ΚΕΦΑΛΑΙΟ $1^{\underline{O}}$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1.1 Εισαγωγή

Στην Θεωρία Πιθανοτήτων, ξεκινάμε από το λεγόμενο **πείραμα** δηλαδή μια διαδικασία η οποία μπορεί να επαναληφθεί θεωρητικά άπειρες φορές, κάτω από τις ίδιες ουσιαστικά συνθήκες, και στο τέλος της οποίας παρατηρούμε ορισμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα η ρίψη ενός νομίσματος με δυό όψεις, η ρίψη ενός συμμετρικού ζαριού, ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σ' ένα αεροδρόμιο μέσα σ'ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα, το ύψος των παιδιών ενός παιδικού σταθμού ή ο αριθμός των γεννήσεων σε μια περιοχή της χώρας για ένα δοσμένο χρονικό διάστημα μπορούν να θεωρηθούν πειράματα.

Τα πειράματα μπορούν να χωρισθούν σε δυό μεγάλες κατηγορίες, τα **καθοριστικά** (deterministic) και τα λεγόμενα πειράματα **τύχης** (random).

Καθοριστικά λέγονται τα πειράματα εκείνα τα οποία έχουν ένα δυνατό αποτέλεσμα, που είναι γνωστό πως θα συμβεί, πριν ακόμα εκτελεστεί το πείραμα, και έτσι είναι φυσικό να μην παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Παράδειγμα ενός τέτοιου πειράματος είναι το εξής: Εάν κάποιος τοποθετήσει ένα ποτήρι με νερό σε περιβάλλον θερμοκρασίας κάτω των 0^0 Κελσίου τότε το νερό θα γίνει πάγος (αποτέλεσμα μοναδικό και γνωστό εκ των προτέρων).

Πειράματα τύχης λέγονται εκείνα τα πειράματα τα οποία έχουν περισσότερα του ενός δυνατά αποτελέσματα και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατόν να είναι γνωστό το αποτέλεσμα πριν από την εκτέλεση του πειράματος (είναι βέβαια γνωστό ότι το αποτέλεσμα θα ανήκει σε ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων, σύνολο το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων) π.χ. όταν ρίχνουμε ένα νόμισμα με δυό όψεις (κεφαλή-γράμματα) ξέρουμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι κεφαλή ή γράμματα το ποιό όμως θα είναι το συγκεκριμμένο αποτέλεσμα, σε μια ρίψη, δεν είναι δυνατόν να είναι γνωστό πριν εκτελέσουμε το πείραμα. Με τέτοιου είδους πειράματα ασχολείται κανείς στην Θεωρία Πιθανοτήτων.

Ορισμός 1.1.1 Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης καλείται **δειγματοχώρος** του πειράματος (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με **Ω**, ενώ κάθε ένα από τα (δυνατά αυτά) αποτελέσματα καλείται **απλό γεγονός ή δειγματοσημείο**.

Υπάρχουν δυό είδη δειγματοχώρων, εκείνοι για τους οποίους το Ω είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο και οι οποίοι ονομάζονται **διακριτοί** και εκείνοι για τους οποίους το Ω είναι μη-αριθμήσιμο σύνολο και οι οποίοι ονομάζονται **συνεχείς.**

Παραδείγματα 1.1.2

(1) Εάν ρίξουμε ένα νόμισμα με δυό όψεις τότε:

$$\Omega = \{\text{Κεφαλή, Γράμματα}\} \text{ ή χάριν συντομίας } \Omega = \{\text{Κ,Γ}\}$$

(2) Εάν τώρα υποθέσουμε ότι ρίχνουμε δυό συμμετρικά ζάρια και μας ενδιαφέρει η κατανομή των αποτελεσμάτων (τελειών) των δυό ζαριών, τότε ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από τα παρακάτω 36 αποτελέσματα:

Πίνακας 1.1.3

		2^0 ζάρι					
		1	2	3	4	5	6
1^0 ζάρι	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

(3) Εάν πάλι στην ρίψη δυό συμμετρικών ζαριών, ενδιαφερόμαστε για το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δυό ζαριών, ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ίσος με:

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Παρατήρηση 1.1.4 Προσοχή στο πως ορίζεται ένα πείραμα τύχης. Τα δυό παραπάνω πειράματα (της ρίψης των ζαριών) φαίνεται ότι είναι ίδια αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Έχουν διαφορετικούς δειγματοχώρους.

(4) Εάν μας ενδιαφέρει ο αριθμός των αεροπλάνων που φθάνουν σ' ένα αεροδρόμιο μέσα σ'ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα, τότε:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3 \ldots, k\}$$

όπου k είναι ο μέγιστος αριθμός αεροπλάνων που μπορούν να φθάσουν στο αεροδρόμιο μέσα στο καθορισμένο χρονικό διάστημα.

(5) Στο πείραμα του ύψους των παιδιών ενός παιδικού σταθμού:

$$\Omega = [a,b]$$

δηλαδή το κλειστό διάστημα $[a,b]$, όπου a,b είναι το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος των παιδιών του σταθμού, αντίστοιχα.

Στα παραπάνω παραδείγματα 1,2,3,4, οι δειγματοχώροι είναι διακριτοί ενώ στο 5 συνεχής.

Αφού λοιπόν σ' ένα πείραμα τύχης δεν είναι δυνατόν να προβλεφθεί εκ των προτέρων το ποιό ακριβώς αποτέλεσμα θα συμβεί (αλλά πάλι είναι γνωστό ότι θα συμβεί ένα αποτέλεσμα από ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων), θα ήθελε κάποιος να ήταν σε θέση να αντιστοιχήσει σε κάθε ένα από αυτά τα (δυνατά) αποτελέσματα έναν αριθμό, τον οποίο θα καλούμε **πιθανότητα του απλού γεγονότος** και ο οποίος θα μας φανερώνει *το πόσο δυνατόν είναι να συμβεί το εν λόγω γεγονός*.

Ορισμός 1.1.5 Εάν ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης είναι ίσος με:

$$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$$

τότε αντιστοιχούμε σε κάθε ένα από αυτά τ' αποτελέσματα $\alpha_j, \quad j = 1,2\cdots,n$ έναν αριθμό, **μεταξύ 0 και 1**, $p_j, \quad j = 1,2\cdots,n$ (και τέτοιον ώστε το $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$) ο οποίος μας φανερώνει το πόσο δυνατόν είναι να συμβεί το γεγονός $\{\alpha_j\}, \quad j = 1,2\cdots,n$, συμβολικά:

$$P(\{a_j\}) = p_j \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

και τον οποίο όπως είπαμε καλούμε **πιθανότητα του απλού γεγονότος** $\{\alpha_j\}$ (probability of the simple event $\{\alpha_j\}$).

Αν τώρα $A \subseteq \Omega$, το A καλείται **γεγονός**, ή **ενδεχόμενο** (event)**,** και εάν

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_k}\}$$

τότε είναι φανερό ότι η (κατάλληλη αντιστοίχηση) πιθανότητα του είναι ίση με:

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}$$

Παρατηρήσεις 1.1.6 (i) Στην πράξη, αν $A \subseteq \Omega$, τότε το A καλείται **γεγονός** στην περίπτωση κατά την οποία το A ανήκει σε μία ιδιαίτερη κλάση $\Im$ υποσυνόλων του δειγματοχώρου Ω (την οποία κλάση $\Im$ ορίζουμε με κάποιο συγκεκριμμένο τρόπο και ονομάζουμε **σ-άλγεβρα** υποσυνόλων του δειγματοχώρου) δηλαδή όταν ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες οι οποίες δεν εξετάζονται στις εν λόγω σημειώσεις. Εάν ο δειγματοχώρος ειναι διακριτός τότε σαν μια τέτοια κλάση μπορούμε να θεωρήσουμε το δυναμοσύνολο του Ω (δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών υποσυνόλων του Ω) και έτσι σ'αυτή την περίπτωση κάθε υποσύνολο του Ω θεωρείται γεγονός.

(ii) Οι παρακάτω ιδιότητες απορρέουν απευθείας από τον παραπάνω ορισμό της πιθανότητας ενός γεγονότος.

(1) $P(\Omega)=1$ (το σύνολο Ω καλείται **βέβαιο** γεγονός)

(2) $0 \le P(A) \le 1$

(3) Αν $\mathrm{A},\mathrm{B} \subseteq \Omega$ και $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ (δηλαδή τα γεγονότα Α,Β είναι **ξένα** μεταξύ τους) τότε:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$

Εάν $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ είναι ένα γεγονός, τότε λέμε ότι το Α **πραγματοποιείται** σε μια εκτέλεση του πειράματος, εάν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι στοιχείο του Α.

Ορισμός 1.1.7 (**Η σχετική συχνότητα σαν πιθανότητα**)
Έστω ότι ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται n φορές, και έστω ότι κάθε μια από αυτές τις επαναλήψεις είναι ανεξάρτητη από όλες τις προηγούμενες της. Για ένα γεγονός Α, έστω $f(A)$ ο αριθμός των φορών που πραγματοποιείται το Α στις n επαναλήψεις (συχνότητα του Α). Η ποσότητα:

$$f_A = \frac{f(A)}{n}$$

καλείται **σχετική συχνότητα** του γεγονότος Α. Εάν θεωρήσουμε ότι το όριο αυτής της ποσότητας του n τείνοντος στο άπειρο <u>υπάρχει</u> , τότε ο αριθμός αυτός καλείται (στην πράξη) **πιθανότητα του Α**.

Η σχετική συχνότητα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $f_A \ge 0$

(2) $f_\Omega = 1$

(3) $Εάν\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow f_{A\cup \mathrm{B}} = f_A + f_{\mathrm{B}}$

Εάν προσπαθήσει να θεμελιώσει κανείς αυστηρά την Θεωρία των Πιθανοτήτων με την βοήθεια του ορισμού (1.1.5) ή (1.1.7) τότε αντιμετωπίζει αρκετές δυσκολίες (π.χ. είναι δύσκολο να δει πως μπορεί να ορισθούν οι πιθανότητες γεγονότων στην περίπτωση συνεχούς δειγματοχώρου). Γι' αυτό τον λόγο δίνουμε έναν τρίτο ορισμό της πιθανότητας ενός γεγονότος.

Ορισμός 1.1.8 (**Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας κατά Kolmogorov**)

Γενικότερα η πιθανότητα μπορεί να θεωρηθεί σαν μια συνολοσυνάρτηση:

$$P : \Im \to [0, 1]$$

όπου $\Im$ η κλάση (σ-άλγεβρα) των γεγονότων του δειγματοχώρου Ω, και η οποία συνολοσυνάρτηση ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες της παρατήρησης 1.1.6 (ιι), με την (3) αναφερόμενη σε αριθμήσιμο πλήθος ανά δυό ξένων γεγονότων, δηλαδή:

– αν $\{A_i\}_{i \in N}$ γεγονότα τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \ i \neq j$ τότε:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.1.9}$$

Έτσι δεν έχει κανείς πρόβλημα στο να ορίσει πιθανότητες και στην περίπτωση των συνεχών δειγματοχώρων.

Στις εν λόγω σημειώσεις, ασχολούμαστε με πειράματα τύχης των οποίων ο δειγματοχώρος είναι συνήθως ένα πεπερασμένο σύνολο και τα δειγματοσημεία έχουν την ίδια δυνατότητα να συμβούν (είναι ισοπίθανα ή έχουν **ομοιόμορφη πιθανότητα**) και ως εκ τούτου, εάν πάλι:

$$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$$

τότε:

$$P(\{a_j\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\#(\Omega)} \qquad j = 1,2,\cdots,n \tag{1.1.10}$$

όπου με $\#(\Omega)$ συμβολίζουμε τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου Ω (πληθάριθμος του Ω).

Παράδειγμα 1.1.11 Όταν ρίχνουμε ένα «δίκαιο» νόμισμα με δυό όψεις τότε:

$$\Omega = \{\mathrm{K}, \Gamma\}$$

(Κ=κεφαλή, Γ=γράμματα) και έτσι

$$P(\{\mathrm{K}\}) = P(\{\Gamma\}) = \frac{1}{2}$$

Τώρα, εάν:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_k}\}$$

τότε:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{k}{n} = \frac{\#(\mathrm{A})}{\#(\Omega)} \tag{1.1.12}$$

Παράδειγμα 1.1.13 Εάν ρίξουμε ένα συμμετρικό ζάρι και Α είναι το γεγονός: «το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός», τότε Ω={1,2,3,4,5,6} και Α={2,4,6} άρα:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Οι παρακάτω τύποι είναι εύκολο να αποδειχθούν και ισχύουν γενικά για όλα τα πειράματα τύχης.

(i) $P(\mathrm{A}') = 1 - P(\mathrm{A})$

όπου A' είναι το συμπλήρωμα του συνόλου Α, ως προς το σύνολο Ω.

(ii) Αν $\mathrm{A},\mathrm{B} \subseteq \Omega$ τότε

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

Για τρία γεγονότα Α,Β,Γ ο τύπος γίνεται:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \Gamma) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) + P(\Gamma) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \Gamma) - \\ - P(\mathrm{B} \cap \Gamma) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \Gamma)$$

Γενικότερα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.1.14 (Poincare). Η πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον από τα n γεγονότα $A_1, A_2, \cdots, A_n$ δίνεται από την σχέση:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \\ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \; - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Απόδειξη Επαγωγικά ως προς n.

Παρατήρηση 1.1.14 Ο τύπος

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$$

(πολλές φορές αναφέρεται και σαν **προσθετικό θεώρημα**) ισχύει **<u>μόνον</u>** στην περίπτωση που τα γεγονότα Α,Β είναι **ξένα** μεταξύ τους.

(iii) Αν $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ τότε:

(α) $P(\mathrm{A}) \le P(\mathrm{B})$ και

(β) $P(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A})$ όπου: $B - A = \{x \in B, x \notin A\}$

(iv) $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') = P(\mathrm{A}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

1.2 Ανεξαρτησία

Μια από τις βασικές έννοιες που συναντά κανείς στη Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι εκείνη της **ανεξαρτησίας** δυό γεγονότων. Έτσι:

Ορισμός 1.2.1 Δυό γεγονότα Α,Β , του ίδιου πειράματος τύχης, ονομάζονται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητα** αν η πραγματοποίηση του ενός δεν μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου.

Π.χ. εάν ρίξουμε ένα νόμισμα δυό φορές, το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης είναι ανεξάρτητο από το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης.

Ένας δεύτερος, ισοδύναμος, ορισμός της ανεξαρτησίας δυό γεγονότων είναι ο εξής:

Ορισμός 1.2.2 Δυο γεγονότα Α,Β ονομάζονται (**στοχαστικά) ανεξάρτητα** αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$P(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B}) \qquad (1.2.3)$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται και σε περισσότερα από δυο γεγονότα. Έτσι π.χ. τρία γεγονότα Α,Β,Γ ονομάζονται ανεξάρτητα αν ισχύουν ταυτόχρονα οι παρακάτω σχέσεις:

$$P(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B}), \quad P(\mathrm{A}\cap \Gamma) = P(\mathrm{A})\cdot P(\Gamma), \quad P(\mathrm{B}\cap \Gamma) = P(\mathrm{B})\cdot P(\Gamma)$$

και

$$P(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}\cap \Gamma) = P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B})\cdot P(\Gamma)$$

Παρατήρηση 1.2.4 (ι) Πολλές φορές γίνεται σύγχυση μεταξύ ξένων και ανεξάρτητων γεγονότων. Επαναλαμβάνοντας τους ορισμούς, δυό γεγονότα Α,Β λέγονται ξένα εάν δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, ενώ ανεξάρτητα αν η πραγματοποίηση του ενός δεν μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου.

(ιι) Για να είναι δυό γεγονότα ανεξάρτητα θα πρέπει να ορίζονται στον ίδιο δειγματοχώρο.

Στην πραγματικότητα, και για πειράματα τύχης των οποίων τα δειγματοσημεία έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν (άρα θετική πιθανότητα), εάν δυό γεγονότα (μη κενά) είναι ξένα δεν μπορεί να είναι και ανεξάρτητα γιατί εάν είναι ξένα τότε η πραγματοποίηση του ενός από αυτά συνεπάγεται την μη πραγματοποίηση του άλλου (δηλαδή η πραγματοποίηση του ενός μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου). Μαθηματικά μιλώντας:

$$\mathrm{A},\mathrm{B} \text{ ξένα (και διάφορα του κενού το καθένα)} \Rightarrow \mathrm{A}\cap \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow P(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}) = 0$$

Αν τα $\mathrm{A,B}$ ήσαν και ανεξάρτητα τότε:

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = P(\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{B}) = 0 \Rightarrow P(\mathrm{A}) = 0 \quad \text{ή} \quad P(\mathrm{B}) = 0 \Rightarrow \mathrm{A} = \varnothing \text{ ή } \mathrm{B} = \varnothing$$

πράγμα που δεν συμβαίνει, από την υπόθεση.

1.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{A,B}$ είναι δυό γεγονότα ενός πειράματος τύχης. Μερικές φορές, όταν εκτελούμε το εν λόγω πείραμα, η πληροφορία που παίρνουμε από την πραγματοποίηση του γεγονότος A μπορεί να μας δίνει την δυνατότητα να επαναπροσδιορίσουμε την πιθανότητα του γεγονότος B. Η «νέα» αυτή πιθανότητα του γεγονότος B καλείται **δεσμευμένη πιθανότητα του γεγονότος B δοθέντος του γεγονότος A**, συμβολικά:

$$P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$$

Έτσι:

Ορισμός 1.3.1 **Η δεσμευμένη πιθανότητα** (conditional probability) του γεγονότος B **δοθέντος** του γεγονότος A ορίζεται σαν:

$$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

υπό την προυπόθεση βέβαια ότι η ποσότητα του δεύτερου μέλους έχει νόημα, δηλαδή $P(\mathrm{A}) > 0$.

Παρατήρηση 1.3.2 Η δεσμευμένη πιθανότητα συνδέεται στενά και με την ανεξαρτησία. Έτσι εάν:

$$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) \tag{1.3.3}$$

δηλαδή η πληροφορία ότι συνέβη το A δεν αλλάζει την πιθανότητα του B, τότε τα γεγονότα A και B θα πρέπει να είναι ανεξάρτητα. Πράγματι:

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} \Rightarrow P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{A})$$

δηλαδή τα $\mathrm{A,B}$ είναι ανεξάρτητα.

Ισχύει και τι αντίστροφο, δηλαδή εάν τα Α,Β είναι ανεξάρτητα τότε

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$$

(ισοδύναμα $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$). Πράγματι: αφού τα Α,Β είναι ανεξάρτητα

$$P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{A}) \Rightarrow P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = \frac{P(\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{A})} = P(\mathrm{B})$$

Έτσι ένας ισοδύναμος ορισμός της ανεξαρτησίας δυό γεγονότων είναι ο εξής:

Ορισμός 1.3.4 Δυο γεγονότα Α,Β ονομάζονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητα** αν ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}/\mathrm{A})$$

(ισοδύναμα $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}/\mathrm{B})$).

Αν τώρα Α,Β είναι δυο γεγονότα τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.5 (Πολλαπλασιαστικό) Για τα γεγονότα Α,Β ισχύει:

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}/\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A})$$

(ισοδύναμα $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}/\mathrm{B})\cdot P(B)$).

Απόδειξη Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} \Rightarrow P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}/\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A})$$

που είναι το ζητούμενο. ❑

Στις δεσμευμένες πιθανότητες ισχύει επίσης το παρακάτω βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.6 Εάν Α,Β είναι δυό γεγονότα, του ίδιου δειγματοχώρου, και $P(\mathrm{B}) > 0$ τότε:

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{B}/\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})} \qquad (1.3.7)$$

Απόδειξη Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και το πολλαπλασιαστικό θεώρημα έχουμε:

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{P(\mathrm{B}/\mathrm{A})\cdot P(\mathrm{A})}{P(\mathrm{B})}$$

❑

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται και σε περισσότερα από δυό γεγονότα, ως εξής:
Αν $A_1, A_2, ..., A_n$, B είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω, τέτοια ώστε:

(α) $\Omega = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$

(β) $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1,2,\ldots,n$

(γεγονότα που ικανοποιούν τις ιδιότητες (α) και (β) λέμε ότι αποτελούν **διαμέριση** *του δειγματοχώρου Ω*)

τότε:

Θεώρημα 1.3.8 (Ολικής Πιθανότητας) Αν $A_1, A_2, ..., A_n$, B είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω, τα δε $A_1, A_2, ..., A_n$ αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου Ω, τότε:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k) P(A_k) \qquad (1.3.9)$$

Απόδειξη Είναι φανερό ότι: $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)$ και τα γεγονότα $B \cap A_k$, $k = 1, 2, \cdots, n$ είναι ανά δυο ξένα μεταξύ τους (γιατί τα γεγονότα $A_1, A_2, ..., A_n$ αποτελούν διαμέριση), οπότε:

$$P(B) = P(\bigcup_{k=1}^{n} (B \cap A_k)) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k) P(A_k)$$

❑

Θεώρημα 1.3.10 (Bayes) Αν $A_1, A_2, ..., A_n$, B είναι γεγονότα ενός δειγματοχώρου Ω, τα δε $A_1, A_2, ..., A_n$ αποτελούν διαμέριση του δειγματοχώρου Ω, τότε ισχύει η σχέση:

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_j) \cdot P(A_j)}{P(B / A_1) P(A_1) + P(B / A_2) P(A_2) + \ldots + P(B / A_n) P(A_n)}$$

Απόδειξη Εύκολη και αφήνεται σαν άσκηση.

1.4 Ασκήσεις

1.4.1 Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποιός ο δειγματοχώρος του πειράματος τύχης; Να υπολογισθούν οι παρακάτω πιθανότητες:
(α) το άθροισμα να είναι διαιρετό διά 4.
(β) και οι δύο αριθμοί να είναι άρτιοι
(γ) οι αριθμοί να διαφέρουν κατά 4
(δ) να έχουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς.

Λύση

Ο δειγματοχώρος του πειράματος αποτελείται από τα παρακάτω 36 αποτελέσματα:

		2ο ζάρι						
		1	2	3	4	5	6	
1ο ζάρι	1	**1-1**	**1-2**	**1-3**	**1-4**	**1-5**	**1-6**	δειγματοχώρος
	2	**2-1**	**2-2**	**2-3**	**2-4**	**2-5**	**2-6**	
	3	**3-1**	**3-2**	**3-3**	**3-4**	**3-5**	**3-6**	
	4	**4-1**	**4-2**	**4-3**	**4-4**	**4-5**	**4-6**	
	5	**5-1**	**5-2**	**5-3**	**5-4**	**5-5**	**5-6**	
	6	**6-1**	**6-2**	**6-3**	**6-4**	**6-5**	**6-6**	

Αν ορίσουμε τα γεγονότα:

Α = «το άθροισμα να είναι διαιρετό διά 4» ,
Β = «και οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι»
Γ = «οι αριθμοί διαφέρουν κατά 4» και
Δ = «έχουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς»

τότε: $A=\{1\text{-}3,\ 2\text{-}2,\ 3\text{-}1,\ 2\text{-}6,\ 3\text{-}5,\ 4\text{-}4,\ 5\text{-}3,\ 6\text{-}2,\ 6\text{-}6\}$ (τότε #(Α)=9)

όπου #(Α) = αριθμός των στοιχείων του συνόλου Α.

$B=\{2\text{-}2,\ 2\text{-}4,\ 2\text{-}6,\ 4\text{-}2,\ 4\text{-}4,\ 4\text{-}6,\ 6\text{-}2,\ 6\text{-}4,\ 6\text{-}6\}$ (άρα #(Β)=9)

$\Gamma=\{1\text{-}5,\ 2\text{-}6,\ 5\text{-}1,\ 6\text{-}2\}$ (άρα #(Γ)=4)

$\Delta=\{1\text{-}2,\ 2\text{-}1,\ 2\text{-}3,\ 3\text{-}2,\ 3\text{-}4,\ 4\text{-}3,\ 4\text{-}5,\ 5\text{-}4,\ 5\text{-}6,\ 6\text{-}5\}$ (άρα #(Δ)=10)

Άρα: $P(A)=\frac{9}{36}$, $P(B)=\frac{9}{36}$, $P(\Gamma)=\frac{4}{36}$, $P(\Delta)=\frac{10}{36}$.

1.4.2 Ενας αριθμός επιλέγεται τύχαια από τους αριθμούς 1,2,3,4,…,50. Ποιά η πιθανότητα για τον αριθμό αυτό να διαιρείται με το 6 ή με το 8;

Λύση

Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ίσος με $\Omega=\{1,2,3,4,...,50\}$ δηλαδή

$\#(\Omega) = 50$ και εάν ορίσουμε το γεγονός:

A = «ο αριθμός διαιρείται με το 6 ή με το 8» =

$= \{6,8,12,16,18,24,30,32,36,40,42,48\}$ δηλαδή $\#(A)=12$

άρα: $P(A)=\frac{12}{50}$.

1.4.3 Από τους υποψήφιους των ανωτάτων σχολών ενός νομού που εξετάστηκαν στα μαθήματα της 1ης δέσμης, το 25% απέτυχε στα Μαθηματικά, το 15% στη Φυσική και το 10% και στα δυό μαθήματα. Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους υποψήφιους του νομού:

(α) ποιά η πιθανότητα να έχει αποτύχει σ'ένα τουλάχιστον μάθημα από τα δύο;

(β) ποιά η πιθανότητα να έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, αλλά όχι στη Φυσική;

(γ) Αν έχει αποτύχει στη Φυσική, ποιά η πιθανότητα να έχει αποτύχει και στα Μαθηματικά;

(δ) Αν έχει αποτύχει στα Μαθηματικά, ποιά η πιθανότητα να έχει απότύχει και στη Φυσική;

Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα

M = «ο υποψήφιος έχει αποτύχει στα Μαθηματικά»

Φ = « ο υποψήφιος έχει αποτύχει στη Φυσική»

Τότε:

(α) $P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi) - P(M \cap \Phi) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}3$

(β) $P(M \cap \Phi') = P(M) - P(M \cap \Phi) = 0{,}25 - 0{,}10 = 0{,}15$

(γ) $P(M|\Phi) = \frac{P(M \cap \Phi)}{P(\Phi)} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = \frac{2}{3}$

(δ) $P(\Phi|M) = \frac{P(M \cap \Phi)}{P(M)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = \frac{2}{5}$

1.4.4 Σε έναν αγώνα παίρνουν μέρος 3 αυτοκίνητα. Το πρώτο έχει τριπλάσια πιθανότητα να κερδίσει από το δεύτερο και το δεύτερο έχει διπλάσια πιθανότητα να κερδίσει από το τρίτο. Ποιά η πιθανότητα κάθε αυτοκινήτου να κερδίσει τον αγώνα;

Λύση

Εάν χ = πιθανότητα του 3^{ου} αυτοκινήτου να κερδίσει ,

Τότε 2χ = πιθανότητα του 2^{ου} αυτοκινήτου να κερδίσει

Και 3 (2χ) = πιθανότητα του 1^{ου} αυτοκινήτου να κερδίσει και επειδή: $\chi+2\chi+3\ (2\chi) = 1 \Rightarrow 9\chi = 1 \Rightarrow \chi = \frac{1}{9}$.

1.4.5 Εάν $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}5$ και $P(A \cap B)=0{,}3$

(α) να βρεθούν οι πιθανότητες:

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(A')$ (iii) $P(A' \cup B')$

(iv) $P(A' \cap B')$ (v) $P(A' \cap B)$ (vi) $P(A|B)$

(β) είναι τα A, B ξένα; Ανεξάρτητα;

Λύση

(α) Έχουμε:

(i) $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = 0{,}6+0{,}5-0{,}3 = 0{,}8$

(ii) $P(A') = 1-P(A) = 1-0{,}6 = 0{,}4$

(iii) Από την θεωρία συνόλων ξέρουμε ότι:

$(A' \cup B') = (A \cap B)'$
$(A' \cap B') = (A \cup B)'$ **(κανόνες του de Morgan)**

$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1-P(A \cap B) = 1-0{,}3 = 0{,}7$

(iv) $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1-P(A \cup B) = 1-0{,}8 = 0{,}2$

(v) $P(A' \cap B)= P(B)-P(A \cap B)=0{,}5-0{,}3=0{,}2$

(vi) $P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$

(β) εάν τα A, B ξένα $\Rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

αλλά $P(A \cap B) = 0{,}3$ άρα A,B όχι ξένα.

$P(A \cap B) = 0{,}3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = P(A)\,P(B)$ δηλαδή A,B ανεξάρτητα.

1.4.6 Εάν $P(A) = \frac{8}{15}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ και $P(A|B) = \frac{4}{7}$

(α) να βρεθούν οι πιθανότητες:

(i) $P(B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(B|A')$

(iv) $P(A' \cup B')$ (v) $P(A' \cap B')$ (vi) $P(A' \cap B)$

(vii) $P(B|A)$

(β) είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Λύση

(α) Έχουμε:

(i) $$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\,|\,B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{12}$$

(ii) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{8}{15}+\frac{7}{12}-\frac{1}{3}=\frac{47}{60}$$

(iii) $$P(B|\,A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{\frac{3}{12}}{\frac{7}{15}}=\frac{15}{28}$$

(iv) $$P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(v) $$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$$

(vi) $$P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

(vii) $$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}}=\frac{5}{8}$$

(β) Αφού έχουμε:

$$P(B\,|\,A)=\frac{5}{8}\neq P(B)$$ άρα τα A, B **δεν** είναι ανεξάρτητα.

1.4.7 *(Ανεξαρτησία)* Για την ασφαλή πτήση ενός αεροπλάνου με δύο κινητήρες, πρέπει να δουλεύει ο ένας τουλάχιστον κινητήρας. Οι κινητήρες λειτουργούν <u>ανεξάρτητα</u> ο ένας από τον άλλο και έστω ότι η πιθανότητα να πάθει κάποιος βλάβη είναι 0,003. Να βρεθεί η πιθανότητα μιας ασφαλούς πτήσης.

Λύση

Εάν ορίσουμε τα γεγονότα:

A_1 = «δουλεύει ο 1ος κινητήρας» και A_2 = «δουλεύει ο 2ος κινητήρας»,

τότε δίνεται ότι : $P(A_1)=0{,}997=P(A_2)$, άρα

P(ασφαλούς πτήσης) = P(δουλεύει ένας <u>τουλάχιστον</u> κινητήρας)=

$$=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)=$$

(λόγω ανεξαρτησίας)

$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=$$

$= 0,997 + 0,997 - 0,997 \cdot 0,997 = 0,999991$ δηλαδή 99,99%.

1.4.8 Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στο βάρος και την υπέρταση 200 ατόμων:

	Υπέρβαρα	**Μη Υπέρβαρα**	**Σύνολο**
Υπερτασικά	20	20	40
Μη Υπερτασικά	30	130	160
Σύνολο	50	150	200

Ένα άτομο επιλέγεται τυχαία, να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες:

(α) το άτομο είναι υπέρβαρο.

(β) το άτομο είναι υπερτασικό.

(γ) δεδομένου ότι το άτομο είναι υπερτασικό, ποιά η πιθανότητα να μην είναι υπέρβαρο;

(δ) το άτομο είναι υπέρβαρο ή υπερτασικό.

(ε) είναι τα γεγονότα «το άτομο είναι υπερτασικό» και το «το άτομο είναι υπέρβαρο» ανεξάρτητα;

Λύση

Εάν ορίσουμε τα γεγονότα:

Α = «το άτομο είναι υπέρβαρο», Β = «το άτομο είναι υπερτασικό» ,

τότε με την βοήθεια του πίνακα των δεδομένων :

	Υπέρβαρα (Α)	**Μη Υπέρβαρα (Α′)**	**Σύνολο**
Υπερτασικά (Β)	20	20	40
Μη Υπερτασικά (Β′)	30	130	160
Σύνολο	50	150	200

έχουμε:

(α) $P(A) = \dfrac{50}{200} = 0,25$

(β) $P(B) = \dfrac{40}{200} = 0,2$

(γ) $P(A'|B) = \dfrac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{20}{200}}{\frac{40}{200}} = \dfrac{20}{40} = 0,5$

(δ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{50}{200} + \dfrac{40}{200} - \dfrac{20}{200} = \dfrac{70}{200}$

(ε) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{20}{200}}{\frac{40}{200}}=\dfrac{20}{40}=0{,}5\neq 0{,}25=P(A)$

άρα τα γεγονότα **δεν** είναι ανεξάρτητα.

1.4.9 *(Ανεξαρτησία)* Έστω ότι δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

	A	A'	**Σύνολο**
B	χ	ψ	20
B'	ζ	ω	80
Σύνολο	40	60	100

και έστω ότι τα γεγονότα A,B είναι ανεξάρτητα. Να βρεθούν τα χ,ψ,ζ,ω.

Λύση

Αφού τα γεγονότα A,B είναι ανεξάρτητα, έχουμε:

$$P(A\cap B)=\frac{\chi}{100}=P(A)\cdot P(B)=\frac{20}{100}\cdot\frac{40}{100}\Rightarrow\frac{\chi}{100}=\frac{8}{100}\Rightarrow\chi=8$$

Ακόμα: $\chi+\zeta=40\Rightarrow\zeta=32$

$\chi+\psi=20\Rightarrow\psi=12$

$\zeta+\omega=80\Rightarrow\omega=48$.

1.4.10 *(Ανεξαρτησία)* Αποδείξτε ότι: εάν τα γεγονότα A,B είναι ανεξάρτητα τότε είναι ανεξάρτητα και τα A' και B'.

Λύση

$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=$ (λόγω ανεξαρτησίας)

$=1-P(A)-P(B)+P(A)\,P(B)=P(A')-P(B)+P(A)\,P(B)=$

$=P(A')-P(B)\,\{1-P(A)\}=P(A')-P(B)\,P(A')=$

$=P(A')-\{1-P(B)\}=$

$=P(A')\,P(B')$

δηλαδή τα A', B' είναι ανεξάρτητα.

1.4.11 *(Ανεξαρτησία)* Αν τα γεγονότα Α,Β,Γ είναι ανεξάρτητα να εξεταστεί αν είναι επίσης ανεξάρτητα τα γεγονότα:

(i) $A \cup B, \Gamma$ (ii) $A, B \cap \Gamma$ (iii) $A \cap B,\ A \cap \Gamma$

Λύση

(i)
$$
\begin{aligned}
P((A \cup B) \cap \Gamma) &= P((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) = \\
&= P(A \cap \Gamma)+P(B \cap \Gamma)-P(A \cap B \cap \Gamma) = \\
&= P(A)P(\Gamma)+P(B)P(\Gamma)- P(A)P(B)P(\Gamma) = \\
&= P(\Gamma)\{ P(A)+P(B)- P(A)P(B)\} = P(\Gamma)\, P(A \cup B)
\end{aligned}
$$

δηλαδή τα $A \cup B, \Gamma$ είναι ανεξάρτητα

(ii) $P(A \cap (B \cap \Gamma))= P(A)P(B)P(\Gamma)= P(A)\, P(B \cap \Gamma)$ δηλαδή τα $A, B \cap \Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

(iii) για νάναι τα γεγονότα $A \cap B,\ A \cap \Gamma$ ανεξάρτητα θα πρέπει:

$$P((A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)) = P(A \cap B)\, P(A \cap \Gamma)$$

Αλλά:

$$P((A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)) = P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)\, P(B)\, P(\Gamma)$$

και

$$P(A \cap B)P(A \cap \Gamma) = P(A)\, P(B)\, P(A)\, P(\Gamma) = P(A)^2\, P(B)\, P(\Gamma)$$

δηλαδή θα πρέπει: $P(A)^2P(B)P(\Gamma) = P(A)\, P(B)\, P(\Gamma)$ και υποθέτοντας ότι $P(B)>0$, $P(\Gamma)>0$ θα πρέπει:

$$P(A)^2 = P(A) \Rightarrow P(A)=0 \ \text{ ή } \ P(A)=1$$

1.4.12. *(Πολλαπλασιαστικό θεώρημα)* Ένα δοχείο περιέχει 5 κόκκινες μπάλες και 3 πράσινες. Παίρνουμε δυό μπάλες από το δοχείο χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά η πιθανότητα και οι δυό μπάλες νάναι κόκκινες;

Λύση

Εάν ορίσουμε τα γεγονότα:

A_1 =«η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη» , A_2 =«η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»,

τότε:

P(και οι δυό μπάλες είναι κόκκινες) =

$$= P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{14}.$$

1.4.13. *(Θεώρημα ολικής πιθανότητας)* Σ’ ένα μεταλλείο το 5% των εργατών πάσχουν από ρευματισμούς. Το 70% των εργατών που πάσχουν από ρευματισμούς δεν πηγαίνουν στην δουλειά μια μέρα και το 90% αυτών που δεν πάσχουν από ρευματισμούς πηγαίνουν στην δουλειά.

(α) Ποιά η πιθανότητα να πάει ένας εργάτης στην δουλειά μια μέρα;

(β) Αν ένας εργάτης δεν πήγε στην δουλειά μια μέρα, ποιά η πιθανότητα να είχε ρευματισμούς;

(γ) Ποιά η πιθανότητα να πάει ένας εργάτης στην δουλειά μια μέρα ή να έχει ρευματισμούς;

(δ) είναι τα γεγονότα «ένας εργάτης δεν πάει στην δουλειά μια μέρα» και το «ένας εργάτης πάσχει από ρευματισμούς» ανεξάρτητα;

Λύση

Ορίζουμε τα γεγονότα:

Π=«ο εργάτης πάσχει από ρευματισμούς»,

Α=«ο εργάτης δεν πάει στην δουλειά μια μέρα»

Τότε: $P(\Pi)=0{,}05$, $P(\Pi')=0{,}95$ και $P(A|\Pi)=0{,}7$, $P(A'|\Pi)=0{,}3$ και $P(A'|\Pi')=0{,}9$

(α) $P(A') = P(A' \cap \Pi)+P(A' \cap \Pi') = P(A'|\Pi)\ P(\Pi)+P(A'|\Pi')\ P(\Pi') =$

$= 0{,}3\ \ 0{,}05+ 0{,}9\ \ 0{,}95 = 0{,}87$

(β) $P(\Pi|A) = \dfrac{P(A \cap \Pi)}{P(A)} = \dfrac{P(A\,|\,\Pi)\cdot P(\Pi)}{P(A)} = \dfrac{0{,}7\cdot 0{,}05}{0{,}13} = 0{,}27$

(γ) $P(A' \cup \Pi) = P(A')+P(\Pi)- P(A' \cap \Pi) = P(A')+P(\Pi)- P(A'|\Pi)\ P(\Pi) =$

$= 0{,}87+0{,}05- 0{,}3\cdot 0{,}05 = 0{,}905$

(δ) $P(A|\Pi) = 0{,}7 \neq 0{,}13 = P(A) = 1-P(A')$ άρα τα γεγονότα **δεν** είναι ανεξάρτητα.

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα:

	Α	Α'	**Σύνολο**
Π	0,035	0,015	0,05
Π'	0,095	0,855	0,95
Σύνολο	0,13	0,87	1

πίνακας που σχηματίζεται με την βοήθεια των δεδομένων (πως;).

(Υπόδειξη: δείτε την άσκηση 1.4.8).