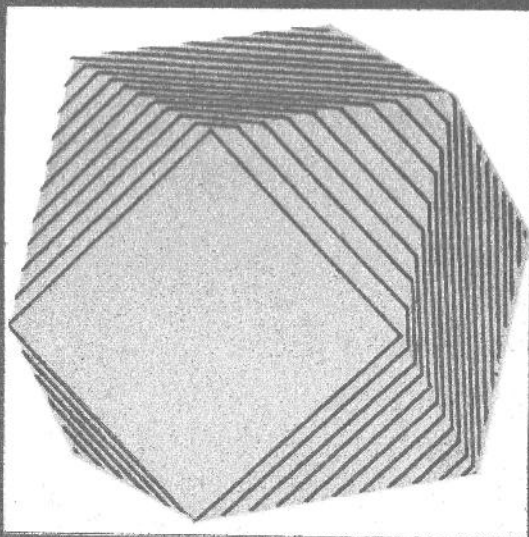


ISSN 0135-6992

УКРАИНСКИЙ геометрический СБОРНИК

31 | 88



«ВИЦА ШКОЛА»

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
междуведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 31

Харьков
Издательство при Харьковском
государственном университете
издательского объединения
«Вища школа»

1988

В сборнике помещены статьи, почти все относящиеся к геометрии «в целом». Изучаются возможность погружения аналитической метрики с заданной гауссовой кривизной или кручением в евклидово или псевдоевклидово пространство размерности больше 3; связь между геометрическими характеристиками компактной поверхности в сферическом пространстве и ее топологическим строением; условия вырождения линейчатой поверхности в цилиндр или конус; минимальные двумерные поверхности в псевдоевклидовом пространстве $E^{4,1}$; строение фигур, имеющих недискретное семейство гиперплоскостей кривой симметрии; алгебраические поверхности, инвариантные относительно групп кривой симметрии; погружение многогранной метрики отрицательной кривизны в E^3 ; распределения Λ_2 в E^4 , оснащенные полем орт-векторов, лежащих в нормальных плоскостях; свойства триангуляций тора и их графов; геодезические линии космологической модели Гёделя; однородные Лоренцовы пространства и другие вопросы геометрии.

Для научных работников математических специальностей.

Редакционная коллегия: А. В. Погорелов (отв. ред.), Я. П. Б л а н к (зам. отв. ред.), А. С. Лейбин (отв. секр.), Ю. А. Аминов, А. А. Борисенко, В. Ф. Игнатенко, Н. И. Кованцов, Е. А. Косачевская, А. Д. Милка, В. И. Михайловский, Н. С. Синюков, М. А. Улановский

Ответственный за выпуск А. С. Лейбин

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, кафедра геометрии, тел. 45-74-92

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией Е. П. Иващенко

О ПОВЕРХНОСТЯХ В E^4 СО ЗНАКОПОСТОЯННЫМ
ГАУССОВЫМ КРУЧЕНИЕМ

Гауссовым кручением κ_Γ двумерной поверхности F^2 в E^4 называется \pm удвоенное произведение полуосей a и b эллипса нормальной кривизны, т. е. $\kappa_\Gamma = \pm 2ab$. Знак выбирается следующим образом. Положительные ориентации пространства E^4 и касательной плоскости T_x поверхности в точке x индуцируют положительную ориентацию нормальной плоскости N_x . Если τ_1, τ_2 — положительно ориентированный базис T_x , то базис n_1, n_2 задает положительную ориентацию N_x , если базис τ_1, τ_2, n_1, n_2 задает положительную ориентацию E^4 . Если при вращении касательного вектора $\tau \in T_x$ в положительном направлении соответствующая точка — конец вектора нормальной кривизны $k_n(\tau)$ — обегает эллипс нормальной кривизны в положительном направлении согласно ориентации в N_x , то $\kappa_\Gamma = 2ab$; если эллипс обегается в отрицательном направлении, то $\kappa_\Gamma = -2ab$. Эта величина является единственным инвариантом нормальной связности поверхности, аналогичным кривизне касательной связности, т. е. гауссовой кривизне. Геометрический смысл ее следующий. Возьмем на поверхности F^2 замкнутый контур, ограничивающий односвязную область D . Вдоль него перенесем параллельно в нормальной связности единичный нормальный вектор n . Обозначим через $\Delta\varphi$ угол между первоначальным положением вектора n и положением, полученным в результате параллельного переноса. Тогда $\Delta\varphi$ равен интегралу от κ_Γ по области D .

Интеграл от κ_Γ по замкнутой поверхности F^2 тесно связан с вопросом существования на поверхности регулярного нормального поля [1, 2]. Именно на поверхности F^2 нормальное поле существует в том и только том случае, когда

$$\int_{F^2} \kappa_\Gamma dS = 0. \quad (1)$$

В работе Э. Г. Позняка [3] доказана общая теорема о регулярном изометрическом погружении в E^4 двумерной метрики, заданной в области, гомеоморфной кругу. Рассмотрим вопрос о погружении двумерной метрики в E^4 в виде поверхности с заданным гауссовым кручением. Доказана.

Теорема 1. Любая аналитическая двумерная метрика имеет локальное изометрическое погружение в E^4 в виде аналитической поверхности, гауссово кручение которой в каждой точке является заданной аналитической функцией.

В работе Э. Р. Розендорна [4] построены в E^4 замкнутые ориентируемые регулярные поверхности с отрицательной гауссовой кривизной. В то же время замкнутые двумерные римановы многообразия не всегда погружаются с заданным гауссовым кручением. Будем говорить,

что гауссово кручение знакопостоянно на поверхности, если во всех точках $\kappa_r \neq 0$. Имеет место

Теорема 2. *Замкнутое ориентируемое двумерное риманово многообразие класса S^3 со знакопостоянной гауссовой кривизной не допускает регулярного изометрического погружения со знакопостоянным гауссовым кручением.*

При доказательстве этой теоремы используются формулы, в которые гауссова кривизна и гауссово кручение входят равноправно. Это наводит на мысль, что условие знакопостоянства гауссового кручения поверхностей в E^4 в некоторых вопросах аналогично условию знакопостоянства гауссовой кривизны K поверхности в E^3 . При определенных условиях отделенность гауссова кручения от нуля может приводить к невозможности изометрических погружений «в целом». Обозначим через H вектор средней кривизны.

Теорема 3. *Двумерная полная метрика класса S^3 неположительной гауссовой кривизны не погружается в E^4 в виде поверхности класса S^3 с постоянным, отличным от нуля гауссовым кручением κ_r и с постоянной эйлеровой разностью $H^2 - K$.*

Условие отличия κ_r от нуля здесь существенно, так как у тора Клиффорда $\kappa_r = 0$, $H^2 = \text{const}$, $K = 0$. Отметим, что постоянство $\kappa_r = \pm 2ab$ и $H^2 - K = a^2 + b^2$ означает, что длины осей эллипса нормальной кривизны постоянны. Такие поверхности в E^4 существуют.

Теорема 4. *Поверхности в E^4 , у которых эллипс нормальной кривизны имеет постоянные длины осей, локально существуют с произволом в задании — 4 аналитических функций одного аргумента.*

В заключении указывается простой пример поверхности в E^4 с постоянным гауссовым кручением, равным κ_0 : $x_3 = f(x_1)\cos x_2$, $x_4 = f(x_1)\sin x_2$, где функция $f(x_1)$ определяется из уравнения

$$\frac{df}{dx_1} = \pm \sqrt{\frac{-1}{(2\kappa_0 x_1 + c)(1 + f^2)}} - 1.$$

1. Локальное погружение метрики с заданным кручением. Метрику поверхности запишем в полугеодезической системе координат $ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi)d\varphi^2$. Для доказательства теоремы 1 используем систему уравнений Кодацци — Риччи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{12}^\sigma}{\partial r} &= \frac{\partial L_{11}^\sigma}{\partial \varphi} + F_1^\sigma(G, G_r, L_{ij}^\alpha, \mu_{\tau\sigma|t}); \\ \frac{\partial L_{22}^\sigma}{\partial r} &= \frac{dL_{12}^\sigma}{d\varphi} + F_2^\sigma(G, G_r, G_\varphi, L_{ij}^\alpha, \mu_{\tau\sigma|t}); \\ \frac{\partial \mu_{21/2}}{\partial r} &= \frac{\partial \mu_{21/1}}{\partial \varphi} - \kappa_r \sqrt{G}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma = 1, 2$. Система состоит из пяти уравнений. Левые части являются производными по r от функций $L_{12}^1, L_{12}^2, L_{22}^1, L_{22}^2, \mu_{21/2}$. Правые же части, кроме этих функций, содержат и функции $L_{11}^1, L_{11}^2, \mu_{21/1}$ и их производные по φ . В правую часть входят и заданные функции —

коэффициенты метрики, их производные и κ_r . Выразим теперь L_{11}^1 и L_{11}^2 через L_{12}^1 , L_{12}^2 , L_{22}^1 , L_{22}^2 . Для этого используем уравнение Гаусса и условие равенства гауссова кручения заданной функции:

$$L_{11}^1 L_{22}^1 - (L_{12}^1)^2 + L_{11}^2 L_{22}^2 - (L_{12}^2)^2 = KG, \quad (3)$$

$$L_{11}^1 L_{12}^2 - L_{11}^2 L_{12}^1 + \frac{1}{G} (L_{12}^1 L_{22}^2 - L_{12}^2 L_{22}^1) = \kappa_r \sqrt{G}. \quad (4)$$

При условии $L_{22}^1 L_{12}^1 + L_{12}^2 L_{22}^2 \neq 0$, которое можно обеспечить выбором начальных условий в окрестности некоторой точки, из этих уравнений получим выражения L_{11}^1 и L_{11}^2 . Подставив эти выражения в правые части уравнений системы (2), получим систему уравнений, удовлетворяющую условиям теоремы Коши—Ковалевской. В этой системе правые части содержат произвольную функцию $\mu_{21/1}$. Возьмем в качестве $\mu_{21/1}$ некоторую аналитическую функцию и, кроме того, зададим начальные значения $L_{12}^\sigma(0, \varphi)$, $L_{22}^\sigma(0, \varphi)$, $\mu_{21/2}(0, \varphi)$, $\sigma = 1, 2$. По теореме Коши—Ковалевской однозначно определяется в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ решение системы (2). Так как система уравнений Гаусса—Кодацци—Риччи выполнена, то по теореме Бонне в E^4 определена поверхность с заданной метрикой, и с полученными в качестве решения коэффициентами вторых квадратичных форм и форм кручения.

2. О замкнутых поверхностях, у которых K и κ_r знакопостоянны.

Докажем теорему 2. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть поверхность гомеоморфна сфере. В этом случае можем считать, что $K > 0$. По формуле Картана $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2$, см [5]. Так как $\alpha^2 + \beta^2 = H^2 > 0$, где H — вектор средней кривизны, то в каждой точке поверхности существует ненулевой нормальный вектор. Но если на поверхности $F^2 \subset E^4$ существует ненулевое нормальное векторное поле, то интеграл от κ_r по F^2 равен нулю [2]. Поэтому κ_r не может быть знакопостоянно на F^2 .

Рассмотрим поверхность, гомеоморфную тору. Зададим регулярное единичное векторное поле τ , касающееся тора. Пусть Q — конец вектора нормальной кривизны $k_n(\tau)$, взятого для направления τ . Точка Q лежит на эллипсе нормальной кривизны. Допустим, что в каждой точке поверхности гауссово кручение отлично от нуля. Тогда эллипс нормальной кривизны невырожден. Пусть O — центр этого эллипса. Определим в каждой точке поверхности ненулевой нормальный вектор OQ . Тогда интеграл от гауссова кручения по F^2 должен быть равен нулю, что противоречит предположению $\kappa_r \neq 0$. Таким образом, в случае тора нет необходимости налагать условие на метрику. На торе гауссово кручение либо тождественно равно нулю, либо меняет знак.

Рассмотрим теперь поверхности с эйлеровой характеристикой, меньшей нуля. В этом случае условие постоянства знака гауссовой кривизны означает, что $K < 0$.

Используем грассманово отображение поверхности F^2 в многообразии $G_{2,4}$. Хорошо известно представление этого многообразия в виде

прямого произведения двух двумерных сфер $G_{2,4} = S_1^2 \times S_2^2$. Это представление строится следующим образом. Пусть p^{ij} — плюккеровы координаты точки $G_{2,4}$. Определим два трехмерных единичных вектора $\rho = \{\rho^i\}$, $\sigma = \{\sigma^i\}$ со следующими компонентами $\rho^1 = p^{12} + p^{34}$, $\rho^2 = p^{13} + p^{42}$, $\rho^3 = p^{14} + p^{23}$, $\sigma^1 = p^{12} - p^{34}$, $\sigma^2 = p^{13} - p^{42}$, $\sigma^3 = p^{14} - p^{23}$. В силу уравнений, которым должны удовлетворять плюккеровы координаты точки грассманова многообразия $\sum_{i < j} (p^{ij})^2 = 1$ и $p^{1[2}p^{34]} = 0$,

получим $\sum_{i=1}^3 (\rho^i)^2 = 1$, $\sum_{i=1}^3 (\sigma^i)^2 = 1$. Пусть конец вектора ρ пробегает сферу S_1^2 , а вектора σ — сферу S_2^2 . Таким образом, каждой точке из $G_{2,4}$ однозначно соответствует точка на каждой сфере S_i^2 и наоборот.

Грассманово отображение $\psi: F^2 \rightarrow G_{2,4}$ индуцирует два отображения $\psi_i: F^2 \rightarrow S_i^2$. Рассмотрим якобиан этих отображений. Несмотря на то что представление $G_{2,4}$ в виде произведения сфер неоднозначно, якобианы отображений ψ_i выражаются через геометрические величины поверхности F^2 .

Рассмотрим, например, отображение ψ_1 и соответствующий ему якобиан $\pm \sqrt{\rho_{u_1}^2 \rho_{u_2}^2 - (\rho_{u_1} \rho_{u_2})^2}$.

Векторы ρ и σ построены с помощью бивектора p и дополнительного к нему бивектора q : $p = \{p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}\}$, $q = \{p^{34}, p^{42}, p^{23}, p^{14}, p^{31}, p^{12}\}$. Складывая компоненты бивекторов p и q , получим $p + q = \{\rho^1, \rho^2, \rho^3, \rho^3, -\rho^2, \rho^1\}$. Первые три компоненты вектора $p + q$ в точности совпадают с компонентами вектора ρ , а последние построены с их помощью. Введем вектор $\bar{\rho} = \{\rho^3, -\rho^2, \rho^1\}$. Тогда можно представить $p + q$ так: $\{\rho, \bar{\rho}\}$. Заметим, что условие $p^{1[2}p^{34]} = 0$ можно записать в виде $(p, q) = 0$, где скобки означают скалярное произведение в шестимерном пространстве. Для грассманова образа F^2 поверхности $F^2: p = p(u_1, u_2)$ и $q = q(u_1, u_2)$, причем векторное поле q — поле нормалей к F^2 , т. е. $(p, u_i q) = 0$. Индексами снизу будем обозначать производные по u_i . Имеем $p_i + q_i = \{\rho_i, \bar{\rho}_i\}$. Заметим, что $(\rho_i, \rho_j) = (\bar{\rho}_i, \bar{\rho}_j)$. Поэтому $2(\rho_i, \rho_j) = (p_i + q_i, p_j + q_j) = (p_i, q_j) + (q_i, q_j) + (q_i, p_j) + (p_i, q_j)$. Набор компонент у вектора q тот же что и p . Поэтому $(q_i, q_j) = (p_i, p_j)$. Кроме того, заметим, что из уравнения $(p, q) = 0$ вытекают равенства $(q_i, p_j) = (p_i, q_j) = -(p_i, q_j)$. Следовательно, $(\rho_i, \rho_j) = (p_i, p_j) + (p_i, q_j)$. С помощью этой формулы находим $\rho_1^2 \rho_2^2 - (\rho_1 \rho_2)^2 = I_1 + I_2 + I_3$, где $I_1 = p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2$; $I_2 = p_1^2 (p_2 q_2) - (p_1 p_2) [(p_2 q_1) + (p_1 q_2)] + p_2^2 (p_1 q_1)$; $I_3 = (p_1 q_1) (p_2 q_2) - (p_1 q_2) (p_2 q_1)$.

В работах [6, 7] найдено выражение $(dp)^2$ и $(d^2 p, q)$ через инвариантные геометрические характеристики поверхности. Пусть координаты u_1, u_2 на поверхности согласованы с эллипсом нормальной кривизны таким образом, что конец вектора нормальной кривизны для направления u_1 линии попадает в вершину эллипса нормальной кривизны, и пусть нормали к F^2 параллельны осям эллипса нормальной кривизны. Кроме того, будем считать, что в фиксированной точке P коэф-

коэффициенты линейного элемента $g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = 0$. Тогда в этой точке $(dp)^2 = [(\alpha + a)^2 + \beta^2 + b^2] du_1^2 + 4\beta b du_1 du_2 + [(\alpha - a)^2 + \beta^2 + b^2] du_2^2$; $(d^2pq) = -2[-b(\alpha + a)du_1^2 - 2a\beta du_1 du_2 + b(\alpha - a)du_2^2]$. С помощью этих выражений находим $I_1 = K^2 + 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2)$, $I_2 = -2ab[\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2] = -2abK$, $I_3 = 4[a^2 b^2 - b^2 \alpha^2 - a^2 \beta^2]$. Следовательно, $\rho_1^2 \rho_2^2 - (\rho_1 \rho_2)^2 = (K - 2ab)^2$. Разность векторов $p - q = \{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, -\sigma^3, \sigma^2, -\sigma^1\} = \{\sigma, -\bar{\sigma}\}$. Следовательно, $(\sigma_i \sigma_j) = (p_i p_j) - (q_i q_j)$. В этом случае квадрат якобиана отображения F^2 на сферу S_2^2 равен $\sigma_1^2 \sigma_2^2 - (\sigma_1 \sigma_2)^2 = I_1 - I_2 + I_3 = (K + 2ab)^2$.

Обозначим через ΔS элемент площади области D на поверхности F^2 , а через ΔS_i — элемент площади образа D на сфере S_i^2 при отображении φ_i . Итак, доказана

Лемма. Предел отношения площади образа отображения к площади прообраза при стягивании области D к точке P равен:

$$\lim \frac{\Delta S_i}{\Delta S} = |K \pm \kappa_r|,$$

причем знак $+$ соответствует одной сфере S_i^2 , а знак $-$ другой.

Заметим, что сходные соотношения приведены в тезисах [8].

Допустим, на поверхности F^2 , гауссова кривизна которой $K < 0$, гауссово кручение $\kappa_r > 0$. Тогда, в силу леммы, замкнутая поверхность F^2 имеет всюду локально гомеоморфное отображение на сферу S_1^2 , что невозможно. Аналогичные рассуждения проводятся и в случае $\kappa_r < 0$.

3. Непогружаемость полной метрики неположительной кривизны в виде поверхности с постоянными $\kappa_r \neq 0$ и $H^2 - K$.

Докажем теорему 3. Допустим, что в E^4 существует поверхность с заданной полной метрикой, у которой $K \leq 0$, $\kappa_r = \kappa_0 \neq 0$ и $H^2 - K = \text{const}$. Можем считать, что поверхность гомеоморфна плоскости. Если это не так, то возьмем универсальную накрывающую, которая в силу односвязности будет гомеоморфна либо плоскости, либо сфере. Но случай сферы исключается, так как $K \leq 0$. Введем на поверхности полярную полугеодезическую систему координат, в которой линейный элемент примет вид $ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi) d\varphi^2$. В силу условия $K \leq 0$ эта система координат будет регулярна во всех точках, за исключением полюса.

Лемма. Если эллипс нормальной кривизны ни в одной точке не вырожден, то на погруженной области D существует регулярное нормальное единичное векторное поле.

Покроем поверхность регулярным семейством линий. Пусть k_1 — вектор нормальной кривизны поверхности в направлении линий из этого семейства в точке M . Пусть P — конец этого вектора, отложенного от точки M . Точка P расположена на эллипсе нормальной кривизны. Так как этот эллипс по условию леммы невырожденный, то вектор ξ , идущий из центра эллипса в точку P , всегда отличен от нуля.

Таким образом, в каждой точке $M \in D$ существует нормальный вектор, отличный от нуля, изменяющийся регулярным образом при переходе от точки к точке.

Пусть τ_1 и τ_2 — единичные векторы, касательные к r - и φ -линиям и задающие положительную ориентацию поверхности. Обозначим через n_1 регулярное единичное векторное поле, коллинеарное ξ , а через n_2 — единичное нормальное векторное поле, ортогональное к n_1 и такое, что базис τ_1, τ_2, n_1 и n_2 задает положительную ориентацию в E^4 .

Пусть $L_{ij}^\sigma du^i du^j$, $\sigma = 1, 2$ — вторые квадратичные формы по отношению к нормальям n_σ , $\mu_{12/i} = (n_1 n_{2u^i})$ — коэффициенты кручения. Положим $r = u^1$, $\varphi = u^2$ и запишем уравнения Кодацци:

$$\frac{\partial L_{11}^1}{\partial \varphi} - \frac{\partial L_{12}^1}{\partial r} - \frac{G_r}{2G} L_{12}^1 = \mu_{21/2} L_{11}^2 - \mu_{21/1} L_{12}^2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial L_{22}^1}{\partial r} - \frac{\partial L_{12}^1}{\partial \varphi} - \frac{G_r}{2} L_{11}^1 - \frac{G_r}{2G} L_{22}^1 + \frac{G_\varphi}{2G} L_{12}^1 = -\mu_{21/2} L_{21}^2 + \mu_{21/1} L_{22}^2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial L_{11}^2}{\partial \varphi} - \frac{\partial L_{12}^2}{\partial r} - \frac{G_r}{2G} L_{12}^2 = \mu_{12/2} L_{11}^1 - \mu_{12/1} L_{12}^1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial L_{22}^2}{\partial r} - \frac{\partial L_{12}^2}{\partial \varphi} - \frac{G_r}{2} L_{11}^2 - \frac{G_r}{2G} L_{22}^2 + \frac{G_\varphi}{2G} L_{12}^2 = -\mu_{12/2} L_{12}^1 + \mu_{12/1} L_{22}^1. \quad (8)$$

Умножим уравнение (5) на $-L_{12}^1$, (6) — на L_{22}^1/G , (7) — на $-L_{12}^2$, (8) — на L_{22}^2/G . Сложим полученные уравнения и используем (4). Тогда в правой части будет $\mu_{21/2} \kappa_0 \sqrt{G}$. По условию $\kappa_0 \neq 0$. Разделим правую и левую части уравнения на $\kappa_0 \sqrt{G}$. Элементарными преобразованиями получим

$$\mu_{21/2} = \frac{1}{\kappa_0} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \psi G_r - T \right\}, \quad (9)$$

где

$$\Phi = \frac{(L_{12}^1)^2 + (L_{12}^2)^2}{2\sqrt{G}} + \frac{(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2}{2G^{3/2}} \geq 0;$$

$$\psi = (\Phi - K\sqrt{G})/2G \geq 0;$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{G}} L_{12}^1 \frac{\partial L_{11}^1}{\partial \varphi} + \frac{L_{12}^2}{\sqrt{G}} \frac{\partial L_{11}^2}{\partial \varphi} + \frac{L_{22}^1}{G^{3/2}} \frac{\partial L_{12}^1}{\partial \varphi} + \frac{L_{22}^2}{G^{3/2}} \frac{\partial L_{12}^2}{\partial \varphi} - \frac{G_\varphi}{2G^{5/2}} \times \\ \times (L_{12}^1 L_{22}^1 + L_{12}^2 L_{22}^2).$$

Используем уравнение Риччи $\frac{\partial \mu_{21/1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mu_{21/2}}{\partial r} = \kappa_0 \sqrt{G}$. Пусть $D(t)$ — геодезический круг на поверхности, ограниченный окружностью $r = t$; обозначим ее через $\Gamma(t)$. Начало координат является особой точкой координатной системы и в ней величины $\mu_{21/i}$ не определены. Поэтому сначала проинтегрируем по кольцу, в котором внутренняя окружность имеет радиус ε , а внешняя t , и затем перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заметим, что

$$\int_{\Gamma(\varepsilon)} \mu_{21/2} d\varphi = \int_{\Gamma(\varepsilon)} (n_2 n_{1\varphi}) d\varphi = \int_{\Gamma(\varepsilon)} (n_2 n_{1s}) ds \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как $|n_{1s}| < \text{const}$. Получим

$$- \int_{\Gamma(t)} \mu_{21/2} d\varphi = \int_{D(t)} \kappa_0 dS = \kappa_0 S(D(t)), \quad (10)$$

где $S(D(t))$ — площадь области $D(t)$.

Преобразуем выражение $\mu_{21/2}$. Для этого используем уравнения (3) и (4). Введем обозначения: $A = L_{11}^1 - L_{22}^1/G$, $B = L_{11}^2 - L_{22}^2/G$. Рассмотрим следующий нормальный вектор: $An_1 + Bn_2 = (L_{11}^1 n_1 + L_{11}^2 n_2) - (L_{22}^1 n_1 + L_{22}^2 n_2)/G = k_1 - k_2$, где k_1 — вектор нормальной кривизны r -линии; k_2 — вектор нормальной кривизны φ -линии. Если начало векторов k_i расположить в точке поверхности M , то концы их будут располагаться в диаметрально противоположных точках эллипса нормальной кривизны. Это следует из ортогональности r -линий к φ -линиям. В силу невырожденности эллипса нормальной кривизны $k_1 - k_2 \neq 0$. Поэтому $A^2 + B^2 \neq 0$. Пусть, например, $A \neq 0$. Используя (4), находим $L_{12}^2 = (\kappa_0 \sqrt{G} + L_{12}^1 B)/A$ (11). Подставим это выражение в уравнение (3). Обозначим $D = (L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2)/G$. Тогда (4) можем представить как квадратное уравнение для L_{12}^1 : $(L_{12}^1)^2 (A^2 + B^2) + 2\kappa_0 \sqrt{G} B L_{12}^1 + [\kappa_0^2 G + KGA^2 - DA^2 G] = 0$. Следовательно,

$$L_{12}^1 = \frac{-\kappa_0 \sqrt{G} B \pm \sqrt{\kappa_0^2 G B^2 - (A^2 + B^2) (\kappa_0^2 G + KGA^2 - DA^2 G)}}{A^2 + B^2}. \quad (12)$$

Нетрудно найти, что подкоренное выражение равно $A^2 G \Delta$, где $\Delta = (D - K)(A^2 + B^2) - \kappa_0^2$. Используя (11) и (12), получаем следующие выражения: $L_{12}^1 = (-\kappa_0 B \pm A \sqrt{\Delta}) \sqrt{G}/(A^2 + B^2)$, $L_{12}^2 = (\kappa_0 A \pm B \sqrt{\Delta}) \times \sqrt{G}/(A^2 + B^2)$.

Рассмотрим выражение T . Заменим в нем L_{11}^1 на $A + L_{22}^1/G$, а L_{11}^2 — на $B + L_{22}^2/G$. Тогда получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{L_{12}^1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(A + \frac{L_{22}^1}{G} \right) + \frac{L_{12}^2}{G} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{L_{12}^1}{\sqrt{G}} \right) + \frac{L_{12}^1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(B + \frac{L_{22}^2}{G} \right) + \frac{L_{22}^2}{G} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{L_{12}^2}{\sqrt{G}} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{L_{12}^1 L_{22}^1 + L_{12}^2 L_{22}^2}{G^{3/2}} + \frac{-\kappa_0 B \pm A \sqrt{\Delta}}{A^2 + B^2} \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{\kappa_0 A \pm B \sqrt{\Delta}}{A^2 + B^2} \frac{\partial B}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{L_{12}^1 L_{22}^1 + L_{12}^2 L_{22}^2}{G^{3/2}} + \kappa_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \arctg \frac{B}{A} \pm \sqrt{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \sqrt{A^2 + B^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение Δ . В него входит разность $D - K$. Покажем, что она выражается через эйлерову разность $H^2 - K$ и $A^2 + B^2$. Вектор

средней кривизны H имеет вид $H = \frac{1}{2} \left[\left(L_{11}^1 + \frac{1}{G} L_{22}^1 \right) n_1 + \left(L_{11}^2 + \frac{1}{G} L_{22}^2 \right) n_2 \right]$. Поэтому

$$4H^2 = \left(L_{11}^1 - \frac{1}{G} L_{22}^1 \right)^2 + \left(L_{11}^2 - \frac{1}{G} L_{22}^2 \right)^2 + 4 \frac{L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2}{G} = A^2 + B^2 + 4D.$$

Используя это соотношение, можем записать $D - K = H^2 - K - (A^2 + B^2)/4$. Если эйлерова разность $H^2 - K = \text{const}$, то выражение $D - K$, а вместе с ним и Δ являются функциями только от $A^2 + B^2$.

Поэтому $\int_{\Gamma(t)} T d\varphi = 2\pi m \kappa_0$, где m — целое число. Можем записать

$$\int_{\Gamma(t)} \mu_{21/2} d\varphi = \frac{1}{\kappa_0} \int \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \psi G_r - T \right\} d\varphi = \frac{1}{\kappa_0} \left[\frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} \Phi d\varphi + \int_{\Gamma(t)} \psi G_r d\varphi - 2\pi m \kappa_0 \right].$$

Имеет место формула Гаусса $K = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \left(\frac{G_r}{\sqrt{G}} \right)_r$. Из этого выражения и условия $K \leq 0$ следует $G_r \geq 0$. Заметим, что функции Φ и ψ неотрицательны. С помощью уравнения (10) получим

$$-\frac{d}{dt} \int_{\Gamma(t)} \Phi d\varphi - \int_{\Gamma(t)} \psi G_r d\varphi + 2\pi m \kappa_0 = \kappa_0^2 S(D(t)).$$

Интегрируя это уравнение по t от 0 до t_1 , получим

$$-\int_{\Gamma(t_1)} \Phi d\varphi = \int_0^{t_1} \int_{\Gamma(t)} \psi G_r d\varphi dt + \kappa_0^2 \int_0^{t_1} S(D(t)) dt - 2\pi m \kappa_0 t_1$$

Левая часть этого равенства неположительна. Так как $K \leq 0$, то $S(D(t)) \geq \pi t^2$. Поэтому второй интеграл справа возрастает быстрее линейной функции. Значит, правая часть при достаточно большом t_1 будет положительна. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

4. Поверхности с постоянными κ_r и $H^2 - K$. Рассмотрим поверхности вида $x_3 = u(x_1, x_2)$, $x_4 = v(x_1, x_2)$. Установим выражения κ_r и $H^2 - K$ через функции u и v . Радиус-вектор $r(x_1, x_2)$ поверхности и его производные запишутся так:

$$r(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \\ v \end{pmatrix}; \quad r_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}; \quad r_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}; \quad r_{x_i x_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{ij} \\ v_{ij} \end{pmatrix},$$

где индексы снизу у функций u и v означают частные производные. Пусть $n_1 = \{\xi_i\}$ и $n_2 = \{\eta_i\}$ — единичные взаимноортогональные нормали

к поверхности. Из условия ортогональности n_i векторами r_{x_1} и r_{x_2} находим

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -u_1 \xi_3 - v_1 \xi_4, & \eta_1 &= -u_1 \eta_3 - v_1 \eta_4, \\ \xi_2 &= -u_2 \xi_3 - v_2 \xi_4, & \eta_2 &= -u_2 \eta_3 - v_2 \eta_4.\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнения $n_1^2 = 1$, $(n_1 n_2) = 0$, $n_2^2 = 1$, получим следующие три уравнения:

$$\begin{aligned}A \xi_3^2 + 2B \xi_3 \xi_4 + C \xi_4^2 - 1 &= 0; \\ A \xi_3 \eta_3 + B (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) + C \xi_4 \eta_4 &= 0; \\ A \eta_3^2 + 3B \eta_3 \eta_4 + C \eta_4^2 - 1 &= 0,\end{aligned}\quad (13)$$

где $A = 1 + |\text{grad } u|^2$, $B = (\text{grad } u \text{ grad } v)$, $C = 1 + |\text{grad } v|^2$. Введем так же обозначение $D = \sqrt{CA - B^2}$. Разрешив первое уравнение относительно ξ_3 , а третье — относительно η_3 , получим

$$\xi_3 = -\frac{B \xi_4}{A} \pm f(\xi_4), \quad f(x) = \sqrt{\left(\frac{Bx}{A}\right)^2 - \frac{Cx^2}{A} + \frac{1}{A}}, \quad \eta_3 = -\frac{B \eta_4}{A} \pm f(\eta_4).\quad (14)$$

Подставим эти выражения во второе уравнение. После простых преобразований получим $\xi_4^2 + \eta_4^2 = A/D^2$. Положим $\xi_4 = \sqrt{A} \cos \varphi/D$, $\eta_4 = \sqrt{A} \sin \varphi/D$. Тогда с помощью (14) находим $\xi_3 = -B \cos \varphi/\sqrt{AD} \pm \sin \varphi/\sqrt{A}$, $\eta_3 = -B \sin \varphi/\sqrt{AD} \mp \cos \varphi/\sqrt{A}$, причем из второго уравнения системы (13) вытекает, что знаки перед вторыми слагаемыми в выражениях ξ_3 и η_3 надо брать противоположными. В дальнейшем будем для ξ_3 брать знак «+», а для η_3 — знак «-»; заметим, что в этом случае $\xi_3 \eta_4 - \eta_3 \xi_4 = 1/D$, $\xi_3^2 + \eta_3^2 = A/D^2$, $\xi_3 \xi_4 + \eta_3 \eta_4 = -B/D^2$.

Коэффициенты первой квадратичной формы: $g_{ii} = 1 + u_i^2 + v_i^2$, $g_{12} = u_1 u_2 + v_1 v_2$. Детерминант матрицы метрического тензора $g = 1 + |\text{grad } u|^2 + |\text{grad } v|^2 + |[\text{grad } u \text{ grad } v]|^2 = D^2$. Коэффициенты вторых квадратичных форм по отношению к нормальям n_1 и n_2 имеют вид $L_{ij}^1 = \xi_3 u_{ij} + \xi_4 v_{ij}$, $L_{ij}^2 = \eta_3 u_{ij} + \eta_4 v_{ij}$ (15). Гауссово кручение κ_r вычисляется [2] по формуле $\kappa_r = (L_{1i}^1 L_{2j}^2 - L_{2i}^1 L_{1j}^2) g^{ij} / \sqrt{g}$. Прямой постановкой выражений L_{ij}^1 и L_{ij}^2 находим $L_{ii}^1 L_{jk}^2 - L_{jk}^1 L_{ii}^2 = (u_{ii} v_{jk} - u_{jk} v_{ii})/D$. Поэтому гауссово кручение поверхности $x_3 = u(x_1, x_2)$, $x_4 = v(x_1, x_2)$ находится по формуле $\kappa_r = \frac{1}{g^2} \{ (u_{11} v_{12} - u_{12} v_{11}) (1 + u_2^2 + v_2^2) - (u_{11} v_{22} - u_{22} v_{11}) (u_1 u_2 + v_1 v_2) + (u_{12} v_{22} - v_{12} u_{22}) (1 + u_1^2 + v_1^2) \}$ (16).

Найдем выражение гауссовой кривизны $K = \sum_{\alpha=1}^2 (L_{11}^\alpha L_{22}^\alpha - (L_{12}^\alpha)^2) / g$.

Используя опять выражения (15) для L_{ij}^α и выражения (14) для $\xi_i \xi_j + \eta_i \eta_j$, находим формулу для гауссовой кривизны: $K = \frac{1}{g^2} \{ (u_{11} u_{22} - u_{12}^2) \times (1 + v_1^2 + v_2^2) - (u_{11} v_{22} - 2u_{12} v_{12} + u_{22} v_{11}) (u_1 v_1 + u_2 v_2) + (v_{11} v_{22} - v_{12}^2) \times (1 + u_1^2 + u_2^2) \}$ (17).

Далее находим квадрат длины вектора средней кривизны

$$H^2 = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^2 (L_{ij}^\alpha g^{ij})^2 = \frac{1}{4} [(\xi_3 u_{ij} + \xi_4 v_{ij}) g^{ij}]^2 + \frac{1}{4} [(\eta_3 u_{ij} + \eta_4 v_{ij}) g^{ij}]^2 = \\ = \frac{1}{4} (\xi_3 \bar{\nabla}_2 u + \xi_4 \bar{\nabla}_2 v)^2 + \frac{1}{4} (\eta_3 \bar{\nabla}_2 u + \eta_4 \bar{\nabla}_2 v)^2,$$

где $\bar{\nabla}_2 u = u_{ij} g^{ij}$.

Если воспользоваться формулами (14), то получим

$$H^2 = \frac{C(\bar{\nabla}_2 u)^2 - 2B\bar{\nabla}_2 u \bar{\nabla}_2 v + A(\bar{\nabla}_2 v)^2}{4D^2}. \quad (18)$$

Рассмотрим уравнения $\kappa_\Gamma = \kappa_0 = \text{const}$ и $H^2 - K = \text{const}$. Это система двух уравнений для двух неизвестных функций u и v , зависящих от двух аргументов: x_1, x_2 : $F_\alpha(u_1, u_2, v_1, v_2, u_{11}, u_{12}, \dots, v_{22}) = 0$, $\alpha = 1, 2$, причем $F_1 = 0$ соответствует уравнению $\kappa_\Gamma = \text{const}$, $F_2 = 0$ соответствует уравнению $H^2 - K = \text{const}$. Старшие производные от обеих функций u, v имеют второй порядок. Уравнения существенно нелинейные по старшим производным. Начальные условия для функций u и v зададим на линии $x_1 = 0$: $u(0, x_2) = v(0, x_2) = 0$, $u_1(0, x_2) = 0$, $v_1(0, x_2) = x_2$ (19). Рассмотрим вопрос о разрешимости системы относительно u_{11} и v_{11} в окрестности заданных начальных условий, в то время как точка (x_1, x_2) близка к началу координат. В начале координат в силу выбора начальных условий будет $u_i = v_i = 0$, $u_{12} = u_{22} = 0$, $v_{12} = 1$, $v_{22} = 0$. Воспользуемся теоремой о неявной функции. Для того чтобы можно было разрешить систему относительно u_{11}, v_{11} , достаточно, чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial v_{11}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial v_{11}} \end{vmatrix} \neq 0$$

в точке $(0, 0)$ при выбранных значениях начальных условий. В начале координат $\frac{\partial F_1}{\partial u_{11}} = 1$, $\frac{\partial F_1}{\partial v_{11}} = 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial v_{11}} = \frac{v_{11}}{2}$. Поэтому в соответствующей точке определитель Δ будет отличен от нуля тогда и только тогда, когда $v_{11} \neq 0$. В рассматриваемой точке система имеет вид $u_{11} = \kappa_0$, $u_{11}^2 + v_{11}^2 + 4 = 4\lambda_0$, где λ_0 — постоянное значение $H^2 - K$. Следовательно, $u_{11} = \kappa_0$, $v_{11} = \pm \sqrt{4\lambda_0 - \kappa_0^2 - 4}$. Если $4\lambda_0 - \kappa_0^2 - 4 > 0$, то $v_{11} \neq 0$. Система $F_\alpha = 0$ в этом случае разрешима относительно u_{11}, v_{11} в окрестности выбранных начальных условий в виде аналитических функций от остальных аргументов. Далее воспользуемся обобщенной теоремой Коши—Ковалевской, в которой аналитичность функций можно требовать в окрестности выбранных начальных данных (см. [9, с. 536; 10, с. 337]). Таким образом, поверхности в E^4 с постоянными κ_Γ и $H^2 - K$ существуют. Тот же ход рассуждений применим и для начальных условий — аналитических функций $u(0, x_2), v(0, x_2), u_1(0, x_2), v_1(0, x_2)$, близких к (19).

Интересный класс поверхностей образуют поверхности с постоянными κ_G и K . Произвол их задания состоит из четырех функций одного аргумента.

Б. Поверхности с постоянным гауссовым кручением. Используем обозначения $x_1 = x$, $x_2 = y$. Рассмотрим поверхность $u = f(x)\cos y$, $v = f(x)\sin y$. Замечательным свойством этих поверхностей является то, что выражения K , κ_G и H^2 зависят только от одного аргумента x . Выпишем производные функций u и v :

$$u_1 = f' \cos y, u_2 = -f \sin y, u_{11} = f'' \cos y, u_{12} = -f' \sin y, u_{22} = -f \cos y, \\ v_1 = f' \sin y, v_2 = f \cos y, v_{11} = f'' \sin y, v_{12} = f' \cos y, v_{22} = -f \sin y.$$

Следовательно, линейный элемент поверхности имеет вид $ds^2 = (1 + f'^2)dx^2 + (1 + f^2)dy^2$. Координатные линии x являются геодезическими. Детерминант метрического тензора $g = (1 + f'^2)(1 + f^2)$. Так как координаты на поверхности ортогональные, то по формуле Гаусса легко вычислить гауссову кривизну:

$$K = -\frac{f''f(1+f^2) + f'^2(1+f'^2)}{(1+f'^2)^2(1+f^2)^2}.$$

Найдем выражение для гауссова кручения. Имеем $u_{11}v_{12} - u_{12}v_{11} = f'f''$, $u_{11}v_{22} - u_{22}v_{11} = 0$, $u_{12}v_{22} - v_{12}u_{22} = ff'$, $1 + u_2^2 + v_2^2 = 1 + f^2$, $1 + u_1^2 + v_1^2 = 1 + f'^2$. Следовательно, применяя формулу (16), получим

$$\kappa_G = \frac{f'f''(1+f^2) + f'f(1+f'^2)}{(1+f'^2)^2(1+f^2)^2}.$$

Выражения K и κ_G построены сходным образом. Рассмотрим уравнение $\kappa_G = \kappa_0$. Выражение для κ_G можно записать в таком виде:

$$\kappa_G = \frac{g'}{2g^2}. \quad (20)$$

Интегрируя уравнение $\kappa_G = \kappa_0$, получим $(1 + f'^2)(1 + f^2) = -1/(2\kappa_0 x + c)$, где c — некоторая постоянная. Функция f находится из дифференциального уравнения:

$$f' = \pm \sqrt{\frac{-1}{(2\kappa_0 x + c)(1 + f^2)} - 1}.$$

Можно подобрать значение постоянной c и начальное значение функции f так, что подкоренное выражение будет положительно. Следовательно, в некоторой окрестности начальной точки будет определено решение и вместе с ним и поверхность с постоянным гауссовым кручением. Нетрудно видеть, что ширина полосы $t_1 \leq x \leq t_2$ на регулярной поверхности ограничена сверху. Действительно, если l — длина отрезка на координатной линии x в метрике поверхности, то с помощью (20) получим

$$\kappa_0 l = \kappa_0 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + f'^2} dx \leq \kappa_0 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g} dx = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right)' dx = \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{g}(t_1)} - \frac{1}{\sqrt{g}(t_2)}\right) \leq 1.$$

Следовательно, $l < 1/\kappa_0$. Интересно было бы построить полные регулярные поверхности в E^4 с постоянным, отличным от нуля гауссовым кривизнением.

6. Поверхности с постоянной гауссовой кривизной. Поверхности $u = f(x)\cos y$, $v = f(x)\sin y$ с постоянной K можно найти с помощью квадратур. Используем функцию $x(f)$, обратную к $f(x)$. Тогда выражение для K переписывается в таком виде:

$$K = \frac{x''x'f(1+f^2) - (x'^2+1)}{(1+f^2)^2(1+x'^2)^2}.$$

Введем функцию $U = 1/(1+x'^2)$. Эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $U' \frac{f}{1+f^2} + 2U \frac{1}{(1+f^2)^2} = -2K_0$.

Методом вариации постоянных находим $U = (-K_0 f^2 + c) \left(\frac{1}{f^2} + 1 \right)$, где c — постоянная. Следовательно,

$$x = \pm \int \sqrt{\frac{f^2}{(-K_0 f^2 + c)(1+f^2)} - 1} df.$$

Не трудно убедиться, что поверхность имеет особенности.

Список литературы: 1. Chern S. S. On the curvatura integra in a Riemannian manifold // Ann. of Math.— 1945.— 46, N 4.— P. 674—684. 2. Аминов Ю. А. Кривизнение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах // Укр. геометр. сб.— 1975.— Вып. 17.— С. 3—14. 3. Позняк Э. Г. Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства // Успехи мат. наук.— 1973.— 28, № 5.— С. 47—76. 4. Розендорн Э. Р. О полных поверхностях отрицательной кривизны $K \leq -1$ в евклидовых пространствах E^3 и E^4 // Мат. сб.— 1962.— 58, № 4.— С. 453—478. 5. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере.— М.: Изд-во МГУ, 1960.— 307 с. 6. Аминов Ю. А. Определение поверхности в E^4 по заданному грасманову образу // Мат. сб.— 1982.— 117, № 2.— С. 147—160. 7. Аминов Ю. А. О грасмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве // Укр. геометр. сб.— 1980.— Вып. 23.— С. 3—16. 8. Войцеховский М. И. О двумерных поверхностях в четырехмерном пространстве: Шестая всесоюз. геометр. конф. по современным проблемам геометрии: Тез. докл., Вильнюс, 1975.— С. 58—60. 9. Гурса Э. Курс математического анализа, Т. II.— 1936.— 563 с. 10. Goursat E. Des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, 2. Paris, 1898.— 344 p.

Поступила в редколлегию 27.10.86

*А. А. БОРИСЕНКО, В. Г. УШАКОВ***ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ МНОГОМЕРНЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

В последнее время возрос интерес к изучению многомерных поверхностей произвольной размерности. С. З. Шефелем были выделены классы седловых и выпуклых поверхностей [1]. Интенсивно изучались также сильно параболические, параболические и линейчатые многомерные поверхности [2—4]. В частности, были получены признаки цилиндричности сильно параболических и параболических поверхностей в евклидовом пространстве [5]. Линейчатые поверхности являются обобщением сильно k -параболических и k -параболических поверхностей. Поэтому естественно возникает вопрос об условиях цилиндричности линейчатых поверхностей.

Регулярную поверхность F^{m+k} класса C^3 в евклидовом пространстве E^n назовем k -линейчатой поверхностью, если ее радиус-вектор может быть задан в виде

$$\mathbf{r}(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^k) = \rho(u^1, \dots, u^m) + v^\alpha \mathbf{s}_\alpha(u^1, \dots, u^m), \quad (1)$$

$$\alpha = 1, \dots, k,$$

где ρ и $\{\mathbf{s}_\alpha\}_{\alpha=1}^k$ — C^3 -отображения $U \subset E^m$ в E^n . Здесь и далее, если не оговорено противное, индексы α, β, γ принимают значения $1, \dots, k$, а индексы i, j, k, l — значения $1, \dots, m$. Введем обозначения $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial u^i$, $\mathbf{r}_\alpha = \partial \mathbf{r} / \partial v^\alpha$. Запись $\{c_i\}$ будет обозначать $\{c_i\}_{i=1}^m$ (параметр пробегает всю свою область значений).

Поверхность $F^m \subset E^n$, заданную радиус-вектором $\rho(u^1, \dots, u^m)$, будем называть базовой поверхностью (или просто базой) k -линейчатой поверхности (1). Через каждую точку Q базы проходит единственная прямолинейная образующая $E^k(Q)$, которая является областью на плоскости $\mathcal{L}(\{\mathbf{s}_\alpha|_Q\})$. Здесь через $\mathcal{L}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l)$ обозначается линейная оболочка векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$. Не ограничивая общности, считаем, что $\langle \mathbf{s}_\alpha, \mathbf{s}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ (2) для любых $(u^1, \dots, u^m) \in U \subset E^m$.

Регулярным однопараметрическим семейством образующих k -линейчатой поверхности F^{m+k} назовем $(k+1)$ -мерную поверхность вида $\tilde{\mathbf{r}}(v^1, \dots, v^k, t) = \mathbf{r}(u^1(t), \dots, u^m(t), v^1, \dots, v^k)$, где \mathbf{r} — радиус-вектор нашей линейчатой поверхности, а функции $u^i(t)$ задают C^3 -гладкую кривую в $U \subset E^m$. Другими словами, регулярное однопараметрическое семейство образующих есть объединение всех образующих, проходящих через гладкую кривую на базе F^m .

k -линейчатая поверхность называется k -цилиндром, если существует такая параметризация, что

$$\mathbf{r}(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^k) = \rho(u^1, \dots, u^m) + v^\alpha \mathbf{s}_\alpha, \quad (3)$$

где \mathbf{s}_α — постоянные векторы (считаем $\langle \mathbf{s}_\alpha, \mathbf{s}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$).

k -линейчатая поверхность называется $(k-1)$ -цилиндром над 1-конусом, если существует такая параметризация, что $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^k) = v^1 \mathbf{s}_1(u^1, \dots, u^m) + v^\beta \mathbf{s}_\beta$ (4), $\beta = 2, \dots, k$, где $\{\mathbf{s}_\beta\}$ — постоянные векторы; $\langle \mathbf{s}_\alpha, \mathbf{s}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

Имеет место следующее характеристическое свойство многомерных цилиндроконических поверхностей в евклидовом пространстве.

Теорема 1. Для того чтобы k -линейчатая поверхность с m -мерной базой, где $m \geq 2$, была k -цилиндром или $(k-1)$ -цилиндром над 1-конусом, необходимо и достаточно, чтобы любое регулярное однопараметрическое семейство образующих обладало нулевой скалярной кривизной.

Замечание 1. Необходимость имеет место и при $m = 1$. Однако требование $m \geq 2$ существенно для утверждения достаточности. В самом деле, при $m = 1$ можно рассмотреть развертывающуюся поверхность.

Доказательство необходимости. Рассмотрим два случая.

1°. F^{m+k} есть k -цилиндр. Произвольное регулярное однопараметрическое семейство образующих имеет вид $\tilde{\mathbf{r}}(v^1, \dots, v^k, t) = \rho(u^1(t), \dots$

$u^m(t) + v^\alpha s_\alpha$ (5). Вычислим скалярную кривизну этого семейства. $\tilde{r}_\alpha = s_\alpha$; учитывая, что s_α не зависят от $\{u^i\}$, получаем $\tilde{r}_{\alpha p} = 0$, $p = 1, \dots, k+1$. Пусть $\{\mathbf{v}^\sigma\}_{\sigma=1}^{n-k-1}$ — семейство линейно независимых нормалей к (5). Тогда коэффициенты вторых квадратичных форм $A_{\alpha p}^\sigma = \langle \mathbf{v}^\sigma, \tilde{r}_{\alpha p} \rangle = 0$, $p = 1, \dots, k+1$ и, следовательно, по формуле Гаусса [6] компоненты ковариантного тензора кривизны

$$R_{ijlm} = \sum_{\sigma=1}^{n-k-1} (A_{il}^\sigma A_{jm}^\sigma - A_{im}^\sigma A_{jl}^\sigma) = 0.$$

Поэтому скалярная кривизна $R = R_{ij} g^{ij} = g^{ij} R_{ilj}^l = g^{ij} g^{lm} R_{mlij} = 0$.
 2° , $F^{m+k} - (k-1)$ -цилиндр над 1-конусом. В этом случае регулярное однопараметрическое семейство образующих имеет вид

$$\tilde{r}(v^1, \dots, v^k, t) = v^1 s_1(u^1(t), \dots, u^m(t)) + v^\beta s_\beta, \quad (6)$$

$$\beta = 2, \dots, k, \tilde{r}_\alpha = s_\alpha, \tilde{r}_{k+1} = v^1 s_{1|t}.$$

(Здесь и далее через $s_{\alpha|t}$ обозначаем $\partial s_\alpha / \partial t$). Поэтому $\tilde{r}_{\beta p} = 0$ ($\beta = 2, \dots, k$; $p = 1, \dots, k+1$); $\tilde{r}_{1\alpha} = 0$; $\tilde{r}_{1(k+1)} = s_{1|t}$. Но вектор $s_{1|t}$ — касательный к (6). Значит, и в этом случае коэффициенты вторых квадратичных форм $A_{\alpha p}^\sigma = 0$, $p = 1, \dots, k+1$. Отсюда, также как и в 1° , скалярная кривизна $R = 0$. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности опирается на три леммы.

Определение. *k-линейчатая поверхность называется сильно k-параболической, если касательная плоскость к поверхности вдоль образующей стационарна [7].*

Лемма 1. *Если (k+1)-мерная k-линейчатая поверхность обладает нулевой скалярной кривизной, то она сильно k-параболическа.*

Доказательство. Рассмотрим (k+1)-мерную k-линейчатую поверхность, заданную радиусом-вектором $\tilde{r}(v^1, \dots, v^m, t) = \rho(t) + v^\alpha s_\alpha(t)$ (7). Вычислим коэффициенты вторых квадратичных форм. $\tilde{r}_\alpha = s_\alpha$, $\tilde{r}_{\alpha\beta} = 0$. Поэтому $A_{\alpha\beta}^\sigma = \langle \tilde{r}_{\alpha\beta}, \mathbf{v}^\sigma \rangle = 0$ для любой нормали \mathbf{v}^σ , $\sigma = 1, \dots, n-k-1$. Выясним, сколько компонент ковариантного тензора кривизны отлично от нуля. По формуле Гаусса $R_{ijlt} = \sum_{\sigma=1}^{n-k-1} (A_{il}^\sigma A_{jt}^\sigma - A_{it}^\sigma A_{jl}^\sigma) = 0$, если среди индексов i, j, l, t число (k+1) встречается меньше двух или больше двух раз. Теперь посмотрим, что дает требование равенства нулю скалярной кривизны. Выберем в точке ортонормированную специальную систему координат: $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда

$$0 = R = g^{ij} R_{ij} = \sum_{i=1}^{k+1} R_{ii} = \sum_{i=1}^{k+1} R_{iit}^t = - \sum_{i,l=1}^{k+1} R_{liit} =$$

$$= - \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{k+1} R_{liit} - \sum_{l=1}^{k+1} R_{l(k+1)(k+1)l} = - \sum_{l=1}^k R_{(k+1)il(k+1)} -$$

$$= - \sum_{l=1}^k R_{l(k+1)(k+1)l} = -2 \sum_{\alpha=1}^k R_{(k+1)\alpha\alpha(k+1)} = -2 \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\sigma=1}^{n-k-1} (A_{\alpha(k+1)}^\sigma)^2.$$

(В последнем преобразовании использовалась формула Гаусса для вычисления $R_{(k+1)\alpha\alpha(k+1)}$). Отсюда $0 = A_{\alpha(k+1)}^\sigma = \langle \tilde{r}_{\alpha(k+1)}, \mathbf{v}^\sigma \rangle = \langle s_{\alpha l}, \mathbf{v}^\sigma \rangle$ ($\sigma = 1, \dots, n-k-1$).

Следовательно, $s_{\alpha l}$ лежит в касательной плоскости к (7).

Координатные векторы касательной плоскости имеют вид $\tilde{r}_\alpha = s_\alpha$, $\tilde{r}_{k+1} = \rho_l + v^\alpha s_{\alpha l}$. На базе (т. е. при $v^\alpha = 0$) $\tilde{r}_\alpha = s_\alpha$, $\tilde{r}_{k+1} = \rho_l$. Поэтому $s_{\alpha l} \in L(\{s_\alpha, \rho_l\})$. А это означает, что касательная плоскость стационарна вдоль образующей.

Если в каждой точке n -мерного дифференцируемого многообразия M задана m -мерная плоскость ($n > m$), регулярно зависящая от точки, то на многообразии M задано m -мерное дифференцируемое распределение.

Определение. Дифференцируемое m -мерное распределение называется голономным, если многообразие M расслаивается на m -мерные подмногообразия, касательные плоскости к которым совпадают с плоскостями распределения в соответствующих точках.

Распределение размерности m может быть локально задано набором m линейно независимых векторных полей, касающихся плоскостей распределения. Для двух векторных полей X и Y с координатами $\{X^i\}_{i=1}^n$, $\{Y^i\}_{i=1}^n$, заданных на многообразии M , можно определить новое векторное поле $[X, Y]$, называемое скобкой Ли или коммутатором векторных полей X и Y . В координатной записи скобка Ли имеет следующий вид: $[X, Y]^k = \frac{\partial X^k}{\partial u^i} Y^i - \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} X^i$. Здесь (u^1, \dots, u^n) — локальные координаты на многообразии M .

Будем использовать теорему Фробениуса [8]: для того чтобы дифференцируемое распределение, заданное набором m векторных полей, было голономно, необходимо и достаточно, чтобы попарные скобки Ли этих векторных полей являлись линейными комбинациями этих же векторных полей.

Лемма 2. Если любое однопараметрическое регулярное семейство образующих k -линейчатой поверхности F^{m+k} обладает нулевой скалярной кривизной, то распределение m -мерных плоскостей, ортогональных образующим и касательных к поверхности F^{m+k} , голономно.

Доказательство. Построим m линейно независимых векторных полей, касательных к F^{m+k} и ортогональных образующим. Тогда их линейная оболочка в фиксированной точке будет искомой m -мерной площадкой, ортогональной образующей. Покажем, что эти m векторных полей коммутируют (т. е. их скобка Ли равна нулю), а отсюда, по теореме Фробениуса, получим голономность распределения плоскостей.

Итак, пусть $z_i = r_i + \lambda_i^\alpha s_\alpha$ — искомые векторные поля (r — радиус-вектор поверхности (1)). Они линейно независимы для любого набора коэффициентов $\{\lambda_i^\alpha\}$ в силу линейной независимости системы $\{\{r_i\}, \{s_\alpha\}\}$. Запишем требование ортогональности z_i образующей. Так как $\langle r_i, r_\beta \rangle = g_{i(m+\beta)}$ и учитывая (2), получим $0 = \langle z_i, s_\beta \rangle = \langle r_i, s_\beta \rangle + \lambda_i^\alpha \langle s_\alpha, s_\beta \rangle = g_{i(m+\beta)} + \lambda_i^\beta$. Поэтому векторные поля z_i имеют вид

$\mathbf{z}_i = \mathbf{r}_i - \sum_{\alpha} g_{i(m+\alpha)} \mathbf{s}_{\alpha}$. Докажем, что скобка Ли векторных полей \mathbf{z}_i и \mathbf{z}_j равна нулю в каждой точке поверхности F^{m+k} . Зафиксируем $Q \in F^{m+k}$ и выберем базу, проходящую через Q и ортогональную образующей в этой точке. Для такой параметризации поверхности (1) $g_{i(m+\alpha)}|_Q = 0$ (8). Так как \mathbf{r}_i — координатные векторные поля, то $[\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j] = 0$. Учитывая это и (8), получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j]|_Q &= [\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j]|_Q - [\mathbf{r}_i, \sum_{\alpha} g_{j(m+\alpha)} \mathbf{r}_{\alpha}]|_Q - [\sum_{\alpha} g_{i(m+\alpha)} \mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{r}_j]|_Q + \\ &+ \left[\sum_{\alpha} g_{i(m+\alpha)} \mathbf{r}_{\alpha}, \sum_{\alpha} g_{j(m+\alpha)} \mathbf{r}_{\alpha} \right]|_Q = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial g_{i(m+\alpha)}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{j(m+\alpha)}}{\partial u^i} \right) \Big|_Q \mathbf{r}_{\alpha}|_Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (1) следует $g_{i(m+\alpha)} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{\alpha} \rangle = \langle \rho_i, \mathbf{s}_{\alpha} \rangle + v^{\beta} \langle \mathbf{s}_{\beta i}, \mathbf{s}_{\alpha} \rangle$. Учитывая, что $v^{\beta}|_Q = 0$, получаем

$$\left(\frac{\partial g_{i(m+\alpha)}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{j(m+\alpha)}}{\partial u^i} \right) \Big|_Q = \langle \rho_i, \mathbf{s}_{\alpha j} \rangle - \langle \rho_j, \mathbf{s}_{\alpha i} \rangle \Big|_Q. \quad (10)$$

Воспользуемся равенством нулю скалярной кривизны любого однопараметрического регулярного семейства образующих. Для семейства $u^i = t, u^l = 0$ ($l \neq i$) лемма 1 дает: $\mathbf{s}_{\alpha i} \in \mathcal{L}(\{\mathbf{s}_{\beta}, \rho_i\})$. Аналогично $\mathbf{s}_{\alpha j} \in \mathcal{L}(\{\mathbf{s}_{\beta}, \rho_j\})$. Здесь i и j считаются фиксированными параметрами. Выпишем разложение $\mathbf{s}_{\alpha i}$ и $\mathbf{s}_{\alpha j}$ по этим базисам: $\mathbf{s}_{\alpha i} = \eta_{\alpha i} \rho_i + \sum_{\beta} \mu_{\alpha \beta i} \mathbf{s}_{\beta}$, $\mathbf{s}_{\alpha j} = \eta_{\alpha j} \rho_j + \sum_{\beta} \mu_{\alpha \beta j} \mathbf{s}_{\beta}$ (11).

Покажем, что коэффициенты при ρ_i не зависят от i , т. е. $\eta_{\alpha i} = \eta_{\alpha j}$ (12). Рассмотрим однопараметрическое регулярное семейство образующих $u^i = u^j = t, u^l = 0, l \neq i, l \neq j$. Для него

$$\rho_i = \rho_i + \rho_j, \quad (13)$$

$$\mathbf{s}_{\alpha i} = \mathbf{s}_{\alpha j} + \mathbf{s}_{\alpha j}.$$

Из леммы 1 получим $\mathbf{s}_{\alpha i} = \xi^{\beta} \mathbf{s}_{\beta} + v \rho_i$ или, учитывая (13), $\mathbf{s}_{\alpha i} + \mathbf{s}_{\alpha j} = \xi^{\beta} \mathbf{s}_{\beta} + v(\rho_i + \rho_j)$. Используя (11), получим $\mathbf{s}_{\alpha i} + \mathbf{s}_{\alpha j} = \eta_{\alpha i} \rho_i + \eta_{\alpha j} \rho_j + \sum_{\beta} (\mu_{\alpha \beta i} + \mu_{\alpha \beta j}) \mathbf{s}_{\beta}$. Сравнивая последние два выражения, получаем формулу (12).

Формула (11) может быть переписана в виде $\mathbf{s}_{\alpha i} = \eta_{\alpha} \rho_i + \sum_{\beta} \mu_{\alpha \beta i} \mathbf{s}_{\beta}$ (14). Подставим это выражение в (10). Учитывая (8), можем записать

$$\begin{aligned} \langle \rho_i, \mathbf{s}_{\alpha j} \rangle - \langle \rho_j, \mathbf{s}_{\alpha i} \rangle \Big|_Q &= \eta_{\alpha} \langle \rho_i, \rho_j \rangle \Big|_Q + \sum_{\beta} \mu_{\alpha \beta j} \langle \rho_i, \mathbf{s}_{\beta} \rangle \Big|_Q - \\ &- \eta_{\alpha} \langle \rho_j, \rho_i \rangle \Big|_Q - \sum_{\beta} \mu_{\alpha \beta i} \langle \rho_j, \mathbf{s}_{\beta} \rangle \Big|_Q = 0. \end{aligned}$$

Значит, векторные поля $\{\mathbf{z}_i\}$ попарно коммутируют.

В силу леммы 2 можно k -линейчатую поверхность F^{m+k} параметризовать так, что база будет ортогональна образующим. Рассмотрим

эту базу F^m как подмногообразие риманова многообразия F^{m+k} . На нормальном расслоении базы F^m в k -линейчатой поверхности F^{m+k} определена нормальная связность [9]. Имеет место

Лемма 3. Если любое однопараметрическое регулярное семейство образующих k -линейчатой поверхности F^{m+k} имеет нулевую скалярную кривизну, то нормальное расслоение базы F^m , ортогональной образующим, в поверхности F^{m+k} имеет плоскую нормальную связность.

Доказательство. Пусть $\tilde{\nabla}$ — связность в F^{m+k} , ∇^\perp — связность в нормальном расслоении $F^m \subset F^{m+k}$. Тогда из (14) находим

$$\tilde{\nabla}_i s_\alpha = \eta_\alpha \rho_i + \sum_{\beta=1}^k \mu_{\alpha\beta|i} s_\beta. \quad (15)$$

Учитывая, что ковариантная производная нормального векторного поля раскладывается на касательную и нормальную составляющую $\tilde{\nabla}_i X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^\perp X \xi$, где A_ξ — матрица второй квадратичной формы относительно нормали ξ , получаем $\nabla_i^\perp s_\alpha = \sum_{\beta=1}^k \mu_{\alpha\beta|i} s_\beta$, $A_{s_\alpha}(\rho_i) = -\eta_\alpha \rho_i$.

Так как последняя формула справедлива для любого i , то $A_{s_\alpha} = -\eta_\alpha E$ (16), где E — единичная матрица $m \times m$.

Покажем, что тензор кривизны нормальной связности равен нулю. Из уравнения Риччи $K^N(\rho_i, \rho_j; s_\alpha, s_\beta) = \tilde{K}(\rho_i, \rho_j; s_\alpha, s_\beta) + \tilde{g}([A_{s_\alpha}, A_{s_\beta}]\rho_i, \rho_j)$ (17), где K^N — тензор кривизны нормальной связности ∇^\perp ; \tilde{K} — тензор кривизны связности $\tilde{\nabla}$ в F^{m+k} ; \tilde{g} — метрический тензор F^{m+k} ; $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор матриц A и B .

Из (16) получаем $[A_{s_\alpha}, A_{s_\beta}] = [-\eta_\alpha E, -\eta_\beta E] = 0$ (18). Распишем первое слагаемое (17), воспользовавшись формулой Гаусса для поверхности $F^{m+k} \subset E^n$:

$$\tilde{K}(\rho_i, \rho_j; s_\alpha, s_\beta) = \sum_{\alpha=1}^{n-m-k} (A_{i(m+\alpha)}^\sigma A_{j(m+\beta)}^\sigma A_{i(m+\beta)}^\sigma A_{j(m+\alpha)}^\sigma). \quad (19)$$

В силу сильной параболичности k -линейчатой поверхности F^{m+k} (формула (14)) $A_{i(m+\nu)}^\sigma = 0$. Подставив последнюю формулу в (19) и учитывая (17), (18), получаем утверждение леммы.

Доказательство достаточности условий теоремы 1. Известен следующий факт [9]. Для того чтобы нормальная связность ∇^\perp m -мерного подмногообразия M ($m+k$ -мерного риманова многообразия N) была плоской, необходимо и достаточно, чтобы локально существовало k взаимно ортогональных нормальных единичных векторных полей s_α таких, что каждое s_α параллельно в нормальной связности.

В силу леммы 3 на базе F^m существует k таких векторных полей. Для них из (14) получаем $s_{\alpha|i} = \eta_\alpha \rho_i$ (20). Функции η_α заданы на базе F^m . Покажем, что $\eta_\alpha = \text{const}$. Рассмотрим (20) для двух различных направлений на базе $i \neq j$: $s_{\alpha|i} = \eta_\alpha \rho_i$, $s_{\alpha|j} = \eta_\alpha \rho_j$. Продифференцируем первое уравнение по u_j , а второе — по u_i . Получим $s_{\alpha|ij} =$

$\eta_{\alpha|j} \rho_i + \eta_{\alpha} \rho_{ij}$, $s_{\alpha|ij} = \eta_{\alpha|j} \rho_i + \eta_{\alpha} \rho_{ji}$. Учитывая, что s_{α} и ρ — дифференцируемые (по меньшей мере дважды) отображения, имеем $s_{\alpha|ij} = s_{\alpha|ji}$ и $\rho_{ij} = \rho_{ji}$. Поэтому $\eta_{\alpha|j} \rho_i = \eta_{\alpha|i} \rho_j$. Из линейной независимости ρ_i и ρ_j следует $\eta_{\alpha|i} = \eta_{\alpha|j} = 0$. Таким образом, $\eta_{\alpha|i} = 0$. Значит, $\eta_{\alpha} = \text{const}$.

Теперь дифференциальное уравнение (20) легко решается: $s_{\alpha} = \eta_{\alpha} \rho + a_{\alpha}$, где a_{α} — постоянный вектор. Далее возможны два случая:

1°. $\eta_{\alpha} = 0$. Тогда $s_{\alpha} = a_{\alpha}$ и F^{m+k} есть k -цилиндр над базой F^m .

2°. Существует такое α , что $\eta_{\alpha} \neq 0$. Для определенности положим $\eta_{\alpha} \neq 0$. Перенесем начало координат в точку с радиусом-вектором a_1 . Тогда $s_{\alpha} = \eta_{\alpha} \rho + (a_{\alpha} - a_1) = \eta_{\alpha} \rho + b_{\alpha}$, причем $b_1 = 0$. В этом случае наша k -линейчатая поверхность имеет вид $r(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^k) = \rho(u^1, \dots, u^m) + v^{\alpha} (\eta_{\alpha} \rho(u^1, \dots, u^m) + b_{\alpha}) = (1 + v^{\alpha} \eta_{\alpha}) \times \rho(u^1, \dots, u^m) + v^{\alpha} b_{\alpha}$. Введем новые переменные: $\bar{v}^1 = 1 + v^{\alpha} \eta_{\alpha}$, $\bar{v}^{\beta} = v^{\beta}$, $\beta = 2, \dots, k$. Тогда $r(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^k) = \bar{v}^1 \rho(u^1, \dots, u^m) + \bar{v}^{\alpha} b_{\alpha}$. Учитывая, что $b_1 = 0$, получаем $F^{m+k} - (k-1)$ -цилиндр над 1-конусом. Это завершает доказательство теоремы.

При рассмотрении этой теоремы не требовалась полнота изучаемой k -линейчатой поверхности. Если же наложить это условие, то $(k-1)$ -цилиндр над 1-конусом придется исключить, так как он обладает особенностью. Имеет место

Теорема 2. Для того чтобы полная k -линейчатая поверхность была k -цилиндром, необходимо и достаточно, чтобы любое регулярное однопараметрическое семейство образующих обладало нулевой скалярной кривизной.

Если размерность базы не меньше двух, то этот факт тривиально следует из теоремы 1. Однако дополнительное требование полноты распространяет наш результат на поверхности с 1-мерной базой.

Необходимость в теореме 2 доказывается так же, как в теореме 1.

Для доказательства достаточности заметим, что из одномерности базы и условия теоремы следует, что поверхность имеет нулевую скалярную кривизну, а в силу линейчатости — нулевую секционную кривизну по любой 2-мерной площадке. Следовательно, поверхность локально изометрична евклидову пространству. Универсальная накрывающая полной поверхности изометрична всему евклидову пространству. Из теоремы, доказанной в [10], следует, что универсальная накрывающая — цилиндр. Поэтому исследуемая поверхность также является цилиндром.

Список литературы: 1. Шефель С. З. О двух классах k -мерных поверхностей в n -мерном евклидовом пространстве // Сиб. мат. журн. — 1969. — 10, № 2. — С. 459—467. 2. Hartman P. On isometric immersions in Euclidean Space of manifolds with non negative sectional curvatures // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — 147. — P. 529—540. 3. Борисенко А. А. О параболических поверхностях в евклидовом пространстве // Укр. геометр. сб. — 1982. — Вып. 25. — С. 3—5. 4. Ровенский В. Ю. Многомерные однозначно проектируемые поверхности в сферическом и проективном пространствах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Караганда, 1985. — 277 с. — Машинопись. 5. Борисенко А. А. О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // Мат. сб. — 1981. — 116 (158), № 3(11). — С. 440—457. 6. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. —

М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— 316 с. 7. *Борисенко А. А.* Многомерные поверхности неположительной внешней кривизны: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Х., 1982.—300 с. 8. *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики.— М. : Мир, 1984.— 304 с. 9. *Chen B. J.* Geometry of manifolds.— Marsel, 1973.— 253 p. 10. *Борисенко А. А.* О строении непрерывной поверхности, содержащей прямую // Укр. геометр. сб.— 1973.— Вып. 14.— С. 21—24.

Поступила в редколлегию 08.09.86

УДК 514

А. А. БОРИСЕНКО

**О НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ
МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Известно, что эйлерова характеристика компактной l -мерной поверхности отрицательной внешней двумерной кривизны в римановом пространстве R^{2l-1} равна нулю [1]. Для поверхностей в сферическом пространстве эту теорему можно усилить.

Пусть x — единичный вектор в касательном пространстве $T_Q F^l$ в римановом пространстве R^{l+p} с компонентами x^i относительно ортогонального базиса единичных касательных векторов. Нормальной кривизной поверхности в направлении x называется величина

$$k(x) = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^p A_{ij}^\alpha A_{kl}^\alpha x^i x^j x^k x^l},$$

где A_{ij}^α — коэффициенты вторых квадратичных форм поверхности относительно ортогонального базиса единичных нормалей. Если в направлении x на поверхности F^l проведем кривую L , то $k(x)$ будет модулем проекции вектора кривизны кривой L на нормальное пространство. В точке Q эта величина одна и та же для всех кривых поверхности F^l , проходящих через точку Q в этом направлении. Пусть $k_0 = \max k(x)$, где максимум взят по всем единичным векторам, касательным к поверхности F^l . Справедлива

Теорема 1. Пусть F^{2l} — компактная поверхность в сферическом пространстве S^{4l-1} , двумерная кривизна которой $\gamma_2 < 1$. Тогда максимум нормальных кривизн $k_0 \geq 1$.

Доказательство. Допустим, что $k_0 < 1$. С одной стороны, эйлерова характеристика $\chi(F^{2l}) = 0$ [1]. С другой стороны, по известной формуле [2]

$$\chi(F^{2l}) = \int_{F^{2l}} \gamma_{2l},$$

где

$$\gamma_{2l}(Q) = \frac{1}{2^{2l} 2!} \sum_{i, j \in S_{2l}} \varepsilon(i) \varepsilon(j) R_{i_1 i_2 j_1 j_2} \dots R_{2l-1 2l 2l-1 2l}.$$

Здесь S_{2l} — множество всех подстановок степени $2l$, R_{ijkl} — компоненты тензора кривизны в ортонормированном базисе.

Считаем F^{2l} поверхностью в $E^{4l} \supset S^{4l-1}$; v_0 — единичная нормаль к F^{2l} , которая совпадает с нормалью к сфере $S^{4l-1} \subset E^{4l}$. Известно, что

$$\gamma_{2l}(Q) = c \int_{v \in N_Q F^l} \det A(v), \quad (1)$$

где $A(v)$ — матрица коэффициентов второй квадратичной формы поверхности $F^{2l} \subset E^{4l}$ относительно единичной нормали v . Возьмем на сфере единичных нормалей полярные координаты с полюсом в точке v_0 и перейдем к повторному интегрированию в формуле (1) сначала вдоль больших полуокружностей, а потом по единичной полярной сфере S^{2l-2} :

$$\gamma_{2l}(Q) = c \int_{S^{2l-2}} \int_{S^1} \det A(v).$$

Оценим знак $\int_{S^1} \det A(v)$. Так как [3]

$$\gamma_{2l}(Q) = \sum_v \det A(v), \quad (2)$$

где сумма взята по всем нормальям $v = \sum_{\alpha=1}^p \pm v_{\alpha} / \sqrt{p}$; v_{α} — ортонормированный базис нормалей; p — коразмерность вложения, то в силу формул (1) и (2), применяемых для случая, когда единичные нормали пробегают S^1 :

$$\int_{S^1} \det A(v) = 2(\det A(v_0) + \det A(v_0^{\perp})), \quad (3)$$

где v_0, v_0^{\perp} — ортогональные единичные нормали с концами на окружности S^1 . Пусть v_0, v_1 — ортогональные единичные нормали с концами на S^1 , $A^0(x, x), A^1(x, x)$ — значения вторых квадратичных форм относительно этих нормалей на единичных векторах $x \in T_Q F^l$. Так как по предположению $k_0 < 1$, то $|A^1(x, x)| < 1, A^0(x, x) = 1$. Поэтому вторые квадратичные формы поверхности относительно взаимно перпендикулярных нормалей $(v_0 + v_1) / \sqrt{2}, (v_0 - v_1) / \sqrt{2}$ положительно определены и по формуле (3) будет $\int_{S^1} \det A(v) > 0$.

Отсюда следует положительность γ_{21} и эйлеровой характеристики. Пришли к противоречию.

Определение. Поверхность в римановом пространстве называется k -выпуклой, если для каждой нормали вторая квадратичная форма после приведения к диагональному виду имеет не менее $k + 1$ коэффициентов одного знака, включая нулевые коэффициенты.

Если хотя бы для одной нормали вторая квадратичная форма положительно определена, то поверхность — строго k -выпуклая.

С. З. Шефелем была построена теория G -устойчивых погружений, на основе которой ранее был выделен другой класс k -выпуклых поверхностей [4]. Мы заимствуем термин для иного класса поверхностей.

Лемма 1 [5]. Пусть F^l — компактная k -выпуклая поверхность в E^n . Тогда группа гомологий $H_{l-k+s}(F^l, G) = 0$, где $0 \leq s \leq 2k - l$, $G = Z, Z_p$.

Определение. Поверхность называется сильно k -выпуклой, если найдется плоскость $E^{k+1} \subset T_Q F^l$ такая, что ограничения вторых квадратичных форм относительно различных нормалей в этой плоскости пропорциональны между собой и знакоопределены.

Лемма 2 [6]. l -мерная поверхность постоянной положительной кривизны является сильно $(l - p)$ -выпуклой.

Риманово многообразие R^l имеет метрику класса один, если в каждой точке существует окрестность, которая в классе регулярных поверхностей изометрично погружается в E^{l+1} и не погружается в E^l .

Лемма 3. l -мерная поверхность в евклидовом пространстве E^{l+p} ($p \leq l - 2$), которая несет метрику первого класса положительной кривизны, является сильно $(l - p)$ -выпуклой.

Доказательство. В произвольной точке $Q \in F^l$ тензор кривизны поверхности F^l имеет вид $R_{ijk} = b_{ik}b_{jl} - b_{il}b_{jk}$, где b_{ik} — коэффициенты положительно определенной квадратичной формы. Это следует из формулы Гаусса и того факта, что поверхность — риманово многообразие

первого класса. В некотором ортогональном базисе форма $b_{ij}t^i t^j$ приводится к диагональному виду $R_{ij}t^i t^j = \lambda_i \lambda_j$, где $\lambda_i = b_{ii}$. Остальные компоненты тензора кривизны равны нулю. Выберем касательную плоскость $T_Q F^l$ за координатную x_1, \dots, x_l ; главные направления тензора b_{ij} — за оси x_i ; оси x_{l+1}, \dots, x_{l+p} лежат в ортогональной плоскости $N_Q F^l$. Осуществим аффинное преобразование $E^{l+p}: x'_i = x_i \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, l$; $x'_i = x_i$, $i = l+1, \dots, p$. Поверхность F^l переходит в поверхность \tilde{F}^l , тензор кривизны которой в точке \tilde{Q} имеет вид $\tilde{R}_{ij}t^i t^j = 1$, т. е. двумерная кривизна поверхности F^l в точке \tilde{Q} равна единице. По лемме 2 поверхность \tilde{F}^l сильно $(l-p)$ -выпукла. Так как при аффинном преобразовании пространства сильно k -выпуклые поверхности переходят в сильно k -выпуклые, то поверхность F^l — сильно $(l-p)$ -выпукла в произвольной точке Q .

Заметим, что сильно k -выпуклые поверхности являются k -выпуклыми поверхностями, но обратное в общем случае неверно.

Лемма 4. Пусть R^l ($l \geq 3$) — компактное односвязное риманово многообразие положительной кривизны первого класса. Тогда риманово многообразие диффеоморфно сфере S^l .

Доказательство. Погрузим изометрично окрестность U_0 точки Q_0 в E^{l+1} . С точностью до движения это возможно единственным образом, так как ранг второй квадратичной формы погружения ≥ 3 . Выберем одно из погружений f_0 . Пусть $L(Q)$ — кривая, соединяющая точку Q_0 с точкой Q на R^l . Покроем $L(Q)$ погружаемыми окрестностями U_i , причём центр окрестности U_i , точка Q_i , лежит в окрестности U_{i-1} , $Q_i = Q$. Точка Q_1 лежит в образе $f_0(U_0)$. Выбираем такое погружение f_1 окрестности U_1 , чтобы $f_0(Q_1) = f_1(Q_1)$ и чтобы в касательном пространстве направления, соответствующие по изометрии, совпали между собой. Тем самым погружение f_1 выбирается однозначно. Продолжая дальше этот процесс, погрузим окрестность U_n точки $Q = Q_n$.

Покажем, что погружение окрестности точки Q не зависит от выбора кривой. Пусть $L_1(Q), L_2(Q)$ — две кривые, соединяющие точки Q_0, Q . В силу односвязности многообразия R^l существует непрерывная деформация $L_t(Q)$, $1 \leq t \leq 2$, переводящая $L_1(Q)$ в $L_2(Q)$. Пусть t_0 — точная верхняя грань значений параметра t , для которых погружение окрестности $U(Q)$ точки Q вдоль кривой $L_t(Q)$ совпадает с погружением вдоль кривой L_1 . Пусть $r(Q)$ — радиус геодезического шара с центром в точке Q , который изометрично погружается в E^{l+1} . В силу компактности поверхности $r_0 = \min r(Q) > 0$. Поэтому для значений t из некоторой окрестности t_0 погружение окрестности $U(Q)$ не зависит от кривой $L(Q)$. Отсюда следует, что $t_0 = 2$. Так как погружение не зависит от выбора кривой $L(Q)$, то можно полностью изометрично погрузить многообразие R^l в E^{l+1} в виде регулярной гиперповерхности F^l . В силу положительности кривизны гиперповерхность локально выпукла. В силу компактности многообразия по теореме Адамара [7, с. 290] F^l — компактная выпуклая гиперповерхность, диффеоморфная сфере S^l .

Теорема 2. Пусть F^l — компактная поверхность положительной кривизны в римановой метрике класса один в евклидовом пространстве E^{l+p} . Если $p \leq l/2$, то F^l — односвязна и диффеоморфна стандартной сфере S^l .

Доказательство. Допустим, что F^l — неодносвязная поверхность. Тогда существует накрытие $\pi: \tilde{F}^l \rightarrow F^l$ такое, что фундаментальная группа \tilde{F}^l изоморфна циклической группе Z_q , где q — простое число. Можно считать, что \tilde{F}^l изометрично погружено в E^{l+p} . По лемме 3 поверхность \tilde{F}^l является сильно $(l-p)$ -выпуклой и, тем более, $(l-p)$ -выпуклой. По лемме 1 $H_p(\tilde{F}^l, Z_q) = 0$. С другой стороны, $\pi_1(\tilde{F}^l) = Z_q$ и по лемме 4 универсальной накрывающей \tilde{F}^l является сфера S^l , поэтому из спектральной последовательности накрытия $S^l \rightarrow \tilde{F}^l$ [8, теорема 17.1] следует, что $H_p(\tilde{F}^l, Z_q) = H_p(K(Z_q, 1), Z_q) = Z_q$, где $K(Z_q, 1)$ — комплекс Эйленберга—Маклейна, т. е. пространство, у которого $\pi_1(K(Z_q, 1)) = Z_q$, а остальные гомотопические группы тривиальны. Пришли к противоречию. Поэтому F^l односвязна и в силу леммы 4 диффеоморфна S^l .

Теорема 2 обобщает доказанную Муром теорему о том, что компактная поверхность F^l постоянной кривизны, равной единице, в E^{l+p} односвязна и изометрична стандартной единичной сфере [6]. Доказательство теоремы 2 существенно использует этапы доказательства теоремы Мура.

Без предположения отрицательности внешней кривизны справедлива

Теорема 3. Пусть F^l ($l \geq 5$) — компактная поверхность в сферическом пространстве S^{l+p} . Если $K_0 < 1/\sqrt{p}$, то поверхность гомеоморфна сфере.

Доказательство. Считая F^l поверхностью в $E^{l+p+1} \supset S^{l+p}$ и учитывая ограничение на нормальную кривизну, можно выбрать такой ортонормированный базис единичных нормалей v_α , что вторая квадратичная форма F^l относительно каждой нормали v_α положительно определена. Отсюда следует положительная определенность оператора кривизны $\Phi = R_{ijkl} a^{ij} a^{kl}$, являющегося симметричной квадратичной формой на пространстве бивекторов $\Lambda^2 F^l_Q$. Из положительной определенности оператора кривизны следует, что рациональные группы гомологий и когомологий поверхности F^l и сферы S^l совпадают [9]. Покажем, что целочисленные гомологии F^l не имеют кручений. Если это не так, то для некоторых k ($0 < k < n$) будет $H_k(F^l, Z_p) \neq 0$, где p — некоторое простое число. По двойственности Пуанкаре $H_{l-k}(F^l, Z_p) \neq 0$. В силу положительной определенности второй квадратичной формы относительно каждой нормали v_α из [10] следует $\beta_1 + \dots + \beta_{n-1} < 2$, где $\beta_i = \dim H_k(F^l, G)$. В [10] положительная определенность квадратичных форм следовала из коразмерности. Прелыдущее предположение противоречит этому неравенству, исключая $k = l/2$. В случае $l = 2m$ все кручения лежат в $H_m(F^l, Z)$. Но так как $\text{Тог } H_m(F^l, Z) = \text{Тог } H_{m-1}(F^l, Z)$, то из неравенства следует,

что эти кручения нулевые и что поверхность F^l односвязна. Если поверхность F^l односвязна, то по теореме Гуревича об изоморфизме $\pi_i(F^l) = 0$, $0 < i < l$, $\pi_l(F^l) = Z$. По теореме об h -кобордизме F^l гомеоморфна S^l при $l \geq 5$ [11].

Допустим F^l неодносвязна. Из компактности поверхности, положительности секционной кривизны F^l и теоремы Мейера следует, что фундаментальная группа $\pi_1(F^l)$ конечна. Из предыдущих рассуждений следует, что универсальная накрывающая F^l диффеоморфна S^l . Пусть \tilde{F}^l — такая накрывающая F^l , что $\pi_1(\tilde{F}^l) = Z_q$, где q — простое число. Применяя спектральную последовательность накрытия аналогично доказательству теоремы 2, приходим к противоречию с тем, что $H_p(F^l, Z_q) = 0$.

Список литературы: 1. *Борисенко А. А.* Об эйлеровой характеристике компактных поверхностей отрицательной внешней кривизны в римановом пространстве // Укр. геометр. сб.— 1975.— Вып. 18.— С. 20—25. 2. *Понтрягин Л. С.* Характеристические циклы дифференцируемых многообразий // Мат. сб.— 1947.— 21.— С. 233—284. 3. *Борисенко А. А.* Многомерных параболических поверхностей в евклидовом пространстве // Укр. геометр. сб.— 1982.— Вып. 25.— С. 3—5. 4. *Шефель С. З.* Геометрические свойства погруженных многообразий // Сиб. мат. журн.— 1985.— № 1.— С. 170—188. 5. *Борисенко А. А.* Внешние геометрические и топологические свойства параболических и седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // ДАН СССР.— 1981.— 257, № 4.— С. 783—787. 6. *Moor J. D.* Submanifolds of constant positive curvature. I // Duke Math. J.— 1977.— 44, N 2.— P. 449—484. 7. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1970.— 410 с. 8. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий.— М.: Мир, 1964.— 468 с. 9. *Callot S., Meyer D.* Opérateur de caubure et Laplacien des Formes différentielles d'une variété riemannienne // J. Math. Pures. Appl.— 1975.— 54.— P. 259—284. 10. *Moor J. D.* Co-dimension two submanifolds of positive curvature // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978.— 70, N 1.— P. 72—75. 11. *Милнор Дж.* Теорема об h -кобордизме.— М.: Мир, 1969.— 114 с.

Поступила в редколлегию 05.10.86

К ТЕОРИИ КРИВИЗНЫ ОСНАЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ Δ_2 В E_4

§ 1. Основные сведения. В четырехмерном евклидовом пространстве E_4 с криволинейной системой координат $\{X^i\}$ рассмотрим подвижный репер $R(A, e_i)$, $i = \overline{1, 4}$. Деривационные формулы репера R имеют вид

$$dA = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^k e_k, \quad (1.1)$$

где линейные дифференциальные формы Пфаффа ω^i , ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства $D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$, $D\omega_i^k = = \omega_i^j \wedge \omega_j^k$. Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $i, j, k = 1, 2, 3, 4$; $a, b, \dots = 1, 2$; $\alpha, \beta, \dots = 3, 4$. По одинаковым индексам разных уровней производится суммирование в соответствующих пределах.

В каждой точке A пространства E_4 зададим по определенному закону 2-плоскость $T(A)$, проходящую через точку A . Векторы e_1, e_2 репера R расположим в этой плоскости, векторы e_3, e_4 — в ортогональной к ней 2-плоскости $N(A)$. Тем самым в окрестности точки A задается некоторое двумерное распределение Δ_2 . Зададим теперь в каждой точке A пространства E_4 по определенному закону орт-вектор p в нормальной плоскости $N(A)$. Такое распределение будем называть оснащением распределением Δ_2 в E_4 . Кривые линии, которые в каждой своей точке касаются 2-плоскости $T(A)$, образующей с этой точкой элемент распределения Δ_2 , называются интегральными кривыми распределения.

Выбирая формы ω^i в качестве базисных, формы ω_α^α можно представить как их линейные комбинации: $\omega_\alpha^\alpha = \Gamma_{ai}^\alpha \omega^i$ (1.2).

Для смещения точки A в 2-плоскости $T(A)$ выполняются условия $\omega_\alpha = 0$ (1.3).

Система дифференциальных уравнений (1.3) определяет совокупность интегральных кривых распределения.

Для того чтобы система дифференциальных уравнений (1.3) была вполне интегрируема, необходимо и достаточно выполнение условий $D\omega_\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha = 0$, откуда, используя уравнение структуры евклидова пространства и равенства (1.2), (1.3), получим $G^\alpha = \Gamma_{21}^\alpha - \Gamma_{12}^\alpha = 0$ (1.4).

Когда эти условия выполнены, множество интегральных кривых распределения Δ_a , соответствующих выбранной точке A пространства E_3 , расположено в окрестности этой точки на двумерной поверхности этого пространства.

Учитывая ортонормированность репера R , получим равенство $\omega^i = -\omega^j$ (1.5).

§ 2. Относительная кривизна интегральной кривой. Индикатриса. 1. Рассмотрим произвольную интегральную кривую C с касательным вектором $\tau = \frac{\omega^a}{ds} e_a = v^a e_a$, где s — натуральный параметр кривой C . Относительной кривизной k_p кривой C в точке A будем называть проекцию вектора $d\tau/ds$ на вектор p .

После дифференцирования первого из уравнений (1.1), учитывая остальные уравнения (1.1) и равенства (1.3), получим $d^2A = d\omega^i e_i + \omega^i \omega^j e_k$ (2.1). Из определения k_p следует формула

$$k_p = \frac{\omega^a}{ds} \cdot \frac{\omega^a}{ds} p_\alpha, \quad (2.2)$$

или, согласно равенствам (1.2) и (1.3),

$$k_p = \Gamma_{ab}^\alpha v^a v^b p_\alpha. \quad (2.2')$$

Замечание 1. Так как выражение k_p содержит только величины Γ_{ab}^α , p_α и $\omega^1 : \omega^2$, определяющее направление касательной для выбранной кривой C , то все кривые, имеющие в точке A общую касательную, имеют в этой точке и одинаковую относительную кривизну. Это — аналог теоремы Менье.

Величину $\rho = 1/|k_p|$ по аналогии с понятием радиуса кривизны кривой на поверхности будем называть радиусом относительной кривизны интегральной кривой C в точке A :

$$|k_p| = \frac{1}{\rho} = |\Gamma_{ab}^\alpha v^a v^b p_\alpha|. \quad (2.3)$$

2. К понятию относительной кривизны можно прийти иначе. Пусть при перемещении в 2-плоскости $T(A)$ по некоторому направлению dA получаем новую плоскость распределения $T(A') = T(A + dA)$. Векторы p и $p + dp$ будут векторами заданного векторного поля соответственно в точках A и $A + dA$.

За меру относительной кривизны интегральной кривой C в точке A , определенной направлением $\tau = dA/ds$, примем предел при $A \rightarrow A'$ величины $(\widehat{p, p + dp})/|AA'|$, т. е.

$$\begin{aligned} k_p &= \lim_{A \rightarrow A'} \frac{\sin(\widehat{p, p + dp})}{|AA'|} = \lim_{A \rightarrow A'} \left| \frac{\cos(\tau, p + dp)}{ds} \right| = \\ &= \lim_{A \rightarrow A'} \frac{|dA \cdot (p + dp)|}{ds^2 |p + dp|} = \lim_{A \rightarrow A'} \frac{|\omega^a e_a (p_\alpha e_\alpha + p_\alpha de_\alpha + dp_\alpha e_\alpha)|}{ds^2 |p + dp|}. \end{aligned}$$

Учитывая только старшие члены и равенства (1.1), получим

$$|k_p| = \frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{\alpha} (\omega_{\alpha}^1 \omega^1 + \omega_{\alpha}^2 \omega^2) p_{\alpha}}{ds^2}.$$

Согласно (1.5) и (1.2), последнее равенство можно записать так:

$$k_p = \frac{1}{\rho} = \frac{|-\omega_a^{\alpha} \omega^a p_{\alpha}|}{ds^2} = |\Gamma_{ab}^{\alpha} v^a v^b p_{\alpha}|,$$

что совпадает с (2.3).

Замечание 2. Если рассмотреть интегральную кривую, у которой соприкасающаяся плоскость определена направлением τ и вектором p , то (2.3) определяет главную кривизну этой интегральной кривой, т. е. имеет место

Теорема. *Относительная кривизна интегральной кривой C , определенной направлением τ , совпадает с главной кривизной интегральной кривой, имеющей соприкасающуюся 2-плоскостью плоскость, натянутую на τ и вектор p .*

3. Относительная кривизна интегральной кривой C связана с нормальной кривизной k_n этой кривой [1] следующим образом. Рассмотрим в нормальной 2-плоскости $N(A)$ единичный вектор q , ортогональный вектору p . Нетрудно убедиться, что имеет место соотношение $k_p \cdot p + k_q \cdot q = k_n$ (2.4), где через k_n обозначен вектор нормальной кривизны интегральной кривой C .

4. В касательной 2-плоскости $T(A)$ распределения Δ_2 в направлении $\tau = v^a e_a$ отложим длину, равную $\sqrt{\rho}$, определенную этим направлением (2.3). Изменяя непрерывным образом направление τ , получим в плоскости $T(A)$ некоторую кривую; найдем ее уравнение.

Пусть $x^a = v^a \sqrt{\rho}$ — координаты точки этой кривой. Тогда из (2.3) следует $\Gamma_{ab}^{\alpha} x^a x^b p_{\alpha} = \pm 1$ (2.5).

Полученная кривая дает возможность следить за изменением радиуса относительной кривизны при изменении направления. Она называется индикатрисой относительной кривизны распределения Δ_2 в точке A . Это кривая второго порядка. Ее тип зависит от знака выражения

$$D = [(\Gamma_{12}^{\alpha} + \Gamma_{21}^{\alpha}) p_{\alpha}]^2 - 4\Gamma_{11}^{\alpha} p_{\alpha} \cdot \Gamma_{22}^{\alpha} p_{\alpha} \quad (2.6).$$

По типу этой кривой можно классифицировать точки пространства. Именно, если $D < 0$, $= 0$ или > 0 , то кривая (2.5) будет соответственно эллипсом, параболой или гиперболой и точка пространства соответственно будет называться относительно эллиптической, относительно параболической, относительно гиперболической.

§ 3. *Относительные главные кривизны. Полная относительная кривизна, ее связь с полной кривизной распределения. Теорема Эйлера. Омбилики.* 1. Как и в случае поверхности, наибольшее и наименьшее значения ρ назовем главными радиусами относительной кривизны, соответствующие направления — относительными главными направлениями, а соответствующие кривизны — относительными главными кривизнами.

Найдем их значения. Для этого будем искать экстремум выражения $\frac{1}{\rho} = \Gamma_{\alpha}^{\alpha} v^{\alpha} v^{\beta} \rho_{\alpha}$ при условии $v^1 + v^2 = 1$. Используя метод множителей Лагранжа, рассмотрим функцию $F = \frac{1}{\rho} - \lambda(v^1 + v^2 - 1)$. Дифференцируем ее и приравняв нулю частные производные, получим

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} v^1 + (\Gamma_{12}^{\alpha} + \Gamma_{21}^{\alpha}) \rho_{\alpha} v^2 - 2\lambda v^1 &= 0, \\ (\Gamma_{12}^{\alpha} + \Gamma_{21}^{\alpha}) \rho_{\alpha} v^1 + 2\Gamma_{22}^{\alpha} \rho_{\alpha} v^2 - 2\lambda v^2 &= 0, \\ v^1 + v^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Условие совместности первых двух уравнений относительно v^1, v^2 имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2(\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} - \lambda) & (\Gamma_{12}^{\alpha} + \Gamma_{21}^{\alpha}) \rho_{\alpha} \\ (\Gamma_{12}^{\alpha} + \Gamma_{21}^{\alpha}) \rho_{\alpha} & 2(\Gamma_{22}^{\alpha} \rho_{\alpha} - \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{или } 4\lambda^2 - 4\lambda(\Gamma_{22}^{\alpha} \rho_{\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha}) + 4\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} \Gamma_{22}^{\alpha} \rho_{\alpha} - ((\Gamma_{12}^{\alpha} + \Gamma_{21}^{\alpha}) \rho_{\alpha})^2 = 0. \quad (3.2)$$

Если первые уравнения в (3.1) умножить соответственно на v^1 и v^2 и сложить, то с помощью последнего уравнения этой системы получим $\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} (v^1)^2 + (\Gamma_{12}^{\alpha} + \Gamma_{21}^{\alpha}) \rho_{\alpha} v^1 v^2 + \Gamma_{22}^{\alpha} \rho_{\alpha} (v^2)^2 - \lambda((v^1)^2 + (v^2)^2) = 0$ или $\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} = \lambda = 0$, т. е. уравнение (3.2) дает выражение для главных радиусов относительной кривизны $1/\rho_1, 1/\rho_2$.

2. Произведение главных относительных кривизн назовем полной относительной кривизной распределения Δ_2 в точке A и обозначим через $K_{\Pi\rho}$. Выражение для $K_{\Pi\rho}$, согласно теореме Виета, принимает вид

$$K_{\Pi\rho} = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{4} (4\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} \Gamma_{22}^{\alpha} \rho_{\alpha} - ((\Gamma_{12}^{\alpha} + \Gamma_{21}^{\alpha}) \rho_{\alpha})^2). \quad (3.3)$$

Если $D > 0$, то $K_{\Pi\rho} < 0$, при $D < 0$, $K_{\Pi\rho} > 0$ и $K_{\Pi\rho} = 0$ при $D = 0$.

Сравнивая последнее выражение с (2.6), приходим к выводу: в относительно эллиптической точке пространства относительная полная кривизна распределения положительна, в относительно гиперболической точке — отрицательна и относительная кривизна равна 0 только в относительно параболической точке.

Относительная полная кривизна распределения связана с полной кривизной [см. II] следующим образом. В нормальной плоскости $N(A)$ распределения Δ_2 рассмотрим ортонормированную пару векторов p и q . Аналогично п. 3 § 2, можно убедиться, что $K_{\Pi\rho} + K_{\Pi q} = K_{\Pi}$ (3.4), где через K_{Π} обозначена полная кривизна распределения Δ_2 в точке A .

3. В теории поверхностей имеет место теорема Эйлера, которая утверждает, что сумма радиусов кривизны для двух взаимно ортогональных направлений постоянна.

Покажем, что эта теорема имеет место и в теории распределений Δ_2 в E_4 для радиусов относительной кривизны.

Ясно, что относительные главные направления ортогональны. Действительно, исключая λ из первых двух равенств (3.1), получим

$$-(\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) \rho_\alpha (v^1)^2 + 2(\Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{22}^\alpha) \rho_\alpha v^1 v^2 + (\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) \rho_\alpha (v^2)^2 = 0. \quad (3.5)$$

Из этого равенства следует соотношение $(v^1/v^2)_1 \cdot (v^1/v^2)_2 = -1$, которое и доказывает ортогональность этих направлений.

Так как $\tau(v^1, v^2)$ — единичный вектор, то его можно представить в виде $\tau(\cos \gamma, \sin \gamma)$. Выражение относительной кривизны для этого направления приобретает вид $1/\rho_\gamma = k_p = \Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha \cos^2 \gamma + (\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) \rho_\alpha \cos \gamma \sin \gamma + \Gamma_{22}^\alpha \rho_\alpha \sin^2 \gamma$ (3.6).

Приняв относительные главные направления за направления векторов e_1, e_2 , получим условие $(\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) \rho_\alpha = 0$, и тогда (3.6) принимает вид $1/\rho = \Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha \cos^2 \gamma + \Gamma_{22}^\alpha \rho_\alpha \sin^2 \gamma$. Для случая $\gamma = 0$ будет $1/\rho_1 = \Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha$ и $1/\rho_2 = \Gamma_{22}^\alpha \rho_\alpha$ — для $\gamma = \pi/2$. Это — относительные главные кривизны. Значит, для произвольного угла γ будет $1/\rho = \frac{1}{\rho_1} \cos^2 \gamma + \frac{1}{\rho_2} \sin^2 \gamma$.

Для ортогонального направления с углом $\gamma' = \gamma + \pi/2$ получим $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \sin^2 \gamma + \frac{1}{\rho_2} \cos^2 \gamma$, откуда $1/\rho_\gamma + 1/\rho_{\gamma'} = 1/\rho_1 + 1/\rho_2 = \text{const}$, что и доказывает теорему.

Следствие. Из уравнения индикатрисы относительной кривизны (2.5) следует, что относительные главные направления соответствуют вершинам индикатрисы. Действительно, если относительные главные направления приняты за направления осей координат, то уравнение индикатрисы относительной кривизны принимает вид $\Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha (x^1)^2 + \Gamma_{22}^\alpha \rho_\alpha (x^2)^2 = \pm 1$ и вершинами являются точки пересечения с осями координат, соответствующими относительным главным направлениям.

4. Рассмотрим точку, в которой радиус относительной кривизны по всем направлениям одинаков. В этой точке коэффициенты при $(v^1)^2, v^1 v^2, (v^2)^2$ в выражении для $1/\rho$ должны быть пропорциональны. В искомой точке относительная кривизна будет одинакова по всем направлениям в касательной плоскости распределения Δ_2 , но может быть различной для разных точек пространства, обладающих данными свойствами.

Такие точки будем называть относительными омбилическими. Убедимся, что они образуют в пространстве E_4 линию. Ее уравнение получается из (3.5) делением на $(v^1)^2 + (v^2)^2 = 1$ и приравниванием отношений соответствующих коэффициентов. Получим

$$\frac{\Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha}{1} = \frac{(\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) \rho_\alpha}{0} = \frac{\Gamma_{22}^\alpha \rho_\alpha}{1}.$$

Если оси координат направлены по относительным главным направлениям, то уравнение этой линии будет $(x^1)^2 + (x^2)^2 = \pm 1$.

Замечание. Так как в уравнение относительной омбилической кривой не входят координаты вектора ρ , то эта кривая будет омбилической для любого выбора вектора ρ , поэтому ее следует называть просто омбилической линией распределения Δ_2 в E_4 .

§ 4. Средняя относительная кривизна распределения, ее связь с средней кривизной, геометрический смысл. 1. По аналогии с теорией поверхностей полусумму относительных главных кривизн назовем

$$\text{относительной средней кривизной распределения } H_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Из уравнения (3.2) для отыскания относительных главных кривизн, согласно теореме Виета и с учетом $1/\rho = \lambda$, получим $H_p = \frac{1}{2} (\Gamma_{11}^\alpha +$

$$+ \Gamma_{22}^\alpha) \rho_\alpha \quad (4.1).$$

К понятию относительной средней кривизны можно прийти иначе. Выберем в касательной плоскости $T(A)$ любую ортогональную пару направлений $\tau(v^1, v^2)$ и $t(\omega^1, \omega^2)$. Из условия ортонормированности векторов τ и t получим соотношения $v^1 + v^2 = 1$, $\omega^1 + \omega^2 = 1$, $v^1\omega^1 + v^2\omega^2 = 0$, откуда $v^1 = \omega^2$, $v^2 = \omega^1$.

Для любой пары интегральных линий распределения, касающихся в точке A выбранных направлений τ и t , рассмотрим сумму относительных кривизн $k_{p_1} + k_{p_2} = \Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha (v^1 + \omega^1) + (\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) \rho_\alpha (v^1\omega^2 + v^2\omega^1) + \Gamma_{22}^\alpha \rho_\alpha (v^2 + \omega^2)$. Из условий ортогональности векторов τ и t следует $v^1\omega^2 + v^2\omega^1 = 0$, тогда $k_{p_1} + k_{p_2} = (\Gamma_{11}^\alpha + \Gamma_{22}^\alpha) \rho_\alpha$. Сравним последнее выражение с (4.1), получаем $H_p = \frac{1}{2} (k_{p_1} + k_{p_2}) \quad (4.2)$.

Таким образом, относительную среднюю кривизну распределения можно определять как полусумму относительных кривизн любой ортогональной пары направлений касательной плоскости распределения.

Относительная средняя кривизна распределения связана с вектором средней кривизны этого распределения [см. 2] соотношением $H = H_p \rho + H_q q \quad (4.3)$, где через H обозначим вектор средней кривизны распределения Δ_2 в E_4 в точке A ; ρ и q — ортонормированная пара векторов в плоскости $N(A)$.

2. Покажем, что относительная средняя кривизна распределения обобщает свойства средней кривизны поверхности, а именно, обращение в 0 относительной средней кривизны в каждой точке некоторой области пространства характеризует относительную минимальность распределения.

Рассмотрим в касательной плоскости $T(A)$ распределения произвольный вектор $dA = \omega^a e_a$.

Как было введено в [2], первой квадратичной формой интегральной кривой называется $ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$. По аналогии с поверхностью обозначим коэффициенты при $(\omega^1)^2$, $\frac{1}{2} \omega^1 \omega^2$, $(\omega^2)^2$ соответственно E, F, G . Тогда $ds^2 = E\omega^1 + 2F\omega^1\omega^2 + G\omega^2$.

В данном случае $E = G = 1, F = 0$.

Каждую точку исходной интегральной кривой проварьировем по вектору λp , где $\lambda = \lambda(s)$; получим $R = r + \lambda p$, где r — радиус-вектор исходной кривой, R — проварьированной кривой.

Обозначим через $d\tilde{s}^2$ первую квадратичную форму полученной кривой; $d\tilde{s}^2 = (dr + d\lambda p + \lambda dp)^2$. Положим $\lambda = \sigma\delta$, где δ — бесконечно малая величина, тогда $d\tilde{s}^2 = ds^2 + 2\delta\sigma(dr p_\alpha de_\alpha) + [\delta^2]$.

Воспользовавшись разложением (1.1) и представлением вектора p , получим $dr dp = (\omega_\alpha^1 \omega^1 + \omega_\alpha^2 \omega^2) p_\alpha$.

Обозначив $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ — для $d\tilde{s}^2$, аналогично E, F, G — для ds^2 , с учетом только главных членов получим

$$\tilde{E} = E - 2\delta\sigma\Gamma_{11}^\alpha p_\alpha, \quad \tilde{F} = F - \delta\sigma(\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) p_\alpha, \quad \tilde{G} = G - 2\delta\sigma\Gamma_{22}^\alpha p_\alpha.$$

Если в качестве рассматриваемой кривой C выбрать геодезическую «прямейшую» линию [см. 3], определенную точкой A и выбранным направлением $\omega^1: \omega^2$, то величина $EG - F^2$ будет определять элемент соприкасающейся геодезической поверхности, $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$ — элемент проварьированной поверхности. С учетом только главных членов получим

$$\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = EG - F^2 - 2E\delta\sigma\Gamma_{22}^\alpha p_\alpha - 2G\delta\sigma\Gamma_{11}^\alpha p_\alpha + 2F\delta\sigma(\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) p_\alpha.$$

Проинтегрируем это равенство по элементам площади соприкасающейся геодезической поверхности. Чтобы исходная поверхность имела меньшую площадь по сравнению с проварьированной, необходимо равенство нулю относительной средней кривизны, т. е. $(\Gamma_{11}^\alpha + \Gamma_{22}^\alpha) p_\alpha = 0$.

Верно и обратное: при обращении в нуль относительной средней кривизны площадь соприкасающейся геодезической поверхности будет наименьшей при вариации по вектору p .

Замечание 1. Так как в рассуждениях мы не выходим за рамки второй дифференциальной окрестности, то, в силу теоремы Бомпиани для распределения Δ_2 [см. 4], доказанный факт остается верным для любой соприкасающейся поверхности распределения.

Замечание 2. В силу соотношения (4.3) можно заключить, что распределение, минимальное относительно двух ортогональных векторов p и q , является минимальным.

§ 5. Линии относительной кривизны 1- и 2-го рода; связь между ними. Относительная гауссова кривизна; ее связь с гауссовой кривизной распределения

В теории поверхностей линии кривизны получаются исходя из двух определений, приводящих к одинаковым результатам:

а) кривые, лежащие на поверхности и имеющие своими касательными направления осей индикатрисы нормальной кривизны, или, что то же, направления касательных главных нормальных сечений;

б) линии, в бесконечно близких точках которых нормали к поверхности пересекаются.

Как известно [см. 5], перенесение этих построений на системы интегральных кривых распределения Δ_2 в E_3 приводит к различным системам кривых.

В настоящем параграфе решается вопрос о построении линий кривизны двумерного распределения в четырехмерном евклидовом пространстве.

1. Линиями относительной кривизны 1-го рода будем называть интегральные линии распределения, огибаемые направлениями экстремальных относительных кривизн.

Уравнения этих линий можно получить из уравнения (3.1) для вычисления относительных главных кривизн. Исключая из первых двух равенств этой системы λ , получим равенство (3.5), и после умножения его на ds^2 уравнение линий относительной кривизны 1-го рода принимает вид

$$-(\Gamma_{10}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) p_\alpha \omega^1 + 2(\Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{22}^\alpha) p_\alpha \omega^1 \omega^2 + (\Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{21}^\alpha) p_\alpha \omega^{22} = 0. \quad (5.1)$$

Это квадратное уравнение определяет две системы интегральных кривых; таким образом, через каждую точку пространства проходят две такие линии, которые в точке A соответствуют касательным к линиям, имеющим наибольший и наименьший радиусы относительной кривизны.

Возвращаясь к следствию п. 3 § 3, заключаем, что в каждой точке пространства линии относительной кривизны 1-го рода направлены в обеим индикатрисы относительной кривизны распределения. Следовательно, эти линии образуют в каждой точке пространства ортогональную пару интегральных линий.

2. Линиями относительной кривизны 2-го рода назовем интегральные линии распределения, вдоль которых оснащающие нормали — векторы p — в бесконечно близких точках пересекаются.

Найдем уравнение этих линий. Согласно определению, существуют такие величины γ, λ , что имеет место соотношение $dA = \gamma p + \lambda(p + dp)$ (5.2).

Дифференцируя равенство $p = p_\alpha e_\alpha$, получим $dp = dp_\alpha e_\alpha + p_\alpha de_\alpha$, с учетом равенств (1.1) будет $dp = dp_\alpha e_\alpha + p_\alpha \omega_\alpha^k e_k$. Распишем по координатно исходное равенство и учитывая (1.3) и (1.1), найдем $\omega^\alpha = \gamma \cdot 0 + \lambda p_\alpha \omega_\alpha^\alpha$, $0 = \gamma \cdot p_\alpha + \lambda(p_\alpha + dp_\alpha + p^\beta \omega_\beta^\alpha)$.

Из последних двух равенств, учитывая только главные члены, получим $\lambda = -\gamma$.

Исключая из этих уравнений γ , получаем

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega_1^\alpha p_\alpha \\ \omega^2 & \omega_2^\alpha p_\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

уравнение линий относительной кривизны 2-го рода с использованием разложений (1.2) примет вид $\Gamma_{21}^\alpha p_\alpha \omega^1 + (\Gamma_{22}^\alpha - \Gamma_{11}^\alpha) p_\alpha \omega^1 \omega^2 - \Gamma_{12}^\alpha p_\alpha \omega^{22} = 0$ (5.3).

3. а) Сравнивая уравнения (5.1) и (5.3), определяющие линии относительной кривизны 1- и 2-го рода, видим, что эти уравнения совпадают при выполнении условий интегрируемости распределения (1.4). Покажем, что они совпадают только при выполнении условий интегрируемости.

Рассмотрим разность левых частей уравнений (5.1) и (5.3), умножив предварительно последнее уравнение на два. Получим $G^\alpha \rho_\alpha (\omega^1 + \omega^2) + \omega^2 = G^\alpha \rho_\alpha ds^2 = 0$.

Так как векторы e_3, e_4 репера R можно выбирать в плоскости $N(A)$ произвольным образом, и, следовательно, коэффициенты векторов могут быть любыми, то последнее выражение обращается в нуль только при выполнении условий (1.4), т. е. только в случае полной интегрируемости распределения Δ_2 .

Итак, две системы линий относительной кривизны совпадают только в случае выполнения условий интегрируемости, т. е. в случае поверхности. В противном случае это — две различные системы кривых.

б) Из уравнения (5.3) следует, что в общем случае линии относительной кривизны не будут ортогональны, так как по теореме Виейра для уравнения (5.3) можно записать $(\omega^1/\omega^2)_1 \cdot (\omega^1/\omega^2)_2 = -\Gamma_{12}^\alpha \rho_\alpha / \Gamma_{21}^\alpha \rho_\alpha \neq -1$.

Она будет ортогональна только в случае полной интегрируемости распределения, т. е. когда эта система совпадает с системой линий относительной кривизны 1-го рода.

в) Если направления биссектрис линий относительной кривизны 1-го рода принять за направления координатных осей, то будем $(\Gamma_{11}^\alpha - \Gamma_{22}^\alpha) \rho_\alpha = 0$. При этом для направлений линий относительной кривизны 2-го рода будет $(\omega_1/\omega_2)_{1,2} = \pm \sqrt{\Gamma_{12}^\alpha \rho_\alpha / \Gamma_{21}^\alpha \rho_\alpha}$, т. е. эти направления симметричны относительно координатных осей. Следовательно, направления линий относительной кривизны 1- и 2-го рода имеют общие биссектрисы.

4. а) Подсчитаем произведение относительных кривизн для линий относительной кривизны 2-го рода.

Для этого выражение (2.2) относительной кривизны представим в виде

$$k_p = \frac{\omega_1^\alpha \omega^1 + \omega_2^\alpha \omega^2}{\omega^1 + \omega^2} \rho_\alpha. \quad (5.1)$$

Равенства (5.2) умножим соответственно на ω^1, ω^2 и сложим, тогда $\omega^1 + \omega^2 = \gamma (\omega_1^\alpha \omega^1 + \omega_2^\alpha \omega^2) \rho_\alpha$, откуда $k_p = 1/\gamma$. Для нахождения запишем условие совместности системы (5.2) в отношении ω^1, ω^2 получим

$$\begin{vmatrix} 1 - \gamma \Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha & -\gamma \Gamma_{12}^\alpha \rho_\alpha \\ -\gamma \Gamma_{21}^\alpha \rho_\alpha & 1 - \gamma \Gamma_{22}^\alpha \rho_\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\gamma^2 (\Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha \Gamma_{22}^\beta \rho_\beta - \Gamma_{12}^\alpha \rho_\alpha \Gamma_{21}^\beta \rho_\beta) - \gamma (\Gamma_{11}^\alpha \rho_\alpha + \Gamma_{22}^\alpha \rho_\alpha) + 1 = 0$.

Взяв это уравнение, получим γ_1, γ_2 , соответствующие линиям относительной кривизны 2-го рода. Произведение соответствующих относительных кривизн $k_{p_1} \cdot k_{p_2} = \frac{1}{\gamma_1} \cdot \frac{1}{\gamma_2}$, и согласно теореме Виета $k_{p_1} \times k_{p_2} = \Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} \Gamma_{22}^{\beta} \rho_{\beta} - \Gamma_{12}^{\alpha} \rho_{\alpha} \Gamma_{21}^{\beta} \rho_{\beta}$ (5.5). Назовем эту величину относительной гауссовой кривизной распределения Δ в точке A и обозначим через K_{Gp} .

в) Сравнивая выражение (5.5) для K_{Gp} с выражением (3.3) для относительной полной кривизны K_{Pp} распределения Δ , приходим к выводу, что они связаны соотношением $K_{Gp} = K_{Pp} - \frac{1}{4} (G^{\alpha} \rho_{\alpha})^2$ (5.6).

Следовательно, относительная полная и гауссова кривизны совпадают только при выполнении условий интегрируемости.

г) Относительная гауссова кривизна распределения связана с гауссовой кривизной [1] следующим образом: $K_G = K_{Gp} + K_{Gq}$ (5.7), где через K_G обозначена гауссова кривизна распределения Δ в точке A , p и q — ортонормированная пара векторов плоскости $N(A)$.

Замечание. Полусумма относительных кривизн для линий относительной кривизны 2-го рода, согласно теореме Виета, дает $\frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{1}{2} (\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} + \Gamma_{22}^{\alpha} \rho_{\alpha}) = H_p$ — среднюю относительную кривизну (4.1).

б. Относительную гауссову кривизну по аналогии с теорией поверхностей можно определить через сферическое отображение. Именно в касательной плоскости $T(A)$ выбираются произвольно два направления $dA = \omega^i e_i, \bar{d}A = \bar{\omega}^i e_i$. Рассматривается площадь треугольника $\Delta A A' A''$, где $A' = A + dA, A'' = A + \bar{d}A$. Эта площадь $S_{\Delta A A' A''}$ выражается через векторы dA и $\bar{d}A$ следующим образом:

$$S = \sqrt{|dA|^2 |\bar{d}A|^2 - (dA \bar{d}A)^2} / 2 = |\omega^1 \bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^1 \omega^2| / 2.$$

В точках A, A', A'' рассмотрим соответственно векторы $p, p + dp, p + \bar{d}p$. Отнеся эти векторы в точку A , получим некоторый сферический треугольник. Так как стороны его малы, их можно считать отрезками прямых. Спроектируем полученный треугольник на плоскость $T(A)$ и подсчитаем его площадь $S^1 = |\rho_{\alpha} \omega_{\alpha}^1 \rho_{\beta} \bar{\omega}_{\beta}^2 - \rho_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha}^1 \rho_{\beta} \omega_{\beta}^2| / 2$. С учетом равенств (1.2) и (1.5) определим $S^1 = |\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} \Gamma_{22}^{\beta} \rho_{\beta} - \Gamma_{12}^{\alpha} \rho_{\alpha} \Gamma_{21}^{\beta} \rho_{\beta}| S$. Рассматривая отношение площадей полученного и исходного треугольников, найдем величину, не зависящую от выбора исходного направления. Этой величине можно придать знак, считая, что в числителе стоит смешанное произведение векторов $\Pi p_{T(A)} dp, \Pi p_{T(A)} \bar{d}p, e_3, e_4$. Тогда последняя величина примет вид $\Gamma_{11}^{\alpha} \rho_{\alpha} \Gamma_{22}^{\beta} \rho_{\beta} - \Gamma_{12}^{\alpha} \rho_{\alpha} \Gamma_{21}^{\beta} \rho_{\beta}$, что совпадает с выражением K_{Gp} .

Список литературы: 1. Глова Н. И. К теории кривизны системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4 // Укр. геометр. сб. — 1975. — Вып. 18. — С. 87—88. 2. Глова Н. И. К теории кривизны двумерного распределения четырехмерного евклидова пространства // Укр. геометр. сб. — 1983. — Вып. 26. —

- С. 30—40. 3. *Глова Н. И.* О геодезических линиях системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4 // Укр. геометр. сб.— 1975.— Вып. 17.— С. 44—50.
4. *Глова Н. И.* Инвариантная соприкасающаяся поверхность двумерного распределения пространства E_4 // Укр. геометр. сб.— 1979.— Вып. 22.— С. 35—45.
5. *Синцов Д. М.* Работы по неголономной геометрии.— К. : Вища шк.— 1972.— 294 с.

Поступила в редколлегию 01.07.80

О ДВУМЕРНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известно, что в n -мерном евклидовом пространстве не существуют двумерных минимальных поверхностей постоянной ненулевой гауссовой кривизны. Этот результат получен Пинлом в работе [1], где он отмечает, что при доказательстве используются утверждения, которые не имеют места в псевдоевклидовом пространстве.

Отметим, что в эллиптическом пространстве существуют минимальные поверхности постоянной ненулевой кривизны. В работе [2] найдены все двумерные минимальные поверхности постоянной гауссовой кривизны в эллиптических пространствах размерностей 3, 4, 5.

Пусть $E^{n,1}$ — псевдоевклидово пространство с квадратичной формой $dx_1^2 + \dots + dx_{n-1}^2 - dx_n^2$. В настоящей работе доказывается.

Теорема 1. *В псевдоевклидовом пространстве $E^{4,1}$ не существуют двумерных минимальных поверхностей постоянной ненулевой гауссовой кривизны.*

Метрика минимальной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, как известно, удовлетворяет условию Риччи: ds^2 является метрикой минимальной поверхности F^2 в E^3 тогда и только тогда, когда метрика $\sqrt{-K} ds^2$ имеет нулевую кривизну, здесь K — гауссова кривизна метрики ds^2 . Это условие можно записать в виде $\nabla_2 \ln \sqrt{-K} = K$, где ∇_2 — оператор Бельтрами. В работе [3] получено аналог условия Риччи для метрики двумерной минимальной поверхности в четырехмерном римановом пространстве постоянной кривизны. В частности, когда F^2 лежит в евклидовом пространстве E^4 , гауссова кривизна K метрики ds^2 поверхности F^2 удовлетворяет неравенству $\nabla_2 \ln \sqrt{-K} - (3/2)K \geq 0$. Это условие выражает, что гауссова кривизна метрики $\sqrt{-K} ds^2$ неположительна. Некоторые другие обобщения условия Риччи получены в работах [4–6].

Для минимальной поверхности в псевдоевклидовом пространстве можно также установить некоторые аналогичные внутренние условия. Как легко видеть из доказательства теоремы 1 в случае, когда минимальная поверхность F^2 расположена в $E^{3,1}$, для метрики ds^2 такой поверхности выполняется условие: метрика $d\sigma^2 = \sqrt{|K|} ds^2$ имеет

нулевую гауссову кривизну. Для минимальной поверхности в $E^{4,1}$ имеет место

Теорема 2. Пусть F^2 — двумерная пространственноподобная минимальная поверхность в псевдоевклидовом пространстве $E^{4,1}$, гауссова кривизна которой $K > 0$. Тогда выполняется неравенство:

$\nabla_x \ln \sqrt{K} - K < 0$. Это условие выражает, что гауссова кривизна метрики $ds^2 = K^{1/p} ds^2$, где $p \geq 2$, неотрицательна.

Под двумерной поверхностью в $E^{n,1}$ понимается двумерное дифференцируемое многообразие класса C^4 , на котором индуцируется невырожденная метрика. Поверхность в $E^{n,1}$ называется пространственноподобной (времениподобной), если все ее касательные плоскости пространственноподобны (времениподобны). На пространственноподобной поверхности индуцируется положительно определенная метрика.

Поверхность в $E^{3,1}$ с нулевой средней кривизной называется минимальной.

Покажем, что гауссова кривизна пространственноподобной минимальной поверхности F^2 в $E^{3,1}$ неотрицательна. Действительно, пусть в $E^{3,1}$ введены координаты x, y, z , в которых линейный элемент принимает вид $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Тогда поверхность F^2 можно задать в виде $z = f(x, y)$. Так как F^2 — пространственноподобна, то $1 - f_x^2 > 0$, $1 - f_y^2 - f_z^2 > 0$. Гауссова кривизна поверхности F^2 находится по формуле

$$K = \frac{f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}}{(1 - f_x^2 - f_y^2)^2}. \quad (1)$$

F^2 — минимальная поверхность, поэтому

$$(1 - f_x^2)f_{yy} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 - f_y^2)f_{xx} = 0. \quad (2)$$

Подставим f_{yy} из (2) в (1). После преобразований получим

$$K = \frac{(1 - f_x^2 - f_y^2)(f_{xx}^2 + f_{xy}^2) + (f_x f_{xx} + f_y f_{xy})^2}{(1 - f_x^2)(1 - f_x^2 - f_y^2)^2}.$$

Следовательно, $K \geq 0$.

Заметим, что гауссова кривизна времениподобной минимальной поверхности может быть как положительна, так и отрицательна.

Приведем сначала доказательство теоремы 1 в случае, когда минимальная поверхность F^2 лежит в $E^{3,1}$. Пусть $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 + Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ — ее первая и вторая квадратичные формы. Рассмотрим два случая.

1) Пусть F^2 — пространственноподобная поверхность. Предположим, что гауссова кривизна K поверхности F^2 отлична от нуля, следовательно, $K > 0$. Так как для пространственноподобной поверхности $EG - F^2 > 0$ и $K = \frac{M^2 - LN}{EG - F^2}$, то $LN - M^2 < 0$. Поэтому в каждой точке поверхности существуют два асимптотических направления.

Введем параметризацию поверхности, при которой координатные линии будут асимптотическими. При такой параметризации $L = N = 0$. Так как F^2 — минимальная поверхность, то $LG - 2MF + NE = 0$. Следовательно, $MF = 0$, откуда $F = 0$. Тогда $K = \frac{M^2}{EG}$. Поэтому $M = \pm \sqrt{KEG}$. Из уравнений Петерсона — Кодацци [7] при $L = M = F = 0$ получим $2EGM_v - M(EG_v - GE_v) = 0$ (3), $2EGM_u + M(EG_u - GE_u) = 0$ (4). Подставив в (3) и (4) $M = \sqrt{KEG}$, после преобразований получим $(EVK)_v = 0$, $(GVK)_u = 0$. Следовательно, $E = \frac{\Phi_1(u)}{\sqrt{K}}$, $G = \frac{\Phi_2(v)}{\sqrt{K}}$. Перенормировкой параметров u и v можно добиться, чтобы $E = G = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Таким образом, первая квадратичная форма поверхности F^2 примет вид $\frac{1}{\sqrt{K}}(du^2 + dv^2)$. Поэтому если предположить, что $K = \text{const}$, то $K = 0$, что невозможно.

2) Пусть теперь F^2 — времениподобная поверхность. Тогда $EG - F^2 < 0$. Следовательно, в каждой точке существует два направления $(du : dv)$, для которых $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = 0$. Возьмем линии, направления которых в каждой точке совпадают с одним из выделенных направлений, в качестве координатных. При такой параметризации $E = G = 0$. Из того, что F^2 — минимальная поверхность, следует $M = 0$. Из формул Петерсона — Кодацци при $E = G = M = 0$ получим $L_v = 0$, $N_u = 0$. Поэтому $L = \Phi_1(u)$, $N = \Phi_2(v)$. Предположим, что $K = \text{const} \neq 0$. Тогда перенормировкой параметров u и v можно добиться, чтобы было $LN = e$, где e равно $+1$ или -1 . Тогда гауссова кривизна $K = -e/F^2$. Поэтому первая квадратичная форма поверхности имеет вид $\sqrt{-e/K} du dv$. Но эта квадратичная форма имеет нулевую гауссову кривизну, что противоречит предположению $K \neq 0$.

Рассмотрим теперь поверхность F^2 в $E^{4,1}$. Пусть n_1 и n_2 — взаимно ортогональные единичные векторы, нормальные к F^2 , причем вектор n_1 — пространственноподобный. Тогда вектор n_2 — времениподобный, если поверхность F^2 пространственноподобная и n_2 является пространственноподобным вектором в случае, когда F^2 — времениподобная поверхность. Обозначим через L_{ij}^σ коэффициенты второй квадратичной формы поверхности F^2 относительно нормали n_σ ($\sigma = 1, 2$), а через g_{ij} — коэффициенты первой квадратичной формы. Величину $H^\sigma = g^{ij}L_{ij}^\sigma$ называют средней кривизной поверхности F^2 для направления нормали n_σ . Вектор средней кривизны поверхности F^2 определяется [7] выражением $H = (H^1 n_1 + e H^2 n_2)/2$, где $e = n_2^2$. Поверхность в $E^{4,1}$ с нулевым вектором средней кривизны называется минимальной.

По аналогии с [8] рассмотрим индикатрису нормальной кривизны пространственноподобной поверхности F^2 .

Пусть $\Pi(n_\sigma)$ — вторая квадратичная форма поверхности F^2 относительно нормали n_σ ($\sigma = 1, 2$), а ds^2 — первая квадратичная форма

Вектор $k_n = \frac{\Pi(n_1)}{ds^2} n_1 - \frac{\Pi(n_2)}{ds^2} n_2$ называется вектором нормальной кривизны поверхности F^2 в данном направлении. Обозначим через N_z^2 нормальное пространство поверхности F^2 в произвольной точке z . Каждому направлению на поверхности F^2 в точке z соответствует в нормальном пространстве N_z^2 вектор нормальной кривизны в данном направлении. При изменении направления в касательной плоскости конец вектора нормальной кривизны с началом в точке z описывает в N_z^2 замкнутую кривую, называемую индикатрисой нормальной кривизны. Найдем ее уравнение. Введем в окрестности точки z на поверхности F^2 ортогональные координаты u и v . Пусть $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ — первая квадратичная форма поверхности F^2 . Координаты u и v можно выбрать так, чтобы в точке z выполнялось соотношение $E = G = 1$. Можно положить $\sqrt{E} \frac{du}{ds} = \cos \theta$, $\sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \sin \theta$. Пусть x, y — координаты в нормальном пространстве относительно базиса n_1, n_2 . Тогда уравнения индикатрисы нормальной кривизны запишутся в виде:

$$x = \frac{L_{11}^1}{E} \cos^2 \theta + 2 \frac{L_{12}^1}{\sqrt{EG}} \cos \theta \sin \theta + \frac{L_{22}^1}{G} \sin^2 \theta,$$

$$y = -\frac{L_{11}^2}{E} \cos^2 \theta - 2 \frac{L_{12}^2}{\sqrt{EG}} \cos \theta \sin \theta - \frac{L_{22}^2}{G} \sin^2 \theta.$$

После преобразований получим

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{L_{11}^1}{E} + \frac{L_{22}^1}{G} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{L_{11}^1}{E} - \frac{L_{22}^1}{G} \right) \cos 2\theta + \frac{L_{12}^1}{\sqrt{EG}} \sin 2\theta,$$

$$y = -\frac{1}{2} \left(\frac{L_{11}^2}{E} + \frac{L_{22}^2}{G} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{L_{11}^2}{E} - \frac{L_{22}^2}{G} \right) \cos 2\theta - \frac{L_{12}^2}{\sqrt{EG}} \sin 2\theta. \quad (5)$$

Тогда уравнения индикатрисы в пространстве N_z^2 в координатах $\tilde{x} = x - (L_{11}^1 + L_{22}^1)/2$, $\tilde{y} = y + (L_{11}^2 + L_{22}^2)/2$ примут вид

$$\tilde{x} = \frac{L_{11}^1 - L_{22}^1}{2} \cos 2\theta + L_{12}^1 \sin 2\theta,$$

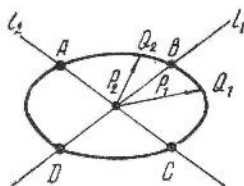
$$\tilde{y} = -\frac{L_{11}^2 - L_{22}^2}{2} \cos 2\theta - L_{12}^2 \sin 2\theta. \quad (6)$$

Пусть $p = \tilde{x}n_1 + \tilde{y}n_2$ — радиус-вектор индикатрисы. Обозначим $p^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$ — квадрат псевдоевклидовой длины вектора p . Используя (6), находим

$$\frac{dp^2}{d\theta} = -\frac{1}{2} [(L_{11}^1 - L_{22}^1)^2 - (L_{11}^2 - L_{22}^2)^2 - 4(L_{12}^1)^2 + 4(L_{12}^2)^2] \sin 4\theta +$$

$$+ 2[(L_{11}^1 - L_{22}^1)L_{12}^1 - (L_{11}^2 - L_{22}^2)L_{12}^2] \cos 4\theta. \quad (7)$$

Поэтому если $\frac{dp^2}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0$, то $\frac{dp^2}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0 + \frac{\pi}{4}} = 0$.



Проведем через начало координат в M^3 изотропные прямые l_1 и l_2 . Они параллельны векторам $n_1 + n_2$ и $n_1 - n_2$. Прямые l_1 и l_2 разбивают индикатрису на дуги AB , BC , CD и DA (рисунок). Функция $\rho^2(\theta)$ при значениях θ , соответствующих точкам A , B и C равна нулю. Следовательно, существуют точка Q_1 на дуге CB и точка Q_2 на дуге AB , такие, что при θ , соответствующих этим точкам, функция $\rho^2(\theta)$ принимает максимум и минимум соответственно. Радиус-вектор с концом в точке Q_i обозначим через ρ_i ($i = 1, 2$). Выберем теперь на поверхности F^2 координатные линии $v = \text{const}$ так, чтобы конец вектора нормальной кривизны, соответствующий направлению этой линии, попадал в точку Q_1 . Тогда из (7) получаем

$$(L_{11}^1 - L_{22}^1) L_{12}^1 - (L_{11}^2 - L_{22}^2) L_{12}^2 = 0. \quad (8)$$

Кроме того, вектор ρ_2 соответствует значению параметра $\theta = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\rho_1 = \frac{1}{2}(L_{11}^1 - L_{22}^1)n_1 - \frac{1}{2}(L_{11}^2 - L_{22}^2)n_2$, $\rho_2 = L_{12}^1 n_1 - L_{12}^2 n_2$. В силу равенства (8) векторы ρ_1 и ρ_2 взаимно ортогональны.

Пусть $\rho_1^2 = a^2$, $\rho_2^2 = -b^2$. В качестве нормали поверхности F^1 возьмем теперь векторы $n_1 = \frac{1}{a}\rho_1$, $n_2 = \frac{1}{b}\rho_2$. Обозначим $\frac{L_{11}^1 G + L_{22}^1 E}{2EG} = \alpha$, $-\frac{L_{11}^2 G + L_{22}^2 E}{2EG} = \beta$. Из (5) при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{L_{11}^1 G - L_{22}^1 E}{2EG} &= a, \quad \frac{L_{12}^1}{\sqrt{EG}} = 0, \\ -\frac{L_{11}^2 G - L_{22}^2 E}{2EG} &= 0, \quad -\frac{L_{12}^2}{\sqrt{EG}} = b. \end{aligned}$$

Отсюда следует $L_{11}^1 = (a + \alpha)E$, $L_{12}^1 = 0$, $L_{22}^1 = (\alpha - a)G$, $L_{11}^2 = -\beta E$, $L_{12}^2 = -b\sqrt{EG}$, $L_{22}^2 = -\beta G$. Заметим, что вектор средней кривизны поверхности F^2 равен $H = \alpha n_1 + \beta n_2$, а гауссова кривизна находится по формуле $K = \alpha^2 - \beta^2 - a^2 + b^2$. В частности, гауссова кривизна минимальной поверхности $K = b^2 - a^2$.

Перейдем к доказательству теоремы 1, в случае, когда F^2 лежит в $E^{4,1}$. Рассмотрим снова два случая.

1) Пусть F^2 — двумерная пространственноподобная минимальная поверхность в $E^{4,1}$. Выберем координаты u и v на поверхности F^2 и нормали n_1 и n_2 так, как это было сделано выше. В этом случае уравнения Гаусса—Кодацци — Риччи для поверхности F^2 [7] имеют вид

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right], \quad (9)$$

$$(aE)_v = b\sqrt{EG} v_1, \quad (10)$$

$$(aG)_u = -b\sqrt{EG} v_2, \quad (11)$$

$$(bG)_u = a\sqrt{EG} v_2, \quad (12)$$

$$(bE)_v = -a\sqrt{EG} v_1, \quad (13)$$

$$(v_1)_v - (v_2)_u = 2ab\sqrt{EG}. \quad (14)$$

Здесь через v_1 и v_2 обозначены коэффициенты кручения: $v_1 = (n_1, n_{2u})$, $v_2 = (n_2, n_{1v})$.

Предположим, что гауссова кривизна K поверхности F^2 удовлетворяет условию $K = \text{const} \neq 0$.

Сложив уравнение (10), умноженное на a , с уравнением (13), умноженным на b , получим $(aa_v + bb_v)E + (a^2 + b^2)E_v = 0$ (15). Так как $K \neq 0$, то $a^2 + b^2 \neq 0$. Из уравнения (15) находим $(\ln E\sqrt{a^2 + b^2})_v = 0$. Поэтому $E = \Phi_1(u)/\sqrt{a^2 + b^2}$. Аналогично из уравнений (11) и (12) получим $G = \Phi_2(v)/\sqrt{a^2 + b^2}$. Перенормировкой параметров u и v можно добиться, чтобы было $E = G = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Учитывая, что $K = \frac{1}{b^2 - a^2}$, получим $E = G = \frac{1}{\sqrt{K + 2a^2}}$. Уравнения (10) и (12) теперь примут вид $(aE)_v = bEv_1$ (16), $(aE)_u = -bEv_2$ (17).

Рассмотрим сначала случай, когда $a \neq 0$, $b \neq 0$. Из (16) и (17) найдем

$$v_1 = \frac{Ka_v}{\sqrt{K + a^2}(K + 2a^2)}, \quad v_2 = -\frac{Ka_u}{\sqrt{K + a^2}(K + 2a^2)}.$$

Подставив выражения для v_1 и v_2 в (14), получим

$$\left(\frac{Ka_v}{\sqrt{K + a^2}(K + 2a^2)}\right)_v + \left(\frac{Ka_u}{\sqrt{K + a^2}(K + 2a^2)}\right)_u = \frac{2a\sqrt{K + a^2}}{\sqrt{K + 2a^2}}. \quad (18)$$

Из уравнения (9) получаем

$$\frac{K}{\sqrt{K + 2a^2}} = \left(\frac{aa_u}{K + 2a^2}\right)_u + \left(\frac{aa_v}{K + 2a^2}\right)_v. \quad (19)$$

Уравнение (18) запишем в виде

$$\frac{aK}{K + 2a^2} \left[a_u \left(\frac{1}{a\sqrt{K + a^2}} \right)_u + a_v \left(\frac{1}{a\sqrt{K + a^2}} \right)_v \right] + \frac{K}{a\sqrt{K + a^2}} \left[\left(\frac{aa_u}{K + 2a^2} \right)_u + \left(\frac{aa_v}{K + 2a^2} \right)_v \right] = \frac{2a\sqrt{K + a^2}}{\sqrt{K + 2a^2}}. \quad (20)$$

Используя (19), из уравнения (20) получим

$$a_u^2 + a_v^2 = \frac{(K + a^2)(K^2 - 2Ka^2 - 2a^4)}{K\sqrt{K + 2a^2}}.$$

Из уравнения (19) находим

$$a_{uv} + a_{vv} = \frac{K(K + 2a^2)^{3/2} - (K - 2a^2)(a_u^2 + a_v^2)}{a(K + 2a^2)}.$$

Для удобства изложения введем функции A и B :

$$A(a) = \frac{(K+a^2)(K^2-2Ka^3-2a^4)}{2K\sqrt{K+2a^2}},$$

$$B(a) = \frac{K(K+2a^2)^{3/2}-2(K-2a^2)A}{a(K+2a^2)}.$$

Тогда функция a удовлетворяет следующим двум уравнениям: $a_u^2 + a_v^2 = 2A$ (21), $a_{uu} + a_{vv} = B$ (22). Дифференцируя уравнение (21) по u и по v , получим $a_u a_{uu} + a_v a_{uv} = A' a_u$ (23), $a_u a_{uv} + a_v a_{vv} = A' a_v$ (24).

Вычтем из уравнения (23), умноженного на a_v , уравнение (24), умноженное на a_u , и подставим в полученное соотношение a_u^2 и a_v^2 из (21) и (22). Получим $2Aa_{uu} + (B-2A')a_u^2 + 2A(A'-B) = 0$ (25). Складывая уравнение (23), умноженное на a_v , с уравнением (25), умноженным на a_{uu} , и используя (21) и (22), получим $2Aa_{uv} = (2A' - B)a_u a_v$ (26). Продифференцируем уравнение (22) по u и по v : $a_{uuu} + a_{uvv} = B' a_u$ (27), $a_{uuv} + a_{vvv} = B' a_v$ (28). Продифференцируем теперь уравнение (23) по u , а уравнение (24) — по v и сложим полученные соотношения: $a_{uuu}^2 + a_{vv}^2 + 2a_{uv}^2 + a_u(a_{uuu} + a_{uvv}) + a_v(a_{uuv} + a_{vvv}) = A''(a_u^2 + a_v^2) + A'(a_{uu} + a_{vv})$ (29). Подставив (21), (22), (27) и (28) в (29), получим $a_{uu}^2 + a_{vv}^2 + 2a_{uv}^2 = 2A(A'' - B') + BA'$ (30). Так как $a_{vv} = B - a_{uu}$, то из (30) следует

$$2a_{uu}^2 - 2Ba_{uu} + 2a_{uv}^2 = 2A(A'' - B') + B(A' - B). \quad (31)$$

Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то функция $A(a)$ может обращаться в нуль только в точке a_0 , где $a_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}K}$ при $K > 0$ и $a_0 = \sqrt{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}K}$ при $K < 0$. Покажем, что при выполнении условия $K = \text{const} \neq 0$ функция a не может принимать значения a_0 . Имеем

$$A'(a_0) = \begin{cases} -\sqrt{3+\sqrt{3}}K & \text{при } K > 0, \\ -\sqrt{3-\sqrt{3}}K & \text{при } K < 0, \end{cases}$$

$$B(a_0) = \begin{cases} \sqrt{3+\sqrt{3}}K & \text{при } K > 0, \\ \sqrt{3-\sqrt{3}}K & \text{при } K < 0. \end{cases}$$

Предположим, что в некоторой точке (u_0, v_0) на поверхности F значение функции a равно a_0 . Так как $A(a_0) = 0$, то в точке (u_0, v_0) $a_u = a_v = 0$. Продифференцируем уравнение (24) по v , а уравнение (23) по u и по v и положим в полученных соотношениях $a_u = a_v = 0$. Тогда в точке (u_0, v_0) имеют место равенства

$$a_{uv}a_{uu} + a_{vv}a_{uv} = A'a_{uv}, \quad (32)$$

$$a_{uu}^2 + a_{uv}^2 = A'a_{uu}, \quad (33)$$

$$a_{uv}^2 + a_{vv}^2 = A'a_{vv}. \quad (34)$$

Учитывая, что $a_{uu} + a_{vv} = B$ и $B(a_0) \neq A'(a_0)$, из (32) получим $a_{uv} = 0$. Тогда из (33) и (34) следует, что в точке (u_0, v_0) выполняются равенства $a_{uu}(a_{uu} - A') = 0$, $a_{vv}(a_{vv} - A') = 0$. Следовательно, в точке (u_0, v_0) имеет место хотя бы один из следующих четырех случаев: а) $a_{uu} = a_{vv} = 0$, б) $a_{uu} = a_{vv} = A'$, в) $a_{uu} = 0$, $a_{vv} = A'$, г) $a_{vv} = 0$, $a_{uu} = A'$. Тогда в первом случае $a_{uu} + a_{vv} = 0$, во втором — $a_{uu} + a_{vv} = 2A'$, в третьем и четвертом — $a_{uu} + a_{vv} = 2A'$. Но это невозможно, так как $a_{uu} + a_{vv} = B$ и $B(a_0) \neq 0$, $B(a_0) \neq A'(a_0)$, $B(a_0) \neq 2A'(a_0)$.

Следовательно, при выполнении условий $K = \text{const} \neq 0$, $a \neq 0$, $A \neq 0$ функция $A(a)$ не обращается в нуль.

Подставляя a_{uu} из (25), a_{vv} из (26) в (31) и используя (22), получим $2A(A'' - B') + (2A' - B)(B - A') = 0$ (35). Вычислим производные A' , A'' , B' . Имеем

$$A = \frac{-2a^6 - 4Ka^4 - K^2a^2 + K^3}{2K(K + 2a^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$B = \frac{(-4a^6 - 6Ka^4 + 6K^2a^2 + 7K^3)a}{K(K + 2a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$A' = -\frac{(10a^6 + 18Ka^4 + 9K^2a^2 + 2K^3)a}{K(K + 2a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$A'' = -\frac{80a^8 + 142Ka^6 + 90K^2a^4 + 19K^3a^2 + 2K^4}{K(K + 2a^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$B' = \frac{-32a^8 - 52Ka^6 - 30K^2a^4 - 10K^3a^2 + 7K^4}{K(K + 2a^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Далее находим

$$2A(A'' - B') = \frac{96a^{14} + 372Ka^{12} + 528K^2a^{10} + 300K^3a^8 + 24K^4a^6 - 15K^5a^4 - 9K^7}{K^2(K + 2a^2)^3}, \quad (36)$$

$$(2A' - B)(B - A') = \frac{96a^{14} + 372Ka^{12} + 744K^2a^{10} + 948K^3a^8 + 762K^4a^6 + 381K^5a^4 + 99K^6a^2}{K^2(K + 2a^2)^3}. \quad (37)$$

Подставив (36) и (37) в (35), получим $216a^{10} + 648Ka^8 + 738K^2a^6 + 396K^3a^4 + 99K^4a^2 + 9K^5 = 0$.

Таким образом, функция a удовлетворяет алгебраическому уравнению, следовательно, $a = \text{const}$, что невозможно в силу условия $BA' = a_u^2 + a_v^2 \neq 0$. Этим доказана теорема в случае $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Пусть теперь $a = 0$ в некоторой окрестности D точки z на поверхности F^2 . Тогда в области D первая квадратичная форма поверхности F^2 равна $ds^2 = \frac{1}{\sqrt{K}}(du^2 + dv^2)$. Следовательно, гауссова кривизна поверхности F^2 равна нулю, что противоречит предположению.

Аналогично рассматривается случай $b = 0$.

2) Пусть теперь F^2 — времениподобная минимальная поверхность в V^4 . Выберем на поверхности F^2 координаты u и v , в которых

первая квадратичная форма имеет вид $ds^2 = 2Fdu dv$. В качестве таких координат можно взять величины $u = \bar{u} + \bar{v}$, $v = \bar{u} - \bar{v}$, где \bar{u} , \bar{v} — изотермические координаты на поверхности F^2 .

Так как F^2 — минимальная поверхность, то $g^{ij}L_{ij}^\sigma = 0$ ($\sigma = 1, 2$). Учитывая, что $g^{11} = g^{22} = 0$, из последнего равенства получим $L_{12}^1 = 0$, $L_{12}^2 = 0$.

Запишем уравнения Кодацци — Риччи для поверхности F^2 . В нашем случае они принимают вид

$$(L_{11}^1)_v = v_2 L_{11}^2, \quad (38)$$

$$(L_{22}^1)_u = v_1 L_{22}^2, \quad (39)$$

$$(L_{11}^2)_v = -v_2 L_{11}^1, \quad (40)$$

$$(L_{22}^2)_u = -v_1 L_{22}^1, \quad (41)$$

$$(v_1)_v - (v_2)_u + \frac{1}{F}(L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2) = 0, \quad (42)$$

где через v_1 и v_2 обозначены коэффициенты кручения: $v_1 = (n_1, n_{2u})$, $v_2 = (n_1, n_{2v})$.

Сложив уравнение (39), умноженное на L_{22}^1 , с уравнением (41), умноженным на L_{22}^2 , получим $(L_{22}^1)_u L_{22}^1 + (L_{22}^2)_u L_{22}^2 = 0$. Поэтому $(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2 = \Phi_2(v)$.

Аналогичным образом из уравнений (38) и (40) следует $(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2 = \Phi_1(u)$.

Пусть $r(u, v)$ — радиус-вектор поверхности F^2 . Тогда имеет место разложение Гаусса [7]: $r_{,11} = -L_{11}^1 n_1 - L_{11}^2 n_2$, $r_{,22} = -L_{22}^1 n_1 - L_{22}^2 n_2$, где запятой с индексом 1 и с индексом 2 обозначено ковариантное дифференцирование по отношению к метрическому тензору поверхности F^2 по u и по v соответственно.

Следовательно, $r_{,11}^2 = (L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2$, $r_{,22}^2 = (L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2$. Так как символы Кристоффеля Γ_{11}^2 и Γ_{22}^1 поверхности F^2 равны нулю, то $r_{,11} = r_{uu} - \Gamma_{11}^1 r_u$, $r_{,22} = r_{vv} - \Gamma_{22}^2 r_v$. Поскольку $r_u^2 = 0$, $r_v^2 = 0$, то $(r_{uu}, r_u) = 0$, $(r_{vv}, r_v) = 0$. Тогда получим $r_{,11}^2 = r_{uu}^2$, $r_{,22}^2 = r_{vv}^2$. Следовательно, $r_{,11}^2 = \Phi_1(u)$, $r_{,22}^2 = \Phi_2(v)$.

Гауссова кривизна поверхности F^2 равна

$$K = -\frac{L_{11}^1 L_{22}^2 + L_{11}^2 L_{22}^1}{F^2}. \quad (43)$$

Предположим, что $K = \text{const} \neq 0$. Тогда $(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2 \neq 0$, $(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2 \neq 0$. Поэтому $r_{uu}^2 \neq 0$, $r_{vv}^2 \neq 0$. Следовательно, можно выбрать параметры u и v так, чтобы $\Phi_1(u) = \Phi_2(v) = 1$. Тогда $(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2 = 1$, $(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2 = 1$. Направим нормаль n_1 по вектору $r_{,11}$. Тогда $L_{11}^2 = 0$. Поэтому $(L_{11}^1)^2 = 1$. Можно считать, что $L_{11}^1 = 1$ (если $L_{11}^1 = -1$, то вместо нормали n_1 возьмем нормаль $-n_1$). Так как $(L_{22}^1)^2 +$

$(L_{11}^1)^2 = 1$, то можно положить $L_{22}^1 = \cos \varphi$, $L_{22}^2 = \sin \varphi$. Тогда из (43) получим $K = -\frac{\cos \varphi}{F^2}$. Отсюда $F = e \left(-\frac{\cos \varphi}{K} \right)^{1/2}$, где e равно 1 или -1 . Из уравнения (40) следует $v_2 = 0$. Так как $K \neq 0$, то $\cos \varphi \neq 0$. Тогда из (41) получим $v_1 = -\varphi_u$. Подставив v_1 и v_2 в (42), найдем $\varphi_{uv} = e \sin \varphi \left(-\frac{K}{\cos \varphi} \right)^{1/2}$ (44). По формуле Гаусса $K = \frac{F_u F_v - F F_{uv}}{F^3}$.

После подстановки выражений для функции F и ее производных получим

$$K = -\frac{e}{2K} \left(-\frac{K}{\cos \varphi} \right)^{3/2} \left(\frac{\varphi_u \varphi_v}{\cos \varphi} + \varphi_{uv} \sin \varphi \right). \quad (45)$$

Учитывая (44) из (45), находим

$$\varphi_u \varphi_v = eK (1 + \cos^2 \varphi) \left(-\frac{\cos \varphi}{K} \right)^{1/2}. \quad (46)$$

Из (46) следует, что $\varphi_u \varphi_v \neq 0$. Тогда из (44) и (46) получим

$$\frac{\varphi_{uv}}{\varphi_u \varphi_v} = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}. \quad (47)$$

Замечая, что $\frac{\varphi_{uv}}{\varphi_u} = (\ln |\varphi_u|)_v$, $-\frac{\varphi_v \operatorname{tg} \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} = \left(\ln \frac{|\cos \varphi|}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} \right)_v$, уравнение (47) запишем в виде

$$\left(\ln \frac{|\varphi_u| \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}{|\cos \varphi|} \right)_v = 0.$$

Поэтому

$$\varphi_u = \Phi(u) \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}. \quad (48)$$

Тогда из (46) находим

$$\varphi_v = \frac{eK (1 + \cos^2 \varphi)^{3/2}}{\Phi(u) \cos \varphi} \left(-\frac{\cos \varphi}{K} \right)^{1/2}. \quad (49)$$

Продифференцировав (49) по u , найдем

$$\varphi_{uv} = \frac{eK}{2} \left(-\frac{\cos \varphi}{K} \right)^{1/2} \left[-\frac{2\Phi^1(u)}{\Phi^2(u)} \frac{(1 + \cos^2 \varphi)^{3/2}}{\cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi (1 - 5 \cos^2 \varphi) \right]. \quad (50)$$

Приравнявая друг другу правые части равенств (44) и (50), получим

$$\frac{\sin \varphi (3 - 5 \cos^2 \varphi)}{(1 + \cos^2 \varphi)^2} = \frac{2\Phi'(u)}{\Phi^2(u)}. \quad (51)$$

Продифференцируем уравнение (51) по v . Учитывая, что $\varphi_v \neq 0$, получим

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{\sin \varphi (3 - 5 \cos^2 \varphi)}{(1 + \cos^2 \varphi)^2} = 0. \quad (52)$$

После упрощений из уравнения (52) найдем $13 \cos^2 \varphi - 11 = 0$. Следовательно, $\varphi = \text{const}$. Тогда $\varphi_u = 0$, что невозможно.

Докажем теорему 2. При $E = G = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ из (9) получим $K = \nabla_2 \ln \sqrt{a^2 + b^2}$ (53). Из (16) находим

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(aE)_v}{bE} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2}}} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)_v = \\ &= - \left(\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)_v. \end{aligned}$$

Аналогично из (17) получим $v_2 = \left(\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)_u$. Подставив выражения для v_1 и v_2 в (14), получим

$$\nabla_2 \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -2ab. \quad (54)$$

Положим $a = r \sin \theta$, $b = r \cos \theta$. Тогда $K = r^2 \cos 2\theta$, а равенства (53) и (54) примут вид $K = \nabla_2 \ln \sqrt{r}$, $\nabla_2 \theta = 2ab$ (55). Далее находим $\nabla_2 \ln K = \nabla_2 \ln (r^2 \cos 2\theta) = \nabla_2 \ln r^2 - \frac{2}{\cos^2 2\theta} [\text{grad } \theta]^2 - 2 \text{tg } 2\theta \cdot \nabla_2 \theta$. Учитывая (55) и замечая, что $2ab = r^2 \sin 2\theta$, получим

$$\nabla_2 \ln K - 4K = -\frac{4}{\cos^2 2\theta} [\text{grad } \theta]^2 - \frac{2r^4 \sin^2 2\theta}{K}. \quad (56)$$

Оба слагаемые, стоящие в левой части равенства (56), неположительны, следовательно, $\nabla_2 \ln K - 4K \leq 0$.

Заметим, что в случае $K < 0$ не удается получить аналогичной оценки, так как соответствующее выражение для $\nabla_2 \ln (-K) - 4K$ равно сумме двух слагаемых, одно из которых неотрицательно, а другое — неположительно.

В заключение приведем пример двумерной пространственноподобной поверхности F^2 в $E^{4,1}$, гауссова кривизна которой постоянна, а вектор средней кривизны является изотропным.

Поверхность F^2 зададим ее первой квадратичной формой $ds^2 = du^2 + e^v \text{ch}^2 u dv^2$, вторыми квадратичными формами $\Pi^1 = (1 + \text{th}^2 u) du^2 - e^v dv^2$ и $\Pi^2 = \text{th}^3 u du^2 + e^v \text{sh}^2 u dv^2$, причем форма Π^1 соответствует пространственноподобной нормали, а форма Π^2 — времениподобной нормали, и коэффициентами кручения $v_1 = 2\text{th} u$, $v_2 = 0$. Можно проверить, что коэффициенты квадратичных форм ds^2 , Π^1 , Π^2 и коэффициенты кручения v_1 и v_2 удовлетворяют уравнениям Гаусса—Кодацци — Риччи для двумерной пространственноподобной поверхности в $E^{4,1}$. Тогда по известной теореме [7] квадратичные формы ds^2 , Π^1 , Π^2 и коэффициенты кручения v_1 и v_2 определяют поверхность F^2 в $E^{4,1}$. Легко проверить, что гауссова кривизна поверхности F^2 равна -1 , а вектор средней кривизны является изотропным, т. е. $H^2 = 0$.

литературы: 1. *Pfl M.* Minimalflächen fester Gaußschen Krümmung // *Math. Annalen.*— 1958.— 136.— S. 34—40. 2. *Лумисте Ю. Г.* К теории двумерных минимальных поверхностей. II. Поверхности постоянной кривизны // *Уч. зап. Тартуск. ун-та.*— 1961.— Вып. 102.— С. 16—28. 3. *Аминов Ю. А.* Аналог внутреннего условия Риччи для минимального многообразия в римановом пространстве // *Укр. геометр. сб.*— 1975.— Вып. 17.— С. 15—22. 4. *Lawson H. B.* Intrinsic characterizations of minimal surfaces // *J. Analyse Math.*— 1971.— P. 151—161. 5. *Calabi E.* Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima (together with Topics in complex manifolds by Rossi) // *Presses de l'Univ. de Montreal.*— 1968.— P. 7—12. 6. *Matsumoto Makoto.* Intrinsic character of minimal hypersurfaces in flat spaces // *J. Mat. Soc. Japan.*— 1947.— 9, № 1.— P. 146—157. 7. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 316 с. 8. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере.— М.: Изд-во МГУ, 1960.— 307 с.

Поступила в редколлегию 20.10.86

В. И. ДЕНИСОВ

СОПРЯЖЕННЫЕ ТОЧКИ ПРИЧИННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕДЕЛЯ

Космологическая модель Гёделя (КМГ) — это пространство-время, метрика которого в специальной системе координат имеет вид

$$ds^2 = dx^{0^2} + 2e^{x^{1/b}} dx^1 dx^2 + \frac{1}{2} e^{2x^{1/b}} dx^{2^2} - dx^{1^2} - dx^{3^2}, \quad (0.1)$$

$$-\infty < x^i < +\infty, \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad b = \text{const.}$$

Эта метрика является решением уравнений общей теории относительности с тензором энергии-импульса пылевидной материи постоянной плотности ρ , которая связана с константой b следующим образом: $b = (8\pi k\rho)^{-1/2}$, где k — постоянная тяготения Ньютона. Пространство-время (0.1) допускает транзитивную группу движений, операторы которой

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}; \quad X_1 = b \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}; \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x^3};$$

$$X_4 = 2(e^{x^{1/b}} - 1) X_0 - \frac{x^2}{b^2} X_1 + \left(1 - e^{-2x^{1/b}} - \frac{x^{2^2}}{2b^2}\right) X_2. \quad (0.2)$$

Первые четыре оператора (0.2) обеспечивают транзитивность группы движений КМГ, т. е. однородность КМГ — равноправие всех ее точек. Оператор X_4 определяет однопараметрическое множество вращений КМГ, относительно которых метрика (0.1) инвариантна.

Введем необходимые определения. Геодезическую γ КМГ назовем причинной геодезической (ПГ), если в каждой точке γ ее касательный вектор времени подобен или изотропен. Векторное поле $\rho^i(s)$, опре-

деленное на γ , является полем Якоби, если оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{D^2 p^i}{ds^2} + R^i_{jkl} u^j p^k u^l = 0, \quad (0.3)$$

где u_i — касательный вектор γ ; R^i_{jkl} — тензор кривизны пространства-времени; $\frac{D}{ds}$ — символ ковариантного дифференцирования по каноническому параметру s геодезической γ .

Точки M_0 и $M^* \in \gamma$ сопряжены, если на γ существует нетривиальное поле Якоби $p^i(s)$, такое, что $p^i(0) = p^i(s^*) = 0$. Индексом, или кратностью сопряженной точки, называется максимальная размерность линейного векторного пространства полей Якоби, обращающихся в нуль в точках M_0, M_1 геодезической γ [1].

В работе [2] получена оценка индекса сопряженной точки причинной геодезической $\gamma \in \text{КМГ}$ — доказано, что если на γ существуют сопряженные точки M_0, M_1 , то индекс точки M_1 не превосходит 2. Доказано, что эта оценка индекса является точной — в КМГ существует причинная геодезическая, на которой есть сопряженные точки индекса 2.

Цель данной работы — доказать, что на любой причинной геодезической КМГ есть сопряженные точки и определить их индекс. Основное содержание работы состоит в доказательстве теорем 1 и 2. Доказательство этих теорем в определенном смысле проведено «в лоб» — строится решение уравнения Якоби (0.3) на произвольной причинной геодезической КМГ, после чего находятся сопряженные точки и определяется их индекс.

1. Теорема 1. *На любой времениподобной геодезической $\gamma \in \text{КМГ}$ есть сопряженные точки. Если γ не принадлежит сечению $\sigma: x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}$ КМГ, то индекс любой сопряженной точки γ равен 1; он равен 2, если $\gamma \in \sigma$.*

Доказательство. Прежде всего заметим следующее. Так как γ — времениподобная геодезическая в КМГ — пространстве-времени, допускающем группу движений с операторами (0.2), то уравнения геодезической допускают систему первых интегралов [3]:

$$\begin{aligned} u^0 + u^2 e^{x^1/b} &= \alpha_0; & -bu^1 - x^2 \alpha_2 &= \alpha_1; \\ u^0 e^{x^1/b} + \frac{1}{2} u^2 e^{2x^1/b} &= \alpha_2; & -u^3 &= \alpha_3; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$2(e^{-x^1/b} - 1) \alpha_0 + \frac{x^2}{b^2} \alpha_1 + \left(1 - e^{-2x^1/b} - \frac{x^2{}^2}{2b^2}\right) \alpha_2 = \alpha_4,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ — постоянные. Так как КМГ однородна — допускает транзитивную группу движений, — то, не ограничивая общности, можно считать, что геодезическая γ выходит из точки M_0 с координатами $(0, 0, 0, 0)$. Тогда $\alpha_4 = 0$ и

$$\begin{aligned} \frac{dx^0}{ds} = u^0 &= 2\alpha_2 e^{-x^1/b} - \alpha_0, & \frac{dx^1}{ds} = u^1 &= \frac{\alpha_1 - x^2 \alpha_2}{b}, \\ \frac{dx^2}{ds} = u^2 &= 2e^{-x^1/b} (\alpha_0 - \alpha_2 e^{-x^1/b}), & \frac{dx^3}{ds} = u^3 &= -\alpha_3, \end{aligned}$$

откуда следует, что постоянные $\alpha_0, \dots, \alpha_3$ имеют простой смысл: они определяют направление геодезической, выходящей из точки M_0 . Далее, так как s — канонический параметр на γ , то в каждой точке γ должно выполняться условие $(u, u) = 1$, которое в точке M_0 имеет вид $\alpha_0^2 - 2(\alpha_0 - \alpha_2)^2 - \alpha_1^2/b^2 - \alpha_3^2 = 1$, откуда следует, что для времениподобных геодезических $\alpha_0 \geq 1$.

Предположим далее, что постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ удовлетворяют условию $(\alpha_0 - \alpha_2)^2 + \alpha_1^2 > 0$. Оно означает, что геодезическая γ не принадлежит сечению $x^1 = x^2 = 0$ КМГ. Случай, когда γ лежит на сечении $x^1 = x^2 = 0$ КМГ, рассмотрен в работе [2], где доказано, что на такой геодезической есть сопряженные точки и индекс их 2.

Таким образом, для геодезической γ , которая будет рассматриваться, имеет место неравенство $\alpha_0^2 > 1 + \alpha_3^2$.

Преобразуем уравнения Якоби (0.3), следуя [1]. Для этого построим на γ репер параллельных вдоль γ векторов τ_α^i ($\alpha = 1, 2, 3$), удовлетворяющих условиям:

$$(u \tau_\alpha) = 0; \quad (\tau_\alpha \tau_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}, \quad (1.2)$$

где $(\)$ — знак скалярного произведения векторов в метрике (0.1). Используя этот репер векторов, поле $p^i(s)$ на γ можно представить следующим образом:

$$p^i(s) = A^0 u^i + A^\alpha \tau_\alpha^i, \quad (1.3)$$

где A^0, A^α — функции s — канонического параметра γ . Подставляя (1.3) в (0.3), убеждаемся, что уравнения Якоби (0.3) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$d^2 A^0/ds^2 = 0, \quad (1.4)$$

$$d^2 A^\alpha/ds^2 - A^\beta R \langle \tau_\alpha u \tau_\beta u \rangle = 0, \quad (1.5)$$

где $R \langle \tau_\alpha u \tau_\beta u \rangle = R_{ijkl} \tau_\alpha^i u^j \tau_\beta^k u^l$.

Легко видеть, что в представлении (1.3) условие сопряженности принимает следующий вид: точки $M_0, M^* \in \gamma$ сопряжены, если существует такое нетривиальное решение системы уравнений (1.4), (1.5), что $A^0(0) = A^0(s^*) = 0, A^\alpha(0) = A^\alpha(s^*) = 0$, где s^* — значение канонического параметра γ , соответствующего точке M^* . Общее решение уравнения (1.4) таково, что условия $A^0(0) = A^0(s^*) = 0$ при $s^* \neq 0$ приводят к равенству $A^0(s) \equiv 0$.

Определим векторное поле τ_α^i на γ следующим образом: $\tau_\alpha^i = (\delta_\alpha^i - \alpha_\alpha u^i)/\sqrt{1 + \alpha_\alpha^2}$. Так как векторное поле $\xi^i = \delta_\alpha^i$ ковариантное постоянное векторное поле в метрике (0.1), то τ_α^i параллельно вдоль γ , удовлетворяет условиям $(u \tau_\alpha) = 0, (\tau_\alpha \tau_\beta) = -1$ и $R \langle \tau_\alpha u \tau_\beta u \rangle \equiv 0, \alpha = 1, 2, 3$.

Вследствие такого выбора τ^i система уравнений (1.3) расщепляется:

$$d^2 A^\alpha/ds^2 - A^\beta R \langle \tau_\alpha u \tau_\beta u \rangle = 0; \alpha, \beta = 1, 2. \quad d^2 A^3/ds^2 = 0. \quad (1.6)$$

Решение последнего уравнения, удовлетворяющее условиям $A^3(0) = A^3(s^*) = 0, s^* \neq 0$, тривиально: $A^3(s) \equiv 0$.

Определим теперь на γ векторные поля $\tilde{\tau}_1^i$ и $\tilde{\tau}_2^i$:

$$\tilde{\tau}_1^i = \sqrt{(1 + \alpha_3^2)/(\alpha_0^2 - 1 - \alpha_3^2)} (\delta_0^i - \alpha_0 u^i - \frac{\alpha_0 \alpha_3}{\sqrt{1 + \alpha_3^2}} \tau^i),$$

$$\tilde{\tau}_2^i = (e^{x^{1/b}} / \sqrt{2(\alpha_0^2 - 1 - \alpha_3^2)}) g^{i2} u^1 + g^{i1} u^2,$$

где g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора (0.1)

Нетрудно доказать, что на γ имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} D\tilde{\tau}_1^i/ds &= \omega\tilde{\tau}_2^i; \quad D\tilde{\tau}_2^i/ds = -\omega\tilde{\tau}_1^i; \\ \langle u_\alpha \tau_\alpha \rangle &= \langle \tau_\alpha \tau_\alpha \rangle = 0; \quad \langle \tau_\alpha \tau_\beta \rangle = -\delta_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \\ \text{где } \omega &= \sqrt{1 + \alpha_3^2}/b\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Определим на γ комплекснозначное векторное поле \tilde{t} : $\tilde{t} = (\tilde{\tau}_1^i + i\tilde{\tau}_2^i)/\sqrt{2}$, где $i = \sqrt{-1}$. Из (1.7) и определения \tilde{t} следует, что вдоль γ имеют место равенства $D\tilde{t}^i/ds = -i\omega\tilde{t}^i$; $(\tilde{t} \tilde{t}) = 0$, $(\tilde{t} \tilde{t}) = -1$, где черта над буквой — знак комплексного сопряжения.

Найдем теперь такую функцию $a(s)$, что векторное поле $t = \tilde{t} e^{i a(s)}$ будет параллельным вдоль γ . Условие $Dt^i/ds = 0$ дает $da/ds = \omega$, откуда следует $a = \omega s$. Тогда векторные поля

$$\tau_1 = (t + \bar{t})/\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \tau_2 = i(\bar{t} - t)/\sqrt{2} \quad (1.8)$$

на γ удовлетворяют условиям параллельного переноса и нормировки (1.2).

Используя (1.8), представим нетривиальную часть поля Якоби следующим образом: $p^i(s) = Ct^i + \bar{C}\bar{t}^i$, где $C = (A^1 - iA^2)/\sqrt{2}$, после чего система уравнений (1.6) примет вид

$$d^2 C/ds^2 = CR \langle \bar{t} u \bar{t} u \rangle + \bar{C}R \langle \bar{t} u \bar{t} u \rangle. \quad (1.9)$$

Так как $R \langle \bar{t} u \bar{t} u \rangle = R \langle \bar{t} u \bar{t} u \rangle$, $R \langle \bar{t} u \bar{t} u \rangle = e^{-2i\omega s} R \langle \bar{t} u \bar{t} u \rangle$, то необходимо найти свертки тензора кривизны метрики (0.1) с векторными полями \tilde{t}^i и u^i . Проведя необходимые вычисления, находим: $R \langle \bar{t} u \bar{t} u \rangle = -\alpha_0^2/2b^2$, $R \langle \bar{t} u \bar{t} u \rangle = (\alpha_0^2 - (1 + \alpha_3^2))/2b^2$.

Далее, произведя подстановку $C = ze^{-i\omega s}$ и замену $s = \lambda/\omega$, приведем уравнение (1.9) к виду:

$$d^2z/d\lambda^2 - 2idz/d\lambda = -(k-1)(z - \bar{z}) \quad (1.10),$$

где $k = \alpha_0^2/(1 + \alpha_3^2) > 1$.

Если точки $M_0, M^* \in \gamma$ сопряжены, то в этих точках нетривиальное решение C уравнения (1.9) должно обращаться в нуль: $C(0) = C(s^*) = 0$. Так как подстановка $C = ze^{-i\omega s}$ неособая, то точки $M_0, M^* \in \gamma$ сопряжены только тогда, когда существует такое нетривиальное решение z уравнения (1.10), что $z(0) = z(\lambda^*) = 0$.

Общее решение уравнения (1.10), удовлетворяющее условию $z(0) = 0$, представим в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= C_0 ((v^2 - 4)\lambda/2 - 2(\sin v\lambda)/v) + A(\cos v\lambda - 1), \\ \operatorname{Im} z &= C_0(1 - \cos v\lambda) + (Av \sin v\lambda)/2, \end{aligned}$$

где $v = \sqrt{2(k+1)}$; A, C_0 — постоянные.

Точка $M^* \in \gamma$, определяемая значением канонического параметра $s^* = \lambda^*/\omega$ сопряжена с M_0 , если система уравнений

$$\begin{cases} C_0((v^2 - 4)\lambda^*/2 + 2(\sin v\lambda^*)/v) + A(\cos v\lambda^* - 1) = 0, \\ C_0(1 - \cos v\lambda^*) + Av(\sin v\lambda^*)/2 = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

имеет нетривиальное решение относительно A, C_0 . Последнее возможно тогда и только тогда, когда в точке M^* выполняется равенство $(v^2 - 4)\varphi^*(\sin\varphi^*)/4 + \sin^2\varphi^* + (\cos\varphi^* - 1)^2 = 0$, где $\varphi^* = v\lambda^* = s^*\sqrt{1 + \alpha_0^2 + \alpha_3^2/b}$. Из последнего равенства получаем

$$\sin(\varphi^*/2) \cdot \left(\frac{v^2 - 4}{4} \cdot \frac{\varphi^*}{2} \cos \frac{\varphi^*}{2} + \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) = 0, \quad (1.12)$$

откуда следует, что в сопряженной точке M^*

$$\operatorname{tg}(\varphi^*/2) = -\frac{v^2 - 4}{4} \cdot \frac{\varphi^*}{2}, \quad (1.13)$$

либо

$$\sin(\varphi^*/2) = 0 \quad (1.14)$$

Нетрудно убедиться, что для положительных корней φ_k^* уравнения (1.13) имеет место оценка $\pi(2L - 1) < \varphi_k^* < 2\pi L$, $L = 1, 2, 3, \dots$, (1.15), корни же уравнения (1.14): $\varphi^* = 2\pi L$.

Так как нетривиальные решения уравнения (1.12), удовлетворяющие условию $z(0) = z(\lambda^*) = 0$, $\lambda^* \neq 0$, существуют, то утверждение о существовании сопряженных точек на любой времениподобной геодезической КМГ доказано.

Легко видеть, что каждые два последовательных корня уравнения (1.13) разделены корнем уравнения (1.14), причем наименьший положительный корень уравнения (1.12) — наименьший корень уравнения (1.13). Характерной особенностью корней уравнения (1.13) является

то, что соответствующие им сопряженные точки геодезической γ лежат вне сечения $\sigma_0: x_1 = x_2 = 0$, тогда как сопряженные точки, определенные корнями (1.14), лежат в сечении σ_0 .

Анализ уравнений (1.11), как в случае (1.13), так и в случае (1.14) приводит к заключению, что множество нетривиальных решений этой системы — однопараметрическое. Отсюда следует, что индекс любой сопряженной точки геодезической γ равен 1.

Теорема 1 доказана.

2. Теорема 2. На любой изотропной геодезической $\gamma \in \text{КМГ}$ есть сопряженные точки. Если геодезическая γ не принадлежит сечению $\sigma_0: x^1 = \text{const}, x^2 = \text{const}$ КМГ, то индекс любой сопряженной точки γ равен 1; он равен 2, если $\gamma \in \sigma$.

Доказательство. Так как КМГ допускает транзитивную группу движений, то можно считать, что γ выходит из точки $M_0(0, 0, 0, 0)$. Далее, так как на γ имеют место равенства (1.6), то условия нормировки касательного вектора u^i геодезической γ в M_0 дают $\alpha_0^2 - 2(\alpha_0 - \alpha_2)^2 - \alpha_1^2/b^2 - \alpha_3^2 = 0$. Предположим, что постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ удовлетворяют условию $(\alpha_0 - \alpha_2)^2 + \alpha_1^2 > 0$, смысл которого состоит в том, что соответствующая геодезическая не принадлежит сечению $x^1 = x^2 = 0$ КМГ.

Случай, когда γ лежит в сечении $x^1 = x^2 = 0$ КМГ, рассмотрен в работе [2], где доказано, что на такой изотропной геодезической есть сопряженные точки и индекс их 2. Таким образом, для геодезической, которая будет рассмотрена, имеет место неравенство $\alpha_0^2 > \alpha_3^2$.

Так как на изотропной геодезической канонический параметр τ определен неоднозначно, то уточним его выбор условием $\alpha_0 = 1$.

Построим теперь на γ репер параллельных вдоль γ векторов $\{\mu, \tau\}$, $(\alpha = 1, 2)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} (\mu \tau) = (\tau \mu) = (\mu \mu) = 0; \quad (\tau \tau) = -\delta_{\alpha\beta}; \quad (\mu \mu) = 1; \\ \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В связи с этим рассмотрим следующие векторные поля, определенные на γ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^l &= \delta_0^l - u^l/2, \\ \tilde{\tau}_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_3^2}} (\delta_3^l - \alpha_3 \delta_0^l + \alpha_3 u^l), \\ \tilde{\tau}_2 &= \frac{e^{x^1/b}}{\sqrt{2(1-\alpha_3^2)}} (u^1 g^{l2} - u^2 g^{l1}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определив на γ комплексное векторное поле $\tilde{t} = (\tilde{\tau}_1 + i\tilde{\tau}_2)/\sqrt{2}$, после простых преобразований находим

$$\frac{D\tilde{\mu}}{ds} = \frac{ia}{\sqrt{2}} (\tilde{t} - \bar{\tilde{t}}), \quad \frac{D\tilde{t}}{ds} = i \frac{a}{\sqrt{2}} u - i\omega \tilde{t}, \quad (2.3)$$

где $a = \sqrt{1-\alpha_3^2}/b\sqrt{2}$, $\omega = -\alpha_3/b\sqrt{2}$.

Предположим теперь, что $\alpha_3 \neq 0$. Тогда нетрудно убедиться, что векторные поля

$$t^i = (\tilde{t}^i - \frac{a}{\omega\sqrt{2}} u^i) e^{i\omega s},$$

$$\mu^i = \tilde{\mu}^i - \frac{a}{\omega\sqrt{2}} (\tilde{t}^i + \tilde{t}^i) + \frac{a^2}{2\omega^2} u$$

удовлетворяют на γ условиям параллельного переноса и условиям нормировки: $(\mu t) = (\mu \mu) = 0$, $(tt) = 0$, $(\tilde{t}\tilde{t}) = -1$, которые эквивалентны условиям (2.1).

Задавая поле $p^i(s)$ на γ в виде $p^i(s) = Uu^i + M\mu^i + Ct^i + \bar{C}\tilde{t}^i$, где U, M, C — функции s , после подстановки его в уравнения (1.4), убеждаемся, что уравнения Якоби на изотропной геодезической эквивалентны системе уравнений

$$\ddot{U} + MR\langle \mu\mu \mu \mu \rangle + CR\langle \mu\mu tu \rangle + \bar{C}R\langle \mu\mu \tilde{t}\tilde{u} \rangle = 0, \quad (2.4)$$

$$\ddot{M} = 0,$$

$$\ddot{C} - MR\langle \tilde{t}\tilde{u} \mu\mu \rangle - CR\langle \tilde{t}\tilde{u} tu \rangle - \bar{C}R\langle \tilde{t}\tilde{u} \tilde{t}\tilde{u} \rangle = 0.$$

Произведя необходимые вычисления, убеждаемся, что в метрике (0.1) на изотропной геодезической γ с $\alpha_3 \neq 0$ имеют место следующие равенства:

$$R\langle \mu\mu \mu \mu \rangle = 0, \quad R\langle \mu\mu tu \rangle = 0,$$

$$R\langle tu tu \rangle = \frac{1 - \alpha_3^2}{2b^2} e^{2i\omega s}, \quad R\langle tu \tilde{t}\tilde{u} \rangle = -1/(2b^2).$$

В силу этих равенств система уравнений (2.4) упрощается:

$$\ddot{U} = 0, \quad \ddot{M} = 0,$$

$$\ddot{C} + \frac{1}{2b^2} C - \bar{C} \frac{1 - \alpha_3^2}{2b^2} e^{-2i\omega s} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнения первых двух уравнений этой системы, удовлетворяющие условиям $U(0) = U(s^*) = 0$, $M(0) = M(s^*) = 0$, $s^* \neq 0$, тривиальны — $U \equiv 0$, $M \equiv 0$. Общее решение уравнения (2.5), удовлетворяющее условию $C(0) = 0$, имеет вид $C(s) = z(s) e^{-i\omega s}$, где $z(s)$ — комплексная функция s такая, что $\operatorname{Re} z(s) = 2 \frac{\omega}{v} A (\cos vs - 1) - B (2 \frac{\omega}{v} \sin vs + \frac{k}{\omega} s)$, $\operatorname{Im} z(s) = A \sin vs + B (\cos vs - 1)$, где A, B — постоянные, $k = (1 - \alpha_3^2)/(2b^2)$, $v = \sqrt{1 + \alpha_3^2/b^2}$.

Точка M^* будет сопряженной точкой геодезической γ , если система уравнений относительно A, B :

$$\begin{cases} 2 \frac{\omega}{v} A (\cos vs^* - 1) - B (2 \frac{\omega}{v} \sin vs^* + \frac{k}{\omega} s^*) = 0, \\ A \sin vs^* + B (\cos vs^* - 1) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

имеет нетривиальное решение. Нетрудно убедиться, что это возможно лишь тогда, когда s^* является корнем уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{vs^*}{2} = - \frac{k}{2\omega^2} \cdot \frac{vs^*}{2} \quad (2.8)$$

или уравнения $\sin(vs^*/2) = 0$ (2.8). Легко видеть, что эти уравнения имеют вещественные корни, поэтому на γ есть сопряженные точки. Свойства этих корней аналогичны свойствам корней уравнений (1.13) (1.14): последовательные корни уравнения (2.7) разделены корнями уравнения (2.8); сопряженные точки геодезической γ , определяемые корнями уравнения (2.7), лежат вне сечения $\sigma_0: x^1 = x^2 = 0$ КМГ тогда как сопряженные точки, определяемые (2.8), лежат в сечении σ_0 . Анализ уравнений (2.6), как в случае (2.7), так и в случае (2.8) приводит к заключению, что множество нетривиальных решений этой системы — однопараметрическое. Отсюда следует, что индекс сопряженной точки изотропной геодезической с $\alpha_3 \neq 0$ и не принадлежащей сечению σ_0 равен 1.

Пусть $\alpha_3 = 0$. В этом случае $\omega = 0$, и векторные поля \tilde{t} и $\tilde{\mu}$ на γ определим следующим образом: $\tilde{t} = \bar{t} - i \frac{1}{2b} \mathbf{u}$, $\tilde{\mu} = \bar{\mu} - i \frac{as}{\sqrt{2}} (\bar{t} - \bar{t}) + \frac{a^2 s^2}{2} \mathbf{u}$, где $\bar{\mu}, \bar{t}$ определяются выражениями (2.2) при $\alpha_3 = 0$. На γ эти векторные поля удовлетворяют условиям параллельного переноса и нормировки. Тогда найдя св ртки:

$$R \langle \mu \mu \mu \rangle = -(1 + a^2 s^2)/(2b^2), \quad R \langle t \mu \mu \rangle = i \frac{a}{b^2 \sqrt{2}} s,$$

$$R \langle t \tilde{u} \tilde{u} \rangle = -1/(2b^2), \quad R \langle t t u \rangle = 1/(2b^2),$$

убеждаемся, что на геодезической с $\alpha_3 = 0$ уравнения (2.4) принимаю вид:

$$\ddot{M} = 0; \quad \ddot{U} - \frac{1 + a^2 s^2}{2b^2} + i \frac{a}{b^2 \sqrt{2}} s (C - \bar{C}) = 0;$$

$$\ddot{C} + \frac{1}{2b^2} (C - \bar{C}) + i \frac{a}{b^2 \sqrt{2}} s M = 0.$$

Теперь, решая эти уравнения, нетрудно убедиться, что точка M^* определяемая значением s^* канонического параметра γ , сопряжена с M_0 , если $s^* = \pi b L$, $L = 1, 2, \dots$, причем сопряженные точки с нечетным L лежат вне сечения $\sigma_0: x^1 = x^2 = 0$, точки с четным L лежат в σ_0 . Индекс любой из них равен 1.

Теорема 2 доказана.

3. Из доказанных теорем следует, что на любой причинной геодезической космологической модели Геделя есть сопряженные точки. Индекс любой из них равен 1, если γ не лежит в сечении σ : $x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}$; он равен 2, если $\gamma \in \sigma$.

4. В связи с доказательством теорем 1 и 2 заметим следующее.

1) Из (1.15) следует, что значение параметра s^* , определяющего первую сопряженную точку на времениподобной геодезической КМГ, выходящей из M_0 , удовлетворяет неравенству $s^* \leq 2\pi b / \sqrt{1 + \alpha_0^2 + \alpha_3^2}$. Так как параметры α_0 и α_3 связаны неравенством $\alpha_0^2 > 1 + \alpha_3^2$, то для s^* имеет место оценка $s^* \leq 2\pi b / \sqrt{2}$ (4.1).

Легко видеть, что аналогичная оценка может быть получена и в случае изотропных геодезических КМГ. Эти оценки позволяют получить информацию о множестве раздела КМГ [4].

Для определенности рассмотрим множество $SEP(M_0)$ времениподобного раздела КМГ относительно точки M_0 . Известно [4], что времениподобная точка раздела в будущем для точки M_0 вдоль временной геодезической γ , выходящей из M_0 , появляется не позже, чем первая точка, сопряженная M_0 вдоль γ в будущем. Тогда, принимая во внимание (4.1), приходим к заключению: *точки множества $SEP(M_0)$ КМГ принадлежат замкнутому времениподобному геодезическому шару радиуса $2\pi b / \sqrt{2}$.*

Аналогичное утверждение имеет место и для множества точек изотропного раздела.

2) Пусть $\Omega(M^{**})$ — множество «вторых» сопряженных точек причинных геодезических КМГ, выходящих из точки $M_0(0, 0, 0, 0)$.

Из доказательств теорем 1 и 2 следует, что $\Omega(M^{**})$ принадлежит сечению σ_0 : $x^1 = x^2 = 0$ КМГ и компактно. Тогда, если точка $M \in \Omega(M^{**})$, то верно следующее утверждение: *через точки M_0, M проходит единственная причинная геодезическая γ_0 , принадлежащая σ_0 и по крайней мере однопараметрическое множество $\gamma(I)$ причинных геодезических.*

Геодезические множества $\gamma(I)$ изометричны друг другу и не лежат в σ_0 .

Геодезическая γ_0 не изометрична геодезической $\gamma(I)$.

Приведенные утверждения верны не только для множества «вторых» сопряженных точек КМГ — они верны для любого множества «четвертых», «шестых» и т. д.

3) Из замечания 2 следует, что утверждение о единственности причинной геодезической, проходящей через две точки КМГ, неверно — такая геодезическая неединственна. Более того, можно доказать, что в КМГ есть такие пары точек, через которые проходят

любое, наперед заданное, число однопараметрических семейств времениподобных геодезических,

однопараметрическое множество изотропных геодезических,

и любое, наперед заданное, число семейств пространственноподобных геодезических.

Это свойство космологической модели Геделя вызывает большие сомнения в возможности определения разумной причинной структуры на КМГ в целом.

Список литературы: 1. Милнор Дж. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.— 184 с. 2. Денисов В. И. О сопряженных точках в космологической модели Геделя. Укр. геометр. сб.— 1982.— Вып. 25.— С. 30—34. 3. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 316 с. 4. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцова геометрия.— М.: Мир, 1985.— 400 с.

Поступила в редколлегию 02.12.86.

В. И. ДИСКАНТ

УТОЧНЕНИЕ АНАЛОГОВ ОБОБЩЕННОГО ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО
НЕРАВЕНСТВА

Пусть A — компактное выпуклое тело в n -мерном евклидовом пространстве R^n , $n \geq 2$. Обозначим через $W_k(A)$ k -ю интегральную поперечную меру тела A [1, с.183], через $V(A) = W_0(A)$ — объем тела A , через $F(A) = nW_1(A)$ — площадь поверхности тела A , через r — радиус максимального вписанного в A шара, через R — радиус минимального описанного около A шара, через $V(E_n) = W_n(A)$ — объем единичного n -мерного шара E_n .

Классическое изопериметрическое неравенство имеет вид

$$F^{\frac{n}{n-1}}(A) - (n^n V(E_n))^{\frac{1}{n-1}} V(A) \geq 0 \quad \text{или} \quad W^{\frac{n}{n-1}}(A) - W_0(A) W^{\frac{1}{n-1}}(A) \geq 0.$$

Аналогами изопериметрического неравенства являются неравенства

$$W^{\frac{n-l}{n-l-k}}(A) - W_l(A) W^{\frac{k}{n-l-k}}(A) \geq 0,$$

где $1 \leq k \leq n-1$, $0 \leq l \leq n-2$, $1 \leq k+l \leq n-1$ [2, с. 1220].

Пусть теперь A и B — собственные выпуклые компактные тела в R^n . Обозначим через $q = q(A, B)$ коэффициент вместимости тела B в теле A , т. е. наибольшее из чисел α , для которых тело αB параллельным сдвигом помещается в A , через $Q = Q(A, B)$ — коэффициент охвата тела A телом B , т. е. наименьшее из чисел β , для которых тело A параллельным сдвигом помещается в βB , через $V_k(A, B) = V(\underbrace{A, \dots, A}_{n-k}, B)$ — k -смешанный объем тел A и B , через $V(A) = V_0(A, B) =$

объем тела A , через $V(B) = V_n(A, B)$ — объем тела B , через \bar{B} — форм-тело тела A относительно тела B , т. е. тело, которое получается пересечением полупространств R^n , содержащих B и ограниченных гиперплоскостями, являющимися одновременно опорными к B и параллельными всем тем опорным плоскостям тела A , которые проходят через регулярные точки границы тела A [3].

Рассмотрим площадь поверхности тела A относительно тела B — величину

$$F(A, B) = \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{V(A + \rho B) - V(A)}{\rho}.$$

Известно, что $F(A, B) = nV_1(A, B)$ и обобщенное изопериметрическое неравенство имеет вид

$$V_1^{\frac{n}{n-1}}(A, B) - V(A) V^{\frac{1}{n-1}}(B) \geq 0. \quad (1)$$

Аналогами обобщенного изопериметрического неравенства являются неравенства

$$V^{\frac{n-l}{n-l-k}}(A, B) - V_l(A, B) V^{\frac{k}{n-l-k}}(B) \geq 0, \quad (2)$$

где $1 \leq k \leq n-1$, $0 \leq l \leq n-2$, $1 \leq k+l \leq n-1$.

В работе [4] были доказаны неравенства

$$V_1^{\frac{n}{n-1}}(A, B) - V(A) V^{\frac{1}{n-1}}(B) \geq [V_1^{\frac{1}{n-1}}(A, B) - q V^{\frac{1}{n-1}}(B)]^n,$$

$$V_1^{\frac{n}{n-1}}(B, A) - V(B) V^{\frac{1}{n-1}}(A) \geq [V_1^{\frac{1}{n-1}}(B, A) - \frac{1}{q} V^{\frac{1}{n-1}}(A)]^n,$$

уточняющие (1) и (2) при $l=0$, $k=1$ и при $l=0$, $k=n-1$.

В настоящей работе будут доказаны неравенства

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(A, B) - V(A) V^{\frac{k}{n-k}}(B) \geq [V_k^{\frac{1}{n-k}}(A, B) - q V^{\frac{1}{n-k}}(B)]^n, \quad (3)$$

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(B, A) - V(B) V^{\frac{k}{n-k}}(A) \geq [V_k^{\frac{1}{n-k}}(B, A) - \frac{1}{q} V^{\frac{1}{n-k}}(A)]^n, \quad (4)$$

$$V_k^{\frac{n}{n-k}}(A, B) - V(A) V^{\frac{k-1}{n-k}}(B) V^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B) \geq [V_k^{\frac{1}{n-k}}(A, B) - q V^{\frac{1}{n-k}}(\bar{B}, B)]^n, \quad (5)$$

уточняющие (2) при $l=0$ и любом $k=1, n-1$.

Возникает естественный вопрос: имеет ли место неравенство

$$V_{l+k}^{\frac{n-l}{n-l-k}}(A, B) - V_l(A, B) V^{\frac{k}{n-l-k}}(B) \geq [V_{l+k}^{\frac{1}{n-l-k}}(A, B) - q V^{\frac{1}{n-l-k}}(B)]^{n-l}, \quad (6)$$

аналогичное (3) и уточняющее (2) при $l > 0$?

После доказательств неравенств (3)–(5) в работе будет приведен пример, показывающий, что ответ на этот вопрос является отрицательным.

Доказательство неравенства (3). Так как в дальнейшем рассматриваются величины, инвариантные относительно параллельных сдвигов, то можно считать, что $qB \subset A$ и начало координат лежит внутри тела B . Пусть $H_A(\mathbf{u})$, $H_B(\mathbf{u})$ — опорные функции тел A и B . Здесь $\mathbf{u} \in \Omega$, где Ω — единичная сфера в R^n с центром в начале координат. Рассмотрим семейство функций $H_{-\sigma}(\mathbf{u}) = H_A(\mathbf{u}) - \sigma H_B(\mathbf{u})$,

$0 \leq \sigma \leq q$, заданных на Ω . При фиксированном $\sigma \in [0, q]$ функции $H_{-\sigma}(u)$ положительна и непрерывна на Ω и потому определяет собственное выпуклое тело $A_{-\sigma}$ [5], которое совпадает с разностью Минковского $A/\sigma B$ тел A и σB [6, с. 203]. В работе [3] было показано, что

$$V(A) = n \int_0^q V_1(A_{-\sigma}, B) d\sigma. \quad (7)$$

Из неравенств (2) при $l = 1, m = 1 + k, 2 \leq m \leq n - 1$, получим

$$V_m^{n-m}(A_{-\sigma}, B) \geq V_1(A_{-\sigma}, B) V^{n-m}(B).$$

Отсюда

$$V_1(A_{-\sigma}, B) \leq \frac{[V_k^{n-k}(A_{-\sigma}, B)]^{n-1}}{V^{n-k}(B)} \quad (8)$$

при любом $k = \overline{1, n-1}$.

Пользуясь общей теоремой Брунна-Минковского [7, с.67], найдем

$$V_k^{n-k}(A_{-\sigma} + \sigma B, B) \geq V_k^{n-k}(A_{-\sigma}, B) + \sigma V^{n-k}(B).$$

Так как $A_{-\sigma} + \sigma B \subset A$, то $V_k(A_{-\sigma} + \sigma B, B) \leq V_k(A, B)$, и поэтому $V_k^{n-k}(A_{-\sigma}, B) \leq V_k^{n-k}(A, B) - \sigma V^{n-k}(B)$.

Подставляя последнюю оценку для $V_k^{n-k}(A_{-\sigma}, B)$ в (8), а затем оценку, полученную для $V_1(A_{-\sigma}, B)$, — в (7), приходим к неравенству

$$V(A) \leq \frac{n}{V^{n-k}(B)} \int_0^q (V_k^{n-k}(A, B) - \sigma V^{n-k}(B))^{n-1} d\sigma.$$

Интегрируя правую часть этого неравенства, получим неравенство (3).

Доказательство неравенства (4). Условия, которым удовлетворяют тела A и B в неравенстве (3), одинаковы. Поэтому, меняя местами A и B в неравенстве (3), приходим к неравенству

$$V_k^{n-k}(B, A) - V(B) V^{n-k}(A) \geq [V_k^{n-k}(B, A) - q(B, A) V^{n-k}(A)]^n.$$

Но $q(B, A) = 1/Q(A, B) = 1/Q$ [6], что и приводит к неравенству (4).

Доказательство неравенства (5). Так как $A_{-\sigma} + \sigma B \subset A$ [3], то

$$V_k^{n-k}(A_{-\sigma}, B) \leq V_k^{n-k}(A, B) - \sigma V_k^{n-k}(\bar{B}, B).$$

Подставляя полученную оценку для $V_k^{n-k}(A_{-\sigma}, B)$ в (8), а затем оценку, полученную для $V_1(A_{-\sigma}, B)$, — в (7), приходим к неравенству

$$V(A) \leq \frac{n}{V_k^{n-k}(B)} \int_0^q (V_k^{n-k}(A, B) - \sigma V_k^{n-k}(\bar{B}, B))^{n-1} d\sigma.$$

Интегрируя правую часть этого неравенства, получим неравенство (5).

Пусть теперь A_1 — единичный $(n-1)$ -мерный куб, лежащий в гиперплоскости пространства R^n . Имеем $V(A_1) = V_0(A_1, E_n) = 0$, $V_l(A_1, E_n) = 0$, $V_k(A_1, E_n) \neq 0$ при $k = 1, n$. Тогда для пары $A = A_1$, $B = E_n$ неравенство (6) не имеет места при любом $l = 1, n-2$, так как левая часть в (6) меньше правой. За тело A можно взять и собственное компактное выпуклое тело, близкое к A_1 , такое, что для пары тел A и $B = E_n$ неравенство (6) по-прежнему не имеет места. При этом можно сослаться на непрерывность смешанных объемов от своих аргументов [1, с. 166]. Этот же пример при $n = 3$, $k = 1$, $l = 1$ опровергает неравенство $V_2^2(A, E_3) - V_1(A, E_3)V(E_3) \geq [V_2(A, E_3) - V(E_3)]^2 \Leftrightarrow F(A) - 2rM(A) + 4\pi r^2 \leq 0$, а также примыкающее к нему неравенство $M^2(A) - 4\pi F(A) \geq 4\pi^2(R-r)^2$, приведенное в приложении к книге [8, с. 221]. В последних неравенствах $M(A) = 3V_2(A, E_3) = 3W_2(A)$ — интеграл средней кривизны тела A .

Список литературы: 1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985. — 306 с. 2. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел // *Мат. сб.* — 1937. — 2 (44). № 6. — С. 1205—1235. 3. Дискант В. И. Усиления изопериметрического неравенства // *Сиб. мат. журн.* — 1973. — № 4. — С. 873—877. 4. Дискант В. И. Обобщение неравенств Боннезена // *ДАН СССР.* — 1973. — 213, №3. — С. 519—521. 5. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел // *Мат. сб.* — 1938. — 3 (45), № 1. — С. 27—44. 6. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966. — 416 с. 7. Бузман Г. Выпуклые поверхности. — М.: Наука, 1964. — 240 с. 8. Власике В. Круг и шар. — М.: Наука, 1967. — 232 с.

Поступила в редколлегию 21.04.86

В. Ф. ИГНАТЕНКО

ОБ ИНВАРИАНТАХ ОДНОЙ ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННОЙ КОСЫМИ
ОТРАЖЕНИЯМИ В E^{11}

А. Е. Залесский [1] построил в пространстве E^{11} пример порожденной отражениями группы G , алгебра инвариантов которой не является свободной. Пространство инвариантов третьей степени группы G определяется многочленами третьей степени от z_j ($j = 1, 2, 3$) и формами

$$f_1 = 2z_1z_3x_3 + 2z_1z_2x_4 - z_1y_2^2 + 2z_2z_3x_5 - z_3y_3^2, \quad f_2 = 2z_1z_2x_1 + 2z_1^2x_3 + 2z_2^2x_6 - z_1y_1^2 - z_2y_3^2, \quad f_3 = 2z_2z_3x_1 + 2z_1z_3x_2 - 2z_2z_3x_3 - 2z_2^2x_4 - z_3y_1^2 + z_3y_2^2.$$

В настоящей заметке дается геометрическое описание группы G

и находится общее уравнение алгебраической 10-мерной поверхности F_n порядка n , инвариантной относительно G .

Пусть C_j есть цилиндры с уравнениями $f_j = c_j$ (1).

Эти цилиндры имеют образующие, параллельные координатным λ -плоскостям ($\lambda = 3, 4, 2$) $\Pi^3(x_1, x_2, y_1)$, $\Pi^4(x_3, x_4, z_3, y_2)$ и $\Pi^2(x_5, y_3)$. Кубические $(\mu - 1)$ -поверхности Φ_j , задаваемые в координатных μ -плоскостях Π^μ ($\mu = 11 - \lambda$) уравнениями (1), являются направляющими C_j . Множество P образуют все общие 10-мерные плоскости координатной (в частности, ортогональной) симметрии цилиндров C_j , направления симметрии которых параллельны 8-плоскости переменных x_i ($i = \overline{1, 5}$) и y_j . Если $x = (x_i, y_j, z_k)$ — текущий вектор, то любая плоскость P сопряжена $u = (u_i, v_j, 0, 0, 0)$; точка O — начало координат. Отражения относительно плоскостей P определяют группу G . Справедлива такая

Лемма. Множество P состоит из диаметральных плоскостей цилиндров с уравнениями

$$\xi_1 \equiv y_1^2 - 2z_2x_1 - 2z_1x_2 = 0, \quad (2)$$

$$\xi_2 \equiv y_2^2 - 2z_3x_3 - 2z_2x_4 = 0, \quad (3)$$

$$\chi \equiv \xi_3 - 2z_1x_3 \equiv y_3^2 - 2z_2x_5 - 2z_1x_3 = 0. \quad (4)$$

Эти плоскости сопряжены векторам u , параллельным соответственно 3-плоскостям $\Pi^3(x_1, x_2, y_1)$, $v_1 \neq 0$, $\Pi^3(x_3, x_4, y_2)$, $v_2 \neq 0$ и $\Pi_1^3 = \Pi^1 \oplus \Pi^2(x_5, y_3)$, $v_3 \neq 0$, где Π^1 определяется уравнениями $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, ..., $z_3 = 0$ (5).

Доказательство. Каждое из множеств P_j ($j = 1, 2, 3$) плоскостей симметрии цилиндров C_j распадается на два множества A_j состоят из плоскостей, параллельных образующим соответствующих цилиндров; этим образующим параллельны и направления симметрии плоскостей B_j , $P_j = A_j \cup B_j$.

Запишем в Π^μ уравнения $(\mu - 1)$ -плоскостей симметрии Φ_j (2) (укажем также линейные оболочки направлений симметрии и ограничения на координаты u):

$$(\Phi_1) \quad \begin{aligned} y_2 + u_4z_2 + u_3z_3 &= 0, \\ \Pi_0^3(x_3, x_4, y_2), v_2 &= -1; \end{aligned} \quad (6)$$

$$y_3 + u_3z_1 + u_5z_2 = 0, \quad (7)$$

$$\Pi_2^3(x_3, x_5, y_2), v_3 = -1; \quad (8)$$

$$y_1 + u_2z_1 + u_1z_2 = 0, \quad (8)$$

$$(\Phi_2) \quad \begin{aligned} \Pi_3^3(x_1, x_2, y_1), v_1 &= -1; \\ y_3 + u_1z_1 + u_5z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Pi_4^3(x_1, x_5, y_3), v_3 = -1; \quad (9)$$

$$y_2 - u_4z_2 + (u_1 - u_3)z_3 = 0, \quad (10)$$

$$(\Phi_3) \quad \begin{aligned} \Pi_0^4(x_1, x_3, x_4, y_2), v_2 &= 1; \\ y_1 + u_2z_1 + (u_1 - u_3)z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Pi_1^4(x_1, x_2, x_3, y_1), v_1 = -1. \quad (11)$$

Наибольшие размерности образующих цилиндров C_j равны 3, 4, 5. 3-мерная образующая C_3 параллельна Π_1^3 . Поэтому плоскости множеств A_j имеют уравнения видов (6)–(11), но направления симметрии, вообще говоря, уже другие; их задают векторы 6- и 7-плоскостности.

$$\begin{aligned} \Pi^0(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2) &= \Pi^3 \oplus \Pi_0^3, \quad \Pi_0^6(x_1, x_2, x_3, x_5, y_1, y_2) = \\ &= \Pi^3 \oplus \Pi_2^3 (j=1), \quad \Pi_0^7(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, z_3) = \Pi^4 \oplus \Pi_3^3, \\ \Pi_1^7(x_1, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, z_3) &= \Pi^4 \oplus \Pi_4^3 (j=2), \quad \Pi_1^6(x_1, x_3, x_4, x_5, \\ y_3, y_3) &= \Pi^2 \oplus \Pi_0^4, \quad \Pi_2^6(x_1, x_2, x_3, x_5, y_1, y_3) = \Pi^2 \oplus \Pi_1^4 (j=3). \end{aligned}$$

Отметим, что $\Pi_1^3 \in \Pi_2^4 = \Pi_1^6 \cap \Pi_2^6$, $\Pi^2 \in \Pi_0^6 \cap \Pi_1^7$.

Пусть уравнения (6), (8), (10) и (7), (9), (11) определяют плоскости множеств R_j и S_j соответственно, $A_j = R_j \cup S_j$. Тогда $Q = R_1 \cap P$ должно включать некоторые плоскости $R_3 \cap P$. Поскольку ось $u_1 \parallel \Pi^6 \cap \Pi_1^6$, в (10) $u_1 = 0$ только за счет уравнений плоскостей A_3 , образующая цилиндра C_2 параллельна $\Pi^4 \in \Pi_0^3$ и $Q = B_2 \cap P$. Следовательно, (6) задает диаметрально плоскости цилиндра с уравнением (2); они принадлежат множеству P .

Если $H = S_1 \cap P$, то $H \supset S_2 \cap P$. Из условия $H \subset B_3$ следует, что $H \parallel \Pi_1^3$. Значит, в случае $u_1 = u_3$ каждое из уравнений (7), (9) определяет плоскости P . Они являются диаметрально плоскостями цилиндра с уравнением (4), сопряженными $u \parallel \Pi_2^4$. При этом в (4) x_3 можно заменить на x_1 .

Множество $R = B_1 \cap P = P \setminus (Q \cup H)$. Так как $Ox_3 \parallel \Pi^3$, то в уравнении (11) $u_3 = 0$ оно становится уравнением (8). Расположение 3-плоскостности $\Pi^3 \in \Pi_0^7 \cap \Pi_2^6$ показывает, что диаметрально плоскости цилиндра с уравнением (3) составляют $R = R_2 = S_3 \cap P$. Лемма доказана.

Приведем схему другого доказательства леммы. Рассмотрим поверхность F_6 , определяемую уравнением $f_1 f_2 f_3 = c$ (12).

Она отлична от цилиндра, так как цилиндры C_j не имеют общих образующих. Множество P состоит из плоскостей симметрии F_6 . Уравнение (12) допускает каждый из следующих трех видов: $\alpha_k \xi_k^2 + \beta_k \xi_k + \gamma_k = 0$, ($k = 1, 2, 3$), где

$$\xi_k = y_k^2 + 2 \sum_{\tau=1}^5 \xi_{k,\tau}(z_j) x_\tau, \quad \deg \xi_{k,\tau} \leq 1;$$

при любом k многочлены $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ не содержат y_k и $x_5 \mid \xi_{k,\tau} \neq 0$ ($\tau \in \{1, \dots, 5\}$). Плоскостями P являются диаметрально плоскости цилиндров с уравнениями $\xi_k = 0$ [3]. Из (12) находим $\xi_{1,1} = \xi_{2,4} = \xi_{3,5} = -z_2$, $\xi_{1,2} = -z_1$, $\xi_{2,3} = -z_3$ (все другие $\xi_{k,\tau} \equiv 0$); следовательно, $\xi_k = \xi_k$. Согласно (5), выделим аффинное преобразование $\varphi: x \rightarrow (x_1 + x_3, x_2, x_4, \dots, z_3)$. Тогда $\varphi(f_1 f_2 f_3) = \alpha \chi^2 + \beta \chi + \gamma$; многочлены α, β, γ не содержат x_3, x_5, y_3 .

На основании леммы и работы [3] (или [4]) имеет место

Теорема. Произвольная поверхность F_n , инвариантная относительно группы G , определяется уравнением $F(\xi_j, z_j) = 0$ ($j = 1, 2, 3$), которое преобразованием φ приводится к виду $F'(x, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, z_j) = 0$; F и F' есть многочлены от указанных в скобках переменных.

Укажем теперь плоскости и направления симметрии, которые определяют образующие a_j, b_j, c_j группы G , приведенные в [1]. При этом считаем равными нулю все координаты u , не записанные после уравнения соответствующей плоскости симметрии.

1. $a_1(x_1) = x_1 + 2y_1 + 2z_2, a_1(y_1) = -y_1 - 2z_2; y_1 + z_2 = 0; u_1 = 1, v_1 = -1.$
2. $b_1(x_2) = x_2 + 2y_1 + 2z_1, b_1(y_1) = -y_1 - 2z_1; y_1 + z_1 = 0; u_2 = 1, v_1 = -1.$
3. $a_2(x_3) = x_3 + 2y_2 + 2z_3, a_2(y_2) = -y_2 - 2z_3; y_2 + z_3 = 0; u_3 = 1, v_3 = -1.$
4. $b_2(x_4) = x_4 + 2y_2 + 2z_2, b_2(y_2) = -y_2 - 2z_2; y_2 + z_2 = 0; u_4 = 1, v_2 = -1.$
5. $a_3(x_5) = x_5 + 2y_3 + 2z_2, a_3(y_3) = -y_3 - 2z_2; y_3 + z_2 = 0; u_5 = 1, v_3 = -1.$
6. $b_3(x_1) = x_1 + 2y_3 + 2z_1, b_3(x_3) = x_3 + 2y_3 + 2z_1, b_3(y_3) = -y_3 - 2z_1; y_3 + z_1 = 0; u_1 = u_3 = 1, v_3 = -1.$

Список литературы: 1. Zaleskii A. E. The fixed algebra of a group generated by reflections is not always free // Arch. Math.— 1983.— 41,— P. 434—437. 2. Игнатенко В. Ф. О некоторых кубических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косої симметрии // Укр. геометр. сб.— 1987.— Вып. 30.— С. 37—41. 3. Игнатенко В. Ф. О диаметральных плоскостях и плоскостях косої симметрии алгебраической поверхности пространства E^m // Укр. геометр. сб.— 1977.— Вып. 20.— С. 35—46. 4. Игнатенко В. Ф. Об алгебраических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косої симметрии: Тез. докл. Всесоюз. шк. Оптим. управление. Геометрия и анализ, Кемерово, 1986.— С. 81.

Поступила в редколлегию 27.10.86

УДК 514

В. Н. КОКАРЕВ

**ОЦЕНКИ ГЛАВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ ЗАМКНУТОЙ
ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПО ФУНКЦИЯМ
ЕЕ УСЛОВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ**

Настоящая работа является обобщением по размерности и усилением работы [1].

Пусть S и E — регулярные замкнутые выпуклые гиперповерхности (ниже называемые поверхностями) в $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1} со строго положительной гауссовой кривизной. Обозначим через $R_1(v), \dots, R_n(v)$ главные условные радиусы кривизны поверхности S относительно поверхности E в точке с нормалью v . При этом считаем, что $R_1(v) \geq \dots \geq R_n(v)$.

Пусть $f(R_1, \dots, R_n)$ — регулярная симметрическая неотрицательная вогнутая функция переменных R_i , определенная в области $R_i > 0$. Пусть $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} f(R, \dots, R) = \alpha > 0$.

На единичной сфере поверхность S и функция E определяют функцию $\varphi(v) = f(R_1(v), \dots, R_n(v))$. Будем искать зависящую от f , φ и параметров E оценку сверху максимального радиуса нормальной кривизны поверхности S .

Пусть $h(v_1, \dots, v_n)$, $h^0(v_1, \dots, v_n)$ — опорные функции поверхностей S и E на плоскости $x_{n+1} = 1$. Условные радиусы кривизны поверхности S в окрестности точки с нормалью $(0, \dots, 0, 1)$ находятся из уравнения $\det |h_{ij} - h_{ij}^0 R| = 0$; $i, j = 1, \dots, n$ (1). Индекс i при h и h^0 будет обозначать дифференцирование функций h и h^0 по v_i .

Радиусы нормальной кривизны поверхностей S и E обозначим в порядке убывания R_1^s, \dots, R_n^s и $R_E = R_1^E, R_2^E, \dots, R_n^E = r_E$ соответственно.

Пусть радиус нормальной кривизны поверхности S достигает максимума в точке X с внешней нормалью v . Направим i -ю ось декартовой системы координат параллельно i -му главному направлению S в точке X . Направление оси x_{n+1} возьмем совпадающим с направлением вектора v . Тогда функция $\omega = h_{11}(v_1, \dots, v_n) (1 + v_1^2 + \dots + v_n^2)^{3/2} (1 + v_2^2 + \dots + v_n^2)^{-1}$ достигает в точке $(0, \dots, 0)$ абсолютного максимума, равного $h_{11}(0, \dots, 0)$ [2]. При этом $h_{ii}(0, \dots, 0) = R_i^s(v)$, $h_{ij}(0, \dots, 0) = 0$ ($i \neq j$).

Так как ω достигает максимума в точке $(0, \dots, 0)$, то в этой точке $d\omega = 0$, $d^2\omega \leq 0$. Вычислив в точке $(0, \dots, 0)$ $\partial\omega/\partial v_i = \omega_i$, $\partial^2\omega/\partial v_i \partial v_j = \omega_{ij}$, получим

$$\left. \begin{aligned} h_{11i} &= 0, \quad \omega_{11} = h_{1111} + 3h_{11}, \\ \omega_{ii} &= h_{11ii} + h_{11} \quad (i > 1), \quad \omega_{ij} = h_{11ij} \quad (i \neq j). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

По формулам Виета из (1) для элементарных симметрических функций σ_m условных радиусов кривизны получаем выражение

$$\sigma_m = D \underbrace{(h_1, \dots, h)}_m, h^0, \dots, h^0 / \det (h_{ij}^0), \quad (3)$$

Здесь в числителе — смешанный дискриминант для матриц (h_{ij}) и (h_{ij}^0) . Определитель $\det (\partial\sigma_i/\partial R_j)$ с точностью до знака равен определителю Вандермонда $\prod_{1 \leq j < i < n} (R_i - R_j) = \Delta$. Поэтому при выполнении строгих неравенств $R_1 > \dots > R_n$ отображение $(R_1, \dots, R_n) \rightarrow (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ является локальным диффеоморфизмом. Так как $\frac{\partial R_i}{\partial \sigma_j} = \frac{A_{ij}(R_1, \dots, R_n)}{\Delta}$, где $A_{ij}(R_1, \dots, R_n)$ — многочлен от R_1, \dots, R_n , то функции $\frac{\partial R_i}{\partial \sigma_j}$ имеют производные по переменным R_1, \dots, R_n любого порядка. Предположим пока, что в точке X для условных радиусов кривизны выполняются строгие неравенства $R_1 > \dots > R_n$. Тогда можно считать,

что функция f зависит от R_1, \dots, R_n через элементарные симметрические функции и обладает по $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ той же степенью регулярности, что и по R_1, \dots, R_n . Так как $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ выражаются через h_{ij}, h_{ij}^0 , то и функция f выражается через них же, т. е. $f(R_1, \dots, R_n) = g(h_{11}, h_{12}, \dots, h_{11}^0, h_{12}^0, \dots)$.

Вычислим первую и вторую производные функций σ_m по v_1 в точке $(0, \dots, 0)$. Дифференцирование по v_1 в точке $(0, \dots, 0)$ будем обозначать штрихом. Получим

$$\begin{aligned} \sigma'_m &= \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_m}{\partial h_{ij}} h_{ij1} + \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_m}{\partial h_{ij}^0} h_{ij1}^0, \\ \sigma''_m &= \sum_{i,j,p,l} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial h_{ij} \partial h_{pl}} h_{ij1} h_{pl1} + \sum_{i,j,p,l} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial h_{ij}^0 \partial h_{pl}^0} h_{ij1}^0 h_{pl1}^0 + \\ &+ \sum_{i,l,p} \frac{\partial^2 \sigma_m}{\partial h_{ij} \partial h_{pl}^0} h_{ij1} h_{pl1}^0 + \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_m}{\partial h_{ij}} h_{ij11} + \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_m}{\partial h_{ij}^0} h_{ij11}^0. \end{aligned}$$

Обозначим через d частный дифференциал на пространстве переменных h_{ij} , а через δ — частный дифференциал на переменных h_{ij}^0 . Если взять $h_{ij1} = dh_{ij}$, $h_{ij1}^0 = \delta h_{ij}^0$, то $\sigma'_m = d\sigma_m + \delta\sigma_m$, $\sigma''_m = d^2\sigma_m + 2d\delta\sigma_m + \delta^2\sigma_m + \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_m}{\partial h_{ij}} h_{ij11} + \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_m}{\partial h_{ij}^0} h_{ij11}^0$ (4). Вычисляя вторую производную функции φ по v_1 в точке $(0, \dots, 0)$, получим

$$\varphi'' = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \sigma''_i + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \sigma_i \sigma_j,$$

или, используя (4),

$$\varphi'' = d^2g + 2d\delta g + \delta^2 g + \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}} h_{ij11} + \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}^0} h_{ij11}^0. \quad (5)$$

Так как в точке $(0, \dots, 0)$ будет $d^2\omega \leq 0$, то $\sum_{i,j} \omega_{ij} \xi_i \xi_j \leq 0$. В силу положительности и вогнутости функции f по переменным R_i имеем $\frac{\partial f}{\partial R_i} > 0$. Тогда $\sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}} \xi_i \xi_j \geq 0$ (см. [3, с. 276]). Следовательно,

$\sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}} \omega_{ij} \leq 0$. Подставляя сюда ω_{ij} из (2), получим

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}} h_{ij11} \leq -h_{11} \sum_i \frac{\partial g}{\partial h_{ii}} - 2 \frac{\partial g}{\partial h_{11}} h_{11}. \quad (6)$$

Будем теперь оценивать слагаемые $d^2g + 2d\delta g + \delta^2 g$ в (5). Пусть A — невырожденная матрица, A^T получена из A транспонированием. Если матрицы (h_{ij}) и (h_{ij}^0) преобразовать в $A^T (h_{ij}) A = (H_{ij})$ и

$A^2 (h_{ij}^0) A = (H_{ij}^0)$ соответственно, то условные радиусы кривизны R_i по-прежнему будут корнями уравнения $\det |H_{ij} - H_{ij}^0 R| = 0$; $i, j = 1, \dots, n$. Следовательно, функция g инвариантна относительно таких преобразований. Преобразования $\psi: (h_{ij}) \rightarrow (H_{ij})$, $\psi^0: (h_{ij}^0) \rightarrow (H_{ij}^0)$ являются линейными преобразованиями переменных h_{ij} и h_{ij}^0 . Будем говорить, что преобразования ψ и ψ^0 определяются матрицей A . Второй дифференциал инвариантен относительно линейных преобразований переменных, поэтому $d^2g + 2d\delta g + \delta^2g$ — инвариант преобразования ψ, ψ^0 .

Пусть $D\psi, D\psi^0$ — дифференциалы отображений ψ и ψ^0 ; через $(u_{ij}), (u_{ij}^0)$ обозначим образы векторов (h_{ij1}) и (h_{ij1}^0) , т. е.

$$D\psi: (h_{111}, \dots, h_{i11}, \dots) \rightarrow (u_{11}, \dots, u_{i1}, \dots);$$

$$D\psi^0: (h_{111}^0, \dots, h_{i11}^0, \dots) \rightarrow (u_{11}^0, \dots, u_{i1}^0, \dots).$$

Отметим некоторые свойства преобразований ψ и ψ^0 .

Пусть ψ и ψ^0 определяются диагональной матрицей $\text{diag}(c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn})$. Тогда h_{ij} и h_{ij}^0 преобразуются так: $\tilde{h}_{ps} = c_{pp} h_{ps} c_{ss}$, $\tilde{h}_{ps}^0 = c_{pp} \times h_{ps}^0 c_{ss}$. Следовательно, переменные h_{ij}, h_{ij}^0 подвергаются линейному преобразованию, которое является композицией растяжений по направлениям координатных осей с коэффициентами $c_{pp} c_{ss}$.

Если матрица A — ортогональна, то определяемые ею преобразования ψ, ψ^0 сохраняют метрику

$$ds^2 = \sum_i dh_{ii}^2 + 2 \sum_{i < j} dh_{ij}^2 + \sum_i dh_{ii}^{02} + 2 \sum_{i < j} dh_{ij}^{02}$$

в пространстве $R^{\frac{n(n+1)}{2}} \times R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ переменных h_{ij}, h_{ij}^0 ($i \leq j$) [4].

Теперь рассмотрим следующие отображения:

1. Пусть $E_1 = R^{\frac{n(n+1)}{2}} \times R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ — пространство переменных h_{ij}, h_{ij}^0 ($i \leq j$) с метрикой $ds_1^2 = \sum_{i < j} dh_{ij}^2 + \sum_{i < j} dh_{ij}^{02}$, $E_2 = R^{\frac{n(n+1)}{2}} \times R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ — также пространство переменных h_{ij}, h_{ij}^0 ($i \leq j$), но с метрикой $ds_2^2 = \sum_i dh_{ii}^2 + 2 \sum_{i < j} dh_{ij}^2 + \sum_i dh_{ii}^{02} + 2 \sum_{i < j} dh_{ij}^{02}$. При отображении $E_1 \rightarrow E_2$ по равенству координат расстояния увеличиваются в k раз, где k в зависимости от направления принимает значения из отрезка $[1, \sqrt{2}]$.

2. Пусть отображения ψ_2, ψ_2^0 определяются ортогональной матрицей A так, что (h_{ij}^0) приводится к диагональному виду, т. е. $\psi_2^0: (h_{ij}^0) \rightarrow \text{diag}(\tilde{h}_{11}^0, \dots, \tilde{h}_{nn}^0)$, $\psi_2: (h_{ij}) \rightarrow (\tilde{h}_{ij})$. Соответствующее преобразование $E_1 \rightarrow E_2$ является изометрией.

3. Пусть отображения ψ_3, ψ_3^0 определяются матрицей $Q = \text{diag} \times ((\tilde{h}_{11}^0)^{-1/2}, \dots, (\tilde{h}_{nn}^0)^{-1/2})$.

Тогда

$$\psi_3^0: \text{diag}(\bar{h}_{11}^0, \dots, \bar{h}_{nn}^0) \rightarrow \text{diag}(1, \dots, 1), \quad \psi_3: (\bar{h}_{ij}) \rightarrow (h_{ij}).$$

Так как $r_E \leq h_{ii}^0 \leq R_E$, то коэффициенты изменения длин при соответствующем преобразовании $E_2 \rightarrow E_2$ заключены между $\frac{1}{R_E}$ и $\frac{1}{r_E}$.

4. Отображения ψ_4, ψ_4^0 определены ортогональной матрицей, так что (h_{ij}) приводится к диагональному виду:

$$\psi_4: (h_{ij}) \rightarrow \text{diag}(H_{11}, \dots, H_{nn}),$$

$$\psi_4^0: \text{diag}(1, \dots, 1) \rightarrow \text{diag}(1, \dots, 1).$$

При этом $\bar{H}_{ii} = R_i$. Соответствующее преобразование $E_2 \rightarrow E_2$ является изометрией.

5. Покоординатное отображение $E_2 \rightarrow E_1$. При этом расстояния уменьшаются в k раз, где k в зависимости от направления принимает значения из отрезка $[1, \sqrt{2}]$.

В результате композиции отображений 1—5 получаем линейное преобразование переменных h_{ij}^0, h_{ij} , при котором коэффициенты изменения длин находятся в отрезке $[1/R_E \sqrt{2}, \sqrt{2}/r_E]$. Поэтому для координат вектора $u^0 = (u_{11}^0, u_{12}^0, \dots)$, который является образом вектора $(h_{11}^0, h_{12}^0, \dots)$, получим

$$\max_{i,j} |u_{ij}^0| \leq |u^0| \leq \frac{\sqrt{2}}{r_E} \sqrt{\sum_{i < j} h_{ij}^0{}^2} \leq \frac{\sqrt{2}n}{r_E} \max_{i,j} |h_{ij}^0|.$$

В [5] доказано, что $|h_{ij}^0| \leq \theta(v)$, где

$$\theta(v) = \max_{\eta} \frac{dK_H(v, \eta)}{ds} R_E^3. \quad (7)$$

Здесь $K_H(v, \eta)$ — нормальная кривизна геодезической на поверхности E , проходящей через точку с нормалью $v = (0, \dots, 0, 1)$ в направлении η . Производная по длине дуги геодезической вычисляется в точке с нормалью v . Максимум берется по всем направлениям η в этой точке. Итак,

$$\max_{i,j} |u_{ij}^0| \leq \frac{\sqrt{2}n}{r_E} \theta. \quad (8)$$

Пользуясь инвариантностью второго дифференциала при линейных преобразованиях переменных, соотношением (3) и тем, что в результате композиции отображений 1—5 матрицы (h_{ij}^0) и (h_{ij}) приводятся соответственно к единичной и диагональной матрице $\text{diag}(R_1, \dots, R_n)$, получаем

$$d^2g + 2d\delta g + \delta^2g = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} u_i u_{jj} -$$

$$- 2 \sum_{\substack{i < j \\ m}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_{m-2}^{ij} u_{ij}^2 - 2 \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} R_j u_{ij}^0 u_{ii} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} u_{ii}^0 u_{ii} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sum_{\substack{i < j \\ m}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_{m-1}^{ij} u_{ij}^0 u_{ij} \Big) + \sum_{i, j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} R_i u_{ij}^0 R_j u_{ij}^0 + 2 \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} R_i u_{ii}^0 + \\
 & + 2 \sum_{\substack{i < j \\ m}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} (\sigma_m - \sigma_m^{ij}) u_{ij}^0. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Здесь σ_m^{ij} — m -я элементарная симметрическая функция от R_1, \dots, R_n кроме R_i, R_j .

$$\text{Так как } \sigma_{m-1}^{ij} = \sigma_{m-1}^i - R_j \sigma_{m-2}^{ij} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial R_i} - R_j \sigma_{m-2}^{ij},$$

$$\text{то } \sum_m \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_{m-1}^{ij} = \frac{\partial f}{\partial R_i} - R_j \sum_m \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_{m-2}^{ij}.$$

С учетом того, что

$$\sum_m \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} \sigma_{m-2}^{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial R_j} - \frac{\partial f}{\partial R_i} \right) (R_i - R_j)^{-1} \tag{10}$$

(см. [2, с. 59]), получаем

$$\sum_m \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_{m-1}^{ij} = \left(R_i \frac{\partial f}{\partial R_i} - R_j \frac{\partial f}{\partial R_j} \right)^{-1}. \tag{11}$$

Так как $h_{11i} = 0$, то синус угла между векторами (h_{ij}) и (h_{ij}) не менее $1/\sqrt{n}$. Дифференциал композиции отображений 1—5 переводит эти векторы соответственно в векторы (H_{ij}) и (u_{ij}) . Учтывая, что коэффициенты изменения длин заключены в отрезке $[1/(R_E \sqrt{2}), \sqrt{2}/r_E]$, можно доказать, что синус угла τ между векторами (H_{ij}) и (u_{ij}) не менее $4r_E/9R_E \sqrt{n}$, причем $H_{ii} = R_i$, $H_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Так как при $h_{ij} = H_{ij}$ будет

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i < j \\ k < l}} \frac{\partial^2 g}{\partial h_{ij} \partial h_{kl}} u_{ij} u_{kl} & = \sum_{i, j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} u_{ii} u_{jj} - \\
 & - 2 \sum_{\substack{i < j \\ m}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_{m-2}^{ij} u_{ij}^2 \leq 0,
 \end{aligned}$$

то ввиду (10) функция g вогнута по переменным h_{ij} там, где h_{ij}, h_{ij}^0 являются коэффициентами положительно определенных форм. Тогда индикатриса квадратичной формы $(-d^2 g)$ является эллипсоидом, возможно, вырождающимся в цилиндр. Векторы (u_{ij}) такие,

что $\sin((u_{ij}), \widehat{(H_{ij})}) \geq \frac{4r_E}{9R_E \sqrt{n}}$ и они пересекают на индикатрисе квадратичной формы $(-d^2g)$ множество G . Чтобы получить некоторую оценку этого множества, нужно наложить дополнительные условия на функцию f .

Пусть существуют такие положительные числа β_1, β_2 , что всюду в области $R_1 > \dots > R_n > 0$ будет

$$\frac{\beta_2}{R_j} \frac{\partial f}{\partial R_i} \geq \frac{\frac{\partial f}{\partial R_j} - \frac{\partial f}{\partial R_i}}{R_i - R_j} \geq \frac{\beta_1}{R_1} \frac{\partial f}{\partial R_i} \quad (i < j). \quad (12)$$

Пусть индикатриса квадратичной формы $(-d^2f)|_{dR_i=0}$ помещается в эллипсоиде с осями, параллельными осям dR_i ($i > 1$), с полуосями $\lambda_i = \rho f^{1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial R_i} \right)^{-1}$, ($i > 1$), а максимальная ось индикатрисы $(-d^2f)$ имеет направление вектора (R_1, R_2, \dots, R_n) , где $\frac{1}{M} \leq \frac{R_i}{R_1} \leq M$ ($i > 1$), составляя с вектором (R_1, R_2, \dots, R_n) угол ω . Здесь ρ — положительная константа, $M \geq 1$, причем M таково, что $\sin \omega < \frac{4r_E}{9R_E \sqrt{n}}$ для этого достаточно, чтобы $1 \leq M \leq 1 + 4r_E^2/81R_E^2 n$.

Тогда, оказывается, множество G помещается в эллипсоид

$$\sum_{i < j} \frac{dh_{ij}^2}{\lambda_{ij}^2} = 1, \text{ где}$$

$$\lambda_{ii} = \rho f^{1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial R_i} \right)^{-1} \left(1 + \frac{Mp}{\sin(\tau - \omega)} \right) \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}},$$

$$\lambda_{ij} = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2 \sqrt{\sum_m \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_{m-2}^{ij}}} \quad (i < j),$$

$$p = \max \left\{ 1, \frac{1}{\rho \sqrt{2\beta_1}} \right\}.$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \sum_{i, j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} u_{ii} u_{jj} - 2 \sum_{i < j} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_{m-2}^{ij} u_{ij}^2 &\leq \\ &\leq - \sum_i \frac{u_{ii}^2}{\lambda_{ii}^2} - \sum_{i < j} \frac{u_{ij}^2}{\lambda_{ij}^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью (10) и (11) получаем

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i < j} \frac{u_{ij}^2}{\lambda_{ij}^2} - 4 \sum_{\substack{i < j \\ m}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_m^{ij} u_{ij} u_{ij}^0 \leq \\
 & \leq n(n+1) \sum_{i < j} \frac{\left(R_i \frac{\partial f}{\partial R_i} - R_j \frac{\partial f}{\partial R_j} \right)^2 u_{ij}^{0^2}}{(R_j - R_i) \left(\frac{\partial f}{\partial R_i} - \frac{\partial f}{\partial R_j} \right)}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Далее, $\sigma_m - \sigma_m^{ij} = R_i \sigma_{m-1}^i + R_j \sigma_{m-1}^j - R_i R_j \sigma_{m-2}^{ij}$, поэтому

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{\substack{i < j \\ m}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} (\sigma_m - \sigma_m^{ij}) u_{ij}^{0^2} \leq \\
 & \leq 2 \sum_{i < j} \left(R_i \frac{\partial f}{\partial R_i} + R_j \frac{\partial f}{\partial R_j} \right) u_{ij}^{0^2}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

На (14) и (15) с учетом (8) и (12) получаем

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i < j} \frac{u_{ij}^2}{\lambda_{ij}^2} - 4 \sum_{\substack{i < j \\ m}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \sigma_m^{ij} u_{ij}^0 u_{ij} + \\
 & + 2 \sum_{\substack{i < j \\ m}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} (\sigma_m - \sigma_m^{ij}) u_{ij}^{0^2} \leq \frac{4n(n-1) \theta^2 f}{r_E^2} + \\
 & + \frac{2n^2(n^2-1)\beta^2 \theta^2 R_1}{\beta_1 r_E^2} \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i}; \quad \beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Далее,

$$2 \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} R_i u_{ii}^{0^2} \leq \frac{4n\theta^2 f}{r_E^2}. \quad (17)$$

Так как функция f вогнута, то

$$\sum_{i, j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} R_i u_{ii}^0 R_j u_{jj}^0 \leq 0. \quad (18)$$

Пусть, кроме того, индикатриса квадратичной формы $(-d^2 f)$ содержит внутри эллипсоид

$$\sum_i \frac{dR_i^2}{\mu_i^2} = 1, \quad \mu_i = \gamma^{1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial R_i} \right)^{-1}, \quad \gamma > 0.$$

Тогда $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} \right| \leq \frac{\frac{\partial f}{\partial R_i} \frac{\partial f}{\partial R_j}}{\gamma^2 f}$, и с учетом (8) будет

$$-2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial R_i \partial R_j} R_j u_{ij}^0 u_{ii} - 2 \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} u_{ii}^0 u_{ii} - \sum_i \frac{u_{ii}^2}{\lambda_{ii}^2} \leq \frac{n^3 (n+1) \rho^2 \theta^2 f}{r_E^2} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \left(1 + \frac{M\rho}{\sin(\tau - \omega)}\right)^2.$$

Теперь оценим слагаемое $\sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}^0} h_{ij}^0$ в (5).

Пусть $h_{ij}^0 = -h_{ij}^0 + \kappa_{ij}$, $h_{i1}^0 = -2h_{i1}^0 + \kappa_{i1}$ ($i, j \neq 1$), $h_{11}^0 = -3 \times h_{11}^0 + \kappa_{11}$. В работе [5] доказано, что $|\kappa_{ij}| \ll \kappa$, где

$$\kappa(v) = \frac{13}{2} R_E^4 \max_{\eta} \frac{d^2 K_H(v, \eta)}{ds^2} + 9n^3 \frac{R_E}{r_E} \theta^2(v) + \frac{1}{2} \sqrt{R_E^2 - r_E^2}.$$

Величина $K_H(v, \eta)$ определяется в разъяснении к (7).
Имеем

$$\sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}^0} h_{ij}^0 = \sum_i \frac{\partial g}{\partial h_{i1}^0} (-2h_{i1}^0) - \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}^0} h_{ij}^0 + \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}^0} \kappa_{ij}.$$

Здесь $\sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}^0} h_{ij}^0$ — инвариант преобразований ψ и ψ^0 . Считая, что матрица (h_{ij}) приведенз к диагональному виду, а (h_{ij}^0) — к единичной, получаем

$$- \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial h_{ij}^0} h_{ij}^0 = \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} R_i \ll f.$$

Пусть $D\psi^0 : (\kappa_{ij}) \rightarrow (\kappa'_{ij})$, где $|\kappa'_{ij}| \leq \frac{\sqrt{2n}}{r_E} \kappa$; тогда

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial \kappa_{ij}^0} \kappa_{ij} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} R_i \kappa'_{ii} \ll \frac{\sqrt{2n}}{r_E} \kappa f.$$

Далее, учитывая что $h_{i1} = 0$ ($i \neq 1$), находим

$$-2 \frac{\partial g}{\partial h_{11}} h_{11} - 2 \sum_i \frac{\partial g}{\partial h_{i1}^0} h_{i1}^0 = 0.$$

Если формы $h_{ij}\xi_i\xi_j$ и $h_{ij}^0\xi_i\xi_j$ преобразовать с помощью матрицы Q , то $\frac{\partial g}{\partial h_{ij}}\xi_i\xi_j$ преобразуется с помощью матрицы Q^{-1} . Поэтому если формы $h_{ij}\xi_i\xi_j$ и $h_{ij}^0\xi_i\xi_j$ невырожденным линейным преобразованием соответствен-но к каноническому и нормальному виду с матрицами $\text{diag}(\bar{h}_{11}, \dots, \bar{h}_{nn})$ и $\text{diag}(1, \dots, 1)$, то $S\rho\left(\frac{\partial g}{\partial h_{ij}}\right) \geq \frac{1}{R_E} S\rho\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{h}_{ij}}\right)$, но при этом $S\rho\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{h}_{ij}}\right) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i}$ (см. [3, с. 277]).

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial h_{ii}} \geq \frac{1}{R_E} \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i}. \quad (25)$$

Из (5), (6), (9), (13), (16), (17), (18), (19), (21), (22), (23), (24) и (25) получаем

$$\begin{aligned} \varphi'' \leq & \left(\frac{2n^2(n^2-1)\beta^2\theta^2 R_1}{\beta_1 r_E^2} - \frac{h_{11}}{R_E} \right) \sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} + \\ & + f + \frac{\sqrt{2n}\kappa f}{r_E} + \frac{4n^2\theta^2 f}{r_E^2} + \\ & + \frac{n^3(n+1)\rho^2\theta^2 f}{r_E^2} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \left(1 + \frac{Mp}{\sin(\tau-\omega)} \right)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как функция f неотрицательна и вогнута, то $\sum_i \frac{\partial f}{\partial R_i} \geq \alpha$. Кроме того, $R_1 \leq \frac{h_{11}}{r_E}$, а для $\sin(\tau-\omega)$ можно получить оценку

$$\sin(\tau-\omega) \geq \frac{4r_E}{9R_E\sqrt{n}} - 2\sqrt{M-1}. \text{ Тогда, обозначив}$$

$$\begin{aligned} \frac{n^3(n+1)\rho^2\theta^2}{r_E^2} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \right) \left(1 + \frac{9\sqrt{n}R_E Mp}{4r_E - 18R_E\sqrt{(M-1)n}} \right)^2 + \\ + \frac{\sqrt{2n}\kappa}{r_E} + \frac{4n^2\theta^2}{r_E^2} = C, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{1}{R_E} - \frac{2n^2(n^2-1)\beta^2\theta^2}{\beta_1 r_E^3} = B, \quad (28)$$

$$\text{при } B > 0 \text{ из (25) получаем } h_{11} \leq \frac{1}{\alpha B} (\varphi - \varphi'' + C\varphi) \quad (29)$$

Дифференцирование по v_1 можно заменить дифференцированием по длине дуги большого круга на единичной сфере [2].

Оценка получена в предположении, что в точке X для условных равенств кривизны выполнены строгие неравенства $R_1 > \dots > R_n$. Если $R_i = R_j$ ($i \neq j$), то можно аппроксимировать поверхность E

в метрике S^4 поверхностью \bar{E} так, чтобы условные радиусы кривизны \bar{R}_i поверхности S относительно \bar{E} в точке X удовлетворяли условию $\bar{R}_1 > \dots > \bar{R}_n$. Используя полученную оценку и переходя к пределу $\bar{E} \rightarrow E$, получаем, что (29) верно и в случае $R_i = R_j$ ($i \neq j$).

Сформулируем окончательный результат.

Пусть $f(R_1, \dots, R_n)$ — регулярная симметрическая неотрицательная вогнутая функция переменных R_i , определенная в области $R_i > 0$.

Пусть $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} f(R, \dots, R) = \alpha > 0$,

$$\frac{\beta_2}{R_j} \frac{\partial f}{\partial R_i} \geq \frac{\frac{\partial f}{\partial R_j} - \frac{\partial f}{\partial R_i}}{R_i - R_j} \geq \frac{\beta_1}{R_1} \frac{\partial f}{\partial R_i} \quad (i < j), \quad d^2 f \Big|_{dR_i=0} \leq -\frac{1}{\rho^2 f} \sum_{i>1} \left(\frac{\partial f}{\partial R_i} \right)^2 dR_i^2,$$

$$d^2 f \geq -\frac{1}{\gamma^2 f} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial R_i} \right)^2 dR_i^2, \quad \beta_1, \beta_2, \rho, \gamma > 0,$$

и максимум $d^2 f$ для единичных векторов достигается в направлении (R_1, R_2, \dots, R_n) , где $\frac{1}{M} \leq \frac{R'_i}{R_i} \leq M$, $1 \leq M \leq 1 + \frac{4r_E^2}{81nR_E^2}$. Пусть

$\rho = \max \left\{ 1, \frac{1}{\rho \sqrt{2\beta}} \right\}$, $\beta = \max \{ \beta_1, \beta_2 \}$. Пусть величины $\theta(v)$ и $\kappa(v)$ определены формулами (7) и (20), а величины $C(v)$ и $B(v)$ — формулами (27) и (28). Тогда верна

Теорема. Пусть f — функция, удовлетворяющая сформулированным выше условиям. Пусть S и E — замкнутые выпуклые регулярные поверхности в E^{n+1} и поверхность E удовлетворяет условию $B(v) > 0$. Пусть R_1, \dots, R_n — условные радиусы кривизны поверхности S относительно поверхности E . Тогда главные радиусы кривизны поверхности S , удовлетворяющей условию $f(R_1(v), \dots, R_n(v)) = \varphi(v)$, допускают оценку

$$R^s \leq \max_{\eta} \frac{1}{\alpha \beta} (\varphi - \varphi'' + C\varphi).$$

Здесь дифференцирование функции φ выполняется по дуге большого круга в точке v единичной сферы в направлении η . Максимум берется по всем точкам сферы и по всем направлениям в этих точках.

Отметим, что функция $\sigma_m^{1/m}$ удовлетворяет указанным условиям

$$\alpha = 1, \quad \beta_1 = \frac{m-1}{n-1}, \quad \beta_2 = 1, \quad \rho = \frac{(n-1)\sqrt{2}}{\sqrt{n(m-1)}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{n(m-1)}}, \quad M = 1.$$

Если поверхность E является единичной сферой, то $B(v) \equiv 1$, $C(v) \equiv 0$, и приведенная в теореме оценка превращается в соответствующую оценку из [2].

Список литературы: 1. Кокарев В. Н. Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности с заданной функцией условных радиусов кривизны // Укр. геометр. сб. — 1986. — Вып. 29. — С. 82—92. 2. Погорелов А. И.

Многомерная проблема Минковского.— М. : Наука, 1975.— 95 с. 3. Бакельман И. Я. и др. Введение в дифференциальную геометрию «в целом» // И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор.— М. : Наука, 1973.— 440 с. 4. Кокарев В. Н. Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в E^{n+1} по второй элементарной симметрической функции ее условных радиусов кривизны // Укр. геометр. сб.— 1980.— Вып. 23.— С. 65—74. 5. Кокарев В. Н. Производные нормальных кривизн и опорных функций выпуклых поверхностей.— М., 1986.— 9 с. Деп. в ВИНТИ, № 1567.

Поступила в редколлегию 01.07.86

А. И. КРИВОРУЧКО

ФИГУРЫ С НЕДИСКРЕТНЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ
ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ

В работе [1] В. Ф. Игнатенко изучил строение алгебраических гиперповерхностей в n -мерном евклидовом пространстве E^n , группы симметрий которых бесконечны и порождены косыми отражениями относительно гиперплоскостей. В 1982 г. он поставил задачу описать строение лежащих в E^n множеств с указанными группами симметрий. Эта задача и рассматривается в настоящей заметке: изучается строение лежащих в евклидовом пространстве замкнутых множеств (называемых далее фигурами), которые имеют недискретные (в частности, бесчетные) семейства гиперплоскостей косоугой симметрии.

Зафиксируем в E^n , где $n \geq 3$, ортонормированную систему координат с базисными векторами e_1, \dots, e_n и началом c . Будем использовать следующие обозначения: x_1, \dots, x_n — координаты точек в этой системе, F_i — гиперплоскость $x_i = 0$, φ_i — ортогональная симметрия относительно этой гиперплоскости, $H = F_1 \cap F_2$, K — координатная 2-плоскость, параллельная e_1 и e_2 .

Для каждого вещественного t определим преобразования пространства E^n : ρ_t — поворот вокруг H на угол t ; τ_t — параллельный перенос на вектор te_2 ; γ_t — гиперболический поворот

$$x'_1 = x_1 \operatorname{ch} t + x_2 \operatorname{sh} t, \quad x'_2 = x_1 \operatorname{sh} t + x_2 \operatorname{ch} t, \quad x'_3 = x_3, \dots, \quad x'_n = x_n;$$

$$\psi_t \text{ — параболический сдвиг } x'_1 = x_1 + tx_2 + \frac{1}{2}t^2x_3, \quad x'_2 = x_2 + tx_3,$$

$$x'_3 = x_3, \dots, \quad x'_n = x_n;$$

$$\sigma_t \text{ — сдвиг } x'_1 = x_1 + tx_2, \quad x'_2 = x_2, \dots, \quad x'_n = x_n;$$

$$\pi_t \text{ — параболический поворот } x'_1 = x_1 + tx_2 + \frac{1}{2}t^2, \quad x'_2 = x_2 + t,$$

$$x'_3 = x_3, \dots, \quad x'_n = x_n.$$

Через P (соответственно $T, \Gamma, \Psi, \Sigma_2, \Pi$) обозначим группу преобразований, порожденную всеми ρ_t ($\tau_t, \gamma_t, \psi_t, \sigma_t, \pi_t$) и симметрией φ_2 , а через Σ_1 — группу, порожденную всеми σ_t и симметрией φ_1 .

Пусть \mathcal{C} — класс всех групп преобразований пространства E^n , каждая из которых эквивалентно сопряжена с одной из групп $P, T, \Gamma, \Psi, \Sigma_1, \Sigma_2, \Pi$.

Теорема. *Непрерывная группа преобразований пространства E^n содержит недискретное семейство косых симметрий относительно гиперплоскостей тогда и только тогда, когда в ней лежит некоторая подгруппа, принадлежащая C .*

Доказательство. Пусть G — непрерывная группа аффинных преобразований пространства E^n . Единичное преобразование имеет в G проколотую окрестность U , обладающую следующим свойством: всякая однопараметрическая группа аффинных преобразований, пересекающая U , содержится в G [2, теоремы 59 и 62]. Уменьшая эту окрестность, можно считать, что U не содержит аффинных преобразований, для которых -1 — собственное значение.

Предположим теперь, что G содержит недискретное семейство косых симметрий относительно гиперплоскостей. В этом семействе найдется нетривиальная последовательность симметрий λ_j , сходящаяся к некоторой симметрии α_1 . Последовательность композиций $\lambda_j \cdot \alpha_1$ сходится к единичному преобразованию и поэтому $\lambda_m \cdot \alpha_1 \in U$ для некоторого m . Положим $\lambda_m = \alpha_2$, $\alpha_2 \cdot \alpha_1 = \beta$. Будем считать, что α_i — симметрия относительно гиперплоскости Q_i в направлении вектора v_i . Пусть $Z = Q_1 \cap Q_2$.

Допустим, что v_1 и v_2 неколлинеарны. Заменяя G на ту или иную группу, эквивалентно сопряженную с G , меняя тем самым Q_i и v_i , можем считать, что имеет место лишь один из следующих трех случаев.

1. $Z = H$, v_1 и v_2 параллельны K , $Q_2 = F_2$. В этом случае β индуцирует в K композицию косых симметрий относительно двух различных прямых. Эта композиция в силу выбора U есть либо эллиптический поворот, либо гиперболический поворот, и можно считать, что β при некотором t совпадает либо с ρ_t , либо с γ_t . Но все ρ_t (так же, как и все γ_t) образуют однопараметрическую группу и поэтому одна из этих групп содержится в G . Кроме того, непосредственным вычислением координатного представления композиции β по координатным представлениям симметрий α_1 и α_2 показывается, что v_2 и e_2 коллинеарны, т. е. $\alpha_2 = \varphi_2$. Таким образом, в G содержится либо Γ , либо $\tilde{\Gamma}$.

2. $F_2 \cap F_3 \subseteq Z$, $e_1 = v_1 + 2v_2$, e_3 параллелен Q_2 , $e_2 = v_2$. Из этих условий следует, что $\alpha_2 = \varphi_2$, α_1 — симметрия относительно гиперплоскости $x_2 + ax_3 = 0$ в направлении $e_1 - 2e_3$. Если $a \neq 0$, то $\beta = \psi_t$ при некотором t и тогда G содержит однопараметрическую группу параболических сдвигов ψ_t . Если же $a = 0$, то $\beta = \sigma_1$ и G содержит однопараметрическую группу сдвигов σ_t . Но $\alpha_2 \in G$ и поэтому G содержит либо Ψ , либо Σ_2 .

3. Z пусто, $Q_2 = F_2$, $e_1 = v_1 + 2v_2$, $e_2 = v_2$, Q_1 задается уравнением $2x_2 + 1 = 0$. В этом случае $\beta = \pi_1$ и, следовательно, G содержит однопараметрическую группу параболических поворотов π_t . А так как при сделанных предположениях $\alpha_2 = \varphi_2$, получаем, что $\Pi \subseteq G$.

Допустим теперь, что v_1 и v_2 коллинеарны. Тогда возможны лишь следующие два случая.

4. Z не пусто. Можно считать, что $Z = H$, $Q_1 = F_1$, $e_1 = v_1$, Q_2 задается уравнением $x_1 + 2x_2 = 0$. Отсюда $\beta = \sigma_1$, $\alpha_1 = \varphi_1$. Как и выше, получаем, что в этом случае $\Sigma_1 \subseteq G$.

б. Z пусто. Теперь, очевидно, ρ — параллельный перенос и T содержится в группе, эквивалентно сопряженной с G .

Для доказательства теоремы остается отметить, что всякая группа, принадлежащая C , порождается несчетным и, следовательно, недискретным семейством косых симметрий относительно гиперплоскостей (ортогональная симметрия рассматривается здесь как частный случай косой симметрии).

С л е д с т в и е. *Фигура Φ в пространстве E^n имеет недискретное семейство гиперплоскостей косой симметрии тогда и только тогда, когда Φ инвариантна относительно некоторой группы класса C .*

Доказательство. Группа всех аффинных преобразований фигуры непрерывна. При этом недискретность семейства гиперплоскостей косой симметрии фигуры Φ относительно естественной топологии, определяемой сходимостями последовательностей гиперплоскостей и направлений симметрии, эквивалентна недискретности семейства косых симметрий этой же фигуры Φ .

Таким образом, с точностью до эквивалентности всякая фигура с недискретным семейством гиперплоскостей косой симметрии является объединением орбит одной из групп $P, T, G, \Psi, \Sigma_1, \Sigma_2, \Pi$. Орбиты легко находятся по координатным представлениям преобразований, с помощью которых определялись указанные группы. Так, P -орбиты — это окружности, являющиеся сечениями цилиндров $x_1^2 + \dots + x_n^2 = a^2$ (a — произвольное вещественное число) 2-плоскостями, параллельными K . Неодноточечные G -орбиты — это сечения теми же 2-плоскостями любого из следующих цилиндров: 1) $x_1^2 - x_2^2 = a^2, kx_1 > 0$ (k — любое, $k = \pm 1$); 2) $x_1^2 - x_2^2 = -a^2$ ($a \neq 0$). Ψ -орбиты — это либо одноточечные множества, лежащие в $F_2 \cap F_3$, либо объединения пар параллельных вектору e_1 прямых, лежащих в $F_3 \setminus F_2$ и симметричных относительно c , либо параболы, являющиеся сечениями цилиндров $2x_1 x_3 = x_2^2 + ax_3$ (a — любое вещественное число) 2-плоскостями, параллельными K (при $n=3$ указанные цилиндры вырождаются в конусы, касающиеся плоскости K по прямой $K \cap F_2$; поэтому объединением Ψ -орбит будет, например, часть любого такого конуса, исключенная между двумя плоскостями, параллельными K). Всякая T -орбита при любом вещественном t кососимметрична относительно содержащей пересечение $F_2 \cap F_3$ гиперплоскости $x_2 + tx_3 = 0$ в направлении $-te_1 + e_2$. Π -орбиты — параболы, являющиеся сечениями цилиндров $x_2^2 = 2x_1 + a$ 2-плоскостями, параллельными K . Σ_1 -орбита — либо одноточечное множество, содержащееся в H , либо состоит из двух различных точек, лежащих в F_2 и ортогонально симметричных относительно H , либо является прямой, параллельной e_1 и не лежащей в F_3 . Σ_2 -орбита — или одноточечное множество, лежащее в F_2 , или объединение двух различных прямых, ортогонально симметричных относительно F_2 и параллельных e_1 . Наконец, T -орбиты — прямые, параллельные e_2 .

Из доказательства теоремы следует, что если непрерывная группа G содержит недискретное семейство ортогональных отражений

относительно гиперплоскостей, то в G лежит подгруппа, ортогонально сопряженная либо с P , либо с T . Поэтому всякая фигура с не дискретным семейством гиперплоскостей ортогональной симметрии является или фигурой вращения, или объединением параллельных прямых.

Примечание. Пусть произвольная n -мерная нецилиндрическая фигура Φ имеет бесконечное множество N гиперплоскостей косо́й симметрии, причем Φ компактна или при несчетном N неограничена и замкнута, группа G порождена отражениями относительно гиперплоскостей N , Π^h есть h -мерная линейная оболочка G -орбиты направлений симметрии одной из них. В работе [3] доказаны такие утверждения (см. [4]): 1. Плоская фигура Φ , не лежащая на прямой, является одной из следующих кривых: эллипс, парабола, коника гиперболического типа, ее ветвь. 2. Фигура Φ без параллельных гиперплоскостей симметрии либо имеет p -оси ($n - h \leq p \leq n - 2$) вращений (эллиптического, гиперболического), либо некоторая h -мерная фигура $\Pi_0^h \cap \Phi$, где h -плоскость Π_0^h параллельна Π^h , имеет параллельные $(n - 1)$ -плоскости симметрии. Выделен случай $h = n$, $p = n - 2$ как теорема, обобщающая один из результатов статьи [5]. 3. Если N состоит из параллельных гиперплоскостей, то $h = 2$ и орбита любой неинвариантной относительно G точки фигуры Φ является параболой.

Список литературы: 1. *Игнатенко В. Ф.* О диаметральных плоскостях и плоскостях косо́й симметрии алгебраической поверхности пространства E^m // Укр. геометр. сб.— 1977.— Вып. 20.— С. 35—46. 2. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М.: Наука, 1973.— 520 с. 3. *Игнатенко В. Ф.* О строении фигур с бесконечным множеством плоскостей косо́й симметрии // Теория функций и ее прил., Кемерово, 1985.— С. 56—59. 4. *Игнатенко В. Ф.* О строении фигуры с бесконечным множеством плоскостей косо́й симметрии.— РЖ Мат., 1980, 7А 740.— С. 93. 5. *Игнатенко В. Ф., Лейбия А. С.* К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в E^m // Укр. геометр. сб.— 1970.— Вып. 7.— С. 39—54.

Поступила в редколлегию 09.12.88

С. А. ЛАВРЕНЧЕНКО

О ЧИСЛЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ УКЛАДОК ВЕРШИННО-ПОМЕЧЕННОГО ГРАФА НА ТОРЕ

Эта работа — детальное изложение доклада [1, с. 96—97].

1. Введение. В данной работе используются терминология и обозначения работы [2]. Как и в [2], рассматриваются исключительно конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. *Укладкой* графа G на двумерном замкнутом многообразии M^2 называется непрерывное отображение $\gamma: G \rightarrow M^2$, такое, что G и его образ $\gamma(G)$ гомеоморфны посредством γ . Топологическое подпространство $\gamma(G)$ в M^2 со структурой графа, индуцируемой отображением γ , тоже будем называть укладкой G на M^2 . Укладка называется *треугольной* или *триангуляцией* многообразия M^2 , когда все M^2 оказывается разбитым

на треугольники (*границы* триангуляции), не содержащие внутри себя вершин $\gamma(G)$, каждый из которых ограничен ровно тремя ребрами $\gamma(G)$, причем пересечение любых двух треугольников либо пусто, либо одна вершина $\gamma(G)$, либо одно целое ребро $\gamma(G)$. Граф G называется графом триангуляции $\gamma: G \rightarrow M^2$. Очевидно, любая укладка графа триангуляции M^2 на M^2 будет треугольной. Граф триангуляции T двумерного многообразия (2-многообразия) M^2 будет обозначаться через $G(T)$. Граф называется *помеченным*, если его вершины отличаются одна от другой какими-либо метками. Пусть G обозначает граф с V вершинами, снабженными фиксированными метками $1, 2, 3, \dots, V$, и пусть $\chi(G)$ обозначает связность графа G — минимальное число вершин, удаление которых из G приводит к несвязному или тривиальному графу (тривиальным называется граф, состоящий из одной изолированной вершины). Граф G называется *n -связным*, если $\chi(G) \geq n$. *Связностью триангуляции* назовем связность ее графа. Два графа G^1 и G^2 называются *изоморфными* (записывается $G^1 \cong G^2$), если между их множествами вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность, т. е. продолжаемое до гомеоморфизма между G^1 и G^2 . Хорошо известно, что каждое связное компактное замкнутое 2-многообразие гомеоморфно либо сфере S_n с h ручками (ориентируемый класс), либо сфере N_k с k вклеенными листами Мебиуса (неориентируемый класс). Будем говорить, что две триангуляции $T^1(G)$ и $T^2(G)$ одного и того же связного компактного замкнутого 2-многообразия с одним и тем же помеченным графом G *различны* (записывается: $T^1(G) \neq T^2(G)$), если в G существует такой 3-цикл (v, u, w) , что в триангуляции $T^1(G)$ есть грань uvw , а в триангуляции $T^2(G)$ грани uvw нет (ориентация грани не учитывается). Заметим, что различные триангуляции могут оказаться изоморфными. (Определение изоморфных триангуляций см. в [2]). Число всех попарно различных триангуляций $T^i(G)$ с помеченным графом G связного компактного замкнутого 2-многообразия M^2 будет обозначаться через $\tau(G, M^2)$, т. е. $1 \leq i \leq \tau(G, M^2)$, где i — целое. Другими словами, $\tau(G, M^2)$ — это число всех треугольных упаковок помеченного графа G на 2-многообразии M^2 .

Введенное число $\tau(G, M^2)$ допускает следующую геометрическую трактовку. Пусть G^* обозначает некоторое вложение в евклидово пространство E^3 графа G , такое, что все ребра G^* — прямолинейные отрезки, причем никакие три вершины G^* не лежат на одной прямой и никакие четыре — на одной плоскости. Сопоставим каждой триангуляции $T^i(G)$ многогранник $P^i(G^*)$ (возможно, с самопересечениями), 1-скелетом которого является G^* , а грани соответствуют по инцидентности граням $T^i(G)$. Тогда $\tau(G, M^2)$ можно трактовать как число различных таких многогранников, т. е. число всех многогранников (возможно, с самопересечениями) с 1-скелетом G^* , гомеоморфных M^2 . Два многогранника $P^i(G^*)$ и $P^j(G^*)$ различаются, если они различны как множества точек в E^3 .

Теорема Уитни [3] утверждает, что каждый 3-связный планарный граф имеет единственный дуальный граф, т. е., выражаясь топологически, укладывается на сфере однозначно. Заметим попутно, что графы

связности меньше 3, вообще говоря, могут быть уложены (топологически) на сфере неоднозначно, однако, как доказали недавно М. А. Бродский и В. Н. Страхов [4], многогранник типа сферы всегда восстанавливается по своему 1-скелету однозначно*. Из теоремы Уитни следует, что для любой триангуляции T сферы S_0 будет $\tau(G(T), S_0) = 1$. Что касается тора S_1 , то из того, что в любой триангуляции тора есть вершина степени 3, 4, 5 или 6 (см. [2]), следует, что для любой триангуляции T тора связность $\kappa(G(T))$ равна 3, 4, 5 или 6. Теоремы Негами [5, теоремы 1.1 и 1.2] утверждают**, что в случае максимальной связности $\kappa(G(T)) = 6$, как и в случае сферы, имеет место однозначность: $\tau(G(T), S_1) = 1$, за исключением триангуляций T^1, T^2 и T^7 , изображенных в [2, табл. 1], причем, как показывает [5, теорема 2.5], при переходе к не максимальным связностям триангуляций тора указанная однозначность, вообще говоря, утрачивается. Естественно возникает проблема получения наилучших верхних оценок для числа $\tau(G(T), S_1)$. Цель настоящей работы — получить инфинитно точные верхние оценки для $\tau(G(T), S_1)$ в случаях связности $\kappa(G(T)) = 3$ и 4. Здесь под инфинитно точной понимается такая оценка, которая справедлива для всех (быть может, за исключением некоторого конечного числа) триангуляций T тора и у которой равенство достигается на бесконечном семействе триангуляций. Так, по теоремам Негами в случае максимальной связности $\kappa(G(T)) = 6$ инфинитно точная верхняя оценка для $\tau(G(T), S_1)$ равна 1. Основной результат настоящей работы следующий:

Теорема 1. Если граф $G(T)$ триангуляции T тора S_1 имеет связность $\kappa(G(T)) = 3$ или 4, то соответственно $\tau(G(T), S_1) \leq 10$ или 12, причем в обоих случаях равенство достигается на бесконечном семействе графов триангуляций тора.

Доказательство теоремы 1 будет завершено в п. 6.

Исключительные для теоремы Негами [5, теорема 1.2] триангуляции T^1, T^2 и T^7 имеют связность 6, и в п. 5 будет установлено, что $\tau(G(T^1), S_1) = 120$, $\tau(G(T^2), S_1) = \tau(G(T^7), S_1) = 12$, причем все укладки графов $G(T^1), G(T^2)$ и $G(T^7)$ на торе при помощи компьютера в [6] найдены в явном виде.

Согласно [5, теорема 1.1], любая укладка графа $G(T^1), G(T^2)$ или $G(T^7)$ на S_1 изоморфна (как триангуляция) триангуляции T^1, T^2 или T^7 соответственно.

2. Определения. Через D^0 и ∂D будут обозначаться соответственно внутренность и граница замкнутого диска D (здесь и далее под диском подразумевается двумерная клетка, т. е. топологический образ круга). Пусть T_0 обозначает некоторую триангуляцию фиксированного замкнутого компактного связного 2-многообразия M^2 .

* В этом утверждении под многогранником подразумевается любая замкнутая поверхность без самопересечений в E^3 , состоящая из конечного числа плоских многоугольников (возможно, неодносвязных, т. е. с дырами) с прямолинейными сторонами.

** В [5] утверждения этих теорем — в других терминах.

Метки графа триангуляции T_0 суть символы $1, 2, 3, \dots, V$ (V — число вершин T_0). Далее иногда будет удобно обозначать метку вершины символом v_i , где $v_i \in \{1, 2, 3, \dots, V\}$.

Замкнутый диск $D(v_1, v_2, \dots, v_d) \subset T_0$, ограниченный d ребрами $[v_1, v_2], \dots, [v_{d-1}, v_d], [v_d, v_1]$, будет называться *многоугольником* или *треугольником* при условии, что он не содержит диагоналей, т. е. ребер триангуляции T_0 , соединяющих две его граничные вершины и имеющих ненулевое пересечение с его внутренностью. Если вне и внутри D есть хотя бы по одной вершине триангуляции T_0 , будем называть D *многоугольником с разделяющей границей*. Многоугольник D триангуляции T_0 будет называться *инвариантным*, если для каждой грани uvw , принадлежащей D , в каждой триангуляции 2-многообразия M^3 с графом $G(T_0)$ имеется грань uvw .

Для многоугольника D триангуляции T_0 под *трансверсальным* расщеплением будет подразумеваться расщепление $\text{sp}(u, v, w)$ вдоль таких ребер $[v, u]$ и $[v, w]$, что $v \in \partial D$, $D^0 \cap [v, u] \neq \emptyset$ (следовательно, $u \in D^0$), и $[v, w] \not\subset D$ (возможно, $w \in \partial D$); другими словами, пара ребер $([v, u], [v, w])$ пересекает границу ∂D трансверсально. Будем говорить, что $\text{sp}(u, v, w)$ есть *внутреннее* расщепление для многоугольника D , если и ребро $[v, u]$, и ребро $[v, w]$ принадлежат D . Когда $\text{sp}(u, v, w)$ не является ни трансверсальным, ни внутренним расщеплением, назовем его *внешним* расщеплением для многоугольника D .

Например, расщепления $\text{sp}(4, 7, 6)$, $\text{sp}(4, 7, 1)$ и $\text{sp}(2, 7, 5)$ являются соответственно внутренним, трансверсальным и внешним расщеплениями для 6-угольника $D(1, 3, 6, 7, 5, 2)$ триангуляции T^1 , представленной в [2, табл. 1].

Рассмотрим некоторый многоугольник D_0 триангуляции T_0 и некоторую последовательность расщеплений триангуляции T_0

$$\begin{aligned} L \\ \circ \text{sp}_n = \text{sp}_L \circ \dots \circ \text{sp}_1; \\ n=1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

здесь левая часть равенства является сокращенной записью правой части, причем имеется в виду, что сперва применяется расщепление sp_1 , потом sp_2 и т. д. Последовательности (2.1) соответствует последовательность триангуляций $T_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{sp}_n(T_{n-1})$ ($1 \leq n \leq L$) (2.2).

Определим n -й *потомок* D_n многоугольника D_0 относительно последовательности (2.1) индукцией по n (предполагая, что $D_n \subset T_n$). Многоугольник D_0 назовем 0-м потомком многоугольника D_0 . Если $\text{sp}_n = \text{sp}(u, v, w)$ является трансверсальным расщеплением для D_{n-1} , причем $v \in \partial D_{n-1}$ и $u \in D_{n-1}^0$ (значит, $D_{n-1} = D(v_1, \dots, v_s, v, v_{s+1}, \dots, v_{s+r})$), то $D_n \stackrel{\text{def}}{=} D(v_1, \dots, v_s, v', v'', v_{s+1}, \dots, v_{s+r})$, где $u \in D_n^0$; другими словами, D_n состоит из всех треугольных граней многоугольника D_{n-1} и одной из двух новых треугольных граней, появившихся в результате расщепления sp_n . Если sp_n является внутренним расщеплением для D_{n-1} , то $D_n \stackrel{\text{def}}{=} \text{sp}_n(D_{n-1})$, т. е. D_n состоит из всех треугольных граней многоугольника D_{n-1} и двух новых треугольных

графей, появившихся в результате расщепления sr_n . Если sr_n является внешним расщеплением для D_{n-1} , то $D_n \stackrel{\text{def}}{=} D_{n-1}$. Заметим, что многоугольники D_n и D_{n-1} принадлежат разным триангуляциям (D_{n-1}) .

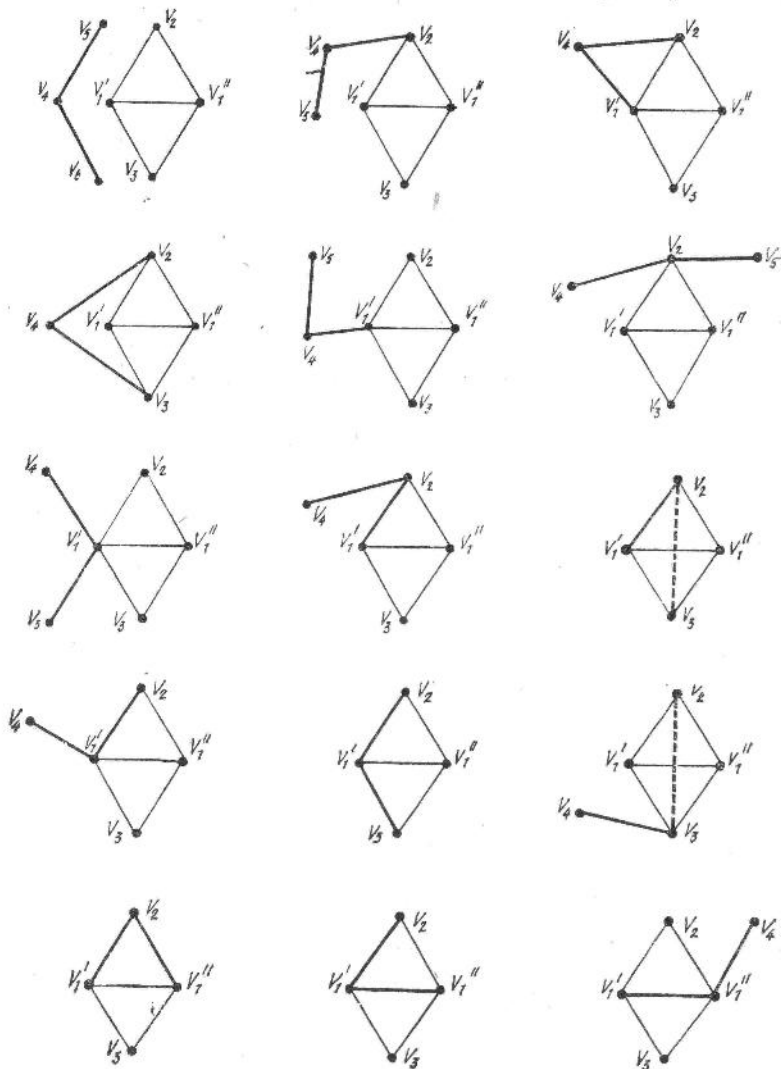


Рис. 1

$\subset T_n$, $D_{n-1} \subset T_{n-1}$), поэтому запись $D_n = D_{n-1}$ подразумевает только, что грани многоугольника D_n соответствуют граням многоугольника D_{n-1} .

Например, если $D_{n-1} = D(1, 3, 6, 7, 5, 2) \subset T^1$ (см. [2, табл. 1]), то для расщеплений $sr \langle 4, 7, 6 \rangle$, $sr \langle 4, 7, 1 \rangle$ и $sr \langle 2, 7, 5 \rangle$ соответствен-

но имеем $D_n = D(1, 3, 6, 7'', 5, 2) \subset T_a^1$, $D(1, 3, 6, 7', 7'', 5, 2) \subset T_b^1$ и $D(1, 3, 6, 7', 5, 2) \subset T_c^1$. Очевидно, если sp_n — любое внутреннее расщепление для D_{n-1} , то $T_{n-1} \setminus D_{n-1} = T_n \setminus D_n$ (2.3), где под $T \setminus D$ подразумевается T без D . Это значит, что вне D_{n-1} триангуляция не изменяется.

3. Транспозиция двух расщеплений. Как обычно, v' и v'' обозначают два образа вершины v , т. е. две новые вершины, появляющиеся вместо вершины v после расщепления $sp \langle u, v, w \rangle$. Пусть $sp_{n+1} \circ sp_n$ обозначает какие-то два последовательные расщепления некоторой триангуляции T_{n-1} . Можно проверить, что взаимное расположение ребер в T_{n-1} , вдоль которых делаются эти расщепления, необходимо относится к одному из пятнадцати случаев, представленных на рис. 1, где $sp_n = sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle$, а ребра расщепления sp_{n+1} проведены жирными линиями. Все эти случаи также перечислены соответственно в табл. 1.

Таблица 1. $sp_{n+1} \circ sp_n$, где $sp_n = sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle$, $sp_{n+1} =$

- 1) $sp \langle v_5, v_4, v_6 \rangle$,
- 2) $sp \langle v_2, v_4, v_5 \rangle$,
- 3) $sp \langle v_1, v_4, v_2 \rangle$,
- 4) $sp \langle v_2, v_4, v_3 \rangle$,
- 5) $sp \langle v'_1, v_4, v_5 \rangle$,
- 6) $sp \langle v_4, v_2, v_5 \rangle$,
- 7) $sp \langle v_4, v'_1, v_3 \rangle$,
- 8) $sp \langle v'_1, v_2, v_4 \rangle$,
- 9) $sp \langle v'_1, v_2, v_3 \rangle$,
- 10) $sp \langle v_2, v'_1, v_4 \rangle$,
- 11) $sp \langle v_2, v'_1, v_3 \rangle$,
- 12) $sp \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$,
- 13) $sp \langle v'_1, v_2, v''_1 \rangle$,
- 14) $sp \langle v'_1, v_1, v_2 \rangle$,
- 15) $sp \langle v'_1, v''_1, v_4 \rangle$.

Таблица 2

$\tilde{sp}_n \circ \tilde{sp}_{n+1} =$

- 1) $sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_5, v_4, v_6 \rangle$,
- 2) $sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_2, v_4, v_5 \rangle$,
- 3) $sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_1, v_4, v_2 \rangle$,
- 4) $sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_2, v_4, v_3 \rangle$,
- 5) $sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_1, v_4, v_5 \rangle$,
- 6) $sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_4, v_2, v_5 \rangle$,
- 7) $sp \langle v_2, v''_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_4, v_1, v_5 \rangle$,
- 8) $sp \langle v'_1, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$,
- 9) $sp \langle v'_1, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$,
- 10) $sp \langle v_2, v'_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_3, v_1, v_4 \rangle$,
- 11) $sp \langle v_2, v'_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle$,
- 12) $sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$,
- 13) $sp \langle v'_1, v_2, v''_1 \rangle \circ sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle$,
- 14) $sp \langle v''_1, v'_1, v_2 \rangle \circ sp \langle v_2, v_1, v_3 \rangle$,
- 15) $sp \langle v''_1, v'_1, v_3 \rangle \circ sp \langle v_2, v_1, v_4 \rangle$.

Для данных двух последовательных расщеплений $sp_{n+1} \circ sp_n$ некоторой триангуляции T_{n-1} определим сейчас транспозицию этих расщеплений как последовательность $sp_n \circ \tilde{sp}_{n+1}$ двух новых расщеплений (которая также применяется к триангуляции T_{n-1}), указанную в табл. 2, соответственно пятнадцати случаям табл. 1.

Заметим, что транспозиция расщеплений не определена однозначно, поскольку после того, как сделано расщепление $\tilde{sp}_{n+1} = sp \langle u, v, w \rangle$ (см. табл. 2), два образа вершины v могут быть помечены v' и v'' двумя разными способами. Однако, как это можно непосредственно проверить во всех пятнадцати случаях, эти метки всегда можно выбрать так, что соответствующие расщепления из табл. 2 будут возможны и результирующие триангуляции будут неразличны:

$$sp_{n+1} \circ sp_n(T_{n-1}) = \tilde{sp}_n \circ \tilde{sp}_{n+1}(T_{n-1}). \quad (3.1)$$

В самом деле, рассмотрим, например, случай 8) (см. табл. 1 и 2). Последовательность $sr_{n+1} \circ sr_n$, примененная к T_{n-1} , показана на рис. 2. (Схематичные чертежи на рис. 1 и 2 следует воспринимать как фрагменты триангуляций).

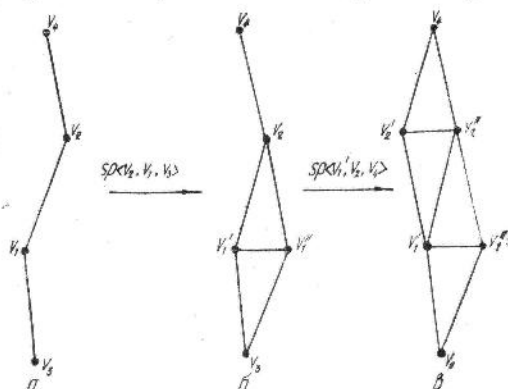


Рис. 2

Рис. 3 и 4 показывают два способа выбора меток v_2' и v_2'' при расщеплении $\tilde{sr}_{n+1} = sr(v_1, v_2, v_4)$. Очевидно, результат применения $sr_{n+1} \circ sr_n$, как показано на рис. 2, отличается

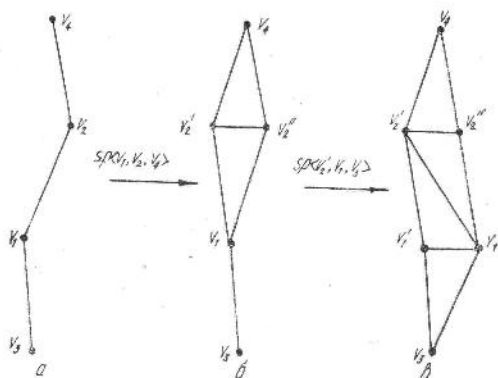


Рис. 3

от результата применения $\tilde{sr}_n \circ \tilde{sr}_{n+1}$ при выборе меток v_2' и v_2'' , как на рис. 3, но не отличается при выборе этих меток, показанном на рис. 4.

Строго говоря, согласно определению различных триангуляций, данному во введении, вопрос о том, различны или неразличны триангуляции, имеет смысл только тогда, когда они имеют один и тот же помеченный граф. Однако помеченные графы двух триангуляций в (3.1) могут отличаться, как, например, на рис. 2 и 4. Тем не менее, эти триангуляции всегда можно сделать неразличными, изменив (если

необходимо) метки у образов расщепленных вершин. Поэтому, говоря о транспозиции двух расщеплений, отныне будем считать, что имеет место (3.1).

Рассмотрим последовательность (2.1) расщеплений и соответствующую последовательность (2.2) триангуляций. Как и в разделе 2, D_n обозначает n -й потомок многоугольника D_0 некоторой триангуляции T_0 относительно последовательности (2.1).

Лемма 1. Пусть sp_n — некоторое внешнее расщепление для $(n-1)$ -го потомка $D_{n-1} \subset T_{n-1}$ относительно последовательности (2.1). Тогда

(А) если sp_{n+1} — трансверсальное расщепление для D_n , то sp_{n+1} — трансверсальное или внутреннее расщепление для D_{n-1} ;

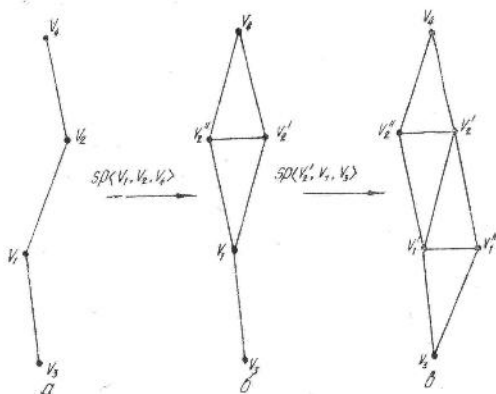


Рис. 4

(Б) если sp_{n+1} — внутреннее расщепление для D_n , то \tilde{sp}_{n+1} — внутреннее расщепление для D_{n-1} .

Доказательство. (А). Сначала заметим, что в первых 12-и случаях в определении транспозиции расщеплений, данном выше, если $sp_{n-1} = sp\langle u, v, \omega \rangle$, то $sp_{n+1} = sp\langle u^{\sim}, v^{\sim}, \omega^{\sim} \rangle$, где символ x^{\sim} обозначает x, x' или x'' (сравните табл. 1 и 2). Поскольку sp_{n+1} — трансверсальное расщепление для D_n , то вершина v принадлежит границе ∂D_n и, кроме этого, пересечение внутренности D_n^0 либо с ребром $[v^{\sim}, u^{\sim}]$, либо с ребром $[v^{\sim}, \omega^{\sim}]$ непусто; предположим для определенности, что $D_n^0 \cap [v^{\sim}, u^{\sim}] \neq \emptyset$. Следовательно, $u^{\sim} \in D_n^0$. Так как sp_n — внешнее расщепление для D_{n-1} , то $D_n = D_{n-1}$, и поэтому $u \in D_{n-1}^0$. Итак, $D_{n-1}^0 \cap [v, u] \neq \emptyset$. Таким образом, \tilde{sp}_{n+1} является либо трансверсальным, либо внутренним расщеплением для D_{n-1} , что и требовалось доказать.

Случай 13). Покажем, что в этом случае все условия леммы 1 не могут выполняться одновременно. Действительно, поскольку (см. табл. 1) $sp_n = sp\langle v_2, v_1, v_3 \rangle$ — внешнее расщепление, вершины v_1' и v_1'' не при-

надлежат D_n^0 , поэтому расщепление $sp_{n+1} = sp\langle v'_1, v_2, v''_1 \rangle$ (см. табл. 1) не может быть трансверсальным.

Случай 14) также невозможен; это доказывается так же, как и в случае 13).

Случай 15). Предположим, что $\tilde{sp}_{n+1} = sp\langle v_2, v_1, v_4 \rangle$ (см. табл. 2) — внешнее расщепление для D_{n-1} . Тогда $\tilde{D}_n = D_{n-1}$, и $v_4 \notin \tilde{D}_n^0$, где \tilde{D}_n^0 есть 1-й потомок многоугольника D_{n-1} относительно расщепления \tilde{sp}_{n+1} . По условию, $sp_n = sp\langle v_2, v_1, v_3 \rangle$ (см. табл. 1) также является внешним расщеплением для D_{n-1} , следовательно, $v_1 \notin D_n^0$ и $D_n = D_{n-1}$, поэтому $v_4 \notin D_n^0$. Таким образом, $sp\langle v'_1, v''_1, v_4 \rangle = sp_{n+1}$ (см. табл. 1) не может быть трансверсальным расщеплением для D_n , но это противоречит условию.

Пункт (Б) рассматривается аналогично. Лемма 1 доказана.

4. Полезные неравенства. Следующая лемма показывает, что число $\tau(G, M^2)$ не может увеличиться после расщеплений.

Лемма 2. Если триангуляция T_{n+1} замкнутого 2-многообразия M^2 получена из триангуляции T_n каким-то расщеплением, то $\tau(G(T_{n+1}), M^2) \leq \tau(G(T_n), M^2)$.

Доказательство. Пусть T_{n+1} получена из T_n расщеплением $sp\langle u, v, w \rangle$. Обратная к $sp\langle u, v, w \rangle$ операция называется стягиванием ребра $[v', v'']$ в триангуляции и будет обозначаться $sh\langle v', v'' \rangle$. Граф $G(sh\langle v', v'' \rangle(T^i(G(T_{n+1}))))$ можно получить из графа $G(T_{n+1})$ обычным стягиванием ребра $[v', v'']$ (уже в графе $G(T_{n+1})$, а не в триангуляции), т. е. удалением двух смежных вершин v' и v'' и добавлением новой вершины v , смежной с теми вершинами графа, которые были смежны с v' или v'' . Значит, для каждого $i (1 \leq i \leq \tau(G(T_{n+1}), M^2))$ граф $G(sh\langle v', v'' \rangle(T^i(G(T_{n+1}))))$ совпадает с графом $G(T_n)$. Поэтому любая триангуляция $T^i(G(T_{n+1}))$ получается из некоторой триангуляции $T^k(G(T_n))$ расщеплением $sp\langle u, v, w \rangle$, и ясно, что если $T^i(G(T_{n+1})) \neq T^j(G(T_{n+1}))$, то $sh\langle v', v'' \rangle(T^i(G(T_{n+1}))) \neq sh\langle v', v'' \rangle(T^j(G(T_{n+1})))$. Лемма 2 доказана.

Пусть D_0 — некоторый инвариантный p -угольник с разделяющей границей в некоторой триангуляции T_0 замкнутого компактного связного 2-многообразия M^2 . В этом пункте будет установлена одна верхняя оценка числа $\tau(G(T_L), M^2)$ для триангуляций T_L , получаемых из T_0 последовательностями расщеплений:

$$T_L = \underset{n=1}{\overset{L}{\circ}} sp_n(T_0) = sp_L \circ \dots \circ sp_1(T_0) \quad (4.1)$$

при некотором условии на связности $\kappa(G(T_L))$.

Пусть $\Omega_q(D_0)$ обозначает семейство всех триангуляций вида

$$\underset{n=1}{\overset{q}{\circ}} sp_n^{(tr)}(T_0), \quad (4.2)$$

где каждое $sp_n^{(tr)}$ символизирует произвольное трансверсальное расщепление для $(n-1)$ -го потомка $D_{n-1}^{(tr)}$ p -угольника D_0 относительно по-

последовательности (4.2). Другими словами, семейство $\Omega_q(D_0)$ состоит из триангуляций, которые могут быть получены из T_0 всевозможными последовательностями, состоящими из q трансверсальных (для соответствующих потомков p -угольника D_0) расщеплений. Легко видеть, что семейство $\Omega_q(D_0)$ конечно.

Лемма 3. *Предположим, что последовательность (4.1) расщеплений такая, что граф триангуляции T_L замкнутого 2-многообразия M^2 является $(p+q)$ -связным, т. е. $\kappa(G(T_L)) \geq p+q$. Тогда $\tau(G(T_L), M^2) \leq \max \tau(G(T), M^2)$, где D_0 — инвариантный p -угольник с разделяющей границей в триангуляции T_0 2-многообразия M^2 .*

Доказательство. Просматривая последовательность (4.1) справа налево, фиксируем первое встречающееся внешнее расщепление sp_l . Если существует хотя бы одно трансверсальное расщепление sp_r , расположенное слева от расщепления sp_l в (4.1) (т. е. $k > l$), то, очевидно, существует такое трансверсальное или внутреннее расщепление sp_m , что каждое расщепление sp_r при $l \leq r \leq m-1$ является внешним. Значит, повторно применяя $m-l$ раз лемму 1, можно переставить $m-l$ раз sp_m с его следующим правым соседом в (4.1). В результате такого перемещения sp_m вправо в (4.1) получится последовательность расщеплений $\bigcirc_{i=1}^L \tilde{sp}_{n_i}(T_0) = \tilde{sp}_{n_L} \circ \dots \circ \tilde{sp}_{n_1}(T_0)$, такая, что для $1 \leq i \leq L$ все расщепления \tilde{sp}_{n_i} являются не внешними для соответствующих потомков многоугольника D_0 . Несколько раз применяя лемму 1 подобным образом, получим из (4.1) следующую последовательность:

$$\left(\bigcirc_{i=q_1+1}^L \tilde{sp}_{n_i} \right) \circ \left(\bigcirc_{i=1}^{q_1} \tilde{sp}_{n_i} \right) (T_0) = \tilde{T}_L, \quad (4.3)$$

где нет внешних расщеплений в последовательности

$$\bigcirc_{i=1}^{q_1} \tilde{sp}_{n_i}(T_0) = \tilde{T}_{q_1}, \quad (4.4)$$

и нет трансверсальных расщеплений в последовательности

$$\bigcirc_{i=q_1+1}^L \tilde{sp}_{n_i}(\tilde{T}_{q_1}) = \tilde{T}_L. \quad (4.5)$$

Пусть \tilde{D}_i обозначает i -го потомка многоугольника D_0 относительно последовательности (4.3). По условию, D_0 является p -угольником с разделяющей границей. Предположим, что многоугольник \tilde{D}_i — d -угольник с разделяющей границей. Тогда ясно, что \tilde{D}_{i+1} является $(d+1)$ -угольником с разделяющей границей тогда и только тогда, когда расщепление $\tilde{sp}_{n_{i+1}}$ является трансверсальным для \tilde{D}_i . Заметим, что для всякого многоугольника D с разделяющей границей удаление его границы ∂D из графа триангуляции порождает несвязный граф. С другой стороны, согласно (3.1), триангуляции \tilde{T}_L и T_L неразличны, поэтому $\kappa(G(\tilde{T}_L)) = \kappa(G(T_L)) \geq p+q$. Следовательно, существует,

по меньшей мере, q трансверсальных расщеплений для соответствующих потомков p -угольника D_0 относительно (4.3) среди расщеплений последовательности (4.3). Значит, $q_1 \geq q$ и последовательность (4.4) состоит из трансверсальных расщеплений (их не меньше q) и, быть может, внутренних расщеплений.

Опустим теперь все внутренние расщепления в (4.4). Заметим, что при такой операции можем «испортить» ребро $[v, u]$ для некоторого трансверсального расщепления $\text{sp}_{n_i} = \text{sp}(u, v, w)$ последовательности (4.3), где $v \in \partial \tilde{D}_{i-1}$, $\tilde{D}_{i-1}^0 \cap [v, u] \neq \emptyset$ и $[v, w] \not\subset \tilde{D}_{i-1}$. Поэтому для каждого такого трансверсального расщепления sp_{n_i} вместо ребра $[v, u]$ следует взять любое ребро, соединяющее v с какой-либо внутренней вершиной \tilde{D}_{i-1} . Всегда найдется хотя бы одно такое ребро, потому что многоугольник \tilde{D}_{i-1} не содержит диагоналей (п. 2), и он — с разделяющей границей. Однако следует сохранить ребро $[v, w]$ (оно расположено вне \tilde{D}_{i-1}^0) в том же самом положении, в котором оно расположено в соответствии с (4.3); в силу (2.3) это всегда возможно. В результате такого опускания внутренних расщеплений в последовательности (4.4) получается следующая последовательность:

$$\bigcirc_{i=1}^{q_2} \hat{\text{sp}}_{n_i}(T_0) = \hat{T}_{q_2}, \quad (4.6)$$

где $q_2 \geq q$, и все расщепления $\hat{\text{sp}}_{n_i}$ являются трансверсальными, и поэтому $\hat{T}_{q_2} \in \Omega_{q_2}(D_0)$. С помощью (2.3) получаем $\overline{\hat{T}_{q_2} \setminus \tilde{D}_{q_2}} = \overline{\hat{T}_{q_1} \setminus \tilde{D}_{q_1}}$, где \tilde{D}_{q_1} и \tilde{D}_{q_2} являются соответственно q_1 - и q_2 -м потомками многоугольника D_0 относительно (4.4) и (4.6). Многоугольники \tilde{D}_{q_2} и \tilde{D}_{q_1} инвариантны (поскольку D_0 инвариантен), поэтому $\tau(G(\hat{T}_{q_2}), M^2) = \tau(G(\hat{T}_{q_1}), M^2)$. Таким образом, учитывая лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} \tau(G(T_L), M^2) &= \tau(G(\hat{T}_L), M^2) \leq \tau(G(\hat{T}_{q_1}), M^2) = \\ &= \tau(G(\hat{T}_{q_2}), M^2) \leq \max_{T \in \Omega_{q_2}(D_0)} \tau(G(T), M^2) \leq \max_{T \in \Omega_q(D_0)} \tau(G(T), M^2). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

5. Один способ нахождения всех триангуляций с данным помеченным графом. В этом пункте будут найдены все попарно различные треугольные укладки на тор помеченных графов триангуляций, представленных в [2, табл. 1].

Будем говорить, что граф $G(T)$ триангуляции T 2-многообразия M^2 укладывается на M^2 единственным с точностью до изоморфизма образом, если все триангуляции M^2 с графом $G(T)$ изоморфны триангуляции T .

Для данной триангуляции R 2-многообразия M^2 , помеченный граф $G(R)$ которой укладывается на M^2 единственным с точностью до изоморфизма образом, ниже описывается легко реализуемый на ЭВМ алгоритм нахождения всех различных триангуляций $T^i(G(R))$

2-многообразия M^2 с графом $G(R)$ ($1 \leq i \leq \tau(G(R), M^2)$)*. Пусть V обозначает число вершин триангуляции R . Поскольку граф $G(R)$ вкладывается на M^2 единственным с точностью до изоморфизма образом, каждой триангуляции $T^i(G(R))$ можно поставить в соответствие единую подстановку θ_i множества вершин $\{1, 2, 3, \dots, V\}$ графа $G(R)$, которая является изоморфизмом триангуляций R и $T^i(G(R))$. Вообще говоря, для данной триангуляции $T^i(G(R))$ такая подстановка θ_i , конечно, не определяется однозначно. Однако ясно, что если $T^i(G(R)) \neq T^j(G(R))$, то $\theta_i \neq \theta_j$. Цель алгоритма — найти все такие подстановки θ_i ($1 \leq i \leq \tau(G(R), M^2)$), которым соответствуют различные триангуляции $T^i(G(R))$ 2-многообразия M^2 . Алгоритм состоит в проматривании всех $V!$ подстановок π_n ($1 \leq n \leq V!$) множества вершин $\{1, 2, 3, \dots, V\}$ графа $G(R)$, начиная с тождественной подстановки π_1 . Так, $\theta_1 = \pi_1$. Предположим сейчас, что уже найдены m подстановок π_i ($1 \leq i \leq m$). Для текущей подстановки π_n сперва проверяется, является ли π_n автоморфизмом графа $G(R)$. Если нет, то немедленно переходим к рассмотрению следующей подстановки π_{n+1} ; если же да, то рассматриваем такую триангуляцию $\pi_n(R)$, которая имеет тот же помеченный граф $G(R)$ и содержит грань uvw при условии, что R содержит грань $\pi_n^{-1}(u)\pi_n^{-1}(v)\pi_n^{-1}(w)$. Если триангуляция $\pi_n(R)$ и каждая триангуляция $T^i(G(R))$ ($1 \leq i \leq m$) различны (это проверяется компьютером непосредственно, исходя из определения различных триангуляций, данного во введении), то это означает, что найдена новая триангуляция $T^{m+1}(G(R))$, поэтому в качестве θ_{m+1} берем π_n ($\theta_{m+1} = \pi_n$) и строку $m+1$. $\theta_{m+1}(1)\theta_{m+1}(2)\theta_{m+1}(3)\dots\theta_{m+1}(V)$ приписываем в таблицу всех попарно различных триангуляций M^2 с помеченным графом $G(R)$, и затем осуществляется переход к рассмотрению следующей подстановки π_{n+1} . Иначе триангуляцию не заносим в таблицу и сразу переходим к рассмотрению следующей подстановки π_{n+1} .

Для обоснования возможности применения изложенного алгоритма ниже будет использована следующая лемма, легко вытекающая из [7, лемма 3]:

Лемма 4. *К ребру $[v', v'']$ триангуляции T замкнутого 2-многообразия, отличной от триангуляции сферы в четырех вершинами, можно применить преобразование стягивания, получая в результате снова триангуляцию, тогда и только тогда, когда ребро $[v', v'']$ принадлежит ровно двум 3-циклам графа $G(T)$.*

Описанный алгоритм может быть применен для нахождения всех триангуляций тора с графом $G(T^i)$ для каждой из двадцати одной неприводимой триангуляции тора T^i ($1 \leq i \leq 21$) (см. [2, табл. 1]). Чтобы понять, почему все графы $G(T^i)$ ($1 \leq i \leq 21$) укладываются на торе единственным с точностью до изоморфизма образом, заметим, что в силу леммы 4 свойство триангуляции быть неприводимой всецело определяется ее графом. Следовательно, любая триангуляция тора с графом неприводимой триангуляции сама обязана быть неприводимой. С другой стороны, непосредственно видно, что любые две неприводимые триангуляции тора имеют неизоморфные графы.

* Программу на языке Фортран-77 с комментариями см. в [6].

Согласно [2, предложение 2], графы $G(T_a^1)$, $G(T_b^1)$ и $G(T_c^1)$ тоже укладываются на торе единственным с точностью до изоморфизма образом, поэтому для нахождения всех триангуляций тора с этими графами также можно применить вышеописанный алгоритм. Этот алгоритм был реализован на компьютере, и результаты счета сведены в [6, табл. 2], в которой для каждой триангуляции T^i ($1 \leq i \leq 21$), а также T_a^1 , T_b^1 и T_c^1 выписаны все различные триангуляции с их графами.

Найдем теперь все триангуляции тора с графами оставшихся триангуляций из [2, табл. 1]: T_{aa}^1 , T_{ab}^1 и T_{ac}^1 . Для этих триангуляций (кроме T_{aa}^1) алгоритм, строго говоря, нельзя применить таким же образом, как выше, поскольку графы $G(T_{ab}^1)$ и $G(T_{ac}^1)$ укладываются на торе неединственным образом. В самом деле, как показано в [2, доказательство предложения 2], графы $G(T_{ab}^1)$ и $G(T_{ac}^1)$ неизоморфны, триангуляций T_{ab}^1 и T_{ac}^1 изоморфны: $G(T_{ab}^1) \cong G(T_{ac}^1)$ (и, очевидно, они оба неизоморфны графу $G(T_{aa}^1)$). В [2, п. 4] доказано, что триангуляции T_{aa}^1 , T_{ab}^1 и T_{ac}^1 исчерпывают все (с точностью до изоморфизма) триангуляции тора с 4-связными графами, получающиеся из T_a^1 одним расщеплением. Кроме этого, согласно [2, предложение 2], граф $G(T_a^1)$ укладывается на торе единственным с точностью до изоморфизма образом. Из сказанного можно легко вывести, используя соображения доказательства леммы 2, что граф $G(T_{aa}^1)$ укладывается на торе единственным с точностью до изоморфизма образом, а любая триангуляция с графом $G(T_{ab}^1)$ (а значит, в силу изоморфизма графов, и с графом $G(T_{ac}^1)$) изоморфна либо T_{ab}^1 , либо T_{ac}^1 . Таким образом, применяя вышеописанный алгоритм для каждой триангуляции T_{aa}^1 , T_{ab}^1 и T_{ac}^1 в отдельности, как и выше, заключаем, что все триангуляции с графом $G(T_{aa}^1)$ — это двенадцать триангуляций, соответствующих T_{aa}^1 в [6, табл. 2], а все триангуляции с графом $G(T_{ab}^1) \cong G(T_{ac}^1)$ — это две триангуляции, соответствующие T_{ab}^1 , плюс две триангуляции, соответствующие T_{ac}^1 [6, табл. 2]. Итак,

$$\tau(G(T_{aa}^1), S_1) = 12, \tau(G(T_{ab}^1), S_1) = \tau(G(T_{ac}^1), S_1) = 2 + 2.$$

Все неприводимые триангуляции тора T^i ($i = \overline{1, 21}$) найдены в работе [2] автора; там же рассмотрены и некоторые триангуляции тора T_α^1 , приводимые к T^1 . В работе [6] автором построен алгоритм для нахождения всех упаковок на торе помеченного графа триангуляции при условии, что каждый такой граф укладывается с точностью до изоморфизма единственным образом.

Число τ всех таких упаковок для графа триангуляции T^i таково:

i	1	2	3	4, 5	6	7	8	9, 10	11	12	13	14, 15	16—19	20, 21
τ	120	12	2	12	1	12	6	2	1	4	2	1	2	6

а для графа триангуляции T_a^1 , приводимой к T^1 :

α	a	aa	ab, ac	b	c
τ	48	12	4	12	8

6. Доказательство теоремы 1. По теореме работы [2] любая триангуляция тора получается из какой-то (не обязательно только одной) неприводимой триангуляции T^i (i — целое; $1 \leq i \leq 21$) некоторой (вообще говоря, неединственной) последовательностью расщеплений. Из [6, табл. 2] видно, что $\tau(G(T^i), S_1) \leq 12$ при $2 \leq i \leq 21$. Поэтому, согласно лемме 2, для любой триангуляции T , получающейся последовательностью из некоторой триангуляции T^i ($2 \leq i \leq 21$), имеем $\tau(G(T), S_1) \leq 12$, и, значит, для всех таких триангуляций T теорема 1 доказана. Для триангуляции T^1 имеем $\tau(G(T^1), S_1) = 120$, но это не противоречит теореме 1, так как связность графа $D(T^1)$ — полного графа с семью вершинами — равна 6. Рассмотрим все триангуляции, получающиеся из T^1 одним произвольным расщеплением. В [2, п. 4] показано, что с точностью до изоморфизма таких триангуляций три — T_a^1, T_b^1 и T_c^1 . Из [6, табл. 2] усматривается, что $\tau(G(T_a^1), S_1) = 48$, $\tau(G(T_b^1), S_1) = 12$ и $\tau(G(T_c^1), S_1) = 8$. Поэтому, учитывая лемму 2, заключаем, что для всех триангуляций связности 3, а также для всех таких триангуляций связности 4, которые получаются последовательностями расщеплений из T_b^1 или T_c^1 , неравенства, утверждаемые в теореме 1, доказаны. Чтобы показать, что равенство достигается на бесконечном семействе триангуляций связности 3, достаточно увеличивать число вершин, как-то триангулируя инвариантный 3-угольник $D(6, 4, 7'')$ в триангуляции T_a^1 (см. [2, табл. 1]).

Остается доказать требуемое неравенство для всех триангуляций связности 4, получаемых последовательностями расщеплений из T_a^1 . В [2, п. 4] показано, что для T_a^1 имеем $\Omega_1(D(6, 4, 7'')) = \Omega_1(\text{St}(7'')) = \{T_{aa}^1, T_{ab}^1, T_{ac}^1\}$ (с точностью до изоморфизма), а поскольку согласно [6, табл. 2] $\max\{\tau(G(T_{aa}^1), S_1), \tau(G(T_{ab}^1), S_1), \tau(G(T_{ac}^1), S_1)\} = 12$, то по лемме 3 для любой 4-связной триангуляции T , получающейся последовательностью расщеплений из триангуляции T_a^1 (T_a^1 содержит инвариантный 3-угольник $D(6, 4, 7'')$ с разделяющей границей), будет

$$\tau(G(T), S_1) \leq \max_{T' \in \Omega_1(D(6, 4, 7''))} \tau(G(T'), S_1) = 12.$$

Построим бесконечное семейство таких триангуляций T тора с $\tau(G(T)) = 4$, что их помеченные графы $G(T)$ укладываются на S_1 ровно двенадцатью способами. Пусть f обозначает цепь, состоящую из двух ребер $[7', 7'']$ и $[7'', 5]$, в триангуляции T_b^1 (см. [2, табл. 1]). Заметим, что 4-угольник $D(4, 5, 1, 7') \subset T_b^1$ инвариантен. Кроме

того, $\tau(G(T_i^1), S_1) = 12$ (см. [6, табл. 2]). Таким образом, чтобы построить бесконечное семейство таких триангуляций T с $\chi(G(T)) = 4$, что $\tau(G(T), S_1) = 12$, достаточно последовательно добавлять вершины x_i на цепи f вместе с ребрами $[x_i, 4]$ и $[x_i, 1]$. Доказательство теоремы 1 завершено.

Список литературы: 1. Совместные расширенные заседания семинара по геометрии в целом и научного семинара кафедры математического анализа, посвященные 75-летию со дня рождения Н. В. Ефимова // Вестн. Моск. ун-та, 1986. — № 6, сер. 1, мат. и мех. — С. 92—98. 2. Лавренченко С. А. Неприводимые триангуляции тора // Укр. геометр. сб. — 1987. — Вып. 30. — С. 52—62. 3. Whitney H. Congruent graphs and the connectivity of graphs // Amer. J. Math. — 1932. — 54. — P. 150—168. 4. Бродский М. А., Страхов В. Н. В классе однородных многогранников, гомеоморфных шару, решение обратной задачи Ньютонова потенциала единственно: Докл. АН СССР. 1987, 292, № 6. — С. 1337—1340. 5. Lavrenko S. Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs // Discrete Math. — 1983. — 44. — P. 161—180. 6. Лавренченко С. А. Перечисление в явном виде всех автоморфизмов неприводимых триангуляций тора и всех укладок на тор помеченных графов этих триангуляций. — X., 1987. — С. 57. Деп. в УкрНИИТИ 01.10.87, № 2779—Ук87. 7. Barnette D. All triangulations of the projective plane are geometrically realizable in E^4 // Israel J. of Math. — 1983. — 44. — P. 75—87.

Поступила в редакцию 20.02.88

В. Т. ЛИСИЦА

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ n -МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ
С ЗАМКНУТЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ**

Известно, что если многообразие M^n является n -мерной сферой S^n , или одним из проективных пространств RP^n , CP^n , HP^n , CaP^n , снабженных канонической метрикой, то все его геодезические замкнуты и равны по длине. Перечисленные многообразия будем называть стандартными. В этой связи естественным является вопрос, существуют ли многообразия с замкнутыми геодезическими, имеющие другую метрику? Ответ на этот вопрос был дан О. Цоллем [1]. Он нашел в явном виде поверхность вращения с метрикой, отличной от стандартной, все геодезические которой замкнуты. Эта работа положила начало интенсивному исследованию многообразий с замкнутыми геодезическими. Современное состояние проблемы достаточно подробно изложено в работе [2].

Целью данной статьи является построение примеров нестандартных n -мерных многообразий с замкнутыми геодезическими.

Обозначим через M^n риманово многообразие размерности n . Геодезические в M^n будем параметризовать длиной дуги s .

Геодезическая $\gamma: [0; l] \rightarrow M$ называется *периодической в периодом* l , если $\gamma(0) = \gamma(l)$ и $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(l)$, где $\dot{\gamma}$ — касательный вектор к кривой γ , имеющий единичную длину.

Замкнутой геодезической длины l , выходящей из точки $p \in M^n$, называется периодическая геодезическая с минимальным периодом l .

Замкнутая геодезическая длины l называется *простой*, если отображение $\gamma: [0; l] \rightarrow M^n$ инъективно.

Многообразие M^n называется *P_l -многообразием*, если все его геодезические являются периодическими с общим минимальным периодом l .

Многообразие M^n называется *C_l -многообразием*, если все его геодезические являются замкнутыми геодезическими длины l .

Многообразие M^n называется *SC_l -многообразием*, если все его геодезические являются простыми замкнутыми геодезическими длины l .

Как следует из приведенных определений, геодезические P_l -многообразий могут иметь различную длину, у C_l - и SC_l -многообразий все геодезические имеют одинаковую длину, равную l , но геодезические C_l -многообразий могут иметь самопересечения, в то время как все геодезические SC_l -многообразий являются простыми кривыми.

Пример, построенный О. Цоллем в работе [1], представлял собой нестандартное C_l -многообразие. Построенные впоследствии примеры нестандартных P_l -, C_l -, SC_l -многообразий имели метрику вращения, т. е. после надлежащего выбора параметров их метрика приводится к виду:

$$ds^2 = (f(\cos u))^2 du^2 + \sin^2 u dv^2. \quad (1)$$

Необходимым и достаточным условием замкнутости всех геодезических метрики (1) является равенство [2]:

$$\int_c^{\pi-c} \frac{\sin c \cdot f(\cos u) du}{\sin u (\sin^2 u - \sin^2 c)^{1/2}} = \frac{p}{q} \pi, \quad (2)$$

где p, q — целые числа; $c \in [0; \frac{\pi}{2}]$ — постоянная. Если положить

$f = \frac{p}{q} + h$, то условие (2) сводится к тому, что функция h нечетна на

$[-1; 1]$. В этом случае многообразие с метрикой (1) будет $P_{2p\pi}$ -многообразием. Если $\frac{p}{q} = 1$, то многообразие с указанной метрикой будет $C_{2\pi}$ -многообразием (цоллевым многообразием).

А. Вейнштейном был приведен пример метрик Цолля для высших размерностей [2]:

$$ds^2 = (1 + h(\cos u_1))^2 du_1^2 + \sin^2 u_1 ds_{n-1}^2, \quad (3)$$

где ds_{n-1}^2 — стандартная метрика $(n-1)$ -мерной сферы, которую можно [2] привести к виду:

$$ds_{n-1}^2 = du_2^2 + \sin^2 u_2 du_3^2 + \dots + \sin^2 u_2 \dots \sin^2 u_{n-1} du_n^2,$$

где $u_i \in [0; \pi]$ ($i = 2, \dots, n-1$), $u_n \in [-\pi; \pi]$.

В работах [3, 4] построен пример двумерной метрики с замкнутыми геодезическими, которая, вообще говоря, не является метрикой вращения. Эта метрика имеет вид $ds^2 = (f(u) + h(v))^2 (du^2 + dv^2)$. Естественно, на функции f и h налагаются определенные условия. В этих же работах было высказано предположение о возможности применения теорем Штеккеля для построения n -мерных многообразий с замкнутыми геодезическими.

Основным результатом данной работы являются доказанные ниже теорема 1 и теорема 2.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием замкнутости геодезических метрики*

$$ds^2 = f_1^2(\cos u_1) du_1^2 + f_2^2(\cos u_2) \sin^2 u_1 du_2^2 + \dots + f_n^2(\cos u_n) \sin^2 u_1 \dots \sin^2 u_{n-1} du_n^2, \quad (4)$$

где $0 \leq u_1, \dots, u_{n-1} < \pi$, $0 \leq u_n < 2\pi$, является выполнение равенств

$$\int_{c_k}^{\pi - c_k} \frac{\sin c_k \cdot f_k du_k}{\sin u_k (\sin^2 u_k - \sin^2 c_k)^{1/2}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \int_{c_{k+1}}^{\pi - c_{k+1}} \frac{\sin u_{k+1} \cdot f_{k+1} du_{k+1}}{(\sin^2 u_{k+1} - \sin^2 c_{k+1})^{1/2}}, \quad (5)$$

$$\int_{c_{n-1}}^{\pi - c_{n-1}} \frac{\sin c_{n-1} \cdot f_{n-1} \cdot du_{n-1}}{\sin u_{n-1} (\sin^2 u_{n-1} - \sin^2 c_{n-1})^{1/2}} = \frac{p_n}{q_n} \int_0^\pi f_n du_n, \quad k = 1, \dots, n-2$$

при всевозможных значениях постоянных $c_1, \dots, c_{n-1} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Заметим, что метрика (4) является специальной деформацией стандартной метрики n -мерной сферы:

$$ds^2 = du_1^2 + \sin^2 u_1 du_2^2 + \dots + \sin^2 u_1 \dots \sin^2 u_{n-1} du_n^2, \quad (6)$$

где $0 \leq u_1, \dots, u_{n-1} < \pi$, $0 \leq u_n < 2\pi$. Метрику (6) можно получить из (4), положив $f_1 \equiv \dots \equiv f_n \equiv 1$.

Чтобы метрика (4) продолжалась до C^k -метрики ($k \geq 3$) в полосах сферы, достаточно функции f_i взять такими, что $f_i \in C^k$ на $[-1; 1]$ и $f_i(1) = f_i(-1) = 1$ [2]. Кроме того, потребуем, чтобы f_i не обращалась в 0 на отрезке $[-1; 1]$.

Очевидно, что условия (5) для метрики (4) являются обобщением условия (2) для метрики (1).

Теорема 2. *Если h_1, \dots, h_n — нечетные C^k -функции, $h_i: [-1; 1] \rightarrow]-1; 1[$, удовлетворяющие условию $h_i(1) = h_i(-1) = 0$, то метрика*

$$ds^2 = (1 + h_1(\cos u_1))^2 du_1^2 + (1 + h_2(\cos u_2))^2 \sin^2 u_1 \cdot du_2^2 + \dots + (1 + h_n(\cos u_n))^2 \sin^2 u_1 \dots \sin^2 u_{n-1} du_n^2 \quad (7)$$

является $C_{2\pi}$ -метрикой на S^n .

Метрика (3) является частным случаем метрики (7). Чтобы в этом убедиться, достаточно в (7) положить $h_2 \equiv \dots \equiv h_n \equiv 0$.

В случае выполнения условий теоремы Штеккеля функция ω имеет [5] вид:

$$\omega = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \int \sqrt{2 \sum_{r=1}^{n-1} \beta_r \varphi_{rk}(u_k) + 2h\varphi_{nk}(u_k)} du_k. \quad (10)$$

Постоянные ε_k принимают значения $+1$ или -1 соответственно на участках возрастания или убывания переменной u_k .

Докажем теперь сформулированные теоремы.

Доказательство теоремы 1. Функция Гамильтона, соответствующая метрике (4), имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{f_1^2} + \frac{p_2^2}{f_2^2 \sin^2 u_1} + \dots + \frac{p_n^2}{f_n^2 \sin^2 u_1 \dots \sin^2 u_{n-1}} \right). \quad (11)$$

Для гамильтониана (11) набор функций $\varphi_{rk}(u_k)$ можно записать в виде элементов матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_{n-1}^2/\sin^2 u_{n-1} - f_n^2 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_{n-2}^2/\sin^2 u_{n-2} - f_{n-1}^2 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_2^2/\sin^2 u_2 - f_3^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1^2/\sin^2 u_1 - f_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

считая, что первый индекс s соответствует номеру строки, а второй — номеру столбца матрицы A . Выполнимость условий (9) теоремы Штеккеля в этом случае проверяется непосредственно.

Найдем полный интеграл движения по формуле (10):

$$\omega = \sqrt{2} \left(\varepsilon_1 \int f_1 \sqrt{\frac{\beta_{n-1}}{\sin^2 u_1} + h} du_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k \int f_k \sqrt{\frac{\beta_{n-k}}{\sin^2 u_k} - \beta_{n-k+1}} du_k + \varepsilon_n \int f_n \sqrt{-\beta_1} du_n \right). \quad (12)$$

Из (12) следует, что $\beta_1 \leq 0, \dots, \beta_{n-1} \leq 0$. Действительно, в последнем слагаемом в правой части формулы (12) $-\beta_1$ находится под знаком корня, значит, $\beta_1 \leq 0$, но в этой же формуле $\frac{\beta_1}{\sin^2 u_{n-1}} - \beta_2$ также находится под радикалом (в слагаемом под знаком суммы при $k = n-1$), значит, $\frac{\beta_1}{\sin^2 u_{n-1}} - \beta_2 \geq 0$, но $\beta_1 \leq 0$, тогда должно быть и $\beta_2 \leq 0$. Аналогично показывается, что все $\beta_i \leq 0$.

Выпишем уравнения геодезических по формуле (8). При этом положим $h = \frac{1}{2}$, что соответствует естественной параметризации геоде-

ических, т. е. $t = s$, где s — длина дуги. Окончательно уравнения (10) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int \frac{f_{n-1} du_{n-1} \cdot e_{n-1}}{\left(\frac{\beta_1}{\sin^2 u_{n-1}} - \beta_1 \right)^{1/2} \sin^2 u_{n-1}} - \int \frac{e_n f_n du_n}{V - \beta_1} \right) &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(\int \frac{e_{n-k} f_{n-k} du_{n-k}}{\sin^2 u_{n-k} \left(\frac{\beta_k}{\sin^2 u_{n-k}} - \beta_{k+1} \right)^{1/2}} - \int \frac{e_{n-k+1} f_{n-k+1} du_{n-k+1}}{\left(\frac{\beta_{k-1}}{\sin^2 u_{n-k+1}} - \beta_k \right)^{1/2}} \right) &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(\int \frac{e_1 f_1 du_1}{\sin^2 u_1 \left(\frac{\beta_{n-1}}{\sin^2 u_1} + \frac{1}{2} \right)^{1/2}} - \int \frac{e_2 f_2 du_2}{\left(\frac{\beta_{n-2}}{\sin^2 u_2} - \beta_{n-1} \right)^{1/2}} \right) &= 0, \\ \frac{d}{ds} \int \frac{e_1 f_1 du_1}{V^2 \left(\frac{\beta_{n-1}}{\sin^2 u_1} + \frac{1}{2} \right)^{1/2}} &= 1, \quad k = 2, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразуем теперь уравнение (13):

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int \frac{e_{n-1} V \beta_1 / \beta_2 f_{n-1} du_{n-1}}{\sin u_{n-1} (\sin^2 u_{n-1} - \beta_1 / \beta_2)^{-1/2}} &= \frac{d}{ds} \int e_n f_n du_n, \\ \frac{d}{ds} \int \frac{e_{n-k} V \beta_k / \beta_{k+1} \cdot f_{n-k} du_{n-k}}{\sin u_{n-k} (\sin^2 u_{n-k} - \beta_k / \beta_{k+1})^{1/2}} &= \\ &= \frac{d}{ds} \int \frac{e_{n-k+1} f_{n-k+1} \sin u_{n-k+1} du_{n-k+1}}{(\sin^2 u_{n-k+1} - \beta_{k-1} / \beta_k)^{1/2}}, \\ \frac{d}{ds} \int \frac{e_1 f_1 V - 2\beta_{n-1} du_1}{(\sin^2 u_1 + 2\beta_{n-1})^{1/2} \sin u_1} &= \frac{d}{ds} \int \frac{e_2 \cdot f_2 \sin u_2 du_2}{(\sin^2 u_2 - \beta_{n-2} / \beta_{n-1})^{1/2}}, \\ \frac{d}{ds} \int \frac{e_1 \cdot f_1 \sin u_1 du_1}{(\sin^2 u_1 + 2\beta_{n-1})^{1/2}} &= 1, \quad k = 2, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (14)$$

Если учесть, что постоянные β_i ($i = 1, \dots, n-1$) отрицательны, то из уравнений (14) следует $0 < \beta_{i-1} / \beta_i < 1$, $0 < -2\beta_{n-1} < 1$, так как выражения $(\sin^2 u_1 + 2\beta_{n-1})$, $(\sin^2 u_{n-k+1} - \beta_{k-1} / \beta_k)$ должны быть больше 0 в силу того, что они находятся под знаком корня. Введем новые постоянные: c_1, \dots, c_{n-1} , которые удовлетворяют равенствам

$$V \beta_{i-1} / \beta_i = \sin c_{n-i+1}, \quad V - 2\beta_{n-1} = \sin c_1 \quad (i = 2, \dots, n-1).$$

Тогда уравнения (14) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int \frac{e_{n-1} \sin c_{n-1} \cdot f_{n-1} \cdot du_{n-1}}{(\sin^2 u_{n-1} - \sin^2 c_{n-1})^{1/2} \sin u_{n-1}} &= \frac{d}{ds} \int e_n \cdot f_n \cdot du_n, \\ \frac{d}{ds} \int \frac{e_k \sin c_k \cdot f_k du_k}{(\sin^2 u_k - \sin^2 c_k)^{1/2} \sin u_k} &= \frac{d}{ds} \int \frac{e_{k+1} \sin u_{k+1} \cdot f_{k+1} \cdot du_{k+1}}{(\sin^2 u_{k+1} - \sin^2 c_{k+1})^{1/2}}, \\ \frac{d}{ds} \int \frac{e_1 \sin u_1 \cdot f_1 du_1}{(\sin^2 u_1 - \sin^2 c_1)^{1/2}} &= 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Из уравнений (15) следует, что геодезические, соответствующие фиксированному набору постоянных c_1, \dots, c_{n-1} , содержатся в n -мерной «полосе», определяемой неравенствами

$$c_k \leq u_k \leq \pi - c_k, \quad -\infty < u_n < \infty, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (16)$$

так как для системы (15) должны выполняться неравенства $\sin^2 u_k = \sin^2 c_k \geq 0$.

При фиксированном наборе постоянных c_1, \dots, c_{n-1} «полоса» (16) покрывает некоторую область на сфере. Если точка движется вдоль геодезической, соответствующей набору постоянных c_1, \dots, c_{n-1} , то переменные u_k изменяются в пределах, определяемых неравенствами (16).

Пределы c_k и $\pi - c_k$ достигаются точкой на геодезической, потому что интегралы

$$\int_{c_k}^{\pi-c_k} \frac{\sin c_k \cdot f_k du_k}{(\sin^2 u_k - \sin^2 c_k)^{1/2} \sin u_k}; \quad \int_{c_k}^{\pi-c_k} \frac{\sin u_k \cdot f_k du_k}{(\sin^2 u_k - \sin^2 c_k)^{1/2}}$$

сходятся.

Достигнув предела $\pi - c_k$, переменная u_k убывает до значения c_k , затем, достигнув c_k , возрастает до $\pi - c_k$ и т. д.

Введем новые переменные: ξ_1, \dots, ξ_n , которые связаны с переменными u_1, \dots, u_n равенствами

$$\xi_k = \int_{c_k}^{u_k} \frac{\sin t \cdot f_k dt}{(\sin^2 t - \sin^2 c_k)^{1/2}}; \quad \xi_n = \int_0^{u_n} f_n dt, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Новые переменные заключены в пределах $0 < \xi_i < \omega_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) — $-\infty < \xi_n < \infty$, где

$$\omega_k = \int_{c_k}^{\pi-c_k} \frac{\sin u_k \cdot f_k du_k}{(\sin^2 u_k - \sin^2 c_k)^{1/2}}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\omega_n = \int_0^\pi f_n du_n.$$

Числа ω_i ($i = 1, \dots, n$) будем называть периодами переменных ξ_1, \dots, ξ_n .

В уравнениях геодезических (15) переменные разделены. Каждое из уравнений системы (15) представляет собой уравнение проекции геодезической на координатную плоскость переменных $(u_{k-1}; u_k)$.

Пусть A — точка, в которой проекция геодезической достигает границы $u_{k-1} = c_{k-1}$. Ее координаты имеют вид $(c_{k-1}; u_k^1)$. Аналогично пусть B, C, D, E — точки на проекции геодезической, имеющие соответственно координаты $(u_{k-1}^1; \pi - c_k)$, $(\pi - c_{k-1}; u_k^2)$, $(u_{k-1}^2; c_k)$, $(c_{k-1}; u_k^3)$. В новых координатах $A(c_{k-1}; \xi_k^1)$, $B(u_{k-1}^1; \omega_k)$, $C(\pi - c_{k-1}; \xi_k^2)$, $D(u_{k-1}^2; 0)$, $E(c_{k-1}; \xi_k^3)$ (рис. 1).

Для простоты дальнейших вычислений введем обозначения

$$\Phi_k(t) = \frac{\sin t \cdot f_k}{(\sin^2 t - \sin^2 c_k)^{1/2}}; \quad \Psi_k(t) = \frac{\sin c_{k-1} \cdot f_{k-1}}{\sin t (\sin^2 t - \sin^2 c_{k-1})^{1/2}}.$$

На участке AB (рис. 1) уравнение проекции геодезической, согласно (15), имеет вид

$$\int_{u_k^1}^{u_k} \varphi_k(t) dt = \int_{c_{k-1}}^{u_{k-1}^1} \psi_{k-1}(t) dt.$$

Это равенство можно переписать так:

$$\begin{aligned} \int_{c_k}^{u_k} \varphi_k(t) dt - \int_{c_k}^{u_k^1} \varphi_k(t) dt &= \\ &= \int_{c_{k-1}}^{u_{k-1}^1} \psi_{k-1}(t) dt. \end{aligned}$$

В новых переменных (u_{k-1} ; ξ_k) уравнение проекции геодезической на участке AB примет вид

$$\xi_k - \xi_k^1 = \int_{c_{k-1}}^{u_{k-1}^1} \psi_{k-1}(t) dt. \quad (17)$$

На отрезке геодезической BC переменная u_k убывает, поэтому уравнение геодезической на этом участке, согласно (15), имеет вид

$$- \int_{\pi - c_k}^{u_k} \varphi_k(t) dt = \int_{u_{k-1}^1}^{u_{k-1}} \psi_{k-1}(t) dt.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{c_k}^{u_k} \varphi_k(t) dt &= \int_{c_k}^{\pi - c_k} \varphi_k(t) dt + \int_{\pi - c_k}^{u_k} \varphi_k(t) dt, \\ \text{то } \int_{\pi - c_k}^{u_k} \varphi_k(t) dt &= \int_{c_k}^{\pi - c_k} \varphi_k(t) dt - \int_{c_k}^{c_k} \varphi_k(t) dt. \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства уравнение проекции геодезической на участке BC в новых переменных можно записать в виде

$$\omega_k - \xi_k = \int_{u_{k-1}^1}^{u_{k-1}} \psi_{k-1}(t) dt. \quad (18)$$

Из (17) и (18) находим, что абсолютные приращения переменной ξ_k на участках AB и BC соответственно равны

$$\int_{c_{k-1}}^{u_{k-1}^1} \psi_{k-1}(t) dt \quad \text{и} \quad \int_{u_{k-1}^1}^{\pi - c_{k-1}} \psi_{k-1}(t) dt.$$

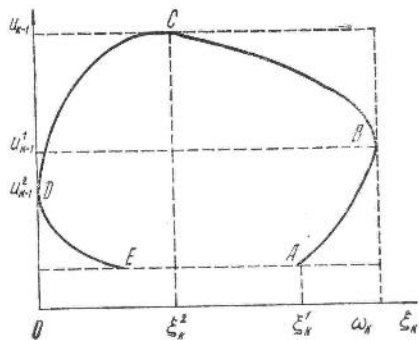


Рис. 1

Тогда абсолютное суммарное приращение переменной ξ_k на участке геодезической ABC будет равно

$$\int_{c_{k-1}}^{\pi - c_{k-1}} \psi_{k-1}(t) dt.$$

Аналогично можно подсчитать, что сумма абсолютных приращений переменной ξ_k на участке геодезической CDE также равна

$$\int_{c_{k-1}}^{\pi - c_{k-1}} \psi_{k-1}(t) dt.$$

Обозначим сумму этих двух приращений через $ШАГ \xi_k$. Тогда

$$ШАГ \xi_k = 2 \int_{c_{k-1}}^{\pi - c_{k-1}} \frac{\sin c_{k-1} \cdot f_{k-1} du_{k-1}}{\sin u_{k-1} (\sin^2 u_{k-1} - \sin^2 c_{k-1})^{1/2}}.$$

Другими словами, $ШАГ \xi_k$ — это длина абсолютного пути, который проходит переменная ξ_k по оси $O\xi_k$ при изменении переменной u_{k-1} в пределах от c_{k-1} до $\pi - c_{k-1}$, а затем — от $\pi - c_{k-1}$ до c_{k-1} . Для того чтобы точка на проекции геодезической возвратилась в исходное положение A (рис. 1), необходимо и достаточно, чтобы путь, пройденный переменной ξ_k от точки A за некоторое число шагов, был кратен $2\omega_k$.

Но это возможно тогда и только тогда, когда $\frac{ШАГ \xi_k}{2\omega_k} = \frac{p_k}{q_k}$, где p_k и q_k — целые положительные числа. В этом случае через q_k шагов переменная ξ_k пройдет путь, равный $2p_k\omega_k$. После возвращения в точку A проекция геодезической в плоскости $(u_{k-1}; \xi_k)$ будет повторяться, так как она будет задаваться теми же уравнениями (17), (18). Соотношение $\frac{ШАГ \xi_k}{2\omega_k} = \frac{p_k}{q_k}$ назовем условием замкнутости геодезической по переменной ξ_k .

Уравнения проекции геодезической в плоскости $(u_{n-1}; \xi_n)$ будут иметь такой вид:

$$\xi_n - \xi_n^1 = \int_{c_{n-1}}^{u_{n-1}} \frac{\sin c_{n-1} \cdot f_{n-1} dt}{(\sin^2 t - \sin^2 c_{n-1})^{1/2} \sin t}$$

при возрастании переменной u_{n-1} ,

$$\xi_n - \xi_n^2 = \int_{u_{n-1}}^{\pi - c_{n-1}} \frac{\sin c_{n-1} \cdot f_{n-1} dt}{(\sin^2 t - \sin^2 c_{n-1})^{1/2} \sin t}$$

при убывании переменной u_{n-1} , где $\xi_n^1, \xi_n^2 - \xi_n$ — координаты точек, в которых проекция геодезической достигает соответственно нижней и верхней границы полосы (рис. 2). Эта полоса является проекцией полосы (16) на плоскость $(u_{n-1}; \xi_n)$. Точки с координатами $(u_{n-1}; \xi_n)$ и $(u_{n-1}; \xi_n + 2m\omega_n)$ соответствуют одной и той же точке на сфере при условии, что остальные координаты совпадают.

Также, как и для переменных ξ_k , находим, что условием замкнутости геодезической по переменной ξ_n будет равенство $\frac{\text{ШАГ}_{\xi_n}}{2\omega_n} = \frac{p_n}{q_n}$, где p_n и q_n — целые положительные числа.

Из последнего уравнения системы (15) следует, что переменная u_{n-1} равна длине дуги, поэтому ШАГ_{ξ_1} совпадает с $2\omega_1$. (При изменении u_{n-1} от c_1 до $\pi - c_1$ переменная ξ_1 пройдет путь s , равный ω_1 , при изменении u_{n-1} от $\pi - c_1$ до c_1 — также путь, равный ω_1 , откуда и следует, что $\text{ШАГ}_{\xi_1} = 2\omega_1$).

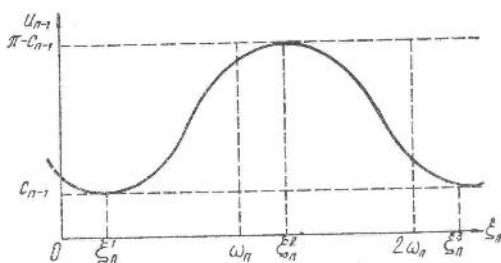


Рис. 2

Геодезическая будет замкнута тогда и только тогда, когда условие замкнутости будет выполнено для всех ξ_k ($k = 1, \dots, n$). Докажем это. Пусть точка на геодезической пройдет путь, равный ШАГ_{ξ_1} . За это время переменная ξ_1 пройдет путь от 0 до ω_1 и обратно, т. е. по переменной ξ_1 геодезическая замкнется. Но тогда, как следует из условия замкнутости геодезической по переменной ξ_2 , переменная ξ_2 совершит путь, равный ШАГ_{ξ_2} . Если переменная ξ_1 пройдет путь $q_2 \text{ШАГ}_{\xi_1}$, то переменная ξ_2 пройдет путь $q_2 \text{ШАГ}_{\xi_2} = 2p_2\omega_2$. А это означает, что геодезическая замкнется как по первой, так и по второй координатам. Так как переменная ξ_2 совершает q_2 шагов, то она p_2 раз проходит от 0 до ω_2 и обратно. Но тогда из условия замкнутости для переменной ξ_3 следует, что ξ_3 совершит p_2 шагов и пройдет путь $p_2 \text{ШАГ}_{\xi_3} = p_2 p_3 2\omega_3 / q_3$. Для того чтобы геодезическая замкнулась и по третьей координате, достаточно, чтобы процесс замыкания геодезической по первым двум координатам повторился q_3 раз. Тогда третья координата пройдет путь $q_3(p_2 \text{ШАГ}_{\xi_3}) = p_2 p_3 (2\omega_3)$, а геодезическая замкнется и по третьей координате. Аналогично продолжая процесс, можно показать, что через какое-то целое число шагов по переменной ξ_1 геодезическая замкнется по всем координатам.

Для ξ_1 условие замкнутости выполнено, а для остальных переменных условиями замкнутости являются условия (5), сформулированные в теореме. Тем самым теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f_i = 1 + h_i$, где h_i — нечетные функции на $[-1; 1]$, удовлетворяющие условию $h_i(1) = h_i(-1) = 0$. Нетрудно подсчитать, что:

$$\int_{c_k}^{\pi-c_k} \frac{\sin c_k du_k}{(\sin^2 u_k - \sin^2 c_k)^{1/2} \sin u_k} = \pi;$$

$$\int_{c_k}^{\pi-c_k} \frac{\sin u_k du_k}{(\sin^2 u_k - \sin^2 c_k)^{1/2}} = \pi. \quad (19)$$

В силу нечетности функций h_i выполняются равенства

$$\int_{c_i}^{\pi-c_i} \frac{\sin u_i h_i(\cos u_i) du_i}{(\sin^2 u_i - \sin^2 c_i)^{1/2}} = 0. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует выполнимость условий (5) замкнутости геодезических. Более того, выполняются равенства

$$\text{ШАГ} \xi_i = \text{ШАГ} \xi_j = 2\pi, \quad \omega_i = \omega_j = \pi. \quad (21)$$

Из равенств (21) следует, что все геодезические замыкаются после первого шага по всем переменным. Для доказательства этого факта достаточно провести рассуждения, приведенные в теореме 1. Из последнего уравнения системы (15) находим длины геодезических. Они равны

$$2 \int_{c_1}^{\pi-c_1} \frac{\sin u_1 du_1}{(\sin^2 u_1 - \sin^2 c_1)^{1/2}} = 2\pi,$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

Список литературы: 1. Zoll O. Über Flächen mit Scharen geschlossener geodätischer Linien // Math. Ann. — 1903. — 57. — S. 108—133. 2. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. — М.: Мир, 1981. — 325 с. 3. Колокольцов В. И. Новые примеры многообразий с замкнутыми геодезическими // Вестн. Моск. ун-та, 1984. — № 4, сер. I, мат. и мех. — С. 80—82. 4. Колокольцов В. И. SC-геодезические потоки на сфере с дополнительным квадратичным по скоростям интегралом. — М., 1984. — С. 23. Досл. в ВИНТИ 20.08.84, № 5924. 5. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 824 с.

Поступила в редколлегию 09.12.85

УДК 513

Г. Я. ПЕРЕЛЬМАН

О МНОГОГРАННЫХ СЕДЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

1. В настоящей заметке рассматривается вопрос о реализации полных двумерных многогранных метрик отрицательной кривизны многогранными *седловыми* поверхностями в евклидовых пространствах.

Напомним, что метрика называется многогранной, если у любой ее точки есть окрестность, изометричная окрестности вершины конуса. Многогранную метрику можно задавать с помощью развертки, и отрицательность кривизны означает, что в каждой вершине развертки сходятся углы, в сумме составляющие не меньше 2π [1, гл. 1, § 3, 4]. Под седловой поверхностью в евклидовом пространстве понимается поверхность, у которой ни в одной точке не существует локально строго опорной гиперплоскости. Для многогранной поверхности свойство быть седловой означает, во-первых, что все вершины поверхности являются вершинами ее внутренней метрики и, во-вторых, что в этих вершинах нет локально строго опорных гиперплоскостей. Говорят, что поверхность *реализует* данную метрику, заданную на двумерном многообразии, если эта поверхность имеет внутреннюю метрику, и существует изометрическое отображение многообразия, на котором задана метрика, на эту поверхность. Вообще говоря, это отображение не предполагается C^0 -погружением. Если оно оказывается C^0 -погружением или C^0 -вложением, то говорят об изометрическом погружении или об изометрическом вложении метрики соответственно. Метрика, заданная на полуцилиндре, называется *рогом*, если в ней существует последовательность гомотопически нетривиальных петель ограниченной длины, идущая на бесконечность в полуцилиндре.

Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче налагается ограничение только на геометрическую форму поверхности (требуется, чтобы она была многогранной и седловой), но не на размерность евклидова пространства, в котором эта поверхность лежит. Такая постановка вопроса определена работами С. З. Шефеля [2, 3].

В настоящей работе устанавливается, что 1) всякая полная многогранная метрика отрицательной кривизны, заданная на плоскости, допускает изометричное вложение в R^3 в виде многогранной седловой поверхности (п. 2); 2) всякая полная многогранная метрика отрицательной кривизны, заданная на цилиндре и обладающая замкнутой геодезической, *реализуется* многогранной седловой поверхностью в R^3 (п. 3), но существуют метрики такого типа, не допускающие изометрического *погружения* в виде многогранной седловой поверхности ни в какое евклидово пространство (п. 4); 3) существуют полные многогранные метрики отрицательной кривизны, заданные на цилиндре, не обладающие замкнутой геодезической, т. е. имеющие рог на одном из концов, не реализуемые многогранными седловыми поверхностями ни в каком евклидовом пространстве (п. 5).

В доказательствах без особого упоминания используются такие известные факты о метриках отрицательной кривизны, как единственность кратчайшей между любыми двумя точками, возможность неограниченного продолжения геодезической, отсутствие геодезических двуугольников, выпуклость круга и т. п.

2. Теорема 1. *Любая полная многогранная метрика отрицательной кривизны, заданная на плоскости, погружается в R^3 в виде многогранной седловой поверхности.*

Доказательство. Выберем одну из вершин заданной метрики, разделим угол при этой вершине несколькими направлениями

на малые углы, затем проведем в этих направлениях геодезические лучи. Направления выберем так, чтобы эти лучи не содержали вершин метрики. Отметим в R^3 точку, которая будет образом выбранной вершины, и отобразим изометрично каждый из проведенных геодезических лучей на прямолинейный луч с началом в отмеченной точке. Направление этих прямолинейных лучей выберем так, чтобы угол в метрике между смежными геодезическими в выбранной вершине был равен углу в пространстве R^3 между соответствующими лучами, а также чтобы образованный этими лучами конус был седловым.

Дальнейшее погружение разобьем на ряд однотипных шагов. Перед проведением очередного шага непогруженная часть плоскости должна представлять собой объединение конечного числа дизъюнктивных выпуклых бесконечных областей двух типов. Области первого типа ограничены двумя геодезическими лучами с общим началом в вершине метрики. Угол области в этой вершине меньше π , граничные геодезические не должны содержать вершин метрики. Области второго типа ограничены двумя геодезическими лучами и одним геодезическим отрезком, также не содержащими внутри себя вершин метрики. Вершины областей второго типа могут не быть вершинами метрики, углы в них меньше π , но больше π в сумме. Перед каждым шагом границы непогруженных областей отображены в R^3 , причем геодезические лучи и отрезки погружены в виде прямолинейных лучей и отрезков, углы между которыми, если это границы одной и той же области, равны соответствующим углам в метрике. При этом граница каждой области должна быть отображена в одну плоскость.

Каждый шаг состоит в разбиении еще не погруженной области отрезками и лучами геодезических на несколько областей первого или второго типа и, возможно, конечную область, представляющую собой геодезический треугольник, не содержащий внутри себя и внутри своих сторон вершин метрики. Затем разбивающие геодезические (лучи и отрезки) погружаются изометрично в виде плоского треугольника с теми же углами и сторонами. Если при разбиении образовались области первого или второго типа, не содержащие вершин метрики, то они погружаются в виде плоских областей, натянутых на уже погруженную границу. Будем использовать шаги следующих видов:

а) область первого типа разбивается несколькими геодезическими лучами с началом в своей вершине, не проходящими через вершину метрики, на несколько областей первого типа (рис. 1, а);

б) внутри области первого типа выбирается вершина метрики такая, что геодезический отрезок, соединяющий ее с вершиной области, не проходит через другие вершины метрики. Затем из выбранной вершины проводятся несколько геодезических лучей, образующих также углы между собой и с уже проведенным отрезком, что образуются две области второго типа и несколько областей первого типа (рис. 1, б);

в) внутри области второго типа выбирается вершина метрики, соединяя которую с вершинами области, получаем геодезический треугольник, не содержащий вершин метрики внутри себя и внутри сто-

рон. Затем из новой вершины проводим геодезические лучи так, чтобы возникли две области второго типа и несколько областей первого типа (рис. 1, в);

г) на одной из бесконечных сторон области второго типа выбираем точку, соединяя которую с вершинами области, получаем геодезический треугольник без вершин метрики внутри него и его сторон. При этом образуется еще одна область второго типа (рис. 1, г);

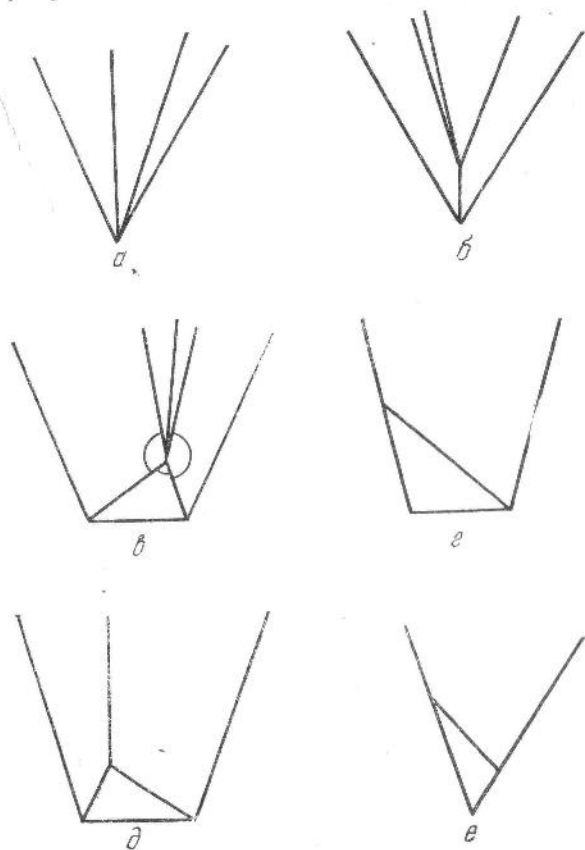


Рис. 1

д) внутри области второго типа выбирается точка, не являющаяся вершиной метрики, соединяя которую с вершинами области, получаем геодезический треугольник без вершин метрики внутри него и его сторон. Затем проводим из выбранной точки геодезический луч так, чтобы образовались две области второго типа (рис. 1, д),

е) на границе области первого типа выбираются две точки на разных лучах, соединяя которые геодезической, отрезаем треугольник, не содержащий внутри и внутри сторон вершин метрики. При этом образуется область второго типа (рис. 1, е). В действительности все

эти виды шагов являются предельными случаями шага в). Выделение этих видов нужно только для формализации конструкции.

При погружении возникших на данном шаге границ областей надо проследить, чтобы те углы между ними, которые являются углами областей, сохранились при погружении. В случаях г), д), е) это условие выполняется, если эти границы погружаются в плоскость, определяемую уже погруженной границей разбиваемой области. В случаях а), б), в) в эту плоскость погружаются все новые границы, за исключением лучей, разделяющих области первого типа. Эти геодезические лучи отображаем на прямолинейные лучи с сохранением углов областей после того, как остальные новые границы уже погружены. Это можно сделать, если углы возникших областей первого типа достаточно малы, а углы, помеченные дугами на рис. 1, в, меньше 2π в сумме. При этом прямолинейные лучи можно выбрать так, чтобы образующаяся в шагах б) и в) новая вершина многогранной поверхности была седловой.

Для завершения конструкции осталось указать, в каком порядке следует проводить описанные выше шаги. Разобьем построение на циклы, которые в свою очередь будут состоять из шагов. Циклы будем строить так, чтобы после k -го цикла была целиком погружена часть метрики, содержащая круг радиуса k с центром в начальной вершине.

Пусть k -й цикл выполнен ($k = 0, 1, 2, \dots$). Если круг радиуса $k + 1$ уже погружен, то $(k + 1)$ -й цикл будет пустым. В противном случае непогруженная часть круга лежит в конечном числе областей первого и второго типов. Займемся сначала областями второго типа. В каждой из этих областей можно построить выпуклый геодезический многоугольник, среди вершин которого будут и вершины области, содержащий непогруженную часть круга. В этот многоугольник попадет конечное число вершин метрики. Среди них найдется такая, для которой можно применить шаг в). После его применения образуются две области второго типа, в каждой из которых выделен выпуклый геодезический многоугольник, содержащий вершины области. Если в одном из них есть вершины метрики, то применяем к соответствующей области шаг в). Ввиду конечности числа вершин метрики в исходном многоугольнике через конечное число таких шагов в областях типа 2 будут выделены выпуклые многоугольники, не содержащие вершин метрики. Их следует погружать как часть плоскости, что можно сделать, применив несколько шагов г) и д).

Рассмотрим теперь области первого типа (старые и новые, возникшие не только что проведенных шагах). В каждой из них непогруженную часть круга можно заключить в выпуклый геодезический многоугольник, содержащий вершину области. В этом многоугольнике — конечное число вершин метрики. Применяя шаг а), можно добиться того, что в каждой области лишь одна вершина метрики соединяется с вершиной области кратчайшей, не проходящей через другие вершины метрики. Применяем к каждой такой области шаг б). Возникшие при этом области второго типа не содержат вершин метрики в выделенном многоугольнике, и его часть, попавшая в эти области, погружается в виде плоской области шагами г) и д). Для возникших областей первого типа вновь применяем шаги а) и б) до тех пор, пока в каждой

области первого типа в выделенном многоугольнике не останется вершин метрики. Тогда этот многоугольник погружается в виде плоской области шагами а) и е). Этим заканчивается $(k + 1)$ -й цикл. Погружение построено, и теорема доказана.

Замечание. Погружая таким способом многогранную метрику, нетрудно добиться, чтобы погружение было вложением.

3. Теорема 2. *Для любой полной многогранной метрики отрицательной кривизны, заданной на цилиндре и обладающей замкнутой геодезической, существует многогранная седловая поверхность в R^3 , реализующая эту метрику.*

Доказательство. Конструкция, доказывающая эту теорему, мало отличается от конструкции в п. 2. Перечислим эти отличия.

1) Самый первый шаг проводится иначе. Выбирается замкнутая геодезическая, она делится всеми вершинами метрики и несколькими дополнительными точками на такие отрезки, из которых можно составить плоский выпуклый многоугольник. После этого из точек деления проводятся внутренние перпендикуляры к замкнутой геодезической в обе стороны (из вершин метрики проводятся крайние правые и левые перпендикуляры и, возможно, несколько промежуточных перпендикуляров). Эти перпендикуляры продолжаются как геодезические лучи. Если перпендикуляр входит в вершину метрики, то далее проведем его крайние правое и левое продолжения и несколько промежуточных продолжений так, чтобы углы получающихся областей были меньше π . Теперь замкнутая геодезическая помещается в R^3 в виде плоского выпуклого многоугольника, а перпендикуляры к ней — в виде перпендикуляров к плоскости этого многоугольника. При этом левые и правые перпендикуляры склеиваются.

2) После первого шага непогруженная область оказывается разбитой на конечное или счетное число дизъюнктивных выпуклых бесконечных областей, ограниченных двумя или тремя геодезическими. Эти области отличаются от областей первого и второго типов из п. 2 тем, что могут иметь вершины метрики на своих бесконечных сторонах, причем углы со стороны области в этих вершинах равны π , и тем, что сумма углов при вершинах модифицированных областей второго типа может быть равной π . Это никак не влияет на проведение шагов а), б), г), е) из п. 2. Что же касается шагов в) и д), то для областей второго типа с суммой углов, равной π , направления в начальной точке геодезических лучей, разделяющих область первого типа и область второго типа в случае в) и области второго типа в случае д), оказываются определенными однозначно, и эти лучи могут пройти через другие вершины метрики. В этом случае, как и на первом шаге, нужно рассматривать левое, правое и, возможно, промежуточные продолжения такого луча.

В остальном доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1.

4. Пример полной многогранной метрики отрицательной кривизны, заданной на цилиндре, обладающей замкнутой геодезической и непогружаемой в R^n в виде многогранной седловой поверхности ни при каком n .

Рассмотрим произвольный седловой многогранник в R^3 . Заметим, что его вершины являются вершинами его внутренней метрики, а ребра могут быть только трех типов: 1) кратчайшие между вершинами метрики; 2) лучи с началом в вершине метрики, являющиеся кратчайшими на любом участке; 3) прямые — геодезические, являющиеся кратчайшими на любом участке.

Заметим, что ребра пересекаются только в вершинах многогранной поверхности, т. е. в вершинах метрики.

Рассмотрим метрическое пространство, полученное отождествлением граничных точек, лежащих на одной вертикали, у плоской фигуры, изображенной на рис. 2.

Покажем, что это метрическое пространство не допускает изометрического погружения в виде седловой многогранной поверхности

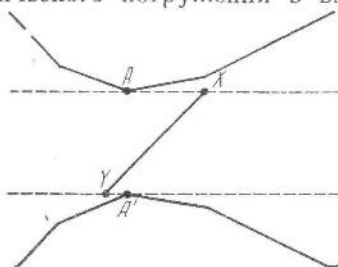


Рис. 2

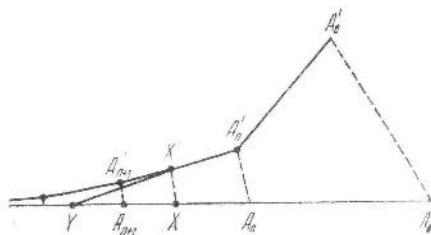


Рис. 3

в R^n . Действительно, отрезок AA' — не кратчайшая, следовательно, он должен быть пересечен каким-нибудь ребром. Если это ребро не параллельно пунктирным прямым на рис. 2, то оно пересекается с этими прямыми в каких-то точках X и Y по разные стороны от AA' . Но $XY > AX + A'Y$, следовательно, XY — не кратчайшая и не может быть частью ребра. Таким образом, существует ребро, параллельное пунктирным прямым, а тогда все другие ребра либо не пересекают полосу между пунктирными прямыми, либо параллельны этим прямым. Тогда образы пунктирных прямых в R^n — параллельные прямые, и поскольку эти образы проходят через одну точку — образ A и A' , то они совпадают, и, значит, в точке $A = A'$ наше отображение не является погружением.

5. Пример полной многогранной метрики отрицательной кривизны типа рога, не допускающей реализации седловой многогранной поверхностью в R^n ни при каком n .

Рассмотрим метрическое пространство, полученное из куска плоскости, изображенного на рис. 3, изометрическим склеиванием краев. При этом требуется, чтобы этот кусок на бесконечности сужался до 0 и угол, составляемый отрезком между склеенными точками с горизонталью, стремился к $\pi/2$, а также чтобы выполнялись неравенства

$A_{n+1} \widehat{A_n A_n} A_n < A_{n+1} \widehat{A_n A'_n} A'_n$. Ниже будет показано, как построить такой кусок плоскости.

Заметим, что горизонтальная на рис. 3 прямая является кратчайшей на любом участке. Действительно, в противном случае на-

ились бы точки X' и Y (X' — на верхнем крае, Y — на нижнем) такие, что отрезок $X'Y$ лежал в нашей области и был короче, чем XU . Если X левее Y , то это невозможно, так как угол $X'XY$ тупой. Если же X правее Y и, скажем, лежит на $A_n A_{n+1}$, то $\widehat{YX'X} < \widehat{A_{n+1}X'X} < \widehat{X'XY}$, поскольку иначе условие на углы в точке A_n было бы нарушено.

Рассмотрим теперь возможную реализацию этой метрики. Образ отрезка $A_0 A'_0$ будет пересечен конечным числом ребер, каждое из которых либо идет на бесконечность, либо имеет конец в одной из вершин A_i или A'_i . Пусть k — наибольший из номеров таких вершин. Отрезок $A_k A'_k$ не является кратчайшей, и значит он пересекается какими-то ребрами. Эти ребра не могут иметь конца левее $A_k A'_k$, так как такое ребро либо пересекает $A_0 A'_0$, что невозможно по выбору k , либо пересекает верхний или нижний край области правее $A_k A'_k$, что невозможно, так как горизонтальный луч — кратчайшая на любом участке. Но с другой стороны, ребер, пересекающих $A_k A'_k$ во внутренней точке и идущих на бесконечность быть не может. Значит, реализации нет.

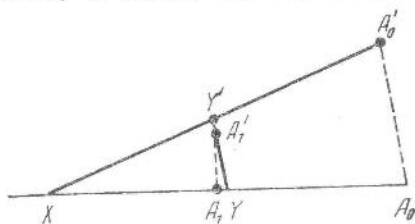


Рис. 4

Осталось построить плоскую область с нужными свойствами. A'_0 выбираем произвольно, требуя лишь чтобы отрезок $A'_0 A_0$ составлял острый угол с горизонтальным лучом (рис. 4). Проведем отрезок $A'_0 X$ так, что $\widehat{XA'_0 A_0} = \widehat{XA_0 A'_0}$ и пусть Y — середина XA_0 , а Y' — середина XA'_0 . На отрезке $Y'Y$ выберем точку A'_1 , а на XU — точку A_1 , так что $\widehat{A'_0 A_1} = \widehat{A_0 A_1}$ и $\pi/2 - \widehat{XA_1 A'_1} = (\pi/2 - \widehat{XA_0 A'_0})$. Продолжая аналогично, получим нужную область.

Замечание. Если к построенной плоской области подклеить снизу параллельную полуполоску и уже затем склеить края, то получится метрика неострого рога, которая по-прежнему не допускает реализации. Доказательство аналогично.

6. Заключительные замечания. В пп. 2—5 исследован вопрос о реализации полных многогранных метрик отрицательной кривизны, заданных на плоскости или цилиндре. Что касается других конечно-связных двумерных многообразий, то для каждого из них, исключая, конечно, сферу, можно построить примеры заданных на нем полных многогранных метрик отрицательной кривизны, не допускающих многогранной седловой реализации ни в каком евклидовом пространстве, даже если ограничиться метриками, не имеющими рогов.

Естественно попытаться хотя бы частично перенести полученные результаты на случай римановых метрик. Здесь нужно отметить, что построенные в теореме 1 многогранные седловые поверхности содержат

много пространственных лучей и поэтому ими, скорее всего, нельзя приблизить регулярные седловые поверхности строго отрицательной кривизны. Наличие таких лучей вызвано универсальностью конструкции: нетрудно привести примеры метрик, в любой седловой многогранной реализации которых появятся лучи. Может быть, сузив класс рассматриваемых метрик (ограничившись метриками, нужными для приближения римановых метрик), удастся построить их седловые реализации, обладающие дополнительными полезными для приближения регулярных поверхностей свойствами. Примеры п. 4 и 5 также, по-видимому, не встречаются в случае римановых метрик.

Список литературы: 1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1948.— 386 с. 2. Шефель С. З. О двух классах k -мерных поверхностей в n -мерном евклидовом пространстве // Сиб. мат. журн.— 1969.— 10, № 2.— С. 459—466. 3. Шефель С. З. Вполне регулярные изометрические погружения в евклидово пространство // Сиб. мат. журн.— 1970.— 11, № 2.— С. 442—460.

Поступила в редколлегию 08.01.86

В. А. ТЕРНОВСКИЙ

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ГРУППОЙ
СИММЕТРИЙ МНОГОГРАННИКА 3_{21}

1°. Пусть в евклидовом пространстве E^m задана прямоугольная система координат $Ox_i (i = \overline{1, m})$; $\eta_k = 0 (k = \overline{1, N})$ есть нормированные уравнения $(m-1)$ -мерных плоскостей симметрии, отражения относительно которых порождают группу $G = E_7$ (или E_8). Алгебра θ^G построенная на кольце C_m многочленов

$$\theta_{2s}^G(x_i) = \sum_{k=1}^N \eta_k^{2s}$$

совпадает с алгеброй всех инвариантов G [1].

Плоскости симметрии многогранника 3_{21} с группой симметрий E_7 зададим в пространстве E^7 уравнениями $x_i = 0 (i = \overline{1, 7})$; $x_i \pm \pm x_j \pm x_k \pm x_l = 0$, в каждом из которых, начиная с 8-го, индексы i, j, k, l принимают значения только одной из следующих четверок чисел: 1, 2, 3, 5; 1, 2, 4, 7; 1, 3, 6, 7; 1, 4, 5, 6; 2, 3, 4, 6; 2, 5, 6, 7; 3, 4, 5, 7 [1]. Выделим уравнения стенок камеры для группы E_7 : $x_1 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_7 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0, x_1 + x_2 + x_4 + x_7 = 0, x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 0$ (1).

Плоскости симметрий многогранника 4_{21} с группой симметрий E_8 в пространстве E^8 определим уравнениями $x_i \pm x_j = 0 (i, j = \overline{1, 8}; i < j)$; $x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm x_5 \pm x_6 \pm x_7 \pm x_8 = 0$ (2), где количество плюсов четно [2].

Введем далее следующие обозначения. Пусть вырожденное линейное преобразование $\varphi: E^8 \rightarrow E^7$ задается формулами $x_i = x'_i$ ($i = \overline{1, 7}$), $x_8 = x'_1 + x'_2 - x'_3 + x'_4 - x'_5 - x'_6 + x'_7$. Через χ обозначим такое преобразование:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} x''_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} x''_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} x''_3 - \frac{1}{2\sqrt{5}} x''_4 + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{30}} x''_5 + \frac{1}{\sqrt{42}} x''_6 - \frac{1}{2\sqrt{14}} x''_7, \\ x'_2 &= \frac{\sqrt{2}}{1\sqrt{3}} x''_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} x''_3 - \frac{1}{2\sqrt{5}} x''_4 + \frac{1}{\sqrt{30}} x''_5 + \frac{1}{\sqrt{42}} x''_6 - \frac{1}{2\sqrt{14}} x''_7, \\ x'_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} x''_3 + \frac{1}{2\sqrt{5}} x''_4 - \frac{1}{\sqrt{30}} x''_5 - \frac{1}{1\sqrt{42}} x''_6 + \frac{1}{2\sqrt{14}} x''_7, \\ x'_4 &= \frac{2}{1\sqrt{5}} x''_4 + \frac{1}{\sqrt{30}} x''_5 + \frac{1}{\sqrt{42}} x''_6 - \frac{1}{2\sqrt{14}} x''_7, \\ x'_5 &= \frac{\sqrt{5}}{1\sqrt{6}} x''_5 - \frac{1}{1\sqrt{42}} x''_6 + \frac{1}{2\sqrt{14}} x''_7, \\ x'_6 &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} x''_6 + \frac{1}{2\sqrt{14}} x''_7, \\ x'_7 &= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} x''_7. \end{aligned}$$

Ортогональное преобразование ψ зададим матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{2\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{10}} & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & -\frac{1}{2\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

Пусть V_7 есть кольцо инвариантов группы E_7 многогранника \mathbb{Z}_{21} , погруженного в E^8 . Если v — нетривиальный элемент V_7 , то положим $W_7 = \{\varphi(v)\}$. Кольцо многочленов $\chi(\omega)$, $\omega \in W_7$ обозначим через D_7 .

Имеет место следующая

Теорема. Произведение линейных преобразований φ , χ и ψ кольцо V_7 отображает в кольцо C_7 , а именно:

$$V_7 \xrightarrow{\varphi} W_7 \xrightarrow{\chi} D_7 \xrightarrow{\psi} C_7.$$

Доказательство теоремы (с учетом п. 1⁰) содержится в п. 2⁰; преобразование ψ исследуется в п. 3⁰.

Теорема дает возможность найти подкольцо C_7 , изоморфное C_n , и, следовательно, выделить алгебраические 6-мерные поверхности в пространстве E^7 с группой симметрий E_7 , в которые линейным преобразованием можно перевести 7-мерные поверхности пространства E^8 , инвариантные относительно группы симметрий E_8 .

Положим $\xi = \varphi\chi\psi$. Тогда $C_8 \xrightarrow{\xi} C'_8 \subset C_7$. Если многочлен $f \in C_8$, то $\xi(f) \in C'_8$; уравнение $\xi(f) = c$ задает поверхность с группой симметрий E_7 . Рассмотрим, например, в пространстве E^8 поверхность, определяемую уравнением

$$64\theta_8^{E_8} = 57 \sum x_i^8 + 252 \sum x_i^6 x_j^2 + 630 \sum x_i^4 x_j^4 + 420 \sum x_i^4 x_j^2 x_k^2 + \\ + 2520 \sum x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 = c.$$

Многочлен

$$32\xi(\theta_8^{E_8}) = 39 \sum x_i^8 + 84 \sum x_i^6 x_j^2 + 210 \sum x_i^4 x_j^4 + 420 \sum x_i^4 x_j^2 x_k^2 + \\ + 2520 \sum x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2.$$

Уравнение $\xi(\theta_8^{E_8}) = c$ задает поверхность в пространстве E^7 , инвариантную относительно группы E_7 .

Отметим, что справедливо такое соотношение:

$$160\xi(\theta_8^{E_8}) = 315 I_1^4 - 168 I_1 I_2 + 24 I_3,$$

где $I_1 = 2^{-1}\theta_2^{E_7}$, $I_2 = 2^2 3^{-1}\theta_6^{E_7}$, $I_3 = 2^3\theta_3^{E_7}$.

2⁰. Многогранник Z_{21} можно погрузить в пространство E^8 так, что его 7-мерные плоскости симметрии будут задавать 63 уравнения из (2):

$$\varepsilon_i x_i - \varepsilon_j x_j = 0 \quad (i < j), \quad (3)$$

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm x_5 \pm x_6 \pm x_7 \pm x_8 = 0, \quad (4)$$

где $\varepsilon_i = -1(1)$, $i \in M = \{3, 5, 6, 8\}$ ($\notin M$); в (4) количество минусов равно $2p$ ($p = \overline{0, 3}$), причем p минусов стоят перед переменными с индексами из множества M .

Плоскость с уравнением $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 - x_8 = 0$ ортогональна каждой из плоскостей (3) и (4). Следовательно, она пересекает любую 7-мерную поверхность с группой E_7 по 6-мерной поверхности, группа симметрий которой содержит подгруппу, изоморфную E_7 . Поэтому $V_7 \xrightarrow{\varphi} W_7$.

Если μ_k ($k = \overline{1,63}$) — левые части нормированных уравнений (3) и (4), то

$$T_2 = \sum_{k=1}^{63} \mu_k^2 = 2^{-332} \left(7 \sum_{i=1}^8 x_i^2 - 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^8 \varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j \right)$$

и

$$\varphi(T_2) = 18 \left(\sum_{i=1}^7 (x_i)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^7 \varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j \right). \quad (5)$$

Выделяя последовательно полные квадраты переменных, находим невырожденное преобразование χ , которое приводит квадратичную форму (5) к каноническому виду. При этом $\chi(\varphi(T_2)) = 9 \sum_{i=1}^7 (x_i'')^2 = 9 \theta_2^{E_7}(x_i'')$. Значит, $W_7 \xrightarrow{\chi} D_7$.

Поддействуем преобразованием $\varphi\chi$ на плоскости с уравнениями (3), (4). Из полученных плоскостей выделим стенки камеры для группы, изоморфной E_7 :

$$\begin{aligned} x_1'' - \sqrt{3}x_2'' = 0, \quad x_2'' + \sqrt{3}x_3'' = 0, \quad \sqrt{3}x_3'' + \sqrt{5}x_4'' = 0, \\ \sqrt{2}x_4'' + \sqrt{5}x_5'' = 0, \quad \sqrt{5}x_5'' - \sqrt{7}x_6'' = 0, \quad \sqrt{3}x_6'' + 2x_7'' = 0, \quad (6) \\ x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 + \frac{1}{\sqrt{10}}x_4 + \frac{4}{\sqrt{15}}x_5 + \frac{4}{\sqrt{21}}x_6 - \frac{2}{\sqrt{7}}x_7 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения (1) более простые, чем (6). Поэтому естественно найти в E^7 движение, которое плоскости (6) переводит в (1). Приравняв левые части соответствующих (по графу Кокстера) нормированных уравнений (1) и (6) и выразив затем x_i через x_i'' , получим ортогональное преобразование ψ с матрицей A . Следовательно, $D_7 \xrightarrow{\psi} C_7$.

Отметим, что схема доказательства теоремы та же, что и в работе [3], где, в частности, установлена связь между алгебрами инвариантов групп E_6 и E_7 .

3°. Так как порядок матрицы A является нечетным числом и $\det A = 1$, то канонический вид A должен быть таким [4]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & U_1 & & & & & \\ & & U_2 & & & & \\ & & & U_3 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix},$$

где

$$U_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}.$$

Найдем углы α_i . Поскольку собственные числа $1, e^{\pm i\alpha_i}$ ($i = 1, 2, 3$; $\varepsilon = \sqrt{-1}$) преобразования ψ являются корнями характеристического уравнения, имеем

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda I| &= -(\lambda - 1) \prod_{i=1}^3 (\lambda - e^{2\alpha_i})(\lambda - e^{-2\alpha_i}) = \\
 &= -(\lambda - 1) \prod_{i=1}^3 (\lambda^2 - 2z_i\lambda + 1) = -\lambda^7 + (2a - 1)(\lambda^6 - \lambda) + \\
 &+ (4b - 2a + 3)(\lambda^5 - \lambda^3) + (8c - 4b + 4a - 3)(\lambda^4 - \lambda^3) + 1. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Здесь $z_i = \cos \alpha_i$,

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3), \quad b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3, \quad c = -z_1z_2z_3. \quad (8)$$

Вычисляя определитель $|A - \lambda I|$ и приравнивая затем в (7) коэффициенты при соответствующих степенях λ , находим следующие значения a, b, c соответственно:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{4\sqrt{42}} (\sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 3\sqrt{7} + \sqrt{14} + 2\sqrt{42}), \\
 &\frac{1}{48 + \frac{1}{210}} (21 - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{10} + 10\sqrt{30} - 18\sqrt{35} + \\
 &\quad + 36\sqrt{42} - 3\sqrt{105} - 24\sqrt{210}), \\
 &\frac{1}{192 + \frac{1}{210}} (147 + 21\sqrt{3} - 27\sqrt{5} + 42\sqrt{6} - 27\sqrt{7} - 12\sqrt{10} - \\
 &\quad - 3\sqrt{15} - 9\sqrt{21} - 28\sqrt{30} - 3\sqrt{35} + 72\sqrt{42} - \\
 &\quad - 24\sqrt{70} + 10\sqrt{105} - 30\sqrt{210}).
 \end{aligned}$$

Значит, с учетом (8) и теоремы Виета ортогональное преобразование ψ совершает три поворота вокруг 5-мерных плоскостей на углы $\alpha_i = \arccos z_i$ ($i = 1, 2, 3$), где z_i являются корнями кубического уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

Список литературы: 1. Игнатенко В. Ф. Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями // Мат. сб.— 1983.— 120. № 4.— С. 556—568. 2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли.— М.: Мир, 1972.— 334 с. 3. Игнатенко В. Ф. О связях между инвариантами групп F_4, E_6, E_7 : Тез. докл. Первой конф. по комбинаторной геометрии и ее прил. Батуми, 1985.— С. 29—31. 4. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства.— М.: Наука, 1966.— 648 с.

Поступила в редколлегию 27.10.86

УДК 514

М. А. УЛАНОВСКИЙ

ОДНОРОДНЫЕ ЛОРЕНЦОВЫ ПРОСТРАНСТВА. 2

Эта статья представляет собой продолжение работы [1], которая ниже будет цитироваться как «ч. 1».

Объект изучения — однородное лоренцово многообразие V_n , т. е. дифференцируемое многообразие с псевдоримановой метрикой ds^2 сигнатуры $(+ \dots -)$, в котором транзитивно действует группа движений G_r . Многообразие V_n предполагается хронологически ориентированным: конусы $ds^2 \geq 0$ касательных пространств разбиты на полу-

конусы K и K^- так, что выпуклые конусы K образуют непрерывное на V_n поле. Как известно, эта конструкция позволяет определить на V_n бинарное отношение $a \prec b$, которое для математической модели пространства-времени имеет смысл причинного следования событий. В ч. 1 были сформулированы некоторые условия, достаточные для того, чтобы отношение \prec было максимальным, т. е. чтобы для любых точек a, b из V_n имели место утверждения: $a \prec b$ или $b \prec a$.

В этой заметке рассматриваются отношения причинного следования в пространстве связной и односвязной трехмерной группы Ли G_3 . При этом предполагается, что отношение \prec задано несколько более общим способом, чем это описано выше. Вместо эллиптического конуса $ds^2 \geq 0$ будет рассматриваться поле произвольных лево- (право-) параллельных выпуклых конусов K_x в касательных пространствах T_x группы G_3 , для задания которого достаточно указать конус K_e в касательном пространстве T_e единицы группы e (противоположный к K_e конус будет обозначаться через K_e^-). В остальном все определения, относящиеся к причинному следованию \prec , сохраняются неизменными (см. также ч. 1).

Основной результат — необходимое и достаточное условие максимальности отношения \prec в связной и односвязной группе G_3 .

Теорема. Пусть G_3 — связная и односвязная трехмерная группа Ли, K_x — поле конусов, полученное правыми (левыми) сдвигами из произвольного выпуклого конуса K_e (не принадлежащего какой-либо 2-плоскости). Для того чтобы отношение \prec , определенное конусами K_x , было не максимальным, необходимо и достаточно, чтобы в алгебре Ли \mathfrak{g}_3 группы G_3 (отождествленной с касательным пространством T_e) существовала двумерная подалгебра \mathfrak{h}_2 , не содержащая внутренних направлений конуса K_e (по терминологии, принятой в ОТО, подалгебра \mathfrak{h}_2 — невременеподобная плоскость).

Рассмотрены некоторые приложения этой теоремы к однородным лоренцевым метрикам. В частности, из нее следует, что в односвязном V_4 диффеоморфном евклидовому R_4 с метрикой Гёделя (или метрикой «типа Гёделя», см. [2]) отношение \prec максимально.

Рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства сформулированной выше теоремы. Заметим, что определения, относящиеся к группам Ли, совпадают с принятыми в [3].

Лемма 1. Пусть H_{r-1} — подгруппа Ли коразмерности 1 связной и односвязной группы Ли G_r . Отношение \prec , определенное (как описано выше) конусом K_e , представляющим собой полупространство касательного $T_e = \mathfrak{g}_r$, ограниченное подалгеброй \mathfrak{h}_{r-1} подгруппы H_{r-1} , не максимально (см. также [1]).

Доказательство. Рассмотрим одномерное фактор-пространство G_r/H_{r-1} (порожденное левыми классами смежности gH_{r-1} , $g \in G_r$); так как G_r односвязна, то $G_r/H_{r-1} = R$ — вещественная ось. Пусть каноническая проекция конуса K_e на $T(R) = R$ есть положительная полуось R^+ ; тогда и проекция любого вектора $\xi \in K_x$ (K_x — конус в T_x , $x \in G_r$, полученный левым сдвигом из K_e) есть вектор $r \geq 0$, из чего очевидным образом следует, что для любой времениподобной дуги $\varphi(t)$

($\varphi(0) = e, 0 \leq t \leq 1$) $\text{nr}_R \varphi(1) \geq 0$ — «будущее» единицы e заведомо не совпадает с G_r .

Лемма 2. Пусть G_3 — связная и односвязная группа Ли, g_3 — алгебра Ли этой группы. Соответствие между двумерными подалгебрами алгебры g_3 и двумерными подгруппами Ли группы G_3 биективно.

Доказательство. Для групп типов I—VII утверждение представляет собой частный случай теоремы об интегральных подгруппах разрешимых групп [3]. Для алгебры типа VIII по Бьянки достаточно заметить, что присоединенная группа изоморфна группе вращений пространства Минковского E_3 (группе Лоренца), а произвольной подалгебре h_2 соответствует замкнутое множество преобразований, оставляющих инвариантной одну из образующих изотропного конуса.

Очевидно, из доказанных утверждений следует достаточность условия, сформулированного в теореме: если существует подалгебра h_2 такая, что конус K_e принадлежит одному из замкнутых полупространств T_e с границей h_2 , то отношение \prec не максимально.

Доказательство необходимости основано на утверждениях ч. 1. Пусть M — множество элементов a группы G_r таких, что выпуклое замыкание объединения $\text{Ada}(K_e) \cup K_e$ есть все касательное T_e (для чего достаточно, чтобы конус $\text{Ada}(K_e)$ содержал вектор, внутренний для конуса K_e^- , противоположного K_e). Как показано в ч. 1, отношение \prec максимально, если существует компонента M_1 множества M , имеющая непустое пересечение с «будущим» F_e и «прошлым» P_e единицы группы e . А это условие, в свою очередь, заведомо выполняется, если существует дуга $\varphi: [0, 1] \rightarrow g_r$, $\varphi \in C^0$, такая, что $\varphi(0) \in K_e$, $\varphi(1) \in K_e^-$ и $\exp \varphi(t) \in M$ для всякого t (деформация вектора из K_e в вектор противоположного конуса K_e^-). Доказательство теоремы сводится далее к построению такой деформации в трехмерной алгебре Ли.

Заметим, что алгебры типов I и IX не требуют доказательства — справедливость теоремы для них очевидна (в частности, алгебра типа IX не содержит вещественных двумерных подалгебр; с другой стороны, любой неплоский конус K_e порождает, как легко видеть, максимальное отношение \prec в силу компактности односвязной группы G_3). Алгебры типов II—VIII разобьем на три группы по размерности коммутанта $[g_3, g_3]$.

1) $\dim [g_3, g_3] = 1$ (типы II и III по Бьянки). Пусть одномерный коммутант $[g_3, g_3]$ определяется вектором U , а центр (также одномерный) — вектором Z (для алгебры типа II $U = Z$). Легко проверить, что множество двумерных подалгебр составляет пучки с осями U и Z (совпадающие для типа II). Если U или Z не являются внутренними векторами конуса K_e , то существует опорная к K_e плоскость одного из указанных пучков, и отношение \prec не максимально. Итак, пусть U и Z — внутренние векторы K_e ; в подалгебре h_2 , содержащей U и Z (для типа II — в произвольной подалгебре), рассмотрим вектор $\xi \in K_e$ (или $\xi \in K_e^-$), не коллинеарный U и Z . Дифференцирование $\text{ad} \xi$ алгебры g_3 образует векторное поле в g_3 , в каждой точке параллельное вектору U . Вектор этого поля обращается в ноль в точке $x \in g_3$

только тогда, когда ξ и x принадлежат одной подалгебре — следовательно, указанной выше подалгебре h_2 как единственной, содержащей вектор ξ . Поэтому $ad\xi(x) \neq 0$ для любого x , не принадлежащего h_2 , в частности, вдоль произвольной прямой $x = x_0 + sU$, $s \in R$, $x_0 \notin h_2$, параллельной U . Как легко видеть, из этого следует, что для достаточно большого $t \in R$ преобразование $Ad \exp(\xi t)$ переводит некоторый вектор конуса K_e (K_e^-) во внутренний вектор противоположного конуса K_e^- (K_e), т. е. $\exp(\xi t) \in M$.

Деформируем теперь вектор $\xi t \in K_e$ в некоторый вектор противоположного конуса так, чтобы в процессе деформации экспонента вектора не выходила из множества M . Сделать это можно многими способами; например, достаточно рассмотреть прямую $y = \xi t + sZ$, параллельную Z : если $\exp(\xi t) \in M$, то и $\exp y \in M$ (с другой стороны, эта прямая имеет непустое пересечение и с K_e , и с K_e^-).

2) $\dim [g_3, g_3] = 2$ (типы IV—VII по Бьянки).

В этом случае $[g_3, g_3]$ — коммутативная подалгебра, в чем легко убедиться, рассмотрев канонические структуры IV—VII, или непосредственно из тождества Якоби. Из этого следует, что ограничение оператора adx на $[g_3, g_3]$ для различных $x \in g_3$ отличаются друг от друга скалярными множителями. Типы IV—VII по Бьянки отличаются друг от друга характеристиками adx как оператора на 2-плоскости $[g_3, g_3]$. Множество 2-подалгебр g_3 , как легко видеть, есть множество пучков плоскостей с осями, совпадающими с инвариантными направлениями плоскости $[g_3, g_3]$ относительно adx (если таких направлений нет, единственная 2-подалгебра — $[g_3, g_3]$; если все направления g_3, g_3 инвариантны, каждая 2-плоскость в g_3 — подалгебра). Для того чтобы конус K_e определял в G_3 максимальное отношение \angle , необходимо, чтобы K_e содержал в качестве внутренних все упомянутые инвариантные направления (в случае комплексных собственных чисел adx на $[g_3, g_3]$ необходимо, чтобы $[g_3, g_3]$ содержал внутренние векторы K_e). Во всех случаях пересечение $K_e \cap [g_3, g_3]$ есть нетривиальный угол α плоскости $[g_3, g_3]$; противоположный угол α^- — пересечение $K_e^- \cap [g_3, g_3]$. Для произвольного $x_0 \in g_3 \setminus [g_3, g_3]$ одночленная группа $Ad \exp(x_0 t)$, $t \in R$ действует транзитивно на множестве направлений произвольного угла в $[g_3, g_3]$, не содержащего собственных векторов оператора adx_0 . Поскольку замкнутые углы в $[g_3, g_3]$, смежные с α и α^- , не содержат инвариантных направлений adx_0 , при достаточно большом t преобразование $Ad \exp(x_0 t)$ переводит некоторый вектор угла α (α^-) во внутренний вектор α^- (α), из чего легко заключить, что $\exp(x_0 t) \in M$. Построение деформации $\varphi(t)$, $\exp \varphi(t) \in M$, $\varphi(0) \in K_e$, $\varphi(1) \in K_e^-$ очевидно: достаточно заметить, что для рассмотренного выше вектора $x_0 t$ (для него $\exp(x_0 t) \in M$) радиус-вектор каждой точки плоскости $x = x_0 t + g$, $g \in [g_3, g_3]$ (параллельной коммутанту) также принадлежит M (поскольку $Ad \exp(x_0 t)$ и $Ad \exp g$ как операторы на $[g_3, g_3]$ совпадают); с другой стороны, эта плоскость имеет непустое пересечение с K_e и K_e^- .

3) $\dim [g_3, g_3] = 3$, $[g_3, g_3] = g_3$ (тип VIII по Бьянки).

Как уже было отмечено, в этом случае присоединенная группа изоморфна однородной группе Лоренца в пространстве Минковского

E_3 . Пусть L — инвариантный конус в $g_3 = E_3$. Множество 2-подалгебр в g_3 совпадает со множеством касательных плоскостей конуса L . Легко видеть, что конус K_e может определять максимальное отношение \prec лишь в том случае, когда L — внутренний конус K_e . Предполагая это условие выполненным, докажем, что \prec максимально.

Пусть x_0 не принадлежит замкнутому конусу L (для инвариантной формы $-x^1{}^2 - x^2{}^2 + x^3{}^2$ присоединенной группы скалярный квадрат x_0 отрицателен). Одночленная группа $\text{Adexp}(x_0 t)$ оставляет инвариантной 2-плоскость, ортогональную (относительно инвариантной формы) к x_0 , и действует транзитивно на множестве направлений каждого из двух вертикальных углов, состоящих из векторов с отрицательными квадратами в этой плоскости. В силу принятого для конусов K_e и L условия при достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ преобразование $\text{Adexp}(x_0 t)$ заведомо перемещает некоторый вектор из $K_e(K_e^-)$ во внутренний вектор противоположного конуса, т. е. $\text{exp}(x_0 t) \in M$. Построение деформации $\varphi(t) \in M$, $\varphi(0) \in K_e$, $\varphi(1) \in K_e^-$ здесь также очевидно, поскольку сказанное выше относится к каждому «пространственнополобному» (т. е. не принадлежащему конусу L) вектору x_0 . Доказательство теоремы завершено.

Рассмотрим примеры. Доказанная теорема может быть применена к любому лоренцову V_4 , группа движений которого содержит подгруппу G_3 с трехмерными времениподобными (т. е. в внутренних метриками сигнатуры $+\text{---}$) орбитами: легко видеть, что максимальность отношения \prec в G_3 влечет за собой максимальность \prec в V_4 .

Как было отмечено выше, для групп типов I и IX свойства отношения \prec очевидны; к ним можно присоединить группу типа V, в которой каждая 2-плоскость алгебры Ли — подалгебра, следовательно, для любого K_e (разумеется, отличного от всего пространства T_e) отношение \prec не максимально. Для всех остальных групп построение метрик с максимальным отношением \prec тривиально. Так, для группы типа II ($[X, Y] = Z$, $[X, Z] = 0$, $[Y, Z] = 0$), для которой множество 2-подалгебр составляет пучок с осью Z , достаточно позаботиться о том, чтобы направление Z было времениподобным. Для группы типа III множество 2-подалгебр составляет 2 пучка с осями U и Z (коммутант и центр); здесь \prec максимально тогда и только тогда, когда U и Z времениподобны. Столь же очевидны свойства отношения \prec для групп типов IV—VIII.

Разумеется, больший интерес представляют известные точные решения уравнений Эйнштейна. Предметом длительной дискуссии послужили свойства отношения \prec в лоренцовом V_4 (диффеоморфном евклидову R_4) с метрикой Геделя или типа Геделя [2]. В. И. Деннисов [4] указал пример гладкой замкнутой времениподобной дуги в таком V_4 . Однако работа С. П. Гаврилова [5] посвящена доказательству противоположного результата: односвязное V_4 с метрикой Геделя не содержит замкнутых времениподобных кривых; к сожалению, эта работа содержит очевидные ошибки (см. также [6, 7]).

Из доказанной выше теоремы легко заключить, что отношение \prec в односвязном V_4 с метрикой Геделя или типа Геделя максимально

(замкнутые времениподобные дуги проходят через любые две точки V_4).

Действительно, запишем одну из метрик Геделя в виде $ds^2 = dt^2 + 2e^{xt} dt dy + \frac{1}{2} e^{2x} dy^2 - dx^2 - dz^2$, где x, y, z, t — координаты евклидова R_4 ; для общих значений параметров, определяющих семейство метрик типа Геделя, доказательство аналогично изложенному ниже. Группа движений V_4 содержит подгруппу G_3 (действующую на времениподобных трехмерных орбитах) с операторами: $X = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$, $T = \frac{\partial}{\partial t}$. Алгебра Ли этой группы — рассмотренная выше алгебра типа III по Бьянки; направления Y и T (коммутант и центр), как видно из приведенной метрики, времениподобны, откуда и следует, что отношение \prec максимально.

Завершим вопрос о метриках Геделя еще одним примером семейства замкнутых времениподобных кривых в V_4 . С помощью преобразования $e^x = \bar{x}$ перепишем приведенную выше метрику в виде

$$ds^2 = dt^2 + 2\bar{x} dt dy + \frac{1}{2} \bar{x}^2 dy^2 - \frac{d\bar{x}^2}{\bar{x}^2} - dz^2$$

метрика определена на полупространстве $\bar{x} > 0$ евклидова R_4). Уравнения семейства $\bar{x} = b(1 - (c \sin u) / \sqrt{1 + c^2 \sin^2 u})$, $y = a(\sin 2u + \lambda \cos u)$, $z = 0$, $t = a(\sin 2u - \lambda \cos u)$.

Легко проверить, что при $\lambda > 2$ и достаточно больших значениях параметров a, b, c эти уравнения определяют времениподобную замкнутую аналитическую дугу; как легко видеть, достаточно доказать, что при указанных выражениях для \bar{x}, y, z и t форма $dt^2 + 2\bar{x} dt dy + \frac{1}{2} \bar{x}^2 dy^2$ положительная для достаточно больших значений параметров b и c .

Список литературы: 1. Улановский М. А. Однородные лоренцовы пространства, I // Укр. геометр. сб. — 1987. — Вып. 30. — С. 70—77. 2. Синг Дж. Общая теория относительности. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 432 с. 3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1976. — 496 с. 4. Денисов В. И. Оценки области причинности космологической модели Геделя // Укр. геометр. сб. — 1984. Вып. 27. — С. 26—31. 5. Гаврилов С. П. Отсутствие замкнутых причинных путей в односвязной модели вселенной Геделя: Тез. докл. всесоюз. конф.: Совр. теорет. и эксперим. пробл. теории относительности и гравитации. М., 1984. — С. 17. 6. Gödel K. An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation // Rev. Mod. Phys. — 1949. — 21. — P. 447—452. 7. Гуц А. К. Топологическая структура вселенной Геделя // Изв. вузов. Физика. — 1980. — 6. — С. 109—110.

Поступила в редколлегию 11.12.84

Известный советский геометр, старейший профессор Харьковского университета Яков Павлович Бланк внес существенный вклад в классическую дифференциальную геометрию. Еще в студенческие годы Я. П. Бланк начал научную работу в геометрическом семинаре проф. Д. М. Синцова и получил интересные результаты по неголономной геометрии. Основные научные результаты Я. П. Бланка относятся к теории поверхностей переноса и Петерсона в евклидовом и неевклидовых пространствах.

Ф. Энгельс поставил задачу: определить поверхности, являющиеся поверхностями переноса относительно двух плоскостей, и решил ее при условии, что одна сеть обобщенных кривых переноса состоит из плоских кривых. Новое решение при этих же ограничениях дал Гамбье. Полное решение проблемы дано Я. П. Бланком: им перечислены все поверхности, обладающие этим свойством [1].

С. Ли поставил и решил проблему: определить поверхности, несущие две или большее число сетей переноса. Я. П. Бланк поставил следующую проблему: определить поверхности Петерсона, несущие более одной конической сети. Число параметров, определяющих конические сети на данной поверхности, не превышает четырех; только квадратики несут ∞^4 конических сетей. Я. П. Бланком доказано, что поверхности, несущие ∞^2 конических сетей, — линейчатые и с помощью коллинеаций могут быть приведены к одному из следующих четырех видов: $z = (y/x)^n$; $z = \operatorname{arctg}(y/x)$; $z = y/x + x^2$; $z = y/x + \ln x$. Им перечислены все поверхности, несущие ∞^1 конических сетей. Поверхностей, несущих трехпараметрическое семейство конических сетей, не существует.

Н. Г. Чеботарев обобщил понятия поверхностей переноса для неевклидовых пространств и доказал, что обобщенная поверхность переноса может иметь либо континуум сетей импримитивности, либо не более четырех.

Изучению поверхностей переноса в эллиптическом, квазиэллиптическом, изотропном пространствах посвящены работы Я. П. Бланка и его учеников. В частности, Я. П. Бланком доказано, что в эллиптическом пространстве бесконечное число сетей переноса существует лишь на линейчатых поверхностях Клиффорда. Им же определены все аналогичные поверхности в изотропном пространстве. Используя идеи Я. П. Бланка, австрийский математик Штахель нашел все поверхности в квазиэллиптическом пространстве, несущие континуум сетей переноса [2].

Некоторые проблемы из этой тематики еще ждут своего решения. Например, неизвестно, какое конечное число конических сетей может быть на поверхности Петерсона.

Я. П. Бланк был замечательным педагогом. Много лет Яков Павлович читал разные математические курсы на физико-математическом, механико-математическом, радиофизическом факультетах Харьковского университета, в других институтах Харькова. Во многих уголках нашей страны можно встретить учителя средней школы, преподавателя вуза, инженера или научного работника, которые в свое время слушали лекции Я. П. Бланка и учились у него не только математике, но и доброте, человечности и жизнелюбию. Сердечность и внимание Якова Павловича навсегда запомнят все, с кем он общался, и студенты, и коллеги.

Долголетняя и безупречная научно-педагогическая деятельность Я. П. Бланка высоко оценена Родиной: он награжден орденом Трудового Красного Знамени и медалями.

Список литературы: 1. Бланк Я. П. Об одном обобщении проблемы С. Ли о поверхностях переноса // Тр. геометр. семинара. 1971. 3. С. 5—29. 2. Бланк Я. П. Поверхности переноса в неевклидовых пространствах // Пробл. геометрии. 8. Итоги науки и техники. 1976. С. 183—196

РЕДКОЛЛЕГИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

Аминов Ю. А. О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кривизном	3
Борисенко А. А. О нормальной кривизне и топологическом строении многомерных поверхностей в сферическом пространстве	14
Борисенко А. А., Ушаков В. Г. Об одном характеристическом свойстве многомерных цилиндрических поверхностей	19
Глова Н. И., Усубалиева А. С. К теории кривизны оснащенных распределений A_2 в E_3	26
Горох В. П. О двумерных минимальных поверхностях в псевдоевклидовом пространстве	36
Денисов В. И. Сопряженные точки причинных геодезических космологической модели Гёделя	47
Дискант В. И. Уточнение аналогов обобщенного изопериметрического неравенства	56
Игнатенко В. Ф. Об инвариантах одной группы, порожденной косыми отражениями в E^{11}	59
Кокарев В. Н. Оценки главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности по функциям ее условных радиусов кривизны	62
Криворучко А. И. Фигуры с недискретными семействами гиперплоскостей косої симметрии	73
Лавренченко С. А. О числе треугольных укладок вершинно-помеченного графа на торе	76
Лисица В. Т. Об одном классе n -мерных многообразий с замкнутыми геодезическими	90
Перельман Г. Я. О многогранных седловых поверхностях	100
Терновский В. А. Об алгебраических поверхностях с группой симметрий многогранника Z_{21}	108
Улановский М. А. Однородные лоренцовы пространства. 2	112
Яков Павлович Бланк — ученый и педагог (1903—1988)	118

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 31

Редактор Н. С. Калинина
Художественный редактор Т. П. Короленко
Технический редактор Г. П. Александрова
Корректор А. Г. Долгова

ИБ № 12209

Сдано в набор 19.09.87. Подписано в печать 28.03.88. БЦ 16273. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 7,5. Кр.-отт 7,75. Уч.-изд. л. 9,9. Тираж 900 экз. Изд. № 1622. Зак. 7-403. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16. 310003 Харьков, ул. Университетская, 16. Зак. 837.