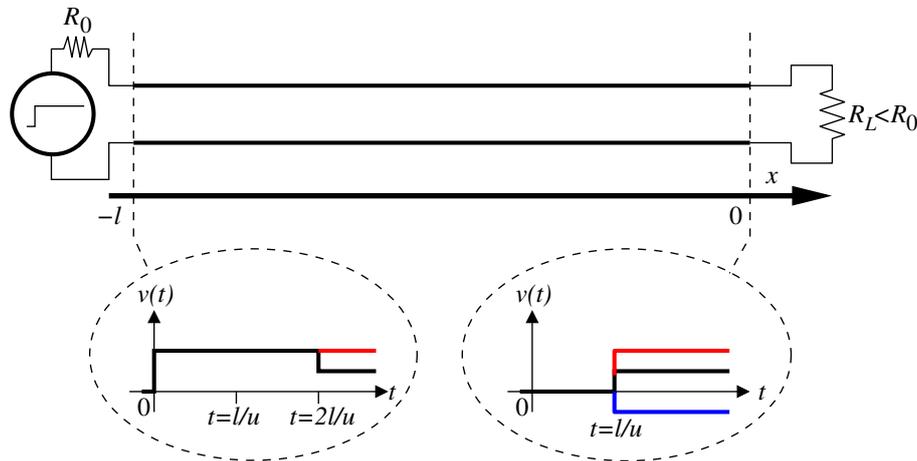


Figura 2.14: Riflessione di un segnale a gradino. I due grafici in tratto nero continuo indicano $V(t)$ all'inizio e alla fine della linea. I grafici in rosso rappresentano l'andamento di $V(t)$ se non ci fosse riflessione; il grafico in blu rappresenta il segnale riflesso.

È interessante riesaminare le situazioni descritte nel paragrafo (2.13) nel caso che il generatore invii un segnale “a gradino”: $v(t) = 0$ per $t < 0$, $v(t) = V^+ = V_G/2$ per $t \geq 0$ (Fig. 2.14). All'istante $t = 0$ e negli istanti immediatamente successivi il rapporto tra tensione e corrente all'inizio della linea è $v/i = R_0$ e sulla linea è presente la sola onda diretta. La corrente erogata dal generatore non può dipendere da quello che è collegato all'altra estremità della linea prima che sia trascorso un tempo $t = 2l/u$.

Il fronte del segnale a gradino viaggia lungo la linea per il tempo l/u , giunge all'altra estremità, viene riflesso a seconda delle condizioni della terminazione e dopo un altro tempo l/u ritorna al generatore.

A questo punto all'inizio della linea si ha la sovrapposizione dei due segnali diretto e riflesso:

$$\frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V^+ + \rho_v V^+}{V^+/R_0 - \rho_v V^+/R_0} = R_0 \frac{1 + \rho_v}{1 - \rho_v} = R_L \quad (2.51)$$

Quindi una resistenza R_L collegata alla fine di un tratto di linea di trasmissione ideale viene vista dal generatore che invia un segnale a gradino all'inizio della linea come una resistenza di valore R_L (ovviamente) ma solo dopo il tempo $t = 2l/u$. Prima di questo tempo il generatore *vede* la resistenza R_0 .

In questo esempio l'analisi della sovrapposizione dei segnali diretto e riflesso risulta particolarmente semplice perchè i segnali sono costanti nel tempo, a parte la variazione all'istante $t = 0$ da 0 a V^+ ; in pratica, per $t \geq 0$ si tratta di una corrente continua.

2.16 Riflessioni multiple

Nel caso che una linea di trasmissione sia terminata con una impedenza diversa dalla propria impedenza caratteristica a tutte e due le estremità si ha il fenomeno delle *riflessioni multiple*. In fig. 2.15 è riportato il caso di una linea senza perdite

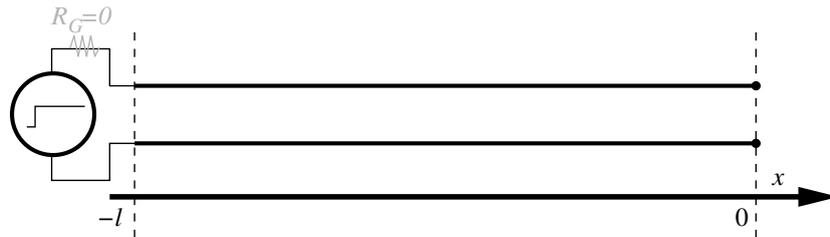


Figura 2.15: Linea di trasmissione senza perdite alimentata ad una estremità da un generatore di tensione a gradino con resistenza interna nulla. All'altra estremità la linea è aperta ($R_L = \infty$). Il sistema ideale non contiene alcun elemento dissipativo.

collegata ad una estremità ad un generatore ideale di tensione (quindi con resistenza interna $R_G = 0$) e lasciata aperta all'altra estremità ($R_L = \infty$).

Nel grafico 2.16 sono riportate in funzione del tempo la tensione $v(t)$ e la corrente $i(t)$ all'estremità sinistra della linea. Il generatore fornisce all'istante $t = 0$ un segnale di tensione a gradino come nel caso di fig. 2.14. Poichè il generatore ha resistenza interna nulla, la tensione $v(t)$ ai suoi capi (ed all'inizio della linea) è quella nominale: al tempo $t = 0$ si ha il salto da 0 a V_0 , valore che poi viene mantenuto stabile per un tempo indefinito. Contemporaneamente anche la corrente passa da 0 al valore $I_0 = V_0/R_0$.

Nel tempo $T = l/u$ il segnale giunge all'estremità opposta della linea, dove viene interamente riflesso con coefficiente di riflessione $\rho_v = 1$. L'ampiezza del segnale riflesso è ancora V_0 per quanto riguarda la tensione, ma $-I_0$ per la corrente, in quanto ora la propagazione sta avvenendo da destra verso sinistra. Al tempo $t = 2T$ il segnale riflesso giunge all'inizio della linea e si combina con quello originario. Contemporaneamente, però, il segnale riflesso trova la linea chiusa su un cortocircuito (la resistenza interna nulla del generatore) e viene quindi nuovamente riflesso da sinistra verso destra, stavolta con coefficiente di riflessione $\rho_v = -1$, quindi con

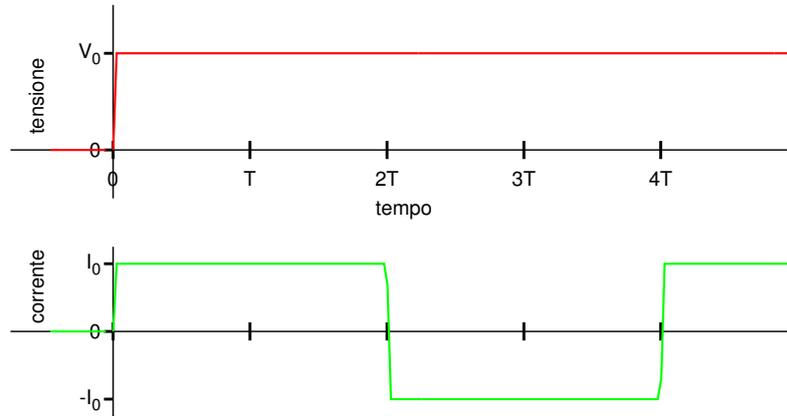


Figura 2.16: Tensione e corrente della linea di fig. 2.15 nel punto di alimentazione. La tensione passa da 0 V a V_0 all'istante $t = 0$ e rimane a questo valore indefinitamente; la corrente oscilla tra i valori $I_0 = V_0/R_0$ e $-I_0$ con periodo $2T = 2 \cdot l/u$ (l = lunghezza della linea, u = velocità di propagazione del segnale lungo la linea, R_0 = resistenza caratteristica della linea).

tensione $-V_0$ e corrente $-I_0$. In definitiva all'istante $t = 2T$ all'estremità sinistra della linea si ha

$$v(2T) = V_0 + V_0 - V_0 = V_0 \quad (2.52)$$

$$i(2T) = I_0 - I_0 - I_0 = -I_0 \quad (2.53)$$

Nel successivo intervallo di tempo $2T$ il fenomeno si ripete uguale, con l'unica differenza del cambiamento di segno nella corrente, dando all'istante $t = 4T$:

$$v(4T) = V_0 \quad (2.54)$$

$$i(4T) = I_0 \quad (2.55)$$

e così via all'infinito, come illustrato nel grafico 2.16.

Il fatto che la linea di trasmissione diventi (nel caso ideale) sede di una corrente oscillante in modo stazionario non deve stupire. Il fenomeno è analogo a quello che si verifica quando il segnale a gradino di un generatore di tensione ideale è applicato ad un circuito risonante ideale (fig. 2.17).

2.16.1 Riflessioni multiple in un sistema con perdite

Il caso più interessante in pratica è quello in cui si ha $R_0 \neq R_G \neq 0$. Nella figura 2.18 sono riportati in alto i grafici di corrente (rosso) e tensione (verde) all'inizio di una linea con $R_0 = 50\ \Omega$, $R_G = 500\ \Omega$, $T = 20\text{ ns}$ ed $R_L = \infty$, con una ampiezza della tensione del generatore $V_G = 1\text{ V}$. In basso gli stessi grafici per $R_L = 500\ \Omega$.

L'andamento è quello di una curva a gradini con l'altezza dei gradini che si riduce nel tempo con decadimento esponenziale. Nel limite in cui il tempo T di propagazione del segnale da un capo all'altro della linea è molto minore delle costanti di tempo formate dalla capacità totale della linea, lC ,⁴ e dalle resistenze che si trovano in

⁴Come detto all'inizio del capitolo, C è la capacità per unità di lunghezza.

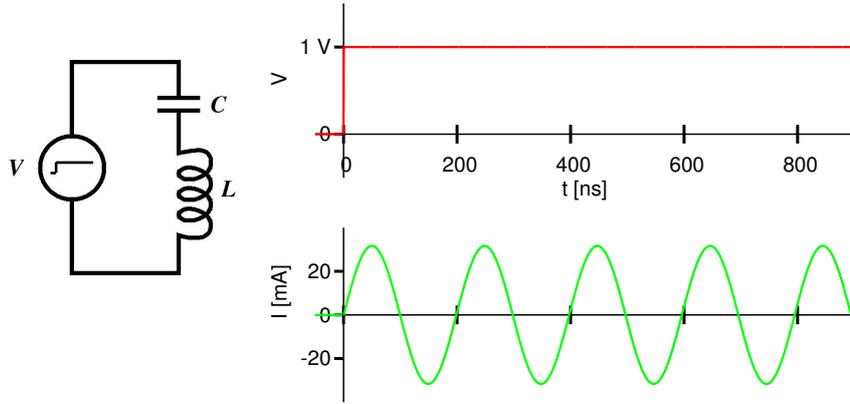


Figura 2.17: Circuito risonante con smorzamento nullo eccitato da una tensione a gradino. In alto, in rosso: tensione ai capi del circuito risonante; in basso, in verde, corrente attraverso condensatore ed induttanza ($L = 1 \mu H$, $C = 1 nF$).

parallelo alla linea, R_L e R_G , cioè quando i gradini diventano sempre più stretti e più bassi, la curva diventa l'esponenziale di carica del condensatore di un circuito RC a costanti concentrate.

Il gradino iniziale V_0 all'inizio della linea è determinato dal rapporto di partizione tra le resistenza interna del generatore, R_G , e la resistenza caratteristica della linea, R_0 :

$$V_0 = V_G \cdot \frac{R_0}{R_0 + R_G} \quad (2.56)$$

Dopo un intervallo di tempo $2T$ il gradino è giunto all'estremità destra della linea, è stato riflesso con coefficiente di riflessione

$$\rho_L = \frac{R_L - R_0}{R_L + R_0} \quad (2.57)$$

ed è tornato all'inizio della linea, dove si somma al gradino iniziale V_0 e viene nuovamente riflesso verso destra, questa volta con coefficiente

$$\rho_G = \frac{R_G - R_0}{R_G + R_0} \quad (2.58)$$

Quindi all'inizio della linea dopo un tempo $2T$ al gradino iniziale V_0 si sommano i due contributi $V_0\rho_L$ e $V_0\rho_L\rho_G$:

$$V(2T) = V_0 + V_0\rho_L + V_0\rho_L\rho_G \quad (2.59)$$

Dopo un ulteriore tempo $2T$ si hanno i due nuovi contributi $V_0\rho_L^2\rho_G$ e $V_0\rho_L^2\rho_G^2$ e così via. Sommando i contributi successivi si ha:

$$V(2nT) = V_0 \left[1 + \rho_L \left(1 + \rho_G \right) \sum_{i=0}^{n-1} \left(\rho_L \rho_G \right)^i \right] \quad (2.60)$$

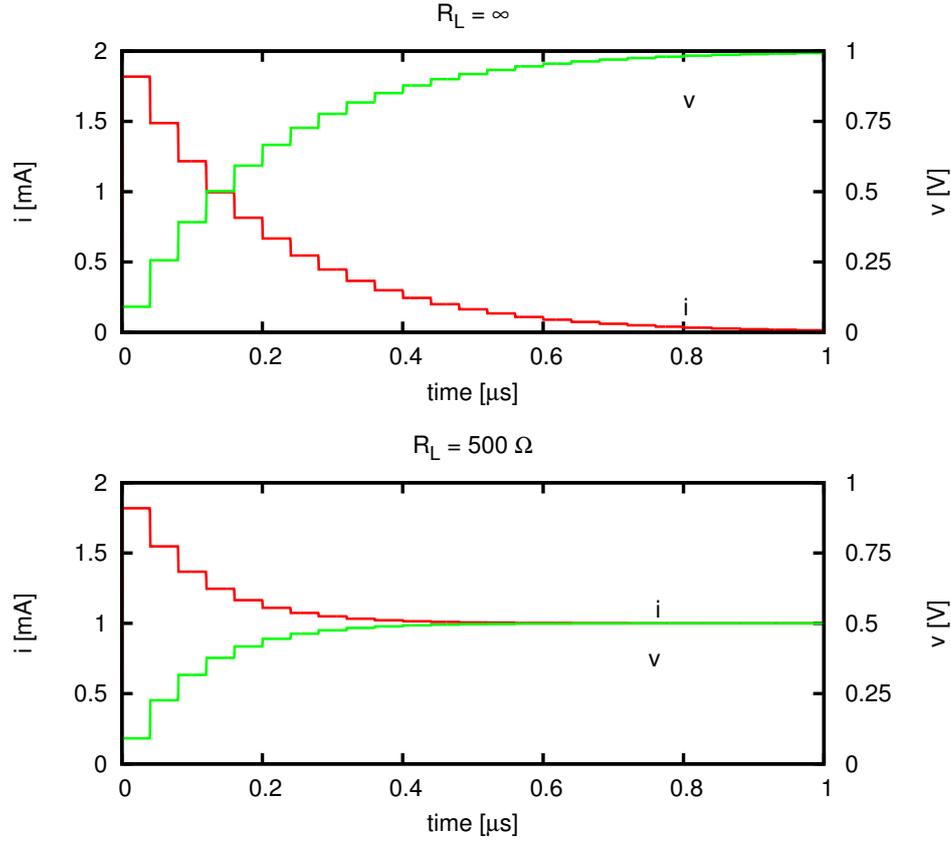


Figura 2.18: Corrente (in rosso) e tensione (in verde) nel punto di alimentazione di una linea con lunghezza elettrica $T = 20 \text{ ns}$ e resistenza caratteristica $R_0 = 50 \Omega$ da parte di un generatore di tensione a gradino con resistenza interna $R_G = 500 \Omega$. Il grafico in basso si riferisce ad una linea terminata con una resistenza $R_L = 500 \Omega$, quello in alto ad una linea aperta ($R_L = \infty$).

con $n = 0, 1, 2, \dots$. Ricordando che

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

si ottiene

$$V(t) = V_0 \left[1 + \rho_L (1 + \rho_G) \cdot \frac{1 - (\rho_L \rho_G)^{\frac{t}{2T}}}{1 - \rho_L \rho_G} \right] \quad (2.61)$$

con $t = 0, 2T, 4T, 6T, \dots$. Sostituendo i valori di ρ_L , ρ_G e V_0 , dopo una certa manipolazione algebrica, si arriva a

$$V(t) = V_G \left[\frac{R_L}{R_G + R_L} - \left(\frac{R_L}{R_L + R_G} - \frac{R_0}{R_0 + R_G} \right) \cdot e^{\frac{t}{2T} \log(\rho_L \rho_G)} \right] \quad (2.62)$$

Dalle due equazioni 2.25 e 2.11 si ottengono le relazioni

$$L = R_0^2 C \quad (2.63)$$

$$T = \frac{l}{v} = l\sqrt{LC} = R_0 l C \quad (2.64)$$

Sostituendo $R_0 = T/(lC)$ nelle espressioni di ρ_L e di ρ_G , se

$$\frac{R_0}{R_L} = \frac{T}{lCR_L} \ll 1 \quad \text{e} \quad \frac{R_0}{R_G} = \frac{T}{lCR_G} \ll 1$$

si può sviluppare in serie di Taylor al primo ordine ottenendo

$$\log(\rho_L \cdot \rho_G) = -\frac{2T}{lC} \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_G} \right) \quad (2.65)$$

Il risultato finale è quindi la legge esponenziale di carica di un condensatore dal valore di tensione iniziale $V_G R_0 / (R_0 + R_G)$ al valore finale $V_G R_L / (R_G + R_L)$ con costante di tempo $lCR_L R_G / (R_L + R_G)$.

2.17 Velocità di fase e di gruppo

Come visto nel par. 2.5, dalla equazione

$$V(x, t) = V^\pm e^{j(\omega t \pm \beta x)} \quad (2.66)$$

che descrive la propagazione di un'onda con frequenza angolare ω e lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/\beta$, si può ricavare la velocità con cui procede nello spazio la fase, ponendo

$$\omega t \pm \beta x = \text{cost.} \quad (2.67)$$

Differenziando questa espressione, si ottiene la *velocità di fase*

$$u = \frac{dx}{dt} = \mp \frac{\omega}{\beta} \quad (2.68)$$

Nel caso ideale, cioè quando valgono le condizioni di Heaviside e R, L, C e G non dipendono da ω , si ha $\beta \propto \omega$ e quindi $u = \text{cost.}$

Per una linea reale questo vale solo in forma approssimata. Nei mezzi materiali la velocità di fase dipende sempre in qualche misura da ω .

La sovrapposizione di due segnali di frequenza ω e costante di propagazione β leggermente diverse ($\omega \pm \Delta\omega$ e $\beta \pm \Delta\beta$, con $\Delta\omega \ll \omega$ e $\Delta\beta \ll \beta$) possono essere considerati il risultato della modulazione di una *portante* ω, β con un segnale $\Delta\omega, \Delta\beta$:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= v_0 \cdot \{ \cos [(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)x] \\ &\quad + \cos [(\omega - \Delta\omega)t - (\beta - \Delta\beta)x] \} \\ &= 2v_0 \cdot \cos(\omega t - \beta x) \cdot \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x) \end{aligned} \quad (2.69)$$

La portante si propaga come si è visto con velocità di fase $u = \omega/\beta$, mentre il segnale modulante (*l'informazione*) si propaga con la propria velocità di fase $u' = \Delta\omega/\Delta\beta$ e per $\Delta\omega, \Delta\beta \rightarrow 0$ si ha

$$u' = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (2.70)$$

La velocità di fase della modulazione, velocità con cui si propaga l'informazione, è detta *velocità di gruppo*.

