Cálculo Integral en una Variable

Jeanneth Galeano Peñaloza
Claudio Rodríguez Beltrán

Facultad de Ciencias
Sede Bogotá

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Cálculo Integral en una Variable

Cálculo Integral en una Variable

Jeanneth Galeano Peñaloza
Claudio Rodríguez Beltrán

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Bogotá, D. C., Colombia, Junio de 2020

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Primera edición, 2020

ISBN XXX-XXX-XX-XXX (papel)
ISBN XXX-XXX-XX-XXX (digital)

Edición
Coordinación de publicaciones - Facultad de Ciencias
coorpub_fcbog@unal.edu.co

Corrección de estilo:
Juliana Monroy

Diseño de la colección
Leonardo Fernández Suárez

Maqueta LaTeX

Camilo Cubides

Impreso y hecho en Bogotá, D. C., Colombia

A Isabella y Alejo,
quienes complementan mi existencia.
Jeanneth

A Juan Diego, Santiago y Paola,
por todo su amor.
Claudio

Agradecimientos

Agradecemos a todos los estudiantes que han participado en los cursos de Cálculo Integral y Cálculo Integral en una Variable, por sus comentarios, dudas, ejemplos, soluciones a ejercicios y errores cometidos, porque esto nos ha permitido enriquecer nuestras formas de enseñar; esperamos haberlo plasmado en este texto, que ha sido producto de la experiencia con ellos. También a aquellos estudiantes que nos han mostrado qué era lo que estaban esperando de un libro de texto y nos dieron ideas en discusiones fuera del aula.

Nuestro agradecimiento al Departamento de Matemáticas por el apoyo necesario para culminar este escrito, que hemos venido trabajando desde hace varios años, el cual hemos podido mejorar gracias a la ayuda de los profesores que han llevado el curso en el FEM, que con sus talleres y gran cantidad de ejercicios han colaborado, particularmente a la profesora Ibeth Marcela Rubio, quien en varias ocasiones nos compartió los talleres trabajados por ella y el grupo de profesores de los cursos de Cálculo Integral en una Variable y Cálculo Integral.

El texto fue escrito en LaTeX y utilizamos el editor de texto TeXStudio, algunas gráficas fueron elaboradas con el paquete TiKz y otras con ayuda del programa de libre acceso Geogebra. También utilizamos el software libre WolframAlpha directamente de la página www.wolframalpha.com para realizar algunos cálculos numéricos. Queremos dar un agradecimiento especial a Daisy Contreras, quien realizó gran parte de las gráficas que se encuentran en formato TiKz.

Agradecemos a la Facultad de Ciencias, a la Coordinación de Publicaciones, al profesor Pedro Zambrano, coordinador de publicaciones del Departamento de Matemáticas, y al equipo editorial de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, que nos permiten publicar y divulgar este material. A los evaluadores internos y externos que hicieron una revisión exhaustiva del texto y quienes con sus comentarios y sugerencias nos permitieron mejorar su calidad.

Por último, agradecemos profundamente a nuestras familias por su paciencia, el tiempo y el apoyo brindado durante este proceso, sin ellos no hubiera sido posible culminar este trabajo.

Jeanneth Galeano Peñaloza
jgaleanop@unal.edu.co

Claudio Rodríguez Beltrán
crodriguezbe@unal.edu.co

Contenido

Introducción

Este libro ha sido pensado como texto guía para el curso Cálculo Integral en una Variable, que se imparte en las carreras de Matemáticas, Física y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia. Aunque existen en el mercado cientos de libros, quisimos escribir uno que cumpliera con los requisitos académicos de los programas de la Universidad Nacional de Colombia, en el que se recogieran todos los temas que se enseñan en el curso de un semestre y se expusieran los temas con el mismo enfoque que se tratan en la clase.

Los clásicos como *Apostol* [1] y *Spivak* [5] son excelentes libros, que todo estudiante debería tener en casa y consultar durante sus estudios de matemáticas, pero, en el caso del primero, la presentación de los temas sugiere un orden histórico y realiza un desarrollo de las técnicas de integración de manera independiente a la derivada, lo cual requiere un mayor esfuerzo y tiempo para obtener los resultados que se desean enseñar. Por otro lado, *Spivak* es más compacto, deja mucha de la teoría para desarrollar en los ejercicios y no enfoca sus esfuerzos en el cálculo de integrales ni en sus aplicaciones; sin embargo, la introducción del concepto de la integral es muy claro y formal. Otros libros como *Thomas* [7] y *Stewart* [6] son ricos en ejercicios y aplicaciones y están dirigidos a un público más amplio, pero el lenguaje con que exponen sus temas es menos formal y muchas deducciones se hacen de manera intuitiva. También consideramos muchos recursos que se encuentran en la red y que resultan de mucha utilidad como foros, blogs, páginas con contenidos relevantes, no obstante, estos fueron filtrados y adaptados.

Teniendo en cuenta todos los aspectos previamente enumerados, tratamos de abordar los temas con un lenguaje muy claro y cotidiano, pero con la formalidad que se espera que tengan los estudiantes de Matemáticas, Física y Estadística. Con este objetivo, presentamos ejemplos sencillos y otros más elaborados que, desde nuestra experiencia en aula, puedan ayudar a clarificar las ideas a los lectores. Tratamos de incluir un poco más del contenido estricto del curso con el fin de que el libro sea flexible y que al ser aplicado a varios cursos se obtengan distintos resultados. Como el libro tiene más ejemplos y aplicaciones de las que se pueden ver en una clase magistral, le servirá al estudiante para que consulte antes, durante y después de la clase, bien sea para preparar el tema o verificar que está entendiendo lo que el profesor explica, bien para realizar ejercicios adicionales a manera de retro-alimentación.

El hecho de que usemos un lenguaje claro no significa que dejemos de lado el formalismo matemático, por eso incluimos los conceptos de supremo e ínfimo, que son necesarios para definir de manera precisa el concepto de integral definida, lo que permite considerar como conjunto de funciones integrables a las funciones acotadas y no solamente a las continuas.

El contenido del libro corresponde al programa de la materia y cubre todos los temas que se espera que el estudiante conozca y manipule al terminar el curso. El primero de los cuatro grandes temas que se abordan es *la integral definida*, en esta sección se introduce el concepto de integral a través de la noción de área; se construyen las pruebas de la manera más rigurosa posible con el objetivo de preparar al estudiante para los futuros cursos de Análisis Matemático. El segundo tema abordado es *métodos de integración*, en el capítulo dedicado a ello se enseñan las técnicas que todo estudiante debería manipular con cierta habilidad y agilidad, mostrando también muchos de los "trucos"que a menudo se utilizan para transformar integrales en otras más sencillas. Seguidamente, se explora un poco en el mundo de las *aplicaciones de la integral*, sección en la que hemos tratado de mostrar al menos un ejemplo de aquellas que consideramos más prácticas, más comunes o más fáciles de entender. Hemos incluido una sección con aplicaciones a la probabilidad, algo que es poco común en los libros de cálculo, pero muy necesario para nuestros estudiantes. Por último, dedicamos un capítulo al estudio de las *sucesiones y series*, que son de gran importancia en los cursos de Ecuaciones Diferenciales, Análisis Matemático, Variable Compleja y en cursos avanzados de Estadística, así como también en Teoría de Señales, Telecomunicaciones y otros en el área de la ingeniería.

Además, el libro tiene un capítulo de preliminares que el lector puede consultar en cualquier momento. Los temas que se incluyen en este capítulo fueron escogidos porque se utilizan a lo largo del texto y consideramos que deben ser conocidos antes del curso. Pensamos también que era necesario incluir un apéndice de funciones especiales, en el cual mencionamos algunas propiedades de estas y formas de calcular sus derivadas, que resultan útiles en el estudio de algunas técnicas y estrategias de integración. El apéndice B extiende un poco la discusión sobre los errores en la integración numérica. Este es un tema extenso y es difícil abordarlo completamente en los tiempos de la clase, sin embargo, despierta interés; lo incluimos para que el estudiante pueda profundizar y comprender este tópico.

A partir de todo lo dicho previamente, consideramos que el libro también puede ser usado como texto guía para el curso Cálculo Integral dirigido a estudiantes de las Facultades de Ciencias e Ingeniería, y para el curso libre del mismo nombre. Será el profesor quien determine cuál es la profundidad con la que quiere abordar los temas que aquí se incluyen, omitiendo y/o adaptando los contenidos al público al que se dirija.

Es importante mencionar que, aunque hemos sido cuidadosos al seleccionar los ejemplos y ejercicios que se presentan, es imposible dejar fuera algunos clásicos que se encuentran en la mayoría de los libros. Adicionalmente, hay que mencionar que muchos de los ejercicios que se incluyen han sido fruto de los talleres que se preparan en el Departamento de Matemáticas, por esta razón agradecemos a los profesores que durante varios semestres han dictado el curso y han aportado su grano de arena a la realización de estos talleres. El libro dispone de un solucionario de acceso libre que en un futuro se podrá descargar de la página del Departamento de Matemáticas.

Capítulo *uno*

Preliminares

En este capítulo, expondremos varios conceptos y definiciones básicas de cálculo diferencial, así como algunos teoremas (sin demostración), que serán utilizados a lo largo del texto, y que el lector debe conocer previamente. Para una exposición más detallada se pueden consultar, por ejemplo, los libros clásicos de Apostol [1] y Spivak [5] o las Notas de Clase de Cálculo I [4]. Posteriormente, en la sección titulada *Notación sigma,* iniciaremos el estudio de las sumatorias e introduciremos la notación que usaremos a lo largo del texto.

Dados nuestros propósitos, en este texto trabajaremos únicamente con el conjunto de los números reales.

Cotas superiores e inferiores

Tomemos $A \subseteq \mathbb{R}$ y a, b números reales.

- Diremos que b es una *cota superior* de A si $x \leq b$ para todo x en A. Si además b está en A, entonces b es *el máximo de* A (es único).
- Diremos que a es una *cota inferior* de A si $a \leq x$ para todo x en A. Si además a está en A, entonces a se llama *el mínimo de* A (es único).

  Pruebe que el mínimo y máximo, en caso de existir, son únicos.
- Diremos que un conjunto es *acotado superiormente (inferiormente)* si el conjunto de cotas superiores (inferiores) es no vacío.
- Llamaremos *supremo de* A a la mínima cota superior de A y la denotaremos sup A. El supremo de un conjunto acotado lo podemos caracterizar de las siguiente forma:

$$s = \sup\ A \iff \begin{array}{l} s \textit{ es una cota superior de } A \textit{ y} \\ \textit{no existe otra cota superior de } A \textit{ menor que } s. \end{array}$$

  De manera más formal diremos que

$$s = \sup\ A \iff \begin{array}{l} s \textit{ es una cota superior de } A \textit{ y,} \\ \textit{para todo } \epsilon > 0, \textit{ existe } a \in A \textit{ tal que } s - \epsilon < a \leq s. \end{array}$$

  Esta última expresión podría leerse así: *s es* sup *A si al retroceder un ϵ encontramos puntos del conjunto*.
- Llamaremos *ínfimo de* A a la mayor cota inferior de A.

  A manera de ejercicio, sugerimos escribir la definición formal para ínf A.

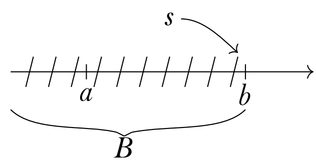
Axioma de completitud de los números reales[1]

Recordemos que el conjunto de los números racionales está conformado por todos los objetos de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$, y sabemos que un número es racional si y solo si tiene una representación decimal periódica (incluida la representación decimal finita). También conocemos de la existencia de números que no son racionales, algunos de ellos son: $\sqrt{2},\ e,\ \pi,\ \ln 2$, entre los incontables ejemplos que es posible encontrar. El conjunto de los números reales se construye completando o agregando estos números (el conjunto de números *irracionales*) a los números racionales. Si pensamos intuitivamente en los números racionales en representación decimal, siempre que ubicamos dos racionales sobre la recta real podremos encontrar un número irracional entre ellos, basta construir un número con una expansión decimal no periódica; es decir, que el conjunto de los números racionales tiene *huecos*. La propiedad que distingue al conjunto de los números reales de los racionales es importante para muchos aspectos del análisis matemático y se conoce como el axioma de completitud -o completez- de los números reales. El axioma afirma que:

dado A, un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A es acotado superiormente, entonces A tiene supremo.

Una consecuencia inmediata del axioma es que los números reales son densos: *entre dos números reales siempre hay otro número real*, por cerca que parezcan. De ahí el uso de la palabra completitud. Veamos formalmente cómo deducimos esto a partir del axioma.

Consideremos dos números reales $a \leq b$ y $B := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, el conjunto de todos los números reales que se encuentran a la izquierda de b.



Es claro que este conjunto es no vacío, porque $a \in B$ y está acotado superiormente por b, entonces, por el axioma de completez, existe $s = \sup B$. Además, s es un número real que cumple $a \leq s$ por la definición de supremo y $s \leq b$ por ser b cota superior de B. Es decir, hemos encontrado un número real s que satisface $a \leq s \leq b$.

Propiedad Arquimediana de los números reales

Afirmamos que *el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente*. Supongamos, por el contrario, que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente,

[1] Axioma: cada uno de los principios fundamentales que no necesita demostración y sobre los cuales se construye una teoría.

por el axioma de completitud existe $s = \sup\ \mathbb{N}$. Entonces, sabemos que dado $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - \epsilon < m$. Si hacemos $\epsilon = 1$, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < m$, o equivalentemente $s < m + 1$, lo cual contradice que s sea el supremo de $\mathbb{N}$.

Entonces, dado $x \in \mathbb{R}^+$, siempre es posible encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$. Aplicando este resultado a $\frac{x}{y}$ con $x, y \in \mathbb{R}^+$, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x}{y} < n$, o mejor $x < yn$, lo que se conoce como la *propiedad arquimediana de los números reales*.

Observe que este axioma es en realidad un axioma de medición, afirma que sobre los reales es posible medir con la precisión que se quiera. En otras palabras, si la unidad de medida es y, siempre es posible sobrepasar a x pegando n segmentos, cada uno de longitud y.

Continuidad

La continuidad es una propiedad muy importante en todos los ámbitos de las matemáticas, en particular, todo el tratamiento que haremos en este texto para definir la integral definida tiene como punto de partida las funciones continuas. Después se puede debilitar esta exigencia para trabajar con funciones que tienen discontinuidades esenciales. Por su parte, las discontinuidades de salto no representan un problema para la integral definida.

Que una función sea continua significa que si dos puntos en el dominio están muy cerca, sus imágenes también están muy cercanas. Precisemos este concepto:

la función f se dice **continua en** a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Formalmente decimos que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Note que el δ depende tanto de ϵ como de a, lo que nos lleva a la siguiente definición.

La función f es **uniformemente continua en un intervalo** A si para cada $\epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in A$,

$$\text{si } |x - y| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Observe la diferencia entre estos dos conceptos, en el primero se define continuidad en un punto, mientras que en el segundo se define sobre un intervalo. Estos dos conceptos no son equivalentes, pero sí es posible probar una implicación cuando se considera un intervalo cerrado. Para la demostración el lector puede consultar, por ejemplo, [5].

Teorema 1.1. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.*

Si el intervalo no es cerrado, no siempre se tiene la implicación, como se muestra a continuación.

Ejemplo 1.2. Considere $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en el intervalo $(0, 1]$. Esta función no es uniformemente continua, ya que si se toman números muy cercanos entre sí y muy próximos a 0, la diferencia de sus imágenes será tan grande como se quiera, impidiendo la continuidad uniforme. Más precisamente, por la propiedad arquimediana, dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe un entero positivo N que satisface $\epsilon < N$ y además $\frac{1}{2N} < \delta$. Entonces, si elegimos $x = \frac{1}{2N}$ y $y = \frac{1}{N}$, tenemos que

$$|x - y| = \left|\frac{1}{2N} - \frac{1}{N}\right| = \frac{1}{2N} < \delta$$

y, por otro lado,

$$\left|f\left(\frac{1}{2N}\right) - f\left(\frac{1}{N}\right)\right| = |2N - N| = N > \epsilon,$$

es decir, que dado $\epsilon > 0$, no existe $\delta > 0$ que satisfaga (1.1).

Ejemplo 1.3. Si en el ejemplo anterior consideramos $f(x) = \frac{1}{x}$, definida en el intervalo cerrado $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$, en el que n es algún entero positivo, para cualquier $\epsilon > 0$ basta con tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2n^2}$. El lector puede verificar, calculando directamente, que se satisface la condición (1.1) de continuidad uniforme.

Otro resultado importante que merece la pena que mencionemos, es la relación entre diferenciabilidad y continuidad.

Teorema 1.4. *Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.*

Recuerde que el recíproco de este teorema no es cierto. Para probarlo, considere, por ejemplo, la función valor absoluto.

Más adelante veremos que existe un resultado similar que nos da una relación entre las funciones integrables y las continuas.

Otro resultado que usaremos con cierta frecuencia se conoce como *teorema del emparedado*, del sándwich, de estricción, de compresión o de encaje. Este nos permite hallar límites comparando funciones cuyos límites desconocemos con otras cuyos límites son conocidos.

Teorema 1.5. *Sea I un intervalo abierto que contiene al punto a. Sean $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I$, excepto posiblemente en a, y, además, $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$. Entonces, forzosamente se sigue que $\lim_{x \to a} g(x) = L$.*

1. Notación sigma Σ

La notación sigma se utiliza para sintetizar la suma de una cantidad de términos. Consideremos m, n, i enteros no negativos, con $m \leq n$. Aquí el *índice* i actúa como un contador entre *el límite inferior* m y *el límite superior* n, es decir, varía desde m hasta n aumentando de uno en uno y los *términos* a_i son números reales. Entonces, podemos escribir

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

que se lee *la suma desde* $i = m$ *hasta* $i = n$ *de los* a_i.

Por ejemplo, la suma $1+2+3+4+5+6+7+8$ la escribimos de forma sintética en notación sigma como $\sum_{i=1}^{8} i$. Otros ejemplos son los siguientes.

Ejemplo 1.6. (a) $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 135.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{99} 3 = 3 + 3 + \cdots + 3 = 3 \cdot 99 = 297.$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^7 = 255.$

(d) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}.$

Propiedades de la notación sigma

Sean $c \in \mathbb{R}$ una constante, m, n, i, k enteros no-negativos, con $m \leq n$, y $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Tenemos las siguientes identidades:

(i) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i.$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i.$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i, \qquad \text{con } m \leq k < n.$

(iv) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}.$

Las primeras tres identidades provienen de la asociatividad, conmutatividad y distributividad de los números reales. La última propiedad, llamada *reindexación*, es solo una re-enumeración de los términos que se suman y la re-acomodación de los límites. Con el fin de aclarar esta última, considere la suma $\sum_{i=5}^{9} a_i = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ y tome $k = 3$. En este caso la reindexación queda

$$\sum_{i=5-3}^{9-3} a_{i+3} = \sum_{i=2}^{6} a_{i+3} = a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9,$$

que coincide con la suma inicial.

Esta última propiedad también se puede ver como un *cambio de variable*, esto es, suponga que tenemos nuevamente $\sum_{i=5}^{9} a_i$ y que cambiamos i por $j+3$, o sea, hacemos $i = j+3$, entonces en lugar de a_i escribiremos a_{j+3} y los límites cambian, así: si $i = 5$, entonces $j = 2$, y si $i = 9$, entonces $j = 6$. Con estos cambios la suma queda $\sum_{j=2}^{6} a_{j+3}$, que es exactamente lo que teníamos arriba.

Una forma rápida de recordar esta propiedad consiste en "*sumar y restar*": si al índice del término a_i le sumo k, entonces a los límites les resto k. Esto es cierto, pero debemos tener cuidado al utilizarlo, pues a menudo se cometen errores como el que se muestra a continuación.

$$\sum_{i=4}^{10} 2^{3i-1} = \sum_{i=4-1}^{10-1} 2^{3i-1+1} = \sum_{i=3}^{9} 2^{3i}. \qquad \text{ERROR!!!!}$$

Note que si hacemos el cambio de variable $i = j + 1$, los límites para j son efectivamente $j = 3$ y $j = 9$. Pero el término dentro de la suma cambia así $2^{3i-1} = 2^{3(j+1)-1} = 2^{3j+2}$, con lo cual la expresión correcta es:

$$\sum_{i=4}^{10} 2^{3i-1} = \sum_{j=4-1}^{10-1} 2^{3(j+1)-1} = \sum_{j=3}^{9} 2^{3j+2}. \qquad \checkmark$$

Algunas sumas útiles

Encontrar un patrón para una suma o hallar una fórmula para sus primeros términos ayuda en el cálculo de integrales y de series, entre otros. La siguiente suma es utilizada con frecuencia cuando se realiza el cálculo de integrales definidas por medio de la definición.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.2}$$

A continuación relatamos una anécdota que cuentan los biógrafos de Gauss[2] con respecto a la suma que acabamos de escribir.

"...A los nueve años Gauss asiste a su primera clase de Aritmética. Büttner propone a su centenar de pupilos un problema terrible: calcular la suma de los cien primeros números.

Nada más terminar de proponer el problema, el jovencito Gauss traza un número en su pizarrón y lo deposita en la mesa del maestro exclamando: Ligget se! (¡Ahí está!). Había escrito 5.050. La respuesta correcta. Ante los ojos atónitos de Büttner y del resto de sus compañeros, Gauss había aplicado, por supuesto sin saberlo, el algoritmo de la suma de los términos de una progresión aritmética. Se había dado cuenta de que la suma de la primera y la última cifra daba el mismo resultado que la suma de la segunda y la penúltima, etc., es decir: $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 101$. *Como hay 50 parejas de números de esta forma el resultado se obtendrá multiplicando* $101 \times 50 = 5.050$*..."*[3]

Regresando al presente, recuerde que para probar una afirmación que se cumple para todo número natural n es necesario usar *inducción matemática*, como mostramos a continuación.

- Cuando $n = 1$ se verifica la suma de manera trivial.
- Suponga ahora que la suma (1.2) se tiene para todo número menor a n, en particular para $n - 1$, es decir, $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} i = \left[\sum_{i=1}^{n-1} i\right] + n.$$

[2]Note la importancia y el reconocimiento que tiene Gauss en la historia de las matemáticas, lo que le dio un lugar en el billete de 10 marcos alemanes. Imagen recuperada de http://www.matematicasdigitales.com/wp-content/uploads/Billete-Gauss.jpg el 12 de Febrero de 2017.

[3]Extraído de *Gauss: El príncipe de los matemáticos, Antonio Pérez Sanz (2003).*

Utilizando la suma hasta $n-1$ (que se conoce como hipótesis de inducción), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Así, la afirmación queda probada para todo número natural $n \geq 1$. Otras sumas que se usan con frecuencia son las siguientes

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}. \tag{1.3}$$

La suma de los primeros n cuadrados la deduciremos más adelante con ayuda de la suma telescópica. La suma de los primeros n cubos se deduce de manera similar y la dejaremos como ejercicio al lector. También, a manera de ejercicio, puede probar por inducción las dos fórmulas.

La suma de las primeras potencias de un número $x \in \mathbb{R}$, conocida como *suma geométrica*, que se utilizará en capítulos posteriores y tiene aplicaciones a series de potencias y polinomios de Taylor entre otros, está dada por

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \tag{1.4}$$

Para verificarla, denotamos por $S_k = \sum_{i=0}^{k} x^i$ la suma parcial de las primeras $k+1$ potencias de x. Entonces,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + x + \cdots + x^n \\ xS_n &= x + x^2 + \cdots + x^{n+1}, \end{aligned}$$

al restar las dos expresiones obtenemos que $(1-x)S_n = 1-x^{n+1}$, despejando S_n tenemos $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, que era lo que se quería.

Ejemplo 1.7. Al usar la fórmula de la suma geométrica para calcular $\sum_{i=0}^{12} 2^i$, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{12} 2^i = \frac{1-2^{13}}{1-2} = 2^{13} - 1.$$

Ejemplo 1.8. Usando la fórmula y propiedades de las sumatorias, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{10} 2^{3k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10} 8^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-8^{11}}{1-8} = \frac{8^{11}-1}{14}.$$

Ejemplo 1.9. Cuando la suma no comienza en cero aún es posible usar la fórmula, veamos

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{15} 5^k &= \sum_{k=0}^{15} 5^k - \sum_{k=0}^{3} 5^k \\ &= \frac{1-5^{16}}{1-5} - \frac{1-5^4}{1-5} = \frac{5^{16}-5^4}{4}.\end{aligned}$$

Suma Telescópica

Considere $n+1$ términos reales y denótelos por $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Una suma de la forma $\sum_{k=1}^{n} b_k$, donde $b_k = a_{k+1} - a_k$ se llama *suma telescópica*. Observe que el valor de la suma depende del primer y último término, pues los demás se cancelan dos a dos

$$\sum_{k=1}^{n} [a_{k+1} - a_k] = a_{n+1} - a_1. \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.10. Consideremos la siguiente suma

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8} [(k+1)^2 - k^2] &= [2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \cdots + [9^2 - 8^2] \\ &= 9^2 - 1^2 = 80.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.11. Note que la suma anterior puede escribirse de la siguiente forma

$$\sum_{k=1}^{8} [(k+1)^2 - k^2] = \sum_{k=1}^{8} [k^2 + 2k + 1 - k^2] = \sum_{k=1}^{8} [2k+1],$$

que coincide con la suma de los primeros impares, empezando en 3 y finalizando en 17.

¿Puede dar una fórmula para la suma de los primeros impares, empezando en 1 y finalizando en $2n+1$?

Ejemplo 1.12. La suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$ es telescópica, ya que podemos escribir el k-ésimo término como $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Así, el valor de la suma es $1 - \frac{1}{n+1}$.

Ahora bien, utilicemos la siguiente suma telescópica y las propiedades de sumatoria para deducir la suma de los primeros n cuadrados, así

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^3 - i^3\right] &= (n+1)^3 - 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Por otro lado, si expandimos el cubo, utilizamos las propiedades (i)-(iii) y luego aplicamos la fórmula de sumatoria (1.2), tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^3 - i^3\right] &= \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + 3i + 1\\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\\ &= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n, \qquad (1.7)\end{aligned}$$

igualando las expresiones (1.6) y (1.7) obtenemos la suma de los primeros n cuadrados, como afirmamos en la fórmula de la izquierda en (1.3).

$$\begin{aligned}3\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \left[n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n(n+1)}{2} - n\right]\\ 3\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{1}{2}\left[2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n\right]\\ \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned} \qquad (1.8)$$

Ejercicios 1.1

1. Exprese las siguientes sumas en notación sigma y reindexelas de tres formas diferentes:

   a) $2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$.

   b) $4 + 6 + 8 + \cdots + 248$.

   c) $3 - 5 + 7 - 9 + 11 - \cdots + 51$.

   d) $3 + 9 + 27 + \cdots + 531441$.

   e) $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$.

   f) $1 + 3 + 7 + 15 + \cdots + 524287$.

   g) $1 + 1 + 2 + 6 + 24 + \cdots + 40320$.

   h) $1 + 3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \cdots + 3 \cdot 5 \cdots 51$.

2. Pruebe por inducción la fórmula de la suma (1.3) de los primeros n cuadrados.

3. Verifique la fórmula de suma de los primeros n cubos

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4},$$

(a) utilizando inducción; (b) por sumas telescópicas.

4. Expanda las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{2k-1}{2k+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{2^k}{(2k-1)!}$.

c) $\displaystyle\sum_{j=3}^{11} (-1)^j \sqrt{2j}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{2^k k!}$.

5. Re-indexe la suma $\displaystyle\sum_{k=5}^{100} e^{3k-4}$ de manera que empiece en $k = 1$.

6. Calcule las siguientes sumas:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{100} 5i$.

b) $\displaystyle\sum_{r=0}^{8} (2^r + 1)$.

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} (2^i + i^2)$.

d) $\displaystyle\sum_{i=3}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$.

e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k^2-1}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{7} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}$.

h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{50} 2k^2 - 3k + 4$.

7. Encuentre un entero positivo n, el más pequeño posible, de tal manera que $50 < \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

8. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2$.

9. En los siguientes ejercicios verifique la igualdad:

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}.$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}.$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$

   d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}.$

Capítulo

dos

La integral definida

1. El problema del área

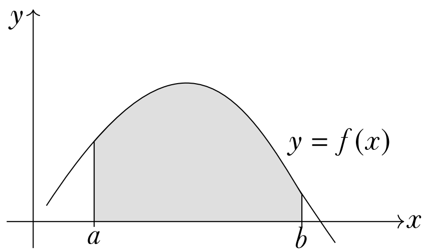
Frecuentemente, la integral definida se introduce como una herramienta para calcular el área de regiones no negativas en el plano xy. Por lo cual, se requieren ciertas nociones básicas sobre el significado de área y la forma de calcularla. Podemos asumir naturalmente que el área de una región plana[1] rectangular es el producto de dos de sus lados adyacentes. En particular, como punto de partida consideraremos el área de un cuadrado unitario como la unidad básica para medir el área.

Existen dos formas intuitivas de asignar un área a una región, una es determinando el área de las unidades cuadradas estrictamente necesarias para "cubrir" la región, otra, calculando el área de la mayor cantidad de unidades cuadradas que "caben" en la región. Tácitamente, se asume que lo que cubre es lo mismo que cabe, sin embargo existen regiones para las cuales estas dos formas de aproximar el área no coinciden (como veremos más adelante en este capítulo). Este tipo de regiones no tienen área, simplemente no se pueden medir.

Regiones como las líneas rectas o curvas no pueden contener siquiera una parte de un cuadrado, de hecho, el área de los cuadrados que la cubren se puede hacer tan pequeña como sea posible, por eso, a este tipo subconjuntos se les asigna área 0. Observe que el área es una medida no negativa, por ello, se espera que el área de la unión de dos conjuntos disyuntos sea la suma de estas.

2. El área bajo la curva

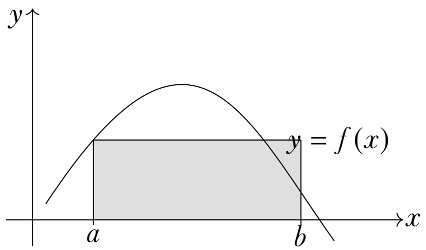
Considere una curva definida por una función $y = f(x)$, no negativa y continua sobre el intervalo $[a, b]$, como lo muestra la gráfica. ¿Es posible hallar el área de la región que se encuentra entre la curva y el eje x en $[a, b]$?



[1]Cuando hablamos de una región plana se tiende a pensar inicialmente en algún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

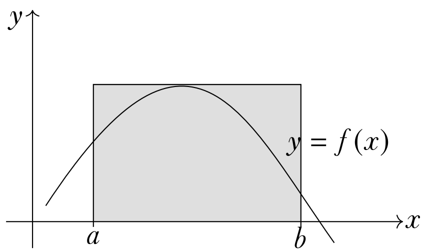
Alrededor de esta pregunta surgen algunas otras inquietudes como, por ejemplo, ¿qué pasa si la curva no es continua? ¿Qué pasa si la curva es negativa? ¿Qué tipo de discontinuidades se pueden admitir? A continuación, daremos respuesta a estos interrogantes.

Empecemos con el caso sencillo en que el dominio de la función incluye el intervalo $[a, b]$ y, para $a \leq x \leq b$, se tiene que $f(x) \geq 0$. Supongamos, además, que la función es continua en tal intervalo. La primera aproximación que podemos hacer -bastante pobre, por cierto- es usar el rectángulo que tiene como base el intervalo $[a, b]$ y cuya altura es $f(a)$. Note que una parte del rectángulo queda por fuera de la curva, pero esto no compensa la parte de la región que quedó sin cubrir.

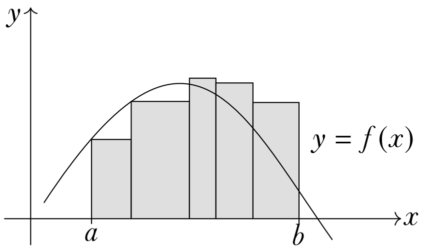


Ahora bien, si tomamos el rectángulo con altura $f(b)$, su área sería mucho menor que el área buscada, así que no consideraremos ese caso.

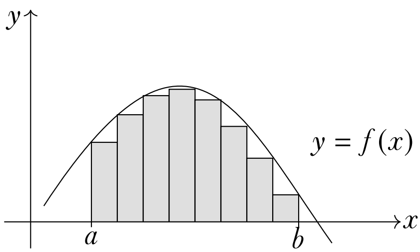
Podríamos hacer la aproximación por el rectángulo que encierra la curva, con altura el máximo de f en el intervalo, pero nos damos cuenta que en este caso tal área es más grande que el área buscada.



¿Cómo mejorar estas aproximaciones? ¿Qué tal si en lugar de un solo rectángulo hacemos varios, de distintas alturas?



En la figura anterior, vemos que algunos rectángulos quedaron totalmente incluidos en la región en cuestión, pero otros no. Podríamos desear que todos quedaran incluidos o que todos queden cubriendo la región. También que todos los rectángulos tengan el mismo ancho y que sus alturas tengan alguna relación con las imágenes de la función, por ejemplo, que la altura corresponda al valor mínimo alcanzado en cada subintervalo.



Vemos que la última parece ser la mejor de las cuatro aproximaciones, así que vamos a perfeccionarla. El primer punto a mejorar, a partir de lo observado, es que entre más rectángulos de base más pequeña mejor la aproximación. El segundo es escoger adecuadamente las alturas de los rectángulos.

Antes de hacerlo, necesitamos introducir unas cuantas definiciones que nos permitirán resolver formalmente este problema.

Sumas superior e inferior

El conjunto $\mathbb{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ se llama una **partición** del intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, el conjunto

$$\{2,\ 2.1,\ 2.5,\ 2.8,\ 3\}$$

es una partición del intervalo $[2, 3]$.

Llamaremos **longitud** de la partición a la medida del subintervalo más grande. En ese sentido, la longitud de la partición del ejemplo anterior es 0.4. Existen **particiones regulares** donde todos los subintervalos tienen el mismo tamaño, por ejemplo,

$$\{2,\ 2.2,\ 2.4,\ 2.6,\ 2.8,\ 3\},$$

en este caso cada subintervalo tiene longitud 0.2.

Hasta ahora hemos pedido que la función sea continua en un intervalo cerrado, sin embargo, en lo que sigue de este capítulo supondremos únicamente que la función f es acotada en $[a, b]$ y cuando se requiera de la continuidad haremos las consideraciones necesarias. Sea $\mathbb{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos los siguientes números

- $m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ y
- $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$,

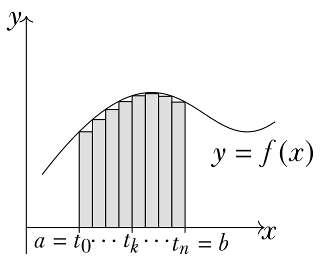
que corresponden al ínfimo y al supremo de las alturas de los rectángulos. Observe que si f se considera continua, el ínfimo coincide con el mínimo y el supremo con el máximo. Con estas cantidades definimos la

- suma inferior $I(f, \mathbb{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$ y la
- suma superior $S(f, \mathbb{P}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$.

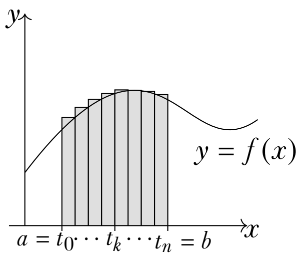
Note que estas son sumas finitas y positivas, ya que estamos suponiendo que nuestra función toma valores no-negativos en el intervalo dado, en caso contrario, estas sumas pueden ser negativas y NO tendrían el significado de área.

Dada una partición $\mathbb{P}$, siempre tenemos que $I(f, \mathbb{P}) \leq S(f, \mathbb{P})$, esto es, la suma inferior siempre es menor o igual que la suma superior. En efecto, para todo i

$$\begin{aligned} m_i \leq M_i \quad &\Longrightarrow \quad m_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}) \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$



Sumas inferiores



Sumas superiores

Ejercicio 2.1. *Considere la función $y = x$ y encuentre el valor real del área entre la curva y el eje x en el intervalo $[2, 3]$. Después encuentre las sumas superior e inferior con las dos particiones dadas, ¿qué puede decir al respecto?*

Como las particiones son conjuntos, en ocasiones una partición $\mathbb{P}_1$ puede estar contenida en una partición $\mathbb{P}_2$, en tal caso diremos que $\mathbb{P}_2$ es un refinamiento de $\mathbb{P}_1$.

Por ejemplo, $\mathbb{P}_2 = \{0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9,\ 1\}$ es un refinamiento de $\mathbb{P}_1 = \{0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.8,\ 1\}$, ambas particiones de $[0, 1]$.

El siguiente resultado afirma que si tomamos un refinamiento de una partición y calculamos las sumas inferiores, la nueva suma inferior es mayor o igual que la primera.

Lema 2.2. *Consideremos una partición $\mathbb{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y un refinamiento $\mathbb{P}_1 = \{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, u, t_k, \ldots, t_n\}$. Entonces, $I(f, \mathbb{P}) \leq I(f, \mathbb{P}_1)$.*

Demostración. Podemos dividir la partición $\mathbb{P}_1$ en dos partes. La primera considera los puntos desde t_0 hasta u y la segunda los puntos desde u hasta t_n. De acuerdo con la definición de m_k, tenemos que $m'_u := \text{ínf}\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\} \geq m_k$ y también $m''_u := \text{ínf}\{f(x) : u \leq x \leq t_k\} \geq m_k$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow m_k(t_k - t_{k-1}) &= m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) \\
&\leq m'_u(u - t_{k-1}) + m''_u(t_k - u) \\
\Longrightarrow I(f, \mathbb{P}) &\leq I(f, \mathbb{P}_1).
\end{aligned}$$

☑

Nota 2.3. *De la misma forma, podemos mostrar que si $\mathbb{P}_1$ es un refinamiento de $\mathbb{P}$, entonces $S(f, \mathbb{P}_1) \leq S(f, \mathbb{P})$. En otras palabras, al hacer refinamientos, las sumas inferiores crecen, mientras que las sumas superiores decrecen.*

El siguiente teorema afirma que una suma inferior siempre es menor o igual que una suma superior, ¡sin importar la partición que se esté considerando!

Teorema 2.4. *Dadas dos particiones (posiblemente disyuntas) $\mathbb{P}_1,\ \mathbb{P}_2$ de $[a, b]$, entonces $I(f, \mathbb{P}_1) \leq S(f, \mathbb{P}_2)$.*

Demostración. Consideremos $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$. Es claro que $\mathbb{Q}$ es un refinamiento de $\mathbb{P}_1$ y de $\mathbb{P}_2$, entonces, por el lema previo,

$$I(f, \mathbb{P}_1) \leq I(f, \mathbb{Q}) \leq S(f, \mathbb{Q}) \leq S(f, \mathbb{P}_2).$$

☑

Esto significa que $I := \{I(f, \mathbb{P})\} = \{I(f, \mathbb{P}) : \mathbb{P}$ es una partición de $[a, b]\}$ está acotado superiormente, y por el axioma de completitud de los números reales

$$¡¡\text{Existe } \sup \ I = \sup\{I(f, \mathbb{P})\}!!$$

Igualmente, $S := \{S(f, \mathbb{P})\} = \{S(f, \mathbb{P}) : \mathbb{P}$ es una partición de $[a, b]\}$ está acotado inferiormente, y por la misma razón

$$¡¡\text{Existe } \text{ínf} \ S = \text{ínf}\{S(f, \mathbb{P})\}!!$$

Mas aún $\sup \ I \leq$ ínf S. Esto nos permite dar la definición de función integrable.

Definición 2.5. *Sea f una función acotada sobre $[a, b]$. Diremos que f es* **integrable** *en $[a, b]$ si $\sup\{I(f, \mathbb{P})\} = \text{ínf}\{S(f, \mathbb{P})\}$ y definiremos el valor de la integral desde a hasta b como*

$$\int_a^b f(x)\, dx := \sup\{I(f, \mathbb{P})\} = \text{ínf}\{S(f, \mathbb{P})\}.$$

Se lee "*integral de $f(x)$ dx desde a hasta b*", los elementos de la integral son:

límite superior

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{integrando}} \, dx \longrightarrow \text{diferencial}$$

límite inferior

Nota 2.6. *No hemos exigido que la función f sea continua. La razón es que el problema en las discontinuidades de salto puede arreglarse añadiendo un punto a la partición, precisamente aquel donde ocurre la discontinuidad; de esta forma, se incluye un rectángulo adicional sin ningún inconveniente. Las discontinuidades donde hay asíntotas verticales se manejan con las integrales impropias, pero nos hemos quitado ese problema de encima suponiendo que la función es acotada.*

Nota 2.7. *Si $f(x) \geq 0$ sobre el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces el valor de $\int_a^b f(x)dx$ corresponde al área entre la curva y el eje x.*

Ejemplo 2.8. Consideremos la función constante $f(x) = c$. Observe que $m_k = M_k = c$ para cualquier partición, por lo tanto $\sup\{I(f, \mathbb{P})\} = c(b-a) = \text{ínf}\{S(f, \mathbb{P})\}$, esto es,

$$\int_a^b c \ dx = c(b - a).$$

Ejemplo 2.9. La función

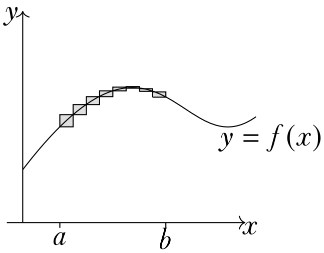
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es un poco atípica, en el sentido que es discontinua en cada punto, pero además todas sus discontinuidades son esenciales. En este caso, tenemos que

$$0 = \sup\ I < \text{ínf}\ S = 1,$$

es decir, no es integrable.

Otra forma de decir que una función es integrable es que la diferencia entre sus sumas superior e inferior puede hacerse tan pequeña como se quiera. Gráficamente queremos que el área de la región sombreada sea casi cero, lo que nos lleva a la siguiente definición.



Suma superior menos suma inferior

Definición 2.10 (Alternativa de función integrable). *Sea f acotada en $[a, b]$. Diremos que f es integrable en $[a, b]$ si y solo si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\mathbb{P}$ de $[a, b]$ tal que*

$$|S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P})| < \epsilon.$$

Note que esta definición no es práctica para hacer cálculos concretos, pues no nos da el valor de la integral, pero es útil cuando se quiere probar que una clase de funciones es integrable. A manera de ejercicio, el lector puede demostrar la equivalencia entre las definiciones 2.5 y 2.10.

Ejemplo 2.11. Realice la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 8 & \text{si } x = 2, \\ 1 & \text{si } x \neq 2. \end{cases}$

Verifiquemos que esta función es integrable en $[1, 4]$. Para ello, consideremos una partición $\mathbb{P} = \{t_0 = 1, t_1, \ldots, t_n = 4\}$ de $[1, 4]$, es claro que en cada subintervalo el ínfimo es $m_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, así que la suma inferior es

$$I(f, \mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = 4 - 1 = 3.$$

Por otro lado, en cada subintervalo el supremo es $M_i = 1$, excepto en aquel que incluya a $x = 2$. Supongamos que $t_{k-1} \leq 2 \leq t_k$ y, así, $M_k = 8$, entonces

$$\begin{aligned}
S(f, \mathbb{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} M_i(t_i - t_{i-1}) + M_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}(t_i - t_{i-1}) + 8(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1}(t_i - t_{i-1}) + (t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} (t_i - t_{i-1}) + 7(t_k - t_{k-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) + 7(t_k - t_{k-1}) \\
&= 3 + 7(t_k - t_{k-1}).
\end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo con la definición alterna de función integrable, basta verificar si existe alguna partición para la cual la diferencia de la suma superior y la suma inferior se haga tan pequeña como se quiera, esto es,

$$S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P}) = 7(t_k - t_{k-1}) < \epsilon;$$

resulta fácil encontrar una partición que satisfaga la desigualdad anterior. Dado $\epsilon > 0$, escogemos $\mathbb{P}$ tal que su longitud sea menor que $\frac{\epsilon}{7}$. Lo que muestra que la función ¡sí es integrable!

Sumas de Riemann

Las sumas de Riemann son una herramienta que permite calcular la integral de una función integrable, de una manera práctica, sin recurrir a sumas superiores e inferiores. Estas sumas nos permiten hacer la conexión entre la definición analítica de la integral y sus aplicaciones, más precisamente, en el capítulo 7 las utilizamos para definir el volumen, la fuerza, el centro de masa, entre otros, en términos de una integral. Una suma de Riemann de una función en un intervalo I depende de la partición y selección de los valores que se tomen en cada uno de los subintervalos. Cuando se consideran restricciones sobre la partición (la longitud de los subintervalos) y los puntos de los subintervalos, es posible calcular la integral como un límite, que es mucho más sencillo que el cálculo de supremos e ínfimos.

Sea f una función acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $\mathbb{P}$ una partición. Si se elige un elemento x_k^* en $[t_{k-1}, t_k]$ de forma arbitraria, la suma

$$R(f, \mathbb{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_k^*)(t_k - t_{k-1})$$

se denomina **suma de Riemann** de f para la partición $\mathbb{P}$. Como la imagen de x_k^* siempre está entre el ínfimo y el supremo, $m_i \leq f(x_k^*) \leq M_i$, una suma de Riemann, está entre las sumas inferior y superior para la misma partición

$$I(f, \mathbb{P}) \leq R(f, \mathbb{P}) \leq S(f, \mathbb{P}).$$

Esto significa que si la función es integrable, se puede encontrar una suma de Riemann tan próxima como se quiera al valor de la integral. Cuando f no es continua, las sumas inferior y superior no necesariamente son de Riemann (vea el ejemplo 2.11), pero cuando la función f es continua $I(f, \mathbb{P})$ y $S(f, \mathbb{P})$ son sumas de Riemann, ¿por qué?

Nota 2.12. *La suma de Riemann no necesariamente está en la mitad de las sumas inferior y superior.*

Sumas de Riemann con una partición regular. En este caso, la longitud de cada subintervalo es la misma y depende de la cantidad de puntos de la partición, entonces denotamos la longitud como

$$\Delta x = \Delta x_k = t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n},$$

y la suma de Riemann adquiere la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \frac{b-a}{n}. \tag{2.1}$$

Sumas de Riemann con la regla del extremo izquierdo. En este caso, se escoge $x_k^* = t_{k-1}$, entonces la forma de la suma es

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) \Delta x_k.$$

Análogamente, se tienen *sumas de Riemann con la regla del extremo derecho*. En este caso, $x_k^* = t_k$, y la forma de la suma es

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \Delta x_k.$$

Sumas de Riemann con la regla del punto medio. En este caso, $x_k^* = \frac{t_k+t_{k-1}}{2}$, y la forma de la suma es

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right) \Delta x_k.$$

También se pueden hacer combinaciones con particiones regulares. En este caso, las sumas adquieren una forma particular, por ejemplo, suma de Riemann con la regla del extremo derecho y con particiones regulares. Además, cada elemento de la partición se puede expresar en términos de Δx

$$t_0 = a,\ t_1 = a + \frac{b-a}{n},\ \ldots\ , t_k = a + \frac{k(b-a)}{n},\ \ldots, t_n = b,$$

y la suma de Riemann adquiere el aspecto

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{b-a}{n} = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

Parece algo más complicado pero realmente depende de la función que se esté considerando.

Ejemplo 2.13. Probaremos que la función $f(x) = x$ es integrable en $[0, b]$, con $0 < b$, y calcularemos su integral utilizando sumas de Riemann. Resulta conveniente considerar particiones regulares de la forma $\mathbb{P}_n = \{t_0 = 0,\ t_1 = \frac{b}{n},\ t_2 = \frac{2b}{n}, \ldots, t_{n-1} = \frac{(n-1)b}{n},\ t_n = b\}$, ya que

$$\Delta x_k = t_k - t_{k-1} = \frac{kb}{n} - \frac{(k-1)b}{n} = \frac{b}{n}.$$

Por otro lado, como f es creciente, en cada subintervalo el ínfimo es

$$m_k = f(t_{k-1}) = t_{k-1} = \frac{(k-1)b}{n},$$

y el supremo

$$M_k = f(t_k) = t_k = \frac{kb}{n}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
S(f, \mathbb{P}_n) - I(f, \mathbb{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(t_k - t_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kb}{n} - \frac{(k-1)b}{n}\right)\frac{b}{n} \\
&= \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{b^2}{n^2}n = \frac{b^2}{n} \quad \longrightarrow \quad 0 \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Como el límite es cero, concluimos que la función SÍ es integrable. Es importante recalcar la superioridad de la primera definición sobre esta última, pues no solo nos dice que la función sí es integrable, sino que además da el valor de la integral. Note también que considerar particiones regulares nos permite utilizar límites para probar que la función es integrable. Para calcular el valor de la integral usamos sumas de Riemann con las mismas particiones regulares $\mathbb{P}_n$ ($\Delta x_k = \frac{b}{n}$) y la regla del extremo derecho $x_k^* = t_k$ ($f(x_k^*) = \frac{kb}{n}$), entonces la suma adquiere la forma

$$\begin{aligned} R(f, \mathbb{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{kb}{n}\left(\frac{b}{n}\right) \\ &= \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{b^2}{2}\frac{n(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{b^2}{2} \text{ cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Como $I(f, \mathbb{P}_n) \leq R(f, \mathbb{P}_n) \leq S(f, \mathbb{P}_n)$, por el resultado anterior, se tiene que

$$\int_0^b x\, dx = \frac{b^2}{2}.$$

También podemos calcular el valor de la integral usando el área de la región triangular y verificar que efectivamente es $b^2/2$.

Para ilustrar los tipos de sumas de Riemann, hallamos el valor de la integral utilizando la regla del punto medio con particiones regulares. Consideremos, pues, como altura la imagen del punto medio del subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, que es

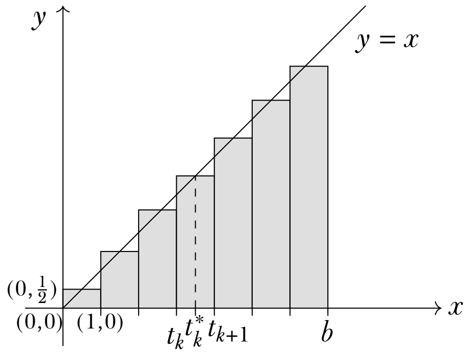
$$x_k^* = \frac{t_{k-1}+t_k}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{b(k-1)}{n} + \frac{bk}{n}\right] = \frac{b}{2n}(2k-1).$$

Recuerde que el punto medio se calcula como un promedio aritmético y tenga en cuenta que para llevar la misma notación debemos iniciar la suma en $k = 1$, así que el primer x_k^* debe ser x_1^* que corresponde al punto medio de $[t_0, t_1]$.

Ahora, siguiendo nuestro ejemplo con $f(x) = x$, tenemos que $f(x_k^*) = x_k^* = \frac{b}{2n}(2k-1)$, entonces la suma de Riemann queda

$$\begin{aligned} R(f, \mathbb{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{2n}(2k-1)\frac{b}{n} \\ &= \frac{b^2}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{b^2}{2n^2}(n(n+1)-n) = \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

¿Qué pasó con n? ¿Acaso no hace falta calcular el límite cuando n va para infinito? En este ejemplo en particular la n se canceló, esto ocurrió por la naturaleza de la función $f(x) = x$, pues, al escoger el punto medio y trazar los rectángulos, las áreas de los *triángulos* que quedaron por encima compensaron las de los triángulos que quedaron por debajo, y por eso, la suma de Riemann nos dio el valor exacto de la integral.



Ejemplo 2.14. Determinemos si la función $f(x) = x^2$ es integrable sobre el intervalo $[0, b]$ para $b > 0$. Como antes, consideremos $\mathbb{P}_n$ una partición regular de $[0, b]$, otra vez podemos escribir $t_k = \frac{kb}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, solo que en este caso $f(t_k) = t_k^2 = \left(\frac{kb}{n}\right)^2$, y tenemos que $m_k = f(\frac{(k-1)b}{n}) = (\frac{(k-1)b}{n})^2$ y $M_k = f(\frac{kb}{n}) = (\frac{kb}{n})^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |S(f, \mathbb{P}_n) - I(f, \mathbb{P}_n)| &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{kb}{n}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^2\right] \frac{b}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)b^3}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3}(n(n+1) - n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n} = 0.
\end{aligned}$$

Como el límite es cero, la función es integrable. ¿Cuál es el valor de la integral? Nuevamente, por la regla del punto medio, tenemos que $x_k^* = \frac{t_k + t_{k-1}}{2} = \frac{b}{2n}(2k-1)$ y $f(x_k^*) = \frac{b^2}{4n^2}(2k-1)^2$, entonces

$$\begin{aligned}
R(f, \mathbb{P}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b^2}{4n^2}(2k-1)^2 \left(\frac{b}{n}\right) = \frac{b^3}{4n^3} \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1) \\
&= \frac{b^3}{4n^3} \left(\frac{4n^3 + 4n^2 + n}{3}\right) = \frac{b^3}{3}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) \longrightarrow \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Así, queda demostrado que $\displaystyle\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$.

Ejemplo 2.15. Probemos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es integrable en el intervalo $[1, 2]$. Para verificarlo, nuevamente usamos sumas inferiores y superiores con particiones regulares $\mathbb{P}_n = \{t_0 = 1, \ldots, t_k = 1 + \frac{k}{n}, \ldots, t_n = 2\}$, donde $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. Por ser f una función decreciente, el ínfimo es $m_k = f(t_k) = \frac{n}{n+k}$ y el supremo es $M_k = f(t_{k-1}) = \frac{n}{n+k-1}$, entonces

$$\begin{aligned} S(f, \mathbb{P}_n) - I(f, \mathbb{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{n+k-1} - \frac{n}{n+k} \right) \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad \textit{cuando} \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

lo que quiere decir que la función es integrable. Hallar el valor de la integral en este caso no es tan sencillo, tratemos de hacerlo utilizando sumas de Riemann con una partición regular con la regla del extremo derecho:

$$\begin{aligned} R(f, \mathbb{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{n+k} \right) \left(\frac{1}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}. \end{aligned}$$

En este punto, no sabemos cuál es el resultado de esta suma ni mucho menos cómo se comporta cuando n tiende a infinito. Sin embargo, el resultado es muy interesante, pues, como veremos más adelante, el valor de la integral es $\ln 2$, así que lo que hemos obtenido es una forma de aproximar este logaritmo por medio de una suma, esto es

$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}.$$

¿Conocía usted algún otro algoritmo para calcular un logaritmo natural? Realice este mismo proceso para probar que f es integrable en $[1, 3]$ y en general en $[1, r]$, con $0 < r$, y aproxime su valor por medio de una suma de Riemann.

Ejercicios 2.2

1. Sea f una función acotada sobre el intervalo $[a, b]$. Considere $\mathbb{P}_1$ un refinamiento de una partición $\mathbb{P}$ de $[a, b]$. Demuestre que $S(f, \mathbb{P}_1) \leq S(f, \mathbb{P})$.

2. Demuestre que las definiciones 2.5 y 2.10 son equivalentes.

3. Considere la función $f(x) = 2x - x^2$ definida en $[1, 3]$ y utilizando particiones regulares $\mathbb{P}_n$, con $n = 4, 8, 16$, halle: (a) la suma inferior $I(f, \mathbb{P}_n)$; (b) la suma superior $S(f, \mathbb{P}_n)$; (c) la suma de Riemann con la regla del punto medio.

4. Aproxime[2] el valor de las siguientes integrales definidas utilizando sumas inferiores y superiores hasta que $S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P}) < 0.001$. Escriba un valor aproximado para la integral y explique las razones de su elección.

   a) $\displaystyle\int_0^3 x^2\, dx.$

   b) $\displaystyle\int_0^1 x^4\, dx.$

   c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}.$

   d) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x dx.$

5. Muestre que para $a < b$ se tiene $\displaystyle\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$

6. Muestre que $\displaystyle\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}.$

7. Muestre que para $0 < a < b$ y cualquier número real p

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} - \frac{a^{p+1}}{p+1}.$$

   Puede revisar las indicaciones que se dan en las secciones 1.23 y 5.2 de [1] y en el ejercicio 4 del capítulo 13 de [5].

8. Exprese los siguientes límites como una integral definida en el intervalo dado

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} t_i \ln(1+t_i^2)\Delta t_i,$ sobre el intervalo $[0, 3]$.

[2]Utilice una hoja de cálculo para realizar el ejercicio.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a}{(t_{i-1})^2+1}\Delta t_i$, sobre el intervalo $[0,\ 1]$, $a \in \mathbb{R}$.

9. Exprese las siguientes sumas como una integral definida en un intervalo adecuado.

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2n+i-1}$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$.

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{(n+i)^{1/2}}{n^{3/2}}$.

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{2n} \frac{1}{n}[\ln(n+i)-\ln(n)]$.

10. Aproxime el valor de la integral de $f(x)$ en el intervalo dado usando una suma de Riemann con una partición regular y tomando como punto muestra el extremo derecho de cada subintervalo, con n subintervalos.

    (a) $f(x) = 4 - 2x$ en $[0,\ 2]$, $n = 8$.

    (b) $f(x) = x^2 + x$ en $[0,\ 1]$, $n = 6$.

11. Encuentre el valor de la integral de $f(x)$ en el intervalo dado usando una suma de Riemann con la regla del extremo derecho y con una partición regular.

    (a) $f(x) = 4 - 2x$ en $[0,\ 2]$.

    (b) $f(x) = x^2 + x$ en $[0,\ 1]$.

12. Encuentre el valor de la integral usando sumas de Riemann.

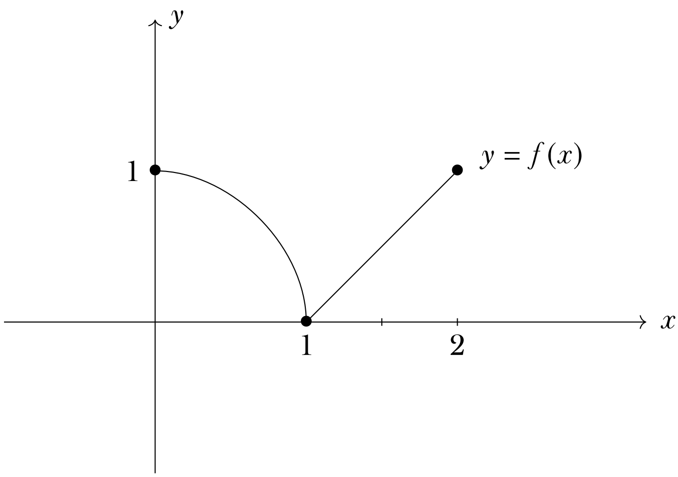
    a) $\displaystyle\int_0^1 1 - x^2 dx$.

    b) $\displaystyle\int_0^1 4 + x dx$.

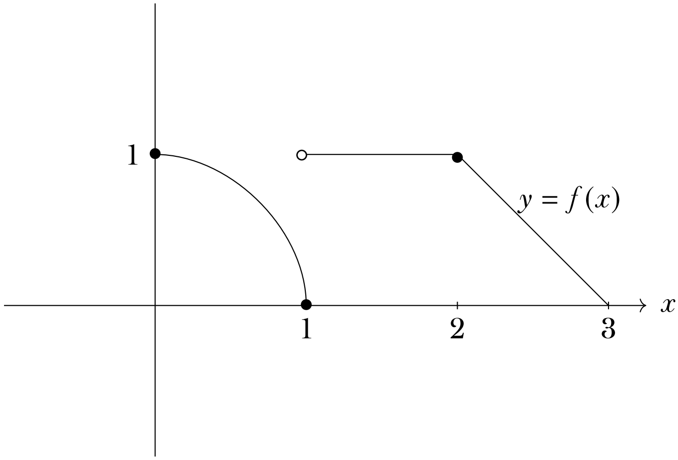
    c) $\displaystyle\int_1^2 x^2 + 2x - 1 dx$.

    d) $\displaystyle\int_1^4 x^3 dx$.

13. Suponga que la función $f(x)$, cuya gráfica se muestra adelante, es integrable en su dominio (el arco corresponde a un cuarto de circunferencia). Encuentre el valor de $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.



14. Suponga que la función $f(x)$ de la gráfica es integrable en su dominio (el arco corresponde a un cuarto de circunferencia). Encuentre el valor de $\int_0^3 f(x)dx$.



15. El **valor promedio** de una función f no-negativa en el intervalo $[a, b]$ se define como el valor de su integral dividido entre el ancho del intervalo, esto es,

$$\text{valor promedio de } f = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Encuentre el valor promedio de las funciones dadas en los ejercicios 10 y 11 de esta sección.

16. Muestre que para una función continua f toda suma superior y toda suma inferior son sumas de Riemann.

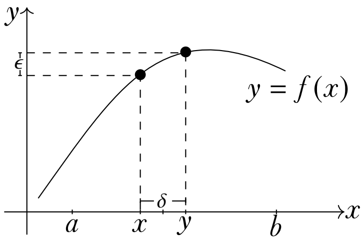
3. Propiedades de la integral

En lo que sigue, mostraremos algunas propiedades de la integral y su significado geométrico. Empecemos mostrando que ya tenemos una amplia gama de funciones integrables: las continuas.

Teorema 2.16. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que la función f es continua en el intervalo $[a, b]$. Se debe probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\mathbb{P}$ tal que

$$|S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P})| < \epsilon.$$



Como f es continua en $[a, b]$, es uniformemente continua en $[a, b]$, en otras palabras: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$,
tal que para todo $x, y \in [a, b]$, si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.
Dado $\frac{\epsilon}{b-a} > 0$, como f es uniformemente continua en $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Basta considerar una partición $\mathbb{P}$ donde $x_i - x_{i-1} < \delta$ para todo i. Entonces,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \text{ siempre que } x, y \in [x_{i-1}, x_i].$$

De hecho, en el caso extremo en que m_i es el mínimo y M_i el máximo de f en $[x_{i-1}, x_i]$ (que existen porque la función es continua sobre un intervalo cerrado), entonces

$$|M_i - m_i| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Al calcular la diferencia entre suma superior e inferior tenemos

$$\begin{aligned}
|S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P})| &\leq \sum_{i=1}^{n} |M_i - m_i|(x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) \\
&< \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\
&< \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon.
\end{aligned}$$

☑

Nota 2.17. *Es posible debilitar las condiciones del teorema anterior y exigir que la función tenga un número finito de discontinuidades de salto y la conclusión será la misma. La prueba puede hacerse por inducción en el número de discontinuidades de salto. Parte del caso base se prueba en la siguiente proposición. El paso inductivo se deja en el ejercicio 24.*

Proposición 2.18. *Sea f una función definida en $[a, b]$ y continua en $(a, b]$ con una discontinuidad de salto en a. Entonces, f es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Como f es acotada, denotamos por

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \text{y} \quad m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Probaremos que f es integrable usando la definición 2.10. Considere cualquier $\epsilon > 0$, entonces para $\frac{\epsilon}{2}$ existe un $\delta > 0$ para el cual $\delta(M - m) < \frac{\epsilon}{2}$. Por otro lado, como f es continua en $[a + \delta, b]$ existe una partición $\mathbb{P}'$ del intervalo $[a + \delta, b]$ para la cual $S(f, \mathbb{P}') - I(f, \mathbb{P}') < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, para la partición $\mathbb{P} := \{x_0 = a\} \cup \mathbb{P}'$ de $[a, b]$ se tiene que

$$\begin{aligned} S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P}) &= \delta M_0 - \delta m_0 + S(f, \mathbb{P}') - I(f, \mathbb{P}') \\ &\leq \delta(M - m) + S(f, \mathbb{P}') - I(f, \mathbb{P}') \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

donde $M_0 = \sup\{f(x) : x \in [a, a + \delta]\}$ y $m_0 = \inf\{f(x) : x \in [a, a + \delta]\}$. ☑

Cuando la discontinuidad de salto está en el extremo derecho, la prueba es análoga; el caso en que el salto está en el interior del intervalo se deja como parte del ejercicio 24 de esta sección.

Propiedades de la integral

Propiedad 1. Sean $a < c < b$, f es integrable en $[a, b]$ si y solo si f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$, además,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Si pensamos en áreas, se puede calcular el área bajo la curva desde a hasta b haciendo una parada en c.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos f integrable en $[a, b]$, entonces para $\epsilon > 0$ existe una partición $\mathbb{P}$ de $[a, b]$ tal que $|S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P})| < \epsilon$.

Si c es un punto de la partición $\mathbb{P}$, entonces $c = t_k$, para algún $k = 0, 1, \ldots, n$, y $\mathbb{P}' = \{t_0, \ldots, t_k\}$, $\mathbb{P}'' = \{t_k, \ldots, t_n\}$ son particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. Para tal ϵ, tenemos que

$$|S(f, \mathbb{P}') - I(f, \mathbb{P}') + S(f, \mathbb{P}'') - I(f, \mathbb{P}'')| = |S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P})| < \epsilon,$$

de lo cual podemos concluir que

$$|S(f, \mathbb{P}') - I(f, \mathbb{P}')| < \epsilon \text{ y } |S(f, \mathbb{P}'') - I(f, \mathbb{P}'')| < \epsilon,$$

en otras palabras, f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. En el caso en que $c \notin \mathbb{P}$, consideramos $\mathbb{Q} = \mathbb{P} \cup \{c\}$ y caemos en el caso anterior. ☑

Ejemplo 2.19. Esta propiedad resulta útil si la función a integrar, el **integrando**, está definida por casos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{1} |x| \, dx &= \int_{-2}^{0} -x \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx \\ &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Propiedad 2. (Integral en un punto)

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0.$$

Asumimos esta propiedad como una definición, ya que consideramos particiones de intervalos cuyos extremos son distintos. Sin embargo, nuestro pensamiento geométrico nos dice que estamos calculando el área (o su opuesto) entre la curva y el eje x desde a hasta a, es decir, sobre un intervalo de longitud cero, por lo tanto, las áreas de los posibles rectángulos que dibujásemos serían todas iguales a cero.

Propiedad 3. (Inversión de los límites) Para $a \leq b$,

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Recordemos que los intervalos siempre van escritos de izquierda a derecha, de menor a mayor, por lo tanto, calcular la integral desde b hasta a, sabiendo que $a \leq b$, no tendría sentido. Lo que hace esta propiedad es precisamente darle sentido a esta integral, como la integral desde a hasta b, con el signo opuesto.

Propiedad 4. (Aditividad) Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y, además,

$$\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

En efecto, sea $\mathbb{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$, llamemos I_i al intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y consideremos los siguientes números:

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) + g(x) : x \in I_i\}, \qquad M_i = \sup\{f(x) + g(x) : x \in I_i\},$$
$$m_i' = \text{ínf}\{f(x) : x \in I_i\}, \qquad M_i' = \sup\{f(x) : x \in I_i\},$$
$$m_i'' = \text{ínf}\{g(x) : x \in I_i\}, \qquad M_i'' = \sup\{g(x) : x \in I_i\}.$$

Es claro que $m_i' + m_i'' \leq m_i$ y $M_i \leq M_i' + M_i''$. Entonces,

$$I(f, \mathbb{P}) + I(g, \mathbb{P}) \leq I(f + g, \mathbb{P}) \leq S(f + g, \mathbb{P}) \leq S(f, \mathbb{P}) + S(g, \mathbb{P}).$$

Como f y g son integrables, dado $\epsilon/2$, existen particiones $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}''$ tales que

$$S(f, \mathbb{P}') - I(f, \mathbb{P}') < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } S(g, \mathbb{P}'') - I(g, \mathbb{P}'') < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si definimos $\mathbb{P} = \mathbb{P}' \cup \mathbb{P}''$, entonces

$$S(f + g, \mathbb{P}) - I(f + g, \mathbb{P}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Si hacemos particiones más finas, como f es integrable: $I(f, \mathbb{P})$ y $S(f, \mathbb{P})$ tienden al mismo valor (el valor de la integral), lo mismo sucede con $I(g, \mathbb{P})$ y $S(g, \mathbb{P})$, entonces por el teorema del emparedado

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

Nota 2.20. *¿En realidad es claro que $m_i' + m_i'' \leq m_i$? Considere las funciones $f(x) = |x - 2|$ y $g(x) = x^2$ definidas en $[0, 2]$ y los ínfimos*

$$m_f := \text{ínf}\{f(x) : x \in [0, 2]\}, \qquad m_g := \text{ínf}\{g(x) : x \in [0, 2]\} \text{ y}$$

$$m := \text{ínf}\{(f + g)(x) : x \in [0, 2]\},$$

verifique que $m_f + m_g < m$. Construya un ejemplo en el cual $m_f + m_g = m$.

Ejemplo 2.21. La aditividad puede ser usada para establecer relaciones entre integrales definidas, por ejemplo,

$$\pi = \int_0^\pi 1\, dx = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\, dx.$$

De modo que, $\pi - \int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx$. ¿Puede probar que

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta\, d\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta?$$

Propiedad 5. (Homogeneidad) Sea f integrable en $[a, b]$. Entonces, $c \cdot f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y, además,

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Demostración. Nuevamente consideremos una partición $\mathbb{P}$ de $[a, b]$, c un número real positivo, $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ y los siguientes números:

$$\begin{aligned} m_i &= \text{ínf}\{f(x) : x \in I_i\}, & M_i &= \sup\{f(x) : x \in I_i\}, \\ m_i' &= \text{ínf}\{cf(x) : x \in I_i\}, & M_i' &= \sup\{cf(x) : x \in I_i\}. \end{aligned}$$

Es evidente que $m_i' = cm_i$ y $M_i' = cM_i$. Como f es integrable, dado $\epsilon/c > 0$, existe una partición $\mathbb{P}$ tal que

$$S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P}) < \frac{\epsilon}{c},$$

entonces

$$\begin{aligned} S(cf, \mathbb{P}) - I(cf, \mathbb{P}) &= cS(f, \mathbb{P}) - cI(f, \mathbb{P}) \\ &= c[S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P})] < \epsilon. \end{aligned}$$

Además, como

$$cI(f, \mathbb{P}) = I(cf, \mathbb{P}) \leq S(cf, \mathbb{P}) = cS(f, \mathbb{P}),$$

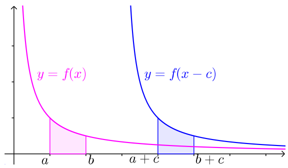
otra vez por el teorema del emparedado,

$$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx.$$

¿Qué pasa con el caso en que c sea un número negativo? ¿Qué pasa con $c = 0$? ☑

Nota 2.22. *Las propiedades de aditividad y homogeneidad juntas se conocen como propiedad de linealidad. Para el lector que halla tomado un curso de álgebra lineal o esté familiarizado con sus resultados, las propiedades **4** y **5** están afirmando que el conjunto de funciones integrables en $[a, b]$ forman un subespacio vectorial real del conjunto de funciones definidas en $[a, b]$. Al mismo tiempo, están afirmando que la integral definida en $[a, b]$ es un operador lineal de este subespacio vectorial. El resultado también se aplica al subespacio de las funciones continuas como veremos en la siguiente sección.*

Propiedad 6. (Invarianza respecto a traslación) Sea f una función integrable en $[a, b]$. Entonces,



$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx.$$

Podemos pensar esta propiedad geométricamente usando el concepto que tenemos de áreas. ¿En qué se diferencian la gráfica de $y = f(x)$ y $y = f(x-c)$? Para obtener la segunda, hemos desplazado la primera c unidades hacia la derecha, en el caso en que c es positivo (hacia la izquierda cuando $c < 0$). Entonces, ya no calculamos el área entre a y b, sino que también desplazamos el intervalo, también hacia la derecha, como lo muestra la gráfica. En total, estamos calculando el área de la misma región, solo que la hemos movido.

Ejemplo 2.23. De la identidad $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$ y la propiedad de traslación podemos deducir

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx.\end{aligned}$$

Propiedad 7. (Contracción-dilatación $k > 0$) (reflexión $k < 0$) Sea f integrable sobre $[a, b]$ y $k \neq 0$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx.$$

Demostración. Primero supondremos que $k > 0$. Como f es integrable en $[a, b]$, dado $\frac{\epsilon}{k} > 0$, existe una partición de $[a, b]$, $\mathbb{P} = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$, de modo que $S(f, \mathbb{P}) - I(f, \mathbb{P}) < \frac{\epsilon}{k}$. Ahora construimos una partición $\mathbb{P}^k$ del intervalo $[ka, kb]$ a partir de $\mathbb{P}$, que se define como

$$\mathbb{P}^k := \{t_0^k = ka < t_1^k < \cdots < t_n^k = kb\},$$

donde $t_i^k := k(t_i)$. Note que las imágenes de $f(x/k)$ para cada subintervalo inducido por $\mathbb{P}^k$ coinciden con las imágenes de $f(x)$ para los subintervalos inducidos por $\mathbb{P}$, es decir,

$$\{f(x) : x \in [t_{i-1},\ t_i]\} = \{f(x/k) : x \in [t_{i-1}^k,\ t_i^k]\}.$$

Luego los ínfimos y supremos de dichos conjuntos también son iguales

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [t_{i-1},\ t_i]\} = \text{ínf}\{f(x/k) : x \in [t_{i-1}^k,\ t_i^k]\} = m_i^k,$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1},\ t_i]\} = \sup\{f(x/k) : x \in [t_{i-1}^k,\ t_i^k]\} = M_i^k.$$

Entonces para $\epsilon > 0$, existe $\mathbb{P}^k$, descrito anteriormente, de modo que

$$\begin{aligned}
S(f(x/k), \mathbb{P}^k) - I(f(x/k), \mathbb{P}^k) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^k - m_i^k)(t_i^k - t_{i-1}^k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(kt_i - kt_{i-1}) \\
&= k \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&= k(S(f(x), \mathbb{P}) - I(f(x), \mathbb{P})) \\
&< k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Además, como

$$kI(f, \mathbb{P}) = I(f(x/k), \mathbb{P}^k) \leq S(f(x/k), \mathbb{P}^k) = kS(f, \mathbb{P}),$$

por el teorema del emparedado y la propiedad de homogeneidad, tenemos que la integral es

$$\int_{ka}^{kb} f(x/k)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx.$$

Cuando $k < 0$, considere la partición de $[kb, ka]$

$$\mathbb{P}^k := \{t_0^k = kb < t_1^k < \cdots < t_n^k = ka\},$$

donde $t_i^k := k(t_{n-i})$. De esta forma, los conjuntos que resultan ser iguales son

$$\{f(x) : x \in [t_{i-1},\ t_i]\} = \{f(x/k) : x \in [t_{n-i}^k,\ t_{n-i+1}^k]\}.$$

Entonces, sus ínfimos y supremos coinciden y, de manera análoga al caso anterior, probamos que

$$\int_{kb}^{ka} f(x/k)\, dx = (-k) \int_a^b f(x)\, dx,$$

y aplicando la propiedad 3 de inversión de los límites de integración se obtiene el resultado. ☑

Ejemplo 2.24. Asumiendo que $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$, podemos deducir que

$$\int_0^{1/3} e^{3x}\,dx = \frac{e-1}{3}.$$

Ejemplo 2.25. Asumiendo que $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2$, podemos deducir que

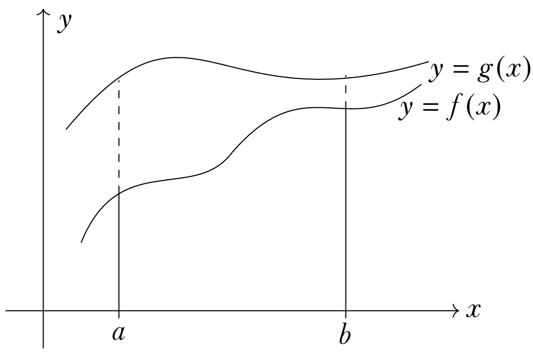
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Aplique la propiedad de contracción para $k = 1/2$ y tenga en cuenta la identidad $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$.

Propiedad 8. (Comparación) Supongamos f y g dos funciones integrables sobre $[a, b]$, con $f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Nuevamente, pensando en áreas, la afirmación es clara a partir de la gráfica.



En general, dada una partición $\mathbb{P} = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ de $[a, b]$, se tiene que

$$M_i^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \leq \sup\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i^g.$$

Esto implica que para cada suma superior de f existe alguna suma superior de g que la acota, basta con tomar la misma partición

$$S(f, \mathbb{P}) \leq S(g, \mathbb{P}),$$

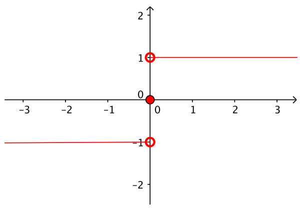
y como para cada suma superior de g existe alguna suma superior de f por debajo, entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \inf\{S(f, \mathbb{P}) : \mathbb{P} \text{ es partición de } [a, b]\}\\ &\leq \inf\{S(g, \mathbb{P}) : \mathbb{P} \text{ es partición de } [a, b]\} = \int_a^b g(x)\,dx. \quad (2.2)\end{aligned}$$

Propiedad 9. Si $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$, es decir, su gráfica se encuentra por debajo del eje x, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ corresponde al opuesto del área de la región que se encuentra entre la curva y el eje x.

Por ejemplo, consideremos $f(x) = x-2$, su gráfica es una línea recta con pendiente 1, que corta al eje y en $y = -2$. Entonces, el valor de $\int_0^2 x-2dx$ corresponde al negativo del área del triángulo que queda marcado, es decir, $\int_0^2 x-2dx = -2$.

Ejemplo 2.26. Definimos la función **signo** como $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$



Su gráfica es la función a trozos que se muestra a la izquierda. Es integrable en cualquier intervalo finito, pues solo posee una discontinuidad de salto. Podemos calcular, por ejemplo, $\int_{-2}^3 \operatorname{sgn}(x)dx = 3-2$ como el "área de la parte positiva, menos el área de la parte negativa".

Ejercicios 2.3

1. Pruebe el recíproco de la propiedad 1.

2. Encuentre el valor de las siguientes integrales usando propiedades e interpretación como áreas. Aquí $[|x|]$ denota la parte entera de x.

   a) $\displaystyle\int_0^2 2xdx.$

   b) $\displaystyle\int_{-2}^2 xdx.$

   c) $\displaystyle\int_0^4 |x|dx.$

   d) $\displaystyle\int_{-3}^2 |x|dx.$

   e) $\displaystyle\int_0^3 [|x|]dx.$

   f) $\displaystyle\int_{-3}^3 [|x|]dx.$

   g) $\displaystyle\int_{-2}^5 [|2x|]dx.$

   h) $\displaystyle\int_0^3 [|x^2|]dx.$

3. Encuentre una fórmula para $\displaystyle\int_0^n [|x|]dx$, con $n \in \mathbb{N}$.

4. Sean f y g dos funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y sean $m_i, m_i', m_i'', M_i, M_i'$ y M_i'' como en la propiedad 4. Demuestre que $m_i' + m_i'' \leq m_i$ y $M_i \leq M_i' + M_i''$. ¿Bajo qué condiciones se tiene la igualdad?

5. Realice una prueba formal de la propiedad 6.

6. Demuestre la propiedad 9.

7. Sea f integrable en $[0, b]$. Utilizando propiedades de la integral,

   (a) pruebe que si f es par, entonces $\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)dx = 2\int_0^b f(x)dx$.

   (b) Pruebe que si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0$.

8. Asuma que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$ (¿por qué?) y encuentre el valor de $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{r}} \sqrt{1-rx^2}\, dx$, donde $0 < r$, e interprete el resultado geométricamente.

9. Verifique las siguientes igualdades utilizando las propiedades de la integral e identidades trigonométricas.

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\, dx = 0$.

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = -\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\, dx$.

10. Suponga que f es una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(3x) = 7f(x)$ y, además, se conoce que $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$. Calcule $\int_0^3 f(x)\, dx$.

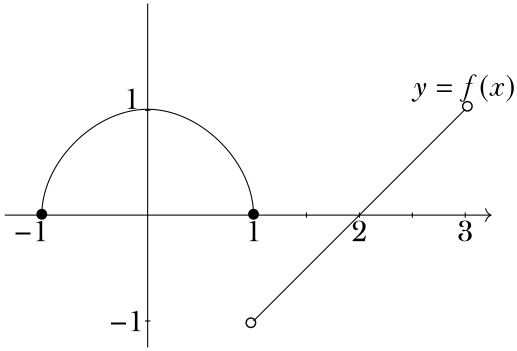
11. ¿Toda función integrable es continua? Si la respuesta es sí, haga una prueba, en caso contrario, exhiba un contraejemplo.

12. ¿Toda función acotada es integrable? Si la respuesta es sí, haga una prueba, en caso contrario, muestre un contraejemplo.

13. Pruebe que si f es una función continua e inyectiva en el intervalo $[a, b]$, entonces f^{-1} es integrable en su imagen.

14. Si f es derivable y estrictamente creciente en $[0, a]$, con $f(0) = 0$, entonces $\int_0^{f(a)} f^{-1}(x)dx = af(a) - \int_0^a f(x)dx$. Explique geométricamente por qué esto es cierto.

15. Para la función f que se muestra a continuación, encuentre el valor de $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ (el arco corresponde a media circunferencia).



16. Encuentre el valor de $\displaystyle\int_{-2}^{10} f(x)dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & -2 \leq x < 4, \\ 2 & 4 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

17. Encuentre el valor de $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{-2x}{\pi} + 2 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

18. Encuentre el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$, si existe, donde

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q}, \\ -x & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

19. Encuentre todos los valores de a para los cuales $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{a} |\operatorname{sen} x + \cos x| dx = 0$.

20. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|dx \leq \int_{-1}^{1} x^2 dx$.

b) $\displaystyle\int_{0}^{2} x(x-1)(x-2)dx = 0$.

c) $\displaystyle\int_0^1 (x-1)dx = 0.$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 |x|dx = 0.$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx.$

f) $\displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-a} \cos x\, dx$, para $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx.$

h) $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2} dx \leq \int_1^2 e^x dx.$

21. Realice la gráfica de la función $\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)$ y, a partir de ella, calcule las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)dx.$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)dx.$

c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)dx.$

d) $\displaystyle\int_0^{n\pi} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)dx,\ n \in \mathbb{N}.$

e) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)dx,\ a > 0.$

f) $\displaystyle\int_0^{n} \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)dx,\ n \in \mathbb{N}.$

22. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Si $f(x)$ es una función absolutamente integrable, esto es, la integral $\int |f(x)|dx$ existe, entonces se tiene que la integral $\int f(x)dx$ también existe.

b) Sea f una función positiva e integrable sobre el intervalo $[0, 1]$. Entonces, $\int_0^1 f(x)dx = 0$ si y solo si $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

23. Muestre ejemplos de funciones que sean continuas en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$, excepto en un número finito de puntos en los cuales tiene discontinuidades de salto, y que no tengan máximo y/o mínimo. Esta es la razón de que en la prueba de la proposición 2.18 se tomen el supremo y el ínfimo.

24. Pruebe que una función definida en $[a, b]$, continua en todo punto del intervalo, excepto en un número finito de puntos en los cuales tiene

discontinuidades de salto, es integrable. *Sugerencia*: realice la prueba por inducción en el número de discontinuidades.

a) Complete el caso base (proposición 2.18) para cualquier función que tiene una discontinuidad de salto en un punto $c \in (a, b)$. Considere un intervalo adecuado alrededor de c y $\frac{\epsilon}{3}$.

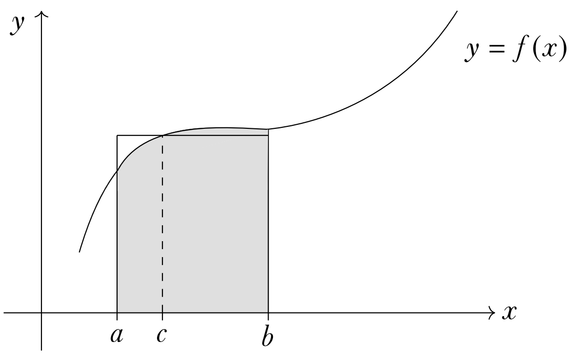
b) Plantee la hipótesis de inducción para cualquier función que tiene hasta n discontinuidades de salto.

c) Realice el paso inductivo: considere una función continua en casi todo punto de $[a, b]$, excepto en $n + 1$ puntos.

25. Utilice las propiedades de la integral para acotar el valor de $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$.

4. Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección presentaremos dos resultados fundamentales para el estudio del cálculo integral. El primero de ellos, el teorema del valor medio para integrales, que es consecuencia directa del teorema de valor intermedio para funciones continuas. Si pensamos en áreas, el teorema muestra la existencia de un punto c en el intervalo $[a, b]$ tal que el área del rectángulo con base el intervalo $[a, b]$ y altura $f(c)$ coincide con el área entre la curva y el eje x, sobre el mismo intervalo.



El segundo resultado importante, llamado Teorema Fundamental del Cálculo, en adelante notado como TFC, muestra la relación existente entre la derivada y la integral que, como sabemos, pueden considerarse procesos inversos.

Teorema 2.27 (Teorema de valor medio para integrales). *Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $a \leq c \leq b$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c).$$

Demostración. Como f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, es acotada. Sean pues $m = \text{mín}\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \text{máx}\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Entonces, para todo x entre a y b,

$$\begin{aligned} m \leq & f(x) \leq M \\ m(b-a) \leq I(f, \mathbb{P}) \leq & \int_a^b f(x)dx \leq S(f, \mathbb{P}) \leq M(b-a) \\ m \leq & \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M. \end{aligned}$$

Por el teorema de valor intermedio para funciones continuas, $f(x)$ toma todos los valores entre m y M, es decir, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

que era lo que buscábamos. ☑

Note que este teorema garantiza la existencia del punto c, pero no nos dice cómo hallarlo. Aunque esto no debe suponer mayor problema para nosotros, pues a menudo en nuestros razonamientos es suficiente saber que el punto existe, aunque no se conozca. Sin embargo, después de aprender a calcular las integrales, para encontrar el punto c basta conocer la función inversa de f.

Ahora bien, a partir de la demostración anterior, también podemos concluir que si f es integrable sobre $[a, b]$, y allí $m \leq f(x) \leq M$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{2.3}$$

Teorema fundamental del cálculo

Demos paso al teorema más importante de nuestro curso, no por nada se ha ganado el adjetivo de *fundamental*. De hecho, podríamos saltar todo el tratamiento de integrales definidas que hicimos con sumas superiores e inferiores y empezar el curso con este teorema. Pero nuestro propósito es diferente, queremos que el estudiante no solo muestre habilidad en el cálculo de integrales, sino que comprenda el núcleo del tema. Bajo esa directriz y con la intención de prepararnos para los futuros cursos de análisis matemático, hemos hecho el estudio previo.

Consideremos nuevamente una función f integrable sobre el intervalo $[a, b]$ (y, por lo tanto, acotada), definimos una nueva función así

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Note que $F(x)$ es una función que depende de la variable x, y t es una variable superficial que utiliza la función f, pero debe ser distinta de x. También observe que la función F está determinada por la constante a.

Ejemplo 2.28. Consideramos la función $F(x) := \displaystyle\int_1^x t\, dt$, donde x puede ser cualquier número real.

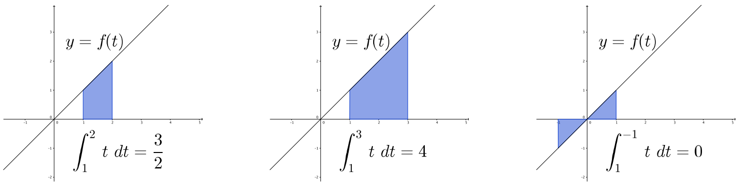


Figura 2.1: De izquierda a derecha $F(2)$, $F(3)$ y $F(-1)$. En los tres casos, el eje horizontal es el eje t.

Observe que no tiene sentido la definición $H(x) := \int_1^x f(x)\, dx$, tratemos de evaluar ¿$H(2) = \int_1^2 2\, d2$? Si considera otra definición como $H(x) := \int_1^x f(x)\, dt$, cada vez que evalúe $H(x)$ estará integrando una función constante distinta, por ejemplo, $H(3) = \int_1^3 f(3)\, dt = 2f(3)$ y, en general, se tendría $H(x) = (x-1)f(x)$.

La función $F(x)$ está determinada por su límite inferior, si lo cambiamos, obtenemos otra función. Por ejemplo, si $G(x) := \int_0^x t\, dt$, es suficiente evaluar en algún valor para darse cuenta que $F \neq G$. En la tabla de abajo presentamos las imágenes de algunos valores,

x	-2	-1	0	1	2	3
$F(x)$	$3/2$	0	$-1/2$	0	$3/2$	4
$G(x)$	2	$1/2$	0	$1/2$	2	$9/2$

Sin embargo, las funciones F y G definidas en el ejemplo anterior están relacionadas, pues ambas son continuas, derivables y sus derivadas coinciden, como lo veremos más adelante.

Suponga que $f(t)$ es una función continua en $[a, b]$, c algún número tal que $a \le c \le b$ y $h \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned} F(c+h) - F(c) &= \int_a^{c+h} f(t)\, dt - \int_a^c f(t)\, dt \\ &= \int_c^{c+h} f(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Supongamos que $h > 0$, entonces, por el teorema de valor medio para integrales, para cada h existe k_h, con $c \le k_h \le c + h$, tal que

$$\begin{aligned} \int_c^{c+h} f(t)\, dt &= [(c+h) - c]f(k_h) \\ &= hf(k_h). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Entonces, por (2.4) y (2.5),

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{hf(k_h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} f(k_h). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dado que f es continua, el último límite existe y converge a $f(c)$. Análogamente, cuando $h < 0$, el límite por la izquierda converge a $f(c)$, por lo tanto, F es derivable para cada punto c de $[a, b]$. Observe que estamos asumiendo únicamente el límite por derecha para calcular $F'(a)$ y el límite por izquierda para calcular $F'(b)$. Bajo estas consideraciones, tenemos que

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$$

y hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 2.29 (Primer teorema fundamental del cálculo, TFC-I). *Sea f continua en $[a, b]$. Entonces,*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

es una función diferenciable sobre $[a, b]$ y

$$F'(x) = f(x).$$

Tenga en cuenta las siguientes observaciones.

Nota 2.30. *Si definimos* $G(x) := \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$, *entonces*

$$G'(x) = -f(x).$$

Nota 2.31. *Si* $x < a$ *y* $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt$, *entonces*

$$F'(x) = -(-f(x)) = f(x).$$

Nota 2.32. *Considere la función* $H(x) := \int_a^{h(x)} f(t)dt$, *donde* h *es una función diferenciable de* x, *esto es,* H *es una composición de funciones, entre* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *y la función* $h(x)$. *Por lo tanto, si queremos hallar la derivada de* $H(x) = (F \circ h)(x)$, *tenemos que aplicar la regla de la cadena, así*

$$H'(x) = F'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Ejemplo 2.33. Para encontrar la derivada con respecto a x de

$$H(x) = \int_a^{2x+1} e^t dt,$$

consideramos $F(x) = \int_a^x e^t dt$ y $h(x) = 2x + 1$, entonces $H(x) = (F \circ h)(x)$ y

$$H'(x) = e^{2x+1} \cdot 2.$$

Corolario 2.34. *Sea* f *continua en* $[a, b]$ *y supongamos que existe* g *tal que* $g'(x) = f(x)$. *Entonces,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a).$$

Demostración. Sea $F(x)$ definida como antes. Entonces, por el teorema 2.29, tenemos que $F'(x) = f(x) = g'(x)$ sobre $[a, b]$. Luego,

$$F(x) = g(x) + c.$$

De donde

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = g(b) + c, \tag{2.7}$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 = g(a) + c. \tag{2.8}$$

Restando obtenemos $\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)$. ☑

En el Corolario 2.34, asumimos que f es continua en $[a, b]$, sin embargo, es suficiente considerar que f sea integrable en $[a, b]$. Este resultado no es una consecuencia del TFC-I, por lo que debemos hacer una prueba independiente.

Teorema 2.35 (Segundo teorema fundamental del cálculo, TFC-II). *Sea f integrable en $[a, b]$ y supongamos que existe $g(x)$ definida sobre $[a, b]$ tal que $g' = f$. Entonces,*

$$\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a).$$

Demostración. La prueba que presentamos a continuación se sigue de [5]. Sea $\mathbb{P} = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$ una partición de $[a, b]$ y, como antes, $m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ y $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$. Entonces, para $i = 1, \ldots, n$ y para cada x en $[x_{i-1}, x_i]$, se tiene que

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(x)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}),$$

y como $g' = f$ en $[a, b]$,

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq g'(x)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}). \tag{2.9}$$

Para algún x^* en $[x_{i-1}, x_i]$, se tiene que $g'(x^*)(x_i - x_{i-1}) = g(x_i) - g(x_{i-1})$ a causa del teorema de valor medio para funciones derivables. Entonces, sumando el término central en (2.9) y sumando para cada $i = 1, \ldots, n$, llegamos a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(x_i) - g(x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

pero esto no es más que

$$I(f, \mathbb{P}) \leq g(b) - g(a) \leq S(f, \mathbb{P}),$$

es decir, $g(b) - g(a)$ está en el medio de cualquier suma inferior y cualquier suma superior, y ya que f es integrable debe coincidir con el valor de la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a).$$

☑

Ejercicios 2.4

1. En la prueba del TFC-I, considere que $h < 0$ y pruebe que
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

2. Halle un valor de a adecuado para que se satisfaga la igualdad.

   a) $\displaystyle\int_a^x 2t\, dt = x^2 - 1.$

   b) $\displaystyle\int_a^x 2t\, dt = x^2 - 2.$

   c) $\displaystyle\int_a^x e^t\, dt = e^x - 1.$

3. ¿Es posible hallar un valor real para a de modo que $\displaystyle\int_a^x 2t\, dt = x^2 + 1$?

4. Use las funciones dadas para encontrar el valor de las integrales aplicando el TFC-II.

   a) $\displaystyle\int_2^4 2x\, dx,\ g(x) = x^2.$

   b) $\displaystyle\int_{-1}^3 3x^2 dx,\ g(x) = x^3.$

   c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta,\ g(\theta) = \operatorname{sen}\theta.$

   d) $\displaystyle\int_1^3 -\frac{1}{x^2} dx,\ g(x) = \frac{1}{x}.$

   e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{2\sqrt{x}},\ g(x) = \sqrt{x}.$

   f) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^t dt,\ g(t) = e^t.$

   g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},\ g(x) = \arctan x.$

   h) $\displaystyle\int_0^2 (\ln 10) 10^x dx,\quad g(x) = 10^x.$

   i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec x \tan x dx,\ g(x) = \sec x.$

5. Encuentre el valor de la integral.

   a) $\displaystyle\int_1^4 (5 - t + 2t^2) dt.$

   b) $\displaystyle\int_0^1 (3 + x\sqrt{x}) dx.$

   c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}.$

   d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$

6. Utilice el TFC para probar que
$$\int_a^b x^n\, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}, \qquad n \neq -1.$$

7. Encuentre las siguientes derivadas.

a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^x \frac{1+t}{1-t}dt.$

b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_2^{x^2} \frac{1+t}{1-t}dt.$

c) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{1+t}{1-t}dt.$

d) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2+1}^{4} \operatorname{sen}(t^2+1)dt.$

e) $\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_1^{\frac{2s+1}{5-s}} \frac{r^2+1}{r^2+2r-1}dr.$

f) $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_{3y+1}^{y^2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta+1}d\theta.$

g) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}dt.$

h) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{\int_1^x \operatorname{arc\,sen} t^2 dt} \operatorname{arc\,sen} t^2 dt.$

i) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{\operatorname{sen}^3 x} t^4\, dt.$

j) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b \frac{x}{1+t^2+t^4}\, dt.$

k) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+2t+1}{t^2-4}dt.$

l) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}dt.$

8. Encuentre $\frac{d}{dx}\left(F^{-1}(x)\right)$, donde $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt.$

9. Derive la función $F(x)$ con respecto a x, asuma que f es integrable en el intervalo dado.

a) $F(x) = \int_1^x xf(t)dt.$

b) $F(x) = \int_0^x f(x)dt.$

c) $F(x) = \int_0^x f'(t)dt.$

10. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Sea $f(x)$ una función positiva y continua. Entonces $\phi(x) = x\int_0^x f(t)dt$ es creciente para $x \geq 0$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt}{x} = 1.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{t^2+1}\, dt}{\int_0^x t\, dt} = 1.$

Capítulo

tres

La integral indefinida

Suponga que $F(x)$ es una función derivable en un intervalo abierto (a, b), entonces la derivada es una nueva (y única) función $f(x)$ definida en el mismo intervalo, que denotamos por $F'(x)$ o $\frac{d}{dx}F(x)$. Otra forma de expresar la relación entre F y f es diciendo que F ***es una antiderivada de*** f. Sin embargo, si una función f tiene una antiderivada, entonces tiene tantas antiderivadas como números reales, basta sumar una constante real a una antiderivada para obtener otra. Por ejemplo, $F(x) = x^2$ es una antiderivada de $f(x) = 2x$ y $F_3(x) = x^2+3$, $F_\pi(x) = x^2+\pi$ y $F_{-\sqrt{5}}(x) = x^2 - \sqrt{5}$ son todas antiderivadas de f, en general, $F_C(x)$, donde C representa un número real. El conjunto de todas las antiderivadas de una función f se llama ***integral indefinida*** y se denota por

$$\int f(x)\, dx. \tag{3.1}$$

Cuando se conoce al menos una antiderivada F de f, la integral indefinida se expresa como

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

donde C recorre el conjunto de números reales.

En estos términos, la primera parte del teorema fundamental del cálculo nos dice que toda función f integrable en $[a, b]$ posee una antiderivada que se define como

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt, \tag{3.2}$$

y esta función F está determinada por su límite inferior. Volviendo a nuestro ejemplo anterior, una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F_{-4}(x) = x^2 - 4$ y esta corresponde a $\int_2^x 2t\, dt$. Halle $F_{-1}(x)$ en la forma (3.2), ¿puede encontrar una antiderivada de f definida como en (3.2) que corresponda a $x^2 + 1$?, ¿es posible que $\int_a^x 2t\, dt = \int_b^x 2t\, dt$ con $a \neq b$?

Por otra parte, el TFC-II provee una manera de hallar el valor de una integral definida de una función integrable f siempre que se conozca una antiderivada (cualquiera) de esta. Por eso, en adelante vamos a exponer varias técnicas para calcular antiderivadas e integrales indefinidas.

Por ejemplo,

$$\int 2x\, dx = x^2 + C,$$

es la integral indefinida de $f(x) = 2x$ y $g_1(x) = x^2 + 3$, $g_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}$, $g(x) = x^2$ son antiderivadas. Usando el TFC-II y cualquier antiderivada, podemos hallar el valor de la integral definida

$$\begin{aligned} \int_2^3 2x\,dx &= g_2(3) - g_2(2) = \left(9 + \frac{1}{2}\right) - \left(4 + \frac{1}{2}\right) = 5 \\ &= g(3) - g(2) = 9 - 4 = 5 \\ &= g_1(3) - g_1(2) = (9+3) - (4+3) = 5. \end{aligned}$$

El valor de la integral es independiente de la antiderivada que escojamos.

Nota 3.1. *Observe que la antiderivada y la integral definida son distintas. El problema de hallar la antiderivada de una función f consiste en encontrar una función F tal que $F' = f$. Mientras que la integral definida de f desde a hasta b es un número real. Por supuesto, si conocemos la antiderivada, es muy fácil hallar el valor de la integral definida, pues por el TFC solo necesitamos evaluar en los límites de integración.*

Ejemplo 3.2. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx &= [-\cos x]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Observe la notación que hemos usado para decir que la función $-\cos x$ se evalúa en b y en a y se hace luego la diferencia.

Las propiedades de la integral indefinida son consecuencia de las propiedades de la derivada. Si F es una antiderivada de f y c es una constante, entonces $[cF(x)]' = cF'(x) = cf(x)$, es decir, cF es una antiderivada de cf. Se tienen entonces las siguientes propiedades para la integral indefinida.

(i) $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

1. Algunas integrales indefinidas (inmediatas)

Antes de estudiar las técnicas para hallar antiderivadas, vamos a repasar las derivadas de funciones típicas que son estudiadas en un curso ordinario de cálculo diferencial y las vamos a expresar en términos de integrales indefinidas que llamaremos *inmediatas*. En las siguientes integrales $b > 0$, $n \neq -1$ y k representan constantes.

1. $\displaystyle\int k\,dx = kx + C.$
2. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C.$
4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$
5. $\displaystyle\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln\ b} + C.$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$
7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$
8. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$
9. $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C.$
10. $\displaystyle\int \sec x\ \tan x\,dx = \sec x + C.$
11. $\displaystyle\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C.$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C.$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C.$

13') $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arc\,cos} x + C.$

14. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C.$
15. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C.$

¿Por qué es necesario el valor absoluto en 3.?

2. Problemas con condiciones iniciales

Existe una gran variedad de problemas que involucran antiderivadas y en los que se dan condiciones iniciales para responder una pregunta en concreto, lo que hace necesario encontrar la constante de integración, que hasta ahora parece desempeñar un papel secundario. Veamos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 3.3. Ecuación de una curva dada la pendiente. Suponga que se conoce la pendiente de la recta tangente a una curva $y = f(x)$, como función de x, y se quiere hallar la ecuación de dicha curva.

Recuerde que en el curso de cálculo diferencial se proponía el problema opuesto, esto es, dada una curva, encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto dado. Para resolverlo, se deriva y se evalúa en el punto en mención. Es este caso, haremos lo contrario, esto es, integraremos la pendiente para encontrar la función. Más precisamente, si la pendiente está dada por $m(x) = 2x^5$, entonces lo que sabemos es que $\frac{dy}{dx} = 2x^5$ ó, escrito de otra forma, $dy = 2x^5dx$, lo que nos lleva a la solución

$$y = \frac{x^6}{3} + C. \tag{3.3}$$

Pero observe que esta solución es una familia de curvas, solo cuando hallemos la constante C tendremos la única curva que pasa por un punto dado y satisface la condición. Esto es, hace falta una *condición inicial* para resolver el problema. Suponga que la curva buscada pasa por $(1, 4)$. Si sustituimos estos valores en la ecuación (3.3), obtenemos $C = \frac{11}{3}$ y, así, la curva buscada es $y = \frac{x^6}{3} + \frac{11}{3}$, que a menudo se escribirá como $3y = x^6 + 11$.

Es frecuente que en la literatura se hable de *la pendiente de la curva*, que puede considerarse un abuso del lenguaje, pero no debe suponer mayor problema, lo que se quiere decir es *la pendiente de la recta tangente a la curva*.

Ejemplo 3.4. Crecimiento de población. La tasa de crecimiento dP/dt de una población de bacterias es proporcional a $t^{3/2}$, donde P es el tamaño de la población y t es el tiempo en días, $0 \leq t \leq 10$. El tamaño inicial de la población es de 20 bacterias. Después de 4 días, la población ha crecido hasta 180 individuos. Estime el tamaño de la población después de 9 días.

De acuerdo con la información dada, planteamos la ecuación $\dfrac{dP}{dt} = kt^{3/2}$, con condiciones iniciales $\begin{cases} t = 0 & P = 20, \\ t = 4 & P = 180. \end{cases}$

Reescribimos la ecuación "*pasando a multiplicar dt*" e integramos a ambos lados

$$\begin{aligned} dP &= kt^{3/2}dt \\ \int dP &= k\int t^{3/2}\,dt \\ P &= k\frac{2}{5}t^{5/2} + C. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Hallamos las constantes usando las condiciones iniciales así:

- Sustituimos $t = 0,\ P = 20$ y obtenemos

  $$20 = C,$$

  luego

  $$P = \frac{2k}{5}t^{5/2} + 20.$$

- Sustituimos $t = 4,\ P = 180$ para hallar k:

$$\begin{aligned} 180 &= \frac{2k}{5}4^{5/2} + 20 \\ 160 &= \frac{64k}{5} \\ \frac{25}{2} &= k, \end{aligned}$$

así, la expresión (3.4) para la población de bacterias queda

$$P = \frac{2}{5}\left(\frac{25}{2}\right)t^{5/2} + 20 = 5t^{5/2} + 20.$$

Para responder la pregunta, reemplazamos $t = 9$ y obtenemos

$$P = 5 \cdot 9^{5/2} + 20 = 1235,$$

esto es, después de 9 días, la población será de 1235 bacterias.

Ejemplo 3.5. Movimiento vertical uniformemente acelerado. Una pelota es lanzada hacia arriba desde una altura de 2 metros con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Determine la altura máxima alcanzada.

Usaremos las conocidas ecuaciones de la física para aceleración y velocidad $a = \frac{dV}{dt}$ y $V = \frac{dS}{dt}$, donde a, V y S representan la aceleración, velocidad y posición, respectivamente. La condición dada dice que en el tiempo $t = 0$ se sabe que $S = 2$ y $V = 10m/s$. Además, sabemos que $\frac{dV}{dt} = -9.8m/s^2$, entonces

$$\begin{aligned} dV &= -9.8dt \\ V &= -9.8t + C, \end{aligned}$$

sustituimos $t = 0$ y $V = 10$ para hallar la constante C:

$$\begin{aligned} 10 &= -9.8(0) + C \\ 10 &= C, \end{aligned}$$

esto es,

$$V = -9.8t + 10.$$

Como $V = \frac{dS}{dt} = -9.8t + 10$, tenemos

$$\begin{aligned} dS &= (-9.8t + 10)dt \\ S &= -4.9t^2 + 10t + C_1. \end{aligned}$$

Sustituimos $t = 0,\ S = 2$, con lo cual $2 = C_1$, y así

$$S = -4.9t^2 + 10t + 2.$$

Ahora bien, la pelota alcanza su máxima altura cuando la velocidad es cero, esto es, resolvemos la ecuación $0 = -9.8t + 10$, lo que nos da $t = \frac{10}{9.8} = 1.02s$. Entonces, su máxima altura es

$$S_{max} = -4.9(1.02)^2 + 10(1.02) + 2 = 7.10204m.$$

Ejemplo 3.6. Depreciación. La tasa de depreciación dV/dt de una máquina es inversamente proporcional al cuadrado de $(2t + 1)$, donde V es el valor de la máquina t años después de que se compró. El valor inicial de la máquina fue de 45000 dólares, y su valor decreció 13000 dólares en el primer año. Estime su valor después de 7 años.

La ecuación diferencial que expresa la tasa de depreciación es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k}{(2t + 1)^2},$$

y las condiciones iniciales que da el problema son

$$\begin{cases} t = 0, & V = 45000 \\ t = 1, & V = 32000. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} dV &= \frac{k}{(2t + 1)^2} dt \\ V &= \frac{k}{2t + 1} + C. \end{aligned}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, tenemos que $k = 19500$ y $C = 25500$, luego

$$V = \frac{19500}{2t + 1} + 25500.$$

Así que el valor de la máquina después de 7 años es

$$V = \frac{19500}{15} + 25500 = 26800 \text{ dólares}.$$

Note que al hacer la integral hemos omitido el signo menos y el 2, esto es, en lugar de escribir $V = \frac{k(2t+1)^{-1}}{-2} + C$, permitimos que la constante k absorbiera el -2 en el denominador. Esto no debe suponer ningún problema para el estudiante que haya decidido dejar el signo menos, pues al final el valor de la constante debe coincidir.

Ejemplo 3.7. Rendimiento financiero. Supongamos que P es una cantidad de dinero que se presta para una inversión. Usualmente, por esta cantidad, se percibe un rendimiento financiero o interés, un pequeño porcentaje sobre el dinero adeudado, que denotamos por $(100 \times i)\,\%$, cada cierto período de tiempo m. Luego del primer período $m = 1$, el saldo de la deuda es $P + i \cdot P = (1 + i) \cdot P$, después del segundo período $m = 2$, el saldo sería $(1 + i)^2 \cdot P$, y así sucesivamente, en el n-ésimo período $m = n$, la deuda asciende a $(1 + i)^n \cdot P$. Es decir, que la deuda del siguiente período crecerá en la misma proporción. Este tipo de rendimiento se aplica después de la terminación de cada mes y de forma discreta. Abajo vamos a explicar, siguiendo las consideraciones anteriores, cómo hallar una función continua que arroje el interés en cualquier instante de tiempo.

Ahora consideramos que el tiempo es una variable continua con el fin conocer la deuda en cualquier momento, además, seguiremos la regla de que la deuda crece proporcionalmente al monto adeudado. Si $y = f(t)$ representa la deuda en el instante t, entonces

$$f(0) = P, \qquad \text{la deuda inicial,} \tag{3.5}$$

$$\frac{df}{dt} = rf(t), \qquad \text{el creciemiento de la deuda es proporcional a la deuda actual.} \tag{3.6}$$

Como f representa una deuda en continuo crecimiento, podemos asumir que $f \neq 0$, además, si satisface la ecuación (3.6), también debe satisfacer

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = r.$$

El lado izquierdo de esta ecuación es la derivada de $\ln(f(x))$, por eso, si calculamos la integral indefinida a ambos lados, entonces obtenemos

$$\ln(f(t)) = rt + C,$$

y despejando finalmente f, obtenemos la forma general que debe tener una función que satisface (3.6)

$$f(t) = Ke^{rt},$$

donde la constante es $K = e^C$. La condición (3.5) se utiliza para hallar una única función, ya que $P = f(0) = Ke^{r0} = K$, es decir, que la función que arroja el valor de la deuda en cualquier instante de tiempo t es $f(t) = Pe^{rt}$. Para hallar el valor de r, basta evaluar $f(1) = P(1 + i) = Pe^r$, es decir, que $r = \ln(1 + i)$.

Ejercicios 3.2

1. Determine la integral indefinida. Suponga $a \neq 0$.

a) $\displaystyle\int 5s\, ds.$

b) $\displaystyle\int 4x\, dt.$

c) $\displaystyle\int 2r^5\, dr.$

d) $\displaystyle\int 9\, dt.$

e) $\displaystyle\int \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\;\, dx.$

f) $\displaystyle\int x^4 - \frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} - 2\, dx.$

g) $\displaystyle\int v(v^2+2)^2\, dv.$

h) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\, dx.$

i) $\displaystyle\int \frac{2}{r-1}\, dr.$

j) $\displaystyle\int \theta - \csc\theta \cot\theta\, d\theta.$

k) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x\, dx.$

l) $\displaystyle\int \tan^2 x\, dx.$

m) $\displaystyle\int e^{ax}\, dx.$

n) $\displaystyle\int \operatorname{sen} a\theta\, d\theta.$

ñ) $\displaystyle\int \cos ax\, dx.$

o) $\displaystyle\int \sec^2 ax\, dx.$

p) $\displaystyle\int \csc^2 ax\, dx.$

q) $\displaystyle\int \sec ax\;\tan ax\, dx.$

r) $\displaystyle\int \csc ax \cot ax\, dx.$

s) $\displaystyle\int \frac{a}{1+a^2x^2}\, dx.$

t) $\displaystyle\int \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}\, dx.$

u) $\displaystyle\int -\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}} dx.$

v) $\displaystyle\int \operatorname{senh} ax\, dx.$

w) $\displaystyle\int \cosh ax\, dx.$

2. Use propiedades de la integral y el TFC-II para calcular las integrales definidas.

a) $\displaystyle\int_1^3 1 + 2x + 4x^3\, dx.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 2x - e^x\, dx.$

c) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t}\;(1+t)\, dt.$

d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt.$

e) $\displaystyle\int_{-2}^2 \left(4y^3 + 2y\right) dy.$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\operatorname{sen} x|\, dx.$

3. Encuentre el valor de $f(2)$.

   a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = x^2\ (1 + x)$.

   b) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\, dt = x^2\ (1 + x)$.

4. Halle una función que satisfaga las condiciones dadas.

   a) $f(x) = 2f'(x)$ y $f(0) = 3$.

   b) $f(x) = xf'(x)$ y $f(1) = e$.

5. Suponga que la pendiente de la curva $y = f(x)$ es $3x^2$. Encuentre la ecuación de la curva si se sabe que pasa por el punto

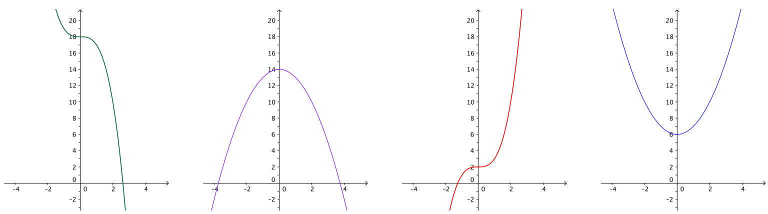
   a) $(1, 1)$.   b) $(1, 5)$.

6. Suponga que una partícula se mueve con función de posición $s(t)$, velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$. Dadas las condiciones iniciales, encuentre la posición.

   a) $a(t) = 10m^2/s,\ v(0) = 5m/s,\ s(0) = 3m$.

   b) $a(t) = (t^2 + 1)m^2/s,\ v(0) = 4m/s,\ s(0) = 1m$.

7. Determine cuál de las siguientes gráficas corresponde al problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, $y(2) = 10$.



8. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) Si f es par, entonces una de sus antiderivadas es una función impar.

   b) Si f es impar, entonces una de sus antiderivadas es una función par.

   c) Si f es par, entonces todas sus antiderivadas son impares.

   d) Si f es impar, entonces toda antiderivada de f es una función par.

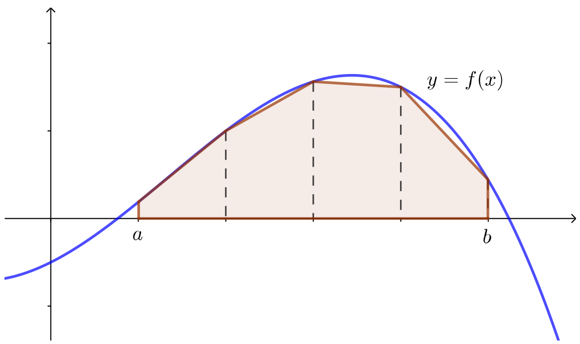
Capítulo *cuatro*

Integración numérica

¿Es posible encontrar la antiderivada de e^{x^2}? ¿de $\operatorname{sen}(x^2)$? ¿de $\frac{1}{\ln x}$? Después de pensarlo un rato y hacer algunos cálculos, nos damos cuenta que no es fácil encontrar una antiderivada de estas tres funciones. De hecho, no existen, esto es, hay funciones que no tienen antiderivada. Pero si lo que queremos es calcular una integral definida, usamos un método numérico para aproximarla.

1. Regla del trapecio

Consideremos $y = f(x)$ una función positiva y continua sobre el intervalo $[a, b]$. Tomemos además una partición $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$. Aproximamos $f(x)$ por una poligonal, como lo muestra la figura, y calculamos el área de cada **trapecio**, luego sumamos las áreas y obtenemos una aproximación para el área entre la curva y el eje x desde a hasta b.



Hacemos la partición regular, de modo que la longitud de cada subintervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

El área del trapecio que tiene como base el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es

$$A_i = \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)\Delta x,$$

y si escribimos y_k en lugar de $f(x_k)$, tenemos

$$A_i = \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right)\Delta x.$$

Sumando todas las áreas, obtenemos

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{\Delta x}{2}(y_0 + y_1) + \frac{\Delta x}{2}(y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{2}(y_2 + y_3) + \cdots + \frac{\Delta x}{2}(y_{n-1} + y_n) \\ &\approx \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right). \end{aligned}$$

Teorema 4.1 (Regla del trapecio). *Sea f una función acotada sobre el intervalo $[a, b]$. Podemos aproximar $\int_a^b f(x)dx$ por medio de*

$$\boxed{T_n = \tfrac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right),}$$

donde $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y donde $y_k = f(x_k)$.

Note que hemos enunciado el teorema sin imponer condiciones a la función f, aunque al inicio del capítulo dijimos que f debía ser positiva y continua sobre el intervalo. La positividad se requiere, puesto que estamos pensando en áreas, pero una vez obtenida la fórmula nos damos cuenta que no es necesaria. Lo mismo pasa con la continuidad, pues si la función tiene una discontinuidad de salto, digamos en $x = d$, se trabajan por separado los intervalos $[a, d]$ y $[d, b]$. Lo que sí es necesario es que la función sea acotada, pues discontinuidades de tipo infinito no se pueden manejar en estas sumas finitas.

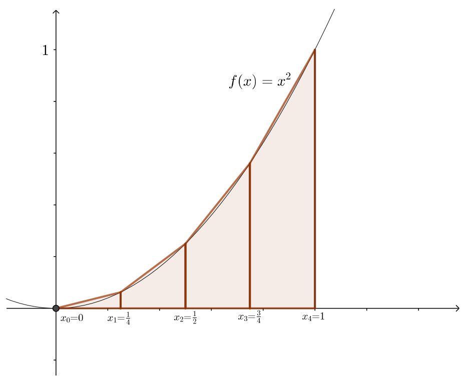
Empezamos aplicando el método a una función cuya antiderivada es conocida, por lo tanto, podemos comparar el valor que obtenemos por medio de la regla del trapecio con el valor exacto de la misma.

Ejemplo 4.2. Aproximemos $\int_0^1 x^2dx$ usando la regla del trapecio, con $n = 4$. En este caso, tenemos que $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, los x_k son

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1,$$

y los correspondientes y_k son

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_1 &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \\ y_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \\ y_3 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, \\ y_4 &= (1)^2 = 1. \end{aligned}$$



Entonces, aplicando la fórmula, tenemos

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{\Delta x}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(0 + 2\left(\frac{1}{16}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{9}{16}\right) + 1\right) = \frac{11}{32} = 0.34375. \end{aligned}$$

¿Cuál es el valor real? Note que esta es una integral muy sencilla que ya hemos hecho, precisamente, la consideramos aquí porque conocemos su valor exacto, que es $\frac{1}{3}$. Observe también que el valor de la aproximación nos dio por encima del valor real, lo cual está acorde con lo que muestra la gráfica. Podemos preguntarnos entonces ¿cuál fue el error que se cometió? El **error absoluto** es

$$E_{abs} = |T_n - I_{exacta}| = |0.34375 - \tfrac{1}{3}| = 0.01041\bar{6},$$

donde I_{exacta} es el valor exacto de la integral, mientras que el **error relativo** es

$$E_{rel} = \frac{|T_n - I_{exacta}|}{|I_{exacta}|} = 0.03125,$$

esto quiere decir que el porcentaje de error al aproximar con T_4 fue de $3.125\,\%$.

Ejemplo 4.3. Encontremos el valor aproximado de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ usando la regla del trapecio, con $n = 20$, y comparemos con el valor real.

Delta	k	x_k	1/(1+x_k^2)	2y_k
0.039269908	0	0	1	1
	1	0.03926991	0.99846025	1.9969205
	2	0.07853982	0.99386931	1.98773863
	3	0.11780972	0.98631086	1.97262172
	4	0.15707963	0.97592014	1.95184027
	5	0.19634954	0.96287803	1.92575605
	6	0.23561945	0.94740345	1.89480691
	7	0.27488936	0.92974463	1.85948926
	8	0.31415926	0.91016984	1.82033968
	9	0.35342917	0.88895828	1.77791657
	10	0.39269908	0.86639154	1.73278307
	11	0.43196899	0.84274596	1.68549192
	12	0.4712389	0.81828634	1.63657269
	13	0.51050881	0.79326094	1.58652187
	14	0.54977871	0.7678978	1.53579559
	15	0.58904862	0.74240247	1.48480494
	16	0.62831853	0.7169568	1.4339136
	17	0.66758844	0.69171873	1.38343745
	18	0.70685835	0.66682283	1.33364565
	19	0.74612825	0.64238149	1.28476298
	20	0.78539816	0.61848646	0.61848646
suma	33.9036458			
T_20=	0.66569653			

En la tabla de la izquierda pueden leerse los siguientes datos: Delta corresponde a $\Delta x = \frac{\frac{\pi}{4}-0}{20} = 0.0392699082$ aproximado hasta 10 cifras decimales. En la columna x_k están los elementos de la partición, esto es, $x_k = 0 + k\Delta x$. En la siguiente columna, tenemos $y_k = f(x_k) = \frac{1}{1+x_k^2}$ y, en la última, el producto $2y_k$ para $k = 1$ hasta $k = 19$, y para $k = 0$ y $k = 20$ se conserva el valor de y_k.

Finalmente, hemos hecho la suma $y_0 + 2(y_1 + \cdots + y_{19}) + y_{20}$ y, frente a la casilla denotada por T_{20}, tenemos el valor de la aproximación, esto es, $T_{20} =$

$\frac{\Delta}{2}$(suma). Ahora bien, si utilizamos el software WolframAlpha[1] para hallar el valor de la integral, este nos arroja como resultado 0.6657737500; que es, por supuesto, otra aproximación, aunque posiblemente con un método más preciso que el que hemos usado y muy seguramente con un número de iteraciones n mucho mayor que 20. Para terminar, el error absoluto esta vez fue

$$E_{abs} = |0.665696528 - 0.6657737500| = 0.000077222,$$

mientras que el error relativo (suponiendo que el valor exacto de la integral es el obtenido por medio del software) fue

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{I_{exacta}} = 0.0001159884,$$

lo que significa que el porcentaje de error cometido fue del 0.011 %. Si analizamos la información que nos da el error absoluto, vemos que la aproximación dada coincide con el valor real en cuatro cifras decimales.

Ahora bien, resulta que es posible acotar el error cometido al aproximar la integral usando la regla del trapecio. ¿Cuál es la finalidad de hacer esto? Algunas veces no se sabe cuál es el número mínimo de iteraciones que nos van a llevar a una buena respuesta, en el sentido en que la diferencia con el valor verdadero sea tan pequeña como se quiera. Más precisamente, dado $\epsilon > 0$, se pretende encontrar n tal que $|T_n - I_{exacta}| < \epsilon$. La demostración del siguiente resultado puede encontrarse en el apéndice B.

Error en la regla del trapecio. Si f'' es continua y M es una cota superior para los valores de $|f''|$ en $[a, b]$, entonces el error E_T en la aproximación por la regla del trapecio, de la integral desde a hasta b de $f(x)$ en n pasos, satisface la desigualdad

$$\boxed{|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.}$$

Ejemplo 4.4. Suponga que se quiere aproximar la integral $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ con un error menor a 0.001. ¿Cuál es el n adecuado?

[1] Para la tabla se ha usado Microsoft Excel Versión 15.19.1. Para el valor exacto hemos usado la aplicación WolframAlpha (Versión 1.4.2018021301)[aplicación móvil]. Descargado de: https://play.google.com/store/apps/details?id= com.wolfram.android.alpha.

Tenemos que $f''(x) = 2$, entonces $M = 2$ es cota para $|f''|$ en el intervalo $[0, 1]$, y así

$$\begin{aligned} |E_T| \leq \frac{2(1-0)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} &\leq 0.001 \\ \frac{1}{6(0.001)} &\leq n^2 \\ 166.\overline{6} &\leq n^2 \\ 12.9 &\leq n, \end{aligned}$$

es decir, necesitamos al menos $n = 13$ subintervalos para lograr esa precisión.

Nota 4.5. *Observe que para lograr una aproximación con cierta precisión es necesario conocer la segunda derivada de la función y el valor M dado en la última desigualdad, pero hay otra forma de hacerlo. En el ejemplo anterior, la precisión se obtiene con $n = 13$, así que podríamos realizar las aproximaciones T_{12} y T_{13}. Al compararlas, no obstante, verificamos que las respuestas dadas no coinciden en las dos cifras decimales que se piden, pero si hacemos T_{13} y lo comparamos con T_{14}, de acuerdo con el resultado obtenido en el ejemplo, la diferencia entre estas dos sí debe ser menor que 0.001. Este método será particularmente útil cuando se use la regla de Simpson, pues se hará necesario conocer la cuarta derivada de la función.*

2. Regla de Simpson

Suponga que tenemos nuevamente una función continua y positiva sobre el intervalo $[a, b]$ y queremos aproximar el valor de su integral, pensando en que es el área bajo la curva. Para ello, consideramos una parábola que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y, adicionalmente, el punto $(c, f(c))$, donde c es el punto medio del intervalo $[a, b]$, esto es, $c = \frac{a+b}{2}$. Observe que el polinomio

$$P(x) = f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \tag{4.1}$$

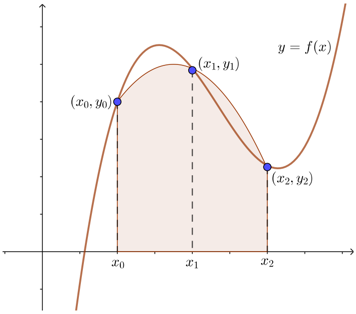
satisface que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ y $P(c) = f(c)$, así que $P(x)$ es el polinomio cuadrático[2] que describe la parábola en cuestión. Vamos a apro-

[2] El polinomio $P(x)$ se conoce como **polinomio de interpolación de Lagrange** de orden 2.

ximar $\int_a^b f(x)dx$ por medio de $\int_a^b P(x)dx$.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \right] dx \\
&\quad = \frac{f(a)(b-a)(2a+b-3c)}{6(a-c)} + \frac{f(c)(a-b)^3}{6(c-a)(c-b)} + \frac{f(b)(b-a)(a+2b-3c)}{6(b-c)} \\
&\quad = \frac{f(a)(b-a)}{6} + \frac{4f(c)(b-a)}{6} + \frac{f(b)(b-a)}{6} \\
&\quad = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b) \right]. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Ahora vamos a refinar este procedimiento, esto es, tomamos una partición regular $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a, b]$. Al tomar dos intervalos consecutivos, digamos con base en los subintervalos $[x_0, x_1]$ y $[x_1, x_2]$, podemos construir una parábola que pase por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2), donde $y_k = f(x_k)$, como lo muestra la figura. De acuerdo con el razonamiento anterior, el área bajo tal parábola está dada por $A_1 = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]$. Como la partición es regular, podemos escribir $x_2 - x_0 = 2\Delta x$, así que



$$A_0 = \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2 \right].$$

Suponga ahora que encontramos la parábola que pasa por los puntos (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4); el área bajo la curva está dada por $A_2 = \frac{\Delta x}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4 \right]$. Repetimos este procedimiento hasta los dos últimos subintervalos y obtenemos que el área bajo la curva será $A_{n-2} = \frac{\Delta x}{3}\left[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n \right]$. Al sumar estas áreas, obtenemos la aproximación deseada

$$\begin{aligned}
I \approx S_n &:= \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \cdots + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n \right] \\
&= \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n \right].
\end{aligned}$$

Observe que para aplicar esta regla es necesario que n sea par.

Teorema 4.6 (Regla de Simpson). *Sea f una función acotada sobre el intervalo $[a, b]$. Podemos aproximar $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ usando*

$$\boxed{S = \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right),}$$

donde n es par, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $y_k = f(x_k)$ *para* $k = 0, 1, \ldots, n$.

Ejemplo 4.7. Aproximemos $\int_0^1 x^2 dx$ usando la regla de Simpson, con $n = 4$. Igual que en el ejemplo 4.2, tenemos que $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$, los x_k son

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1,$$

y los correspondientes y_k son $y_0 = 0$, $y_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$, $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $y_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ y $y_4 = (1)^2 = 1$. Al aplicar la fórmula, obtenemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{12}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(0 + 4\left(\frac{1}{16}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{9}{16}\right) + 1\right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Observe que en este caso, obtuvimos el valor exacto de la integral, ¿por qué?

Ejemplo 4.8. Aproximemos el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$ usando la regla de Simpson, con $n = 20$, y comparémoslo con el valor real y con el encontrado en el ejemplo 4.3.

Delta	k	x_k	1/(1+x_k^2)
0.039269908	0	0	1
	1	0.03926991	0.99846025
	2	0.07853982	0.99386931
	3	0.11780972	0.98631086
	4	0.15707963	0.97592014
	5	0.19634954	0.96287803
	6	0.23561945	0.94740345
	7	0.27488936	0.92974463
	8	0.31415926	0.91016984
	9	0.35342917	0.88895828
	10	0.39269908	0.86639154
	11	0.43196899	0.84274596
	12	0.4712389	0.81828634
	13	0.51050881	0.79326094
	14	0.54977871	0.7678978
	15	0.58904862	0.74240247
	16	0.62831853	0.7169568
	17	0.66758844	0.69171873
	18	0.70685835	0.66682283
	19	0.74612825	0.64238149
	20	0.78539816	0.61848646
suma	50.8613691		
S_20=	0.66577376		

En la primera columna de la tabla, tenemos $\Delta x = \frac{\frac{\pi}{4}-0}{20} = 0.039269908$, en la tercera columna, hemos dispuesto los x_k y, en la cuarta, los $y_k = \frac{1}{1+x_k^2}$. Frente a la casilla *suma*, hemos puesto el valor de $y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{18} + 4y_{19} + y_{20}$. Finalmente, frente a la casilla marcada como S_{20}, tenemos la aproximación pedida. Al comparar con el valor real (dado por WolframAlpha), tenemos que el error absoluto fue

$$\begin{aligned} E_{abs} &= |0.665773763 - 0.6657737500| \\ &= 0.000000013. \end{aligned}$$

Esto nos muestra que la aproximación obtenida con la regla de Simpson coincide con el valor real en las primeras siete cifras decimales, lo cual parece bastante bueno, y definitivamente mejor que la aproximación con la regla del trapecio.

De manera análoga a la regla del trapecio, tenemos una relación entre el error cometido al usar esta aproximación y el número de subintervalos, para una mayor explicación al respecto vea el apéndice B.

Error en la regla de Simpson. Si $f^{(4)}$ es continua y M es cualquier cota superior para los valores de $|f^{(4)}(x)|$ en $[a,b]$, entonces el error E_S al aproximar la integral de $f(x)$ desde a hasta b con n subintervalos satisface la desigualdad

$$\boxed{|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.}$$

Ejemplo 4.9. Encuentre el número mínimo de subintervalos necesarios para estimar $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$, con un error menor que 10^{-4}.

De acuerdo con la afirmación previa, hallamos la cuarta derivada de f y la acotamos en el intervalo dado. Como $f(x) = x^{-2}$, $f'(x) = -2x^{-3}$, $f''(x) = 6x^{-4}$, $f'''(x) = -24x^{-5}$ y $f^{(4)}(x) = 120x^{-6}$, entonces $f^{(4)}$ alcanza su máximo en $[1,2]$, cuando $x = 1$, y dicho máximo es $f^{(4)}(1) = 120$, es decir, este es el valor de M que nos sirve (de hecho, cualquiera mayor). Luego,

$$\begin{aligned} |E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4} = \frac{120(1)^5}{180n^4} &\leq 10^{-4} \\ \frac{120}{180\times 10^{-4}} &\leq n^4 \\ \frac{2}{3}\times 10^4 &\leq n^4 \\ 6666.\overline{6} &\leq n^4 \\ 9.03 &\leq n, \end{aligned}$$

es decir, el número par buscado es $n = 10$.

Ejercicios 4.2

1. En cada caso, considere una partición regular de 8 subintervalos y aproxime el valor de la integral definida con la regla del trapecio y la de Simpson. Compare con el valor exacto de la integral.

a) $\displaystyle\int_1^3 e^x dx.$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}.$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}.$

d) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x dx.$

2. Aproxime el valor de las siguientes integrales usando los métodos de trapecio y Simpson, con $n = 4, 8, 20$. Después, encuentre el valor exacto, si es posible, o utilice un software para hallarlo y compare.

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2 dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \cos e^x dx.$

d) $\displaystyle\int_1^2 \ln x^2 dx.$

e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx.$

f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx.$

3. Aproxime $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ usando los dos métodos, con $n = 10$, donde
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

4. Halle dos aproximaciones de $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x} dx$, una con la regla del trapecio, otra con la regla de Simpson, con errores menores que 10^{-3}.

Capítulo *cinco*

Técnicas de integración

$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$
$$\left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right) \left(uv - \int v\,du\right)$$

Cuando nos enfrentamos al problema de hallar una antiderivada, a menudo debemos usar un método para encontrarla. Es poco usual que se nos ocurra *una función tal que su derivada sea...*. En este sentido, tenemos que verificar si la función dada está en nuestra "lista"de derivadas, si se "parece"a alguna conocida o si es necesario hacer una modificación para acercarnos a alguna de las antiderivadas conocidas.

Básicamente, existen dos métodos para hallar integrales: sustitución y partes. Los restantes, que serán presentados en el libro, son modificaciones de estos, que se apoyan en identidades o descomposiciones que disminuyen el grado de dificultad -casi siempre- de una expresión. En todos los casos, tratamos de dar ejemplos clave, en los que mostramos el corazón de cada técnica, así como un amplio número de ejercicios, que el lector podrá completar a lo largo de la lectura.

1. Regla de sustitución

Esta sección la empezamos con el primero de los métodos de integración: sustitución simple. En adelante, el estudiante debe preguntarse cuál de los métodos es posible aplicar, empezando por el más fácil. Después, gracias a la experiencia ganada tras realizar varios ejercicios, la intuición de cuál método utilizar será mucho más acertada.

1.1. Sustitución en integrales indefinidas

Dadas dos funciones diferenciables $F(x)$ y $g(x)$, que se pueden componer para $x \in [a, b]$, podemos hallar la derivada de la composición usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \frac{dF}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}.$$

Si llamamos f a la derivada de F, es decir, $F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$, tenemos que

$$[F(g(x))]' = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Luego, por el TFC-I,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx \;=\; \int [F(g(x))]'\, dx = F(g(x)) + C.$$

Si cambiamos un poco la notación, y en lugar de escribir $g(x)$ escribimos u, lo que formalmente se conoce como el *cambio de variable* $u = g(x)$, entonces tenemos que cambiar todo a términos de u, es decir,

$$\frac{du}{dx} = g'(x),$$

o mejor

$$du = g'(x)\,dx. \tag{5.1}$$

Al escribir la integral que estamos buscando, cambiamos todo a nuestra nueva variable u, así,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C,$$

y al regresar a términos de x, tendremos que

$$\int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Note que la ventaja de trabajar con u es que podemos encontrar la antiderivada más fácilmente, de hecho, hay que procurar un cambio de variable que nos lleve a una integral conocida, o, al menos, más fácil de encontrar que la que tenemos inicialmente.

Nota 5.1. *En la notación de Leibniz de derivada $\frac{df}{dx}$, tanto df como dx carecen de valor e incluso de sentido si se consideran individualmente, sin embargo, esta notación es compatible con la de integral $\int f\ dx$ y permite hacer manipulaciones algebraicas como en* (5.1)*.*

Ejemplo 5.2. Para hallar $\displaystyle\int (x^2 + 2x)\cos(x^3 + 3x^2)dx$, hacemos la sustitución $u = x^3 + 3x^2$, de donde $du = (3x^2 + 6x)\,dx$, o mejor $\frac{1}{3}du = (x^2 + 2x)dx$. Sustituimos estos datos en la integral, con lo que tenemos

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 2x)\cos(x^3 + 3x^2)\,dx &= \int \frac{1}{3}\cos u\,du\\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + C\\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x^3 + 2x^2) + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Para calcular $\displaystyle\int \sqrt{2x+1}\,dx$, hacemos el cambio de variable $u = 2x + 1$, $du = 2dx$, o equivalentemente $\frac{1}{2}du = dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C\\ &= \frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.4. Calculemos $\int x\sqrt{3x-2}\,dx$. La sustitución que parece adecuada es $u = 3x - 2$, con lo cual $du = 3dx$, pero ¿qué hacemos con la otra x que está en el integrando? Recuerde que todo debe quedar en términos de la nueva variable. Entonces, despejamos x, de donde $x = \frac{u+2}{3}$, y ponemos todo en la integral.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{3x-2}\,dx &= \int \frac{u+2}{3}\sqrt{u}\,\frac{du}{3}\\ &= \frac{1}{9}\int (u+2)u^{1/2}du = \frac{1}{9}\int (u^{3/2} + 2u^{1/2})du\\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + 2\frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C\\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}(3x-2)^{5/2} + \frac{4}{3}(3x-2)^{3/2}\right) + C.\end{aligned}$$

No existe un única forma de realizar la sustitución ni tampoco existe una única solución. El siguiente ejemplo lo ilustra y además resalta el uso de la constante C que se agrega en la integral indefinida.

Ejemplo 5.5. Considere la integral

$$\int \tan\theta\sec^2\theta\;d\theta. \tag{5.2}$$

Como $[\tan\theta]' = \sec^2\theta$, parece natural hacer la sustitución $w = \tan\theta$, luego, $dw = \sec^2\theta\;d\theta$, haciendo que la integral (5.2) se transforme en

$$\begin{aligned}\int w\;dw &= (1/2)w^2 + C\\ &= (1/2)\tan^2\theta + C.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Por otro lado, en (5.2) también se puede hacer la sustitución $v = \sec\theta$ y $dv = \tan\theta\sec\theta\;d\theta$, lo que conduce a

$$\begin{aligned}\int v\;dv &= (1/2)v^2 + C\\ &= (1/2)\sec^2\theta + C.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Las integrales indefinidas (5.3) y (5.4) son iguales como conjuntos. La constante C solo representa que cualquier otra antiderivada se obtiene agregando una constante real, además, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, esto quiere decir que ambas integrales indefinidas son correctas.

La sustitución no siempre es evidente y en algunas ocasiones no resuelve el problema inmediatamente, lo que hace necesario involucrar varias técnicas y estrategias.

Ejemplo 5.6. Considere la integral

$$\int \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}\, dx,$$

la sustitución no parece evidente, pero podemos cambiar la forma de la integral utilizando la sustitución $u = \sqrt{x}$ y $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, transformando la integral en

$$\int \frac{2\ln(u)}{u}\, du.$$

La sustitución para la segunda integral es un poco más evidente $w = \ln(u)$ y $dw = \frac{du}{u}$, así, obtenemos

$$\begin{aligned}\int 2w\, dw &= w^2 + C\\ &= [\ln u]^2 + C\\ &= [\ln\sqrt{x}]^2 + C.\end{aligned}$$

Otra forma de resolver este problema es utilizando las propiedades de logaritmo, más precisamente, podemos escribir el integrando como $\frac{\ln x^{1/2}}{x} = \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$, así que la integral queda

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\int z dz &= \frac{z^2}{4} + C\\ &= \frac{[\ln x]^2}{4} + C,\end{aligned}$$

donde hemos hecho la sustitución $z = \ln x$ (muy parecido al caso anterior). Nos preguntamos si estas dos respuestas coinciden. La respuesta es afirmativa, pues podemos escribir

$$\frac{[\ln x]^2}{4} = \left[\frac{\ln x}{2}\right]^2 = [\ln\sqrt{x}]^2.$$

Sin embargo, también hubiese sido posible resolver el problema utilizando una sola sustitución, a saber, $v = \ln(\sqrt{x})$, que no es evidente.

1.2. Sustitución en integrales definidas

En el caso en que queremos calcular la integral definida $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$ usando el método de sustitución, también debemos cambiar los límites de integración. Esto es, si hacemos el cambio $u = g(x)$, los límites se cambian así:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Ejemplo 5.7. Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} x(x^2+3)^4\,dx$. Hacemos $u = g(x) = x^2+3$, $du = 2x\,dx$, o mejor $\frac{1}{2}du = xdx$, además, $g(-1) = 4$ y $g(0) = 3$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x(x^2+3)^4 dx &= \int_{g(-1)}^{g(0)} \frac{1}{2}u^4 du \\
&= \frac{1}{2}\int_4^3 u^4 du = -\frac{1}{2}\int_3^4 u^4 du \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{u^5}{5}\right]_3^4 = -\frac{1}{10}[4^5 - 3^5] \\
&= -\frac{1}{10}[1024 - 243] = -\frac{781}{10}.
\end{aligned}$$

Si le parece complicado el cambio de límites, puede elegir no hacerlo; en lugar de eso, debe regresar a la variable original y evaluar en los límites originales. Para ello, conviene trabajar con la integral indefinida, en el ejemplo previo tendríamos

$$\begin{aligned}
\int x(x^2+3)^4 dx &= \frac{1}{2}\int u^4 du = \frac{u^5}{10} + C \\
&= \frac{(x^2+3)^5}{10} + C.
\end{aligned}$$

A continuación evaluamos en los límites originales

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} x(x^2+3)^4 dx &= \left[\frac{(x^2+3)^5}{10}\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{3^5}{10} - \frac{4^5}{10} = \frac{3^5 - 4^5}{10},
\end{aligned}$$

que coincide con el resultado obtenido usando el primer método. Observe que la constante de integración tuvo un papel secundario en este ejemplo.

Nota 5.8. *Es muy importante escribir correctamente y tener cuidado de no mezclar las dos variables, esto es, dentro del integrando solo se debe escribir la letra x y, por lo tanto, dx, o solo la variable u y du. Además, los límites de integración deben corresponder a la variable con respecto a la cual se está integrando. A continuación algunos ejemplos de lo que NO se debe hacer.*

$$\int x(x^2+3)^4 dx = \int xu^4 dx \qquad \textit{ERROR!!!}$$

No se deben mezclar las dos variables.

$$\int_{-1}^{0} x(x^2+3)^4 dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}u^4 du \qquad \textit{ERROR!!!}$$

-1 *y* 0 *son límites de* x, *no de* u.

Al hacer la sustitución $u = x^2 + 3$, *tenemos que* $du = 2xdx$, *luego,* $dx = \frac{du}{2x}$. *Por eso, algunas personas están tentadas a escribir*

$$\int x(x^2+3)^4 dx = \int xu^4 \frac{du}{2x} \qquad \textit{ERROR!!!}$$

No se deben mezclar las dos variables.

Si tenemos la integral $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta$, *como* $(\operatorname{sen}\theta)' = \cos\theta$, *podríamos pensar en tomar* $u = \operatorname{sen}\theta$, $du = \cos\theta d\theta$ *y escribir*

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta = \int \frac{u}{du} \qquad \textit{ERROR!!!}$$

du siempre debe "multiplicar" al integrando.

Ejercicios 5.1

1. Use la regla de sustitución para encontrar las siguientes integrales. En algunos casos, puede haber más de una posibilidad para la elección de u.

   a) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$.

   b) $\int (\operatorname{sen} t)e^{\cos t}\, dt$.

   c) $\int \cos t \operatorname{sen}^2 t\, dt$.

   d) $\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$.

e) $\int e^x(1+e^{2x})\,dx.$

f) $\int x\sqrt{4x-3}\,dx.$

g) $\int \tan\theta\,d\theta.$

h) $\int \cot\theta\,d\theta.$

i) $\int (2x-1)\sqrt{7+2x}\,dx.$

j) $\int x\,\mathrm{sen}(x^2)\,dx.$

k) $\int (x+1)^4\,dx.$

l) $\int (7x-1)^{2018}\,dx.$

m) $\int \cos^3 x\,dx.$

n) $\int \mathrm{sen}^3 x\,dx.$

ñ) $\int \tan^3 x\,dx.$

o) $\int \frac{1}{3+x^2}\,dx.$

p) $\int \frac{5}{7+3x^2}\,dx.$

q) $\int x^2\sqrt{2x-1}\,dx.$

r) $\int (x^2+2x)\sqrt{x+3}\,dx.$

s) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx.$

t) $\int \frac{2dx}{x^2+6x+10}.$

u) $\int \frac{dt}{(3+5t)^5}.$

v) $\int \frac{x}{1-x^2}\,dx.$

w) $\int \frac{\ln(x^2)}{x}\,dx.$

x) $\int \frac{[\ln x]^2}{x}\,dx.$

y) $\int e^x\,\sqrt{1+e^x}\,dx.$

2. Resuelva más integrales.

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,dx.$

b) $\int \cos^5\theta\,d\theta.$

c) $\int \mathrm{sen}^5\theta\,d\theta.$

d) $\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{4+\cos^2 x}\,dx.$

e) $\int \csc\theta\,d\theta.$

f) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$

g) $\int \sqrt{\frac{x^4-2}{x^{14}}}\,dx.$

h) $\int \sqrt{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}}\,dx.$

i) $\int u\sqrt{u^2+1}\,du.$

j) $\int u^3\sqrt{u^2+1}\,du.$

3. Encuentre la integral $\int \sec\theta\,d\theta = \int \sec\ \theta\cdot\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\,d\theta.$

4. Demuestre que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$

5. Compruebe la propiedad de contracción-dilatación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,dx,$$

para f integrable en $[a,b]$, con $k \neq 0$, utilizando la regla de sustitución.

2. Integración por partes

En este libro, desarrollamos dos reglas de integración: por sustitución y por partes. Sin embargo, aplicando estas reglas y haciendo manipulaciones algebraicas, se deducen algunas estrategias de integración que presentaremos en las secciones posteriores. La integración por partes es una técnica que transforma una integral en otra, es decir, que no resuelve inmediatamente el problema de hallar una antiderivada.

Consideremos dos funciones f y g con derivada continua. Partiendo de nuestros conocimientos básicos de cálculo diferencial, sabemos que

$$[f\cdot g]' = f'\cdot g + f\cdot g'.$$

Si integramos a ambos lados, se tiene

$$\int [f\cdot g]'\,dx = \int f'\cdot g\,dx + \int f\cdot g'\,dx,$$

o mejor

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx,$$

donde hemos usado el teorema fundamental del cálculo. Se puede usar la siguiente regla de mnemotecnia

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Y si lo que queremos es la integral definida, tenemos:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Cuando se tiene el producto de un polinomio $p(x)$ por una función cuya integral es periódica $g(x)$ (como es el caso de $\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ e^x$), se puede considerar $u = p(x)$ y $dv = g(x)\,dx$, de esta forma la complejidad de la integral disminuye hasta llegar a la integral $\int g(x)\,dx$.

Ejemplo 5.9. Para calcular $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, consideramos $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, con lo cual $du = dx$ y $v = -\cos x$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C.\end{aligned}$$

¿Qué pasa si se elige $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x dx$? En ese caso, tendríamos $du = \cos x\, dx,\ v = \frac{x^2}{2}$. Al aplicar la fórmula, quedaría

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2} \cos x\, dx.$$

Aunque esto no es un error, la elección que se hizo de u y dv no nos lleva a una integral más fácil de calcular que la que teníamos, así que lo descartamos y nos quedamos con la primera elección.

Ejemplo 5.10. Para calcular $\int t^2 e^{3t}\, dt$, tomamos $u = t^2$ y $dv = e^{3t}\ dt$, entonces $du = 2t dt$ y $v = \frac{1}{3} e^{3t}$.

$$\begin{aligned}\int t^2 e^{3t} dt &= t^2 \cdot \frac{1}{3} e^{3t} - \int \frac{1}{3} e^{3t} \cdot 2t\, dt \\ &= \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2}{3} \int e^{3t} \cdot t\, dt.\end{aligned}$$

En este caso, vemos que la segunda integral no es inmediata, pero es bastante más fácil que la primera, pues ahora tenemos t en lugar de t^2. Esto quiere decir, que aunque el método de integración por partes no nos ha dado la solución inmediatamente sí mejoró nuestro problema (disminuyó el exponente de t). El procedimiento ahora es utilizar nuevamente integración por partes para resolver la segunda integral. En este caso, $u = t$, $dv = e^{3t} dt$, con lo cual $du = dt$ y $v = \frac{1}{3}\, e^{3t}$.

$$\begin{aligned}\int t^2 \cdot e^{3t} dt &= \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2}{3}\left[t \cdot \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3t} dt\right] \\ &= \frac{t^2 e^{3t}}{3} - \frac{2}{3}\left[t \cdot \frac{e^{3t}}{3} - \frac{1}{3} \frac{e^{3t}}{3}\right] + C \\ &= e^{3t}\left[\frac{t^2}{3} - \frac{2t}{9} + \frac{2}{27}\right] + C.\end{aligned}$$

¿Qué ocurre si en la segunda integral tomamos $u = e^{3t},\ dv = t dt$? ¿Qué ocurre si en la elección inicial tomamos $u = e^{3t}$ y $dv = t^2 dt$?

Después de responder estas preguntas, confirmamos dos hechos. El primero es que si en el integrando aparecen las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, conviene integrarlas, es decir, considerarlas como dv; el segundo es que si hay que utilizar el método de integración por partes más de una vez, debemos mantener nuestra primera elección. Para precisar esta idea, trate de encontrar la antiderivada de $e^x \operatorname{sen} x$.

Otras veces nos enfrentamos a integrales de funciones muy simples, en algunos de estos casos, cambiar por la integral de una función más compleja permite resolverla. En particular, es muy útil para encontrar las integrales de las funciones inversas. Empiece encontrando la antiderivada de $\arctan x$.

Ejemplo 5.11. Calculamos $\displaystyle\int \ln |x|\, dx$. Tomemos $u = \ln |x|$ y $dv = dx$, entonces $du = \frac{dx}{x}$ y $v = x$. A diferencia del caso anterior, el grado del polinomio aumenta, pero la integral se puede resolver:

$$\begin{aligned} \int \ln |x| dx &= x \ln |x| - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x \ln |x| - x + C. \end{aligned}$$

Hay casos en que la complejidad no disminuye ni aumenta y al aplicar integración por partes volvemos a un múltiplo de la integral inicial. Entonces, conviene asociar una incógnita a la integral y resolverla como una ecuación.

Ejemplo 5.12 (La integral incógnita). Suponga que queremos calcular la integral $I = \displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$. Aplicamos el método de partes, con $u = e^x$, $du = e^x dx$, $dv = \operatorname{sen} x dx$, $v = -\cos x$, lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= -e^x \cos x + \int \cos x\, e^x\, dx. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Para realizar la última integral del lado derecho, aplicamos partes una vez más, con $u = e^x$ y, esta vez, $dv = \cos x dx$, con lo cual $du = e^x dx$ y $v = \operatorname{sen} x$ (a esto nos referíamos cuando dijimos que debíamos mantener la primera elección), entonces

$$I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx.$$

Note que hemos obtenido otra vez la integral I, esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I \;\Rightarrow\; 2I = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$$
$$\Rightarrow\; I = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

Nota 5.13. *No siempre se puede resolver la integral utilizando la técnica de la integral incógnita. Dada* $\int \operatorname{sen}^2 t\, dt$*, escogemos* $u = \operatorname{sen} t$ *y* $dv = \operatorname{sen} t\, dt$*. Luego,*

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 t\, dt &= -\cos t \operatorname{sen} t + \int \cos^2 t\, dt \qquad (5.6)\\ &= -\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t + \int \operatorname{sen}^2 t\, dt. \end{aligned}$$

En este caso, llegamos a que $0 = 0$*, que no es de ayuda para resolver la integral. La sugerencia es que en* (5.6) *se utilice la identidad* $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$ *en vez de volver a hacer integración por partes.*

En ocasiones, es necesario aplicar la integración por partes varias veces antes de resolver la integral. En estos casos, se puede hacer una tabla que permite agilizar los cálculos; considere $\int f(x)g(x)\, dx$. Asumamos que conocemos suficientes antiderivadas de g: $G_1, G_2, \ldots,$ donde $G_n' = G_{n-1}$ y $G_1' = G_0 = g$, además supongamos que f tiene derivadas conocidas de todos los ordenes $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots,$ donde $[f^{(n)}]' = f^{(n+1)}$ y $f^{(0)} = f$. Entonces, si aplicamos integración por partes escogiendo los papeles

$$\begin{aligned} u &= f^{(n)}(x) & dv &= G_n(x)dx\\ du &= f^{(n+1)}(x)dx & v &= G_{n+1}(x), \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int f(x)g(x)\, dx &= G_1 \cdot f^{(0)} - \int f^{(1)} G_1\, dx\\ &= G_1 \cdot f^{(0)} - G_2 \cdot f^{(1)} + \int f^{(2)} G_2\, dx\\ &= G_1 \cdot f^{(0)} - G_2 \cdot f^{(1)} + G_3 \cdot f^{(2)} - \int f^{(2)} G_2\, dx, \end{aligned}$$

y así sucesivamente hasta que decidamos parar o se solucione la integral. Observe que podemos hacer una lista de las derivadas y antiderivadas, las flechas indican el producto entre las funciones y un signo adicional que se agrega a cada término. Observe que si $[f^{(n)}]' = 0$, la integral se resuelve completamente y el último sumando sería $f^{(n-1)}G_n$.

$$\begin{array}{cccccc}
u & f & f^{(1)} & f^{(2)} & f^{(3)} & \cdots \\
dv & g & G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\
 & & + & - & + &
\end{array}$$

Ejemplo 5.14. En la integral $\int (x^3 + 2x^2 - 1)\cos x\, dx$ claramente se debe tomar $u = x^3+2x^2-1$ para reducir su grado y $dv = \cos x\, dx$, sin embargo, se debe aplicar la integración por partes 4 veces. En este caso, es mejor utilizar el método anterior:

$$\begin{array}{cccccc}
u & x^3 + 2x^2 - 1 & 3x^2 + 4x & 6x + 4 & 6 & 0 \\
dv & \cos x & \operatorname{sen} x & -\cos x & -\operatorname{sen} x & \cos x, \\
 & & + & - & + & -
\end{array}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int (x^3 + 2x^2 - 1)\cos x\, dx &= (x^3 + 2x^2 - 1)\operatorname{sen} x + (3x^2 + 4x)\cos x \\
&\quad - (6x + 4)\operatorname{sen} x - 6\cos x + C \\
&= (x^3 + 2x^2 - 6x - 5)\operatorname{sen} x + (3x^2 + 4x - 6)\cos x + C,
\end{aligned}$$

en este caso se resolvió totalmente la integral, ya que $[f^{(4)}]' = 0$.

Por último, veamos un ejemplo donde se combinan los dos métodos que hemos estudiado.

Ejemplo 5.15. Encontremos la integral indefinida $\int x \ln x dx$. En primer lugar, haremos integración por partes, considerando $u = \ln x$ y $dv = xdx$, lo que nos lleva a $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int x\ln x\, dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.
\end{aligned}$$

Ahora bien, alguien puede pensar de manera distinta e iniciar con la sustitución $z = \ln x$, con lo que $dz = \frac{1}{x}dx$, despejando $dx = xdz$. Pero como toda la expresión debe quedar en términos de la variable z, escribimos $x = e^z$ y, así, $dx = e^z dz$, luego la integral original se transforma en

$$\int x\ln x\, dx = \int e^z \cdot z \cdot e^z dz = \int z e^{2z} dz.$$

Si bien esto no resuelve la integral, se puede aplicar el método de integración por partes para terminar el ejercicio. Escogiendo $u = z$ y $dv = e^{2z}dz$, con lo que $du = dz$ y $v = \frac{e^{2z}}{2}$, la integral queda

$$\begin{aligned}\int x \ln x \, dx &= z \cdot \frac{e^{2z}}{2} - \int \frac{e^{2z}}{2} dz \\ &= \frac{ze^{2z}}{2} - \frac{e^{2z}}{4} + C \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C,\end{aligned}$$

que coincide con lo obtenido previamente. Aunque la segunda forma parezca un poco más larga, ya que hubo que aplicar los dos métodos, lo que se pretende mostrar con este ejercicio es que aunque la primera elección no siempre es la más rápida o la mejor puede finalmente conducir a la solución.

Ejercicios 5.2

1. Utilice el método de integración por partes para hallar las siguientes integrales

a) $\int x \cos 3x \, dx$.

b) $\int (3x - 2) \operatorname{sen} 2x \, dx$.

c) $\int x^2 (\cos 3x - \operatorname{sen} x) dx$.

d) $\int (2x^2 + 2x - 1) \cos 3x \, dx$.

e) $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx$.

f) $\int x \operatorname{sen} x \cos x \, dx$.

g) $\int \operatorname{sen} x \ln(\cos x) dx$.

h) $\int_0^1 \frac{3y}{e^y} dy$.

i) $\int re^{3r} dr$.

j) $\int \arctan \theta \, d\theta$.

k) $\int \operatorname{arc\,sen} \theta \, d\theta$.

l) $\int \ln \sqrt{x} \, dx$.

m) $\int t^3 e^{5t} dt$.

n) $\int \ln(x^2 + 1) dx$.

2. Realice las siguientes integrales.

a) $\int \cos^2 \theta \, d\theta$, *sugerencia*: aplique partes una vez y luego utilice la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

b) $\int \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta$.

c) $\int \sec^3 \theta \, d\theta$.

d) $\int \cos^4 x \, dx$, *sugerencia*: $u = \cos^3 x$, $dv = \cos x \, dx$.

3. Deduzca las siguientes fórmulas recurrentes para un entero $n \geq 3$.

   a) $\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$. Sugerencia: empiece con $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ para obtener

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \ \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \ \cos^2 x dx,$$

   y utilice la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.

   b) $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{(n-1)}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$.

   c) $\int \tan^n \theta \, d\theta = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} \theta - \int \tan^{n-2} \theta \, d\theta$.

   d) $\int \cot^n \theta \, d\theta = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} \theta - \int \cot^{n-2} \theta \, d\theta$.

   e) $\int \sec^n \theta \, d\theta = \frac{1}{n-1} \tan \theta \sec^{n-2} \theta + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} \theta \, d\theta$.

   f) $\int \csc^n \theta \, d\theta = -\frac{1}{n-1} \cot \theta \csc^{n-2} \theta + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} \theta \, d\theta$.

4. En los siguientes ejercicios, haga una sustitución y luego utilice la regla de integración por partes.

   a) $\int \frac{\arctan(\ln x)}{x} dx$.

   b) $\int \operatorname{sen} \sqrt{x} \, dx$.

   c) $\int t^{1/3} e^{t^{1/3}} dt$.

   d) $\int t^3 \cos(t^2) dt$.

   e) $\int \ln \sqrt{x} \, dx$.

   f) $\int t \cos(t^{2/3}) dt$.

5. Pruebe que si f es derivable y estrictamente creciente en $[0, a]$, con $f(0) = 0$, entonces $\int_0^{f(a)} f^{-1}(x) dx = af(a) - \int_0^a f(x) dx$.

6. Utilice el resultado anterior para probar que $f(x) = \sqrt{x}$ es integrable y que

$$\int_0^a \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} a^{3/2}.$$

3. Integración de funciones trigonométricas

Presentaremos a continuación algunas estrategias para hallar integrales que involucran cocientes y potencias de funciones trigonométricas. Nos enfocaremos en utilizar identidades trigonométricas, integración por sustitución y por partes.

Primero, recordamos algunas identidades fundamentales, suma de cuadrados de seno y coseno:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,} \tag{5.7}$$

si dividimos a ambos lados de la igualdad por $\cos^2 x$ (respectivamente por $\operatorname{sen}^2 x$), obtenemos las identidades

$$\boxed{\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad \text{y} \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.}$$

También son conocidas las identidades de seno y coseno de ángulos dobles

$$\boxed{\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \text{y} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.}$$

Combinando de manera adecuada (5.7) con la identidad del coseno del ángulo doble, obtenemos formas más simples (para integrar) de los cuadrados del seno y coseno

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.}$$

Como ejercicio para el lector sugerimos verificar cada una de ellas. Ahora recordamos las integrales de potencias no mayores a 2 de las funciones trigonométricas

1. $\int \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\cos\theta + C.$
2. $\int \cos\theta \, d\theta = \operatorname{sen}\theta + C.$
3. $\int \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta + C.$
4. $\int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta + C.$
5. $\int \sec\theta \, d\theta = \ln |\sec\theta + \tan\theta| + C.$
6. $\int \sec^2\theta \, d\theta = \tan\theta + C.$
7. $\int \tan\theta \, d\theta = \ln |\sec\theta| + C.$
8. $\int \tan^2\theta \, d\theta = \tan\theta - \theta + C.$
9. $\int \csc\theta \, d\theta = -\ln |\csc\theta + \cot\theta| + C.$
10. $\int \csc^2\theta \, d\theta = -\cot\theta + C.$
11. $\int \cot\theta \, d\theta = -\ln |\csc\theta| + C.$
12. $\int \cot^2\theta \, d\theta = -\cot\theta - \theta + C.$

Veamos ahora una serie de estrategias que nos permiten integrar algunas expresiones que involucran funciones trigonométricas.

Estrategia para integrar potencias impares de senos y cosenos.

Estudiamos el caso $\boxed{\int sen^{2k+1}x\,dx}$. Descomponemos la potencia como se muestra a continuación y utilizamos la identidad pitagórica.

$$\int sen^{2k+1}x\,dx \;=\; \int sen\;x \;\cdot\; (1-\cos^2 x)^k dx.$$

Luego, aplicamos la sustitución $u = \cos x,\; -du = \operatorname{sen} x\; dx$, de donde obtenemos

$$-\int (1-u^2)^k\; du,$$

que es un polinomio. Se procede de la misma manera para integrar una potencia impar de coseno $\int \cos^{2k+1} x\; dx$.

Ejemplo 5.16.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x dx &= \int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \operatorname{sen} x\; dx\\ &= \int (1-u^2)^2(-du)\\ &= -\int (1-2u^2+u^4)du\\ &= -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

Estrategia para integrar potencias pares de senos y cosenos.

Estudiamos la integral $\boxed{\int cos^{2k}x\,dx}$. En este caso, es necesario aplicar la fórmula del ángulo doble y procedemos como muestra el ejemplo.

Ejemplo 5.17.

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)dx\\ &= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos^2 u \frac{du}{2}, \quad \text{donde } u = 2x\\ &= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) + C\\ &= \frac{5x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C.\end{aligned}$$

Se procede de manera similar para integrar una potencia par de $\operatorname{sen} x$. Otra posibilidad, tanto para potencias pares como impares, es utilizar las fórmulas de reducción que se presentan en los ejercicios de la sección de integración por partes.

Ejemplo 5.18. Usando la fórmula de reducción dada en el Ejercicio 3-b de la Sección 2, obtenemos

$$\int \cos^6 x\,dx = \frac{1}{6}\cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{5}{6}\int \cos^4\ dx$$

y utilizando el resultado del ejemplo 5.17 se obtiene la integral.

Estrategia para integrar $\boxed{\int \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x\,dx,}$ con $m, n \geq 1$.

m y n pares. Utilizamos la identidad $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$. Supongamos $m = 2k$, entonces

$$\int \operatorname{sen}^{2k}\theta \cdot \cos^n\theta\,d\theta \;=\; \int (1-\cos^2\theta)^k \cdot \cos^n\theta\,d\theta,$$

expandimos y aplicamos la estrategia para potencias de cosenos. Observe que todas las potencias de coseno que se obtienen son pares. El caso en que n es par es análogo y se obtienen potencias pares de senos.

Ejemplo 5.19.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x\ \cos^2 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2\ x dx \\
&= \int \cos^2 x\,dx - \int \cos^4 x\,dx \\
&= \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}\ 2x}{4}\right) - \left(\frac{5x}{16} + \frac{\operatorname{sen}\ 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen}\ 4x}{32}\right) + C \\
&= \frac{3x}{16} - \frac{\operatorname{sen}\ 4x}{32} + C.
\end{aligned}$$

m impar ó n impar. Suponga $m = 2k+1$. Descomponemos la potencia de seno como $\operatorname{sen}^m x = (\operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{sen} x$ y utilizamos la identidad pitagórica, entonces

$$\int \operatorname{sen}^m x\ \cos^n x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^k \cdot \cos^n x \cdot \operatorname{sen} x\,dx.$$

Si sustituimos $u = \cos x$, entonces $-du = \operatorname{sen} x dx$, y la integral queda

$$-\int (1-u^2)^k \cdot u^n \cdot du,$$

que se maneja como un polinomio.

Ejemplo 5.20.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^7 x \ \cos^4 x \, dx &= \int (1-\cos^2 x)^3 \cos^4 x \cdot \operatorname{sen} x \, dx \\
&= \int (1-u^2)^3 u^4 (-du) \\
&= -\int (1-3u^2+3u^4-u^6) u^4 du \\
&= -\int (u^4-3u^6+3u^8-u^{10}) du \\
&= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11} + C.
\end{aligned}$$

Cuando n es impar se maneja de la misma forma: se separa un coseno y se aplica la identidad pitagórica. Cuando n y m son impares, es cuestión de elegir la función de su preferencia.

Estrategia para integrar $\boxed{\int \tan^m x \, dx}$ para $m > 2$.

La idea es hacer la sustitución $u = \tan x$, con lo cual $du = \sec^2 x dx$. Para ello, hay que separar una potencia cuadrada de tangente y utilizar la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, como se muestra a continuación.

Ejemplo 5.21. Calcular $\int \tan^5 x \, dx$. Reemplazamos $\tan^2 x$ por $(\sec^2 x - 1)$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \, dx &= \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \int \tan^3 x \sec^2 x - \tan^3 x \, dx.
\end{aligned}$$

Ahora hacemos la sustitución $u = \tan x$, $du = \sec^2 x \, dx$, entonces

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \, dx &= \int u^3 du - \int \tan^3 x \, dx \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan^3 x \, dx. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Si bien no hemos terminado, sí hemos reducido la potencia. Ahora aplicamos la misma técnica para la integral (5.8), es decir, que escribimos

$$\tan^3 x = \tan x \tan^2 x = \tan x (\sec^2 x - 1).$$

$$
\begin{aligned}
\int \tan^5 x\, dx &= \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan x \sec^2 x dx + \int \tan x\, dx \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} - \int u du + \int \tan x\, dx \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \int \tan x\, dx.
\end{aligned}
$$

Recuerde que $-\ln|\cos x|$ es una antiderivada de $\tan x$. Visto de esta forma, tenemos

$$
\int \tan^5 x\, dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.
$$

Cuando se integra una potencia par de $\tan x$, se reduce el problema hasta llegar a la integral de $\tan^2 x$. También se puede resolver esta integral utilizando las fórmulas de reducción de la sección 2.

Estrategia para integrar $\boxed{\int \sec^m x\, dx \text{ para } m > 2.}$

m par. Podemos escribir $\sec^m x = \sec^{m-2} x \sec^2 x = (\tan^2 x + 1)^k \sec^2 x$, donde $m - 2 = 2k$, y luego hacer la sustitución $u = \tan x$, con lo que transformamos la integral trigonométrica en la integral del polinomio $\int (u^2 + 1)^k du$. Veamos cómo funciona para una potencia pequeña.

Ejemplo 5.22. Considere $\int \sec^6 x dx$. Expresamos $\sec^4 x = (\tan^2 x + 1)^2$ y aplicamos la sustitución $u = \tan x$, con lo que $du = \sec^2 x dx$. Veamos el desarrollo

$$
\begin{aligned}
\int \sec^6 x\, dx = \int \sec^4 x \sec^2 x\, dx &= \int (\tan^2 x + 1)^2 \sec^2 x\, dx \\
&= \int (u^2 + 1)^2\, du = \int u^4 + 2u^2 + 1\, du \\
&= \frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + u + C \\
&= \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{2\tan^3 x}{3} + \tan x + C.
\end{aligned}
$$

m impar. Separamos la potencia de secante de modo adecuado para aplicar integración por partes, de donde $u = \sec^{m-2} x$ y $dv = \sec^2 x dx$. Luego aplicamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y despejamos la integral incógnita. Para una mejor comprensión, veamos cómo funciona para las primeras potencias impares de secante.

Ejemplo 5.23. Encontremos $\int \sec^3 x dx$[1]. En este caso, separamos la potencia de secante como $\sec^3 x = \sec x \sec^2 x$ y aplicamos integración por partes, así: $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x dx$, con lo cual $du = \sec x \tan x dx$ y $v = \tan x$. Entonces,

$$\begin{aligned} I = \int \sec^3 x\, dx &= \int \sec x \sec^2 x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx \\ &= \sec x \tan x - I + \ln|\sec x + \tan x|, \end{aligned}$$

de la última ecuación despejamos I

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad 2I &= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| \\ \Rightarrow \qquad \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Nota 5.24. *En el ejemplo anterior, la constante C aparece solo hasta el final; en* (5.9)*, no es necesario considerar las constantes de cada integral que calculamos, ya que al final todas se suman.*

Esta estrategia también conduce a la fórmula de recurrencia de la sección anterior y la podemos aplicar para potencias pares e impares. Ahora veamos que para encontrar la antiderivada de $\sec^5 x$ es necesario conocer la de $\sec^3 x$.

Ejemplo 5.25. Consideramos $\int \sec^5 x dx$. Nuevamente, procedemos integrando por partes, con $u = \sec^3 x$ y $dv = \sec^2 x dx$.

$$\begin{aligned} I = \int \sec^5 x\, dx &= \int \sec^3 x \sec^2 x\, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3\int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x\, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^5 x\, dx + 3\int \sec^3 x\, dx. \end{aligned}$$

[1] El lector ya habrá notado que cuando nombramos la integral como I utilizamos la técnica de la integral incógnita.

Y, finalmente,

$$\Rightarrow \qquad 4I = \sec^3 x \tan x + 3\left(\frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|)\right) + C$$

$$\Rightarrow \quad \int \sec^5 x dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{4}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

Estrategia para integrar $\boxed{\int \tan^m x \cdot \sec^n x \, dx,}$ con $m, n \geq 1$.

n **par.** Sea $n = 2k$. Escribimos $\sec^n x$ como $(\sec^2 x)^{k-1} \cdot \sec^2 x$ y usamos la identidad $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$.

$$\int \tan^m x \cdot \sec^n x \, dx \; = \; \int \tan^m x \cdot (\tan^2 x + 1)^{k-1} \cdot \sec^2 x \, dx,$$

luego hacemos la sustitución $u = \tan x$, $du = \sec^2 x dx$, de donde obtenemos

$$\int u^m \cdot (u^2 + 1)^{k-1} \, du.$$

Ejemplo 5.26.

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^3 x(\tan^2 x + 1)\sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx + \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx \\
&= \int u^5 du + \int u^3 du \\
&= \frac{1}{6}\tan^6 x + \frac{1}{4}\tan^4 x + C.
\end{aligned}$$

m **impar.** Sea $m = 2k + 1$. En este caso, haremos la sustitución $u = \sec x$, por lo tanto, conviene dejar un factor $\sec x \tan x$ para la derivada y escribir lo demás en términos de secante.

$$\begin{aligned}
\int \tan^{2k+1} x \cdot \sec^n x \, dx &= \int \tan^{2k} x \cdot \sec^{n-1} x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^k \cdot \sec^{n-1} x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \\
&= \int (u^2 - 1)^k \cdot u^{n-1} du.
\end{aligned}$$

Observe que la paridad de n no afecta el procedimiento; en el caso en que n sea par, podemos aplicar cualquiera de los dos casos anteriores.

Ejemplo 5.27.

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^4 x \sec^3 x \cdot \tan x \sec x\, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^3 x \cdot \tan x \sec x\, dx \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^3 du \\
&= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^3 du \\
&= \int (u^7 - 2u^5 + u^3) du \\
&= \frac{\sec^8 x}{8} - \frac{\sec^6 x}{3} + \frac{\sec^4 x}{4} + C.
\end{aligned}$$

n impar y m par. Para integrar $\int \tan^{2k} x \cdot \sec^{2s+1} x\, dx$, conviene dejar todo en términos de $\sec x$, para lo cual utilizamos la identidad $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$. Luego, todo el integrando se convierte en suma de potencias de secante.

Ejemplo 5.28.

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x \sec x\, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx \\
&= \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx \\
&= \frac{1}{2}[\sec x \ \tan x - \ln|\sec x + \tan x|] + C.
\end{aligned}$$

Hemos usado que $\frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|)$ es una antiderivada de $\int \sec^3 x\, dx$.

La pareja de funciones $\csc\theta$ y $\cot\theta$ se comportan de manera análoga al par $\sec\theta$, $\tan\theta$. Como ejercicio, realice las integrales correspondientes para el primer par de funciones.

Nota 5.29. *Desde otro punto de vista, los casos de integrales trigonométricas que hemos estudiado hasta ahora se resumen en tres casos*

1. $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx \quad$ *para* $n, m \geq 0$;
2. $\int \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x}\, dx \quad$ *para* $m \geq n$;
3. $\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^m x} dx \quad$ *para* $m \geq n$.

En los dos últimos también se puede considerar $n > m$.

Estrategia para integrar $\boxed{\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x}\, dx,}$ con $n > m$.

<u>n **impar.**</u> Suponga $n = 2k + 1$. Entonces, expresamos $\operatorname{sen}^n x$ como $(1 - \cos^2 x)^k \cdot \operatorname{sen} x$, luego hacemos la sustitución $u = \cos x$, convirtiéndola en una integral de una función racional

$$\int -\frac{(1 - u^2)^k}{u^m}\, du.$$

Ejemplo 5.30. Considere la integral $\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^4 x}\, dx$. Primero, expresamos $\operatorname{sen}^5 x = (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x$ y luego hacemos la sustitución $u = \cos x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^4 x}\, dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x}{\cos^4 x}\, dx \\
&= \int \frac{-(1 - u^2)^2}{u^4}\, du \\
&= \int \frac{-1 + 2u^2 - u^4}{u^4}\, du \\
&= \int (-u^{-4} + 2u^{-2} - 1)\, du \\
&= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C.
\end{aligned}$$

<u>n **par.**</u> Suponga $n = 2k$. Expresamos todas las potencias de seno en términos de coseno y, esta vez (sin hacer sustitución), transformamos el integrando en una suma de potencias de secantes y cosenos.

Ejemplo 5.31.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^3 x}\, dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^3 x}\, dx \\
&= \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^3 x}\, dx \\
&= \int \sec^3 x - 2\sec x + \cos x\, dx \\
&= \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{3}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \operatorname{sen} x + C.
\end{aligned}$$

Consideramos $\frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|)$ y $\ln|\sec x + \tan x|$ como las antiderivadas de $\sec^3 x$ y $\sec x$ respectivamente.

Estrategia para integrar $\boxed{\displaystyle\int \operatorname{sen} mx \cdot \cos nx\, dx}$ $\boxed{\displaystyle\int \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx\, dx}$

y $\boxed{\displaystyle\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx}$

Si utilizamos las expresiones para el seno y coseno de suma de ángulos

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \varphi) = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \pm \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,$$

$$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta \cos\varphi \mp \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi,$$

llegamos a las siguientes identidades

$$\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\theta - \varphi) + \operatorname{sen}(\theta + \varphi)\right],$$

$$\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)\right],$$

$$\cos\theta \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)\right].$$

Ejemplo 5.32.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 5x \cos 3x dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 8x dx\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{8}\right) + C\\ &= -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 8x}{16} + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.33.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 7x \;\; \operatorname{sen} 2x \, dx &= \frac{1}{2}\int \cos 5x - \cos 9x dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} - \frac{\operatorname{sen} 9x}{9}\right) + C\\ &= \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} - \frac{\operatorname{sen} 9x}{18} + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.34.

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 6x dx &= \frac{1}{2}\int \cos(-3x) + \cos 9x dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos(3x) + \cos 9x dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 9x}{9}\right) + C\\ &= \frac{\operatorname{sen} 3x}{6} + \frac{\operatorname{sen} 9x}{18} + C.\end{aligned}$$

Nota 5.35. *La clase de integrales que acabamos de ver es utilizada en el estudio de series de Fourier. El conjunto de funciones integrables en el intervalo* $[-\pi, \pi]$ *es un espacio vectorial con la suma y producto por escalar usual de funciones. La integral define un producto interior en este espacio, más precisamente,*

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx.$$

En este espacio, el conjunto de funciones

$$S = \{\operatorname{sen} mx, \cos nx : m, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

es linealmente independiente, es decir, el producto interior dos a dos es 0. *Además, se puede transformar a* S *en un conjunto ortonormal.*

Ejercicios 5.3

En los siguientes ejercicios, halle la integral indefinida.

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(3x)\, dx.$
2. $\displaystyle\int \cos^3(\pi x)\, dx.$
3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\, dx.$
4. $\displaystyle\int 3\cos^6(2x)\, dx.$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{5}\operatorname{sen}^7(8x)\, dx.$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx.$
7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx.$
8. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx.$
9. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\, dx.$
10. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx.$
11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^5 x\, dx.$
12. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6 x \cos^4 x\, dx.$
13. $\displaystyle\int 3\operatorname{sen}^5 x \cos^4 x\, dx.$
14. $\displaystyle\int \tan^3 2x\, dx.$
15. $\displaystyle\int \frac{3}{2}\tan^4 x\, dx.$
16. $\displaystyle\int \sec^4 x\, dx.$
17. $\displaystyle\int \sqrt{2}\sec^5(x/2)\, dx.$
18. $\displaystyle\int \sec^7 x\, dx.$

19. $\displaystyle\int \tan^6(x/3)\,dx.$

20. $\displaystyle\int \csc^3 x\,dx.$

21. $\displaystyle\int \csc^4(3x)\,dx.$

22. $\displaystyle\int \cot^3 x\,dx.$

23. $\displaystyle\int \cot^4(3x)\,dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}.$

25. $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx.$

26. $\displaystyle\int \tan^4 x \sec^4 x\,dx.$

27. $\displaystyle\int \tan^4 x \sec^5 x\,dx.$

28. $\displaystyle\int \cot^2 x \csc^2 x\,dx.$

29. $\displaystyle\int \cot^3 x \csc^2 x\,dx.$

30. $\displaystyle\int \cot^2 x \csc^3 x\,dx.$

31. $\displaystyle\int \cos x \cot^3 x\,dx.$

32. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \tan^4 x\,dx.$

33. $\displaystyle\int -\frac{3\cos^5 x}{5\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

34. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(4x)\cos(7x)\,dx.$

35. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(9x)\,dx.$

36. $\displaystyle\int \cos(2x)\cos(6x)\,dx.$

37. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\cos(3x)\,dx.$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(2x)\,dx.$

39. $\displaystyle\int \cos(7x)\cos(x)\,dx.$

En los siguientes problemas, halle la integral definida.

40. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx.$

41. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx.$

42. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^6 x\,dx.$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x\cos x)^4\,dx.$

44. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x\cos x)^5\,dx.$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x\cos x)^6\,dx.$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx.$

47. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^3 x\,dx.$

48. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(5x)\operatorname{sen}(2x)\,dx.$

49. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\operatorname{sen}(4x)\,dx.$

50. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(5x)\cos(5x)\, dx.$ 51. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(4x)\, dx.$

52. Establezca una relación entre las integrales $\int_0^{\pi/2} \cos^m\theta \operatorname{sen}^m \theta d\theta$ y la integral $\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta d\theta$. Explique.

4. Sustituciones trigonométricas

La sustitución trigonométrica es otra estrategia para resolver integrales que involucran potencias enteras de las siguientes expresiones: $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1+x^2}$ y $\sqrt{x^2-1}$. Esta estrategia, mediante una sustitución adecuada, transforma el integrando en una función trigonométrica de la forma en que se presentaron en la sección anterior. Como motivación, realice la integral $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$. Primero, intente resolver la integral por sus propios medios, trate de utilizar las técnicas y estrategias vistas hasta ahora. Si analizamos más a fondo la expresión, nos damos cuenta que está relacionada con la ecuación de la circunferencia unitaria, así que tiene sentido pensar en las funciones seno y coseno.

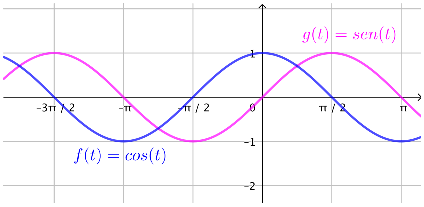
Vemos que al hacer la sustitución $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t\, dt$, la integral se transforma en una integral trigonométrica

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t dt \\
&= \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\
&= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen} 2t + C \\
&= \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{2} + C.
\end{aligned}$$

Ahora nos preguntamos ¿cómo regresamos a la variable original x? Hay que tener un poco de cuidado en el siguiente sentido. Pensemos, de manera más general, que estamos integrando $\displaystyle\int f(x)dx$ por medio de la sustitución $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$, entonces la integral se transformaría en

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(t) + C = F(g^{-1}(x)) + C,$$

donde F es una antiderivada de f. Note que para pasar de la variable t a la variable x es necesario que la función g sea invertible en algún subconjunto de su dominio.



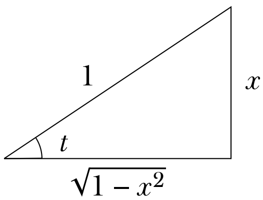
Ahora bien, como nuestra función $g(t)$ es $\operatorname{sen} t$, debemos garantizar que sea inyectiva con el fin encontrar la función inversa.

Entonces, debemos imponer la condición de que $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, con lo cual $t = \arcsen\ x$. Pero esa no es la única ventaja de restringir t al intervalo en mención. Si observamos bien, veremos que en la integral apareció $\sqrt{\cos^2 t}$ y arbitrariamente escribimos $\cos t$, en lugar de $|\cos t|$. La razón es que en este intervalo coseno toma valores no negativos y, por lo tanto, es válido "quitar" el valor absoluto.

Note que aún no hemos terminado, pues nuestra variable original es x y la respuesta aún está en términos de t. No solo necesitamos despejar t, sino que necesitamos escribir $\cos t$ en términos de $\operatorname{sen} t$. Para ello, recurrimos a la identidad pitagórica: $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$ y sustituimos $\operatorname{sen} t$ por x, de tal forma que $\cos t = \sqrt{1 - x^2}$. Finalmente,

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Por lo general, es útil representar la sustitución de forma geométrica. En este caso, $x = \operatorname{sen} t$, o convenientemente $\frac{x}{1} = \operatorname{sen} t$, corresponde al seno de un ángulo t de un triángulo rectángulo cuya longitud del cateto opuesto a t es x y con hipotenusa 1; esto por la razón trigonométrica $\operatorname{sen} t = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$. El cateto adyacente lo encontramos usando el teorema de Pitágoras.



Después de esto, es fácil encontrar $\cos t$ (o las funciones que sean necesarias) a partir del gráfico.

A continuación presentamos una tabla donde se sugiere qué sustitución trigonométrica realizar según la expresión que aparezca en el integrando.

Expresión	Sustitución	Restricción	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot \operatorname{sen} t$	$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \cdot \tan t$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \cdot \sec t$	$0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ $\pi \leq t < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$

Tabla 5.1:

Recuerde que la restricción dada se exige para que la función tenga inversa.

Ejemplo 5.36. Calcular $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} dx$.
De acuerdo con la tabla 5.1, la sustitución adecuada es $x = 4 \operatorname{sen} t$, con la restricción $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Consideramos la integral indefinida y luego evaluaremos en los límites de integración.

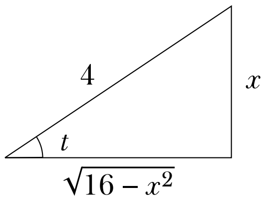
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} dx &= \int \frac{64 \operatorname{sen}^3 t}{\sqrt{16 - 16 \operatorname{sen}^2 t}} (4 \cos t)\ dt \\
&= 64 \int \frac{\operatorname{sen}^3 t \cos t}{\cos t}\ dt \\
&= 64 \int \operatorname{sen}^3 t\ dt \\
&= 64 \int \operatorname{sen}\ t\ - 64 \int \operatorname{sen} t \cos^2 t\ dt \\
&= -64 \cos t + \frac{64}{3} \cos^3 t + C.
\end{aligned}$$

Primera forma. Podemos evaluar en los nuevos límites de integración, que se obtienen por la relación entre las variables

$$\begin{cases} \operatorname{arc\,sen}(x/4) = t, \\ x = 2\sqrt{3} \longrightarrow t = \pi/3, \\ x = 0 \longrightarrow t = 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} dx = \left[-64 \cos t + \frac{64}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi/3} = \frac{40}{3}.$$

Segunda forma. La otra manera de evaluar esta integral es regresando a la variable original x. Asociamos el triángulo rectángulo que está a la derecha. Dado que $\operatorname{sen} t = \frac{x}{4} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, el cateto adyacente al ángulo t mide $\cos t = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$ (por el teorema de Pitágoras), entonces la integral se transforma (antes de evaluar) en

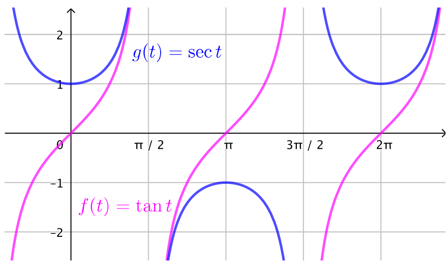


$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}dx = \left[-64 \cdot \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} + \frac{64}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right)^3\right]_0^{2\sqrt{3}} = \frac{40}{3}.$$

En este momento, y para cada ejercicio, el estudiante debe pensar en ¿qué le parece más cómodo? Cambiar los límites de integración o dibujar el triángulo y evaluar en los límites originales. Ahora bien, si la integral es indefinida, no hay nada más que hacer que dibujar el triángulo. En lo que sigue, resolveremos las integrales definidas por los dos métodos con el fin de ilustrarlos.

Ejemplo 5.37. Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

En este caso, la sustitución adecuada es $x = \sec t$, $dx = \sec t \tan t\ dt$, bajo la restricción $t \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$, para garantizar que existe la inversa de la secante, pero además, al remplazar x por $\sec t$ en la raíz, nos queda



$\sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\tan^2 t} = |\tan t|$, pero en dicho conjunto la tangente toma valores no-negativos, con lo cual podemos eliminar el valor absoluto y dejar $\tan t$.

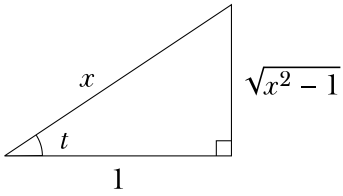
Integral indefinida:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2 t - 1}}{\sec t} \sec t \tan t\ dt = \int \tan^2 t\ dt$$
$$= \int \sec^2 t - 1\ dt = \tan\ t - t + C.$$

Primera forma. Como $t = \operatorname{arcsec}(x)$, al cambiar los límites, tenemos $\operatorname{arcsec} 1 = 0$ y $\operatorname{arcsec} 2 = \frac{\pi}{3}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = [\tan t - t]_0^{\pi/3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Segunda forma. Como $x = \sec t$, tenemos $t = \operatorname{arcsec} x$ y $x^2-1 = \tan^2 t$, es decir, $\tan t = \sqrt{x^2-1}$. Al incorporar estas expresiones en la integral indefinida, tenemos

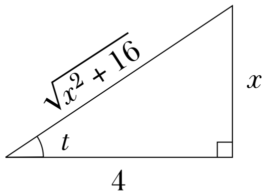


$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left[\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec}\ t\right]_1^2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Ejemplo 5.38. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$. En este caso, conviene $x = 4\tan t$, $dx = 4\sec^2 t\ dt$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} &= 4\int \frac{\sec^2 t}{\sqrt{16\tan^2 t + 16}}dt\\ &= \int \frac{\sec^2 t}{\sec t}dt\\ &= \int \sec t\ dt\\ &= \ln|\sec t + \tan t| + C.\end{aligned}$$

En este caso, no es necesario evaluar, pero sí regresar a la variable x. Como $\tan t = \frac{x}{4} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$, entonces asociamos el triángulo rectángulo y vemos que $\sec t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{4}$.



Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} &= \ln\left|\frac{1}{4}\sqrt{x^2+16} + \frac{x}{4}\right| + C_1\\ &= \ln|x + \sqrt{x^2+16}| + \ln\left|\frac{1}{4}\right| + C_1\\ &= \ln|x + \sqrt{x^2+16}| + C.\end{aligned}$$

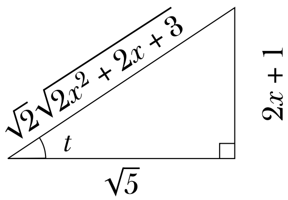
Note que al ser $\ln(1/4)$ una constante, podemos sumarla a la constante C_1. Observe además que t está restringido al intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, porque en ese intervalo la función $\tan t$ es inyectiva, pero además $\sec t$ es positiva. Lo primero garantiza que la función inversa exista, lo segundo evita que tengamos que poner el valor absoluto cuando la raíz se cancela con el cuadrado, esto es, $\sqrt{x^2+16} = \sqrt{16\tan^2 t + 16} = 4\sqrt{\tan^2 t + 1} = 4\sqrt{\sec^2 t} = 4|\sec t| = 4\sec t$.

En algunas ocasiones, es necesario completar el cuadrado para dejar una expresión en alguna de las formas de la tabla 5.1.

Ejemplo 5.39. Considere la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+3}}$, la expresión en la raíz $2x^2+2x+3 = (\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{5}{2}$. Entonces aplicamos la sustitución $\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{5}{2}}\tan t$ y $\sqrt{2}dx = \sqrt{\frac{5}{2}}\sec^2 t dt$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+3}} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{5}{2}} \\
&= \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sec^2 t}{\sqrt{\frac{5}{2}\tan^2 t + \frac{5}{2}}}\,dt \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sec^2 t\,dt}{\sqrt{\tan^2 t+1}} \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2}}\sec t\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sec t + \tan t| + C_1.
\end{aligned}$$

Igual que antes, asociamos un triángulo rectángulo de acuerdo con la sustitución. Al despejar tangente, $\tan t = \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$, obtenemos que la integral es



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\sqrt{2x^2+2x+3} + \frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right| + C_1$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\sqrt{2x^2+2x+3} + 2x+1\right| + C.$$

4.1. Sustitución hiperbólica

Este tipo de sustituciones no es de uso exclusivo de las funciones trigonométricas. Las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} t$ y $\cosh t$ satisfacen la identidad

$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, entonces podemos usarlas cuando halla expresiones como

$$\sqrt{1+x^2} \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2-1}.$$

Ejemplo 5.40. Calcule la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Usamos la sustitución $x = \operatorname{senh} t$, $dx = \cosh t$ para $t \geq \operatorname{arcsenh}(1)$, en este conjunto también $\cosh t \geq 0$, por lo que $\sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{\cosh t}{\cosh t}\, dt \\ &= \int dt \\ &= t + C, \end{aligned}$$

pero al despejar t de la sustitución tenemos que $t = \operatorname{arcsenh} x$. Luego,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsenh} x + C.$$

Ejercicios 5.4

1. Resuelva la integral utilizando la sustitución sugerida.

   a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx$, $x = \tan t$.

   b) $\int \frac{dx}{x^2+1}$, $x = \tan t$.

   c) $\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$, $2x = \operatorname{sen} t$.

   d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$, $x = 3\sec t$.

   e) $\int \sqrt{4-5x^2}\, dx$, $\sqrt{5}x = 2\operatorname{sen} t$.

   f) $\int \frac{dx}{x^2-1}$, $x = \sec t$.

   g) $\int (1+9x^2)^{3/2}\, dx$, $3x = \tan t$.

   h) $\int_{2}^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2-4}\, dx$, $x = 2\sec t$.

2. Para hallar $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$ complete el cuadrado y luego haga $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$.

3. Resuelva la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ haciendo la sustitución $x = \tan t$. Luego, compare con el ejemplo 5.40 y, dado que $\operatorname{arc\,sen}(0)=0$, halle una expresión para esta función.

4. Resuelva la integral.

   a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dt}{t^3\sqrt{t^2-1}}$.

   b) $\displaystyle\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$.

   c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$.

   d) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, con $a \geq 0$.

   e) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+4}\,dx$.

   f) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$.

   g) $\displaystyle\int \frac{u^2}{1+u^4}\,du$.

   h) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\,dx$.

   i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta$.

   j) $\displaystyle\int \sqrt{e^{4x}+e^{3x}}\,dx$.

   k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left[(ax)^2-b^2\right]^{3/2}}$.

   l) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{2x^2-3}$.

   m) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-7x^2}$.

   n) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$.

   ñ) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$.

   o) $\displaystyle\int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$.

5. Integración por fracciones parciales

La técnica que describimos a continuación se usa para descomponer una función racional como suma de funciones racionales más simples. Más precisamente, la técnica se usa donde los denominadores son potencias de polinomios lineales o de polinomios cuadráticos irreducibles.

Suponga que la función racional $f(x)$ que queremos integrar tiene la forma

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \qquad p(x),q(x)\in\mathbb{R}[x].$$

Si $\partial p(x) \geq \partial q(x)$ (el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador), aplicamos el algoritmo de la división y obtenemos dos polinomios, el cociente $q(x)$ y el residuo $r(x)$, que satisfacen

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x), \qquad \text{con} \qquad \partial q(x) > \partial r(x).$$

Luego, podemos re-escribir a f como

$$f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

así, la integral de $f(x)$ se reduce a la integral de $s(x)$, que es un polinomio, más la integral de $\frac{r(x)}{q(x)}$, para esta última aplicamos la descomposición en fracciones parciales. Por eso, en adelante consideraremos funciones racionales tales que $\partial p(x) < \partial q(x)$.

Para saber de qué se trata la técnica, empecemos con el siguiente ejemplo. La función $\frac{1}{x^2-1}$ se descompone como la suma $\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$. Cada sumando es una fracción parcial y resulta casi inmediato integrarlas: son logaritmos.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \int \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\,dx \\
&= \int \frac{1/2}{x-1}\,dx - \int \frac{1/2}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

Lo primero que observamos es que en la fracción $\frac{1}{x^2-1}$ el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Lo segundo es que los factores de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ son los denominadores de las fracciones parciales. Entonces, para encontrar la descomposición escribimos la función dada como

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

donde A y B son las constantes que tenemos que determinar. Luego sumamos las fracciones parciales y obtenemos

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Como las dos fracciones tienen el mismo denominador, podemos concluir que sus numeradores son iguales, esto es,

$$1 = A(x+1) + B(x-1), \tag{5.10}$$

y procedemos a buscar los valores de las constantes.

Primera forma. Agrupamos los coeficientes independientes y los coeficientes de la variable x del lado derecho de (5.10) y nos queda $1 = x(A+B) +$

$(A - B)$. Como el polinomio $1 = 0x + 1$, entonces igualando coeficientes conseguimos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} A + B &= 0, \\ A - B &= 1, \end{cases}$$

cuya solución es $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

Segunda forma. Válida cuando todos los factores son lineales distintos (únicamente). En la expresión (5.10), evaluamos en las raíces del denominador de $\frac{1}{x^2-1}$:

- cuando $x = -1 \implies 1 = A\underbrace{\cancel{(-1+1)}}_{0} + B(-1-1) \implies 1 = -2B \implies -\frac{1}{2} = B$;
- cuando $x = 1 \implies 1 = A(1+1) + B\underbrace{\cancel{(1-1)}}_{0} \implies 1 = 2A \implies \frac{1}{2} = A$.

Con cualquiera de las dos formas, obtenemos las constantes A y B y podemos descomponer la función racional como se mostró antes

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}.$$

Las fracciones parciales

Dada una función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ (con $\partial p < \partial q$), podemos descomponerla en suma de funciones racionales de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{ó} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}, \tag{5.11}$$

donde A, B, a, b, c son números reales; las potencias i, j son enteros positivos, $a \neq 0$ y el polinomio $ax^2 + bx + c$ es irreducible. Las funciones de la forma (5.11) se llaman **fracciones parciales**. La descomposición se debe, en parte, a que un polinomio con coeficientes reales siempre se puede factorizar como producto de factores lineales o cuadráticos irreducibles. Con las técnicas vistas hasta ahora, es posible integrar cualquier fracción parcial, por eso, es útil descomponer una función racional en suma de estas fracciones. Observe que las fracciones parciales de la forma $\frac{A}{ax+b}$ tienen antiderivada $\frac{A}{a}\ln|ax+b|$.

Ejemplo 5.41. $\int \frac{4}{7x-2}\,dx = \frac{4}{7}\ln|7x-2| + C$.

Las integrales de las funciones de la forma $\frac{A}{(ax+b)^n}$ podemos resolverlas utilizando la sustitución $u = ax + b$.

Ejemplo 5.42. Consideramos $\int \frac{-(5/4)}{(3-2x)^3}\, dx$. Entonces hacemos la sustitución $u = 3 - 2x$ y $-\frac{1}{2}du = dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{-(5/4)}{(3-2x)^3}\, dx &= \frac{5}{8}\int \frac{1}{u^3}\, du \\ &= -\frac{5}{16}u^{-2} + C \\ &= -\frac{5}{16(3-2x)^2} + C.\end{aligned}$$

La tercera clase de funciones ocurre cuando el denominador de la fracción es un polinomio cuadrático irreducible, en este caso, es necesario completar el cuadrado para luego aplicar una sustitución simple y/o una sustitución trigonométrica.

Ejemplo 5.43. Considere la función $\dfrac{3x-1}{x^2+x+2}$, el discriminante[2] del denominador es -7, esto significa que $x^2 + x + 2$ es irreducible. Entonces, completamos el cuadrado del denominador

$$\frac{3x-1}{x^2+x+2} = \frac{3x-1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}.$$

Luego, expresamos el numerador en términos de $(x + \frac{1}{2})$, es decir,

$$\frac{3x-1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \frac{3(x+\frac{1}{2}) - \frac{5}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}.$$

Entonces, la integral de la fracción parcial se separa en dos integrales, una se puede resolver con la sustitución $(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = u$, otra con la sustitución trigonométrica $(x + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{7}}{2}\tan t$, luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{x^2+x+2}\, dx &= \int \frac{3(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\, dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} \\ &= \int \frac{3}{2u}\, du - \frac{5}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\sec^2 t}{\frac{7}{4}\sec^2 t}\, dt \\ &= \tfrac{3}{2}\ln|u| - \tfrac{5}{\sqrt{7}}t + C \\ &= \tfrac{3}{2}\ln\left|(x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{7}{4}\right| - \tfrac{5}{\sqrt{7}}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{7}}(x+\tfrac{1}{2})\right) + C.\end{aligned}$$

[2]Recuerde que el discriminante del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ es $b^2 - 4ac$.

Si el denominador de la fracción parcial es una potencia de un polinomio cuadrático irreducible, se aplica la misma estrategia.

Ejemplo 5.44. Consideremos la integral $\int \frac{3x-1}{(x^2+x+2)^2}$. Entonces, aplicamos las mismas sustituciones del ejemplo 5.43 y tenemos

$$\int \frac{3x-1}{(x^2+x+2)^2}\,dx = \int \frac{3(x+\frac{1}{2})}{\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\right]^2}\,dx - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\right]^2}$$

$$= \int \frac{3}{2u^2}\,du - \frac{5}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\sec^2 t}{\frac{49}{16}\sec^4 t}\,dt$$

$$= -\tfrac{3}{2}\frac{1}{u} - \tfrac{20}{7\sqrt{7}}\int \cos^2 t\,dt$$

$$= -\tfrac{3}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} - \tfrac{10}{7\sqrt{7}}\left[t+\operatorname{sen} t\cos t\right]+C$$

$$= \frac{-3}{2[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}]} - \tfrac{10}{7\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{7}}(x+\tfrac{1}{2})\right)+\frac{\sqrt{7}(2x+1)}{4(x^2+x+2)}\right]+C.$$

Las integrales de las fracciones parciales pueden ser extensas en algunos casos, pero son realizables mediante las técnicas y estrategias vistas hasta ahora. A continuación vamos a estudiar cómo descomponer una función racional en suma de fracciones parciales, lo vamos a hacer en cuatro casos según tengamos: factores lineales, cuadráticos irreducibles o potencias de estos.

5.1. Casos de descomposición

Caso 1. $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ y el denominador $q(x) = (a_1x+b_1)\cdots(a_nx+b_n)$ es un producto de factores lineales distintos. Entonces, la función racional se descompone de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(a_ix+b_i)}.$$

Ejemplo 5.45. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$. Primero, verificamos la condición sobre los grados de numerador y denominador. Segundo, factorizamos el denominador y descomponemos la función racional como sigue

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Después de realizar la suma de fracciones, concluimos que los numeradores son iguales, esto es,

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1). \qquad (5.12)$$

Como vimos antes, hay dos formas de encontrar las constantes. La **primera forma** es evaluar (5.12) en las raíces del denominador: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

- En $x = 0$, se tiene $-1 = -2A, \implies A = \frac{1}{2}$,
- en $x = \frac{1}{2}$, se tiene $\frac{1}{4} = \frac{5}{4}B \implies B = \frac{1}{5}$,
- y en $x = -2$, se obtiene $-1 = 10C \implies C = -\frac{1}{10}$.

Luego, la integral queda

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

La **segunda forma** de encontrar los coeficientes A, B y C es empezar resolviendo la multiplicación

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 1 &= A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1) \\ &= x^2(2A+B+2C) + x(3A+2B-C) - 2A.\end{aligned}$$

Igualando coeficientes nos queda $\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ -2A = -1. \end{cases}$

Resolvemos este sistema y llegamos nuevamente a $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$.

Ejemplo 5.46. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$ para $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} \\ &= \frac{Ax + Aa + Bx - Ba}{x^2-a^2} \\ \implies 1 &= x(A+B) + (Aa - Ba).\end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos el sistema $\begin{cases} A+B=0 \\ aA-aB=1, \end{cases}$ cuya solución es $A=\frac{1}{2a}$, $B=-\frac{1}{2a}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} \\ &= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.\end{aligned}$$

Caso 2. $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $q(x) = (a_1x+b_1)^{n_1}\cdots(a_ix+b_i)^{n_i}$ es un producto con factores lineales repetidos, es decir, algún $n_j > 1$. Entonces,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{A_{1,k}}{(a_1x+b_1)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{n_i} \frac{A_{i,k}}{(a_ix+b_i)^k}.$$

Note que en cada término hay tantos sumandos como el exponente del factor correspondiente. Esto es, si en $q(x)$ aparece el factor $(ax+b)^3$, entonces aparecerán tres sumandos, así:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3}.$$

Ejemplo 5.47. Para calcular $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3-x^2-x+1}dx$, factorizamos el denominador y descomponemos en fracciones parciales

$$\begin{aligned}\frac{4x}{x^3-x^2-x+1} &= \frac{4x}{x(x^2-1)-(x^2-1)} \\ &= \frac{4x}{(x^2-1)(x-1)} \\ &= \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.\end{aligned}$$

Realizamos la suma de fracciones, dejando como denominador al mínimo común múltiplo

$$\frac{4x}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A(x+1)(x-1)+B(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)},$$

igualamos numeradores

$$\begin{aligned} 4x &= A(x+1)(x-1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= x^2(A+C) + x(B-2C) + (-A+B+C), \end{aligned}$$

de donde obtenemos el sistema $\begin{cases} A \quad\quad + \ C & = 0, \\ \quad\quad B - 2C & = 4, \\ -A + B + C & = 0, \end{cases}$
cuya solución es $A = 1,\ B = 2,\ C = -1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{(x-1)} - \ln|x+1| + C \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{2}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Caso 3. $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos. A cada factor cuadrático $a_i x^2 + b_i x + c_i$ se asocia la fracción parcial

$$\frac{A_i x + B_i}{a_i x^2 + b_i x + c_i}.$$

Ejemplo 5.48. Calcular $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx.$
En este caso, vemos que el denominador se factoriza como producto de un factor lineal y un cuadrático irreducible, entonces la descomposición queda

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \\ &= \frac{A(x^2+4) + x(Bx + C)}{x(x^2+4)}. \end{aligned}$$

Igualando numeradores, obtenemos que

$$2x^2 - x + 4 = (A+B)x^2 + Cx + 4A,$$

de donde $\begin{cases} A + B & = 2 \\ \quad\quad C & = -1 \\ 4A & = 4. \end{cases}$

La solución del sistema es $A = 1,\ B = 1,\ C = -1$, y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x-1}{x^2+4}dx \\ &= \ln|x| + \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Caso 4. $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos, es decir, que $(ax^2+bx+c)^n$ divide a $q(x)$. Entonces, por cada factor de este tipo, aparecerá la suma de fracciones parciales en la descomposición de f

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k x + B_k}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

Ejemplo 5.49. Calcular $\displaystyle\int \frac{2x-6}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$. En este caso, tenemos un factor lineal y un factor cuadrático repetido, luego la descomposición queda

$$\begin{aligned}\frac{2x-6}{(x-1)(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Como los denominadores son iguales, entonces igualamos los numeradores

$$\begin{aligned}2x - 6 = {} & Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 - Bx^3 + Bx^2 - Bx \\ & + Cx^3 - Cx^2 + Cx - C + Dx^2 - Dx + Ex - E \\ = {} & x^4(A+B) + x^3(-B+C) + x^2(2A+B-C+D) \\ & + x(-B+C-D+E) + (A-C-E)\end{aligned}$$

y obtenemos el sistema $\begin{cases} A + B & = 0 \\ \quad -B + C & = 0 \\ 2A + B - C + D & = 0 \\ \quad -B + C - D + E & = 2 \\ A \quad -C \quad -E & = -6. \end{cases}$

Después de resolver el sistema, encontramos que los valores de las constantes son $A = -1,\ B = 1,\ C = 1,\ D = 2,\ E = 4$, y, por lo tanto, la integral queda

$$\int \frac{2x-6}{(x-1)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{2x+4}{(x^2+1)^2}dx$$
$$= -\ln|x-1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{4}{(x^2+1)^2}dx$$
$$= -\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x - \frac{1}{x^2+1} + \int \frac{4}{(x^2+1)^2}dx.$$

Para la última integral, hacemos la sustitución $x = \tan\theta$, de donde obtenemos $4\int \cos^2\theta d\theta = \frac{4}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta = 2\left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right) + C = 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C = 2\arctan x + 2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C = 2\arctan x + \frac{2x}{x^2+1} + C$, así que la integral pedida es

$$= -\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x - \frac{1}{x^2+1} + 2\arctan x + \frac{2x}{x^2+1} + C$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right| + 3\arctan x + \frac{2x-1}{x^2+1} + C.$$

La estrategia de fracciones parciales es realmente una manipulación algebraica para descomponer una función racional en sumandos más simples. Siempre conlleva a la solución de un sistema de ecuaciones, que únicamente en el primer caso se puede solucionar evaluando en cierta ecuación el valor de las raíces de los factores lineales. Se recomienda que el lector investigue por sus propios medios la teoría de solución de sistemas de ecuaciones lineales, que se escapa del objetivo de estas notas.

5.2. Sustitución $\tan(\theta/2)$

Ahora consideraremos funciones racionales de dos variables x y y. Estas funciones tienen la forma

$$\mathbb{R}(x,y) = \left\{\frac{p(x,y)}{q(x,y)} \ : \ q(x,y) \neq 0\right\},$$

donde p y q son polinomios reales de dos variables. Dada una función racional $f(x,y)$, si sustituimos $x = \cos\theta$ y $y = \operatorname{sen}\theta$ (o al contrario), obtenemos una **función racional de senos y cosenos**. Observe que una función de este tipo solo depende de la variable θ.

Ejemplo 5.50. Dada la función racional $f(x,y) = \frac{xy}{1-xy^2}$, hacemos la sustitución $x = \operatorname{sen}\theta, \quad y = \cos\theta$. De esta forma, obtenemos la función racional de senos y cosenos

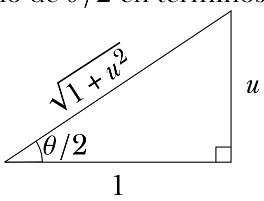
$$g(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}.$$

Ejemplo 5.51. Considere la función racional $f(x, y) = \frac{2-x+y+3xy-x^2+4y^2}{5+x-2y+xy^2}$. Si realizamos la sustitución $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, obtenemos una nueva función

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \frac{2 - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta}{5 + \cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Sustitución $\tan(\theta/2)$ es el nombre que se le da a una estrategia de integración que se aplica a funciones racionales de senos y cosenos. Consiste en hacer la sustitución $u = \tan(\theta/2)$, con la restricción[3] $-\pi < \theta < \pi$. Para completar la sustitución, debemos hallar expresiones para $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ y $d\theta$ en términos de u.

Podemos representar la situación geométricamente y hacer corresponder un triángulo rectángulo a la sustitución $\frac{u}{1} = \tan(\theta/2)$, como se muestra en el triángulo de abajo, y entonces calcular las expresiones para seno y coseno de $\theta/2$ en términos de u:



$$\cos(\theta/2) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad \operatorname{sen}(\theta/2) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Usando estas dos expresiones, calculamos seno y coseno de θ:

$$\cos\theta = \cos^2(\theta/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2) = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

Y, para la derivada $\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2}\sec^2(\theta/2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} d\theta &= 2\cos^2(\theta/2)\, du \\ &= \frac{2}{1+u^2}du. \end{aligned}$$

Con estas sustituciones, la integral de $g(\theta)$ se convierte en la integral de una función racional de la variable u, entonces se puede descomponer en fracciones parciales. Veamos el siguiente ejemplo.

[3]Con el objetivo de que $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, y así la función inversa esté definida.

Ejemplo 5.52. Calcular $\displaystyle\int \frac{d\theta}{3-5\operatorname{sen}\theta}$ haciendo uso de la sustitución $u=\tan(\theta/2)$. La integral en términos de la variable u queda

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(\frac{2}{1+u^2}\right)}{3-5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)}du &= 2\int \frac{\frac{1}{1+u^2}}{\frac{3(1+u^2)-10u}{1+u^2}}du\\ &= 2\int \frac{du}{3u^2-10u+3}\\ &= 2\int \frac{du}{(3u-1)(u-3)},\end{aligned}$$

y resolvemos la integral usando el método de fracciones parciales.

$$\frac{1}{(3u-1)(u-3)} = \frac{A}{3u-1}+\frac{B}{u-3},$$

$$\text{entonces}\quad 1 = A(u-3)+B(3u-1).$$

- Para $u=\frac{1}{3} \Longrightarrow A=-\frac{3}{8}$,
- para $u=3 \Longrightarrow B=\frac{1}{8}$.

Entonces, solucionamos la integral y volvemos a la variable θ

$$\begin{aligned}2\int \frac{du}{(3u-1)(u-3)} &= 2\left[-\frac{3}{8}\int \frac{du}{3u-1}+\frac{1}{8}\int \frac{du}{u-3}\right]\\ &= -\frac{1}{4}\ln|3u-1|+\frac{1}{4}\ln|u-3|+C\\ &= -\frac{1}{4}\ln|3\tan(\theta/2)-1|+\frac{1}{4}\ln|\tan(\theta/2)-3|+C.\end{aligned}$$

Ejercicios 5.5

1. Realice la división de polinomios y exprese el cociente $\frac{p(x)}{q(x)} = s(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ con $\partial r < \partial q$.

   a) $\dfrac{x^2+2x+5}{x-3}$.

   b) $\dfrac{3x^3+2x^2+x+1}{2x+1}$.

   c) $\dfrac{x^3+1}{x^2-2}$.

   d) $\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+2x+3}$.

2. Exprese la fracción en sumas parciales (sin hallar las constantes) de las funciones racionales dadas.

a) $\dfrac{1}{x^2-2x}$.

b) $\dfrac{u^2}{1+u^4}$.

c) $\dfrac{x}{x-6}$.

d) $\dfrac{r^2}{r+4}$.

3. Halle la integral de la fracción parcial aplicando las estrategias de las secciones anteriores. Note que no es necesario descomponer.

a) $\displaystyle\int \frac{5}{4-7x}\,dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{5}{(1+u)^4}\,du$.

c) $\displaystyle\int \frac{2-3x}{2x^2-3x+6}\,dx$.

d) $\displaystyle\int \frac{r+1}{(r^2+4)^3}\,dr$.

e) $\displaystyle\int \frac{2-7x}{(-3x^2+2x+1)^2}\,dx$.

f) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}\,dx$.

4. Resuelva la integral.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$.

b) $\displaystyle\int \frac{u^2}{1+u^4}\,du$.

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$.

d) $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$.

e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$.

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$.

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$.

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+5)^2(x-1)}$.

i) $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$.

j) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$.

k) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$.

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$.

m) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$.

n) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}\,dx$.

ñ) $\displaystyle\int \frac{2x^3-7x^2+7x}{2x-5}\,dx$.

o) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$.

p) $\displaystyle\int \frac{4x^3-x^2+16x}{x^2+4}\,dx$.

q) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x+4}{x^2+x}\,dx$.

5. Resuelva la integral con la sustitución $\tan(\theta/2)$.

   a) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx.$

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx.$

   c) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx.$

   d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2\cos x}\, dx.$

6. Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}\, dx.$

   a) Usando la sustitución $\tan(\theta/2)$.

   b) Multiplicando por el conjugado.

Capítulo *seis*

Integrales impropias

Hasta ahora hemos realizado integrales de funciones que son continuas sobre un intervalo $[a, b]$ (o con discontinuidades de salto) y hemos integrado sobre intervalos acotados. En este capítulo, veremos que es posible integrar sobre intervalos infinitos y que es posible integrar algunas funciones no acotadas; estas integrales se conocen como **impropias**. Para ello, dividimos las integrales en dos tipos, según el caso en el que estemos, y utilizamos nuestro conocimiento de límites para encontrar los valores reales de estas integrales. En algunos casos, no será posible encontrar el valor real de la integral, pero sí podremos decir si ella converge o no comparándola con una integral impropia conocida.

1. Integrales impropias de tipo I

Llamaremos así a las integrales definidas sobre un intervalo infinito. Supongamos que $f(x)$ está definida en el intervalo donde se va a integrar, entonces

1. Si f es continua en $[a, \infty)$, definimos

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.}$$

2. Si f es continua en $(-\infty, b]$, definimos

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.}$$

3. Si f es continua en $\mathbb{R}$ y para algún real c tanto $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ como $\int_c^\infty f(x)dx$ existen y son finitas, entonces

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.}$$

En cada caso, si el límite existe, diremos que la integral es **convergente** y su valor es el del límite. Cuando el límite diverge, la integral también lo hace y puede diverger a $+\infty$ o $-\infty$, o también diverger de forma oscilante según lo haga el límite.

Dos preguntas que surgen del tercer caso son ¿importa el valor que toma la constante c?, ¡no!, y si la integral converge para un valor de c, entonces ¿converge para todos?, ¡Sí! La siguiente proposición responde a estos interrogantes de forma más precisa.

Proposición 6.1. *Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y c algún valor real para el cual las integrales $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ y $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ convergen. Entonces, para cualquier otro real b, las integrales $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ y $\int_{b}^{\infty} f(x)dx$ convergen, e incluso*

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx.$$

Demostración. Para todo número real t, se tiene que

$$\int_{t}^{b} f\ dx = \left(\int_{t}^{c} f\ dx + \int_{c}^{b} f\ dx\right).$$

Como $\lim\limits_{t\to-\infty} \int_{t}^{c} f\ dx$ existe, entonces $\lim\limits_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f\ dx$ también existe y converge a $\int_{-\infty}^{c} f\ dx + \int_{c}^{b} f\ dx$. De forma análoga, ocurre con $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{b}^{t} f\ dx$, el cual converge a $\int_{c}^{\infty} f\ dx - \int_{c}^{b} f\ dx$ (¡ejercicio!). Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f\ dx + \lim_{t\to\infty} \int_{b}^{t} f\ dx &= \int_{-\infty}^{c} f\ dx + \int_{c}^{b} f\ dx + \int_{c}^{\infty} f\ dx - \int_{c}^{b} f\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{c} f\ dx + \int_{c}^{\infty} f\ dx.\end{aligned}$$

☑

Ejemplo 6.2. Calcule $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$. De acuerdo con la definición, tenemos

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = 1,$$

la integral converge a 1.

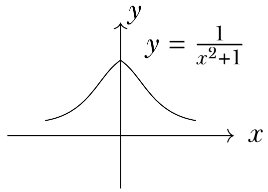
Ejemplo 6.3. Encuentre el valor de la integral $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} [\arctan x]_{0}^{b} \\ &= \lim_{b\to\infty} [\arctan b - \arctan 0] = \lim_{b\to\infty} [\arctan b - 0] = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

decimos que la integral converge a $\pi/2$.

Ejemplo 6.4. Las integrales impropias nos permiten extender la definición de área para regiones no acotadas. Más precisamente, el área corresponde al valor de la integral impropia, si esta existe. Para ilustrar esto, hallamos el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2+1}$ en todo el eje real.

Note primero que la función siempre es positiva, es continua en todo $\mathbb{R}$ y, además, es par. Entonces calculamos el área por medio de la integral



$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Ejemplo 6.5. Determinamos la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} e^x dx$.

$$\int_1^{\infty} e^x dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} e^x dx = \lim_{b\to\infty} [e^x]_1^b = \lim_{b\to\infty} [e^b - e],$$

el último límite diverge a ∞. En este caso, decimos que la integral diverge a infinito.

Ejemplo 6.6. Determinamos la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b\to\infty} [-e^{-b} + 1] = 1.$$

Es decir, que la integral converge y su valor es 1.

Ejemplo 6.7. Analizamos el comportamiento de $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx$.

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{t\to\infty} [-\cos x]_0^t = \lim_{t\to\infty} [-\cos t + 1].$$

Como este límite no existe y no se dirige a $+\infty$ ni a $-\infty$, decimos que la integral diverge de forma oscilante.

Nota 6.8. *Cuando la integral diverge a $+\infty$ (resp. $-\infty$), vamos a escribir $\int f dx = \infty$ ($\int f dx = -\infty$), a diferencia del caso en que la integral diverge de forma oscilante. Hacemos hincapié en esta distinción para enfatizar en el comportamiento de la integral. En el ejemplo 6.5, que la integral diverja a ∞ significa que su valor es tan grande como se quiera; mientras la integral del ejemplo 6.7 oscila cuando t se hace grande, por ejemplo, cuando $t = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, la integral es cero, pero para $t = (2k+1)\pi$ es 2; y cuando $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, la integral es 1, y así lo podemos hacer para todos los valores en $[0, 2]$, por eso usamos la palabra oscilante.*

Ejemplo 6.9. Determine todos los valores de p para los cuales la integral

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} \quad \text{converge.}$$

- Si $p = 1$ diverge, pues

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$$

$$\Rightarrow \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{t\to\infty}[\ln|\ln t| - \ln|\ln 2|] = \infty.$$

- Supongamos $p \neq 1$, entonces

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int u^{-p}du = \frac{u^{-p+1}}{-p+1} + C = \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} + C$$

$$\Rightarrow \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{(\ln t)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right).$$

  Note que en el caso en que $1-p > 0$, la integral diverge, y si $1-p < 0$, converge a $-\frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}$. En conclusión,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1} & \text{si } p > 1, \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

2. Integrales impropias de tipo II

Llamaremos así a las integrales de funciones que tienen una discontinuidad esencial de tipo infinito dentro del intervalo de integración.

1. Si f es continua en $(a, b]$ y discontinua en a, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx.}$$

2. Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en b, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx.}$$

3. Si f es discontinua en c, donde $a < c < b$, y es continua en $[a, c) \cup (c, b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,}$$

siempre que las dos integrales de la derecha converjan.

Como antes, si el límite existe diremos que la integral converge; si no, es divergente y puede hacerlo a $+\infty$, $-\infty$ o diverger de forma oscilante.

Ejemplo 6.10. Para determinar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, primero hallamos las discontinuidades de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $[0, 1]$. Vemos que solo tiene una discontinuidad de tipo infinito en $x = 0$. Entonces,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} 2\left[1 - \sqrt{a}\right] = 2.$$

Note la importancia de calcular el límite cuando a tiende a cero por la derecha.

Ejemplo 6.11. Para determinar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, primero note que la función presenta una discontinuidad de tipo infinito en $x = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to 1^-} \left[\operatorname{arc\,sen} x\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to 1^-} [\operatorname{arc\,sen} b - \operatorname{arc\,sen} 0] = \lim_{b\to 1^-} \operatorname{arc\,sen} b = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Nota 6.12. *Si usted no se da cuenta que la función tiene una discontinuidad de tipo infinito dentro del intervalo de integración y realiza la integral definida sin hacer una pausa en el punto de discontinuidad, cometerá un grave error. Por ejemplo, si quiere realizar la integral* $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x-1}$, *podría pensar equivocadamente y calcular*

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{dx}{x-1} &= \ln|x-1|\Big|_0^4 \\ &= \ln(3) - \ln|-1| = \ln 3. \qquad \textit{ERROR!!!!}\end{aligned}$$

Esta función presenta una discontinuidad de tipo infinito en $x = 1$, *por lo tanto,*

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^4 \frac{dx}{x-1}.$$

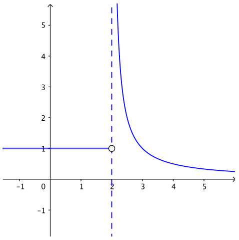
Para la primera integral, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{dx}{x-1} = \lim_{b\to 1^-} \ln|x-1|\Big|_0^b \\ &= \lim_{b\to 1^-}\Big[\ln|b-1| - \ln|-1|\Big] = \lim_{b\to 1^-} \ln|b-1| = -\infty.\end{aligned}$$

Como esta integral diverge, la integral completa diverge.

Ejemplo 6.13. Considere la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2, \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Determinamos la convergencia de $\int_1^3 f(x)dx$.



Como la función tiene una discontinuidad esencial en $x = 2$ se hace necesario partir la integral así:

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 1\, dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}dx.$$

La primera integral vale 1, mientras que la segunda es impropia, así que usamos la definición con límite

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{x-2}dx &= \lim_{a\to 2^+}\int_a^3 \frac{1}{x-2}dx = \lim_{a\to 2^+} \ln|x-2|\Big|_a^3 \\ &= \ln 1 - \lim_{a\to 2^+} \ln|a-2| = +\infty.\end{aligned}$$

Concluimos que la integral diverge a $+\infty$.

3. Propiedades

Diremos que dos integrales impropias tienen el mismo **carácter** y usaremos el símbolo $\sim$ si ambas convergen, ambas divergen a $\pm\infty$ o ambas son oscilantes. A continuación listamos algunas propiedades cuyas demostraciones son sencillas a partir de las definiciones. En lo que sigue asumimos que todas las funciones están definidas en su dominio de integración.

Propiedad 1. Sea f integrable sobre cualquier intervalo finito $[a, t]$. Si $b \geq a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)dx \sim \int_b^\infty f(x)dx.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx &= \lim_{t\to\infty}\left(\int_a^b f(x)dx + \int_b^t f(x)dx\right)\\ &= \int_a^b f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_b^t f(x)dx.\end{aligned}$$

El límite de la izquierda y de la derecha tienen el mismo comportamiento, es decir, ambos son finitos, ambos infinitos o ninguno existe. ☑

De la misma forma, si f es integrable en todo intervalo finito $[t, b]$, entonces, para $a \leq b$,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \sim \int_{-\infty}^a f(x)dx.$$

Propiedad 2. Sea f integrable en cualquier intervalo finito $[a, t]$ y $\lambda \neq 0$. Entonces,

$$\int_a^\infty f(x)dx \sim \int_a^\infty \lambda f(x)dx.$$

Demostración. Basta darse cuenta que

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t \lambda f(x)dx = \lambda \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx,$$

así que los dos límites son simultáneamente finitos, infinitos u oscilan. ☑

Propiedad 3. Sean f y g integrables en cualquier intervalo finito $[a, t]$. Si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ convergen, entonces debido a la linealidad de la integral y del límite, $\displaystyle\int_a^\infty (f+g)(x)dx$ también converge y, además,

$$\int_a^\infty (f+g)(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx.$$

Propiedad 4. No hay que confundir $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ con $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{-t}^t f(x)dx$. Este último se conoce como **valor principal de Cauchy** y se denota por $VP\int_{-\infty}^\infty f$. Si f integrable en cualquier intervalo cerrado y $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ es convergente, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^t f(x)dx.$$

Sin embargo, *la implicación contraria es FALSA*.

Contrajemplo. $\int_{-\infty}^{\infty} 4x^3 dx$ no es convergente porque

$$\int_{0}^{\infty} 4x^3 dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} 4x^3 dx = \lim_{t\to\infty} x^4\Big|_0^t = +\infty,$$

sin embargo,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} 4x^3 dx = \lim_{t\to\infty} x^4\Big|_{-t}^{t} = \lim_{t\to\infty} t^4 - t^4 = 0,$$

esto es, $VP \int_{-\infty}^{\infty} 4x^3 dx = 0$.

Propiedad 5. Sea f integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, t]$ y sea $L := \lim_{x\to\infty} f(x)$. Si $L \neq 0$, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Demostración. En efecto, supongamos que $L > 0$, esto quiere decir que, dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $x \geq N$, tenemos que $|f(x) - L| < \epsilon$, esto es, $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. En particular, para $\epsilon = \frac{L}{2}$, si $x \geq N$, tenemos que $\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$. Luego, $0 < \frac{L}{2} < f(x)$ para todo $x \in [N, \infty)$. Entonces,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{N}^{t} \frac{L}{2} dx \leq \lim_{t\to\infty} \int_{N}^{t} f(x)dx.$$

Como la integral de la izquierda diverge, la de la derecha diverge y, por la propiedad 1, $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge. El caso en que $L < 0$ es similar y se deja como ejercicio al lector. ☑

Lo que quiere decir esta propiedad es que *el hecho de que el límite L sea cero es una condición necesaria pero no suficiente para que la integral sea convergente*. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, y sin embargo $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, en efecto,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln|t| - \ln 1 = +\infty.$$

El mismo ejemplo nos muestra que el recíproco no es cierto, esto es, *si la integral diverge, NO necesariamente el límite es diferente de cero*.

4. Criterios de comparación

En algunas ocasiones, es complicado (o imposible) encontrar una antiderivada de una función y esto dificulta determinar la convergencia de las integrales impropias asociadas a esta. Sin embargo, hay otra forma por medio de la comparación con otras integrales para las cuales ya esté determinada su convergencia. El primero de tales criterios es tal vez el más importante, pues de este se deducen importantes propiedades, así como otros criterios. En esta sección, todas las funciones son no-negativas.

Criterio de comparación directa. Sean f y g continuas en $[a, \infty)$ y tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para toda $x \geq a$. Por propiedades de la integral sabemos que

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt,$$

luego,

$$\boxed{\text{si } \int_a^\infty g(x)dx \text{ converge, entonces } \int_a^\infty f(x)dx \text{ converge.}}$$

y

$$\boxed{\text{si } \int_a^\infty f(x)dx \text{ diverge, entonces } \int_a^\infty g(x)dx \text{ diverge.}}$$

Ejemplo 6.14. Determinamos la convergencia o divergencia de la integral $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^4}dx$.

Como $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ para todo x real, entonces $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}$ en $[1, \infty)$ y, puesto que la siguiente integral impropia converge:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^4}dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{b^3} - 1\right] = \frac{1}{3},$$

se sigue que la integral impropia I también converge (aunque NO necesariamente al mismo valor).

Ejemplo 6.15. Estudiamos la convergencia de $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}dx$. Observe que $e^x \geq x$ para todo $x \in [1, \infty)$, en consecuencia, $\frac{e^x}{x^2} \geq \frac{1}{x}$; y ya que la integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge, entonces I también diverge.

Ejemplo 6.16. Determinamos los valores de p para los cuales la integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^p \ln x}$ converge.

- Si $p = 1$, de acuerdo con el ejemplo 6.9, la integral diverge.

- Si $p > 1$ para $x \geq 2$, tenemos que $x > \ln x$. Luego, usando que $a^p > a$ para $a > 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{x^p}{(\ln x)^p} > \frac{x}{\ln x} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{x(\ln x)^p} > \frac{1}{x^p \ln x} \\ \Rightarrow \quad & \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx > \int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln x} dx. \end{aligned}$$

  Como la integral de la izquierda converge (ver ejemplo 6.9), la de la derecha también converge.

- Si $p < 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{x^p}{(\ln x)^p} < \frac{x}{\ln x} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{x(\ln x)^p} < \frac{1}{x^p \ln x} \\ \Rightarrow \quad & \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx < \int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln x} dx. \end{aligned}$$

  Como la integral de la izquierda diverge, la de la derecha también diverge. En conclusión,

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln x} = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Note que en este ejemplo no podemos concluir a donde converge la integral.

Criterio de comparación al límite. Dadas dos funciones f y g positivas y continuas sobre el intervalo $[a, \infty)$, definimos

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- Si $0 < L < \infty$, entonces las dos integrales

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^{\infty} g(x) dx$$

  tienen el mismo comportamiento, es decir, o ambas convergen o ambas divergen.

- Si $L = 0$ y
  - ◇ $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.
  - ◇ $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge.
- Si $L = +\infty$ y
  - ◇ $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ converge.
  - ◇ $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Demostración. Caso $0 < L < +\infty$. Dado $\epsilon = \frac{L}{2}$, existe $N > 0$ tal que si $x \geq N$, entonces $|\frac{f(x)}{g(x)} - L| < \frac{L}{2}$. Luego,

$$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2},$$

multiplicando por g obtenemos

$$\frac{L}{2}g(x) < f(x) < \frac{3L}{2}g(x).$$

Basta aplicar el criterio de comparación directa a $\frac{L}{2}g < f$ y también a $f < \frac{3L}{2}g$.

Caso $L = 0$. Para $\epsilon = 1$, existe $N > 0$ tal que si $x \geq N$, entonces $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < 1$. Como las dos funciones son positivas, concluimos que $0 \leq f(x) < g(x)$ y aplicamos el criterio de comparación directa.

Caso $L = +\infty$. Tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ y caemos en el caso anterior.

☑

Elegir un criterio de comparación para determinar la convergencia, así como la función que usará para hacer la comparación no es un problema sencillo. En principio, es una tarea de ensayo y error, pero a medida que se conozcan más integrales impropias, desarrollará destreza. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 6.17. Para estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_1^\infty x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$ podemos intentar comparación directa. Como $0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1$ para todo x, entonces $0 \leq x^2 \operatorname{sen}^2 x \leq x^2$, pero $\int_1^\infty x^2 dx$ diverge, de lo cual no podemos concluir si nuestra integral converge o no. Intentamos entonces comparación al límite, ¿con qué función g? Hay que probar con funciones que simplifiquen el cociente f/g y además cuyas integrales conozcamos. Por ejemplo, si $g(x) = x^2$, tenemos que

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}^2 x.$$

El problema es que este límite no existe, así que esta elección de g no funciona. Consideremos ahora $g(x) = \frac{1}{x^2}$, entonces

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} x^4 \operatorname{sen}^2 x = +\infty,$$

pues $x^4 \to \infty$ y $\operatorname{sen}^2 x$ está acotada, pero el criterio no dice nada si $L = \infty$ y la integral del denominador converge, así que debemos buscar otra función. Sea $g(x) = \frac{1}{x}$. Entonces,

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x^3 \operatorname{sen}^2 x = +\infty,$$

y sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ diverge. Ahora sí estamos en las condiciones del criterio, esto es, como $L = +\infty$ y la integral del denominador diverge, concluimos que la integral del numerador también diverge.

Ejemplo 6.18. Determinamos los valores de p para los cuales la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p} dx$ converge.

- Si $p = 1$, la integral diverge, pues

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} [\ln x]^2 \Big|_1^t = +\infty.$$

- Supongamos $p < 1$ y usemos el criterio de comparación al límite con $g(x) = \dfrac{1}{x^p \ln x}$.

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^p}}{\frac{1}{x^p \ln x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^p (\ln x)^2}{x^p} = \lim_{x\to\infty} (\ln x)^2 = +\infty.$$

  Como $L = \infty$ y la integral del denominador diverge, la del numerador también diverge.

- Supongamos $p > 1$ y comparemos con $g(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$.

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x^p}}{\frac{1}{x(\ln x)^p}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(\ln x)^{p+1}}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{p+1}}{x^{p-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)(\ln x)^p}{(p-1)x^{p-1}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)!}{(p-1)^{p+1} x^{p-1}} = 0,$$

donde hemos aplicado la regla de L'Hôpital $p+1$ veces. Como $L=0$ y la integral del denominador converge, la del numerador también converge. En conclusión,

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{si } p > 1, \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1. \end{cases}$$

Note que en el ejemplo anterior usamos los resultados obtenidos en los ejemplos 6.9 y 6.16 para las integrales definidas para $x \geq 2$. Pues, por la propiedad 1, como la función f es integrable en el intervalo $[1, \infty)$, las dos integrales tienen el mismo comportamiento, es decir,

$$\int_1^\infty f(x)dx \sim \int_2^\infty f(x)dx.$$

5. Convergencia absoluta

Hasta ahora hemos trabajado con funciones no-negativas. Para aquellas funciones que toman valores negativos definimos un tipo especial de convergencia, que se basa en el comportamiento de la integral de su valor absoluto; pues ninguno de los criterios mencionados hasta el momento se puede aplicar. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 6.19. *Sea f integrable en todo intervalo cerrado $[a, t]$. Decimos que $\int_a^\infty f(x)dx$ es* **absolutamente convergente** *si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge.*

Ejemplo 6.20. La integral $\int_1^\infty -\frac{1}{x^2}dx$ es absolutamente convergente, pues $\int_1^\infty \left|-\frac{1}{x^2}\right| dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, que ya sabemos es convergente. Vea el ejemplo 6.2.

El siguiente teorema nos proporciona un criterio útil para saber si la integral de una función (que puede tomar valores negativos y/o positivos) es convergente.

Teorema 6.21. *Suponga f integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, t]$. Si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge. En otras palabras, si la integral converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. Dado x en el dominio de f, se tiene que

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\Rightarrow \qquad 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|.$$

Si $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge, también lo hacen $\int_a^\infty 2|f(x)|dx$ por la propiedad 2, y $\int_a^\infty (f(x) + |f(x)|)dx$, por el criterio de comparación directa. Como

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty (f(x) + |f(x)|)dx - \int_a^\infty |f(x)|dx,$$

entonces la integral impropia de f converge. ☑

El recíproco del teorema NO es cierto. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.22. La integral $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx$ converge, pero no converge absolutamente. En efecto, veamos que la integral converge usando integración por partes, con $u = \frac{1}{x}$ y $dv = \cos x dx$.

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\cos x}{x}dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\bigg]_1^t + \int_1^t \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx \right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} - \operatorname{sen} 1 \right) + \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx \\
&= -\operatorname{sen} 1 + \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx.
\end{aligned}$$

Como $\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ y $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge, entonces $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$ converge absolutamente, por lo tanto, es convergente, y así la integral I también converge. Veamos que no converge absolutamente. Se tiene que

$$\int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}dx = \int_1^\infty \frac{|\cos(x - \frac{\pi}{2})|}{x}dx = \int_{1-\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{|\cos t|}{t + \frac{\pi}{2}}dt$$

y, además,

$$\int_{1-\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{|\cos t|}{t + \frac{\pi}{2}}dt \sim \int_1^\infty \frac{|\cos t|}{t}dt,$$

pues $L = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{|\cos t|}{t+\frac{\pi}{2}}}{\frac{|\cos t|}{t}} = \lim_{x\to\infty} \frac{t}{t + \frac{\pi}{2}} = 1$, entonces ambas integrales tienen el mismo comportamiento. En resumen, las integrales de $\frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$ y $\frac{|\cos x|}{x}$ son ambas convergentes o ambas divergentes. En el caso en que una de las dos sea convergente, se tendría que $\int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x| + |\cos x|}{x} dx$ converge, pero esto es absurdo, pues $\frac{|\operatorname{sen} x| + |\cos x|}{x} \geq \frac{1}{x}$ y $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge.

Luego $\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ diverge, lo que quiere decir que $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ no es absolutamente convergente.

Definición 6.23. *Si $\int_a^{\infty} f(x) dx$ es convergente pero no lo es absolutamente, se dice que es* **condicionalmente convergente.**

Ejemplo 6.24. ¿Qué puede decir de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$? Como la función no es positiva, se hace necesario estudiar la convergencia absoluta. Por el mismo razonamiento del ejemplo anterior, podemos decir que la integral converge condicionalmente. ¿Nota algún error? Si no se dio cuenta que la integral también es impropia en $x = 0$, vuelva al inicio del capítulo. Resulta que la función no está definida en cero, la buena noticia es que está acotada, pues $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$. Luego, el comportamiento de la integral pedida y de $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ es el mismo, así que es válido trabajar con esta integral, que no tiene problemas en el límite inferior.

De hecho, podemos mostrar que la integral de 0 a 1 converge: usaremos integración por partes, con $u = \frac{1}{x}$, $du = -\frac{1}{x^2} dx$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$, solo que tomaremos $v = 1 - \cos x$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_a^1 + \int_a^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \\
&= (1 - \cos 1) - \lim_{a \to 0^+} \frac{1 - \cos a}{a} + \int_a^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx, \\
&= (1 - \cos 1) + \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la regla de L'Hôpital para calcular el límite, y la integral de la derecha claramente es finita, puesto que la función está acotada en el intervalo $[0, 1]$.

Para la integral de 1 a infinito, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1 - \cos x}{x} \right]_1^b + \int_1^b \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \\
&= \lim_{b \to \infty} \frac{1 - \cos b}{b} - (1 - \cos 1) + \int_1^b \frac{1 - \cos x}{x^2} dx, \\
&= -(1 - \cos 1) + \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.
\end{aligned}$$

Note que el límite es cero, puesto que el numerador es acotado y la integral de la derecha converge porque está acotada por $\int_1^\infty \frac{2}{x^2}dx$.

Estas integrales se conocen como **integrales senoidales** $Si(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ y $si(x) := -\displaystyle\int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$, y juegan un rol importante en la teoría de *procesamiento de señales*. Con técnicas de variable compleja, o transformada de Laplace, se puede demostrar que

$$Si(x) - si(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Nota 6.25. *Cualquier integral impropia de segundo tipo se puede transformar en una integral impropia de primer tipo por medio de un cambio de variable, así,*

- ⋆ *si f es continua en $(a, b]$, podemos transformar la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ a una de primer tipo usando el cambio $t = \frac{1}{x-a}$.*
- ⋆ *Cuando f es continua en $[a, b)$, transformamos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ haciendo el cambio $t = \frac{1}{b-x}$.*

Como ejercicio, verifique que en ambos casos se obtiene una integral impropia de primer tipo.

Debido a esto, todos los criterios para convergencia de integrales de tipo I tienen análogos para integrales de tipo II. ¡Escríbalos!

Ejercicios 6.5

1. Determine la convergencia de las siguientes integrales y, si es posible, halle su valor.

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x dx.$

   b) $VP\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x dx.$

   c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}dx.$

   d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1}.$

   e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(x-1)}.$

   f) $\displaystyle\int_0^\infty x^n dx.$

   g) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}dx.$

   h) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx.$

i) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^x dx.$

j) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$

k) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x dx.$

l) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+16}.$

m) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{27x^2+2x+13}{10(x-2)(x+3)(x^2+1)}dx.$

n) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx.$

ñ) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx.$

o) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, para $p \in \mathbb{R}$.

p) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

q) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

r) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx.$

2. Complete los detalles de la prueba de la proposición 6.1.

3. Complete la prueba de la propiedad 5 cuando $L < 0$.

4. Sea f una función continua en todo $\mathbb{R}$. Pruebe que si f es par y $\int_0^{\infty} f\ dx$ es convergente, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f\ dx$ converge y su valor es $2\int_0^{\infty} f\ dx$.

5. Sea f una función continua en todo $\mathbb{R}$. Pruebe que si f es impar y $\int_0^{\infty} f\ dx$ converge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f\ dx$ converge y su valor es 0.

6. Determine el valor de M para que la integral
$$\int_1^{\infty} \frac{x}{2x^2+M} - \frac{M}{2(x+1)}dx$$
sea convergente.

7. Si es posible, calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx$ y $VP\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx.$

8. Si es posible, calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x dx$ y $VP\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x dx.$

9. Determine los valores de p para los cuales la integral es convergente y, de ser posible, halle su valor

   a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$ *b*) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^p}.$

10. Escriba los criterios de comparación directa, comparación al límite y convergencia absoluta para las integrales de tipo II.

11. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes integrales usando un criterio de comparación.

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{x^4-0.01}}dx.$

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}.$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}dx.$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^4+2x+1}{x^6+3x^5+x^4+2}dx.$

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^3+2x+1}{3x^7+\sqrt{x}+1}dx.$

f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+5}+1}dx.$

g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^2+\sqrt[5]{x}+1}dx.$

h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{\sqrt{x^8+2}}dx.$

i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5+1}}.$

j) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+0.1}dx.$

k) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}dx.$

l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{e^x+5}dx.$

m) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{x^6+\operatorname{sen}^2 x}dx.$

n) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x^4+\ln^4 x+4}dx.$

ñ) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3-1}dx.$

o) $\displaystyle\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx.$

p) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^4+2}{3x^4+2x+1}dx.$

q) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x)(2+x)}}dx.$

12. Sea $f(x)$ una función integrable (no necesariamente continua) en todo intervalo de la forma $[0,t]$, con $t \geq 0$. Si $\int_0^\infty f(x)e^{-xs}\,dx$, con $s > 0$, es convergente, su valor $F(s)$ se conoce como la transformada de Laplace de f. Halle la transformada de Laplace de la función dada

    a) $f(x) = 1$, es decir, calcule $\int_0^\infty e^{-xs}\,dx$, con $s > 0$.

    b) $f(x) = x$.

    c) $f(x) = \cos x$.

    d) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

13. La función Gamma $\Gamma(t)$, con $t > 0$ definida a continuación, tiene la propiedad de que $\Gamma(t) = (t-1)!$ para $t \in \mathbb{Z}_0^+$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx \quad \text{para } t > 0.$$

    a) Pruebe que $\Gamma(1)$ converge y compruebe que su valor es 1. Sugerencia: separe la integral en los intervalos $[0,1]$ y $[1,\infty)$.

    b) Halle $\Gamma(2)$.

    c) Pruebe que $\Gamma(t) = t\Gamma(t-1)$ y pruebe por inducción que $\Gamma(t+1) = t!$ para $t \in \mathbb{Z}_0^+$.

14. Determine todos los valores reales de α para los cuales la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ converge.

15. Determine el comportamiento de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$, usando el criterio de comparación al límite, con una integral como la del ejercicio anterior.

16. Determine todos los valores reales de α para los cuales la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ converge.

17. Determine el comportamiento de la integral $\displaystyle\int_{\sqrt[5]{2}}^3 \frac{dx}{x^5-2}$, usando el criterio de comparación al límite, con una integral como la del ejercicio anterior.

18. ¿Puede ocurrir que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ y la integral $\int_a^\infty f(x)dx$ sea divergente? De ejemplos.

19. ¿Es posible encontrar funciones f y g tales que $\int_1^\infty f(x)dx$ y $\int_1^\infty g(x)dx$ sean divergentes, pero $\int_1^\infty (f+g)(x)dx$ sea convergente? De ejemplos.

Capítulo

siete

Aplicaciones de la integral

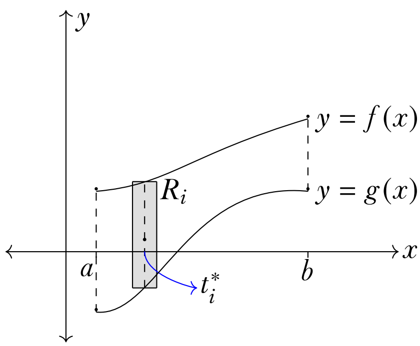
En lo que sigue, estudiamos varias aplicaciones de la integral definida, empezando con aquella que nos ayudó a introducirla: el área entre curvas. Seguidamente, revisamos métodos para hallar el volumen y el área superficial de ciertos sólidos, y también encontramos fórmulas para determinar la longitud de una curva. Por otra parte, hallamos los momentos y centros de masa de algunas regiones. Adicionalmente, hemos incluido cuidadosamente algunos ejercicios de probabilidad. Por último, presentamos unos cuantos ejemplos de aplicaciones relacionadas con el trabajo.

La herramienta que utilizamos en estas aplicaciones es la suma de Riemann, que nos permite pasar de lo discreto (las aproximaciones) a lo continuo (la integral). Por ejemplo, si estamos interesados en calcular el trabajo realizado por una fuerza variable para desplazar un objeto en un trayecto, aproximamos el trabajo en pequeños trayectos asumiendo que la fuerza es constante en cada uno y luego los sumamos -esta suma corresponde a una suma de Riemann-. Por esta razón, en la medida que hacemos particiones más finas la aproximación mejora. Si hemos escogido un conjunto adecuado de sumas de Riemann, podemos pasar a la integral calculando el límite.

1. Área entre curvas

Recuerde que en principio estudiamos el área *bajo la curva*, que se puede considerar como el área entre dos curvas si asumimos que el eje x es la recta $g(x) = 0$. Ahora lo haremos de manera más general.

Consideremos dos funciones continuas f y g, definidas sobre un intervalo $[a, b]$ de tal manera que $g \leq f$ en todo el intervalo. Gráficamente vemos que la curva correspondiente a g está *por debajo* de la de f. Sea $\mathbb{P} = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\}$ una partición del intervalo y $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\triangle t_i = t_i - t_{i-1}$ la longitud de cada subintervalo.



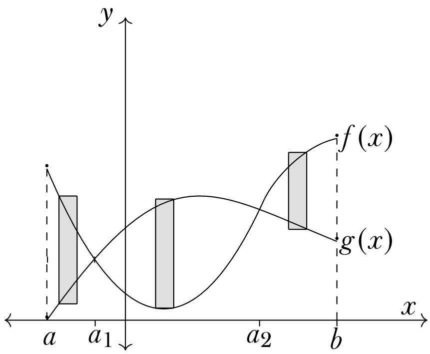
Entonces, $[f(t_i^*) - g(t_i^*)]\Delta t_i$ es el área del rectángulo R_i entre las dos curvas, que tiene como base el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Observe que siempre se puede construir un rectángulo completamente contenido en R_i y otro que lo contenga completamente. Entonces, la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i^*) - g(t_i^*)]\Delta t_i$$

siempre es un valor intermedio entre dos aproximaciones del área entre curvas: una por debajo y otra por encima. Resulta, pues, razonable definir el área como la integral asociada a esta suma de Riemann

$$A_{f-g} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Como $g \leq f$, entonces $0 \leq f - g$, y la integral asociada al área siempre es no negativa, independientemente del signo de f y g. Cuando este no sea el caso, como ocurre en la gráfica siguiente, solo debemos recordar que si $c, d \in \mathbb{R}$, entonces $|c - d|$ es la distancia entre c y d.



El área de cada rectángulo entre las curvas está dada por

$$|f(t_i^*) - g(t_i^*)|\Delta t_i,$$

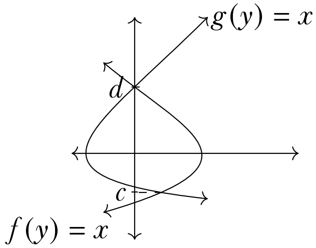
y una aproximación del área la da la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i^*) - g(t_i^*)|\Delta t_i$.

Luego, podemos definir el área como la integral

$$\begin{aligned} A_{f-g} &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= \int_a^{a_1} [f(x) - g(x)]dx + \int_{a_1}^{a_2} [g(x) - f(x)]dx + \int_{a_2}^{b} [f(x) - g(x)]dx. \end{aligned}$$

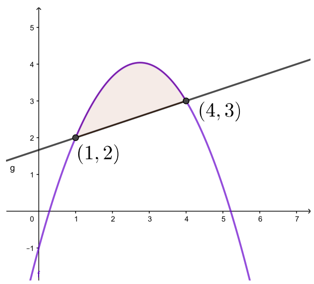
Por supuesto, en este caso se hace necesario encontrar los puntos de corte entre las gráficas de f y g.

Consideremos ahora dos curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$, es decir, consideremos x función de y, ¿cómo hallamos el área entre las dos curvas? Aplicamos el mismo principio, la curva que se encuentra más a la derecha menos la que está a la izquierda.



$$A_{f-g} = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$$

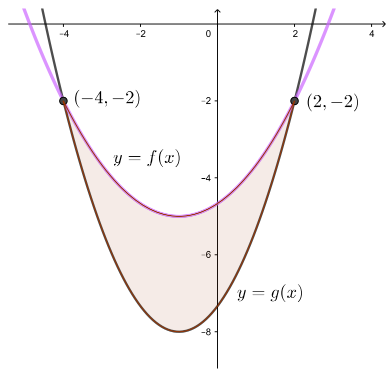
Ejemplo 7.1. Para determinar el área entre las curvas $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1$ y $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$, empezamos hallando los puntos de corte, que son $(1, 2)$ y $(4, 3)$. En este caso, el área está dada por la siguiente integral



$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1\right) - \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\right) dx \\ = \int_1^4 -\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{8}{3}dx \\ = 3.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.2. Consideremos las curvas dadas por $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{22}{3}$ y $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{14}{3}$ y calculemos el área entre estas.

Primero, encontramos los puntos de corte solucionando la ecuación cuadrática $f(x) = g(x)$, que produce $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$, cuyas soluciones son $x = -4$ y $x = 2$. Note que ambas funciones son negativas y $g(x) \le f(x) \le 0$ en $[-4, 2]$. Sin embargo, su área es positiva y está determinada por la integral

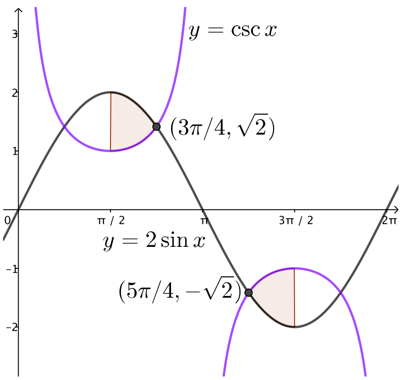


$$\begin{aligned}A_{f-g} &= \int_{-4}^2 \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{14}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{22}{3}\right) dx \\ &= \int_{-4}^2 -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}\ dx = 12.\end{aligned}$$

Ejemplo 7.3. La integral

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/4} |\csc x - 2\operatorname{sen} x| dx + \int_{5\pi/4}^{3\pi/2} |\csc x - 2\operatorname{sen} x| dx$$

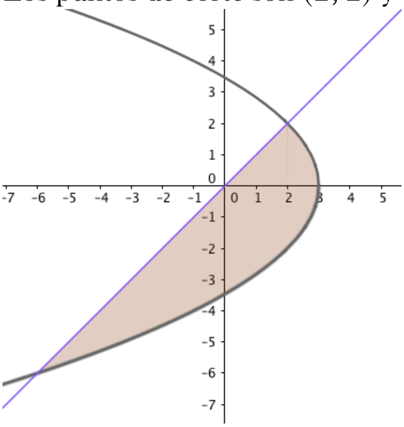
se puede interpretar como el área de dos regiones encerradas entre varias curvas. La primera integral entre $x = \pi/2$, $y = \csc x$ y la curva $y = 2\operatorname{sen} x$; y la segunda entre $y = \csc x$, $y = 2\operatorname{sen} x$ y la recta $x = 3\pi/2$. Note que puede obtener una región a partir de la otra por medio de una rotación de 180° alrededor del punto $(\pi, 0)$ ó por medio de un cambio de variable.



Entonces, el área de esta región se puede expresar como una sola integral

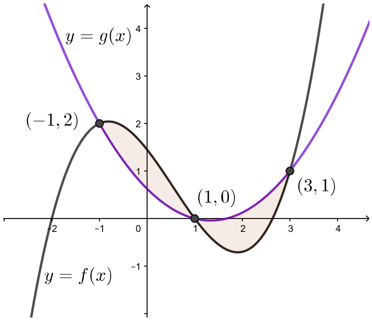
$$A = 2\int_{\pi/2}^{3\pi/4} 2\operatorname{sen} x - \csc x \, dx = 2\sqrt{2} + \ln 2 - 2\ln(2 + \sqrt{2}).$$

Ejemplo 7.4. Considere la región acotada por las curvas $4x+y^2 = 12$, $x = y$. Los puntos de corte son $(2, 2)$ y $(-6, -6)$ y su área está dada por



$$\begin{aligned} A &= \int_{-6}^{2} \left(-\frac{1}{4}y^2 + 3\right) - y \, dy \\ &= \int_{-6}^{2} \left(-\frac{1}{4}y^2 - y + 3\right) dy \\ &= -\frac{1}{12}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 3y \Big]_{-6}^{2} \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.5. Para calcular el área entre las curvas dadas por las funciones $f(x) = \frac{11}{40}x^3 - \frac{9}{20}x^2 - \frac{51}{40}x + \frac{29}{20}$ y $g(x) = \frac{3}{8}x^2 - x + \frac{5}{8}$, primero debemos encontrar los puntos de intersección de las curvas; verifique que son $(-1, 2)$, $(1, 0)$ y $(3, 1)$. Con la gráfica, vemos que, $g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ y $f(x) \leq g(x)$ en el intervalo $[1, 3]$. Así, podemos expresar el área como la suma de dos integrales



$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} f - g \, dx + \int_{1}^{3} g - f \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{11}{40}x^3 - \frac{33}{40}x^2 - \frac{11}{40}x + \frac{33}{40} \, dx - \int_{1}^{3} \frac{11}{40}x^3 - \frac{33}{40}x^2 - \frac{11}{40}x + \frac{33}{40} \, dx \\
&= \frac{11}{10} + \frac{11}{10} = \frac{11}{5}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios 7.1

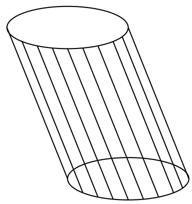
Dibuje y encuentre el área de las siguientes regiones de $\mathbb{R}^2$.

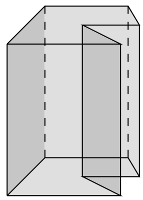
1. La región comprendida entre las gráficas de $y = x^2, y = -x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
2. La región comprendida entre la curva $y^2 = x$ y la recta $x - y - 6 = 0$.
3. La región comprendida entre las curvas $y = x^3$ y $y = \sqrt[3]{x}$.
4. La región comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = x^2 - 2x + 4$ y el eje y.
5. La región comprendida entre las curvas $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$, $x = 2\pi$.
6. La región comprendida entre las curvas $y = -x^2$ y $y = x - x^3$.
7. La región comprendida entre las curvas $x = y^2 - 3y + 1$ y $x + y - 1 = 0$.
8. La región comprendida entre las curvas $y = x^2 - 1$, $y = |x|$.
9. Encuentre el área, si existe, de la región bajo la curva $y = \csc^2(x)$ para x entre 0 y $\pi/2$.

2. Volumen. Secciones transversales

¿Qué es un cilindro circular recto? Seguramente le viene una imagen de un tanque o un recipiente cuya base y tapa son círculos, con una pared perpendicular a base y tapa, ¿verdad? Pero no todos los cilindros son circulares ni tienen una pared perpendicular a la base. Imagine una región plana que se desliza a lo largo de una recta, generando un sólido, a tal sólido le damos el nombre de cilindro. De hecho, la *base* puede tener cualquier forma, no necesariamente circular. Para nuestros propósitos, vamos a considerar únicamente cilindros que se forman cuando la recta es perpendicular a la región que se desplaza. En la figura de la izquierda, tenemos un cilindro circular no-recto.

En la figura de la derecha, tenemos un polígono que se desplaza a lo largo de una recta perpendicular al plano donde se encuentra, formando un cilindro recto pero no-circular.



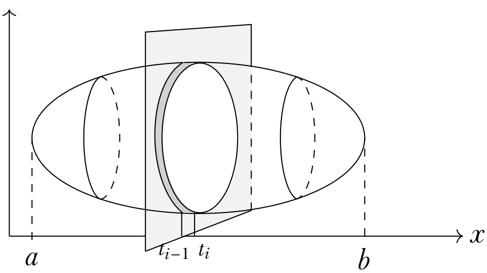


Ahora bien, el volumen de un cilindro circular recto está dado por $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, donde r es el radio de la circunferencia de la base y h es la altura. Si la base ahora es cualquier superficie, entonces el volumen de un cilindro recto se define como

$$V = h \cdot A(B),$$

donde $A(B)$ es el área de la base.

Considere un sólido dispuesto en la dirección de una recta, como lo muestra la figura. Suponga que se conoce la función de área de cada corte transversal $A(x)$, para $x \in [a, b]$, a lo largo de todo el sólido.



Una aproximación del volumen de S se calcula por medio de la suma de Riemann $V(S) \approx \sum_{i=1}^{n} A(t_i^*)\Delta t_i$, donde $\mathbb{P} = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\}$ es una partición: $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, con $i = 1, \ldots, n$. Si suponemos que la función de área es continua, siempre podemos acotar cada suma de Riemann entre una aproximación por defecto y otra por exceso.[1] Luego,

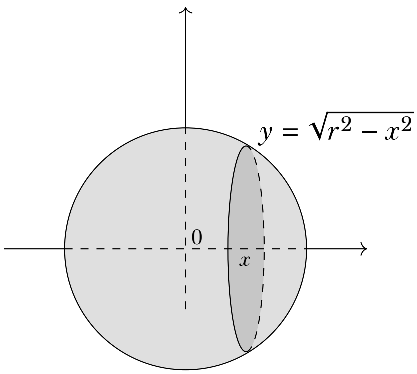
[1]Basta considerar $m_i = \text{mín}\{A(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ y $M_i = \text{máx}\{A(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$.

resulta natural definir el volumen del sólido por medio de la integral

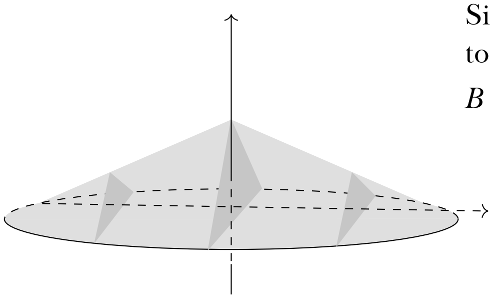
$$V(S) = \int_a^b A(x)dx.$$

Ejemplo 7.6. Es conocido que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$, verifiquemos este resultado. Supongamos que el eje x atraviesa diametralmente a la esfera de modo que el origen coincida con el centro, como se ilustra en el dibujo. Hacemos cortes perpendiculares al eje en cada punto x, de tal forma que las secciones transversales son círculos de radio y, donde $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y x varía desde $-r$ hasta r, así el volumen queda determinado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} \\ &= \pi\left(2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$



Ejemplo 7.7. Calcule el volumen de un sólido cuya base es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ en el plano xy y cada corte transversal al eje x es un triángulo equilátero. Primero, recuerde que si el lado (base) del triángulo es l, su altura es $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ y su área $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$.



Si el corte se realiza en un punto x, la base del triángulo es $B = 2y = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, el área es

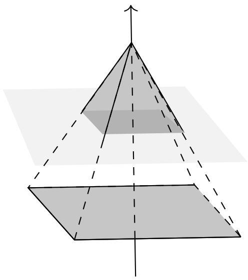
$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2y)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \end{aligned}$$

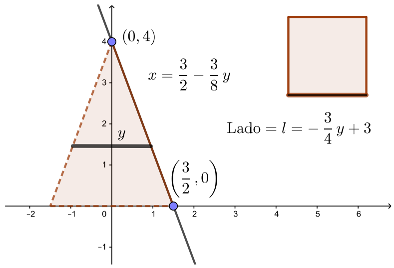
y su volumen

$$V = \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{3}b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{\sqrt{3}b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4\sqrt{3}}{3}b^2a.$$

Ejemplo 7.8. Encuentre el volumen de una pirámide recta de base cuadrada de lado 3 y altura 4.

Hacemos coincidir el eje y con la altura de la pirámide; el origen del eje está en la base, como se muestra en el dibujo de la izquierda. Cada corte perpendicular al eje y es un cuadrado. Desde cualquier vista lateral lo que veremos es un triángulo isósceles de base 3 y altura 4.





Donde se observa que el lado del cuadrado sobre el punto y tiene longitud $l = 2x = -\frac{3}{4}y + 3$. Así que el área de la sección transversal es $A(y) = l^2 = \left(3 - \frac{3}{4}y\right)^2$ y el volumen de la pirámide es

$$V = \int_0^4 \left(9 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{16}y^2\right) dy = 12,$$

que coincide con el valor hallado al usar la fórmula del volumen de una pirámide $V = \frac{B \cdot h}{3}$, donde B es el área de la base y h la altura.

2.1. Principio de Cavalieri

Sean dos sólidos S_1 y S_2 dispuestos sobre la misma recta r. Si las áreas de los cortes transversales en el mismo punto de corte son iguales, entonces los sólidos tienen el mismo volumen.

La prueba consiste en hallar el volumen de cada sólido usando la técnica de la sección transversal. Como las áreas son iguales, los volúmenes también lo serán.

Ejemplo 7.9. Consideramos dos conos circulares de la misma altura con bases congruentes, uno recto y el otro oblicuo con vértice sobre una perpendicular a la frontera de la base, como se ilustran a continuación.

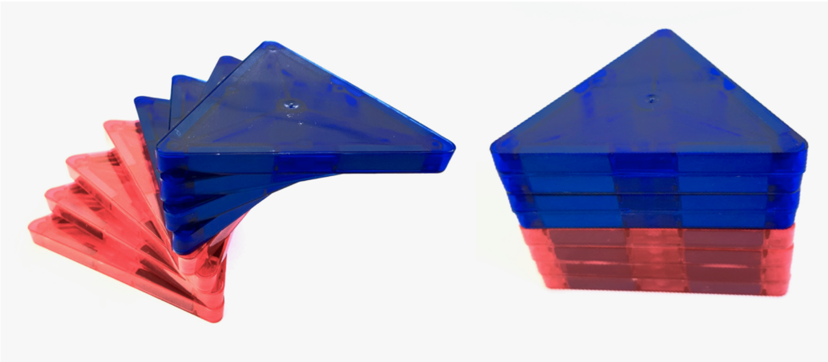
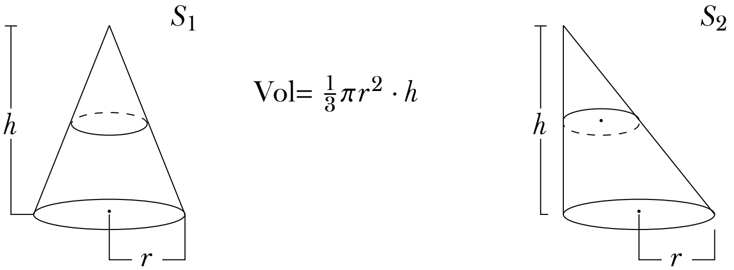
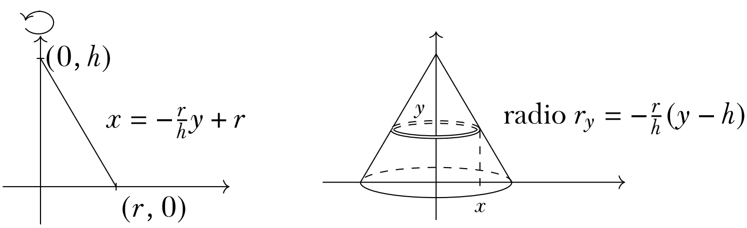


Figura 7.1: ilustramos el principio de Cavalieri con estas fichas triangulares que simulan las secciones transversales de los dos sólidos. Aunque se encuentran apiladas de distinta manera, como son congruentes y la altura es la misma, los sólidos tienen el mismo volumen.



El sólido S_1 es lo que conocemos como *cono circular recto*, su volumen está dado por la fórmula $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Veamos cómo se deduce. Trazamos el plano xy de tal forma que el eje x coincida con el radio de la base y el eje y con la altura del cono y el origen del sistema sea el centro de la base. Entonces, el vértice tiene coordenada $(0, h)$ y un extremo de la base $(r, 0)$. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es $x = -\frac{r}{h}y + r$, como lo muestra la figura.



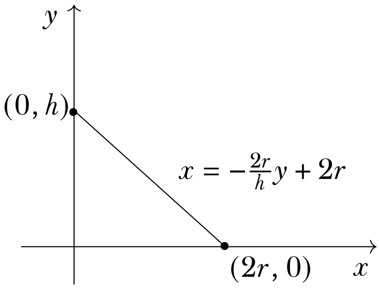
Cada corte transversal en un punto y es un círculo que tiene radio $r_y = -\frac{r}{h}(y-h)$. Entonces, el área transversal en cualquier punto y es

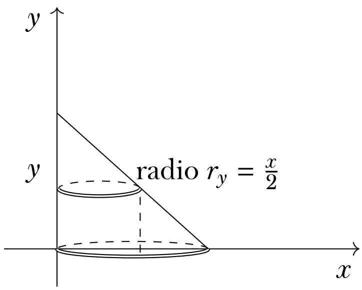
$$A(y) = \pi\frac{r^2}{h^2}(y-h)^2.$$

Por tanto, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V_{S_1} &= \int_0^h \pi\frac{r^2}{h^2}(y-h)^2 dy \\ &= \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h y^2 - 2yh + h^2 \ dy \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{y^3}{3} - y^2h + h^2y\right]_0^h \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \end{aligned}$$

Ahora calculemos el volumen de S_2. Para ello, construimos un sistema de coordenadas de forma similar que en el caso anterior. La ecuación de la recta que une $(0,h)$ con $(2r,0)$ es $x = -\frac{2r}{h}y + 2r$; y un corte transversal en un punto y también es un círculo, cuyo radio es $r_y = \frac{x}{2} = -\frac{r}{h}y + r$.





Entonces, el área transversal es $A(y) = \pi(r_y)^2$ y el volumen está dado por

$$V_{S_2} = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2 (y-h)^2 dy = V_{S_1}.$$

Ejercicios 7.2

1. Encuentre el volumen del sólido cuya base es un círculo de radio r y cada corte transversal es un triángulo equilátero.

2. La base de cierto sólido es la región situada entre el eje x y la curva $y = \cos x$ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Cada sección plana del sólido perpendicular

al eje x es un triángulo equilátero con un lado en la base del sólido. Halle el volumen del sólido.

3. Determine el volumen de un tronco de cono circular recto con altura h, radio de la base inferior R y radio de la base superior r.

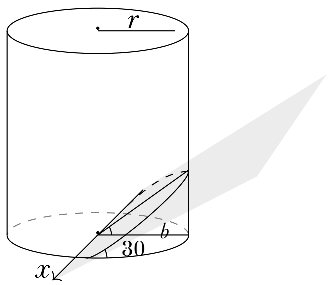
4. Determine el volumen de una pirámide con altura h y base un triángulo equilátero con lado a.

5. La base de cierto sólido es la región del primer cuadrante acotada por $x = y^2$, $x = 1$ y el eje x. Determine el volumen del sólido que se obtiene en cada uno de los siguientes casos.

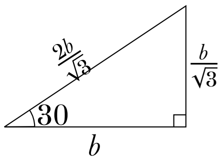
   a) Al hacer un corte transversal perpendicular al eje x, se obtiene un triángulo rectángulo isósceles con un cateto sobre la región.

   b) Al hacer un corte transversal perpendicular al eje x, se obtiene un triángulo rectángulo isósceles con la hipotenusa sobre la región.

6. Calcule el volumen de la *cuña* que se determina al cortar un cilindro de radio r por un plano oblicuo, con inclinación de 30°.



Si miramos este sólido desde el frente, la cuña se verá como el triángulo



7. Determine el volumen común a dos cilindros circulares, ambos de radio r, si los ejes de los cilindros se cortan en ángulos rectos. Sugerencia: calcule el volumen de un octante, como se ilustra en el dibujo, y realice cortes con planos horizontales.

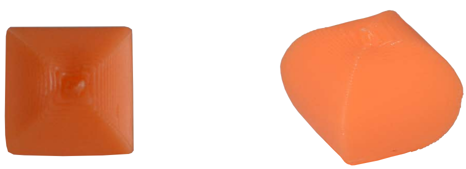
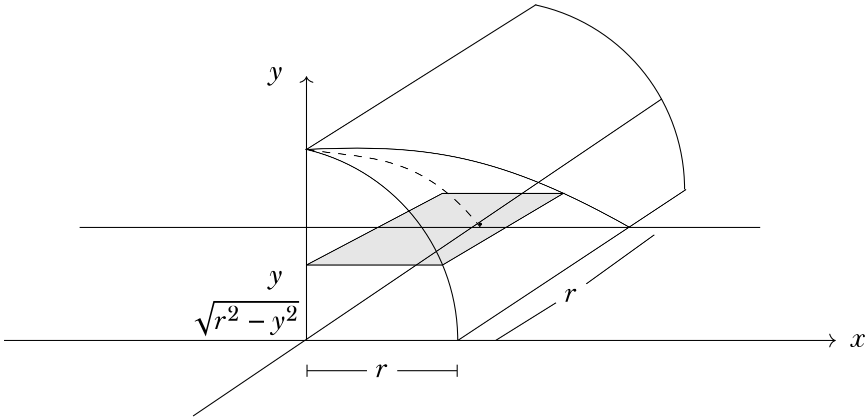


Figura 7.2: intersección de dos cilindros. Sólido logrado con ayuda de una impresora 3D.



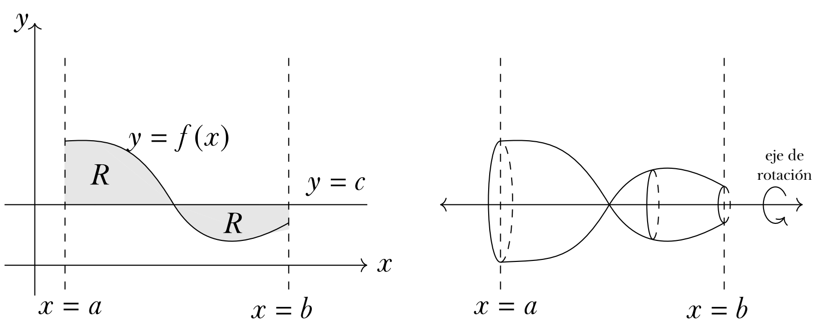
3. Volumen de sólidos de revolución. Cortes circulares

Considere una región R determinada por una función continua $y = f(x)$ y las rectas $y = c$, $x = a$ y $x = b$. Cuando R gira alrededor de la recta $y = c$, se obtiene un *sólido de revolución* S. Los cortes perpendiculares al eje de rotación en un punto x son círculos cuyo radio es la distancia entre $f(x)$ y c. Entonces, el área de cada corte transversal en el punto x está dada por

$$A(x) = \pi(\text{radio})^2 = \pi|f(x) - c|^2 = \pi[f(x) - c]^2.$$

Entonces, podemos aplicar el principio de los cortes transversales y el volumen de S está dado por

$$\text{Vol}_S = \int_a^b \pi[f(x) - c]^2\, dx. \tag{7.1}$$



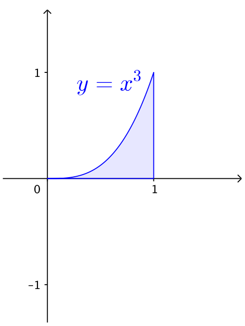
Esta forma de calcular el volumen también es llamada *método de discos*. Note que el sólido es compacto y no tiene cavidades huecas porque el eje de rotación también es frontera de S. La ecuación (7.1) se aplica cuando se cumplen las siguientes dos condiciones:

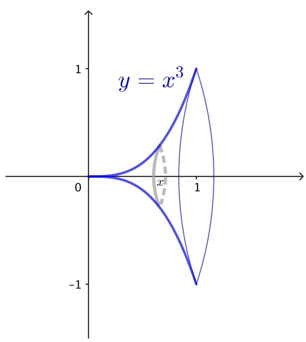
1. R está acotada por una curva en función de x.

2. El eje de rotación es horizontal y frontera de R.

También se puede calcular el volumen de un sólido de revolución generado por una región acotada por una curva en función de y y cuyo eje de rotación es vertical y frontera de R; vea el ejercicio 2.

Ejemplo 7.10. Consideremos la región acotada por la curva $y = x^3$, $x = 1$ y el eje x y supongamos que gira alrededor del eje x. Encontremos el volumen del sólido que se forma.

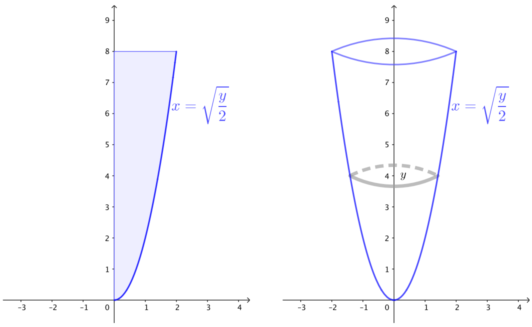




Al rebanar el sólido con un plano vertical sobre el valor de x, obtenemos un disco con radio $y = f(x) = x^3$ y utilizamos la ecuación (7.1), con $c = 0$, así que el volumen está determinado por

$$V = \int_0^1 \pi(x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{\pi}{7}.$$

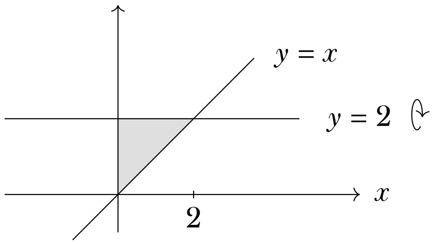
Ejemplo 7.11. Calculemos el volumen del paraboloide de revolución que se obtiene al hacer girar la región R, encerrada por las rectas $y = 8$, $x = 0$ y la parábola $y = 2x^2$, alrededor del eje y. Primero, debemos expresar la función en términos de la variable y dado que el eje de rotación es vertical.

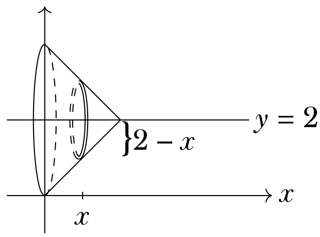


$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^8 \pi \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y}\right]^2 dy \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^8 y dy \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^8 \\
&= \frac{\pi}{4}(8^2 - 0) = 16\pi .
\end{aligned}
$$

Es un error frecuente expresar el volumen del sólido con la integral $\int_0^2 \pi [2x^2]^2 \, dx$. Dibuje el sólido cuyo volumen corresponde a esta integral.

Ejemplo 7.12. Suponga que el triángulo acotado por $y = x$, $y = 2$ y el eje y gira alrededor de la recta $y = 2$.



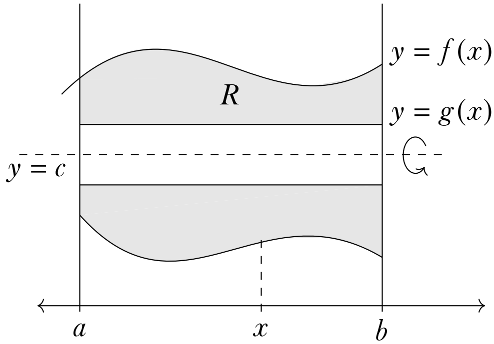


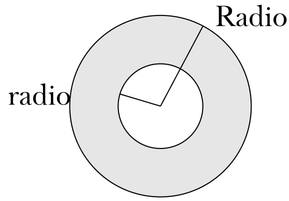
El sólido que se forma es un cono, pero su eje principal no es el eje x. Esto implica que el radio del disco que se forma al hacer cortes verticales no es precisamente la función dada, de hecho, el radio es $2 - x$. De tal forma que el volumen del sólido es

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \pi(2 - x)^2 dx = \pi \int_0^2 (4 - 4x + x^2) dx \\
&= \pi \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

4. Volumen. Método de arandelas

Ahora consideramos una región R encerrada por dos funciones $g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Si giramos R alrededor de una recta $y = c$ (que no atraviese a R), obtenemos un sólido de revolución con un espacio hueco en su interior. En este caso, los cortes perpendiculares al eje de rotación se llaman **arandelas**.





corte transversal en x

Cuando el corte se hace en un punto x y la recta $y = c$ está por debajo de las dos curvas, su área es

$$A_x = \left|\pi(\text{Radio})^2 - \pi(\text{radio})^2\right|,$$

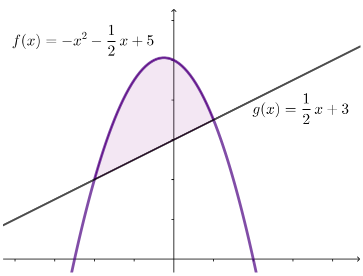
donde Radio $= |f(x) - c|$ y radio $= |g(x) - c|$. Por lo tanto, el volumen del sólido está dado por

$$\text{Vol} = \pi \int_a^b \left|[f(x) - c]^2 - [g(x) - c]^2\right| dx.$$

En la figura anterior, se ilustra el caso en que $c \le g(x) \le f(x)$, sin embargo, puede ocurrir que $g(x) \le f(x) \le c$. Por esta razón, expresamos el volumen utilizando valor absoluto. Otra forma de escribirlo, que resulta muy fácil de recordar, es

$$\text{Vol} = \pi \int_a^b [(\text{radio mayor})^2 - (\text{radio menor})^2]dx.$$

Ejemplo 7.13. Para precisar esta idea, considere la región encerrada por las curvas $f(x) = -x^2 - (1/2)x + 5$ y $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ que gira alrededor del eje x.



Verifique que los puntos de intersección de las curvas son $(-2, 2)$ y $(1, \frac{7}{2})$. El área de cada arandela en un punto x está dada por $\pi[f^2(x) - g^2(x)]$
$= \pi(-x^2 - (1/2)x + 5)^2 - \pi(\frac{1}{2}x + 3)^2$
$= \pi(x^4 + x^3 - 10x^2 - 8x + 16)$, entonces

$$V = \pi \int_{-2}^{1} x^4 + x^3 - 10x^2 - 8x + 16\, dx = \frac{657}{20}\pi.$$

Ejercicios 7.4

1. Las siguientes regiones giran alrededor de la recta dada. En cada caso, encuentre el volumen del sólido que se genera.

   a) La región acotada por $y = 2x$, $y = 2$ y el eje y gira alrededor de: (i) el eje y, (ii) el eje x.

   b) La región acotada por $y = \operatorname{sen} x$, $x = \pi/2$ y el eje x gira alrededor de: (i) el eje x, (ii) el eje y, (iii) la recta $x = \pi$.

   c) La región acotada por $y = \tan x$, $x = \pi/4$ y el eje x gira alrededor de la recta $x = \pi/2$.

   d) La región acotada por $y = \tan x$, $y = 1$ y el eje y gira alrededor de la recta $x = \pi/2$.

   e) La región acotada por $x = y^2$, $y = x^2$ gira alrededor de: (i) la recta $y = 1$, (ii) la recta $y = -1$, (iii) el eje y, (iv) la recta $x = 2$.

2. Sea R la región acotada por la función $x = g(y)$ y las rectas $x = a$, $y = c$ y $y = d$. El sólido S se obtiene al hacer girar R alrededor de la recta $x = a$. Encuentre una expresión similar a (7.1) para el volumen de S.

3. Sea R la región del primer cuadrante acotada por $y = e^x$, $x = 1$ y el eje x. Dibuje el sólido que se genera cuando R gira alrededor del eje y. Plantee una integral que represente el volumen de este sólido.

4. Suponga que la región del ejercicio anterior gira en torno a la recta $y = e$. Encuentre el volumen del sólido que se genera.

5. Encuentre el volumen de un sólido de revolución $\mathcal{T}$ que se obtiene al hacer girar un círculo C de radio r alrededor de una recta que está a una distancia $R > r$ del centro de C. $\mathcal{T}$ es un sólido conocido como *toro*.

6. En cada caso, calcule el volumen del sólido que se obtiene al girar el triángulo PQR alrededor del eje dado.

   a) $P(1, 1), Q(3, 2), R(4, 1)$, eje x.

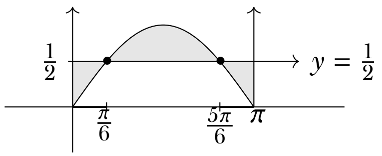
   b) $P(1, 1), Q(3, 2), R(4, 1)$, eje y.

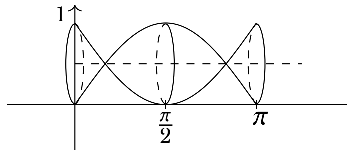
   c) $P(2, 1), Q(3, 3), R(3, 1)$, eje $x = 1$.

   d) $P(2, 1), Q(3, 3), R(3, 1)$, eje $y = -1$.

7. Suponga que la región del primer cuadrante acotada por $y = e^{-2x}\sqrt{x}$ gira en torno al eje x. Encuentre el volumen del sólido que se genera.

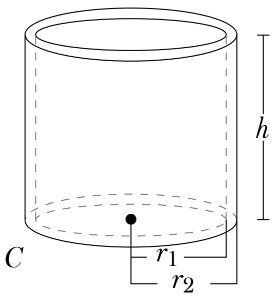
8. Considere la región R encerrada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$, como se muestra en la figura. Calcule el volumen del sólido que se genera cuando R gira en torno a la recta $y = \frac{1}{2}$.





5. Volumen. Cascarones cilíndricos

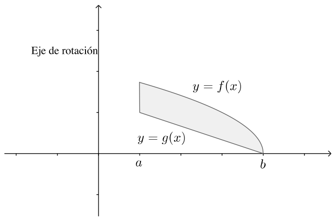
Para calcular volúmenes de sólidos de revolución generados por regiones encerradas por curvas que dependen de la variable x (respectivamente y), que giran alrededor de un eje vertical (resp. horizontal), se utiliza como unidad de medida el cascarón de un cilindro, también llamado *casquete* o *casquillo*. El volumen corresponde, a la diferencia entre el volumen del cilindro *exterior* y el cilindro *interior*.

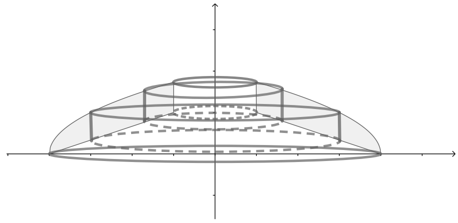


$$
\begin{aligned}
V_c &= \pi r_2^2 \cdot h \; - \; \pi r_1^2 \cdot h \\
&= \pi \cdot h(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \\
&= \pi \cdot h(r_2 + r_1)\Delta r. \\
&= 2\pi \cdot h \cdot r \cdot \Delta r \quad , \quad \textit{donde} \quad r \; = \; \frac{r_2 + r_1}{2}.
\end{aligned}
$$

Sean f y g funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, con $g \leq f$. Consideramos un sólido de revolución S que se obtiene al hacer girar una región $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}$ alrededor de una recta vertical $x = r$ (que no cruce a R). Aproximamos S con cascarones cilíndricos con el fin de calcular su volumen. Para esto, tomamos una partición regular $P = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\}$, con $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ y $t_i^* = \dfrac{t_i + t_{i-1}}{2}$, el i-ésimo casquete se obtiene al hacer girar el rectángulo de base $[t_{i-1}, t_i]$ con altura dada por $f(t_i^*) - g(t_i^*)$. Con esta notación, el volumen del i-ésimo casquete es

$$V_c \;=\; 2\pi \cdot \underbrace{[f(t_i^*) - g(t_i^*)]}_{\text{altura}} \cdot \underbrace{|t_i^* - r|}_{\text{radio}} \cdot \underbrace{\Delta t_i}_{\text{grosor}}$$





Entonces, una aproximación del volumen del sólido S está dada por la suma de Riemann con la regla del punto medio

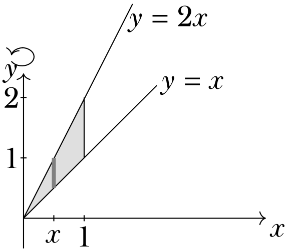
$$\mathrm{Vol}_S \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} 2\pi[f(t_i^*) - g(t_i^*)] \cdot |t_i^* - r| \cdot \Delta t_i.$$

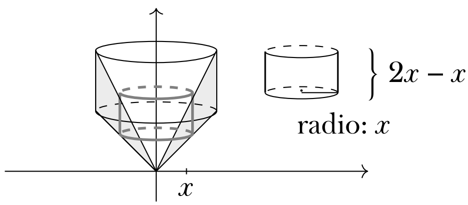
Luego, es natural definir el volumen del sólido como la integral asociada a esta suma

$$\mathrm{Vol}_S = \int_a^b 2\pi|x - r|[f(x) - g(x)]\; dx.$$

También puede recordar la integral en la forma $\int_a^b 2\pi \cdot \text{radio} \cdot \text{altura}\; dx$.

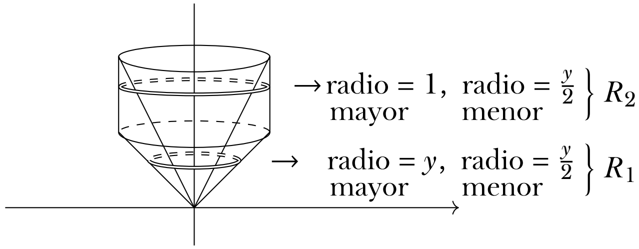
Ejemplo 7.14. Considere la región R encerrada por las rectas $y = x,\ y = 2x,\ x = 1$ y suponga que gira en torno al eje y. Para encontrar el volumen del sólido que se genera, usaremos el método de cascarones, integrando con respecto a x.





$$V = \int_0^1 2\pi \cdot x \cdot (2x - x)dx = 2\pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{2\pi}{3}.$$

¿Qué ocurre si decidimos usar discos en lugar de casquetes? Lo primero es expresar la región R encerrada entre funciones que dependen de y. Para esto, consideramos dos regiones $R_1 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq \frac{1}{2}y\}$ y $R_2 = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, \quad \frac{1}{2}y \leq x \leq 1\}$, entonces $R = R_1 \cup R_2$.

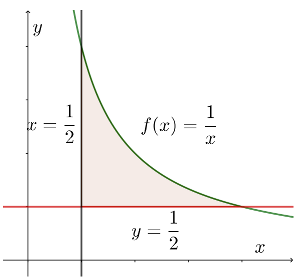


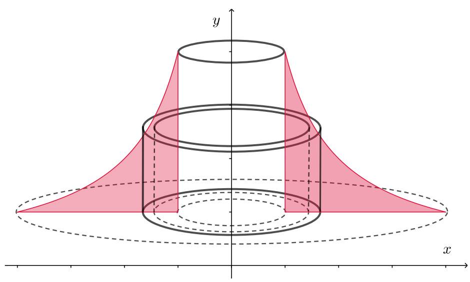
Por cada región debemos plantear una integral de volumen (método de arandelas), así:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi \left[y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right] dy + \int_1^2 \pi \left[1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right] dy \\
&= \pi \left(\int_0^1 \frac{3y^2}{4} dy + \int_1^2 1 - \frac{y^2}{4} dy\right) = \frac{2\pi}{3},
\end{aligned}
$$

que coincide con el valor encontrado usando casquetes. En adelante, el lector deberá analizar cada caso y decidir cuál de los dos métodos es más conveniente.

Ejemplo 7.15. Calculemos el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región R acotada por las curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

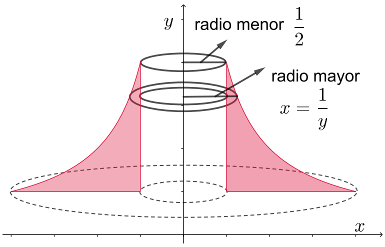




$$
\begin{aligned}
V &= \int_{1/2}^2 2\pi x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) dx = 2\pi \cdot \int_{1/2}^2 1 - \frac{x}{2}\, dx \\
&= 2\pi \left[x - \frac{1}{4}x^2\right]_{1/2}^2 = 2\pi \left(1 - \frac{7}{16}\right) = \frac{9\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

El ejemplo anterior también se puede calcular por discos en una sola integral, ya que la región se puede expresar de la forma

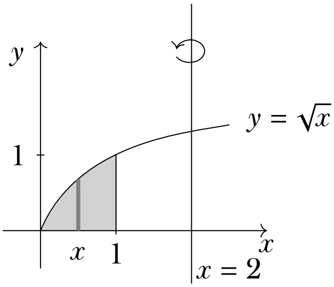
$$R = \left\{(x, y) : \frac{1}{2} \le y \le 2, \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{y}\right\}.$$

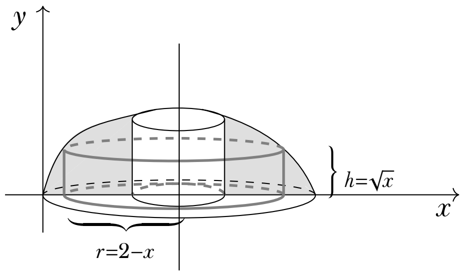


Entonces, la integral está dada por

$$\int_{1/2}^{2} \pi \left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{4}\right] dy = \pi \left[-\frac{1}{y} - \frac{1}{4}y\right]_{1/2}^{2} = \frac{9\pi}{8}.$$

Ejemplo 7.16. Encontremos el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor de la recta $x = 2$ la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$.

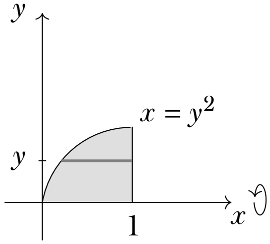


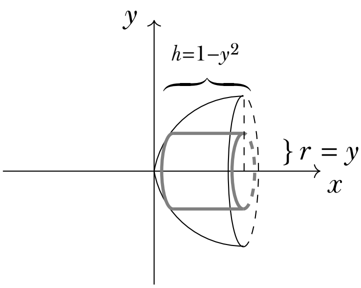


Note que la franja trazada en la gráfica de la izquierda es la que genera el cascarón, eso muestra que haremos integración con respecto a x. De acuerdo con la información del dibujo, tenemos que el radio del cascarón es $r = 2-x$, mientras que la altura está dada por la función $h = f(x) = \sqrt{x}$, por lo tanto,

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)x^{1/2}dx = 2\pi \int_0^1 2x^{1/2} - x^{3/2}dx = \frac{28\pi}{15}.$$

Suponga ahora que la misma región gira en torno al eje x, entonces el cascarón se genera cuando el rectángulo horizontal gira, lo que indica que haremos integración con respecto a y. En este caso, el radio es $r = y$ y la altura es $h = 1 - y^2$. Entonces,





$$V = 2\pi \int_0^1 y(1-y^2)dy = 2\pi \int_0^1 y - y^3\, dy = \frac{\pi}{2}.$$

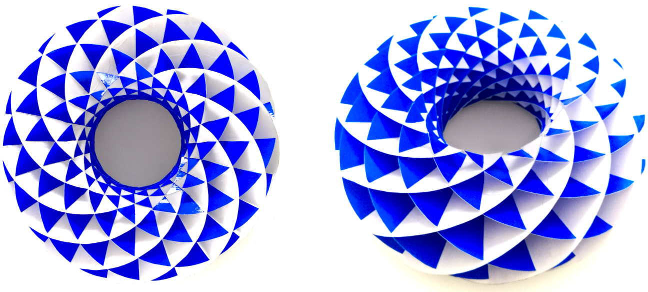
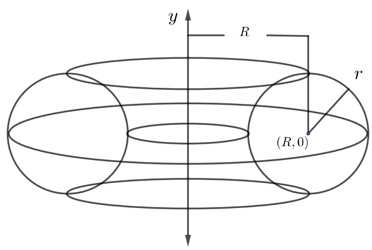


Figura 7.3: la figura muestra las vistas frontal y lateral de un toro fabricado con moldes de cartón por los autores. Los diseños son de María García Monera y Juan Monterde García-Pozuelo.

Ejemplo 7.17. En el ejercicio 5 de la sección 3, introdujimos un sólido conocido como toro y calculamos su volumen utilizando discos. Ahora vamos a calcular su volumen utilizando casquetes cilíndricos. Recordemos que el toro se puede construir haciendo girar un círculo de radio r alrededor de una recta que está a una distancia $R > r$ del centro del círculo. Entonces, podemos suponer que cada punto (x, y) del círculo C con centro en $(R, 0)$ está determinado por las siguientes restricciones $R - r \leq x \leq R + r$, $-\sqrt{r^2 - (x-R)^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$, con el eje y como el eje de rotación.



Luego, el volumen está dado por

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x\left[\sqrt{r^2-(x-R)^2} - -\sqrt{r^2-(x-R)^2}\right] dx \\ &= 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{r^2-(x-R)^2}dx. \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio $u = x-R$, entonces los límites de integración cambian a $u(R-r) = -r$ y $u(R+r) = r$ y el volumen es

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_{-r}^{r} (u+R)\sqrt{r^2-u^2}du \\ &= 4\pi \int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2-u^2}du + 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-u^2}du \\ &= \left[-4\pi\frac{1}{3}(r^2-u^2)^{3/2}\right]_{-r}^{r} + 4\pi R\frac{\pi r^2}{2} \\ &= 2\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

Ejercicios 7.5

1. Resuelva, de ser posible, cada uno de los ejercicios de la sección 4 usando el método de cascarones cilíndricos.

2. Considere la región limitada por las curvas $y = \tan x,\ x = 0,\ y = -1,\ y = 2$. Plantee una integral que represente el volumen del sólido que se genera cuando la región gira alrededor de (a) el eje x, (b) el eje y, (c) la recta $x = \pi/2$, (d) la recta $y = 2$.

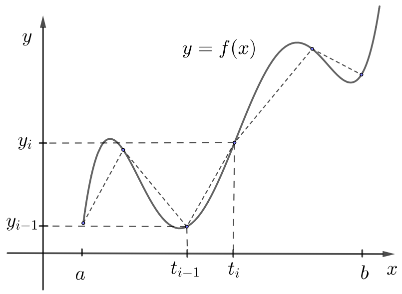
3. La región acotada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a,\ x = b$ gira en torno al eje x. Su volumen, para todo $b > a$, es $b^2 - ab$. Halle $f(x)$ (es posible que dependa de a o b).

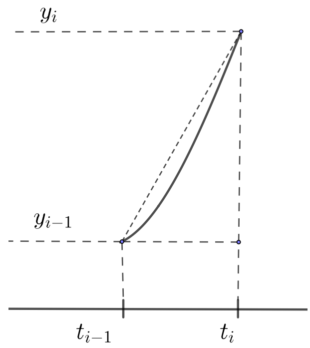
4. Considere la región acotada por $y = \operatorname{sen} x$, el eje x y las rectas $x = \pi/2,\ x = -\pi/2$. Genere un sólido girando esa región alrededor de la recta $x = \pi$. Plantee una integral que represente el volumen de dicho sólido.

5. La región acotada por $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x, para x entre 0 y π, gira alrededor de la recta $y = 1$. Determine el volumen del sólido generado. De ser posible, use los dos métodos para encontrarlo.

6. Longitud de una curva plana

Alguna vez se ha preguntado ¿cuánto mide el cable de la electricidad que va de un poste a otro? ¿cuánto mide uno de los cables que cuelga de un puente? Para calcular la longitud de curvas planas definidas por funciones o por parametrizaciones se usan las integrales definidas. Lo que haremos en esta sección es aproximar la longitud de una curva usando poligonales, esto es, aproximaremos la curva por medio de segmentos de recta que unen puntos sobre la curva, como lo muestra la figura.





6.1. Curvas determinadas por funciones

Considere una curva C determinada por la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, y suponga también que la curva es suave (sin vértices o esquinas), es decir, derivable en (a, b). Construya una partición regular $P = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ con $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Si denotamos por s_i al segmento de recta que une los puntos (t_{i-1}, y_{i-1}) y (t_i, y_i) (donde $y_i = f(t_i)$), la poligonal es el camino que une los segmentos s_1, s_2,..., s_n. La longitud de la poligonal es una aproximación de la longitud de C. Por eso, nos concentramos en la longitud de un segmento cualquiera, digamos s_i. Considere el triángulo rectángulo que une los puntos (t_{i-1}, y_{i-1}), (t_i, y_i) y (t_i, y_{i-1}), como se ilustra en la figura. Como s_i es la hipotenusa del triángulo, su longitud está dada (debido a el teorema de Pitágoras) por:

$$\begin{aligned}\text{longitud } s_i = \Delta s_i &= \sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2}\\ &= \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (\Delta t)^2}. \qquad (7.2)\end{aligned}$$

Como f es derivable, existe $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $f'(t_i^*)\Delta t = y_i - y_{i-1}$ y se tiene que

$$\Delta s_i = \sqrt{(f'(t_i^*)\Delta t)^2 + (\Delta t)^2}$$
$$= \sqrt{1 + [f'(t_i^*)]^2}\ \Delta t.$$

Recuerde que el teorema de valor medio para derivadas dice que para f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) existe c entre a y b que satisface $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Al sumar todos los términos dados por la partición, obtenemos la suma de Riemann de una función continua:

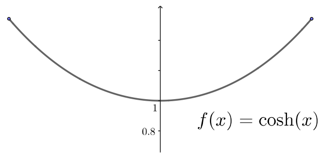
$$\text{Longitud} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(t_i^*)]^2}\ \Delta t_i.$$

Como los segmentos de recta son tan cercanos a la curva en intervalos suficientemente pequeños, es natural definir la longitud como la integral

$$L \ = \ \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx.$$

Ejemplo 7.18. La catenaria es una curva que describe una cuerda o cadena al ser suspendida de sus extremos. La ecuación general está dada por $f(x) = a\cosh(x/a)$. En el volumen II de [2], se describe esta curva y se deduce su ecuación utilizando elementos básicos de ecuaciones diferenciales.

Considere la curva definida por la función $f(x) = \cosh(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$. Para calcular su longitud, hallamos $1 + [f'(x)]^2$:



$$\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x) \quad \Longrightarrow \quad 1 + [\cosh'(x)]^2 = \cosh^2(x),$$

entonces $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \cosh(x)$. Luego, para hallar la longitud debemos resolver la integral:

$$\begin{aligned} \text{longitud} = \int_{-1}^{1} \cosh(x)\ dx &= \Big[\operatorname{senh}(x)\Big]_{-1}^{1} \\ &= \operatorname{senh}(1) - \operatorname{senh}(-1) \\ &= e - e^{-1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.19. Encontremos la longitud de la parábola $y = x^2$, cuando x varía de 0 a 1.

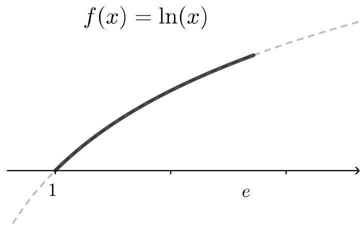
$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [2x]^2}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\ du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\arctan 2} \sec^3 \theta d\theta, \end{aligned}$$

donde hemos hecho $u = 2x$ y después $u = \tan\theta$. De acuerdo con el ejemplo 5.23, página 98, se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4}\left[\tan\theta\sec\theta - \ln\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \ln\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]_0^{\arctan 2} \\ &= \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Ejemplo 7.20. Encuentre la longitud de arco de la curva dada por $y = \ln(x)$ para x en $[1, e]$. La derivada $y' = f'(x) = \frac{1}{x}$, entonces $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$, y una integral que describe la longitud de arco es

$$L = \int_1^e \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx.$$



Vea el ejercicio 4*f* en la página 112. Esta es una integral que se puede resolver utilizando sustitución trigonométrica, cuya solución es

$$L = \sqrt{e^2+1} - \sqrt{2} + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{e^2+1}}\right).$$

Ejemplo 7.21. Para hallar la longitud de la curva $y = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$, con $1 \le x \le 2$, calculamos la derivada, elevamos al cuadrado y sumamos 1:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\frac{(e^x-1)e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1} \\ 1 + [y']^2 &= 1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)} = \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2. \end{aligned}$$

Entonces, la integral queda

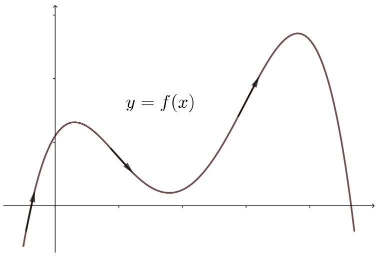
$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2} = \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx \\ &= \int_1^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx + \int_1^2 \frac{1}{e^{2x}-1}dx \\ &= \left[\ln|e^{2x}-1| - \frac{1}{2}\ln e^{2x}\right]_1^2 = \left[\ln|e^{2x}-1| - x\right]_1^2 = \ln(e^2+1) - 1. \end{aligned}$$

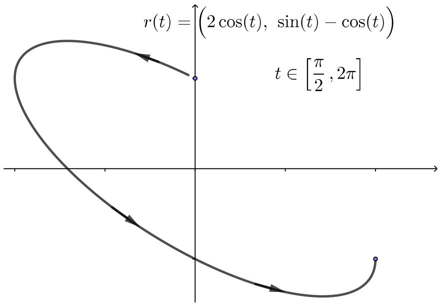
6.2. Curvas paramétricas

Una función (continua) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en un intervalo $[a, b]$ determina un segmento de curva que es recorrido de izquierda a derecha (como en la figura de la izquierda abajo), pero también existen curvas que no pueden ser expresadas como funciones y que pueden ser recorridas en otro sentido (como la figura de la derecha). Algunas de esas curvas se expresan por medio de una parametrización, que es una función de varias variables de la forma

$$\begin{aligned} r : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (f(t),\ g(t)). \end{aligned}$$

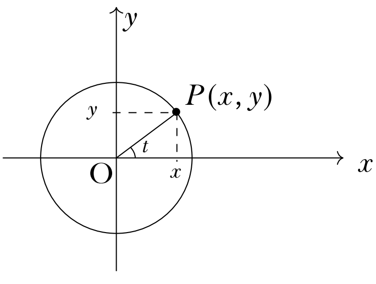
La variable t se llama parámetro, y en este caso solo hay uno.





Nota 7.22. *Toda función $y = f(x)$ en $[a, b]$ admite la parametrización $r(t) = (t,\ f(t))$, con $t \in [a, b]$, sin embargo, existen infinitas de estas, por ejemplo, $r_2(t) = (b + a - t,\ f(b + a - t))$, con $t \in [a, b]$, que recorre la curva de derecha a izquierda. La parametrización $r_3(t) = (t(b-a)+a, f(t(b-a)+a))$, con $t \in [0, 1]$, normaliza el dominio de r.*

El primer ejemplo que tenemos a la mano es la ecuación de la circunferencia, que usualmente notamos $x^2 + y^2 = r^2$. Ahora bien, si queremos despejar y en términos de x, debemos elegir usar la raíz positiva para representar la parte superior de la circunferencia, o la raíz negativa para la parte inferior. Esto sucede porque la curva en cuestión no representa una función. Pero también podemos describir esta curva pensando en el ángulo que forma el rayo $\overline{OP}$ con el eje x.



Si queremos recorrer la curva comenzando en $(r, 0)$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, podemos escoger $x(t) = r\cos t,\ y(t) = r\,\text{sen}\,t$ y, para completar una vuelta, hacemos que t tome todos los valores entre 0 y 2π; si queremos la mitad superior, basta tomar t entre 0 y π.

En este caso, podemos verificar sustituyendo las expresiones para x y y, y obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t = r^2.$$

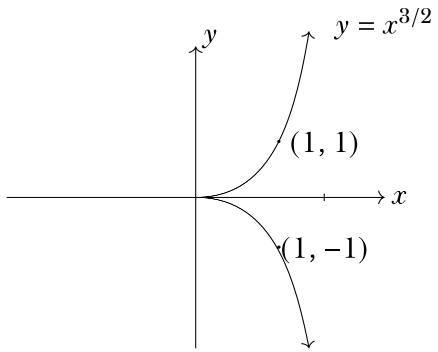
Como segundo ejemplo, consideremos la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Las ecuaciones paramétricas $x(t) = a\cos t,\ y(t) = b\operatorname{sen} t$, con $t \in [0, 2\pi]$, corresponden a recorrer la elipse desde el punto $(a, 0)$ en contra de las manecillas del reloj. Entonces, verificamos que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\operatorname{sen}^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

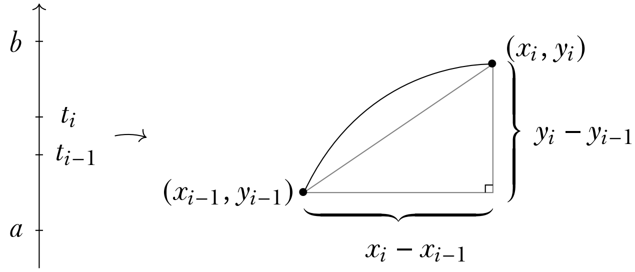
Por último, consideremos la parábola $y = x^2$ en $[-1, 2]$, la parametrización inducida por la función es $r(t) = (t, t^2)$, con $t \in [-1, 2]$. Adicionalmente, se puede encontrar una parametrización tal que $t \in [0, 1]$, como se mencionó antes: $x(t) = 3t - 1$ y $y(t) = (3t - 1)^2$.

En el caso en que f y g tienen derivadas continuas y no se anulan simultáneamente, decimos que la curva es **suave**.

Por ejemplo, la curva $y^2 = x^3$ no es suave. Podemos escribirla como (t^2, t^3), donde $x(t) = t^2$ y $y(t) = t^3$. Vemos que las derivadas $x'(t)$ y $y'(t)$ se anulan en $t = 0$ y gráficamente observamos en el origen un cambio brusco, un cambio que NO es suave. Esta curva se conoce como *la cúbica cúspide* o *parábola de Neil*.



Suponga que tenemos una curva definida por $r(t) = (f(t), g(t))$ donde t varía en el intervalo $[a, b]$, y que tanto f como g son funciones continuas sobre $[a, b]$, derivables en (a, b) y no se anulan simultáneamente. Consideramos una partición $P = \{t_0 = a, \ldots, t_n = b\}$ y denotamos $x_i = f(t_i)$ y $y_i = g(t_i)$.



Entonces, aproximamos la longitud del segmento de curva que va del punto (x_{i-1}, y_{i-1}) al punto (x_i, y_i) usando la hipotenusa del triángulo rectángulo, así:

$$\begin{aligned}
\Delta s_i &= \sqrt{[x_i - x_{i-1}]^2 + [y_i - y_{i-1}]^2} \\
&= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 \ + \ [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}, \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

y, por el teorema del valor medio para derivadas, debe existir un punto $t_i^* \in (a, b)$ tal que $f'(t_i^*) = \frac{f(t_i)-f(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}$, o mejor $f'(t_i^*)\Delta t_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$. Por la misma razón, para g existe $t_i^{**} \in (a, b)$ tal que $g'(t_i^{**})\Delta t_i = g(t_i) - g(t_{i-1})$. Reemplazando estas dos expresiones en (7.3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta s_i &= \sqrt{\left[f'(t_i^*)\Delta t_i\right]^2 + \left[g'(t_i^{**})\Delta t_i\right]^2} \\
&= \sqrt{\left[f'(t_i^*)\right]^2 + \left[g'(t_i^{**})\right]^2}\ \Delta t_i. \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Aunque esta no es propiamente una suma de Riemann (¿por qué?), cuando hacemos particiones más finas los puntos t_i^* y t_i^{**} se acercan tanto como se quiera. Entonces, definimos la longitud como

$$L \ = \ \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Ejemplo 7.23. Calculemos la longitud de un cuarto de circunferencia de radio r usando la forma paramétrica $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\,\mathrm{sen}\, t$, con $t \in [0, \pi/2]$, es decir, el segmento del primer cuadrante.

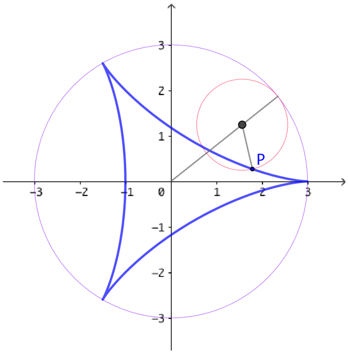
$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2\,\mathrm{sen}^2\, t + r^2\cos^2 t}\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} r\ dt = rt\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi r}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.24. Una **hipocicloide** es la curva que se genera cuando un punto fijo de una circunferencia de radio r gira por la parte interna de otra circunferencia fija, de radio $R > r$, de manera tangente. Podemos escribirlo en forma paramétrica como

$$\begin{aligned}
x(t) &= (R - r)\cos t + r\cos(\gamma) \\
y(t) &= (R - r)\,\mathrm{sen}\, t - r\,\mathrm{sen}(\gamma),
\end{aligned}$$

donde $\gamma = \left(\frac{R}{r} - 1\right) t$. Si hacemos $k = \frac{R}{r}$ y este es un número entero, obtenemos una hipocicloide de k puntas[2].

Consideremos el caso en que $R = 3$ y $r = 1$, esto es, una circunferencia de radio 1 gira dentro de una circunferencia de radio 3, como lo muestra la figura. Esta curva ($k = 3$) se conoce como **deltoide** o **tricúspide**. Sus ecuaciones paramétricas y su gráfica se dan a continuación.



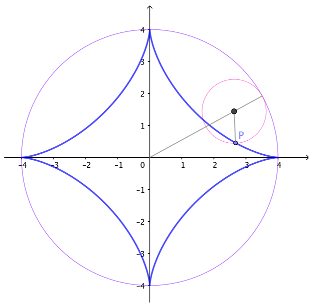
$$x(t) = 2\cos t + \cos(2t)$$
$$y(t) = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(2t).$$

Así que la longitud de la curva viene dada por

$$L = 3\int_0^{2\pi/3} \sqrt{8(1-\cos 3t)}dt = 16.$$

Observe que la curva no es suave en $t = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ y en $t = 0$, por tanto, calculamos la longitud de una porción y multiplicamos por 3.

En el caso $k = 4$, obtenemos la curva conocida como **astroide**. Sus ecuaciones paramétricas, suponiendo $r = 1$ y $R = 4$, son:



$$x(t) = 3\cos t + \cos(3t)$$
$$y(t) = 3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(3t).$$

Su longitud está dada por la integral $L = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{18(1-\cos 4t)}dt = 24.$

Ejercicios 7.6

1. Plantee la integral que determina la longitud de una elipse.

2. Encuentre la longitud de arco de las siguientes curvas.

   a) $y = \cosh x$, de $x = -1$ a $x = 1$.

[2]El lector puede consultar, por ejemplo, https://www.gaussianos.com/astroide-cardioide-y-demas-oides/, donde se muestran algunas de estas curvas y se generan sus gráficas usando el programa de libre acceso Geogebra.

b) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, desde $x = \frac{1}{4}$ hasta $x = 1$.

c) $y = \int_1^x \sqrt{r^4 - 1}\, dr$, para $1 \leq x \leq 3$.

d) $y = 6x^{2/3}$, para $1 \leq x \leq 8$.

e) $4y^2 = 9x^3$, desde el origen hasta el punto $(2, 3\sqrt{2})$.

f) $8y = 2x^4 + x^{-2}$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

g) $y = \frac{x^{7/2}}{7} + \frac{1}{3x^{3/2}}$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

3. Encuentre la longitud de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x(t) = t^3 - 3t,\ y = 3t^2$, para la porción que va desde $t = -2$ hasta $t = 2$.

4. Determine el punto de la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ que se encuentra a 1 unidad del punto $(1, 0)$, medida a lo largo de la curva, en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

5. Determine la longitud de la curva $f(x) = \int_0^x \sqrt{t+1}\, dt$ en $[1, 2]$.

6. Sea f una función dada por $f(x) = \int_{\pi/4}^x \sqrt{25 \tan t \sec^2 t - 1}\, dt$. Encuentre la longitud de la curva cuando x varía de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{3}$.

7. Encuentre la longitud de la curva cuyas ecuaciones paramétricas están dadas por

   a) $r(t) = \begin{cases} x(t) & = a(t - \cos t), \\ y(t) & = a(1 - \operatorname{sen} t), \end{cases}$

   para $0 \leq t \leq \pi$. *Sug. Observe que* $(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 = 1 + \operatorname{sen} x$.

   b) $r(t) = \begin{cases} x(t) & = 2\operatorname{sen} t + 1 \\ y(t) & = 2\cos t - 4 \end{cases}$, para $0 \leq t \leq \pi$.

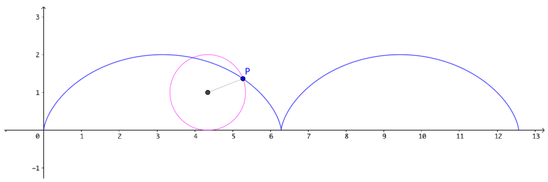
   c) $r(t) = (t, t^2 + 5)$, para $0 \leq t \leq 1$.

   d) $r(t) = (5t^4, 4t^5)$, para $1 \leq t \leq 2$.

8. Encuentre el perímetro de la región limitada por $y = 4-x^2,\ y = 2x+1$.

9. Considere la región limitada por $y = x^2,\ y = |x|$ y encuentre la longitud de su frontera.

10. La **cicloide** es la curva que se genera cuando un punto fijo P de una circunferencia gira sobre una recta. En la gráfica, vemos el rastro que ha dejado P cuando la circunferencia de radio 1 ha girado sobre el eje x.



Las ecuaciones paramétricas son

$$x(t) = r(t - \operatorname{sen} t)$$
$$y(t) = r(1 - \cos t),$$

donde r es el radio de la circunferencia y t es el ángulo, en este caso hemos tomado $t \in [0, 4\pi]$, lo que produce *dos cicloides*. Encuentre la longitud de la curva descrita.

7. Centros de masa y valor esperado

El caso discreto

Primero, presentamos las definiciones del centro de masa para un número finito de cuerpos sobre una recta y sobre un plano y el valor esperado para finitos valores. Posteriormente, pasaremos al caso continuo, donde involucramos las integrales para realizar estos cálculos.

7.1. El centro de masa de n-cuerpos

El caso lineal

Dado un sistema que consta de dos cuerpos C_1 y C_2, con masas m_1 y m_2 respectivamente, contenidos en una recta r, se define su **punto de equilibrio** o **centro de masa** como un punto E sobre la recta tal que

$$m_1 \cdot \operatorname{dist}(C_1, E) = m_2 \cdot \operatorname{dist}(C_2, E),$$

donde $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$ es la distancia entre dos puntos. Si elegimos un sistema de coordenadas para la recta r y x_1, x_2 son las posiciones de los cuerpos C_1 y C_2 sobre la recta, la coordenada del centro de masa E debe satisfacer que

$$m_1 \cdot (x_1 - E) + m_2 \cdot (x_2 - E) = 0. \tag{7.5}$$

Si despejamos E de (7.5), obtenemos

$$E = \frac{m_1 x_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{7.6}$$

Si el sistema está compuesto por n cuerpos y es lineal, es decir, que todos los cuerpos están sobre una línea recta, el centro de masa satisface una condición semejante a (7.5),

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{7.7}$$

A la expresión $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k$ se le llama **momento de masa del sistema** o brevemente **momento** y a la suma de las masas $\sum_{k=1}^{n} m_k$ se le llama **masa del sistema** o simplemente **masa**. Con esto, el

$$\text{punto de equilibrio} = \frac{\text{momento}}{\text{masa}}.$$

Ejemplo 7.25. Considere el sistema de cinco cuerpos C_i, con $i = 1, \ldots, 5$ sobre la recta real, en las posiciones $-3,\ 2,\ 0,\ -5,\ -7$ respectivamente, y cuyas masas son $2,\ 2.5,\ 3,\ 1.5$ y 2 kg respectivamente. Entonces, el centro de masa está en

$$E = \frac{-3(2) + 2(2.5) + 0(3) - 5(1.5) - 7(2)}{2 + 2.5 + 3 + 1.5 + 2} = -\frac{45}{22}.$$

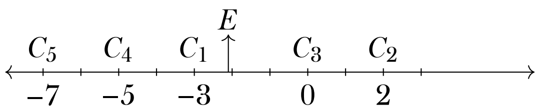


Figura 7.4: centro de masa sobre la recta.

El caso plano

Si el sistema consta de n cuerpos C_i distribuidos (posiblemente en el espacio pero) sobre un plano, a los cuales les asignamos coordenadas $(x_i,\ y_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, se define su centro de masa como un punto $E(\overline{x},\ \overline{y})$ tal que $\overline{x}$ es el centro de masa de las abscisas y $\overline{y}$ es el centro de masa de las ordenadas del sistema, es decir,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{7.8}$$

Nota 7.26. *Usualmente, la suma $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k$ se denomina **momento con respecto al eje** y, ya que las posiciones x_i determinan las distancias (dirigidas) con respecto a ese eje, se denota por M_y. Análogamente, el **momento con respecto al eje** x está determinado por $\sum_{k=1}^{n} m_k y_k$ y se denota por M_x.*

Ejemplo 7.27. Considere el sistema de cuatro cuerpos $C_1(2,-1)$, $C_2(3,4)$, $C_3(-2,3)$ y $C_4(4,1)$ con masas $2,\ 3,\ 1$ y 3 kg respectivamente, entonces

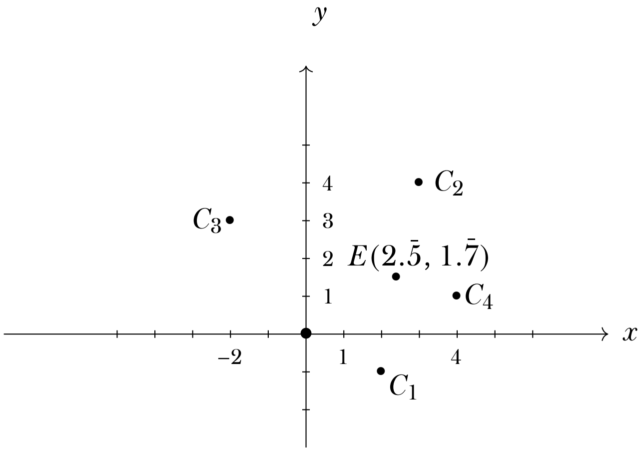


Figura 7.5: centro de masa en el plano.

$$\overline{x} = \frac{2(2)+3(3)+1(-2)+3(4)}{2+3+1+3} = \frac{23}{9} = 2.\overline{5},$$

$$\overline{y} = \frac{2(-1)+3(4)+1(3)+3(1)}{9} = \frac{16}{9} = 1.\overline{7}.$$

7.2. Valor esperado de una variable aleatoria discreta

En estadística, se estudia un problema similar en el que se trata de determinar el resultado más probable de un experimento. La probabilidad de que un evento ocurra se mide en una escala entre 0 y 1, donde 0 significa que el evento no ocurre y 1 que ocurrirá; la probabilidad también puede tomar cualquier valor intermedio en esta escala. Calcular la probabilidad de que un evento ocurra es otro problema que no vamos a estudiar (supondremos que conocemos los valores). Si un experimento tiene n posibles resultados $r_1,\ r_2,\ldots,r_n$, el cual se conoce como *espacio muestral* Ω, y cada uno tiene asociada la probabilidad de que ocurra $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n$ respectivamente, se debe tener la condición de que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Si los resultados r_i's se asocian a una variable (cuantitativa) discreta X y se representan en el eje real, se define el **valor esperado de la variable aleatoria** como

$$E[X] := \sum_{k=1}^{n} r_k p_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} r_k p_k}{\cancelto{1}{\sum_{k=1}^{n} p_k}}. \tag{7.9}$$

Ejemplo 7.28. El experimento consiste en lanzar una moneda al aire. Al observar como cae la moneda, los resultados son r_1 = cara y r_2 = sello. Podemos codificar estos resultados como cara = 0 y sello = 1, esta asignación se conoce como variable aleatoria[3], la cual denotaremos X. Si la moneda no está cargada, podemos suponer que $p_1 = 0.5$ y $p_2 = 0.5$, es decir, una probabilidad de 50-50. Entonces, el valor esperado de la variable aleatoria es

$$E[X] = 0.5(0) + 0.5(1) = 0.5,$$

que se puede interpretar de la siguiente manera: en un lanzamiento es igualmente probable que caiga cara o sello. Este simple ejemplo nos muestra que el valor esperado no necesariamente está dentro de los resultados del experimento. Si la moneda estuviera cargada y las probabilidades fueran $p_1 = 0.3$ y $p_2 = 0.7$, entonces el valor esperado de la variable aleatoria en este caso sería 0.7, esto es, se esperaría que 70 de cada 100 lanzamientos caiga sello.

El promedio ponderado

Es usual que la calificación de una asignatura o el promedio académico de un estudiante dependa de varias notas que están asociadas a distintos grados de dificultad o exigencia (número de créditos), por lo que se asocia a cada dato un *peso*. Para calcular el promedio ponderado de n calificaciones $C_1, C_2, \ldots, C_n$, asociamos a cada una un peso $p_1, p_2, \cdots, p_n$ respectivamente y lo definimos[4] como

$$\text{Prom. Pon} = \frac{\sum_{k=1}^{n} C_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}. \tag{7.10}$$

[3] Una variable aleatoria es una función que va del espacio muestral -el cual posiblemente es no numérico- a los reales. Esto significa que la variable aleatoria cuantifica los eventos que ocurren en un experimento.

[4] En algunos textos se define el promedio ponderado como $C_1 r_1 + \cdots + C_n r_n$, donde $r_k = \frac{p_k}{\sum_{j=1}^{n} p_j}$ y se satisface $\sum_{k=1}^{n} r_k = 1$, la cual es equivalente a (7.10).

Ejemplo 7.29. Las calificaciones de las asignaturas de un estudiante son $4,\ 3.3,\ 5,\ 4.1,\ 2.5$ y 3 y sus respectivos créditos son $2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 4$ y 4. Si el peso de cada asignatura corresponde a su número de créditos, entonces su promedio académico ponderado es

$$\text{Prom. Pon} = \frac{4(2) + 3.3(2) + 5(2) + 4.1(2) + 2.5(4) + 3(4)}{2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4} = 3.425. \tag{7.11}$$

El caso continuo

Abordaremos los problemas de hallar el centro de masa de regiones acotadas y de alambres, así como de **centroides**, es decir, asumiendo que la masa de la región es constante o inexistente. Por último, estudiaremos cómo hallar el valor esperado de una función de distribución de probabilidad.

7.3. El centro de masa de una varilla

Comenzamos con el centro de masa de una varilla recta de longitud l. Suponga que está colocada sobre la recta real con puntos extremos en $a < b$, como se ilustra abajo, también supondremos que para cada punto de la varilla conocemos su función continua de densidad $y = f(x)$.

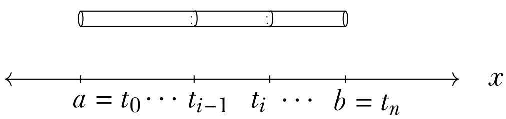


Figura 7.6: centro de masa de una varilla.

Consideramos una partición regular $\mathbb{P} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, entonces ahora tenemos un problema de n segmentos (cuerpos) $S_i = [t_{i-1}, t_i]$, con $i = 1, \ldots, n$. También denotamos por $\Delta t = \Delta t_i = \frac{b-a}{n}$ y utilizamos la función f para aproximar el peso de cada segmento de la varilla. Si tomamos cualquier[5] valor $t_i^* \in S_i$, una aproximación de su masa es $m_i = f(t_i^*)\Delta t$. Como el problema corresponde a n cuerpos sobre una recta,

[5]Como la función es continua, hacemos que la variación de $f(t_i^*)$ en S_i sea tan pequeña como se quiera, eligiendo una partición *muy fina*, es decir, con $\Delta t < \epsilon$ para $0 < \epsilon$ muy cercano a 0.

aplicamos la expresión (7.7) para el centro de masa asociado a $\mathbb{P}$

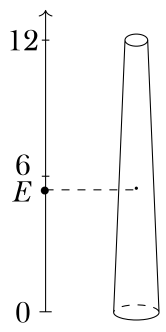
$$e(\mathbb{P}) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k t_i^*}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_i^* f(t_i^*)\Delta t}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t}. \tag{7.12}$$

Nota 7.30. *Para hallar los momentos de masa, se requiere la posición del segmento S_i, lo que hacemos es suponer que toda la masa del segmento se encuentra concentrada en el punto t_i^*. Note que un punto no tiene masa, por eso aproximamos la masa de un segmento.*

Tanto el numerador como el denominador de (7.12) son sumas de Riemann de las funciones $xf(x)$ y $f(x)$. Con particiones cada vez más finas, la aproximación de la masa de cada segmento se acerca más al valor real al igual que su posición. Entonces, resulta natural definir el centro de masa de la varilla con función de densidad f como

$$e = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}. \tag{7.13}$$

Ejemplo 7.31. Para transportar una columna de mármol de 12 mts de altura, que es un poco más ancha en su base, se desea poner un soporte lo más cerca posible de su centro de masa. Se ha estimado que la función de densidad está dada por $f(y) = 80 - \frac{5y}{6}\,\frac{kg}{m}$. Para calcular el centro de masa de la columna, la referenciamos en un sistema de coordenadas y ubicamos la base en 0 y el tope en 12, entonces su centro de masa está en



$$E = \frac{\int_0^{12} y(80 - \frac{5y}{6})\,dy}{\int_0^{12} 80 - \frac{5y}{6}\,dy} = \frac{5280}{900} = \frac{88}{15} \text{ metros del origen del sistema.}$$

7.4. Centro de masa de un alambre

Suponga que l es un alambre curvo contenido en un plano y está determinado por una función $y = g(x)$ para $a \leq x \leq b$; si, adicionalmente, $y = f(x)$

representa la función[6] de densidad de l, entonces podemos calcular el centro de masa del alambre haciendo particiones del intervalo $[a, b]$ y convirtiendo el problema en uno de n cuerpos en el plano. El centro de masa en este caso es una pareja ordenada, que no necesariamente está en l.

Más precisamente, sea $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ una partición regular de $[a, b]$. Esta partición determina n segmentos de curva $S_i = \{(x, y) : y = g(x), t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, con $i = 1, \ldots, n$, cuya masa es (longitud)×(densidad), ya tenemos una forma de aproximar la primera:

$$\text{(longitud)}_i = L_i \approx \sqrt{1 + [g'(t_i^*)]^2}\Delta t,$$

donde t_i^* es un valor[7] en $[t_{i-1}, t_i]$. Y la masa del segmento S_i se puede aproximar como

$$\text{(masa)}_i \approx f(t_i^*)\sqrt{1 + [g'(t_i^*)]^2}\Delta t.$$

Para hallar los momentos de cada segmento, necesitamos la posición tanto en el eje x (abscisa) como en el y (ordenada)

$$\text{(posición en el eje } x)_i \approx t_i^*$$

$$\text{(posición en el eje } y)_i \approx g(t_i^*).$$

Ya tenemos todas las magnitudes para calcular los momentos y la masa del sistema

$$\begin{aligned}\text{(masa)} &= \sum_{i=1}^{n} \text{(densidad)}_i \times \text{(longitud)}_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\sqrt{1 + [g'(t_i^*)]^2}\Delta t,\end{aligned}$$

[6] f con derivada de primer orden continua.

[7] t_i^* es el punto del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ que satisface la condición del teorema de valor medio para la función g.

$$
\begin{aligned}
(\text{momento})_x = M_x &\approx \sum_{i=1}^{n} (\text{posición } y)_i \times (\text{masa})_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(t_i^*) f(t_i^*) \sqrt{1 + [g'(t_i^*)]^2} \Delta t,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{momento})_y = M_y &\approx \sum_{i=1}^{n} (\text{posición } x)_i \times (\text{masa})_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} t_i^* f(t_i^*) \sqrt{1 + [g'(t_i^*)]^2} \Delta t.
\end{aligned}
$$

La masa y los momentos son sumas de Riemann de funciones continuas, y para una partición más fina se obtiene una mejor aproximación de la longitud, la masa y la posición. Entonces, definimos el centro de masa de la curva l con función de densidad $f(x)$ por la pareja $E(\overline{x}, \overline{y})$, donde

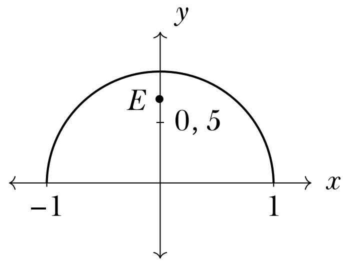
$$
\overline{x} := \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x) \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx}; \qquad \overline{y} := \frac{\displaystyle\int_a^b g(x) f(x) \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x) \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\, dx}. \tag{7.14}
$$

Nota 7.32. *En muchos de los casos que presentaremos, las integrales que resultan de hallar los momentos de masa pueden ser complejas de calcular, por eso, sugerimos en dichos casos que se resuelva numéricamente.*

Ejemplo 7.33. Considere la curva determinada por $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, con $-1 \leq x \leq 1$. Para hallar su centroide, podemos asumir que la función de densidad es $f(x) = 1$. En este caso, conocemos la longitud de la curva: π. Y para hallar los momentos, vemos que $[g'(x)]^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$, entonces

$$M_y = \int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{\text{posición}} \underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx}_{\text{factor de longitud}}$$

$$= \int_{-1}^{1} x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$



$$M_x = \int_{-1}^{1} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\text{posición}} \underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx}_{\text{factor de longitud}} = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2,$$

entonces $E(\overline{x}, \overline{y}) = \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$.

7.5. Centros de masa de regiones acotadas

Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$ y, además, que $f \leq g$ en este intervalo. Entonces, definimos $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}$, la región del plano acotada por las curvas f y g. Además, consideramos $\rho(x)$ una función de densidad continua (dada en $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$) que depende únicamente de la abscisa. El problema consiste en calcular el centro de masa de una lámina de superficie R con función de densidad ρ.

Como antes, consideramos una partición regular $\mathbb{P} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ para determinar n regiones

$$R_i = \{(x, y) : t_{i-1} \leq x \leq t_i, \quad f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Para aproximar la masa de cada región, escogemos el punto medio del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, lo denotamos por t_i^* y consideramos el rectángulo $R_i' = [t_{i-1}, t_i] \times [f(t_i^*), g(t_i^*)]$. La masa de R_i, entonces se aproxima por

$$\begin{aligned} m_i &\approx (\text{densidad})_i \times (\text{área } R_i') \\ &= \rho(t_i^*)[g(t_i^*) - f(t_i^*)]\Delta t. \end{aligned}$$

Luego, la masa de todo el sistema se puede aproximar por:

$$\text{masa total} \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(t_i^*)[g(t_i^*) - f(t_i^*)]\Delta t. \tag{7.15}$$

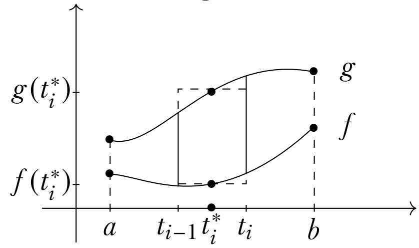
Por otro lado, asumimos que la posición de cada región R_i es el centroide del rectángulo R_i'. Esto quiere decir que la abscisa es el punto medio[8] del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y la ordenada el punto medio de $[f(t_i^*), g(t_i^*)]$

$$\text{(posición)}R_i := \left(t_i^*, \frac{f(t_i^*)+g(t_i^*)}{2}\right).$$

Nota 7.34. *No confunda el punto medio de* $[f(t_i^*), g(t_i^*)]$ *con la distancia media* $\dfrac{g(t_i^*)-f(t_i^*)}{2}$.

Entonces, los momentos de masa se aproximan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{n} (\text{posición}_x)_i \times (\text{masa})_i \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} t_i^*\ \rho(t_i^*)[g(t_i^*)-f(t_i^*)]\Delta t, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^{n} (\text{posición}_y)_i \times (\text{masa})_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_i^*)+g(t_i^*)}{2}\ \rho(t_i^*)[g(t_i^*)-f(t_i^*)]\Delta t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{[g(t_i^*)]^2-[f(t_i^*)]^2}{2}\rho(t_i^*)\Delta t. \end{aligned}$$

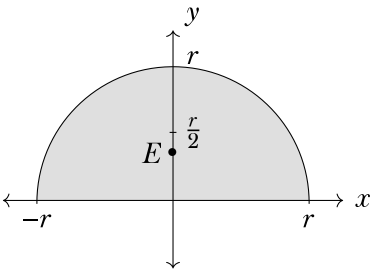
La masa total y los momentos son sumas de Riemann de funciones continuas; para particiones más finas, se tiene mejor aproximación al área de cada región y también a su masa. Entonces, definimos el centro de masa de R por medio de las integrales asociadas a esas sumas y obtenemos $E(\overline{x}, \overline{y})$, donde

$$\begin{aligned} \overline{x} &:= \frac{\int_a^b x\rho(x)[g(x)-f(x)]\,dx}{\int_a^b \rho(x)[g(x)-f(x)]\,dx}, \\ \overline{y} &:= \frac{\frac{1}{2}\int_a^b ([g(x)]^2-[f(x)]^2)\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)[g(x)-f(x)]\,dx}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Nota 7.35. *El centro de masa E, definido por las ecuaciones (7.16), corresponde al caso en que* f, g *y* ρ *son funciones de* x. *Como ejercicio reescriba las fórmulas en el caso en que* $f(x) = 0$ *y la densidad* $\rho(x) = k$ *es constante, o si* f, g *y* ρ *son funciones de* y.

[8] Esta es la razón por la que escogimos t_i^* como el punto medio desde el comienzo.

Ejemplo 7.36. Considere una semicircunferencia de radio r con centro en el origen. Para calcular el centroide de esta región, necesitamos calcular su área en lugar de su masa, que está dada por $A = \frac{\pi r^2}{2}$. Los momentos de la región se hallan por medio de las integrales



$$M_y = \int_{-r}^{r} \underbrace{x}_{\text{posición}} \underbrace{\sqrt{r^2 - x^2}dx}_{\text{área}} = 0;$$

$$M_x = \int_{-r}^{r} \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - x^2}}_{\text{posición}} \underbrace{\sqrt{r^2 - x^2}dx}_{\text{área}} = \frac{2}{3}r^3.$$

Entonces, el centro de masa está en $E = \left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$. Era de esperar que $M_y = 0$, ya que la región es simétrica con respecto al eje y.

7.6. Valor esperado de una variable aleatoria continua

Cuando los posibles resultados de un experimento aleatorio son infinitos y conforman un intervalo, se asocia una variable aleatoria X que cuantifica cada resultado obtenido. Entonces, la probabilidad de que el evento $X = x$ ocurra es nula. En estos casos, la probabilidad se estudia con una función f de valor real, no-negativa, integrable y definida en $\mathbb{R}$ que satisface dos condiciones

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \tag{7.17}$$
- si $P[a \leq X \leq b]$ es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores en un intervalo $[a, b]$, se debe tener

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx.$$

Una función que satisface esas condiciones se llama **densidad de probabilidad** de la variable aleatoria X.

Un problema que se estudia en estadística es encontrar el valor esperado de una variable aleatoria X. En este caso, el problema es continuo. Primero, veamos el caso en que la función de densidad $f(x)$ es cero si $x < a$ para algún a real. Consideremos entonces el intervalo $[a, b]$ y una partición regular $P = \{a = t_0, \ldots, t_n = b\}$, con $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Luego, un elemento arbitrario t_i^* en $[t_{i-1}, t_i]$, de esta forma obtenemos un problema discreto, donde la variable aleatoria puede tomar los valores $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*$ y la probabilidad de que $X \in [t_{i-1}, t_i]$ es $f(t_i^*)\Delta t$. Entonces, aplicamos la definición de valor esperado para el problema discreto, dada por (7.9), pero como no tenemos todos los resultados del experimento, dividimos sobre la probabilidad de que $X \in \{t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*\}$,

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^* f(t_i^*)\Delta t}{\sum_{i=1}^n f(t_i^*)\Delta t}.$$

El numerador y el denominador son sumas de Riemann de $xf(x)$ y $f(x)$, entonces resulta natural definir el valor esperado de x en $[a, b]$ como

$$E[X; a, b] = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}. \tag{7.18}$$

Si hacemos $b \to \infty$, y la integral $\int_a^\infty xf(x)dx$ existe, entonces resulta natural definir el valor esperado de x como

$$E[X] = \int_a^\infty xf(x)dx. \tag{7.19}$$

Ahora veamos el caso en que la función de densidad no necesariamente es cero en $(-\infty, a)$. Fijamos cualquier real d, para cualquier intervalo $[c, b]$ con $c < d < b$, y tomamos una partición que contenga a d; de manera similar a (7.18), podemos definir

$$E[X; c, b] = \frac{\int_c^d xf(x)\,dx + \int_d^b xf(x)\,dx}{\int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx}. \tag{7.20}$$

Si consideramos límites cuando $b \to \infty$ y $c \to -\infty$, y la integral $\int_{-\infty}^\infty xf(x)dx$ existe, entonces $E[X; c, b] \to \int_{-\infty}^\infty xf(x)dx$, por eso resulta natural definir el valor esperado de X como

$$E[X] = \int_{-\infty}^\infty xf(x)dx. \tag{7.21}$$

Ejemplo 7.37. Considere la función de densidad exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

con $\lambda > 0$. Para calcular el valor esperado de X, comenzamos hallando

$$\begin{aligned} \int_0^t x\lambda e^{-\lambda x}dx &= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-\lambda x}dx \\ &= -te^{-\lambda t} + \tfrac{1}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right], \end{aligned}$$

y esta última expresión tiende a $\frac{1}{\lambda}$ cuando $t \to \infty$, es decir,

$$E[X] = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{t\to\infty} \left[-te^{-\lambda t} + \tfrac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right] = \frac{1}{\lambda}.$$

Ejercicios 7.7

1. Calcule el centro de masa de los siguientes sistemas.

   a) Tres cuerpos C_1, C_2 y C_3 sobre una recta, con las posiciones y masas (en kg) que se muestran a continuación.

masa	4	3	1
posición	-2	3	5

   b) Tres cuerpos C_1, C_2 y C_3 en el plano, con las posiciones y masas (en kg) que se muestran a continuación.

masa	5	7	4
posición	$(2, -1)$	$(3, 0)$	$(4, 1)$

   c) Tres cuerpos C_1, C_2 y C_3 en el plano, con las posiciones y masas (en kg) que se muestran a continuación.

masa	6	2	5
posición	$(-1, 2)$	$(1, 0)$	$(2, 1)$

2. Suponga que una viga metálica uniforme de 20 metros de longitud y 3 tons tiene un yunque adherido a uno de sus extremos con una masa de 400 kg. Halle el centro de masa del sistema.

3. Halle el centro de masa de una varilla de 2 mts de longitud, cuya función de densidad en un extremo es 40 gr y aumenta linealmente hasta ser 60 gr en el otro extremo.

4. Halle el centroide de la curva determinada por la función e intervalo dados.

   a) $g(x) = x^2$, con $0 \leq x \leq 4$.

   b) $g(x) = \cosh x$, con $-1 \leq x \leq 1$.

   c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, con $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

   d) $f(x) = \cos x$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.

5. Halle el centro de masa de la curva determinada por la función g y por la función de densidad ρ con unidades de $\frac{\text{masa}}{\text{long.}}$

   a) $g(x) = x^2$ y $\rho(x) = x$ en $x \in [1, 3]$.

b) $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $\rho(x) = \cos x$ en $x \in [1, 3]$.

6. Halle el valor esperado para la función de densidad normal

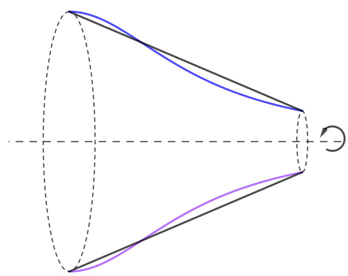
$$f(x) = \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-100)^2}{450}}$$

definida en todo los reales.

8. Área de una superficie de revolución

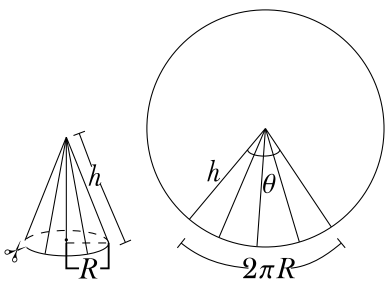
En esta sección, explicamos un método para calcular el área de una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar una curva C continua y suave (determinada por una función o una parametrización) alrededor de una recta D paralela a alguno de los ejes.

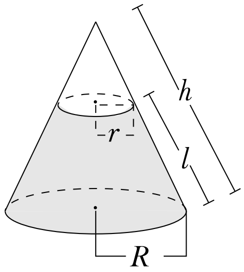
Si aproximamos un segmento de curva por la recta que une sus extremos, el área superficial es cercana al área del cono truncado generado por la recta, como se ilustra en la figura. Nuestro primer problema será hallar una expresión adecuada para el área superficial de un cono truncado.



Un cono circular recto de lado h y de radio base R lo construimos haciendo coincidir los radios del sector de un círculo de radio h y arco $2\pi R$. Entonces, el área superficial del cono coincide con el área del sector, que es $\frac{h^2}{2}\theta$, donde θ es la abertura. Por otro lado, la longitud del arco es $2\pi R = h\theta$, luego $\boxed{\text{el área superficial del cono} = \pi R h.}$

Ahora consideramos un cono truncado T de lado l, radio menor r y radio mayor R, contenido en un cono de lado h, como se ilustra en la figura de abajo. El área superficial de T es la diferencia de las áreas de dos conos.

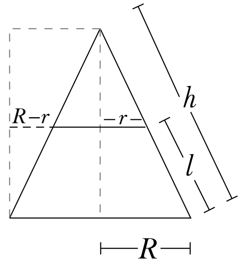




$$\begin{aligned}\text{Área de } T &= \pi Rh - \pi r(h-l)\\ &= \pi[Rh - rh + rl]\\ &= \pi[h(R-r)+rl]. \qquad (7.22)\end{aligned}$$

Como h no es una medida del cono truncado, la expresión para el área de T no lo debe contener. Para esto, consideramos la vista lateral del cono, que es un triángulo, como se muestra abajo a la derecha. Observe que los triángulos que se forman son semejantes, de lo cual podemos deducir (7.23).

$$\begin{aligned}\frac{h}{R} &= \frac{h-l}{r}\\ rh &= Rh - Rl\\ Rl &= Rh - rh\\ Rl &= h(R-r). \qquad (7.23)\end{aligned}$$



Reemplazando $h(R-r)$ por Rl en la fórmula de área (7.22), obtenemos

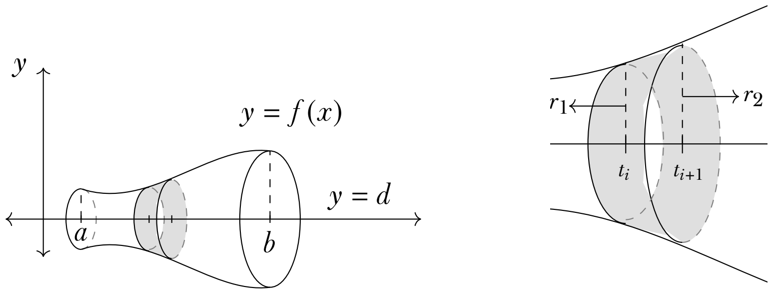
$$\begin{aligned}\text{Área del cono truncado } &= \pi[Rl + rl]\\ &= 2\pi l\left(\frac{R+r}{2}\right) \qquad (7.24)\\ &= 2\pi \cdot (\text{longitud}) \cdot (\text{radio promedio}).\end{aligned}$$

8.1. Curvas determinadas por funciones

Supondremos que la curva generadora está determinada por una función $y = f(x)$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Esto es necesario para hallar el diferencial de la longitud de la curva (7.4). Sin embargo, en el caso en que f tenga un número finito de discontinuidades, podemos hallar el área de la superficie generada, porque podemos descomponer el intervalo en una unión finita de subintervalos en los cuales la curva sea continua y diferenciable en su interior.

Eje de rotación horizontal

Sea C una curva definida por $y = f(x)$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Construimos una superficie de revolución S haciendo girar C alrededor de la recta $y = d$. La curva podría atravesar el eje de rotación, estar encima o por debajo. Por comodidad, supondremos que toda la curva está encima del eje de rotación.



Tomamos una partición regular $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$ de $[a, b]$, con $\Delta t = (b-a)/n$. El área de la superficie en el subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ se puede aproximar con un cono truncado que tiene bases con radios $r_1 = f(t_i) - d$ y $r_2 = f(t_{i+1}) - d$, y cuya longitud lateral es $l = \sqrt{1 + [f'(t_i^*)]^2}\,\Delta t$, para algún $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ (la existencia de t_i^* está garantizada por el teorema de valor medio para funciones derivables, en la sección 6 lo explicamos con más detalle). Entonces, si aplicamos la fórmula (7.24) a nuestro caso, el área del i-ésimo cono truncado es

$$A_i = 2\pi \cdot \left[\frac{f(t_i) - d + f(t_{i+1}) - d}{2}\right]\sqrt{1 + [f'(t_i^*)]^2}\,\Delta t. \qquad (7.25)$$

Como las diferencias entre $f(t_i)$ y $f(t_{i+1})$ se pueden hacer muy pequeñas y dependen del tamaño de la partición, aproximamos el área de cada cono truncado como

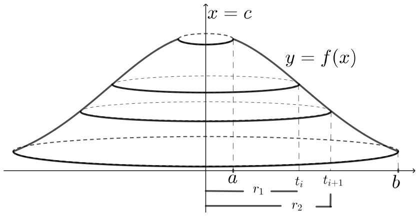
$$A_i \approx 2\pi \cdot [f(t_i^*) - d]\sqrt{1 + [f'(t_i^*)]^2}\,\Delta t.$$

Entonces, una aproximación del área superficial de S está dada por la suma $\sum_i A_i$, que además corresponde a una suma de Riemann de la función $2\pi[f(x) - d]\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Por lo tanto, definimos el área de la superficie de revolución, con las condiciones dadas anteriormente, como

$$\boxed{\text{Área}_S = \int_a^b 2\pi[f(x) - d] \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.} \qquad (7.26)$$

Eje de rotación vertical

Ahora supongamos que la curva C gira alrededor de una recta $x = c$. En este caso, la curva debe estar a la izquierda o derecha del eje de rotación para evitar que la superficie S se atraviese a sí misma. A continuación mostramos el caso en que la curva está a la derecha.



Como antes, consideramos una partición regular P del intervalo $[a, b]$ dada por $t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b$. El subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ determina una parte de la superficie que podemos aproximar con un cono truncado que tiene radios $r_1 = t_i - c$ y $r_2 = t_{i+1} - c$, y cuya longitud lateral es $\sqrt{1 + \left[f'(t_i^*)\right]^2}\Delta t$ para algún t_i^* en $[t_i, t_{i+1}]$. Así el área superficial del cono truncado es

$$A_i = 2\pi \cdot \left[\frac{t_i - c + t_{i+1} - c}{2}\right] \sqrt{1 + [f'(t_i^*)]^2}\, \Delta t;$$

y como t_i se acerca a t_{i+1} tanto como se quiera, entonces tomamos la aproximación $A_i \approx 2\pi \cdot \left[t_i^* - c\right] \sqrt{1 + [f'(t_i^*)]^2}\, \Delta t$. Con esto, el área de toda la superficie se aproxima por $\sum_i A_i$, que corresponde a la suma de Riemann de la función. Por lo que definimos el área superficial como la integral de $2\pi \cdot [x - c] \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Entonces, definimos el área de S como

$$\boxed{\text{Área}_S = \int_a^b 2\pi[x - c] \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.} \tag{7.27}$$

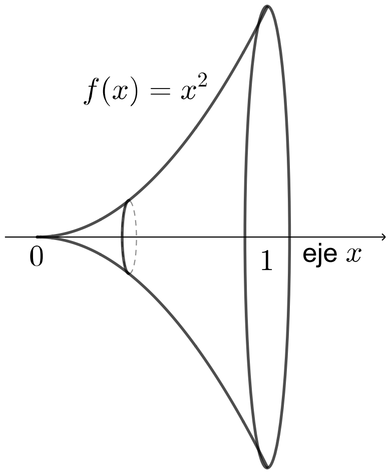
Nota 7.38. *También se puede considerar el caso de una curva definida por una función que dependa de la variable y. Cuando la superficie se genera por rotación alrededor de un eje vertical, se obtiene una fórmula análoga a* (7.26)*; y si la curva gira alrededor de un eje horizontal, se obtiene una ecuación análoga a* (7.27)*. Como ejercicio realice la deducción.*

Las integrales en las ecuaciones (7.26) y (7.27) reflejan la forma en que calculamos el área superficial de un cono truncado. Entonces, podemos aplicarlas si identificamos la distancia de cada punto de la curva al eje de rotación (radio promedio) y la longitud de la curva $y = f(x)$, con lo cual obtenemos la siguiente forma de expresar el área superficial

$$\text{Área}_S = \int_a^b 2\pi(\text{radio})(\text{longitud de curva})dx. \tag{7.28}$$

Ejemplo 7.39. Considere la curva C definida por $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Sea S_1 la superficie de revolución obtenida al girar la curva alrededor del eje x. En este caso, podemos aplicar (7.26) para $d = 0$, con $f'(x) = 2x$, $\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$.

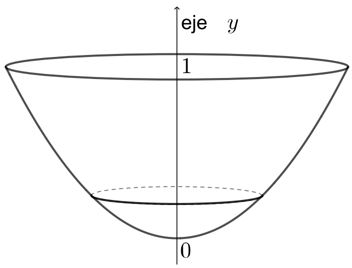
$$\text{Área}_{S_1} = \int_0^1 2\pi x^2 \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\,dx.$$



Si aplicamos la sustitución $2u = \tan\theta$, convertimos la integral en una trigonométrica; vea el ejercicio 4*ñ* de la sección 4. Resolviendo la integral vemos que su área superficial es

$$\frac{\pi}{32}\left[18\sqrt{5} - \ln(2 + \sqrt{5})\right].$$

Utilizamos la misma curva, pero esta vez tomamos como eje de rotación al eje y para construir otra superficie, que denotamos por S_2 y que se conoce como paraboloide de revolución.



En este caso, aplicamos la ecuación (7.27) para $c = 0$ y el radio está determinado por la abscisa. Entonces,

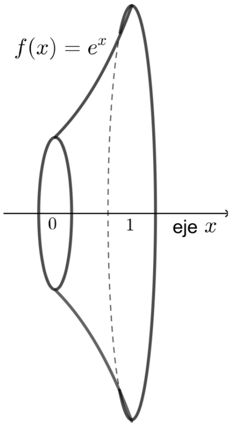
$$\text{Área}_{S_2} = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\,dx.$$

Resolviendo esta integral por sustitución obtenemos que

$$\text{Área}_{S_2} = \frac{\pi}{6} \cdot \left[5^{3/2} - 1\right].$$

Nota 7.40. *Las superficies S_1 y S_2 son distintas y su área también. En el segundo caso, los límites de integración son* 0 *y* 1, *que son los mismos que determinan la curva generadora.*

Ejemplo 7.41. Un artesano elabora unos platos cuya superficie se forma girando la curva exponencial $f(x) = e^x$, con $x \in [0, 1]$ con respecto al eje x, como se muestra en la figura.



Para hallar su área superficial, sumamos el área de la base, que es π, con su área lateral, que está dada por la integral

$$\int_0^1 2\pi e^x \sqrt{1+e^{2x}}\, dx.$$

Hemos aplicado la ecuación (7.26), con $d = 0$. Resolvemos la integral por medio de la sustitución $u = e^x$ y luego la sustitución trigonométrica $u = \tan\theta$ (vea el ejercicio 4*o* de la sección 4), cuya solución es

$$\text{Área}_S = \pi \cdot \left[\left(e\sqrt{e^2+1} + \ln\left|\sqrt{e^2+1}+e\right| \right) - \left(\sqrt{2} + \ln\left|\sqrt{2}+1\right| \right) \right].$$

Ejemplo 7.42. Consideremos la curva que encierra la región $R_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le \sqrt{x+3},\ -3 \le x \le 1\}$, vea la figura 1 (abajo a la izquierda). Suponga que la región y la curva giran en torno al eje x generando un sólido y una superficie que lo cubre (su frontera). Esta última se compone de un cascarón S_1 y una tapa T_1. El área de T_1 es π. Para hallar el área del cascarón, consideramos $f(x) = \sqrt{x+3}$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \qquad 1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{1}{4(x+3)} = \frac{4x+13}{4(x+3)}$$

$$\begin{aligned} \text{Área}_{S_1} &= 2\pi \int_{-3}^{1} \sqrt{x+3}\,\sqrt{\frac{4x+13}{4(x+3)}}\, dx \\ &= \pi \int_{-3}^{1} \sqrt{4x+13}\, dx = \frac{\pi}{6}[17^{3/2} - 1]. \end{aligned}$$

Luego, el área total es $\boxed{\frac{\pi}{6}\left[17^{3/2} - 1\right] + \pi.}$

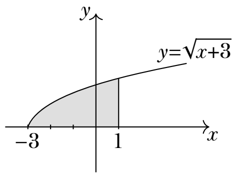


Fig. 1

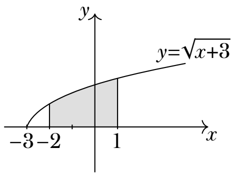


Fig. 2

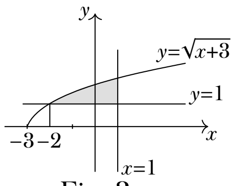


Fig. 3

Ahora consideramos la región $R_2 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sqrt{x+3},\ -2 \leq x \leq 1\}$ y la curva C_2 que la delimita, vea la figura 2. Suponga que ambas giran alrededor del eje x. Esta vez el sólido que se genera tiene una base B_2 y una tapa T_2, ambas circulares de radio $f(-2) = 1$ y $f(1) = 2$ respectivamente, entonces su área es 5π. Por otro lado, la superficie lateral S_2 tiene área $\pi \int_{-2}^{1} \sqrt{4x+13}\, dx = \frac{\pi}{6}[17^{3/2} - 5^{3/2}]$, así que el área total es $\boxed{\frac{\pi}{6}[17^{3/2} - 5^{3/2}] + 5\pi.}$

Por último, consideramos la región $R_3 = \{(x, y) : 1 \leq y \leq \sqrt{x+3},\ -2 \leq x \leq 1\}$ y la curva C_3 que la delimita, vea la figura 3. Suponga que gira alrededor del eje x. El sólido generado tiene un "hueco" en forma de cilindro. Su área superficial comprende tanto el exterior como el interior. ¿Puede encontrarla con la información disponible?

Ejemplo 7.43. Encuentre el área de la superficie de revolución S que se genera cuando la porción de curva $y = \ln x$, desde $x = 1$ a $x = 2$, gira alrededor del eje y. En este caso, aplicamos la ecuación (7.26), con $d = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Área}_S = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{x^2+1}\, dx \\ &= 2\pi \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1} \right| - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).\end{aligned}$$

El segmento de curva también se puede expresar como función de y en la forma $g(y) = e^y$ en $[0, \ln(2)]$. Como ejercicio, plantee la integral del área superficial de S en términos de $g(y)$.

8.2. Curvas parametrizadas

Suponga que la curva C que genera la superficie de revolución está determinada en forma paramétrica por $r(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [a, b]$. También consideramos dos casos, cuando el eje de rotación es horizontal $y = d$ y cuando es vertical $x = c$.

Eje de rotación horizontal

Supondremos que la curva no atraviesa al eje de rotación. Con una partición regular del intervalo $[a, b]$, podemos construir una poligonal de la curva C y, de esta manera, aproximaremos la superficie con conos truncados. Entonces, utilizamos la ecuación (7.24) para hallar el área de cada uno.

El diferencial de la longitud de la curva en forma paramétrica, dado en la ecuación (7.4) en un subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$, es $\sqrt{\left[f'(t_i^*)\right]^2 + \left[g'(t_i^{**})\right]^2}\ \Delta t_i$ para algunos t_i^* y t_i^{**}, y la distancia de un punto del segmento de curva al eje de rotación $y = d$ es la diferencia $|y(t_i^*) - d|$ (radio promedio). Identificado esto, podemos definir el área superficial como

$$\boxed{\text{Área}_S = 2\pi \int_a^b |y(t) - d|\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.} \tag{7.29}$$

Eje de rotación vertical

En este caso, basta identificar la distancia de un punto sobre la curva $r(t)$ al eje de rotación $x = c$.

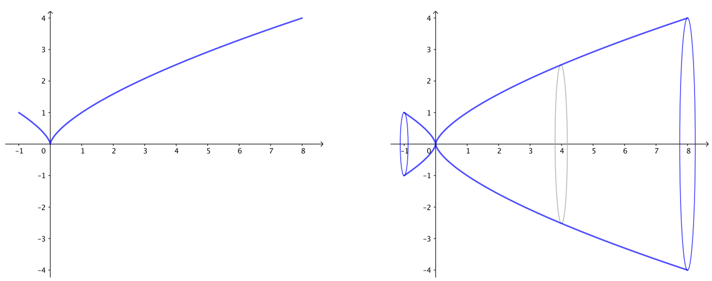
$$\text{distancia al eje de rotación} = |x(t) - c|.$$

Entonces, podemos razonar de forma similar al caso horizontal y definir el área superficial como

$$\boxed{\text{Área}_S = 2\pi \int_a^b |x(t) - c|\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.} \tag{7.30}$$

Los detalles de esta deducción son dejados al lector como ejercicio.

Ejemplo 7.44. Consideremos la curva C determinada por la parametrización $x(t) = t^3$, $y(t) = t^2$, donde $-1 \leq t \leq 2$, y supongamos que gira alrededor del eje x, como se muestra en la figura.



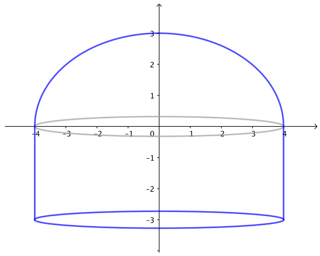
La distancia de un punto de la curva $r(t)$ al eje de rotación está dada por $y(t) - 0 = t^2$, vea (7.29), y $[x'(t)]^2 = 9t^4$, $[y'(t)]^2 = 4t^4$, entonces el área de la superficie lateral viene dada por

$$\text{Área}_S = 2\pi \int_{-1}^{2} t^2\sqrt{9t^4 + 4t^2}dt = 4\pi \int_{-1}^{2} t^3\sqrt{\left(\frac{3t}{2}\right)^2 + 1}\ dt.$$

Esta integral se puede resolver primero haciendo la sustitución $u = 3t/2$ y luego $z = u^2+1$. Verifique que el valor de la integral es $\frac{2(128+8000\sqrt{10}+247\sqrt{13})\pi}{1215} \approx$ 136.09 unidades. Observe que la curva no es suave, pues presenta una cúspide en el origen, pero esto no es problema porque podemos separar la curva en dos intervalos para t: $[-1, 0] \cup [0, 2]$.

Ejemplo 7.45. Una universidad desea construir un observatorio de forma cilíndrica, coronado con un domo, como el que se muestra a la derecha.

La parte superior se consigue haciendo girar la porción de la elipse dada por $r(t) = (4\cos t, 3\operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, \pi/2]$, en torno al eje y (las medidas están en metros). Se planea recubrirlo con un aislante, ¿cuántos metros cuadrados se necesitan para recubrir el domo?



El área de la superficie del domo se puede determinar por medio de la integral

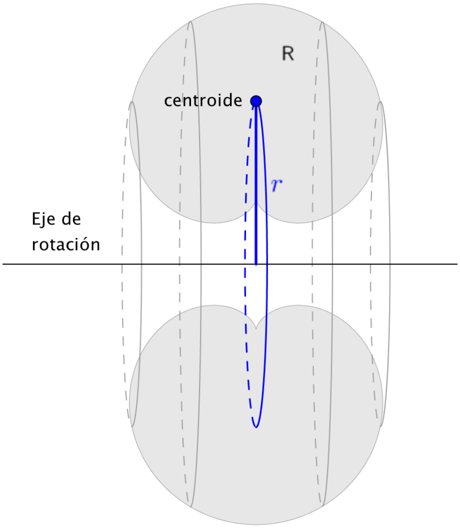
$$\begin{aligned}\text{Área}_S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t\sqrt{16\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t}\, dt \\ &= 8 + \frac{18\tanh^{-1}\frac{\sqrt{7}}{4}}{\sqrt{7}} \approx 13.41.\end{aligned}$$

Si la altura de la base cilíndrica es de 3 mts, entonces el área de lateral del cilindro es $2\pi(4)(3) = 24\pi$, ya que el radio de la base es 4 mts. Entonces, el área total es aproximadamente 88.80 m^2.

8.3. Teoremas de Pappus

En esta sección, estudiaremos dos teoremas conocidos como teoremas de Pappus. El primero relaciona el volumen de un sólido de revolución con el centroide de la región que lo genera; el segundo, el área de una superficie de revolución con el centroide de la curva generadora.

Teorema 7.46 (Teorema de Pappus I). *El volumen del sólido de revolución obtenido al girar una región R alrededor de una recta es igual a la distancia recorrida por su centroide multiplicado por el área de la región. Es necesario que la recta y la región no se corten.*



Si r es la distancia desde el centroide al eje de rotación y A_R es el área de la región R, entonces el volumen del sólido de revolución T está dado por

$$\boxed{Vol_T = (2\pi r) \cdot A_R.}$$

Consideramos el caso en que la región R está delimitada por las curvas f y g, donde $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, y esta gira alrededor del eje x. Por el método de discos, el volumen del sólido generado es

$$\text{Vol}_T = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x)dx.$$

Por otra parte, la distancia del centroide $C = (\overline{x}, \overline{y})$ al eje de rotación está dada por la ordenada, vea (7.16):

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{\int_a^b (f(x) + g(x))(f(x) - g(x))dx}{2\int_a^b f(x) - g(x)dx} \\
&= \frac{\int_a^b f^2(x) - g^2(x)dx}{2A_R} \\
&= \frac{\pi \text{Vol}_T}{2A_R},
\end{aligned}$$

despejando el volumen obtenemos

$$\text{Vol}_T = 2\pi\, \overline{y}\, A_R.$$

Teorema 7.47 (Teorema de Pappus II). *El área de una superficie de revolución S obtenida al girar una curva (suave y plana) C alrededor de una recta es igual a la distancia recorrida por su centroide multiplicado por la longitud de la curva C. Asumimos que la curva y el eje de rotación no se intersecan. Más precisamente, si r es la distancia entre el eje de rotación y el centroide y L_C es a longitud de la curva C, entonces*

$$\boxed{\textit{Área}_S = (2\pi r)\cdot L_C.}$$

Consideramos una curva C (plana y suave), definida por $y = f(x)$ continua sobre el intervalo $[a, b]$. El área de la superficie que se genera cuando la curva gira alrededor del eje x es

$$\text{Área}_S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Por otra parte, la distancia del centroide $C = (\overline{x}, \overline{y})$ al eje x es la ordenada, vea (7.14),

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx}{\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}} = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx}{L_C}$$

$$= \frac{2\pi\text{Área}_S}{L_C}.$$

Luego, despejando el área superficial, obtenemos

$$\text{Área}_S = 2\pi\ \overline{y}\ L_C.$$

Nota 7.48. *Estos teoremas son útiles cuando el centroide de la región o la curva son evidentes o fáciles de calcular, o cuando el eje de rotación es transversal.*

Para ver la practicidad del teorema, encontremos el volumen del toro que se genera cuando el círculo de radio r gira alrededor de una recta que se encuentra a una distancia R del centro de la circunferencia. Recuerde que este ejercicio se hizo previamente usando el método de los casquillos cilíndricos.

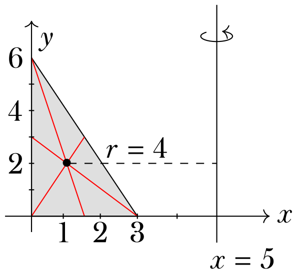
El área de la región circular es πr^2 y su centroide está en el centro del círculo, así que la distancia recorrida por el centroide al hacer un giro es $2\pi R$. Por lo tanto, aplicando el teorema de Pappus, el volumen del toro es

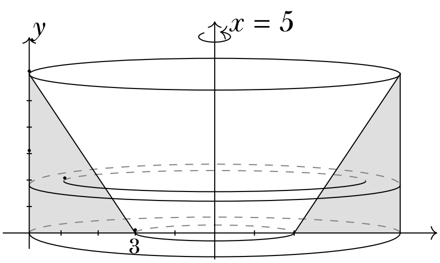
$$\text{Vol}_T = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R.$$

Por otra parte, el perímetro de la circunferencia es $2\pi r$, entonces, aplicando la segunda parte del teorema, tenemos que el área de la superficie del toro es

$$\text{Área}_T = (2\pi R)(2\pi r) = 4\pi^2 r\, R.$$

Ejemplo 7.49. Calcule el volumen generado por la región triangular acotada por eje x, eje y y la recta $2x + y = 6$ cuando gira alrededor de la recta $x = 5$.





Recordemos que el centroide de un triángulo coincide con el punto de intersección de las medianas, que son las rectas que se encuentran trazadas en la figura de la izquierda. Es suficiente encontrar la intersección de dos medianas, las ecuaciones de dos de estas son $x + y = 3$ y $2x + \frac{1}{2}y = 3$, y su punto de intersección es $(1, 2)$. Así que la distancia del centroide al eje de rotación es 4 unidades. Por otra parte, el área del triángulo es 9 und^2. Luego, por el teorema de Pappus el volumen del sólido de revolución es

$$\text{Vol}_T = 2\pi \cdot 4 \cdot 9 = 72\pi \text{ und}^3.$$

El perímetro del triángulo es $6 + 3 + \sqrt{45}$, entonces el área de la superficie de revolución es

$$\text{Área}_S = 2\pi \cdot 4(6 + 3 + \sqrt{45}) = 8\pi \cdot (9 + \sqrt{45}).$$

Ejercicios 7.8

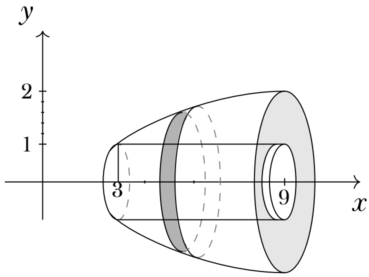
1. Encuentre el área de la superficie de revolución que se genera cuando la curva dada gira alrededor del eje x.

    a) $y = 2x,\ 0 \leq x \leq 1.$

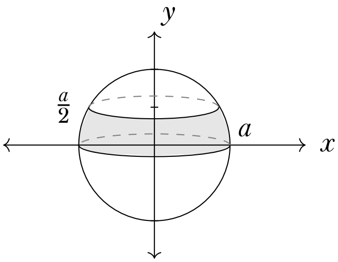
    b) $y = \sqrt{9 - x^2},\ -1 \leq x \leq 2.$

    c) $y = x^3,\ 0 \leq x \leq \sqrt{2}.$

2. Calcule el área de la superficie de revolución que se genera cuando $x = 1 + 2y^2$ gira alrededor del eje x, para $1 \leq y \leq 2$.



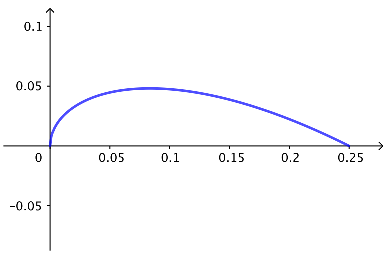
3. Encuentre el área de la superficie que se forma cuando $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ gira alrededor del eje y, para $0 \leq y \leq \frac{a}{2}$.

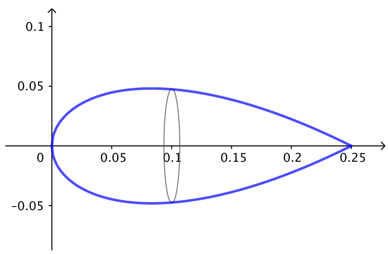


4. Compruebe que el área superficial de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

5. Considere la región acotada por $y = x^2$, $y = x$ y suponga que gira alrededor del eje x. Use el teorema de Pappus para encontrar el volumen y el área superficial del sólido generado.

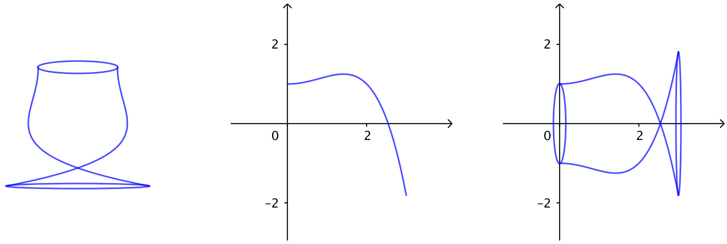
6. Una joyería fabrica dijes en forma de gotas de agua. El material con que son fabricados es acero inoxidable recubierto de una fina capa de oro. Calcule el área de la superficie de una gota si esta se obtiene haciendo girar la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = \frac{1}{4}t^{1/2} - t^{3/2}$, para $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$, alrededor del eje x. En este caso, las medidas están en pulgadas.





7. Un fabricante de cristalería desea hacer copas como la que se muestra en la figura de la izquierda. Después de varios ensayos, decide que la mejor opción es hacer girar la curva del medio, dada por $y = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + 1$ con $0 \leq x \leq 3$, al rededor del eje x, como se muestra en la figura de

la derecha. Plantee una integral que determine el área superficial de una copa (sin incluir la base). Las medidas están en pulgadas.



8. Se pretende construir un dirigible con forma de elipsoide tal que su longitud máxima sea de 25 metros, mientras que su diámetro sea de 8 metros. ¿Cuál es el volumen máximo de helio que puede contener? En vista de la complejidad de los materiales de construcción,[9] se debe ser minucioso en los cálculos para evitar el desperdicio. ¿Cuál es el área superficial de esta nave?

9. Encuentre ecuaciones análogas a (7.26) y (7.27) en el caso en que la curva está determinada por una función en la variable $x = g(y)$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b).

10. Haga la deducción de las ecuaciones (7.29) y (7.30).

9. Trabajo

El término *trabajo* debemos entenderlo en este contexto como la cantidad total de esfuerzo que se requiere para ejecutar una tarea. Podemos pensar en la fuerza necesaria para empujar una mesa o para halar una puerta, o bien la fuerza que ejerce la gravedad de la Tierra sobre un objeto que se suelta desde un décimo piso. Si un objeto se desplaza en línea recta con función de posición $s(t)$, la **fuerza** F sobre el objeto (en la misma dirección) está definida por la segunda ley de Newton del movimiento: como el producto

[9]"El material con que se fabrican los dirigibles es una mezcla de Dacrón, Poliester, Mylar, entre otros, una estructura no rígida laminada llamada Spectralaminada y Uretano de 6.5 onzas/Nylon de alta tenacidad con una lámina de urea adentro y en el exterior dióxido de titanio/uretano como barrera ultravioleta." Recuperado de *Dirigibles: viabilidad técnica y económica, Ricardo Chaparro Ortiz, http://triton.uniandes.edu.co/ depmecanica/WebSites/apinilla/documentos/revista3/rchaparro/dirigible.html*

de su masa m por su aceleración, es decir,

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Recordemos las unidades de medición. En el sistema métrico SI (Sistema Internacional), la masa se mide en kilogramos (kg), el desplazamiento en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en newtons ($N = kg \cdot m/s^2$). Esto es, una fuerza de $1N$ que actúa en una masa de 1 kg produce una aceleración de $1m/s^2$. En los Estados Unidos se usa la libra[10] como unidad de masa, pies y pulgadas para la distancia, el tiempo en segundos y la fuerza en libras-fuerza (lb-f), aunque es común que se diga únicamente *libras*.

Cuando la aceleración es constante, la fuerza F también es constante y el **trabajo** realizado se define como el producto de la fuerza F por la distancia d que el objeto recorre:

$$W = F \cdot d \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}.$$

Si F se mide en Newtons y d en metros, entonces la unidad de trabajo es un Newton-metro, que se llama joule (J). Si F se mide en libras[11] (lb-f) y d en pies, entonces la unidad de trabajo es lb-f-pie. Recuerde que la aceleración de la gravedad[12] es $g \approx 9.80665\text{m/s}^2$ ó, equivalentemente, $g \approx 32.1742\text{pies/s}^2$.

En los casos en que se aplica una fuerza (que cambia de manera continua) a lo largo de un trayecto, es posible aproximar el trabajo total sumando los trabajos realizados en trayectos más pequeños que componen el camino y suponiendo que la fuerza que se aplica en cada uno de ellos es constante.

Suponga que en un trayecto lineal que está definido por el intervalo $[a, b]$ se aplica una fuerza determinada por una función continua $F(x) = y$ a un cuerpo C. Para aproximar el trabajo realizado, consideramos una partición regular $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b\}$, con $\Delta t = \frac{b-a}{n}$, y elegimos cualquier $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. Si asumimos que la fuerza que se aplica en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ es constante e igual a $F(t_i^*)$, el trabajo realizado se aproxima por $W_i := F(t_i^*)\Delta t$. Y la suma de los trabajos de todos los intervalos aproxima el trabajo total realizado a lo largo de todo el trayecto:

$$W_i = F(t_i^*)\Delta t \quad \text{y} \quad W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} F(t_i^*)\,\Delta t.$$

[10]Recuerde que 1 libra = 0.45359237 kg y 1 kg = 2.20462262 libras. Tenga especial cuidado, porque en Colombia usamos la palabra libra como sinónimo de medio kilo.

[11]No hay que confundir masa con peso. Por lo general, cuando se habla de libras se quiere decir *libras-fuerza* (peso), esto es, ya está incluida la fuerza de gravedad.

[12]Para propósitos prácticos utilizaremos el valor 9.8m/s^2 para la aceleración de la gravedad.

Vemos que esta aproximación del trabajo es una suma de Riemann de la función de fuerza F, por lo que definimos el trabajo realizado a lo largo de $[a, b]$ como

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)\,dx.}$$

Antes de resolver esta clase de problemas, veamos cómo calcular el trabajo en los dos tipos de sistemas métricos. En los siguientes dos ejemplos la fuerza es constante, así que para resolver el problema no se precisa de una integral, es suficiente con aplicar la relación $W = F \cdot d$.

Ejemplo 7.50. El trabajo realizado al subir una caja de libros de 18 kg al séptimo piso de un edificio que se encuentra a 20 m de altura es:

$$\underbrace{(18kg) \cdot (9.8 \text{ m/s}^2)}_{176.4 \text{ N}} \cdot (20 \text{ m}) = 3528\text{J}.$$

Ejemplo 7.51. El trabajo realizado para subir un peso de 20 lb-f desde la falda de Monserrate a su cima (considerando la altura de Bogotá 8612 pies y la cima de Monserrate 10341 pies) es

$$\underbrace{(20 \text{ lb-f})}_{\text{fuerza}} \cdot \underbrace{(10341 - 8612) \text{ pies}}_{\text{distancia}} = 34580 \text{ lb-f-pie}.$$

Ejemplo 7.52. Consideremos un cable de 120 metros de largo con 40 kg de masa y supongamos que está suspendido en su totalidad de la parte alta de un edificio. Calculemos el trabajo que se realiza para recoger todo el cable desde la parte alta del edificio. Empezamos calculando la fuerza y, para ello, necesitamos el peso[13] de cada metro de cable:

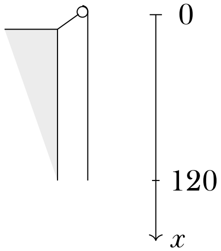
$$\text{Peso} = g \cdot \frac{40}{120} = \frac{g}{3}\text{N}.$$

Definimos la variable x como la cantidad de cable recogido. A medida que se recoge el cable, la fuerza aplicada disminuye y depende de la cantidad de cable por recoger: $(120 - x)$, entonces

$$F(x) := \frac{g}{3}(120 - x).$$

Luego, el trabajo realizado está determinado por:

[13]La palabra *peso* la utilizamos para referirnos a la fuerza que ejerce la gravedad sobre el cuerpo, por eso, sus unidades son de fuerza.



$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{120} \frac{g}{3}(120 - x)dx \\
&= \frac{g}{3}\left[120x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{120} \\
&= \frac{g}{3}\left[120^2 - \frac{1}{2}120^2\right] \\
&= \frac{g}{6} \cdot 120^2 \approx 23520\ J.
\end{aligned}
$$

Dos obreros están recogiendo el cable manualmente y acuerdan que uno recoge la primera mitad del cable y luego el otro los restantes 60 metros. ¿Cuánto trabajo realiza cada trabajador? El primero debe recoger desde 0 hasta 60 metros, luego su trabajo es $\int_0^{60} F(x)\ dx \approx 17640\ J$. El segundo debe realizar aproximadamente $(23520 - 17640)J = 5880\ J = \int_{60}^{120} F(x)\ dx$. ¿Le parece justo?

Para que ambos realicen la misma cantidad de trabajo, deben solucionar la ecuación

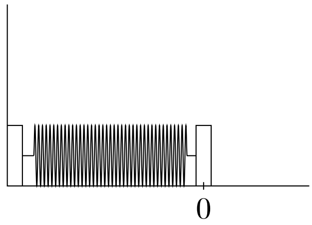
$$
\int_0^{t} \frac{g}{3}(120 - x)dx = \int_t^{120} \frac{g}{3}(120 - x)dx \quad \text{para } t,
$$

o equivalentemente

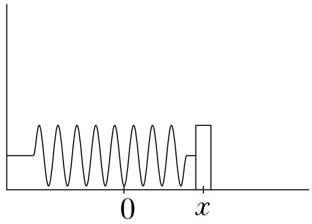
$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^{t}(120 - x)dx - \int_t^{120}(120 - x)dx \\
&= \left[120x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{t} - \left[120x - \frac{1}{2}x^2\right]_t^{120} \\
&= \left[120t - \frac{1}{2}t^2\right] - \left[\frac{1}{2}120^2 - 120t + \frac{1}{2}t^2\right] \\
&= -t^2 + 240t - 7200.
\end{aligned}
$$

El polinomio cuadrático tiene raíces $r_1 = 120(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 35.15$ y $r_2 = 120(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 204.85$, como la variable x toma valores entre 0 y 120, consideramos la raíz r_1, es decir, para hacer equitativo el trabajo el primer trabajador debe recoger aproximadamente 35 m de cable y el segundo los restantes 65 m.

La ley de Hooke dice que la fuerza requerida para mantener estirado o contraído un resorte de su longitud en estado de reposo es proporcional a la distancia que se estire o contraiga de su longitud natural.



Si un resorte se extiende naturalmente sobre el eje real y se hace coincidir uno de sus extremos con el origen del sistema, entonces la fuerza que se requiere para estirar este extremo a una posición x es $F(x) = kx$, donde k es la constante del resorte.



$F(x) = kx$
k = constante del resorte > 0.

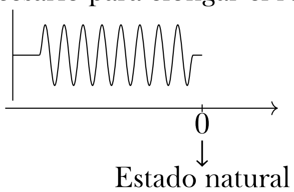
Ejemplo 7.53. Considere un resorte de 10 cm de longitud. Se requieren 5 N para mantenerlo estirado hasta 15 cm. Calcule el trabajo de estirarlo de 15 cm a 18 cm.
Primero, necesitamos calcular la constante del resorte:

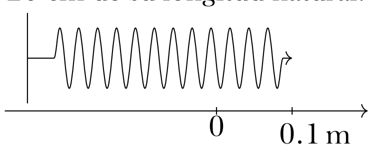
$$5\,\mathrm{N} = F(x) = k \cdot x = k \cdot 0.05\ \mathrm{m} \qquad \Rightarrow\ k = \frac{5}{0.05} = 100.$$

Entonces, nuestra función es $F(x) = 100x$. Para calcular el trabajo que se pide, hacemos la integral

$$\begin{aligned} W &= \int_{0.05}^{0.08} 100x\,dx = \left[50x^2\right]_{0.05}^{0.08} \\ &= 50\left[(0.08)^2 - (0.05)^2\right] = 50[0.0064 - 0.0025] \\ &= 50 \cdot (0.0039) = 0.195\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.54. Se requiere una fuerza de 1000 N para mantener elongado un resorte 10 cm más de su longitud original. Se desea calcular el trabajo necesario para elongar el resorte 20 cm de su longitud natural.





De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza necesaria para estirar el resorte satisface la igualdad $F(x) = k \cdot x$. Como se requieren 1000 N para estirar 0.1 m, podemos hallar la constante del resorte:

$$1000 = F(0.1) = k \cdot 0.1 \Longrightarrow k = 10000,$$

así que $F(x) = 10000x$. El trabajo realizado está determinado por la integral:

$$\text{Trabajo} = \int_0^{0,2} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,2} = 5000 \cdot (0.04) = 200\,\text{J}.$$

Ahora supongamos que el resorte está contraído 10 cm. Si lo contraemos 20 cm adicionales, ¿cuánto trabajo se debe realizar? Como tenemos la función de fuerza, es suficiente cambiar los límites de integración entre -0.3 y -0.1

$$\begin{aligned}\text{Trabajo} &= \int_{-0.3}^{-0.1} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_{-0.3}^{-0.1} = 5000[0.01 - 0.09]\\ &= -5000(0.08) = -400\,\text{J}.\end{aligned}$$

Nota 7.55. *Observe que en el ejemplo anterior el trabajo es negativo, esto significa que la fuerza se aplicó en la dirección negativa del sistema que escogimos. La función de Fuerza* $F(x) = 1000x$ *toma valores negativos en* $[-0.3, -0.1]$ *y la distancia está determinada por el intervalo* $[-0.3, -0.1]$, *es por eso que no se debe cambiar el orden de los límites.*

Si consideramos un cuerpo de masa m que se desplaza en línea recta y cuya posición x está en función del tiempo $x(t)$, entonces podemos definir su velocidad $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Si se aplica una fuerza F al cuerpo, esta estará dada por

$$F = m\frac{dv}{dt}.$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos que $F = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m \cdot v \cdot \frac{dv}{dx}$. Si la fuerza está dada en función de la posición $F(x)$, entonces $m\frac{1}{2}[v(x)]^2$ es una antiderivada de F, es decir, que el trabajo realizado está determinado por la velocidad inicial y final del cuerpo

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = m\left(\frac{1}{2}[v(x_f)^2] - \frac{1}{2}[v(x_i)^2]\right). \tag{7.31}$$

Ejemplo 7.56. Considere un resorte de $10cm$ dispuesto horizontalmente, con constante de resorte 20, y un balín de 20 gr. ¿Cuánto se debe comprimir el resorte junto al balín de tal forma que este salga despedido a una velocidad de 30 cm/s?

Llamemos t a la longitud que debe ser comprimido el resorte (medida en centímetros), la velocidad inicial del balín es nula, se desea que su velocidad final sea 0.3m/s y su masa es 0.02 kg, luego se tiene que resolver la ecuación

$$\int_0^t 20x\,dx = (0.02)\frac{1}{2}(0.3)^2.$$

Resolvemos la integral del lado izquierdo en términos de t y simplificamos el lado derecho, así obtenemos

$$10t^2 = 0.0009,$$

entonces $t \approx 9.48 \times 10^{-3}$ m.

Otra situación en la cual se realiza un trabajo no constante es en el **bombeo de líquidos**, siempre que se bombee por capas comenzando desde la capa superior. La fuerza que se requiere para bombear una capa de líquido es su peso.

Ejemplo 7.57. Considere una piscina en forma de paralelepípedo rectangular, 20 m de ancho, 50 m de largo y 3.15 m de profundidad, llena de agua (cuya densidad es 1 g/cm^3) hasta 3 m de profundidad. Se desea bombear el agua hacia el borde de la piscina hasta que el agua alcance 1 m de alto. ¿Cuánto trabajo se realiza?

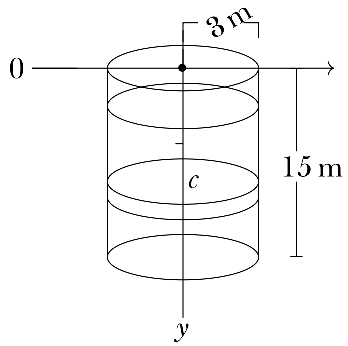
En este caso, dispondremos el eje real de forma vertical haciendo coincidir el origen con el borde del agua y el sentido positivo hacia lo profundo de la piscina. Consideramos una partición regular $P = \{t_0 = 0, \ldots, t_n = 3\}$ del intervalo $[0, 3]$, con $\Delta t = \frac{3}{n}$, y elegimos un punto t^* en $[t_{i-1}, t_i]$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces, la capa de agua de la franja $[t_{i-1}, t_i]$ tiene $1000\Delta t$ m^3 de volumen y pesa $\underbrace{(g \cdot 10^3)}_{\text{N/m}^3} \cdot \underbrace{(1000\Delta t)}_{\text{m}^3} = g \cdot 10^6 \Delta t$ N. La distancia que recorre esta franja es $t_i^* + 0.15$ m, entonces una aproximación del trabajo realizado está dada por la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i^* + 0.15)(g \cdot 10^6)\Delta t.$$

Luego, establecemos el trabajo como la integral

$$\begin{aligned} W = \int_0^2 (x + 0.15)(g \cdot 10^6)dx &= g\ 10^6 \left[\frac{x^2}{2} + 0.15x\right]_0^2 \\ &= g\ 2.3 \times 10^6 \text{ J} \\ &= 2.254 \times 10^7 \text{ J}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7.58. Considere un tanque cilíndrico de 15 m de altura con un radio de 3 m. El tanque contiene agua de mar (con densidad 1.026 g/cm^3) en 4/5 partes de su volumen. Calcule el trabajo de bombear todo el líquido hasta 2 m por encima del borde del tanque.



Primero, ubicamos un eje real vertical que pase por el centro de la tapa superior del tanque, haciendo que el origen coincida con el centro. El sentido positivo está dado en dirección al fondo del tanque. El trabajo W_i para bombear una capa que esté a una profundidad aproximada de y_i, con un grosor Δt, es

$$W_i = \underbrace{(y_i + 2)}_{\text{m}}\, \underbrace{g\ 9\pi(1026)\Delta t}_{N}\,.$$

Como el tanque está lleno 4/5 partes de su volumen (12 m de profundidad), se deben bombear capas de líquido desde 3 m hasta 15 m. Entonces, el trabajo realizado lo podemos hallar resolviendo la integral $(g \cdot 9\pi \cdot 1026) \int_3^{15} (y+2)dy$, es decir que

$$\begin{aligned} W &= g \cdot 9\pi \cdot 1026 \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y\right]_3^{15} \\ &= g \cdot 9\pi \cdot 1026 \cdot 132 \\ &\approx 37526645.94 \text{ J}. \end{aligned}$$

Ejercicios 7.9

1. El ancla de una embarcación tiene 1 ton y la cadena que la sostiene 2 tons con 15 m de largo cuando se despliega completamente. Sin considerar el rozamiento del agua, halle el trabajo realizado al recoger el ancla cuando se ha desplegado 9 m de la cadena.

2. Si una fuerza de 900 N comprime un resorte medio centímetro, halle la constante del resorte. Si se aplica una fuerza de 600 N, ¿cuántos centímetros se comprime el resorte?.

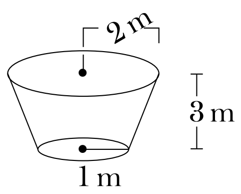
3. El trabajo realizado al comprimir un resorte 1/8 de su longitud en estado de reposo es 7.8125 J. Si la constante del resorte es 10^5, halle la longitud natural del resorte.

4. Cuánto trabajo se requiere para comprimir un resorte 7 cm si este mide 30 cm y tiene constante $k = 200000$.

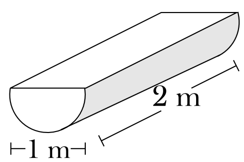
5. Se necesitan 15 J de trabajo para estirar un resorte de 33 a 34 cm y 25 J para estirarlo de 34 a 35 cm. ¿Cuál es la longitud en estado de reposo del resorte?

6. Halle el trabajo realizado al bombear agua ($\delta = 1$ gr/cm^3) de una piscina llena, que tiene forma de media esfera de radio r metros, hasta el borde de la piscina.

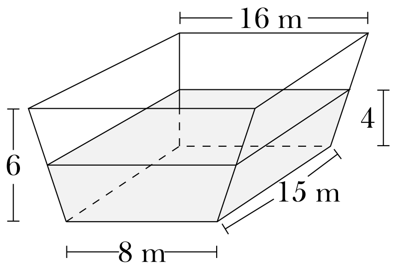
7. Considere un tanque en forma de cono truncado lleno de un líquido con densidad $\delta = 1.15$ gr/cm^3, 3 m de alto y 2 m de radio superior y 1m de radio inferior, como se muestra en la figura. Se desea bombear el líquido 5 m por encima del borde del tanque. ¿Cuánto trabajo se realiza hasta bombear todo su contenido?



8. Un contenedor en forma de medio cilindro de 1m de diámetro y 2m de largo está lleno de un líquido cuya densidad es $\delta = 1.5$gr/cm^3. Se bombea todo el líquido hasta 3m del borde del tanque. ¿Cuánto trabajo se realiza?



9. Una recámara de un barco se ha inundado con agua de mar, cuya densidad es $\delta = 1.026$gr/cm^3. La recámara tiene forma de prisma,



la base rectangular tiene 8 m de ancho y 15m de largo, la tapa superior tiene 16 m de ancho y el mismo largo, la altura de la recámara es de 6m, pero solo está inundada en 4m. ¿Cuánto trabajo debe realizarse para evacuar el agua hasta el borde de la recámara?

10. Una *kilocaloría* es una unidad de medida de energía, más específicamente, una kilocaloría (1 Cal) es la energía que se requiere para aumentar en un grado Celsius un kilogramo de agua; usualmente es usada para dar valor energético a los alimentos. Además, existe una correspondencia con el trabajo mecánico que realizamos: $1\text{J} = 2.388 \times 10^{-4}$ Cal y 1 Cal = 4186.8 J.

    a) Un futbolista patea un balón (450 gr) a una velocidad de 110km/h. ¿Cuántas kilocalorías invirtió en este trabajo?

    b) Un ciclista y su bicicleta suman 82 kg de masa, el ciclista sube una pendiente (θ) del 9 %, es decir, que $\tan\theta = 0.09$, por 7 kilómetros. Sin asumir el rozamiento ¿cuántas kilocalorías consume el ciclista para realizar este trabajo? Si el ciclista pierde 1 kg de masa (de manera constante) durante el ejercicio, ¿cuántas kilocalorías consumió?

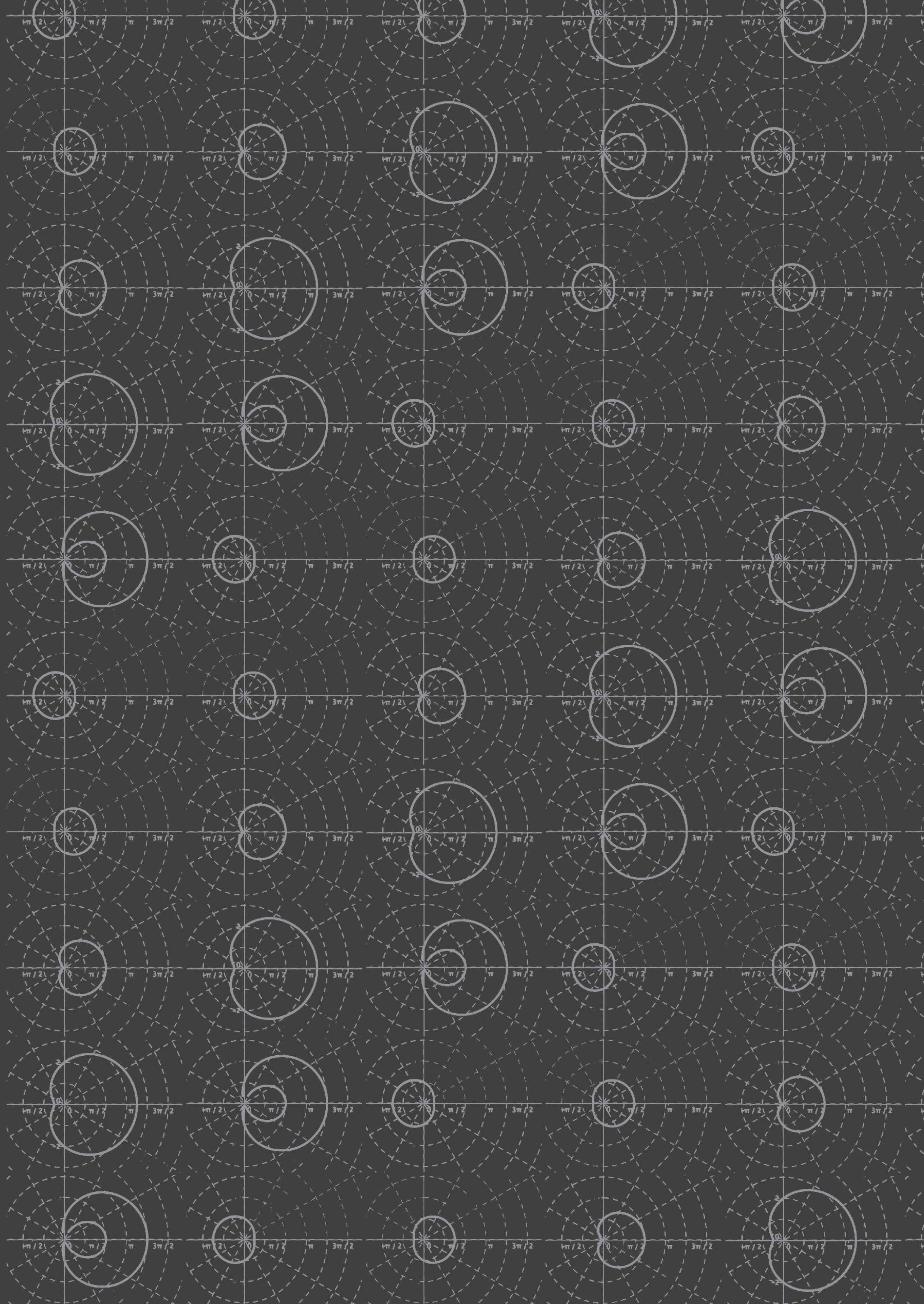
    c) Considere una banda elástica para hacer ejercicio que satisface la ley de Hooke. Si la constante de la banda es $k = 650$ y el ejercicio consiste en abrir los brazos 80 cm más de la longitud natural de la banda (y luego cerrarlos), calcule cuántas repeticiones debe hacer para consumir 3 Cal.

    d) Un alpinista debe recoger una cuerda de 30 m y 12 kg, en cuyo extremo hay un equipo de 17 kg. Él debe realizar este trabajo sobre una pendiente de 30 grados. Si omitimos el rozamiento, ¿cuánto trabajo realiza?

Capítulo

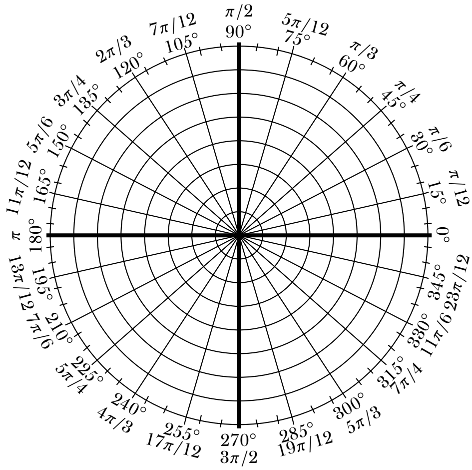
ocho

Coordenadas polares



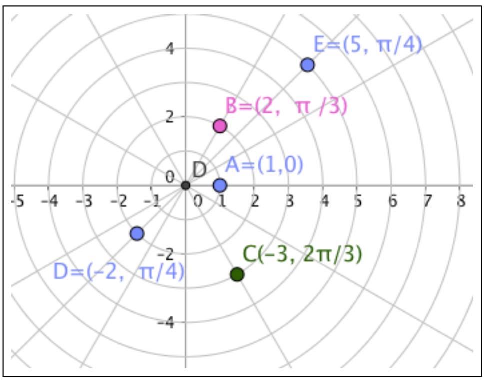
En este capítulo, cambiaremos las coordenadas cartesianas por las coordenadas polares. En coordenadas cartesianas cada punto se identifica por una pareja (x, y), donde x es la distancia (con signo) desde el punto hasta el eje y y y es la distancia (con signo) desde el punto hasta el eje x. Ahora bien, en coordenadas polares tenemos un punto central, llamado **polo**, que coincide con el origen, y una recta llamada **eje polar**, que gráficamente coincide con el eje positivo de las x. Alrededor del polo, dibujamos unos círculos concéntricos imaginarios, de diferentes radios, lo que sería equivalente a la cuadrícula o *grilla* en coordenadas cartesianas.

Dado un punto, dibujamos una circunferencia con centro en el polo y que pase por el punto, de tal forma que identificamos el punto con una pareja (r, θ), donde r es la distancia *dirigida* desde el punto hasta el polo y θ es el ángulo que se forma con el eje polar, que será medido en radianes.



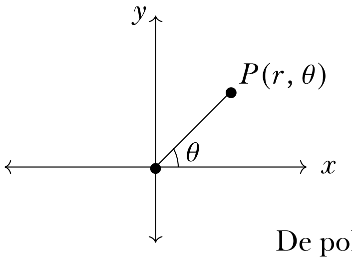
Diremos que el ángulo es positivo si se forma en contra de las manecillas del reloj y será negativo cuando se forme a favor de las manecillas del reloj. Las coordenadas del polo son $(0, \theta)$, donde $\theta \in \mathbb{R}$. En algunos casos, deseamos que la coordenada r sea *negativa*, entonces para $r < 0$ identificamos el punto (r, θ), con $(-r, \theta + \pi)$.

Ejemplo 8.1. Ubiquemos en el plano polar los puntos $A = (1, 0)$, $B = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $C = \left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$, $D = \left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$, $E = \left(5, \frac{\pi}{4}\right)$.



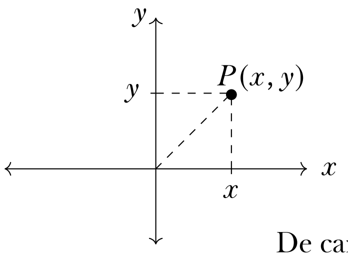
Note que un punto puede ser representado de varias maneras dependiendo el ángulo que se escoja. Recuerde además que podemos dar una o varias vueltas completas alrededor de una circunferencia y llegar al mismo punto, analíticamente esto se ve reflejado cuando sumamos múltiplos enteros de 2π. Para ser más precisos, los puntos del ejemplo anterior también pueden escribirse como $A = (1, 2\pi), C = (3, -\frac{\pi}{3}), D = (2, \frac{5\pi}{4})$, por mencionar algunos.

Existe una correspondencia entre el sistema de coordenadas cartesianas y el de coordenadas polares, de tal forma que al eje polar le corresponde el semieje positivo de las X y al polo le hacemos corresponder el origen. Además, podemos pasar de unas coordenadas a otras por medio de las siguientes expresiones:



$$P(r,\theta) \longrightarrow x = r\cos\theta$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta$$

De polares a cartesianas



$$P(x,y) \longrightarrow r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

De cartesianas a polares

En este caso, hay que tener en cuenta en qué cuadrante se encuentra el punto, si se quiere expresar con $r > 0$ y ángulo también positivo:

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{si } x > 0,\ y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{si } x < 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi, & \text{si } x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

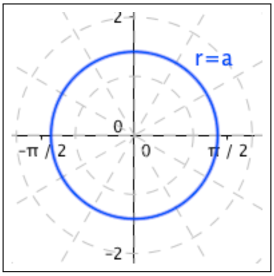
Por ejemplo, considere el punto con coordenadas cartesianas $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$, que se encuentra en el tercer cuadrante. Al usar la fórmula $\tan\theta = \frac{y}{x}$, obtenemos que $\theta = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$, lo cual nos da $\frac{\pi}{6}$, pero este es un ángulo que se encuentra en el primer cuadrante, así que debemos sumar π para obtener el ángulo del tercer cuadrante $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ y así las coordenadas polares del punto son $(3, \frac{7\pi}{6})$, o si queremos r *negativo* $(-3, \frac{\pi}{6})$. El punto es que no basta con usar la función arcotangente de la calculadora, hay que pensar si el ángulo que arroja corresponde a nuestro punto, o es necesario sumar media vuelta para cambiar de cuadrante o una vuelta para dejar el ángulo positivo.

Ejemplo 8.2. Veamos cómo pasar de cartesianas a polares y viceversa.

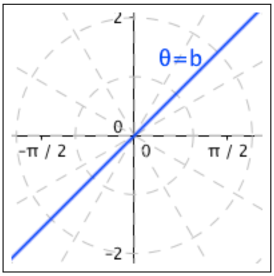
$$\begin{aligned}
&\text{Polares} \qquad \text{Cartesianas}\\
(2, \pi/3) &\longrightarrow \left(1, \sqrt{3}\right)\\
(-3, \pi/6) &\longrightarrow \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)\\
\left(\sqrt{5}, \arctan(-2) + 2\pi\right) &\longleftarrow (1, -2)\\
\left(2, \frac{2\pi}{3}\right) = \left(2, \arctan(-\sqrt{3}) + \pi\right) &\longleftarrow (-1, \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Ahora que conocemos las coordenadas, veamos cómo se representan las gráficas que conocemos en coordenadas cartesianas y aprendamos unas nuevas que solamente se consideran en polares.

1. $r = a$. Circunferencia con centro en el origen y radio a.

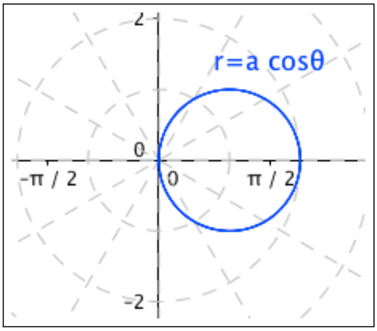


2. $\theta = b$. Recta que pasa por el origen.



Note que para hacer la circunferencia completa el ángulo θ varía de 0 a 2π. Por otra parte, en la recta, r puede tomar valores negativos y positivos.

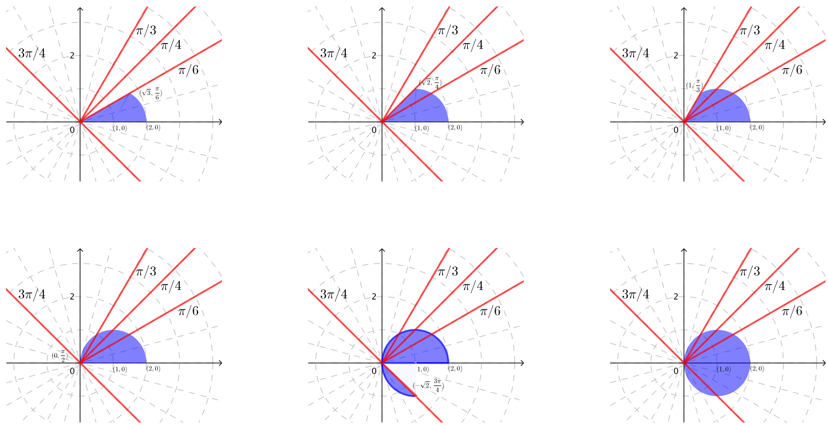
3. $r = a\cos\theta$, con $a > 0$, es una circunferencia con diámetro sobre el eje polar que pasa por el origen (pero no tiene centro en el origen) y radio $\frac{a}{2}$. Veamos cómo queda su ecuación al pasar a coordenadas cartesianas:



$$
\begin{aligned}
r &= a\cos\theta \\
r^2 &= a\,r\cos\theta \\
r^2 = x^2 + y^2 &= a\,x \\
x^2 - a\,x + y^2 &= 0 \\
\left(x^2 - 2\frac{1}{2}a + \frac{a^2}{4}\right) + y^2 &= 0 + \frac{a^2}{4} \\
\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

Lo anterior muestra que el centro tiene coordenadas cartesianas $(\frac{a}{2}, 0)$ (que de hecho son también las coordenadas polares). Observe que a diferencia de la primera circunferencia de esta página, para dibujar $r = a\cos\theta$ basta tomar $\theta \in [0, \pi]$.

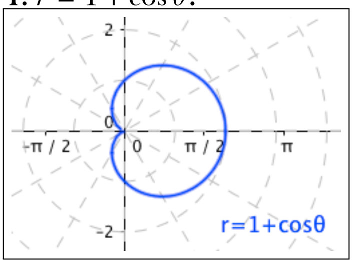
Para precisar un poco esta *nueva* forma de dibujar, tracemos la curva $r = 2\cos\theta$, representada en la sucesión de gráficas al final del párrafo. Cuando $\theta = 0$, se tiene $r = 2$, así que el círculo empieza sobre el eje polar en el punto $(2, 0)$. Si tomamos $\theta = \pi/6$, entonces $r = \sqrt{3}$, lo que nos deja en el punto $(\sqrt{3}, \pi/6)$. Cuando $\theta = \pi/4$, tenemos $r = \sqrt{2}$, que corresponde al punto $(\sqrt{2}, \pi/4)$. En la tercera gráfica hemos llegado hasta el punto $(1, \pi/3)$. Para $\theta = \pi/2$, tenemos $r = 0$, que coincide con el polo. Al reemplazar θ por $3\pi/4$, obtenemos $r = -\sqrt{2}$, lo que nos lleva al punto $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$, como se ve en la quinta gráfica. Finalmente, cuando hacemos $\theta = \pi$ llegamos nuevamente al punto de partida, aunque en esta ocasión sus coordenadas aparecen como $(2, \pi)$, con lo cual completamos la circunferencia, que vemos se ha formado en el sentido contrario a las manecillas del reloj.



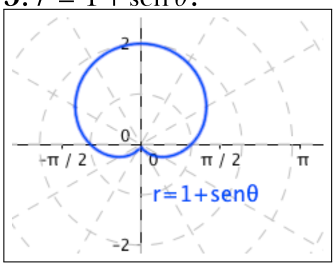
La gráfica de $r = a \operatorname{sen} \theta$, con $a > 0$, corresponde a un círculo con centro en el punto de coordenadas polares $(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2})$ y radio $\frac{a}{2}$ (diámetro sobre el eje y). ¿Es posible considerar a un número negativo?¿Cómo quedarían las gráficas?

Las siguientes gráficas se conocen como **cardioides**, se completan cuando θ varía de 0 a 2π. Su orientación depende de si incluye la función seno o coseno y su forma depende del valor de las constantes.

4. $r = 1 + \cos \theta$.

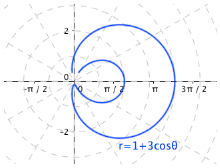


5. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.

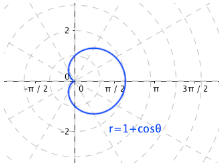


La ecuación general de una cardioide es $r = a + b \cos \theta$, o bien $r = a + b \operatorname{sen} \theta$, donde las constantes a, b pueden ser positivas o negativas. La forma específica de cada gráfica depende de la relación entre a y b. A continuación mostramos las gráficas de seis cardioides que incluyen la función coseno, donde se han dado diferentes valores a a y b para ver los posibles resultados. A manera de ejercicio, el lector puede cambiar coseno por seno y realizar las respectivas gráficas.

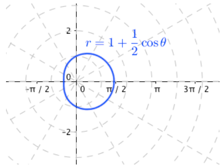
6. $r = 1 + 3\cos\theta$.



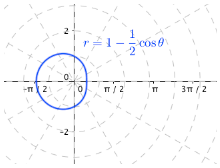
7. $r = 1 + \cos\theta$.



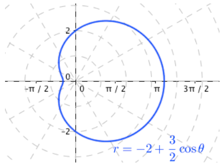
8. $r = 1 + \frac{1}{2}\cos\theta$.



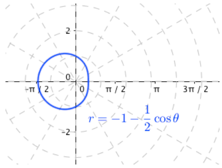
9. $r = 1 - \frac{1}{2}\cos\theta$.



10. $r = -2 + \frac{3}{2}\cos\theta$.

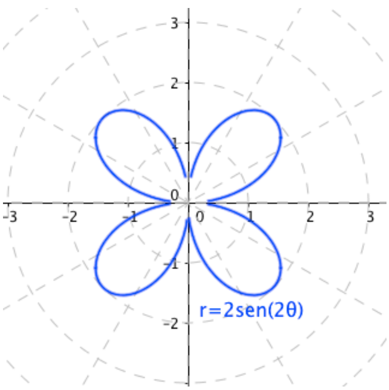


11. $r = -1 - \frac{1}{2}\cos\theta$.

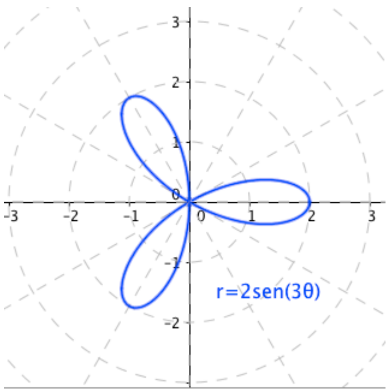


Las siguientes curvas se conocen como **rosas**. La ecuación general de una rosa es $r = a\cos(n\theta)$ o $r = a\,\mathrm{sen}(n\theta)$, con n un entero positivo. La amplitud de un *pétalo* es $|a|$, entendiendo amplitud como la distancia desde el origen hasta el punto más lejano, y el número de pétalos depende de la paridad de n: si n es impar, la rosa tiene n pétalos; y si n es par, la rosa tiene $2n$ pétalos, como se ve en las gráficas a continuación.

12. $r = 2\,\mathrm{sen}(2\theta)$.



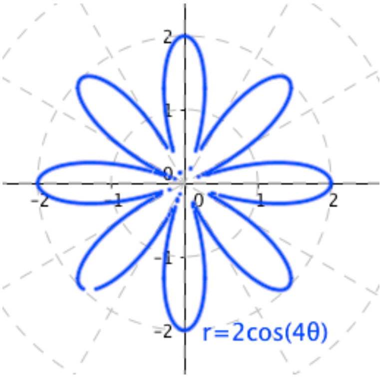
13. $r = 2\,\mathrm{sen}(3\theta)$.



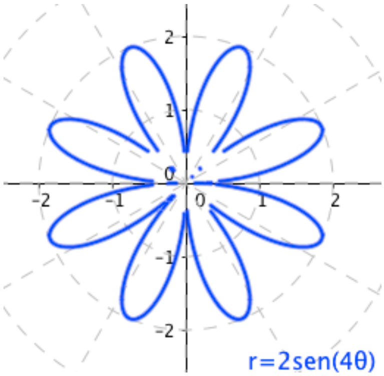
El inicio de la rosa está determinado por la función que incluye: seno o coseno. En el ejemplo 14 (ver gráfica en la página siguiente), donde $r = 2\cos(4\theta)$, cuando $\theta = 0$, tenemos que r vale 2, lo que indica que la rosa empieza sobre el eje polar, en el punto de coordenadas polares $(2, 0)$.

Mientras que en el ejemplo 15, donde $r = 2\,\mathrm{sen}(4\theta)$, cuando $\theta = 0$, tenemos $r = 0$, así que la rosa se empieza a formar en el origen.

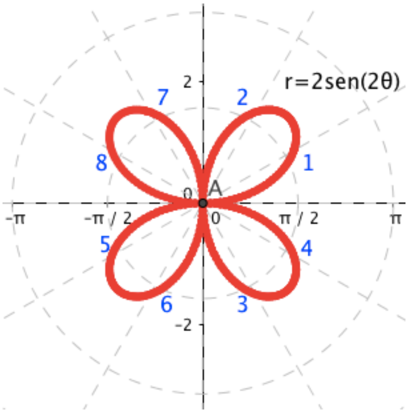
14. $r = 2\cos(4\theta)$.



15. $r = 2\,\mathrm{sen}(4\theta)$.



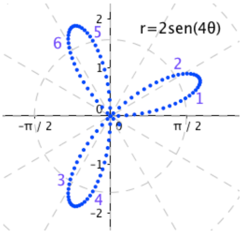
Es importante mencionar que los pétalos se forman uno a uno en cierta dirección, para ser más precisos, en la rosa $r = 2\,\mathrm{sen}(2\theta)$, que tiene 4 pétalos, el primer medio pétalo se forma en el primer cuadrante, para recorrerlo es necesario que θ vaya de 0 a $\frac{\pi}{4}$, la segunda mitad del primer pétalo se forma cuando θ recorre el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. En la gráfica, se han dispuesto los números de 1 a 8 para indicar el orden en que se forma cada medio pétalo, teniendo como punto de partida el polo.

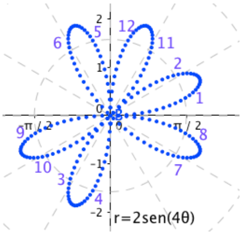


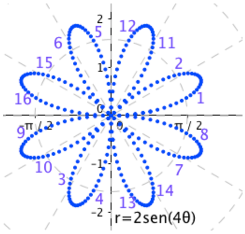
Esto es fácil de ver si notamos que la *punta* del primer pétalo se logra cuando la función $\mathrm{sen}(2\theta)$ toma su máximo valor, así que resolvemos la ecuación $\mathrm{sen}(2\theta) = 1$, que tiene como solución $\theta = \frac{\pi}{4}$, así que $\frac{\pi}{4}$ es el punto del primer cuadrante donde se alcanza el máximo. Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, tenemos que $r = 0$, esto es, pasa por el polo. Cuando $\theta = \frac{3\pi}{4}$, tenemos que $r =$

$2\,\text{sen}(2\frac{3\pi}{4}) = 2\,\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -2$, gráficamente se marca el punto $(-2, \frac{3\pi}{4})$ en el cuarto cuadrante, lo que confirma la dirección en la que se forma la rosa.

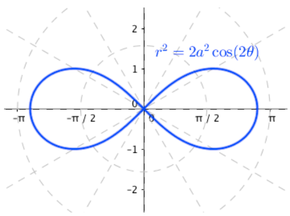
16. Rosa de ocho pétalos. Al graficar la rosa $r = 2\,\text{sen}(4\theta)$, vemos que cuando θ varía de 0 a $\frac{\pi}{8}$ se forma el medio pétalo marcado con 1, de $\frac{\pi}{8}$ a $\frac{\pi}{4}$ se forma el medio pétalo marcado con 2, y así sucesivamente.



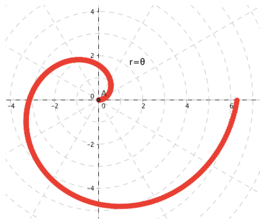


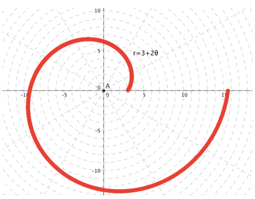


17. Lemniscata. Esta figura se asemeja al símbolo del infinito ∞ y se puede definir formalmente como el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que el producto de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. En coordenadas cartesianas tendríamos la relación $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, mientras que en coordenadas polares es $r^2 = 2a^2\cos(2\theta)$.



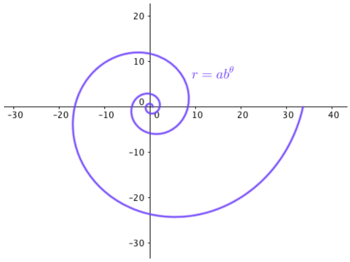
18. La espiral de Arquímedes es llamada así en honor al célebre matemático griego Arquímedes (s.III a.C.). Su ecuación más simple es $r = \theta$, como la que se muestra en la gráfica de la derecha, donde θ varía de 0 a 2π, así que inicia en el polo y termina en el punto $(2\pi, 2\pi)$, pero puede ser infinita.





Se puede hacer modificaciones a la espiral, de tal forma que su ecuación sea $r = a + b\theta$, donde a marca el inicio de la espiral y b la separación entre cada giro. En la gráfica de la izquierda se muestra la espiral de ecuación polar $r = 3 + 2\theta$, vemos que su punto inicial es $(3, 0)$ y cuando $\theta = 2\pi$, r es $5 + 4\pi$.

19. La espiral logarítmica $r = ab^{\theta}$, donde a indica el tamaño de la espiral y b controla que tan fuerte está enrollada y hacia que dirección. Cuando despejamos θ, obtenemos $\theta = \log_b(r/a)$, de lo cual se deriva su nombre. La espiral logarítmica puede encontrarse en la naturaleza de diversas formas:



La primera imagen corresponde a la galaxia Bode (M81), cuya fotografía fue tomada por el telescopio espacial Spitzer, en ella se puede observar polvo interestelar siguiendo aproximadamente una espiral logarítmica. La segunda imagen corresponde al ciclón Catarina en el Atlántico sur, visto desde la Estación Espacial Internacional. En la tercera imagen, tenemos un corte de la concha de un *nautilus*, donde se aprecian las cámaras formando aproximadamente una espiral logarítmica.[1]

1. Cónicas en polares

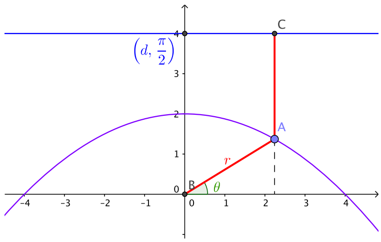
Empecemos esta sección diciendo que una recta vertical que en cartesianas tiene ecuación $x = p$ se puede escribir en coordenadas polares como $r \cos\theta = p$, o equivalentemente $r = p \sec\theta$. De manera análoga, una recta horizontal que en cartesianas se representa por $y = q$, en polares queda $r \operatorname{sen}\theta = q$, o mejor $r = q \csc\theta$. Veamos cómo son las ecuaciones de algunas cónicas en polares, para facilitar la deducción de las mismas se pondrá siempre un foco en el polo.

La forma usual de definir la parábola es pensando en una recta fija llamada directriz y un punto fijo llamado foco, que pondremos en el polo. Más precisamente, una **parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos del

[1]Espiral logarítmica. *Wikipedia*. Recuperado el 7 de diciembre de 2017 de https://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_logar%C3%ADtmica

plano que equidistan de la directriz y del foco. En este sentido, de acuerdo con la gráfica y suponiendo que la recta directriz pasa por el punto de coordenadas polares $(d, \frac{\pi}{2})$, con $d > 0$, podemos deducir la ecuación de la siguiente forma

$$\begin{aligned} d(A, C) &= d(A, B) \\ d - r \operatorname{sen}\theta &= r \\ r &= \frac{d}{1 + \operatorname{sen}\theta}. \end{aligned}$$



Concluimos que la ecuación de la parábola con recta directriz paralela al eje polar, que pasa por el punto $(d, \frac{\pi}{2})$, con $d > 0$, y que tiene foco en el polo, es $r = \frac{d}{1+\operatorname{sen}\theta}$. De manera similar, podemos ver que la ecuación de la parábola con foco en el polo, cuya recta directriz es perpendicular al eje polar y pasa por el punto (d, π), con $d > 0$, es $r = \frac{d}{1-\cos\theta}$.

Por otra parte, dado un punto sobre la cónica, se define la excentricidad[2] como la razón entre dos valores: la distancia desde el punto al foco y la distancia del punto a la directriz. Así que otra forma de deducir la ecuación es escribiendo

$$e = \frac{d(A, B)}{d(A, C)},$$

de modo que en este caso de la gráfica tenemos $e = \frac{r}{d - r\operatorname{sen}\theta}$. Como sabemos que en una parábola la excentricidad es $e = 1$ (puesto que las dos distancias son iguales), la ecuación se transforma en

$$1 = \frac{r}{d - r\operatorname{sen}\theta},$$

que es equivalente a la dada previamente.

Ejemplo 8.3. La ecuación de la parábola con directriz $r = 4\csc\theta$ y con un foco en el polo tiene ecuación $r = \frac{4}{1+\operatorname{sen}\theta}$.

Ejemplo 8.4. La ecuación $r = \frac{1}{1-\cos\theta}$ corresponde a una parábola que tiene el foco en el polo y recta directriz perpendicular al eje polar que pasa por el punto $(1, \pi)$, esto es, con ecuación $r = -\sec\theta$. En este caso, la distancia entre el foco y la directriz es 1, lo que implica que el vértice tiene coordenadas $(\frac{1}{2}, \pi)$.

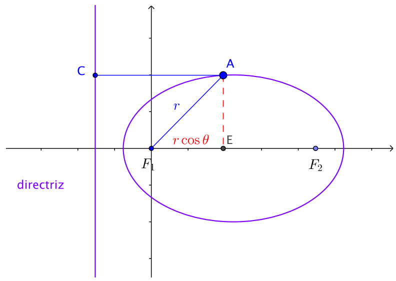
[2] La excentricidad es un número que determina el grado de desviación de una cónica con respecto a una circunferencia. En un parábola $e = 1$, si la cónica es una elipse, tenemos que $0 < e < 1$; para una hipérbola, $e > 1$; para la circunferencia, $e = 0$.

Ejemplo 8.5. La ecuación $r = \frac{2}{1+\cos\theta}$ representa una parábola que abre a la izquierda, con vértice en $(1, 0)$, foco en el polo y directriz $r = 2\sec\theta$.

Teniendo a la mano el concepto de excentricidad resulta más eficiente definir la elipse y la hipérbola a través de esta, recordando que si la excentricidad es un valor entre 0 y 1, se trata de una elipse, y en el caso en que $e > 1$, se tiene una hipérbola.

Para deducir la ecuación polar de una elipse basta con recordar que por cada foco tenemos asociada una recta directriz, que es paralela el semieje menor y tal que el vértice más cercano a dicho foco se encuentra exactamente en el punto medio entre la directriz y el foco, como lo muestra la siguiente figura.

Entonces, $e = \frac{d(A,F_1)}{d(A,C)}$, de hecho, en algunos libros se da como definición: *una* **elipse** *es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que el cociente entre sus distancias a un punto fijo (llamado foco) y a una recta fija (la directriz) es constante*, tal cociente coincide con el valor de la excentricidad.



Esta definición simplifica notablemente los cálculos en coordenadas polares, pues $d(A, F_1) = r$. Si llamamos d a la distancia del foco F_1 (polo) a la recta directriz, entonces tenemos que $d(A, C) = d + r\cos\theta$. En consecuencia, la ecuación de la elipse con un foco en el polo y recta directriz perpendicular al eje polar es

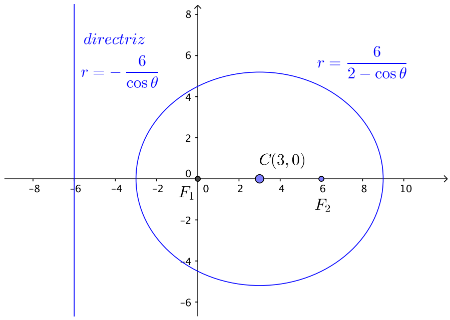
$$e = \frac{r}{d + r\cos\theta}$$

o mejor

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}.$$

Ejemplo 8.6. Verifiquemos que la ecuación polar $r = \frac{6}{2-\cos\theta}$ corresponde a una elipse. Para ello, escribamos $r = \frac{3}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$. Note que la excentricidad es $e = \frac{1}{2} < 1$, lo cual indica que en efecto es una elipse con un foco en el polo y, además, $d = 6$.

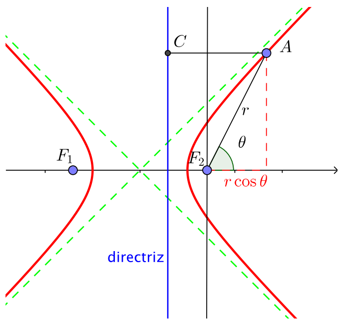
Si queremos más información acerca de ella, es necesario recordar que en coordenadas cartesianas el eje mayor mide $2a$, el eje menor mide $2b$ y la distancia del centro al foco está dada por c, donde se satisface la relación $a^2 = b^2 + c^2$, además la excentricidad se puede medir como $e = \frac{c}{a}$.



Como hemos llamado d la distancia del foco a la directriz, entonces tenemos que $d = 2(a - c)$ y, como $\frac{1}{2} = e = \frac{c}{a}$, concluimos que $a = 6$ y $c = 3$. En la gráfica están marcados el centro, los focos y una directriz; los vértices tienen coordenadas polares $(3, \pi)$ y $(9, 0)$.

Aprovechemos nuevamente el concepto de excentricidad y veamos ahora cómo quedaría la ecuación de una hipérbola con un foco en el polo. La hipérbola corresponde a todos los puntos del plano tales que el cociente entre la distancia del punto a un foco y la distancia del punto a la directriz correspondiente es una constante que coincide con la excentricidad.

Entonces, $e = \frac{d(A,F_2)}{d(A,C)}$. Si llamamos d a la distancia del foco a la recta directriz, tenemos $d(A, C) = d + r\cos\theta$ y, así,



$$e = \frac{r}{d + r\cos\theta},$$

o mejor

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}.$$

En conclusión, la ecuación de la hipérbola que tiene directriz perpendicular al eje polar y con un foco en el polo es $r = \frac{ed}{1-e\cos\theta}$; mientras que si la directriz es paralela al eje polar, la ecuación es $r = \frac{ed}{1-e\operatorname{sen}\theta}$.

Ejemplo 8.7. Para determinar qué cónica representa la ecuación polar $r = \frac{25}{4+5\operatorname{sen}\theta}$, dividimos por 4 numerador y denominador, de tal forma que nos queda $r = \frac{\frac{25}{4}}{1+\frac{5}{4}\operatorname{sen}\theta}$. De aquí deducimos que $e = \frac{5}{4} > 1$ y, por lo tanto, corresponde a una hipérbola. Además, tenemos que $ed = \frac{25}{4}$, luego $d = 5$. Como la distancia del foco al vértice es $c - a$, pero también es $\frac{d}{2}$, igualando y usando la relación $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$, obtenemos $a = 10$ y $c = \frac{25}{2}$. De la relación $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos $b = \frac{15}{2}$. Con estos datos, podemos ubicar el centro

$C\left(\frac{25}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, los vértices $V_1\left(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $V_2\left(\frac{45}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, y los focos F_1 en el polo y $F_2\left(25, \frac{\pi}{2}\right)$. Las ecuaciones de las directrices así como las de las asíntotas son más sencillas si se expresan en cartesianas: las directrices son $y = 5$, $y = 20$ y las asíntotas $y - \frac{25}{2} = \pm\frac{5}{4}x$. La gráfica se deja como ejercicio.

Una sencilla pregunta que seguro el lector ya se hizo es *¿cuándo aparece* $+$ *y cuándo aparece* $-$ *en el denominador?* Más concretamente, cuando dedujimos la ecuación de la hipérbola escribimos $r = ed/(1-e\operatorname{sen}\theta)$, pero el ejemplo era de la forma $r = ed/(1+e\operatorname{sen}\theta)$, ¿qué indica el signo? Para responder a esta pregunta, es suficiente que trace la gráfica del ejemplo anterior y también de $r = 25/(4-5\operatorname{sen}\theta)$ ¿cuál es la diferencia? ¡La elección del foco que va en el origen!

Nota 8.8. *Por último, observe que hemos dispuesto todas las cónicas de tal forma que un foco coincida con el polo, esto se hace para facilitar la tarea de deducir la ecuación, pues la distancia de un punto al foco será r. Si no se pone el polo en un foco, las ecuaciones no son tan fáciles de deducir, pero en esencia es la misma idea.*

2. Simetría en coordenadas polares

A continuación mencionamos las reglas de simetría para bosquejar curvas en coordenadas polares.

1. La gráfica es simétrica con respecto al eje polar (eje x) si alguna de las siguientes condiciones se cumple

    ♠ se reemplaza θ por $-\theta$,

    ♣ se remplaza θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$,

    y la expresión no se altera.

2. La gráfica es simétrica con respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y) si alguna de las siguientes condiciones se cumple

    ♠ se reemplaza θ por $\pi - \theta$,

    ♣ se remplaza θ por $-\theta$ y r por $-r$,

    y la expresión no se altera.

3. La gráfica es simétrica con respecto al polo si alguna de las siguientes condiciones se cumple

    ♠ se reemplaza r por $-r$,

- ♣ se remplaza θ por $\pi + \theta$,

y la expresión no se altera. Recuerde que esta simetría se puede pensar de la siguiente manera: *si la gráfica se gira 180°, esa nueva gráfica coincide con la inicial.*

Ejemplo 8.9. Consideremos la curva $r = \cos(3\theta)$, que corresponde a una rosa de tres pétalos, y analicemos los numerales anteriores.

1. Cambiemos θ por $-\theta$ y veamos si analíticamente obtenemos la misma expresión. Esto es, $r = \cos(-3\theta) = \cos(3\theta)$, por ser coseno una función par, lo que significa que su gráfica es simétrica con respecto al eje polar.

2. Al cambiar θ por $\pi - \theta$, la expresión queda $r = \cos(3(\pi - \theta)) = \cos(3\pi - 3\theta) = \cos(3\pi)\cos(3\theta) - \operatorname{sen}(3\pi)\operatorname{sen}(3\theta) = -\cos(3\theta)$, la cual no coincide con la expresión original.

   Verificamos la segunda condición, es decir, cambiamos θ por $-\theta$ y r por $-r$ para obtener $-r = \cos(-3\theta) = \cos(3\theta)$, que no es igual a la expresión que nos dieron. Esto indica que la gráfica definitivamente no es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

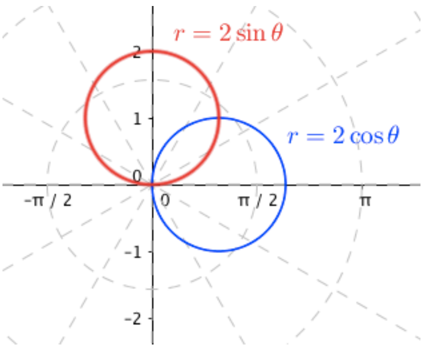
3. Cambiamos r por $-r$, con lo cual obtenemos una expresión que no es equivalente a la inicial, esto es, $-r = \cos(3\theta)$. Todavía no podemos decir que la gráfica no es simétrica con respecto al polo, falta verificar la segunda condición, pero al cambiar θ por $\pi + \theta$ obtenemos $r = \cos(3(\pi+\theta)) = \cos(3\pi+3\theta) = \cos(3\pi)\cos(3\theta) - \operatorname{sen}(3\pi)\operatorname{sen}(3\theta) = -\cos(3\theta)$, que difiere de la original. Luego, no es simétrica con respecto al origen. Note que de hecho ninguna rosa de un número impar de pétalos puede ser simétrica con respecto al origen.

En este punto el lector ya debe haber notado que hay que tener un cuidado especial cuando se trabaja con coordenadas polares, la razón: *un punto tiene más de una representación en coordenadas polares*. Para precisar esta idea, consideremos la curva $r = \operatorname{sen}(2\theta)$. En una primera inspección, el punto $(1, -\frac{\pi}{4})$ no pertenece a la curva, puesto que no satisface la ecuación $1 \neq \operatorname{sen}(2(\frac{-\pi}{4})) = -1$, pero al mirar con más detenimiento, podemos observar que el mismo punto tiene otra representación, a saber, $(-1, \frac{3\pi}{4})$, que sí satisface la ecuación, pues $-1 = \operatorname{sen}(2(\frac{3\pi}{4}))$.

3. Intersección de curvas en polares

Con el fin de prepararnos para la siguiente sección, donde hallaremos área entre curvas, vamos a mostrar un par de ejemplos de cómo hallar puntos de intersección entre curvas. Nuevamente, es muy importante tener en cuenta que un punto puede tener más de una representación.

Consideremos las circunferencias $r = \cos\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta$ que se muestran en la gráfica.

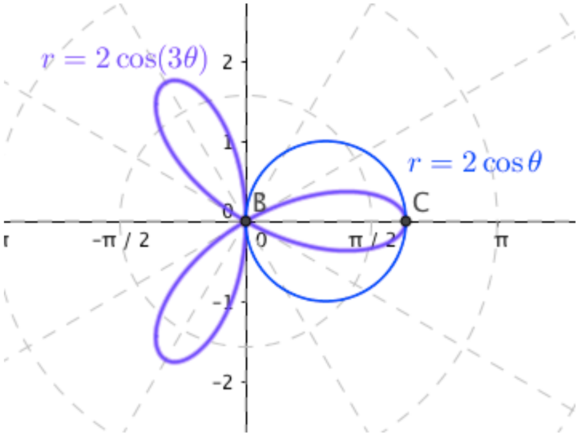


Para hallar el punto de corte, se procede de la misma manera que en coordenadas cartesianas, esto es, igualando las expresiones para r:

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$$
$$\theta = \frac{\pi}{4},$$

que coincide con lo que podemos apreciar en la gráfica, sin embargo, parece que ellas también se cortan en el polo, es fácil ver que la circunferencia $r = \operatorname{sen}\theta$ pasa por el $(0, 0)$. Sin embargo, el punto $(0, 0)$ no satisface la ecuación $r = \cos\theta$, esto no significa que la gráfica no pasa por el polo, pues hay que recordar que el polo tiene coordenadas $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo, basta verificar que si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces $r = 0$. En resumen, los dos puntos de corte son $(\sqrt{2}, \pi/4)$ y el polo.

Veamos ahora cuáles son los puntos de corte entre la circunferencia $r = 2\cos\theta$ y la rosa $r = 2\cos(3\theta)$.



Igualando las expresiones, tenemos

$$\begin{aligned}
2\cos\theta &= 2\cos(3\theta) \\
\cos\theta &= \cos(2\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}\theta \\
\cos\theta &= [\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta]\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\
0 &= \cos\theta[\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta - 1] \\
0 &= \cos\theta[\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta - 1],
\end{aligned}$$

entonces $\cos\theta = 0$ o $\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta - 1 = 0$. De la primera igualdad, concluimos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y confirmamos que las dos curvas pasan por el punto $(0, \frac{\pi}{2})$, que se marca en la gráfica con la letra B. Para la segunda igualdad, tenemos

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta - 1 &= 0 \\
1 - \operatorname{sen}^2\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta - 1 &= 0 \\
-4\operatorname{sen}^2\theta &= 0 \\
\operatorname{sen}\theta &= 0,
\end{aligned}$$

cuyas soluciones son $\theta = 0, k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Verificamos que cuando $\theta = 0$ tanto la circunferencia como la rosa pasan por el punto C de coordenadas $(2, 0)$.

Es posible que el estudiante haya visualizado los puntos de forma inmediata después de ver las gráficas, de hecho, no es difícil probar que ellos pertenecen a las dos curvas, sin embargo, para eso se hace necesario tener las dos gráficas (lo cual es altamente recomendable cuando se trabaja en polares). Hemos incluido aquí todo el procedimiento a manera de ejemplo.

Ejercicios 8.3

1. Localice los siguientes puntos en el plano polar y dé otra representación para cada uno de ellos: $(1, 0)$, $(1, \frac{\pi}{2})$, $(2, \frac{\pi}{4})$, $(3, -\frac{\pi}{2})$, $(-3, -\frac{\pi}{2})$, $(2, \frac{5\pi}{4})$, $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$, $(-1, -\frac{5\pi}{5})$, $(0, \frac{\pi}{3})$, $(-2, \frac{\pi}{6})$.

2. Escriba las coordenadas rectangulares de cada uno de los puntos del numeral anterior.

3. Escriba los siguientes puntos en coordenadas polares: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-1, -1)$, $(-1, -2)$, $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$, $(-1, -\sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

4. Realice las siguientes gráficas en el plano polar. Verifique primero las simetrías.

   a) $r = -3 \operatorname{sen} \theta$.
   b) $r^2 = 4 \cos(2\theta)$.
   c) $r = 3 \cos(3\theta)$.
   d) $r = 2 - \operatorname{sen} \theta$.
   e) $\theta = -\frac{\pi}{6}$.
   f) $r = 5 \cos \theta$.
   g) $r = 1 + 4 \operatorname{sen} \theta$.
   h) $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$.
   i) $r = 2 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta$.
   j) $r = 2$.
   k) $r = 1 - \frac{3}{2} \cos \theta$.
   l) $r = 4 \cos(2\theta)$.
   m) $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.
   n) $r = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(6\theta)$.
   ñ) $r = \theta$.
   o) $r = 2 + 3\theta$.

5. Encuentre todos los puntos de intersección entre las siguientes parejas de curvas.

   a) $r = 2$ y $r = 3 \cos(2\theta)$.
   b) $r = 2 \cos \theta$ y $r = 2 \cos(2\theta)$.
   c) $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.
   d) $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1 + \cos \theta$.
   e) $r = 1 + \cos \theta$ y $r = 2 \cos(2\theta)$.
   f) $r = 2 \operatorname{sen}(2\theta)$ y $r = 2 \cos(2\theta)$.

6. Encuentre la ecuación polar del conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia al polo y a la recta perpendicular al eje polar que pasa por $(3, 0)$ es constante.

7. Encuentre una expresión para el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del polo y de la recta paralela al eje polar que pasa por $(5, \frac{\pi}{2})$.

8. Determine qué cónica representa cada una de las siguientes ecuaciones polares y haga un bosquejo de la gráfica identificando los elementos correspondientes.

   a) $r = \frac{4}{3-2\cos\theta}$.
   b) $r = \frac{6}{3+5\operatorname{sen}\theta}$.
   c) $r = \frac{5}{1+\operatorname{sen}\theta}$.
   d) $r = \frac{5}{5+3\operatorname{sen}\theta}$.

9. Use un programa para graficar las siguientes curvas y compárelas con las del ejercicio anterior. ¿Qué puede concluir?

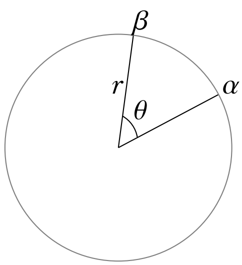
   a) $r = \frac{4}{3-2\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$.
   b) $r = \frac{6}{3+5\operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{6})}$.
   c) $r = \frac{-5}{1+\operatorname{sen}\theta}$.
   d) $r = \frac{-5}{5+3\operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{3})}$.

10. Demuestre que la ecuación polar de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $r^2 = \frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}$.

4. Área en coordenadas polares

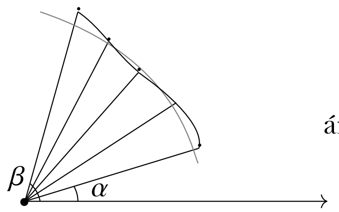
Para hallar el área de una región acotada por varias curvas, en coordenadas cartesianas, usamos como unidad de medida el área de un rectángulo. Recuerde que hicimos una partición sobre el eje x, con la cual formamos los rectángulo de ancho Δx, y luego hallamos las alturas de dichos rectángulos usando la o las funciones dadas. Finalmente, sumamos todas las áreas y llevando el proceso al límite obtuvimos una integral para el área.

En este caso, haremos algo semejante, pero ahora nuestra unidad de medida será un sector circular, como en la figura.



Área círculo = πr^2,
Área sector $\sphericalangle = \frac{1}{2}\,\theta\, r^2$.

Esta vez haremos la partición sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$ e integraremos sobre θ, es decir, consideraremos $P = \{\alpha = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n = \beta\}$, que determina n sectores circulares, cada uno con ángulo $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n$; y escogeremos un punto dentro del i–ésimo sub-intervalo $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$, además supondremos que la partición es regular para simplificar los cálculos. Si la función que describe la curva está dada por $r = f(\theta)$, entonces

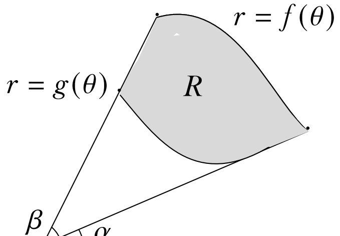


área i-ésimo sector $= \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \cdot \Delta\theta_i$.

Sumando todas las áreas, obtenemos que el área es $\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left[f(\theta_i^*)\right]^2 \Delta\theta_i$; llevando el proceso al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\, [f(\theta)]^2\, d\theta.}$$

Para hallar el área acotada por dos curvas, como lo muestra la figura,

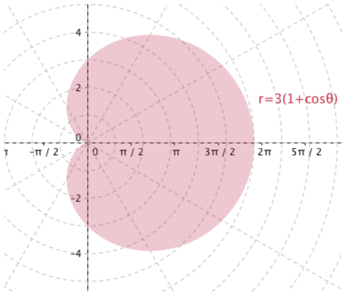


hacemos la integral

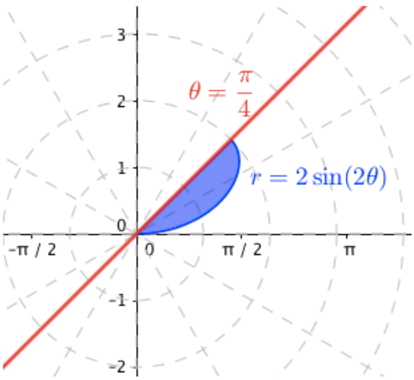
$$A(R) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\left[(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2\right] d\theta.$$

Ejemplo 8.10. Área encerrada por la cardioide $r = 3(1+\cos\theta)$. De acuerdo con la información proveniente de la gráfica, esta es simétrica con respecto al eje polar, pues si cambiamos θ por $-\theta$, la expresión no se altera. Luego, es suficiente integrar de 0 a π y multiplicar por 2.

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[3(1+\cos\theta)]^2 d\theta \\
&= 9\int_0^{\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\
&= 9\left[\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\
&= 9\left[\frac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{27\pi}{2}.
\end{aligned}
$$



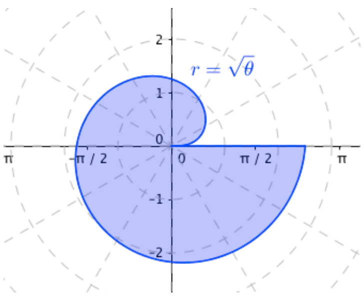
Ejemplo 8.11. Cálculo del área de un pétalo de $r = 2\operatorname{sen}(2\theta)$. De acuerdo con la gráfica, calculamos el área de medio pétalo integrando de 0 a $\frac{\pi}{4}$ y multiplicamos por 2.



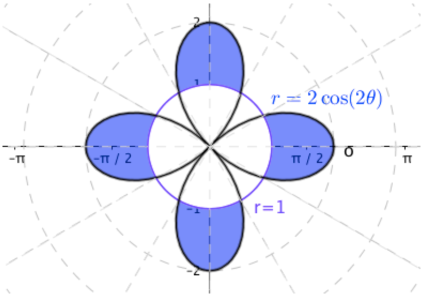
$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}[2\operatorname{sen}(2\theta)]^2 d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2(2\theta)d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}d\theta \\
&= 2\left[\theta - \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.12. Cálculo del área de la espiral $r = \sqrt{\theta}$, cuando $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[\theta^2\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi^2.
\end{aligned}
$$



Ejemplo 8.13. Encuentre el área dentro de la rosa $r = 2\cos(2\theta)$ y fuera de la circunferencia $r = 1$. Comenzamos hallando los puntos de corte entre las dos curvas:

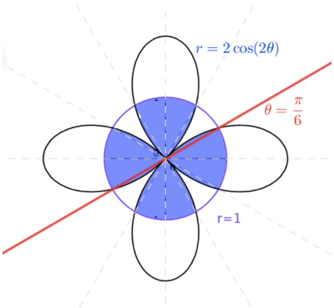


$$
\begin{aligned}
2\cos(2\theta) &= 1\\
\cos(2\theta) &= \frac{1}{2}\\
2\theta &= \frac{\pi}{3}\\
\theta &= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

Note que el punto de coordenadas $(1, \frac{\pi}{6})$ es el primer punto donde se cortan las dos figuras, de hecho, es el único que necesitamos, pues de acuerdo con la figura es suficiente integrar de 0 a $\frac{\pi}{6}$ y multiplicar por 8 para obtener el área total.

$$
\begin{aligned}
A &= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}[(2\cos(2\theta))^2 - 1^2]d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} [4\cos^2(2\theta) - 1]d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[4\left(\frac{1+\cos(4\theta)}{2}\right) - 1\right]d\theta\\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} [1 + 2\cos(4\theta)]d\theta\\
&= 4\left[\theta + 2\frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 4\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 8.14. Si ahora queremos hallar el área de la intersección entre las dos regiones, hay que separar la integral en dos partes, pues entre 0 y $\frac{\pi}{6}$ la única curva que rodea la región es $r = 1$, mientras que de $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{4}$ la región está bordeada por la rosa $r = 2\cos(2\theta)$.



$$
\begin{aligned}
A &= 8\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\,1^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}[2\cos(2\theta)]^2 d\theta\right)\\
&= 4\left(\frac{\pi}{6} + 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(4\theta)}{2} d\theta\right)\\
&= \frac{2\pi}{3} + 8\left[\theta + \frac{\operatorname{sen}(4\theta)}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, después de realizar los dos ejemplos previos, podemos inferir cuál es el área de la región encerrada por la rosa $r = 2\cos(2\theta)$ sumando los dos resultados. Dicho de otra forma, si se conoce el valor del área de la región encerrada por la rosa y se ha resuelto uno de los dos ejemplos previos, es posible resolver el otro haciendo la diferencia.

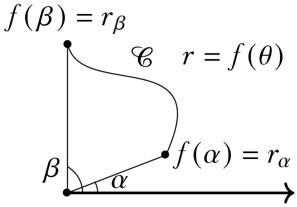
5. Longitud de arco

Cuando se parametriza una curva en coordenadas rectangulares $x = f(t)$, $y = g(t)$, su longitud de arco para $t \in [a, b]$ está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Ahora bien, una curva en coordenadas polares está en forma paramétrica, donde el parámetro es el ángulo θ, $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Como $r = f(\theta)$, esto significa que la curva polar se puede concebir como una parametrización de una curva en coordenadas rectangulares, entonces

$$\begin{aligned} &x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \\ &y(\theta) = f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ &\theta \in [\alpha, \beta]. \end{aligned}$$



Luego, la longitud de la curva está dada por

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Cambiando a polares, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta - 2f(\theta)\frac{df}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + [f(\theta)]^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \frac{df}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta \\ \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2\mathrm{sen}^2\,\theta + 2f(\theta)\frac{df}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + [f(\theta)]^2\cos^2\theta, \end{aligned}$$

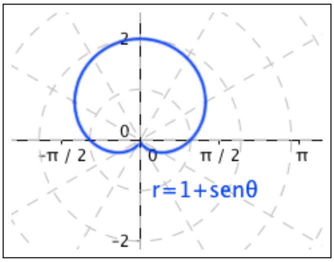
entonces

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2+[f(\theta)]^2.$$

Al sustituir esta expresión en la integral de longitud de arco, tenemos

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2}\,d\theta.$$

Ejemplo 8.15. Encuentre la longitud de la cardioide $r=1+\operatorname{sen}\theta$.



Tenemos

$$\begin{aligned} f(\theta)&=1+\operatorname{sen}\theta\\ f'(\theta)&=\cos\theta\\ [f(\theta)]^2&=1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta\\ [f'(\theta)]^2&=\cos^2\theta.\end{aligned}$$

Note que si θ varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, obtenemos la parte de la cardioide que se encuentra en el primer cuadrante. Así que si queremos hallar la mitad de la longitud de la curva y multiplicar por 2, debemos tener mucho cuidado. Como queremos la parte derecha de la curva, debemos integrar bien sea de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ ó bien de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$ y multiplicar por 2, o simplemente integrar de 0 a 2π. Entonces,

$$\begin{aligned} L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\ \operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\operatorname{sen}\theta}\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\operatorname{sen}\theta}d\theta.\end{aligned}$$

La integral es más sencilla si usamos la identidad $\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} L&=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta\\ &=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta\\ &=\sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta+\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)d\theta\\ &=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 8.16. Plantee una integral para calcular la longitud de la curva determinada por $r = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{2}\right]^2}\, d\theta.$$

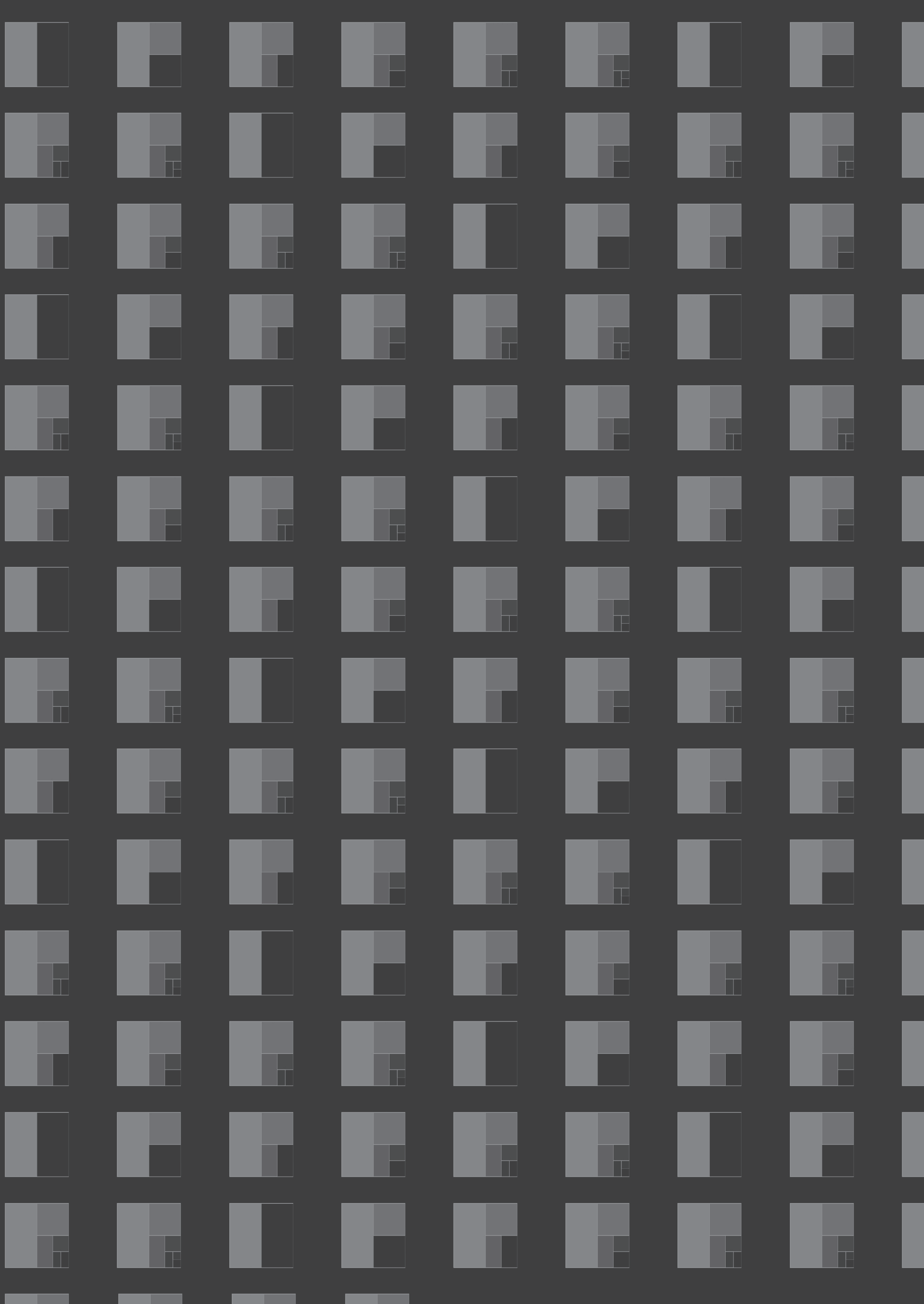
Ejercicios 8.5

1. Calcule el área fuera de $r = \frac{1}{2}$ y dentro de la rosa $r = \cos 2\theta$.
2. Encuentre el área encerrada por la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.
3. Encuentre el área encerrada por la lemniscata $r^2 = 8\cos(2\theta)$.
4. Encuentre el área encerrada por $r = 1 + 3\cos\theta$, pero fuera del lazo interior.
5. Encuentre el área de la elipse $r = \frac{6}{2-\cos\theta}$.
6. Encuentre el área de intersección entre las curvas $r = 3\operatorname{sen}\theta$ y $r = 3\cos\theta$.
7. Encuentre el área dentro de $r = 2\cos\theta$ y fuera de $r = 2\cos(3\theta)$.
8. Encuentre el área comprendida entre $r = 2\cos(2\theta)$ y $r = 2\operatorname{sen}(2\theta)$.
9. Encuentre la longitud de la espiral $r = \sqrt{\theta}$ cuando $\theta \in [0, 2\pi]$.
10. Encuentre la longitud de la espiral $r = \theta$ cuando $\theta \in [0, 2\pi]$.
11. Encuentre la longitud de la lemniscata $r^2 = 8\cos(2\theta)$.
12. Encuentre la longitud de la curva $r = 3\operatorname{sen}(4\theta)$ cuando $\theta \in [0, 2\pi]$.

Capítulo

nueve

Sucesiones y Series



Dedicamos este capítulo al estudio de las sucesiones y series de números reales, temas que son de gran importancia en cursos de análisis matemático, ecuaciones diferenciales, variable compleja y análisis funcional, por mencionar algunos. Su importancia radica en que es posible aproximar cierto tipo de funciones usando series, lo que hace que los cálculos sean manejables y muy acertados, a pesar de ser aproximaciones. Sus aplicaciones incluyen programación de calculadoras, integración aproximada y series de Taylor, entre otras. En telecomunicaciones y procesamiento de señales son muy usadas las series de Fourier, y en estadística existe una rama conocida como series de tiempo, por mencionar algunas.

1. Sucesiones

Una **sucesión** real es una función del conjunto de números naturales en los reales

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto f(i) = a_i, \end{aligned}$$

pero es usual escribir el rango de la función en forma ordenada, es decir, que si $f = \{(0, f(0)), (1, f(1)), \ldots, (i, f(i)), \ldots\}$, presentamos la sucesión en la forma $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, o de manera breve $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$; en ocasiones la denotamos por $\{a_n\}_n$ y se entiende que n es un natural, aunque a veces es mejor indicar si empieza en 0 o en 1.

Ejemplo 9.1.

(a) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ es la sucesión de los primeros enteros positivos, en este caso, el término n-ésimo es $a_n = n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) La sucesión de los primeros cuadrados (de números enteros) es $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$, en este caso, $a_n = n^2$ para $n \geq 1$.

(c) Otras sucesiones tienen nombre de un matemático famoso, debido a la persona que trabajó con ellas por primera vez, por ejemplo, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ se conoce como la sucesión de Fibonacci y está dada por la regla

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad n > 1.$$

Note que para conocer el término a_{187} es necesario conocer a_{186} y a_{185}, lo que hace necesario escribir todos los términos de la sucesión. A este tipo de sucesiones se les conoce como *recurrentes,* en el sentido en que no es posible escribir una fórmula para a_n que no implique conocer uno o varios de los elementos anteriores.

(d) Los números de Catalan[1] son $1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots$ están dados por la fórmula

$$c_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \qquad n \geq 1.$$

Esta sucesión es de interés en combinatoria, pues aparece en diversos problemas de conteo, uno de ellos es el siguiente: $a_0 := 1$ y a_n se define como la cantidad de formas en que se puede dividir un $(n+3)$-ágono regular convexo en triángulos trazando diagonales que no se corten.

(e) Una sucesión que aparece con frecuencia en los cursos de cálculo es $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$, que puede escribirse como $\{a_n\}_{n\geq 0}$, donde

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad n = 4k, \\ 0, & \text{si} \quad n = 4k+1 \text{ ó } n = 4k+3, \\ -1, & \text{si} \quad n = 4k+2. \end{cases}$$

Una forma más compacta de escribir el término n-ésimo puede ser $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, para $n \geq 0$, o si se prefiere $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, pero esta vez $n \geq 1$.

(f) Otra sucesión que aparece con frecuencia es $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$, que se escribe

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad n \geq 1.$$

(g) La sucesión $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$, puede escribirse como $a_n = (-1)^n$ para $n \geq 0$. Trate de escribirla de dos maneras diferentes.

(h) Por último, podemos considerar la sucesión de números $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1.414213,\ 1.4142132, \ldots$, donde el i-ésimo término es el número racional cuyas primeras i cifras decimales coinciden con las correspondientes de la expansión decimal de $\sqrt{2}$.

Definición 9.2. *Se dice que la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge hacia** L *y se escribe*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para todo $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_n - L| < \epsilon \ \textit{ siempre que } n > N,$$

el número L *se conoce como el* **límite de la sucesión.** *Si la sucesión no converge, se dice que* **diverge.** *Si para todo* $M \in \mathbb{R}$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$M < a_n \qquad \textit{siempre que } n > N,$$

[1] Eugène Carles Catalan (1814–1894).

diremos que la sucesión **diverge a** $+\infty$*, es decir, que crece tanto como se quiera. Análogamente, se puede determinar que* **diverge a** $-\infty$ *(escríbalo como ejercicio). Si la sucesión diverge pero no lo hace ni a* $+\infty$ *ni a* $-\infty$*, decimos que la sucesión es* **oscilante.**

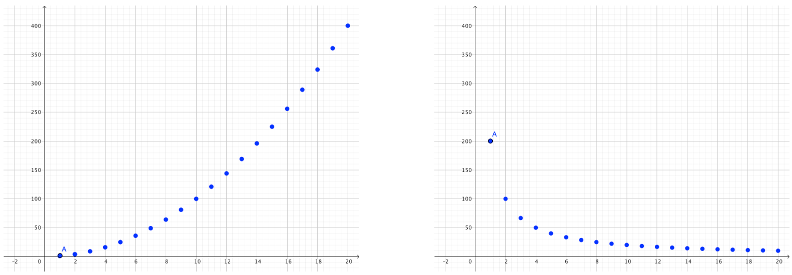


Figura 9.1: en la gráfica de la izquierda tenemos la sucesión $a_n = n^2$, con n variando desde 1 hasta 20, esto es, los primeros 20 cuadrados de números naturales. En la de la derecha, la sucesión $b_n = 200/n$ para $n = 1$ hasta $n = 20$.

En la figura 9.1 la sucesión de la izquierda diverge a $+\infty$, mientras que la de la derecha parece convergente, aunque para afirmarlo necesitamos calcular el límite, pero allí solo se han dibujado los 20 primeros términos.

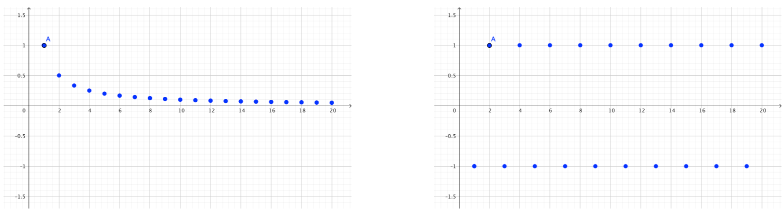


Figura 9.2: en la gráfica de la izquierda tenemos la sucesión $a_n = 1/n$, con n variando desde 1 hasta 20, *parece* que converge a cero, sin embargo, lo probaremos en el siguiente ejemplo. En la derecha, la sucesión $b_n = (-1)^n$ para $n = 1$ hasta $n = 20$, la cual diverge de forma oscilante.

A continuación mostramos cómo comprobar que una sucesión converge utilizando la definición.

Ejemplo 9.3. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ converge a cero, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana de los números reales, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \cdot \epsilon > 1$. Entonces, $0 < \frac{1}{N} < \epsilon$, es decir, para $n > N$,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Ejemplo 9.4. La sucesión constante $\{k\}_n$, donde todos los términos son iguales a k, converge a k. Ya que para cualquier $\epsilon > 0$ todos los términos de la sucesión satisfacen $|a_n - k| < \epsilon$.

Se puede inducir una sucesión de números reales a partir de una función de una variable real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ restringiendo su dominio a los naturales, es decir, $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ donde $a_i = f(i)$. Entonces, que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $R \in \mathbb{R}$ tal que $x > R$ implica que $|f(x) - L| < \epsilon$; para dicho R, existe un entero positivo $N > R$ y, en particular, para cada entero positivo $n > N$, se tiene que $|f(n) - L| < \epsilon$. Entonces, concluimos lo siguiente.

Proposición 9.5. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, donde $a_n = f(n)$ para $n \in \mathbb{N}$.*

El recíproco no se cumple. ¿Por qué? ¿Puede dar un ejemplo?

Ejemplo 9.6. Considere la sucesión $\left\{\frac{\ln(n)}{n}\right\}_{n\geq 1}$. Para estudiar su comportamiento, analizamos la función de valor real $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ para $x \geq 1$. Aplicando la regla de L'Hôpital a f, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Concluimos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Esto quiere decir que la sucesión converge a cero.

Determinar la convergencia utilizando la definición puede, en ocasiones, ser bastante engorroso, por eso listamos las siguientes propiedades que permiten calcular límites de sucesiones usando sucesiones convergentes conocidas.

Proposición 9.7. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = S$ (esto es, los dos límites existen y son finitos), entonces*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = L + S$, esto es, si dos sucesiones son convergentes, su suma también lo será.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = cL$, *esto es, si* $\{a_n\}_n$ *converge, entonces* $\{c a_n\}_n$ *también converge, cualquiera sea* c. *¿Incluso* $c = 0$*?*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = L \cdot S$, *en otras palabras, el producto de dos sucesiones convergentes resulta convergente.*

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{S}$ *si* $b_n \neq 0$ *para* $n > N$ *y* $S \neq 0$. *Si dos sucesiones son convergentes y después de cierto índice todos los términos del denominador son no-nulos, entonces el cociente también converge (obviamente el límite de la de abajo debe ser no-nulo).*

Demostración. (i). Dado $\epsilon > 0$, construimos otro número positivo $\epsilon' := \frac{\epsilon}{2}$ para el cual existen N_1 y N_2 tales que si $n > N_1$ y $m > N_2$, entonces

$$|a_n - L| < \epsilon' \quad \text{y} \quad |b_m - S| < \epsilon'.$$

Luego, si $n > N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que $|a_n + b_n - (L + S)| < 2\epsilon' = \epsilon$. Las otras demostraciones quedan como ejercicio para el lector. ☑

Ejemplo 9.8. La sucesión $\{\frac{n}{n+1}\}$ converge a 1, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Los primeros términos de la sucesión son $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$ Podemos escribir $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, y usando el ejemplo 9.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

Ejemplo 9.9. Dado un número real positivo a, definimos la sucesión $a_n = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < a < 1, \\ 1, & \text{si } a = 1, \\ \text{diverge a } +\infty, & \text{si } a > 1. \end{cases}$$

Consideremos la función de valor real $f(x) = a^x$. Sabemos que $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ y, según el comportamiento de la función exponencial, sabemos que si $0 < a < 1$, entonces $\ln a < 0$, y por lo tanto obtenemos una exponencial negativa, que también va para cero cuando $x \to \infty$. Si $a = 1$, entonces $\ln a = 0$, y nos queda la función constante $a^x = e^0 = 1$. El último caso a considerar es cuando $a > 1$. Como $\ln a > 0$ y la función exponencial $e^{x \ln a}$ diverge a infinito, entonces la sucesión a^n diverge.

Ejemplo 9.10. Estudiemos la sucesión $\{p^{1/n}\} = \{\sqrt[n]{p}\}$, donde $p \in \mathbb{R}^+$ es fijo. Consideremos tres casos:

- Si $p = 1$, es claro que la sucesión es constante $1, 1, 1, 1 \ldots$, y por lo tanto converge a 1.
- Suponga $p > 1$. Entonces en lugar de escribir $\lim_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}}$ hacemos el cambio de variable $z = \frac{1}{n}$ y, como $n \to +\infty$, tenemos que z toma solo valores positivos y el límite nos queda $\lim_{z\to 0} p^z = 1$. Para verificar esta igualdad, basta ver que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - 0| < \delta$, entonces $|p^z - 1| < \epsilon$. Como estamos en el caso $p > 1$, tenemos que $\ln p > 0$, luego, para $\epsilon > 0$, escogemos $\delta = \frac{\ln(\epsilon+1)}{\ln p} > 0$, y si suponemos que $0 < z < \delta$, tenemos $z \ln p < \delta \ln p$. Ahora bien, como la exponencial es creciente, $e^{z\ln p} < e^{\delta \ln p}$ y
$$p^z - 1 = e^{z\ln p} - 1 < e^{\delta\ln p} - 1 = e^{\ln p^{\delta}} - 1 = e^{\ln(\epsilon+1)} - 1 = \epsilon + 1 - 1 = \epsilon.$$
- En el caso $p < 1$, tenemos que $\frac{1}{p} > 1$ y, por el ítem anterior, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{p}} = 1$, lo que implica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

En cualquier caso, la conclusión es que $\sqrt[n]{p} \to 1$ cuando $n \to \infty$ y p es un número real positivo fijo.

Ejercicio 9.11. *Note que en el ejemplo previo p es fijo, ¿qué ocurre con* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$*? Sugerencia: recuerde que* $a^b = e^{b\ln(a)}$ *(*$a > 0$*) y use el límite del ejemplo 9.6.*

Ejemplo 9.12. Se pueden usar técnicas especiales para conjeturar ciertos límites, por ejemplo, dada la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ldots$, se puede escribir de forma recurrente como $\boxed{a_0 = \sqrt{2}}$ y $\boxed{a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \text{ para } n \geq 1}$. De existir el límite $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, para *n suficientemente grande*, a_n será tan próximo a L como se quiera, lo cual escribimos como $a_n \approx L \approx a_{n-1}$ y
$$\begin{aligned}
\implies &\qquad L \approx \sqrt{2L}\\
\implies &\qquad L^2 \approx 2L\\
\implies &\qquad L^2 - 2L \approx 0\\
\implies &\qquad L(L-2) \approx 0\\
\implies &\qquad L = 0 \text{ ó } L = 2.
\end{aligned}$$

En este caso, vemos que $L = 0$ no tiene sentido, ya que todos los términos son mayores que $\sqrt{2}$, así que concluimos que de existir el límite debe ser $L = 2$.

También tenemos una versión del teorema del sándwich para sucesiones.

Teorema 9.13. *Sean $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ y $\{c_n\}_n$ tres sucesiones de números reales tales que a partir de algún índice N se tiene que $a_n \leq b_n \leq c_n$. Luego, si $a_n \to L$ y $c_n \to L$ cuando $n \to \infty$, entonces forzosamente se tiene que $b_n \to L$ cuando $n \to \infty$.*

La prueba se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 9.14. Considere la sucesión con término $b_n = \frac{n^5 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}{e^{2n}}$. Si tratamos de hallar el límite directamente, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty \cdot 0}{\infty}$, así que mejor acotamos la expresión con otras cuyos límites sean más fáciles de calcular. Más precisamente, como $-1 \leq \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n}) \leq 1$, entonces $\frac{-n^5}{e^{2n}} \leq \frac{n^5 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}{e^{2n}} \leq \frac{n^5}{e^{2n}}$. Aplicando el teorema del sándwich, concluimos que la sucesión $\{b_n\}_n$ converge a cero.

La siguiente definición caracteriza las sucesiones cuyos términos a partir de cierto punto están tan cerca unos de otros como se desee.

Definición 9.15. *Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una* **sucesión de Cauchy** *si dado $\epsilon > 0$ existe N entero tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$ siempre que $n, m > N$.*

Observe que si la sucesión converge, entonces es de Cauchy. Tome cualquier $\epsilon > 0$, para $\epsilon' := \epsilon/2$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ se tiene $-\epsilon' < a_n - L < \epsilon'$. Entonces, haciendo la diferencia para dos inecuaciones que involucran $m, n > N$, se tiene que $-\epsilon < a_m - a_n < \epsilon$. El recíproco también se tiene en el caso de los números reales con la métrica dada por $d(x, y) := |x - y|$. Aunque las sucesiones de Cauchy son muy importantes en análisis matemático, no haremos una exposición detallada del tema. Esta definición resulta más interesante cuando se trabaja en otro tipo de espacios métricos, que se encuentran fuera del alcance de este texto. Cuando en un espacio métrico se tiene la equivalencia entre sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy, se dice que es completo[2].

Ejemplo 9.16. La sucesión de números reales $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy. En efecto, dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar N que satisfaga la definición. Supongamos $m > n > 1$, entonces

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{2}{n}.$$

[2]Los números reales con la métrica descrita son un espacio métrico completo.

Basta escoger N tal que $N > \frac{2}{\epsilon}$ para obtener

$$|a_n - a_m| < \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \epsilon,$$

como N debe ser entero, precisamos la elección de N como $N = \lfloor \frac{2}{\epsilon} \rfloor + 1$.

Definición 9.17. *Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es*

- **creciente** *si* $a_n \leq a_{n+1}$,
- **estrictamente creciente** *si* $a_n < a_{n+1}$,
- **decreciente** *si* $a_n \geq a_{n+1}$,
- **estrictamente decreciente** *si* $a_n > a_{n+1}$ *y*
- **monótona** *si es creciente o decreciente.*

Note que en cada caso basta verificar el comportamiento de $a_{n+1} - a_n$.

Ejemplo 9.18. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq n}$ es estrictamente decreciente, pues $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$. Por su parte, la sucesión $\{\frac{n}{n+1}\}_n$ es estrictamente creciente, en este caso $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.

En el caso en que la sucesión $\{a_n\}_n$ está determinada por una función real f creciente o decreciente a partir de un punto, se pueden utilizar las herramientas del cálculo diferencial para estudiar el comportamiento de la sucesión. Por ejemplo, consideremos la sucesión de términos $a_n = \frac{n-2}{n-3}$ para $n \geq 4$, la cual está determinada por la función real $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Como la primera derivada $f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2} < 0$, para todo $x \neq 3$, podemos concluir que la sucesión es decreciente.

A continuación veremos algunas situaciones en las que podemos determinar la convergencia de una sucesión y que, en ocasiones, estas no involucran el límite (de existir).

Teorema 9.19. *Si una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces el límite es único.*

Demostración. Supongamos que la sucesión converge a dos puntos L y M. Dado $\epsilon > 0$, podemos aplicar la definición de convergencia para $\epsilon/2$, es decir, es posible encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \epsilon/2, \quad n \geq N_0.$$

Por la convergencia a M, dado el mismo $\epsilon/2$, es posible encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - M| < \epsilon/2, \quad n \geq N_1.$$

Tomando $N = \text{máx}\{N_0, N_1\}$, tenemos que para $n \geq N$

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

lo que significa que $L = M$. ☑

Definición 9.20. *Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está* **acotada inferiormente (superiormente)** *si el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado inferiormente (superiormente), esto es, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M < a_n$ (resp. $a_n < M$) para todo n. La sucesión es* **acotada** *si existe $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para todo n. El supremo, ínfimo, máximo y mínimo de una sucesión se define a partir del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Ejemplo 9.21. La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1. El ínfimo es 0, pero no tiene mínimo. El máximo coincide con el supremo y es igual a 1.

Ejemplo 9.22. Consideremos la sucesión definida de manera recurrente por $s_1 = \sqrt{5}$ y $s_{n+1} = \sqrt{5 + s_n}$ para $n > 1$. Para ver que está acotada superiormente, probaremos que $s_n \leq 5$ usando inducción sobre n. Es claro que $s_1 \leq 5$. Para el paso inductivo, supongamos $s_n \leq 5$, entonces $s_n + 5 \leq 10$, lo que implica $s_{n+1} = \sqrt{s_n + 5} \leq \sqrt{10} < 5$. Como la sucesión es positiva, también es acotada. ¿Es posible encontrar una cota superior menor que 5? Para probar que es creciente, observe que $5 < 5 + \sqrt{5}$, lo cual implica que $s_1 < \sqrt{5 + s_1} = s_2$. Razonando por inducción sobre n, suponga que $s_{k-1} < s_k$ para $k \leq n$, entonces $s_{n+1} - s_n = \sqrt{5 + s_n} - \sqrt{5 + s_{n-1}} > 0$.

Conjeture el valor del límite de la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como se hizo en el ejemplo 9.12.

Proposición 9.23. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L. Entonces, para $\epsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$

$$|a_n - L| < 1,$$

dicho de otra manera

$$\begin{aligned} -1 <& a_n - L < 1 \\ L - 1 <& a_n < 1 + L, \end{aligned}$$

lo que muestra que la sucesión está acotada. Como esta desigualdad se cumple para $n \geq N$, el lector puede pensar que los términos que están antes de a_N no están entre $L - 1$ y $1 + L$, lo cual puede ser cierto. De cualquier manera, como es un número finito de términos siempre se puede escoger el mínimo y el máximo entre ellos y verificar que la sucesión sigue estando acotada. ☑

Proposición 9.24. *Una sucesión monótona creciente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y solo si está acotada superiormente.*

Demostración. ($\Longleftarrow$) Supongamos que la sucesión es creciente y que tiene como supremo a A, entonces, dado $\epsilon > 0$, es posible encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A - \epsilon < a_{n_0}$ (por la definición de supremo). Pero si $n \geq n_0$, entonces $a_n \geq a_{n_0}$ (por ser creciente monótona). Luego,

$$|A - a_n| = A - a_n \leq A - a_{n_0} < \epsilon,$$

lo que quiere decir que la sucesión converge a su supremo. ☑

Proposición 9.25. *Una sucesión monótona decreciente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y solo si está acotada inferiormente.*

Podemos deducir inmediatamente que si una sucesión es monótona y no está acotada, entonces diverge a infinito si es creciente y a menos infinito si es decreciente.

Ejemplo 9.26. Consideremos la sucesión definida de manera recurrente como $a_1 = \sqrt{5}$ y $a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$. Es fácil verificar que la sucesión está acotada superiormente por 5, ¡hágalo como ejercicio! Probamos que es creciente por inducción sobre n. Como $5 < 5\sqrt{5}$, entonces $a_1 = \sqrt{5} < \sqrt{5\sqrt{5}} = a_2$. Suponga $a_{n-1} < a_n$, luego $a_{n+1} - a_n = \sqrt{5a_n} - \sqrt{5a_{n-1}} > 0$. Esto muestra que la sucesión es estrictamente creciente, y, por la proposición 9.24 concluimos que converge. Para hallar el límite, procedemos como en el ejemplo 9.12 y concluimos que converge a $L = 5$. Observe que en el ejemplo 9.12 asumimos que el límite existía, mientras que en este caso ya probamos que de hecho el límite existe.

Ejemplo 9.27 (La sucesión e). Consideremos la sucesión $\{b_n\}_n$, donde $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Esta sucesión es la restricción de la función real $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Para calcular el límite cuando $x \to \infty$, expresamos

$$f(x) = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Por la continuidad de la función exponencial, el problema se reduce a calcular

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \text{aplique regla de L'Hôpital}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1,\end{aligned}$$

es decir que $b_n \to e^1 = e$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 9.28. *Utilizando una técnica similar a la de el ejemplo anterior, muestre que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y \quad \textit{para cualquier } y.$$

Definición 9.29. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de números naturales. A la sucesión $\{a_{n_k}\}_k$ se le conoce como* **subsucesión** *de $\{a_n\}_n$.*

Por ejemplo, la sucesión $\{a_{2k}\}_k$ es una subsucesión de $\{a_n\}_n$, en la cual tomamos solo los términos con índice par.

Otra forma de determinar una subsucesión es elegir un subconjunto M (ordenado) de los números naturales y tomar los términos de la sucesión cuyos índices están en M. Por ejemplo, si la sucesión es $\{\frac{1}{n}\}$ y consideramos $M = \{k^2 | k \in \mathbb{N}\}$, entonces los primeros términos de la subsucesión son $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots$.

Definición 9.30. *Una* **reordenación** *de una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es otra sucesión que se obtiene al permutar todos sus términos, más precisamente, si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una biyección, entonces $\{b_n\}_{n\geq 0}$ definida por $b_n = a_{\sigma(n)}$ es un reordenamiento de $\{a_n\}$.*

Nota 9.31. *Observe que una sucesión re-ordenada de una sucesión convergente es también convergente.*

Los resultados presentados nos permitirán hacer un estudio muy detallado de las series, en el cual se considerará la sucesión de sumas parciales. Por ahora, es interesante saber si una sucesión converge o no, si lo hace, hallar su límite, lo cual muchas veces se traduce en el ejercicio de hallar un límite al infinito.

Ejercicios 9.1

1. Encuentre una fórmula para el término n-ésimo de cada una de las siguientes sucesiones y determine dónde empieza.

   a) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$
   b) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
   c) $1, \frac{4}{3}, 2, \frac{16}{5}, \frac{16}{3}, \frac{64}{7}, \ldots$
   d) $1, 4, 7, 10, 13, 16, \ldots$
   e) $3, 9, 19, 33, 51, 73, 99, \ldots$
   f) $1, 7, 17, 31, 49, 71, 97, \ldots$
   g) $3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, \ldots$
   h) $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \frac{17}{5}, \frac{33}{6}, \frac{65}{7}, \frac{129}{8}, \ldots$
   i) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots$
   j) $6, \frac{7}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4}, 2, \frac{11}{6}, \frac{12}{7}, \ldots$
   k) $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{147}{60}, \ldots$

2. Determine si las siguientes sucesiones son monótonas, crecientes o decrecientes.

   a) $\{\frac{2n}{n+1}\}_n$.
   b) $\{\frac{5n}{2n-1}\}_n$.
   c) $\{\frac{1}{n^3}\}_n$.
   d) $\{\frac{(-1)^n}{n}\}_n$.

3. Determine si las siguientes sucesiones $\{a_n\}_n$ son crecientes o decrecientes, si están o no acotadas y, por último, si convergen o divergen. En caso de que sean convergentes, si es posible, encuentre el límite. En todos los casos $n \geq 1$, a menos que se diga lo contrario.

   a) $a_n = \frac{1}{n+1}$.
   b) $a_n = \frac{2n+3}{n-1}$, $n \geq 2$.
   c) $a_n = (-1)^n 2^n$.
   d) $a_n = \frac{n}{n+1}$.
   e) $a_n = e^{2n}$.
   f) $a_n = e^{-n}$.
   g) $a_n = \ln \frac{1}{n}$.
   h) $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2n-1}$.
   i) $a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$.
   j) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi)$.
   k) $a_n = \cos(n\pi)$.
   l) $a_n = \frac{2n^2+3n+5}{3n^2+4}$.
   m) $a_n = \frac{(3n+1)^3-(3n-1)^3}{9n^2+1}$.
   n) $a_n = \frac{1}{2^n}$.
   ñ) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 4, 5, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, 8, 9, \frac{1}{10}, \ldots$.
   o) $a_n = (-3)^n$.

4. Pruebe que la sucesión definida por $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ es creciente y acotada.

5. Muestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para cualquier x (fijo).

6. Encuentre una cota para la sucesión definida por $a_1 = \sqrt{5}$ y $a_n = \sqrt{5a_{n-1}}$ para $n \geq 2$.

7. Dada una función real $y = f(x)$, pruebe que si $f(x)$ diverge a infinito, entonces la sucesión definida por $a_n = f(n)$ para $n \in \mathbb{N}$ diverge a infinito.

8. Presente un ejemplo de una función real $y = f(x)$ divergente para la cual la sucesión definida por $a_n = f(n)$ sea convergente.

9. Realice la prueba de los numerales *(ii), (iii)* y *(iv)* de la proposición 7.

10. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que las subsucesiones de términos pares e impares convergen al mismo valor, $a_{2k} \to L$ y $a_{2k-1} \to L$ cuando $k \to \infty$. Pruebe que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

11. Pruebe el teorema 9.13.

12. Complete la prueba de la proposición 9.24.

13. Pruebe la proposición 9.25.

14. Pruebe la afirmación dada en la nota 9.31.

15. Utilice la desigualdad de Bernoulli

$$(1+h)^n > 1+hn, \qquad h > -1, \quad n > 1$$

y el teorema del sándwich para probar que la sucesión $\{a^n\}_{n\geq 1}$, donde $|a| < 1$, converge a cero.

16. Utilice la desigualdad de Bernoulli para probar que la sucesión $\{\sqrt[n]{a}\}_{n\geq 1}$ converge a 1 para cualquier número real positivo a.

17. Suponga que la sucesión $\{a_n\}_n$ converge a L, donde $|L| < 1$. Muestre que $\{a_n^n\}$ converge a cero.

18. Suponga que la sucesión $\{a_n\}_n$ converge a L, donde $|L| > 0$. Muestre que $\{\sqrt[n]{a_n}\} \to 1$.

19. Determine si las siguientes sucesiones convergen o divergen. De ser posible, encuentre el límite.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n^3}\right)^n$.

b) $a_n = \frac{1}{5^n}$.

c) $a_n = \left(\frac{4n^2+2n+5}{3n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

d) $a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

e) $a_n = \left(\frac{3n+1}{8n+5}\right)^n$.

f) $a_n = \sqrt[n]{2019}$.

g) $a_n = \left(\frac{2n^3+5n^2-2n+1}{5n^3-2n+1}\right)^n$.

h) $a_n = \left(5 - \frac{1}{n^5}\right)^n$.

i) $a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$.

j) $a_n = \sqrt[n]{5 - \frac{1}{n^5}}$.

k) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{36}}$.

l) $a_n = \left(\frac{4n^2+2n+1}{n+3}\right)^n$.

m) $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$.

n) $a_n = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

ñ) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

o) $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n$.

20. La sucesión $\{a_n\}_n$ se define de manera recurrente como $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}$. Pruebe que la sucesión es convergente y encuentre su límite.

21. Dada la sucesión $\{a_n\}_n$, escriba la subsucesión $\{a_{n_k}\}$, donde $n_k \in M$.

    a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ y M es el conjunto de números impares.

    b) $a_n = \frac{1}{n}$ y M es el conjunto de potencias positivas de 2.

    c) $a_n = \frac{n+2}{n-2}$ y $M = \{k^2 + 1 : k \in \mathbb{N}\}$.

22. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera, realice una demostración; en el caso en que sea falsa, exhiba un contraejemplo.

    a) Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión que converge a $L \neq 0$. Entonces, la sucesión $\{a_n^r\}_n$ converge a L^r.

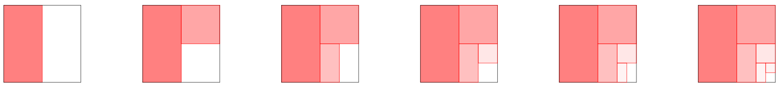
    b) La suma (término a término) de dos sucesiones divergentes es divergente.

    c) El producto (término a término) de una sucesión divergente por una sucesión convergente es divergente.

    d) Si $\{a_n\}_n$ es una sucesión divergente de términos no-nulos, entonces $\{1/a_n\}_n$ converge a cero.

2. Series

Suponga que se tiene un cuadrado de lado 1 y *alguien* quiere pintarlo de color, pero por alguna razón desconocida no lo hace en un solo intento, sino que empieza coloreando la mitad izquierda, como se ve en la primera figura, esto es, coloreó $\frac{1}{2}$ del área, o simplemente $\frac{1}{2}$. Le quedó un rectángulo blanco a la derecha, también de área $\frac{1}{2}$, al día siguiente decidió ponerle color a la mitad superior, esto es, coloreó $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Para el tercer día coloreó la mitad de lo que quedaba, esto es, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$, y así sucesivamente. Es decir que cada día colorea la mitad de lo que está en blanco. ¿Podrá este personaje -un tanto perezoso- pintar el cuadrado completo? ¿En cuántos días? ¿Deberá dedicar el resto de su vida a esta simple labor?



Es claro que el área del cuadrado es 1. El procedimiento anterior nos permite observar que se puede obtener como una suma infinita de la forma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Si sumamos los primeros n términos, podemos usar la fórmula (1.4) de la sección 1, para la *suma geométrica*, de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n .
\end{aligned}$$

¿Qué significa esto?¿Cómo responde esto nuestra pregunta?¿Cómo utilizar esta información para calcular la suma infinita?¿En el día 20 qué parte del cuadrado ha coloreado?¿En cuántos días nuestro personaje terminará de pintar el cuadrado? Formalicemos el concepto descrito en este problema para dar respuesta a estos interrogantes.

Definición 9.32. *Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$, definimos la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 0}$, donde $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Decimos que $\{S_n\}_n$ es la* **serie de los términos** $\{a_n\}_n$. *Usualmente, se denota en la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots . \tag{9.1}$$

Nota 9.33. *Una serie es una sucesión y, aunque parece una suma infinita, su comportamiento depende de sumas finitas (parciales). Escribiremos simplemente $\sum_i a_i$ cuando no sea importante el índice inicial de la serie o cuando se pueda deducir del contexto.*

Ejemplo 9.34. Los siguientes son ejemplos de series

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} C = C + C + C + \cdots$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \cdots$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$

La convergencia de las series se define en términos de la convergencia de sucesiones y se puede interpretar como si una suma de un número infinito de términos diera como resultado un valor que puede o no ser finito. En el primer caso decimos que la serie converge; en el segundo, que diverge. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 9.35. *La* **serie** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge** *si la sucesión de sumas parciales* $\{S_n\}_n$ *lo hace. Además, la suma de la serie se define como el límite de la sucesión* $\{S_n\}_n$*, es decir,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Con respecto al ejemplo 9.34. En (a), tenemos la serie de términos constantes C, cuya suma parcial es $S_n = nC$. Entonces, cuando $n \to \infty$, la sucesión $\{S_n\}_n$ converge si $C = 0$ y diverge en otro caso. Es decir, si sumamos infinitos ceros, el resultado es cero, mientras que si sumamos cualquier otra constante (por pequeña que sea) infinitas veces, su serie es divergente. En (b), cada suma parcial es $S_n = n\frac{k(k+1)}{2}$, vea (1.2) en la sección 1, y como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ diverge, decimos que $\sum\limits_{k\geq 1} k$ diverge. En (c), cada suma parcial es $S_n = n\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, vea (1.3) de la sección 1, nuevamente $\{S_n\}_n$ diverge a infinito. En el ejemplo (d), no es tan claro que la serie diverja (tampoco es claro que sea finita)[3], pero cada vez estamos sumando un término más pequeño que el anterior, lo que al infinito se torna cero. ¿Qué podemos decir

[3]**Aquiles y la tortuga** es la más conocida de las paradojas de Zenón de Elea. El filósofo argumentaba que en una hipotética carrera entre Aquiles (el guerrero que mató a Héctor) y una tortuga si esta tenía una ventaja inicial, el humano siempre perdería. Zenón *demostraba* que a pesar de que el guerrero corre mucho más rápido que la tortuga nunca podría alcanzarla. Imaginemos que la distancia a cubrir son 100 metros y que la tortuga tiene cincuenta metros de ventaja. Al darse la orden de salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia (cincuenta metros) que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, mucho más lentamente, diez o veinte centí-

de estas sumas?¿Si cada vez sumamos algo *más pequeño*, la serie converge? ¿Qué puede decir del ejemplo 9.34 (e)?

Ejemplo 9.36. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ diverge, pues es evidente que la sucesión de sumas parciales es $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots,$ que diverge de forma oscilante.

Ejemplo 9.37. Una **serie geométrica** es aquella que puede escribirse como $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, donde r es un número real que se conoce como la **razón de la serie geométrica**.

A la derecha, vemos algunas sumas parciales. Si multiplicamos por r la última igualdad, se tiene que

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1},$$

y si hacemos la diferencia entre rS_n y S_n, obtenemos que

$$\boxed{\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 1 + r \\ S_2 &= 1 + r + r^2 \\ &\vdots \\ S_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n. \end{aligned}}$$

$$(r-1)S_n = r^{n+1} - 1, \qquad \text{de donde} \qquad S_n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

Con esta expresión, se puede calcular el límite de las sumas parciales. Verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ diverge a infinito, para $|r| \geq 1$, y converge a $\frac{1}{1-r}$, para $|r| < 1$. En resumen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \text{diverge si } |r| \geq 1, \\ \\ \text{converge a } \frac{1}{1-r} \text{ si } |r| < 1. \end{cases} \tag{9.2}$$

---

metros. Lejos de desanimarse, el guerrero sigue corriendo. Pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco más. Zenón sostiene que esta situación se repite indefinidamente y que Aquiles jamás logrará alcanzar a la tortuga, que finalmente ganará la carrera. Es bastante obvio que esto no es así, sin embargo, no es tan fácil encontrar dónde está el fallo, y hubo que esperar hasta mediados del siglo XVII para que el matemático escocés James Gregory demostrara matemáticamente que una suma de infinitos términos puede tener un resultado finito. Los tiempos en los que Aquiles recorre la distancia que lo separa del punto anterior en el que se encontraba la tortuga son infinitos, pero cada vez más y más pequeños. La suma de todos estos tiempos, infinitos en número, da como resultado un lapso de tiempo finito, que es el momento en el que Aquiles alcanzará a la tortuga. Tomado de http://www.neoteo.com/las-paradojas-de-zenon/

Ejemplo 9.38. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ es una geométrica, solo que el primer término no es 1, sino $\frac{2}{5}$, en otras palabras, el primer índice es $n = 1$ y no $n = 0$. Para usar la fórmula (9.2), se hace necesario un cambio de variable. Sea $k = n - 1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k+1} = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{5}}\right) = \frac{2}{3}.$$

Otra forma de escribir esta serie es $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1$, pues el término a_0 es 1. Entonces, aplicamos (9.2) para obtener $\frac{1}{1-\frac{2}{5}} - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$.

Nota 9.39. *Lo realizado en el ejemplo anterior se puede generalizar así:* $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - 1 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$, *siempre que* $|r| < 1$.

El problema de colorear el cuadrado corresponde a una serie geométrica, se puede expresar el área de color como la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$, así que podemos escribir la suma parcial S_n como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

y si calculamos el límite, obtenemos el valor al cual converge la serie, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

Otra forma de conseguir este resultado es usar directamente la fórmula de la serie geométrica (9.2), como se muestra a continuación

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

donde hemos sacado un factor $\frac{1}{2}$ con el fin de que la serie empiece en $n = 0$, y además $r = \frac{1}{2}$. Esto nos dice que la serie es convergente, en otras palabras si se puede terminar de colorear el cuadrado, ¡pero en *infinitos* días!

Ejemplo 9.40. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, donde a es cualquier número real, converge para $|r| < 1$ y es igual a

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Ejercicio 9.41. *¿A qué valor converge la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n}$*?*

La expresión compacta para una serie geométrica nos permite realizar manipulaciones algebraicas. Podemos sustituir la razón r en la fórmula (9.2) por una variable, digamos x, que tome valores en $(-1, 1)$, de la siguiente forma

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \text{para } |x| < 1. \tag{9.3}$$

La expresión tiene aspecto de igualdad entre funciones en el dominio $(-1, 1)$. Podemos hacer el cambio de variable $x = 2y$, tomando a $y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, y obtenemos otra igualdad

$$\frac{1}{1-2y} = \sum_{n=0}^{\infty} (2y)^n = 1 + 2y + 4y^2 + 8y^3 + \cdots \qquad \text{para } |y| < \frac{1}{2}. \tag{9.4}$$

También podemos hacer el cambio $x = -z^2$ con lo cual el intervalo no cambia $z \in (-1, 1)$ y llegamos a la serie

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \qquad \text{para } |z| < 1. \tag{9.5}$$

Nota 9.42. *Más precisamente, la serie geométrica como aparece en* (9.3) *es un caso particular de una serie de funciones. En este caso, se considera la sucesión* $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$*, donde* $f_n(x) = x^n$*, y la serie* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

Ejercicio 9.43. *Utilice la fórmula de la serie geométrica para mostrar las siguientes igualdades en el intervalo dado.*

1. $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$ *para* $|x| < 1$.
2. $\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \cdots$ *para* $|x| < 1$.
3. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ *para* $|x| < 1$.
4. $\frac{1}{1-4x^2} = 1 + 4x^2 + 16x^4 + \cdots + 4^n x^{2n} + \cdots$ *para* $|x| < \frac{1}{2}$.

Si hizo correctamente el inciso 3, notó que la expresión $\frac{1}{1+x}$ puede verse como $\frac{1}{1-(-x)}$, esto es, esta fracción representa una serie geométrica donde la razón es $-x$ y converge siempre que $|-x| < 1$.

Recuerde que en el primer capítulo definimos una suma telescópica como aquella donde se cancelaban todos los términos excepto el primero y el último. Ahora podemos hablar de una **serie telescópica**, en la que cada suma parcial es telescópica. Estudiemos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right). \tag{9.6}$$

Consideremos las sumas parciales

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1-\frac{1}{2}\\
S_2 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\
S_3 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\
&\vdots\\
S_n &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Podemos observar que $S_n = 1-\frac{1}{n+1}$, pues los demás términos se cancelaron dos a dos. Por la definición de convergencia de la serie, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) &= \lim_{n\to\infty} S_n\\
&= \lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n+1} = 1,
\end{aligned}$$

es decir que la serie converge a 1.

Ejercicio 9.44. *Muestre que la serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ *es telescópica y converge a* $\frac{3}{4}$.

3. Propiedades de las series

Podemos operar series convergentes usando nuestro conocimiento de sucesiones. Más precisamente, si tenemos dos series de términos no negativos y $\sum_i a_i$ converge a A y $\sum_i b_i$ converge a B, entonces

- $\sum(a_i+b_i)=\sum a_i+\sum b_i = A+B$,
- $\sum c\ a_i = c\sum a_i = c\cdot A$, donde $c\in\mathbb{R}$.

Note que hemos escrito suma y no resta, y exigimos que las series sean convergentes, así que no podemos caer en el error de usar la primera propiedad con la serie telescópica. Lo que queremos decir es que es un error escribir la serie (9.6) como $\sum a_n + \sum b_n$, donde $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = -\frac{1}{n+1}$, pues estas dos son divergentes, como se verá más adelante. Además, debe tenerse en cuenta que hemos exigido que todos los términos sean no negativos. La prueba se deja al lector en el ejercicio 1.

Ejemplo 9.45. Si queremos calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3}{4^n}$, podemos escribirla como la suma de dos geométricas, así:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3}{4^n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{4^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 6.\end{aligned}$$

Una forma rápida para determinar la divergencia de una serie la da el siguiente criterio.

Teorema 9.46. *Si la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *converge, entonces* $a_n \to 0$.

Demostración. La diferencia entre dos sumas parciales es $S_n - S_{n-1} = a_n$. Si calculamos límite cuando $n \to \infty$ en esta igualdad, como la serie converge, entonces tenemos que $a_n \to 0$. ☑

Este criterio es útil cuando a_n no converge a cero, pues inmediatamente podemos deducir que la serie diverge. El problema es que hay series donde el término n-ésimo tiende a cero y, sin embargo, la serie diverge, como se verá en el ejemplo 9.48.

Teorema 9.47. *Una serie de términos no-negativos converge si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es tal que $a_n \geq 0$ para todo n, entonces la sucesión de sumas parciales es monótona creciente. Por la proposición 9.24, la serie converge si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente. ☑

Ejemplo 9.48 (La serie armónica). A partir de este resultado podemos concluir que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{9.7}$$

es divergente, aunque su término n-ésimo tiende a cero. En efecto, esta serie puede escribirse como

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

Los términos han sido agrupados de tal forma que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{2^k}\frac{1}{n}>1+k\left(\frac{1}{2}\right),\quad k>1.}$$

Esto significa que el último término en cada agrupación es $\frac{1}{2^n}$ y que en cada uno de estos grupos hay 2^{n-1} sumandos. Así cuando sumamos los términos de cada grupo, obtenemos que la suma es mayor que $\frac{1}{2}$. Entonces, si $n=2^k$, la suma parcial S_n es mayor que $1+k\left(\frac{1}{2}\right)$, es decir, que la sucesión de sumas parciales no está acotada y, por lo tanto, la serie armónica diverge.

Una serie en la cual el signo de un término es opuesto al anterior recibe el nombre de **serie alternante**, más precisamente, una serie en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots$$

es alternante si cada $a_n>0$. Dedicaremos una sección posterior a estudiar este tipo de series.

Ejemplo 9.49. Considere la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

es parecida a la serie armónica, sin embargo, esta serie es convergente, como se verá más adelante, por el criterio de Leibniz (teorema 9.69) y, más aun, converge a $\ln 2$.

Ejemplo 9.50. La serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

es convergente, también por el criterio de Leibniz (teorema 9.69), y converge a $\frac{\pi}{4}=\arctan 1$.

4. Criterios de convergencia

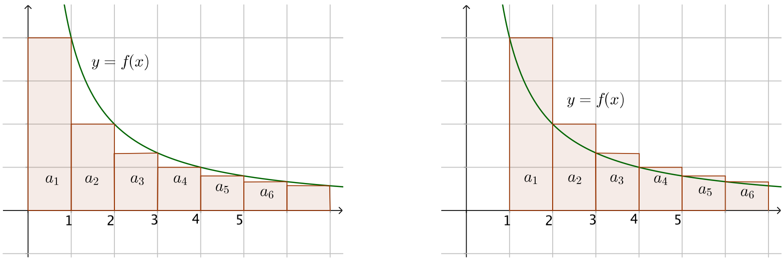
Cuando estudiamos las integrales impropias, vimos que algunas veces es posible determinar a dónde convergen y otras solo se puede decir que convergen sin especificar el valor al que lo hacen. Lo mismo sucede con las series. A continuación estudiaremos algunos criterios que nos permiten determinar la convergencia de una serie. Todos los resultados que veremos se aplican a series de términos no negativos, en secciones posteriores veremos criterios para series alternantes.

4.1. El criterio de la integral

Consideremos ahora una sucesión $\{a_n\}_n$ de términos positivos y una función de valor real y monótona decreciente $y = f(x)$, de tal forma que

$$a_n = f(n), \quad n \geq 1.$$

¿Qué relación existe entre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$? En las gráficas de abajo, dibujamos una función f con las características descritas. Observe cómo la suma desde $n = 2$ hasta $n = 6$ corresponde a las sumas inferiores de f mientras que la suma desde $n = 1$ hasta $n = 5$ corresponde a las sumas superiores. En general, esto siempre sucede.



Como la función es continua, es integrable y se tiene una relación entre la serie $\sum a_n$ y la integral impropia de f. Es más, la serie converge si y solo si la integral impropia converge, *aunque no necesariamente al mismo valor*.

Teorema 9.51. Criterio de la integral. *Sean $f(x)$ una función real monótona decreciente, positiva y continua, definida sobre el intervalo $[1, \infty)$, y $\{a_n\}_n$ una sucesión definida por $a_n = f(n)$ para $n \geq 1$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ tienen el mismo comportamiento, es decir, o ambas divergen o ambas convergen.*

De manera más general, podemos considerar una serie definida por medio de una función, pero a partir de cierto índice, es decir, $a_n = f(n)$ para $n \geq N$. En este caso, el criterio dice que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ y la integral

$\int_N^\infty f(x)dx$ tienen el mismo comportamiento, esto es, o ambas convergen o ambas divergen.

Demostración. Como la función es continua y decreciente, se tiene que $a_k = \text{mín}\{f(x) : k-1 \leq x \leq k\}$ y $a_{k-1} = \text{máx}\{f(x) : k-1 \leq x \leq k\}$. Esto implica que $a_k \leq \int_{k-1}^k f(x)dx \leq a_{k-1}$ para $k \geq 2$. Entonces para cada suma finita,

$$\sum_{n=2}^{k} a_n \leq \int_1^k f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{k-1} a_n$$

y estas desigualdades se cumplen para todo entero $k \geq 2$. Ahora bien, si la integral impropia converge, esto implica que la sucesión de sumas parciales está acotada y, por lo tanto, es convergente. Y si la integral es divergente (a infinito), entonces la serie también crece tanto como se desee y diverge. ☑

Ejemplo 9.52. La **p-serie** $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$. Analicemos la integral

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-p+1}-1}{-p+1} \\ &= \frac{1}{p-1},\end{aligned}$$

pues como estamos suponiendo $-p + 1 < 0$, entonces $t^{-p+1} \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Igual que en el caso de las integrales impropias, es posible comparar series con otras, de las cuales se conozca su comportamiento, el siguiente teorema precisa esto.

4.2. Criterios de comparación

Teorema 9.53. Criterio de comparación directa. *Supongamos que $\sum a_n$ es una serie de términos no-negativos. Luego,*

(i) si existe una serie convergente $\sum b_n$ tal que $a_n \leq b_n$ a partir de cierto índice N, entonces la serie $\sum a_n$ también converge.

(ii) Si existe una serie divergente de términos no-negativos $\sum c_n$ con $c_n \leq a_n$ para todo $n \geq N$, algún $N \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum a_n$ también diverge.

La prueba se deja como ejercicio al lector.

Ejemplo 9.54. Para determinar el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n-2}$, escribimos el término n-ésimo como $\frac{3}{3n-2} = \frac{1}{n-\frac{2}{3}}$. Ya que $n-\frac{2}{3} < n$, entonces

$$\frac{1}{n-\frac{2}{3}} > \frac{1}{n} \quad \text{para } n \geq 1.$$

Como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces nuestra serie también diverge.

Ejemplo 9.55. Analicemos el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5+n^4+1}$. Como $n^5 + n^4 + 1 > n^5$ para todo $n \geq 1$, entonces

$$\frac{1}{n^5+n^4+1} < \frac{1}{n^5}.$$

Este último es el n-ésimo término de una p-serie con $p = 5$, por lo tanto, es convergente. Concluimos que nuestra serie también lo es.

Teorema 9.56. Criterio de comparación del límite. *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos y sea*

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Entonces,

(i) si $L > 0$, las dos series convergen o las dos divergen.

(ii) Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge. Si $L = 0$ y $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ también diverge.

(iii) Si $L = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge. Si $L = \infty$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ también converge.

Las condiciones de este teorema se pueden debilitar, de manera que no es necesario que todos los términos sean positivos, es suficiente con que lo sean después de un cierto índice N.

Demostración. Suponga $L > 0$. Por definición de límite, dado $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2}$, o mejor

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}.$$

Como los términos de b_n son positivos (al menos a partir de un índice), entonces $0 \leq \frac{L}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3L}{2}b_n$ y, por el criterio de comparación, las dos series tienen el mismo comportamiento.

Si $L = 0$, dado $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1$. Como las dos series son de términos positivos, tenemos que $0 < a_n < b_n$, usando el primer criterio de comparación obtenemos el resultado deseado.

Si $L = \infty$, basta tomar $L' = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ y caemos en el caso anterior. ☑

Ejemplo 9.57. Determinemos el comportamiento de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+n+2}{n^3+2n^2+1}$. En este caso, $a_n = \frac{3n^2+n+2}{n^3+2n^2+1}$. ¿Con quién lo comparamos? Podemos escoger $b_n = \frac{1}{n}$, que es una serie que ya conocemos. Veamos el límite

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+n+2}{n^3+2n^2+1}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n^2+2n}{n^3+2n^2+1} = 3.
\end{aligned}
$$

Como $L = 3 > 0$ y la serie $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

Ejemplo 9.58. Estudiemos el comportamiento de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+1}{\ln n}$. Nuevamente, podemos escoger $b_n = \frac{1}{n}$. Veamos el límite

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3+1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+1}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 4n^4 + n = \infty.
\end{aligned}
$$

Como $L = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces la serie $\sum a_n$ también diverge.

Ejemplo 9.59. Analicemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^7+2n+5}$. En este caso, podemos compararla con una p-serie, por ejemplo, donde $b_n = \frac{1}{n^5}$.

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n+2}{n^7+2n+5}}{\frac{1}{n^5}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^6+2n^5}{n^7+2n+5} = 0.
\end{aligned}
$$

Como $L = 0$ y la p-serie converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

¿Cómo se escoge la serie con la que se compara? A manera de ejercicio, en cada uno de los ejemplos anteriores haga una elección distinta para b_n y verifique que obtiene el mismo resultado. Note que algunas veces el criterio no es concluyente. ¿Puede hacer una conjetura? ¿En qué casos puede usar una p-serie?

4.3. Criterios de la razón y la raíz

En esta sección enunciamos tres criterios de convergencia que conciernen únicamente a los términos de la propia serie. Si los términos decrecen a una tasa *suficientemente rápida*, es posible que la serie converja.

Teorema 9.60. Criterio de la razón o criterio de D'Alembert. *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Entonces, se tiene que:

(i) Si $\rho < 1$*, entonces la serie converge.*

(ii) Si $\rho > 1$ *o* $\rho = \infty$*, entonces la serie diverge.*

(iii) Si $\rho = 1$*, el criterio no es concluyente.*

Demostración. Supongamos que $\rho < 1$. Por la definición de límite, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, se tiene que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho\right| < \epsilon$. En particular, si ϵ es muy pequeño: $\rho + \epsilon < 1$, existe un número r tal que $\rho + \epsilon < r < 1$, luego $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, o mejor $a_{n+1} < ra_n$ para $n > N$. Entonces, los términos de la serie a partir de $N + 1$ cumplen la siguiente cadena de desigualdades, así que podemos escribir la serie como:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{N+1} &< ra_N \\ a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N \\ a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &< r^k a_N, \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} \\ &< \sum_{n=1}^{N} a_n + a_N \sum_{k=1}^{\infty} r^k. \end{aligned}$$

Como la última suma es una serie geométrica, con $r < 1$, podemos concluir que la serie $\sum a_n$ converge.

Si $\rho > 1$, entonces a partir de un índice N tenemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, esto es, $a_{n+1} > a_n$, lo que muestra que el término n-ésimo no tiende a cero y, por tanto, la serie diverge. ☑

Para verificar la tercera afirmación del teorema, basta considerar las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. En ambos casos, tenemos que $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ es igual a 1, sin embargo, ya sabemos que la serie armónica es divergente, mientras que la segunda es una p-serie con $p = 2$, que converge.

Ejemplo 9.61. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n}$ converge. En efecto, usando el criterio de la razón, tenemos

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+1}{5^{n+1}}}{\frac{2^n+1}{5^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1}+1)}{5(2^n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{2+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}\right) = \frac{2}{5} < 1.\end{aligned}$$

Ejemplo 9.62. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, e^{-n}$ diverge, pues

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!e^{-(n+1)}}{n!e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} (n+1)e^{-1} = \infty.$$

Teorema 9.63. Criterio de la raíz o criterio de Cauchy. *Sea $\sum a_n$ una serie de términos no-negativos y sea*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Entonces,

(i) Si $\rho < 1$, entonces la serie converge.

(ii) Si $\rho > 1$ o $\rho = \infty$, entonces la serie diverge.

(iii) Si $\rho = 1$, el criterio no es concluyente.

Demostración. Supongamos que $\rho < 1$. Para $\epsilon > 0$, en particular, para uno *muy pequeño*[4], tal que $\rho + \epsilon < 1$, existe un número r tal que $\rho + \epsilon < r < 1$ y un entero positivo N tal que si $n > N$, entonces $\sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon$, o mejor $a_n < r^n < 1$. Como la serie $\sum r^n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

[4]La definición de convergencia supone cualquier $\epsilon > 0$, sin embargo, también condiciona el comportamiento de la serie en cercanías del límite L, por eso, también es correcto suponer ϵ muy pequeño.

Note que los primeros términos de la serie no son tenidos en cuenta, pero esto no es problema, pues son un número finito.

En el caso en que $\rho > 1$, se verifica que a partir de cierto índice N se tiene $\sqrt[n]{a_n} > 1$, lo que significa que el término n-ésimo de la sucesión no tiende a cero y, por lo tanto, la serie no es convergente. ☑

Las dos series que se eligieron para verificar la parte (iii) del criterio de la razón sirven para comprobar que si $\rho = 1$, el criterio de la raíz no decide el comportamiento de la serie. ¿Tiene otros ejemplos?

Ejemplo 9.64. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+n}{5+n^2}\right)^n$ converge, pues

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2+n}{5+n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+n}{5+n^2} = 0 < 1.$$

Ejemplo 9.65. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ diverge, ya que

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{(\sqrt[n]{n^2})}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{(\sqrt[n]{n})^2} = 3 > 1.\end{aligned}$$

El siguiente criterio suele usarse cuando el *test* de la razón no es concluyente.

Teorema 9.66. Criterio de Raabe.[5] *Sean $\sum a_n$ una serie de términos positivos y*

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < \infty.$$

Entonces,

(i) Si $R > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Si $R < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) Si $R = 1$, el criterio no decide.

Demostración. Si $R < 1$, entonces a partir de cierto índice N se debe tener $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, esto es, $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{n}$, escrito de manera conveniente tenemos $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n-1}{n}$. Si damos valores a n (a partir de N), obtenemos las

[5] El lector puede consultar demostraciones similares en [3, 8, 9].

siguientes desigualdades: $\frac{a_{N+1}}{a_N} > \frac{N-1}{N}$, $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} > \frac{N}{N+1}$, $\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} > \frac{N+1}{N+2}, \ldots$. Si multiplicamos todas las desigualdades y simplificamos, obtenemos

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_{N+n+1}}{a_{N+n}} > \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} \cdot \frac{N+1}{N+2} \cdots \frac{N+n-1}{N+n}$$
$$\frac{a_{N+n+1}}{a_N} > \frac{N-1}{N+n}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n+1} > (N-1)a_N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N+n}$$
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_{n+1} > (N-1)a_N \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n},$$

así que, por el criterio de comparación, la serie $\sum a_n$ diverge.

Si $R > 1$, es posible encontrar un r tal que $R > r > 1$, de manera que $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > r$ (para ϵ dado, r puede ser cualquiera entre $R-\epsilon$ y R). Luego, $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{r}{n}$, o mejor $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{r}{n}$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli, dada en el ejercicio 15 de la sección 1, con $h = -\frac{1}{n} > -1$ (y $n = r > 1$), obtenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{r}{n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r,$$

de donde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^r = \frac{(n-1)^r}{n^r}.$$

Nuevamente, damos valores a n (a partir de cierto índice N) y conseguimos las siguientes desigualdades $\frac{a_{N+1}}{a_N} < \frac{(N-1)^r}{N^r}$, $\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < \frac{N^r}{(N+1)^r}$, $\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < \frac{(N+1)^r}{(N+2)^r}, \ldots, \frac{a_{N+n+1}}{a_{N+n}} < \frac{(N+n-1)^r}{(N+n)^r}$. Multiplicando término a término,

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdots \frac{a_{N+n+1}}{a_{N+n}} < \frac{(N-1)^r}{N^r} \cdot \frac{N^r}{(N+1)^r} \cdot \frac{(N+1)^r}{(N+2)^r} \cdots \frac{(N+n-1)^r}{(N+n)^r},$$

con lo cual

$$\frac{a_{N+n+1}}{a_N} < \frac{(N-1)^r}{(N+n)^r}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{N+n+1} < a_N(N-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(N+n)^r}$$
$$\sum_{n=N}^{\infty} a_{n+1} < a_N(N-1)^r \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^r}.$$

Esto significa que la serie $\sum a_n$ está acotada superiormente por una p-serie, con $p = r > 1$, por lo tanto, converge. ☑

Para verificar que el criterio no decide cuando $R = 1$, basta considerar la serie armónica, en este caso,

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

y sabemos que la serie diverge. Por otra parte, si consideramos la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, tenemos que

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{1}{(n+1)\,[\ln(n+1)]^2}}{\frac{1}{n(\ln n)^2}}\right) = 1.$$

En efecto, dentro del límite tenemos

$$\begin{aligned} n\left(1 - \frac{n\ln^2 n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right) &= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)\ln^2(n+1) - n\ln^2 n}{\ln^2(n+1)}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(1 + \frac{n\ln^2(n+1) - n\ln^2 n}{\ln^2(n+1)}\right). \end{aligned}$$

El límite dentro del primer paréntesis vale 1; veamos que el límite dentro del segundo paréntesis también vale 1:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n[\ln^2(n+1) - \ln^2 n]}{\ln^2(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n[\ln(n+1) - \ln n][\ln(n+1) + \ln n]}{\ln^2(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n)}{\ln^2(n+1)} \\ &= e \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \frac{1}{2n})}{\ln(n+1)} = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la regla de L'Hôpital para calcular el último límite. Para terminar el ejemplo, hay que verificar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ es convergente, para ello, usamos el criterio de la integral:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}\right] = \frac{1}{\ln 2}.$$

Como la integral converge, la serie lo hace (aunque no necesariamente al mismo valor).

Ejemplo 9.67. Estudiemos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}$. Si usamos el criterio de la razón, obtenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)!2^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} = \frac{(n+1)^2 2^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 1,$$

así que el criterio no funciona. Probemos con el de Raabe:

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\right) = \frac{-2n^2 - 2n}{(2n+1)(2n+2)} \to -\frac{1}{2} < 1,$$

lo que quiere decir que la serie diverge.

Ejemplo 9.68. Estudiemos el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+2)(5n+3)}$. Si usamos criterio de la razón, obtenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(5n+2)(5n+3)}{(5n+7)(5n+8)} \to 1 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

así que el criterio no decide. Usando Raabe, calculamos

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{25n^2 + 25n + 6}{(5n+7)(5n+8)}\right) = \frac{50n^2 + 50n}{(5n+7)(5n+8)} \to 2 > 1$$

cuando $n \to \infty$, por lo tanto la serie converge.

Ejercicios 9.4

1. Sean $\sum_{i \leq 0} a_i$ y $\sum_{i \leq 0} b_i$ y c cualquier número real. Pruebe las siguientes afirmaciones.

   a) Si $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \to A$ y $\sum\limits_{i=0}^{n} b_i \to B$ cuando $n \to \infty$ entonces $\sum\limits_{i=0}^{n} (a_i + b_i)$ converge y lo hace a $A + B$.

   b) Si $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ converge a A, entonces $\sum\limits_{i=0}^{n} ca_i$ converge a cA.

2. Utilice el ejercicio anterior para probar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ diverge.

3. Determine el comportamiento de cada una de las siguientes series. En caso de que sean convergentes, ¿puede decir a qué valor convergen?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{\pi}\right)^n.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}}.$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}.$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}.$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{(\sqrt{5})^n}.$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n.$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{2n-1}\right)^{n+2}.$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}}.$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n!}.$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}.$

ñ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{n^2+n}.$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\arctan n}{n^2+1}.$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^3}{5^n}.$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}.$

r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right).$

s) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$

4. Muestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{(n-1)(n+1)^3}{n^3(n+2)}\right)$ converge a $\ln\frac{3}{4}$.

5. Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(n+1)!}.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2+2019}.$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^2+5}.$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}.$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^n}$.

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+1}{7n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+2^n}$.

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$.

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(5n+3)}$.

6. Determine el comportamiento de las series.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{0.2}}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{2}}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3}}$.

7. Encuentre una serie para las siguientes funciones en un intervalo adecuado.

a) $\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

b) $\dfrac{x}{1+x^2}$.

c) $\dfrac{1}{1-3x}$.

d) $\dfrac{x}{2+4x}$.

e) $\dfrac{x}{2-x}$.

f) $\dfrac{x^2}{3+x}$.

8. Escriba en detalle la prueba del teorema 9.53.

9. Una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice **hipergeométrica** si

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n+\beta}{\alpha n+\gamma}, \text{ con } \alpha > 0, \ \gamma \neq 0.$$

Pruebe que

a) si $\alpha+\beta < \gamma$, la serie converge y su suma es $\frac{\gamma a_1}{\gamma-(\alpha+\beta)}$.

b) Si $\alpha+\beta \geq \gamma$, la serie diverge.

10. Estudie la convergencia de las siguientes series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(7n+3)(7n+10)}$.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)}$.

11. Analice el comportamiento de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\cdot(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)},$$

donde a, b, c son reales positivos.

12. En cada caso, construya una serie infinita de términos no nulos cuya suma sea
(a) $\frac{7}{2}$ (b) $0.\bar{1}$ (c) $1.\overline{235}$ (d) -2 (e) 0.

13. Determine el radio de convergencia de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n+2}}(x-2)^n$. *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n^5 7^n}$.

14. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demuestre o refute según sea el caso.

a) Si $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B \neq 0$ y $b_n \neq 0$ para todo n, entonces $\sum \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

b) $\sum \frac{a_n}{b_n}$ puede ser divergente a pesar de que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ converjan a reales no nulos y ningún b_n sea 0.

c) Existen dos series infinitas divergentes cuya suma término a término sea convergente.

d) Existen series convergentes $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$ tales que $\sum a_n b_n = C \neq AB$.

e) Existen series convergentes $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B \neq 0$ tales que $\sum \frac{a_n}{b_n} = C \neq \frac{A}{B}$.

f) Si $\sum a_n$ converge y $a_n > 0$ para todo n, entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.

g) Si $\sum a_n$ converge y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum(a_n + b_n)$ puede ser convergente o divergente.

h) Sea $a_n > 0$. Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum a_n^2$ diverge.

i) Sea $a_n > 0$. Si $\sum a_n^2$ converge, entonces $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

5. Convergencia absoluta y condicional

En esta sección, estudiaremos la convergencia de series alternantes, es decir, aquellas cuyos términos son positivos y negativos de forma alternada. Recuerde que una serie alternante puede escribirse de manera general como

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

donde los a_n son positivos. El siguiente criterio dice que si los términos en valor absoluto decrecen a cero, entonces las serie alternante es convergente.

Teorema 9.69. Criterio de Leibniz. *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$$

converge si

- $a_n \geq a_{n+1}$ *a partir de cierto índice* N *y*
- $a_n \to 0$.

Demostración. Haremos la prueba suponiendo que $N = 0$. Si $N > 0$, la suma de los términos hasta N es finita y la serie a partir de N se puede reindexar para que comience desde 0.

Primero, probamos que la sucesión de sumas parciales hasta un número par $\{S_{2k}\}_{k\geq 0}$ (resp. impar $\{S_{2k+1}\}_{k\geq 0}$) es decreciente (resp. creciente). Para todo $k \geq 0$, se tiene que $S_{2k+2} = S_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2})$; como $a_{2k+1} > a_{2k+2}$, entonces $S_{2k} - S_{2k+2} \geq 0$. Análogamente, $S_{2k+1} = S_{2k-1} + (a_{2k} - a_{2k+1})$, y como la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es decreciente, entonces $a_{2k} - a_{2k+1} > 0$.

Además, para todo $k \geq 0$, se tiene que $S_{2k+1} + a_{2k+2} = S_{2k+2}$, entonces $S_{2k+1} \leq S_{2k+2}$. En resumen tenemos que

$$a_0 - a_1 = S_1 \leq \cdots \leq S_{2k+1} \leq \cdots \leq S_{2k} \leq \cdots \leq S_0 = a_0.$$

Es decir que $\{S_{2k}\}$ es decreciente y acotada inferiormente por S_1 y que $\{S_{2k+1}\}$ es creciente y acotada superiormente por S_0. Por lo tanto, gracias a las proposiciones 9.24 y 9.25, ambas sucesiones convergen.

Por último, como $S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}$ y, por hipótesis, $a_{2n} \to 0$, entonces $\lim S_{2n} = \lim S_{2n-1}$, luego S_n converge. ☑

Ejemplo 9.70. Por los ejemplos 9.3 y 9.18, sabemos que la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}$ es decreciente y tiende a cero, luego, por el criterio de Leibniz, la serie **armónica alternante**,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots ,$$

converge, de hecho, converge a $\ln 2$, como veremos más adelante.

Ejemplo 9.71. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$ satisface las hipótesis del teorema, pues $a_n = \frac{1}{n^{1/3}}$, luego tenemos que $a_n \to 0$ y además la sucesión es decreciente, por lo tanto, es convergente. Sin embargo, la serie de sus valores absolutos es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$, la cual es una p-serie con $p = \frac{1}{3}$, que no converge.

Este ejemplo nos conduce a la siguiente definición.

Definición 9.72. *Diremos que una serie* $\sum a_n$ **converge absolutamente** *si la serie de sus valores absolutos* $\sum |a_n|$ *converge.*

Definición 9.73. *Diremos que una serie* $\sum a_n$ **converge condicionalmente** *si la serie converge, pero no converge absolutamente.*

Ejemplo 9.74. La serie armónica alternante converge, pero la serie de sus valores absolutos no, por lo tanto, podemos decir que converge condicionalmente. Lo mismo sucede con la serie del ejemplo 9.71.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^6}$ converge absolutamente, pues la serie de sus valores absolutos es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, que es una p-serie, con $p = 6$. Podemos verificar que la serie converge usando el siguiente teorema.

Teorema 9.75. *Si la serie* $\sum a_n$ *converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. Como $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq a_n+|a_n| \leq 2|a_n|$. Ya que $\sum 2|a_n|$ converge, y la serie $\sum a_n+|a_n|$ es de términos no-negativos y está acotada por una serie convergente, entonces también converge.

Si escribimos $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$, entonces

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|,$$

que converge por ser la diferencia de dos series convergentes. ☑

Ejemplo 9.76. Estudiemos el comportamiento de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n}$. Podemos preguntarnos si converge absolutamente, esto es, verificar si $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ converge o no. Para ello, usamos el criterio de la razón.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}}{\frac{n^2}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n(n^2+2n+1)}{5^{n+1}n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Como $L = \frac{1}{5} < 1$, la serie de los valores absolutos converge, en otras palabras, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{5^n}$ converge absolutamente y, por lo tanto, converge.

Teorema 9.77. *Si $\sum a_n$ converge absolutamente y si $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ es un reordenamiento de la sucesión $\{a_n\}$, entonces la serie $\sum b_n$ también converge absolutamente y además el límite de las dos series coincide*

$$\sum a_n = \sum b_n.$$

La afirmación de este teorema puede parecer innecesaria e incluso un poco chocante para algunos, pues si estamos sumando los mismos términos, ¿cómo es que cambiar el orden podría alterar el valor de la suma total? Es una pregunta totalmente válida, ya que siempre nos han dicho que al sumar, *el orden de los sumandos no altera el resultado*. Esto es cierto, siempre que estemos sumando un número finito de términos, pero cuando trabajamos con una serie vemos que no necesariamente es el caso. Concretemos esta idea con un ejemplo.

Ya hemos dicho que la serie armónica alternante converge condicionalmente, de hecho, converge a $\ln 2$. Recuerde que la serie está escrita en el siguiente orden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$. Hagamos un reordenamiento que converja a $1/2$, así: empiece sumando términos positivos hasta que la suma sea mayor que $1/2$, esto es, tome el primer término

$$S_1 = 1,$$

ahora súmele términos negativos hasta que la suma sea menor que $1/2$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0.25,$$

ahora súmele el término positivo $\frac{1}{3}$ para sobrepasar $1/2$:

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \approx 0.583,$$

ahora súmele términos negativos (recuerde que no puede cambiar los signos de los términos de la serie inicial) hasta obtener una cantidad menor que 1/2:

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \approx 0.416,$$

continúe con este procedimiento indefinidamente. Note que lo que hemos escrito son las sumas parciales desde S_1 hasta S_5, las siguientes serán:

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \approx 0.616,$$

$$S_7 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} \approx 0.491,$$

$$S_8 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \approx 0.634,$$

$$S_{10} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \approx 0.451,$$

$$S_{11} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{9} \approx 0.562.$$

Como la sucesión de sumas parciales converge a 1/2, entonces la serie converge a 1/2.

En resumen, tomamos la serie armónica alternante y con este procedimiento cambiamos el valor de convergencia de la serie, que originalmente iba para ln 2 y la hicimos converger a 1/2, de hecho, se puede hacer converger a cualquier número, extraño ¿verdad? Efectivamente, existe un teorema más general, debido a Riemann, que dice, en pocas palabras, que *dada una serie condicionalmente convergente se puede alterar el orden de sus términos de tal forma que la serie sume lo que queramos.*

En conclusión, si la serie $\sum a_n$ converge absolutamente, el teorema previo implica que cualquier reordenamiento de la serie converge al mismo valor, lo que nos permite decir que la serie es *sumable*, en otras palabras, al encontrar el valor al cual converge la serie se está realizando la *suma* de *todos* los términos de la serie. Pero si la serie en cuestión es condicionalmente convergente, esto no es cierto.

Ejercicios 9.5

1. Pruebe que las siguientes series son condicionalmente convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln n}$.

2. Estudie la convergencia y convergencia absoluta de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^4+1}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{10}}{2^n}$.

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^3 n^3}{n}$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n+4^n}$.

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\ln n}$.

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}$.

3. Dado $x \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n+n^2}$.

4. Determine si las siguientes series son condicionalmente convergentes, absolutamente convergentes o divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 2^n}{n!}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+2n-1}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{\sqrt{n^3-1}}$.

f) $\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{13} - \frac{1}{18} + \frac{1}{23} - \cdots$

g) $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{10}{11} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{14} + \cdots$

5. ¿Es posible determinar a qué valor converge la serie $1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \cdots$?

6. Sea $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie alternante, con $a_n \geq 0$, pruebe que si $a_n \geq a_{n+1}$ a partir de cierto índice N y $a_n \to 0$ cuando $n \to 0$, entonces la serie es de Cauchy (vea la definición 9.15).

7. Realice la prueba del teorema 9.77.

8. Considere la serie dada después del teorema 9.77 y haga un reordenamiento, de manera que converja a 5.

9. Demuestre el teorema de Riemann: toda serie condicionalmente convergente puede reordenarse para que sea divergente, ya sea a $-\infty$, a $+\infty$, o converja a cualquier número real fijo s.

Resumen - Series

Series de términos no-negativos

- Si $a_n \not\to 0$, entonces la serie diverge
- ¿Es geométrica? $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$
- ¿Es telescópica?
- ¿Es una p-serie? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.

$\Downarrow$

RRR

- **Razón** $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
- **Raíz** $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$
  En los dos casos:
  - ⋆ Si $\rho < 1$, converge.
  - ⋆ Si $\rho > 1$, diverge.
  - ⋆ Si $\rho = 1$, no decide.
- **Raabe**

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < \infty$$

  - ⋆ Si $R > 1$, converge.
  - ⋆ Si $R < 1$, diverge.
  - ⋆ Si $R = 1$, no decide.

$\Downarrow$

Criterios de comparación

- C. integral
- Comparación directa
- Comparación al límite $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$
  - ⋆ $L > 0$, entonces $\sum a_n \sim \sum b_n$
  - ⋆ $L = 0$ y la de abajo converge, entonces la de arriba converge.
  - ⋆ $L = \infty$ y la de abajo diverge, entonces la de arriba diverge.

Series de términos alternantes $\sum (-1)^n a_n$
Criterio de Leibniz Si

- $a_n > 0$,
- $a_n \geq a_{n+1}$,
- $a_n \to 0$,

entonces la serie converge.

Convergencia absoluta Si la serie converge absolutamente, entonces converge.

Radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_n z^n$**:**

$$R = \frac{1}{\rho},$$

donde ρ se halla por razón o raíz

- la serie converge absolutamente para $|z| < R$,
- la serie diverge para $|z| > R$.

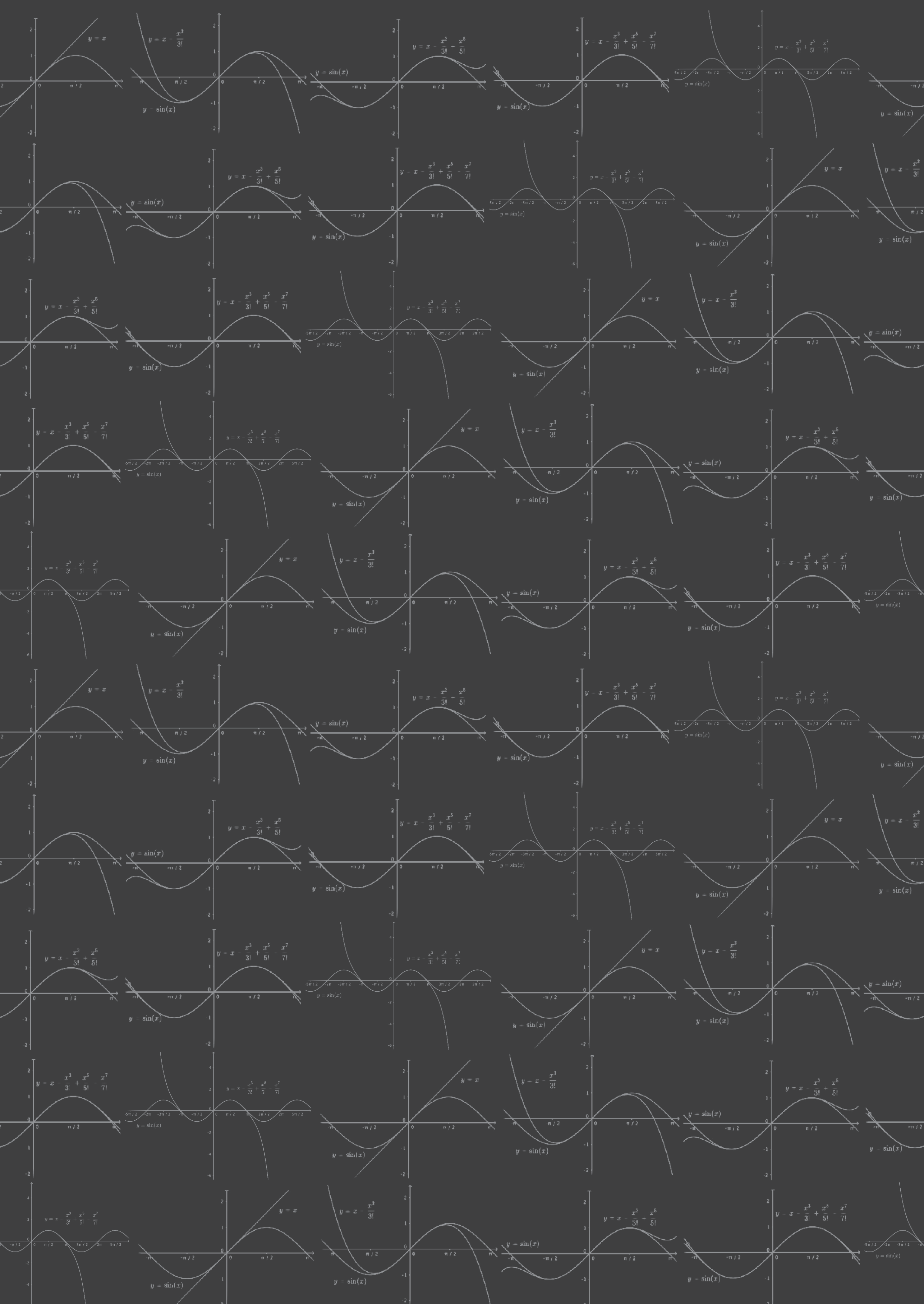
Series muy usadas

- Serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- Armónica alternante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Capítulo

diez

Series de potencias



y = x
y = sin(x)
y = x - x^3/3!
y = x - x^3/3! + x^5/5!
y = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!

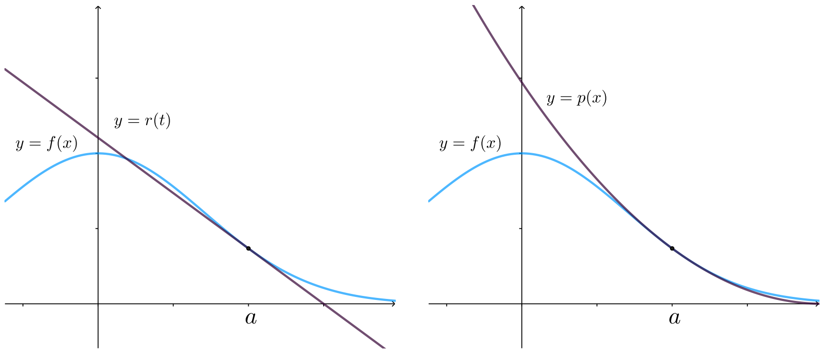
Las series de potencias son una herramienta muy útil en el estudio del cálculo, ya que con estas podemos hacer aproximaciones de valores de algunas funciones que utilizamos en la práctica, como $\operatorname{sen}(\cdot)$, $\tan(\cdot)$, $e^{(\cdot)}$, etc., pero también construir nuevas funciones que preservan propiedades de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad, entre otras. Una serie de potencias es una serie de funciones en la que cada suma parcial es un polinomio con centro en un punto a (podríamos pensarlas como "polinomios de grado infinito"). Cada vez que es evaluada en un valor x_0, se obtiene una serie (ordinaria) que puede ser o no convergente, luego cada serie de potencias define una función cuyo dominio es el conjunto de puntos donde la serie converge. Esta función resulta ser continua, diferenciable e integrable, este será el objeto de estudio de la sección 2 de este capítulo. También estudiaremos el problema converso: dada una función que satisfaga ciertas propiedades, ¿cuándo puede ser representada por una serie de potencias?, la respuesta la daremos en la sección 3 de este apartado cuando definamos las series de Taylor. Pero antes, en la sección 1, introducimos los polinomios de Taylor asociados a una función para dar una primer acercamiento a estos temas.

1. Polinomios de Taylor

Existen muchas formas de aproximar una función f por medio de polinomios: interpolación, funciones escalonadas, poligonales, *spline*, regresiones polinomiales, etc., pero ¿qué propiedades de f heredan estas aproximaciones? Buscamos polinomios que además de "parecerse puntualmente a f" también compartan propiedades de continuidad, diferenciación e integración, es decir, que podamos hacer cálculos con dicho polinomio como si lo hiciéramos con f. En esta sección, introducimos el polinomio de Taylor asociado a una función (siempre que tenga derivadas hasta de orden n en algún intervalo abierto), sin embargo, en algunos casos el polinomio asociado no aproxima a la función. Para nuestro consuelo, en muchas funciones de uso corriente como $\operatorname{sen}(\cdot)$, $\arctan(\cdot)$, $\exp(\cdot)$ el polinomio de Taylor será adecuado y "más parecido a f" siempre que el grado sea mayor.

¿Para qué necesitamos aproximar una función que ya conocemos si ya tenemos una fórmula explícita? Para explicarlo, responderemos con otra pregunta ¿sabe usted calcular (sin ayuda de una calculadora) el valor de $\operatorname{sen}(\cdot)$ para algún ángulo de un triángulo no notable, digamos 1 radián, o el valor de $e^{0.095}$ ó $\sqrt[3]{2}$? Evaluar un número en un polinomio requiere sumar y multiplicar (operaciones elementales), entonces si existe una *buena aproximación* de un polinomio a una función, también se puede hallar una aproximación de los valores que toma esta función en términos de operaciones elementales.

El lector seguramente ya sabe cómo calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto a (vea el gráfico abajo izq.). Esta es un polinomio de grado 1 que coincide con el valor de la función y además su pendiente es la primera derivada de la función evaluada en a. Más precisamente, si la función f es diferenciable en un intervalo que contenga a un punto a, la ecuación de la recta tangente es $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$; observe que $f(a) = t(a)$ y $f'(a) = t'(a)$. El polinomio de Taylor de grado n de una función en el punto a extiende esta idea, pues es precisamente un polinomio de grado n cuyas primeras n derivadas evaluadas en a coinciden con las de f.



Los gráficos de arriba ilustran un polinomio de Taylor de grado 1 (izq.) y otro de grado 2 (der.) de una función f, ambos alrededor de un punto a.

1.1. Polinomio de Taylor alrededor de cero

Supongamos que $y = f(x)$ es una función que tiene derivadas hasta de orden n en un intervalo I alrededor de 0 (estas son las funciones *suaves* que vamos a considerar). Buscamos un polinomio de la forma $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ tal que $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ para $k = 0, \ldots, n$, donde $f^{(0)}(x) := f(x)$. Abajo a la izquierda calculamos las derivadas de P y a la derecha vemos la relación con las derivadas de f. Nuestro objetivo es hallar los coeficientes a_i.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad a_0 = P(0) = f(0)$$
$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \qquad a_1 = P'(0) = f'(0)$$

$$
\begin{aligned}
P''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} & 2a_2 &= P''(0) = f''(0)\\
P'''(x) &= 6a_3 + 24a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} & 6a_3 &= P'''(0) = f'''(0)\\
&\vdots & &\vdots\\
P^{(n)}(x) &= n!\, a_n & n!\, a_n &= P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)
\end{aligned}
$$

Si despejamos los coeficientes para $k = 0, \ldots, n$, obtenemos

$$\boxed{a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.}$$

Definición 10.1. *El* **polinomio de Taylor de f alrededor de 0 de grado n** *se denota por $P_{n,0}(x)$, ó simplemente $P_n(x)$, y tiene la forma*

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Este ejemplo ilustra el caso (deseado) en que el polinomio de Taylor aproxima a la función y mejora a medida que se considera un polinomio de mayor grado.

Ejemplo 10.2. Encontremos el polinomio de Taylor de grado n para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ alrededor de $x = 0$. La función y las primeras cuatro derivadas evaluadas en $x = 0$ son:

$$\boxed{\begin{aligned}
f(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0\\
f'(0) &= \cos(0) = 1\\
f''(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0\\
f'''(0) &= -\cos(0) = -1\\
f^{(4)}(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0,
\end{aligned}}$$

de manera general,

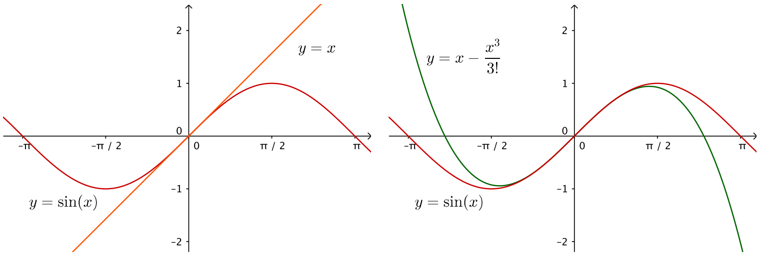
$$\operatorname{sen}^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k,\\ (-1)^n & \text{si } n = 2k-1. \end{cases}$$

Note que $P_{2,0}$ coincide con $P_{1,0}$ y, en general, $P_{2k,0} = P_{2k-1,0}$, ya que el coeficiente $a_{2k} = 0$ para todo k. El polinomio de orden $n = 2k+1$ es

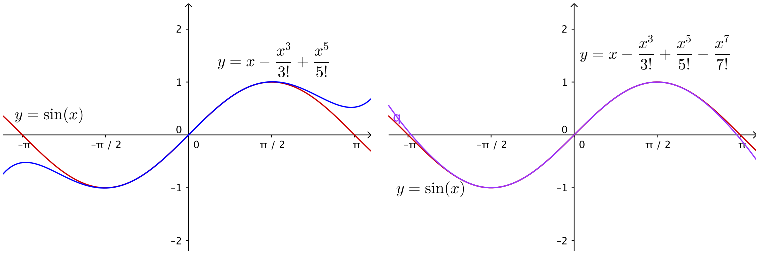
$$
\begin{aligned}
P_{n,0}(x) &= 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Comparemos las gráficas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y los polinomios de Taylor alrededor de cero de grado 1,3,5 y 7. Note que empezamos con

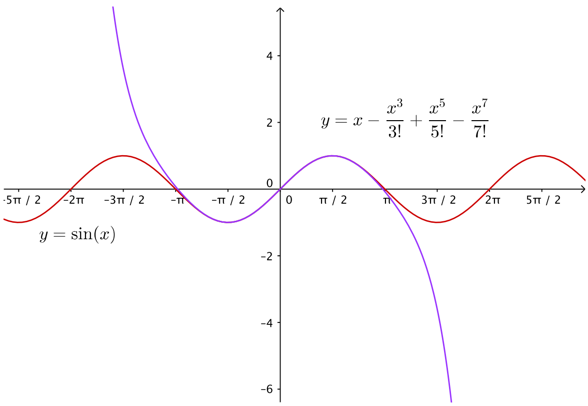
$P_{1,0}(x) = x$ y seguimos con $P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$; el polinomio $P_{2,0}(x)$ no se ha incluido, puesto que coincide con $P_{1,0}(x)$.



A continuación $P_{5,0}(x)$ y $P_{7,0}(x)$.



En este caso, entre más alto es el grado del polinomio mejor es la aproximación, sin embargo, esto solo se cumple en vecindades del punto. Para ser concretos, en el ejemplo de $f(x) = \operatorname{sen} x$, la aproximación es buena alrededor del origen, pero si nos alejamos de este las curvas ya no se parecen tanto, como lo vemos en la siguiente gráfica.



Ejemplo 10.3. El polinomio de Taylor de $P_{n,0}(x)$ para $f(x) = e^x$. Las derivadas de e^x siempre son las mismas

$$f^{(k)}(x) = e^x \implies f^{(k)}(0) = e^0 = 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P_{n,0} &= 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

1.2. Polinomio de Taylor alrededor de un punto

Suponga ahora que la aproximación se hace alrededor de cualquier otro punto $x = a$ (fijo). Es decir que, dada una función f y un punto $x = a$, buscamos un polinomio P tal que $f(a) = P(a)$ y tal que las primeras n derivadas coincidan, esto es, se satisfaga que $f^k(a) = P^k(a)$ para $k \leq n$. Entonces, se requiere que la función tenga al menos derivadas hasta de orden n en un intervalo abierto I que contenga al punto a; y para hallar los coeficientes del polinomio, lo expresamos en la variable $x - a$ en lugar de x. Entonces calculamos las derivadas del polinomio, así:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n \\ P'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} \\ P''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} \\ P'''(x) &= 6a_3 + 24a_4(x-a) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} \\ &\vdots \\ P^{(n)}(x) &= n!\, a_n. \end{aligned}$$

Luego, al evaluar el polinomio y sus derivadas en el punto a, obtenemos relaciones que permiten hallar el valor de los coeficientes a_i.

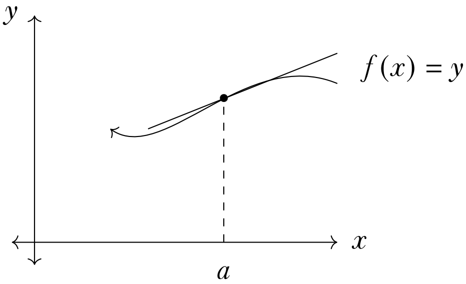
$$\begin{aligned} a_0 &= P(a) = f(a) \\ a_1 &= P'(a) = f'(a) \\ 2a_2 &= P''(a) = f''(a) \\ 6a_3 &= P'''(a) = f'''(a) \\ &\vdots \\ n!\, a_n &= P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \end{aligned} \qquad \boxed{a_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}.}$$

Definición 10.4. *Dada una función f con derivadas hasta de orden n en un intervalo abierto I alrededor de un punto a, se define el* **polinomio de Taylor de**

grado n **de** f **alrededor de** a *como*

$$P_{n,a}(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Observe que el polinomio de Taylor de grado 1 de f coincide con su recta tangente.



Ejemplo 10.5. Encuentre el polinomio de Taylor de grado n para $f(x) = \ln x$ alrededor de 1. Sabemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(1) &= 0\\
f'(x) &= \frac{1}{x} & f'(1) &= 1\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f''(1) &= -1\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & f'''(1) &= 2!\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{3!}{x^4} & f^{(4)}(1) &= -3!\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} & f^{(n)}(1) &= (-1)^n(n-1)!
\end{aligned}$$

Entonces, el polinomio es

$$\begin{aligned}
P_{n,1}(x) = 0 + 1\cdot(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3\\
- \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n\\
= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

1.3. El residuo

Ahora bien, $P_{n,a}(x)$ aproxima de buena manera a la función $f(x)$ en una vecindad de $x = a$, pero $P_{n,a}$ y f NO son iguales, sin embargo, queremos que la aproximación sea lo más cercana posible a f y medir el error que estamos cometiendo. Para esto, hallamos la diferencia entre $P_{n,a}$ y f, que se conoce como **residuo o resto**, más precisamente

$$R_{n,a}(x) := f(x) - P_{n,a}(x). \tag{10.1}$$

Nota 10.6. *El residuo $R_{n,a}(x) \longrightarrow 0$ más rápido de lo que $(x-a)^n \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow a$, formalmente*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Para probarlo, aplique regla de L'Hôpital n veces y recuerde que $\left[P_{n,a}(x)\right]^{(n)} = f^{(n)}(a)$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

Para encontrar una expresión para el resto[1], empezamos definiendo la función $F(y) = f(x) - R_{n,y}(x)$ en otra variable y en el mismo intervalo I:

$$F(y) = f(x) - f(y) - \frac{f'(y)}{1!}(x-y) - \cdots - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n. \tag{10.2}$$

Si derivamos con respecto a y, obtenemos

$$F'(y) = -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Por otro lado, definimos la función

$$G(y) = F(y) - \left(\frac{x-y}{x-a}\right)^{n+1} F(a),$$

con lo cual es posible verificar que $G(x) = 0 = G(a)$. Como la función G es continua (¿por qué?), por el teorema de Rolle, existe $c \in (x, a)$ tal que

[1] Siguiendo las indicaciones de Apostol en [1].

$G'(c) = 0$.

$$G'(y) = F'(y) - F(a)(n+1)\left(\frac{x-y}{x-a}\right)^n\left(\frac{-1}{x-a}\right)$$

$$G'(c) = F'(c) + F(a)(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} = 0$$

$$\begin{aligned}\implies F(a) &= -\frac{F'(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n}\\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.\end{aligned}$$

Si combinamos esta expresión con la definición de F dada en (10.2), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} &= F(a)\\ &= f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

$$\implies f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x),$$

donde

$$\boxed{R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.} \tag{10.3}$$

También existe una forma integral para el resto $R_{n,a}(x)$ que podemos deducir de la siguiente manera. Sea

$$\boxed{I_{n,a}(x) := \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.} \tag{10.4}$$

Entonces, podemos probar por inducción que para todo $n \geq 1$

$$f(x) - P_{n,a}(x) = I_{n,a}(x).$$

En efecto, para $n = 0$,

$$f(x) - P_{0,a}(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Como hipótesis de inducción, supongamos que para $0 \leq k < n$ se tiene

$$f(x) - P_{k,a}(x) = I_{k,a}(x).$$

Ahora probamos que se cumple para el caso n-ésimo, para lo que procedemos a integrar $I_{n,a}$ por partes, haciendo $u = \frac{(x-t)^n}{n!}$ y $dv = f^{(n+1)}(t)dt$, entonces

$$
\begin{aligned}
I_{n,a}(x) &= \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_a^x + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \\
&= -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + I_{n-1} \\
&= -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + f(x) - P_{n-1,a}(x) \\
I_{n,a}(x) &= f(x) - P_{n,a}(x).
\end{aligned}
$$

De donde $f(x) = P_{n,a}(x) + I_{n,a}(x)$, o dicho de otra forma,

$$\boxed{R_{n,a}(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.} \tag{10.5}$$

Observe que si $m,\ M$ son el mínimo y máximo respectivamente de $\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}$, $t \in [a, x]$, entonces podemos acotar el resto así:

$$m \cdot \int_a^x (x-t)^n dt \le R_{n,a}(x) \le M \cdot \int_a^x (x-t)^n\, dt.$$

Con los siguientes ejemplos, podemos verificar que el residuo converge a cero más rápidamente que $(x-a)^n$, cuando $x \to a$, como lo dijimos previamente.

Ejemplo 10.7. Dada una función $f(x)$ derivable en $a \in I$, el primer polinomio de Taylor de f alrededor de a es $P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ y el resto está dado por

$$R_{1,a}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a).$$

Además, el límite:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{R_{1,a}(x)}{(x-a)} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \\
&= f'(a) - f'(a) = 0.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10.8. Si además f es dos veces derivable en $a \in I$, el segundo polinomio de Taylor para $f(x)$ alrededor de a es $P_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ y el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{2,a}(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} - \frac{f''(a)}{2}.$$

Si aplicamos la regla de L'Hôpital para calcular el primer límite de la derecha, obtenemos

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x-a)};$$

nuevamente por L'Hôpital

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(a)}{2},$$

con lo cual $\lim_{x \to a} \frac{R_{2,a}(a)}{(x-a)^2} = 0$.

Ejemplo 10.9. Aproximemos el valor de $\sqrt{1.1}$ usando el polinomio de Taylor de $f(x) = \sqrt{1+x}$ de grado 3 alrededor de $a = 0$ y encontremos una cota para el error cometido.

Comenzamos con las derivadas de f evaluadas en $a = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+x} && \Longrightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} && \Longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} && \Longrightarrow f''(0) = -\frac{1}{4} \\
f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} && \Longrightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$P_{3,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

y la aproximación será

$$\begin{aligned}
\sqrt{1.1} = f(0,1) \approx P_{3,0}(0,1) &= 1 + \frac{1}{2}(0,1) - \frac{1}{8}(0,1)^2 + \frac{1}{16}(0,1)^3 \\
&\approx 1.0488125.
\end{aligned}$$

De acuerdo con la fórmula (10.3), el residuo puede calcularse como

$$|R_{3,0}(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-0)^4 \right|,$$

donde c es un número entre a y x. En este caso, como vamos a aproximar $f(0.1)$, consideramos $0 < c < 0.1$, y ya que $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$, tenemos

$$\begin{aligned}
0 < &c < 0.1 \\
1 < &c + 1 < 1.1 \\
(1.1)^{-\frac{7}{2}} < &(c+1)^{-\frac{7}{2}} < 1 \\
\frac{15}{16}(1.1)^{-\frac{7}{2}} < &\frac{15}{16}(c+1)^{-\frac{7}{2}} < \frac{15}{16},
\end{aligned}$$

esto es $|f^{(4)}(c)| < \frac{15}{16}$, lo que nos permite concluir que

$$|R_{3,0}(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.1)^4\right| < \frac{15}{16 \times 4!}(0.1)^4 = 0.00000390625.$$

Esto significa que la aproximación es buena hasta 5 cifras decimales. Observe que al acotar el resto no fue necesario hacer el cálculo explícito de la parte izquierda de la desigualdad, lo cual tiene sentido, pues si podemos hacer el cálculo de $(1.1)^{-\frac{7}{2}}$, no habría necesidad de hacer aproximaciones.

En resumen, podemos decir que si $f(x)$ tiene derivadas de orden n en un intervalo I que contiene a a, esto es, si $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existen, entonces podemos escribir

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_{n,a}(x),$$

y esta aproximación “es buena”en proximidades de a. Desearíamos que $R_{n,a}(x) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, pero esto no siempre ocurre. Sin embargo, para muchas funciones de interés el residuo disminuye y podemos representar a la función con una serie, este es el tema de la sección 3.

Ejercicios 10.1

1. Halle el polinomio de Taylor de f de grado n alrededor del punto a en los siguientes casos

   a) $f(x) = 2x + 1$, $n = 1$, $a = 0$.

   b) $f(x) = 2x + 1$, $n = 1$, $a = 1$.

   c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $n = 1$, $a = 0$.

   d) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $n = 2$, $a = 0$.

   e) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $n = 2$, $a = 2$.

   f) $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 4$, $a = 1$.

   g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $n = 2$, $a = 0$.

   h) $f(x) = \cos x$, $n = 10$, $a = 0$.

   i) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $n = 3$, $a = 0$.

   j) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $n = 6$, $a = 0$.

2. Calcule $P_{2k,0}$ para $f(x) = \cos x$.

3. Calcule $P_{2k-1,0}$ y $P_{5,0}(x)$ para $f(x) = \tan^{-1}(x)$.

4. Aproxime la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$ usando el polinomio de Taylor de grado 4. Después, aproxime $\frac{1}{\sqrt{2.2}}$ y encuentre una cota para el error cometido.

5. Encuentre el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x) = x \ln x$, alrededor de $a = 1$. Después, aproxime el valor de $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ y calcule el error cometido.

6. Encuentre el polinomio de Taylor de grado 4 para $f(x) = \ln x$ alrededor de $a = 1$. Después, aproxime el valor de $\ln(2)$ y calcule el error cometido.

2. Series de potencias

Las funciones que más usamos en el cálculo son aquellas que son continuas, derivables y/o integrables en algún subconjunto de su dominio, pero nuestro acervo de funciones es muy limitado, contamos con las funciones elementales que se obtienen al sumar, multiplicar, dividir y componer: polinomios, funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, trigonométricas inversas y radicales. Seguro usted sabe que $f(x) = e^{-x^2}$ no tiene antiderivada en términos de funciones elementales, pero que sí tiene antiderivada y la podemos expresar como una serie de potencias. Entre otras cosas, estas series sirven como herramienta para construir nuevas funciones (no elementales), por eso también son utilizadas para el estudio de ecuaciones diferenciales no lineales. Por último, algo muy importante: algunas también son derivables, integrables y continuas. También podemos representar funciones elementales en términos de series de potencias, pero ahondaremos en este aspecto en la siguiente sección.

Definición 10.10. *Una* **serie de potencias** *(real) en la indeterminada x alrededor de un número real a es una serie de la forma*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_i(x-a)^i + \cdots , \tag{10.6}$$

donde todos los coeficientes a_i son números reales. Para el caso en que $a = 0$, tenemos una serie de potencias alrededor de cero

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_i x^i + \cdots . \tag{10.7}$$

Una serie de potencias induce una función, cuyo dominio son los valores que puede tomar la indeterminada x que hacen a la serie convergente. Entonces, se hace importante determinar el conjunto de convergencia de una serie de potencias.

Ejemplo 10.11. La serie geométrica del ejemplo 9.37 es una serie de potencias en la variable r alrededor de cero y es convergente únicamente para $|r| < 1$. Además, la suma de la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Ejemplo 10.12. Si reemplazamos r por $(x-a)$, tenemos una serie de potencias alrededor del punto a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^n = \frac{1}{1-(x-a)},$$

y esta serie también es válida para $|x-a| < 1$. Por ejemplo, en el caso en que $a = 5$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-5)^n = \frac{1}{1-(x-5)} = \frac{1}{6-x},$$

la expresión es válida cuando $|x-5| < 1$, es decir, para $x \in (4,6)$.

Ejemplo 10.13. Ahora calculamos una serie de potencias alrededor de un punto adecuado que converja a la función $f(x) = \frac{1}{2+x}$ en algún intervalo. Lo que debemos hacer es escribir esta expresión en la forma $\frac{1}{1-r}$, esto es,

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{1-(-x-1)},$$

para verla como una serie geométrica; en este caso, la razón es $(-x-1) = (-1)(x+1)$. Entonces, la serie queda

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n = \frac{1}{2+x}$$

y es válida para $|-x-1| < 1$, es decir, para $-2 < x < 0$.

Note que en los ejemplos que hemos presentado, se calculó el intervalo para el cual la serie de potencias es convergente. Si observa con más detenimiento en los tres ejemplos anteriores, notará que el intervalo es simétrico con respecto al punto a. Como veremos, esta no es una propiedad exclusiva de las series de potencias que provienen de las series geométricas.

Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge para un número real c fijo, por el teorema 9.46, tenemos que $a_n c^n \to 0$. Esto implica que, para $\epsilon = 1$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n c^n| < 1$ para todo $n \geq N$, o equivalentemente $|a_n| < \frac{1}{|c^n|}$ para $n \geq N$.

Veamos ahora que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para todo x tal que $|x| < c$. Para tal x, la serie de los valores absolutos está dada por

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_N x^N| + |a_{N+1} x^{N+1}| + \cdots$$

y para $k \geq N$ se tiene que $|a_k x^k| < \frac{1}{|c^k|}|x|^k$, lo que significa que a partir del índice N podemos acotar cada término por $\left|\frac{x}{c}\right|^k$, así que la serie de los valores absolutos está acotada por

$$\left|\frac{x}{c}\right|^N + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+1} + \cdots ,$$

que es una serie geométrica, donde la razón es $\frac{x}{c}$, y converge, puesto que $\left|\frac{x}{c}\right| < 1$. Así que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente y, por lo tanto, converge.

Por otra parte, supongamos que la serie diverge para $x = d$ y probemos que diverge para cualquier valor de x mayor que d. Supongamos por contradicción que existe un $b > d$ tal que la serie converge para $x = b$. Por el razonamiento anterior, si la serie converge para b, también lo hace para cualquier valor de x menor que b, en particular para d. Pero es imposible que una serie sea convergente y divergente en un punto al mismo tiempo. Luego, la serie debe diverger para cualquier $x > d$. Hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 10.14. *Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = c$, entonces converge para cualquier x tal que $|x| < c$, y si diverge para $x = d$, entonces diverge para cualquier x tal que $|x| > d$.*

Este teorema nos muestra que dada una serie de potencias alrededor de cero es posible encontrar un intervalo donde la serie converge y que fuera de él la serie siempre será divergente. Como ejercicio, pruebe la versión del teorema para series de potencias alrededor de a.

Definición 10.15. *Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, definimos el* **radio de convergencia** *como el número $R \geq 0$ tal que la serie converge para x, con $|x - a| < R$, y diverge para $|x - a| > R$. Si $R = 0$, diremos que la serie converge únicamente para $x = a$ (la serie siempre converge a a_0 en $x = a$). En el caso en que $R = \infty$, la serie converge para toda x. El comportamiento en los extremos del intervalo $a + R$ y $a - R$ puede ser convergente o divergente y se debe estudiar individualmente. En cualquier caso, el conjunto de valores que toma x para los cuales la serie es convergente es un intervalo que se conoce como* **intervalo de convergencia***.*

El siguiente teorema nos muestra cómo encontrar el radio de convergencia de una serie.

Teorema 10.16. Teorema de Cauchy-Hadamard. *Dada la serie de potencias alrededor de cero* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *su radio de convergencia* R *se puede obtener de alguna de las dos formas siguientes*

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{ó} \qquad R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Nota 10.17. *La primera forma tiene sentido para* $R > 0$, *mientras que la segunda tiene sentido si* $R < \infty$. *Note además que las dos expresiones para* R *tienen en el denominador el factor* ρ, *que usamos al aplicar los criterios de raíz y razón (respectivamente); la elección adecuada para* R *dependerá de la forma de* a_n. *Por ejemplo, si en* a_n *hay presencia de factoriales, conviene usar la segunda expresión (criterio del cociente).*

Otra observación importante es que originalmente se debe tomar el límite superior $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *en lugar del límite, que corresponde al mayor de los límites de las subsucesiones convergentes de* $\{a_n\}$. *Pero si la sucesión* $\{a_n\}$ *es convergente, los dos límites coinciden.*

Si el límite en cuestión es $+\infty$, *entonces el radio de convergencia será* $R = 0$, *lo que quiere decir que solo converge en un punto. Mientras que si el límite es cero, se tiene que* $R = +\infty$, *teniendo así que la serie converge para todo número real.*

Por último, el teorema también es válido para series de potencias de la forma $\sum a_n(z-a)^n$. *En ese caso, diremos que la serie converge absolutamente para* $|z-a| < R$ *y diverge para* $|z-a| > R$.

A continuación vemos ejemplos de cómo calcular el radio de convergencia utilizando el teorema de Cauchy-Hadamard y cómo obtener el intervalo de convergencia utilizado algunos resultados previos de convergencia de series.

Ejemplo 10.18. Para determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, usamos el criterio de la raíz así

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1, \qquad \text{luego} \qquad R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

Entonces la serie converge para $|x| < 1$, que coincide con la convergencia de una serie geométrica.

¿Qué podemos decir del comportamiento en los extremos? Cuando $x = -1$, la sucesión correspondiente es la alternante $1, -1, 1, -1, \ldots$, donde las sumas parciales son $1, 0, 1, 0, \ldots$, esto es, la serie diverge. Para $x = 1$, la sucesión es constante $1, 1, 1, \ldots$ y las sumas parciales van creciendo $1, 2, 3, 4, \ldots$, lo que quiere decir que también diverge. Así que el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$ y el radio de convergencia es 1.

Ejemplo 10.19. Encontremos el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x+1)^n$, nuevamente usando el criterio de la raíz. Note que es necesario re-escribir el término n-ésimo para aplicar el criterio. Como $(-1)^n(4x+1)^n = (-1)^n 4^n (x+\frac{1}{4})^n$, entonces, por el criterio de la raíz,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n 4^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|4^n|} = 4,$$

con lo cual

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{4},$$

y así la serie converge para

$$\left|x + \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4},$$

o equivalentemente $-\frac{1}{2} < x < 0$. Analicemos los extremos:

- para $x = -\frac{1}{2}$, la serie queda $\sum(-1)^n(-1)^n = \sum 1$, que es divergente.
- Para $x = 0$, la serie es $\sum(-1)^n$, que también diverge.

Luego, el intervalo de convergencia es $(-\frac{1}{2}, 0)$. Note que el centro del intervalo es $-\frac{1}{4}$ y el radio de convergencia es $\frac{1}{4}$.

También es posible hallar el intervalo de convergencia y luego deducir el centro y el radio, de la siguiente forma:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n(4x+1)^n|} = |4x+1|.$$

Y, por el criterio de la raíz, la serie converge siempre que $\rho < 1$, lo que se traduce en

$$\begin{aligned}|4x+1| &< 1\\ -1 < 4x+1 &< 1\\ -\frac{1}{2} < x &< 0,\end{aligned}$$

que coincide con la solución dada previamente. Esto es particularmente útil cuando el término n-ésimo de la serie no está escrito explícitamente como $a_n(x-a)^n$, pero en el fondo es exactamente lo mismo. Observe que la diferencia entre los dos métodos radica en escribir o no la variable x cuando se calcula el límite. Si no se escribe, encontramos el radio R usando el teorema de Cauchy-Hadamard; mientras que si se escribe la x, encontramos ρ y hacemos que este sea menor que 1. En los ejemplos siguientes, usaremos cualquiera de los dos métodos, según resulte más conveniente.

Ejemplo 10.20. Usaremos el criterio de la razón para encontrar el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n+2}$.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{(n+1)|x^{n+1}|}{n+3}\frac{n+2}{n|x^n|}=\frac{(n+1)(n+2)|x|}{n(n+3)}.$$

Calculando el límite cuando $n\to\infty$, tenemos

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1\left(1+\frac{3}{n}\right)}|x|=|x|<1,$$

así el intervalo es $(-1,1)$. Veamos el comportamiento en los extremos:

- para $x=-1$ la serie queda $\sum\frac{n(-1)^n}{n+2}$, que diverge ya que su término n-ésimo no va para cero.
- Para $x=1$ la serie es $\sum\frac{n}{n+2}$, que también diverge por la misma razón.

Ejemplo 10.21. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$.

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|x|^{2n+3}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^{2n+1}}=\frac{x^2}{n+1}=0.$$

Como en este caso $\rho=0<1$ sin importar el valor de x, tenemos que la serie converge para todo x, o que el intervalo de convergencia es $(-\infty,\infty)$.

Ejemplo 10.22. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$. Por el criterio de la razón,

$$\begin{aligned}\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}&=\frac{|4x-5|^{2n+3}}{(n+1)^{3/2}}\frac{n^{3/2}}{|4x-5|^{2n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}|4x-5|^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2}=|4x-5|^2.\end{aligned}$$

Haciendo $\rho < 1$, encontramos que

$$\begin{aligned} |4x - 5|^2 &< 1 \\ -1 < 4x - 5 &< 1 \\ 1 < x &< \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Veamos el comportamiento en los extremos:

- si $x = 1$, tenemos $\sum \frac{(-1)^{2n+1}}{n^{3/2}} = -\sum \frac{1}{n^{3/2}}$, que es una p-serie con $p = \frac{3}{2}$ y, por lo tanto, converge.
- Si $x = \frac{3}{2}$, tenemos $\sum \frac{1^{2n+1}}{n^{3/2}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$, que es convergente.

Así, el intervalo de convergencia es $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Ejemplo 10.23. Para encontrar el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ utilizamos el criterio de la razón.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty \Longrightarrow R = 0,$$

lo que significa que la serie converge únicamente para $x = 0$.

Ejemplo 10.24. Encontremos el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{4n+1}}{4^{n^2+1}} x^n$.

Esta vez usamos el criterio de la raíz:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{4n+1}}{4^{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{4+\frac{1}{n}}}{4^{n+\frac{1}{n}}} = 0,$$

lo que implica que $R = +\infty$, esto es, la serie converge para cualquier valor de x.

Ejemplo 10.25. Encontremos el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n} x^n$.

Usando el criterio de la raíz o de la razón, encontramos que $\rho = 1$, así que $R = 1$ y la serie converge para $-1 < x < 1$. Verifiquemos la convergencia en los extremos:

- para $x = -1$, la serie es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n}(-1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{3n} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge.

- Para $x = 1$, tenemos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n}(1)^n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, que es la armónica alternante y ya sabemos que converge.

Así pues, el intervalo de convergencia es $(-1, 1]$.

Ejemplo 10.26. Estudiemos la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^n}{n7^n}$.
Por el criterio de la raíz,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n7^n}} = \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \frac{1}{7},$$

entonces $R = 7$, y la serie converge para $-7 < x - 4 < 7$, o mejor para $-3 < x < 11$. Veamos el comportamiento en los extremos:

- para $x = -3$, la serie es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-7)^n}{n7^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge.
- Para $x = 11$, la serie queda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(7)^n}{n7^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, que converge.

Concluimos que el intervalo de convergencia de la serie es $(-3, 11]$.

Finalizamos esta serie de ejemplos con uno en que se ilustra la necesidad del límite superior en el teorema de Cauchy-Hadamard.

Ejemplo 10.27. Encuentre el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^{3n}$.
Podemos proceder de dos formas, la primera sin escribir R e incluyendo la x en el término a_n: por el criterio de la razón, tenemos

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3 x^{3n+3}}{3^{n+1}} \right| \left| \frac{3^n}{n^3 x^{3n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 \frac{1}{3} |x|^3 < 1,$$

implica $|x| < \sqrt[3]{3}$. Esto significa que el radio de convergencia es $R = \sqrt[3]{3}$. La segunda forma es usando el teorema de Cauchy-Hadamard. Note que el denominador de R es precisamente ρ del criterio de la raíz o de la razón sin incluir la variable x. El problema es que

$$a_k = \begin{cases} \frac{n^3}{3^n} & \text{si } k = 3n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De hecho, no podemos usar el criterio de la razón, porque es necesario dividir por términos sucesivos y algunos de los a_k son cero, así que conviene usar el criterio de la raíz. Cuando k es múltiplo de 3, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Pero cuando k no es múltiplo de 3, tenemos que $\sqrt[k]{|a_k|} = 0$, así que se hace necesario usar la definición con límite superior. Como

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}},$$

entonces el radio de convergencia es $R = \sqrt[3]{3}$.

2.1. Propiedades

La importancia de las series de potencias radica en que estas se dejan derivar, integrar término a término y son continuas, al menos en su intervalo de convergencia. Esto puede ser muy útil, por ejemplo, en el caso de funciones con integrales no elementales, tal es el caso de la función $f(x) = e^{x^2}$; si se conociera una serie de potencias que la represente, podríamos hallar una antiderivada, en términos de una serie de potencias, por supuesto, o podríamos hallar una integral definida en algún intervalo adecuado. Con esta motivación en mente, veamos algunas propiedades para el manejo de las series de potencias.

Teorema 10.28. *Dadas dos funciones representadas por series de potencias alrededor del mismo punto $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$, es posible definir la suma y producto por escalar en la intersección de los intervalos de convergencia como*

1. $f(x) + g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n,$

2. $\lambda f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n (x-a)^n.$

Suponga, por ejemplo, que queremos encontrar el desarrollo en series de potencias de la función $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-4x+3}$. Comenzamos descomponiendo f en fracciones parciales

$$\frac{3x-7}{x^2-4x+3} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-1} = -\frac{1}{3(1-\frac{x}{3})} - \frac{2}{1-x}.$$

Ya que cada fracción se puede ver como una serie geométrica con razones $\frac{x}{3}$ y x respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+2\right)x^n. \end{aligned}$$

Donde la igualdad es válida en la intersección de los intervalos de convergencia, esto es, para $|x| < 1$.

El siguiente resultado nos dice que podemos derivar una serie término a término, lo que usualmente se conoce como *derivada formal*, en el sentido en que no se hace cociente de diferencias, pero se usa la derivada de un polinomio (aunque nuestras sumas no son finitas) y el paso al límite. Estos teoremas tienen una versión más general para funciones de variable compleja, sus demostraciones están fuera del alcance de este texto, por eso no se incluyen, pero sí mostramos una gran variedad de ejemplos que nos revelan el uso de estas potentes herramientas para el cálculo con series.

Teorema 10.29. *Considere la función definida por* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, *con radio de convergencia* $R > 0$. *Las siguientes afirmaciones son ciertas para todo punto interior del intervalo de convergencia:*

(i) f *es continua.*

(ii) f *es derivable y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1},$$

que se conoce como derivada formal o derivación término a término.

(iii) f *es integrable y, para* $|x-a| < R$,

$$\int_a^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x a_n(t-a)^n dt,$$

esto es, se puede integrar término a término.

Note que se ha dicho que las afirmaciones son válidas para puntos *interiores* del intervalo de convergencia, en el sentido topológico, pero para nuestro caso, lo que quiere decir es que el comportamiento en los extremos sigue siendo incierto. Lo que sí se sabe es que al derivar no se pueden ganar extremos y al integrar no se pueden perder extremos del intervalo de convergencia. Precisaremos esta idea con unos ejemplos.

Ejemplo 10.30. Empecemos con la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Para hallar su radio de convergencia, aplicamos el criterio del cociente $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, que implica $R = \infty$, entonces esta serie define una función continua cuyo dominio es $\mathbb{R}$, digamos $f(x)$. Ahora la derivamos, teniendo en cuenta el teorema 10.29, obtenemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x).$$

¿Conoce alguna función continua en el conjunto de todos los números reales tal que $f(x) = f'(x)$? si conoce una, ¡las conoce todas!

$$f(x) \quad \text{debe ser de la forma} \quad e^x + C.$$

Para hallar la constante C, evalúe la serie en 0, el valor más sencillo, entonces $f(0) = 1$ y $e^0 + C = 1 \Longrightarrow C = 0$, luego

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Verifiquemos ahora que la integral de la exponencial es ella misma:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!(n+1)} + C \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + C.\end{aligned}$$

Note que la última igualdad se tiene gracias a la constante de integración.

Ejemplo 10.31. Consideremos la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Para encontrar el radio de convergencia, usamos el criterio del cociente o de la raíz y obtenemos $\rho = 1$, de lo cual concluimos que $R = 1$. Analicemos los extremos del intervalo:

- si $x = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge.
- Si $x = -1$, la serie es la armónica alternante, que converge.

Así pues, el intervalo de convergencia de f es $[-1, 1)$. Al derivar término a término, obtenemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}.$$

El radio de convergencia es el mismo, pero el comportamiento en los extremos puede variar, de hecho,

- si $x = -1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, que diverge.
- Si $x = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, que también diverge.

Esto significa que el intervalo de convergencia de $f'(x)$ es $(-1, 1)$, lo que confirma la afirmación siguiente al teorema: *al derivar no se pueden ganar extremos (pero sí se pueden perder).*

Analicemos ahora la integral término a término:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + C,$$

veamos el comportamiento en los extremos:

- si $x = 1$, la serie queda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + C$, que es convergente.
- Si $x = -1$, la serie queda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} + C$, que es absolutamente convergente,

lo que muestra que el intervalo de convergencia es $[-1, 1]$. Confirmamos, así, la segunda afirmación: *al integrar no se pueden perder extremos (pero sí se pueden ganar).*

Ejemplo 10.32. Encontremos la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+1}} x^n$.¿Es esta una serie geométrica o se parece a una geométrica? Podríamos pensar en re-escribirla, dejando como razón $\frac{x}{2}$, el problema es que no es posible "acomodar"el factor $(n+1)$. Podemos pensar también que el término $(n+1)x^n$ es precisamente la derivada de x^{n+1}, así que empezamos reindexando la serie para obtener $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$, que claramente es la derivada de la geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$, que converge a $\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$ para $|x| < 2$. Entonces derivamos esta última función para obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^{n+1}}x^n = \frac{2}{(2-x)^2}$$

para todo x tal que $|x| < 2$.

El ejemplo anterior nos muestra las manipulaciones algebraicas que a menudo son necesarias para usar la teoría de series de potencias con el objetivo de encontrar las sumas de tales series.

Adicionalmente, para series centradas en cero, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 10.33. *Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Entonces,*

1. $f(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n x^n$ *siempre que* x *y* λx *estén en el intervalo de convergencia de* f.
2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x^N)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{Nn}$ *para todo* x *y* x^N *en el intervalo de convergencia de* f.

En la introducción de esta sección, mencionamos que con el uso de series de potencias podemos encontrar una antiderivada de la función e^{x^2}, lo haremos aplicando este último resultado y el ejemplo 10.30.

Ejemplo 10.34. Más precisamente, como tenemos la representación en series de potencias de la función exponencial $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, podemos afirmar que

$$g(x) = e^{x^2} = f(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}.$$

Como nuestro objetivo es encontrar una primitiva de e^{x^2}, procedemos a integrar término a término

$$\int_0^x e^{t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Ejemplo 10.35. Suponga que queremos encontrar el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$. Usemos la información que ya tenemos, esto es,

$$\begin{aligned}\arctan x + C &= \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\end{aligned}$$

siendo válidas estas igualdades para $|x| < 1$. Por el teorema 10.33, afirmamos que

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)4^n}x^{2n+1},$$

para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, esto es, para $|x| < 2$.

Ejemplo 10.36. Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{5n}}{n!}$. El teorema 10.33 sugiere que podemos hacer el cambio de variable $t = x^5$, con lo cual la serie queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}t^n}{n!} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = -e^{-t} = -e^{-x^5}.$$

Ejemplo 10.37. Verifiquemos la igualdad $e^x(x + x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\frac{x^n}{n!}$. Partimos de la serie de la exponencial y multiplicamos por x y por x^2 respectivamente:

$$\begin{aligned}e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ xe^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \\ x^2e^x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
e^x(x+x^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [n+n(n-1)] \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Ejercicios 10.2

1. Encuentre el radio de convergencia de las series de potencias. No olvide verificar el comportamiento en los extremos.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nk^n}(x-k)^n$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} x^{2n}$.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}(-2x)^{n-1}$.

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$.

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$.

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\, x^n$.

   g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{n^3}$.

   h) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

2. Use el teorema de Cauchy-Hadamard y su versión con límite superior para encontrar el radio de convergencia de la serie

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{2^4} - \frac{x^5}{11} + \cdots$$

3. Exprese la función $f(x) = \frac{1}{4-x}$ como una serie de potencias y encuentre su radio de convergencia.

4. Dadas dos series absolutamente convergentes $\sum a_j$ y $\sum b_k$, se define el **producto de Cauchy** como

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\right), \text{ donde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Use esta definición y el resultado del ejercicio anterior para encontrar una expresión en serie de potencias de la función $g(x) = \frac{1}{(4-x)^2}$; y encuentre también su radio de convergencia.

5. Encuentre una expresión en serie de potencias para la función $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+4}$ y su radio de convergencia (*sugerencia:* descomponga en fracciones parciales).

6. Encuentre la expansión en serie de potencias de $\frac{z+1}{z-1}$ y su radio de convergencia.

7. Considere la serie de potencias de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y verifique que su derivada coincide con la serie de potencias para $\cos x$.

8. Desarrolle en serie de potencias las siguientes funciones.

   a) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.
   b) $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$.
   c) $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
   d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.
   e) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.
   f) $f(x) = \arctan(5x)$.

9. Encuentre la serie de potencias para $f(x) = \frac{2x-1}{2x^2-6x+5}$ (*sugerencia:* use fracciones parciales).

10. Encuentre la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

11. Para $m \in \mathbb{R}$, definimos la **serie binómica** como

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n, \qquad |x| < 1,$$

donde

$$\binom{m}{0} := 1, \qquad \binom{m}{n} := \frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!} \qquad \text{para } n \geq 1.$$

   a) Muestre que si m es un entero, la serie es una suma finita.
   b) Utilice el criterio de la razón para verificar que la serie converge para $|x| < 1$.
   c) Verifique que

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

12. Use el ejercicio anterior para aproximar $\sqrt{405}$. Puesto que 400 es el cuadrado perfecto más próximo a 405, escriba

$$\sqrt{405} = \sqrt{400+5} = 20\left(1+\frac{1}{80}\right)^{\frac{1}{2}}$$

y aplique (c) del ejercicio anterior, con $x = \frac{1}{80}$ y $m = \frac{1}{2}$.

13. Usando la serie binómica, encuentre un valor aproximado para $\sqrt{99}$.

14. Encuentre el desarrollo en serie de potencias para $(1+x)^{-1}$, considerándola como una serie binómica, y compare con el resultado ya conocido.

15. Utilice propiedades de logaritmo para

    a) encontrar el desarrollo en serie de potencias para $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

    b) Hallar $\ln 2,\ \ln 3,\ \ln 8,\ \ln 6$.

16. Utilice el teorema 10.29 y la serie de potencias del ejemplo 10.34 para aproximar $\int_0^1 e^{x^2}dx$.

17. Asumiendo que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ está representada por la serie de potencias de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

    a) halle el radio de convergencia de la serie.

    b) Represente la función $\cos x$ por medio de una serie de potencias.

    c) Halle una aproximación para la integral $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2 dx$.

    d) ¿Qué serie podría representar a la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$? ¿Cuál podría ser una antiderivada de esta función?

18. Demuestre la versión del teorema 10.14 en el caso de una serie de potencias alrededor del punto a.

3. Series de Taylor y Maclaurin

Si una función f tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo alrededor de un punto a, podemos definir una serie de potencias tal que su k-ésima suma parcial sea el polinomio de Taylor de orden k alrededor del punto a. No siempre la serie de Taylor asociada a una función f converge a la misma función f. En los casos en que la serie de Taylor asociada a f converge a f resulta de mucha utilidad para manipular la función f, por fortuna, esto ocurre en muchos casos prácticos. Entre las aplicaciones de las series de Taylor que discutiremos está la de hallar series de potencias que converjan a números irracionales, lo cual nos permite hacer aproximaciones numéricas. Utilizando los resultados del teorema 10.29, podemos hallar la serie de Taylor de funciones con integrales no elementales y hallar sus integrales definidas en términos de series.

Definición 10.38. *Suponga que f tiene derivadas de todos los órdenes en todo punto de un intervalo abierto con centro en a. La* ***serie de Taylor de f alrededor de*** *a es la siguiente serie de potencias*

$$T_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{10.8}$$

donde $f^{(k)}(a)$ es la k-ésima derivada de f evaluada en el punto a y $f^{(0)} = f$.

Nota 10.39. *Cuando trabajamos alrededor de cero, la serie de Taylor de f se conoce como* **serie de Maclaurin** *de f.*

Observe que, para todo $k \geq 0$, la k-ésima suma parcial de la serie de Taylor coincide con el polinomio de Taylor de grado k alrededor del mismo punto.

Supongamos que f es una función que tiene derivadas de todos los órdenes en un intervalo que contenga un punto a. En la sección 1, definimos su polinomio de Taylor de grado n alrededor de $x = a$ y su resto como

$$P_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \text{y} \qquad R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x).$$

Ahora bien, si $R_{n,a} \to 0$ cuando $n \to \infty$, la función f será representada por su serie de Taylor. Escribimos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

y también decimos que la serie de Taylor generada por f alrededor de a converge a f.

Inmediatamente surge una pregunta: ¿cuándo una función está representada por su serie de Taylor? los siguientes criterios[2], que presentamos

[2] Seguimos la notación del libro de Apostol, [1] capítulo 11, donde también se puede consultar su demostración.

sin demostración, responden parcialmente esta pregunta, pero desafortunadamente no se conoce un criterio necesario y suficiente.

Teorema 10.40. *Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto I con centro en a. Si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n$$

para todo $n > 0$ y cada $x \in I$, entonces $f(x) = T_{f,a}(x)$ para todo $x \in I$.

Ejemplo 10.41. Determinamos que la serie de Maclaurin de la función exponencial $f(x) = e^x$ converge a f. Sea $I = (-c, c)$ un intervalo abierto (fijo). Como $|f^{(n)}(x)| = e^x$ y f es creciente, podemos considerar $M = e^c$, entonces

$$f^{(n)}(x) = e^x \leq \left(e^c\right)^n \quad \text{para todo } x \in I,$$

luego $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Como esto ocurre para cualquier intervalo simétrico alrededor del origen, $T_{f,0} = e^x$ para todo numero real x.

Ejemplo 10.42. Como ejercicio, aplique el teorema 10.40 y compruebe que la serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{sen} x$ converge a $\operatorname{sen} x$ para todo x real, es decir que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots .$$

Teorema 10.43 (Bernstein). *Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo cerrado $I = [0, c]$. Si $f(x) \geq 0$ y $f^{(n)}(x) \geq 0$ para todo $n \geq 1$ y todo $x \in I$, entonces*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n.$$

Existe un ejemplo clásico que muestra que la serie de Taylor asociada a una función no necesariamente converge a esta.

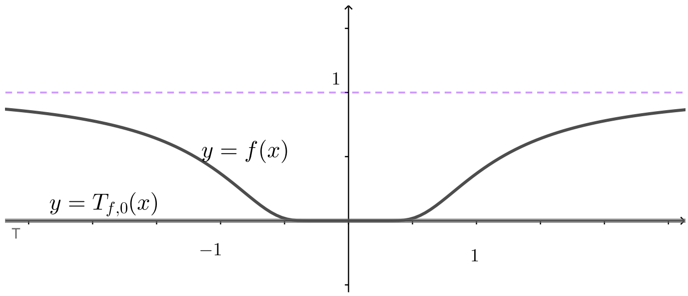
Ejemplo 10.44. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f es continua en 0 y, más aún, tiene derivada de todos los órdenes en $\mathbb{R}$. En 0, su primera derivada se puede calcular de la siguiente forma

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{r \to \infty} \frac{r}{e^{r^2}} = 0,$$

tomando r como $\frac{1}{h}$. En general, $f^{(n)}(0) = 0$, es decir, la serie de Maclaurin de f es la constante 0. Este ejemplo muestra que, aún cuando la serie de Taylor converge para todo número real, no necesariamente converge a la función a la cual está asociada.



Podemos ahora preguntarnos ¿cuántos términos se deben usar para aproximar una función con un grado de precisión dado? La respuesta la da el siguiente teorema.

Teorema 10.45. *Si existe una constante positiva M tal que $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ para toda t entre x y a, entonces el residuo $R_{n,a}(x)$ satisface*

$$|R_{n,a}(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Supongamos que tenemos una función tal que su serie de Taylor asociada converge a la misma función. Sin embargo, solo podemos sumar algunos términos de la serie. Los siguientes ejemplos muestran cómo calcular la cantidad de términos necesarios que se deben sumar para obtener exactitud en ciertas cifras decimales.

Ejemplo 10.46. Del ejemplo 10.42, conocemos la serie de potencias que representa a $\operatorname{sen} x$ en todo el eje real. ¿Cuántos términos debemos sumar para obtener una buena aproximación? Como diría Einstein, eso es relativo, pues depende de lo que cada uno considere aceptable para cada caso específico. Si los cálculos no son significativos, tal vez una aproximación de dos cifras decimales es buena, pero si lo que se quiere es acoplar un satélite, por ejemplo, estamos seguros que necesitamos tantas cifras decimales como sea posible. En cualquier caso, de acuerdo con la medida del error que deseamos, es posible estimar el número n de tal forma que la diferencia entre el valor real y la aproximación sea del orden que se pide.

Precisemos esta idea aproximando el valor de sen 1 con un error menor que 4×10^{-4}. Para $x = 1$, la serie de $\operatorname{sen} x$ es

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

De acuerdo con el teorema, necesitamos las derivadas de todos los órdenes de $f(x) = \operatorname{sen} x$, que sabemos oscilan entre $\pm \operatorname{sen} x$ y $\pm \cos x$. En cualquier caso, sabemos que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$, así que el M que pide el teorema puede ser $M = 1$. Resolvemos la siguiente desigualdad

$$|R_{n,a}(x)| \leq 1\frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq 4 \times 10^{-4}$$
$$\frac{10^4}{4} \leq (n+1)!$$

Como sabemos que $6! = 720$ y $7! = 5040$, tenemos que $n = 6$ satisface la desigualdad (y cualquier entero mayor que 6). Entonces, la aproximación que estamos buscando es

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0.841\overline{6},$$

mientras que el valor real que arroja WolframAlpha es $0.8414709848\ldots$

Ejemplo 10.47. Suponga que queremos calcular e con un error menor que 10^{-8}. Como ya vimos, la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ está dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n,0}(x).$$

Como queremos aproximar el valor de $e = e^1$, hacemos $x = 1$ en la expresión anterior

$$e^x = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1).$$

Ahora bien, si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 1$, y si calculamos el residuo con la fórmula (10.3), tenemos que

$$R_{n,0}(1) = \frac{e^c}{(n+1)!},$$

donde c es algún real entre 0 y 1. Podemos considerar la M del teorema anterior como $M = 3$, pues sabemos que si $0 < t < 1$, entonces $1 < e^t < 3$. Luego, de acuerdo con el teorema

$$|R_{n,0}(1)| \leq 3\frac{|1-0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3}{(n+1)!}.$$

Como queremos que el error (que en este caso quiere decir residuo) sea menor que 10^{-8}, resolvemos la siguiente desigualdad para n

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-8}$$
$$3 \cdot 10^8 \leq (n+1)!.$$

Por inspección, encontramos que $12! = 479.001.600$, así que tomamos $n = 11$. Luego, la aproximación para e que nos da un error menor que 10^{-6} es

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} \approx 2,71828182.$$

Ejemplo 10.48. Determinar la serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{sen} 2x$. En este caso, podemos proceder de dos formas. La primera es aprovechando el ejercicio de hallar el polinomio de Taylor de $g(x) = \operatorname{sen} x$. Así que de acuerdo con el ejemplo 10.2, la serie de Maclaurin de $g(x) = \operatorname{sen} x$ es

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots ;$$

si sustituimos x por $2x$, tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \cdot \frac{(2x)^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots \\ &= 2x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \frac{2^7}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^k \cdot \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1} + \cdots .\end{aligned}$$

Otra forma de encontrar la serie es haciendo la lista de las derivadas y evaluando, tal como lo hicimos en la sección de polinomios de Taylor.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} 2x & f(0) = 0 \\ f'(x) = 2\cos 2x & f'(0) = 2 \\ f''(x) = -2^2 \operatorname{sen} 2x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -2^3 \cos 2x & f'''(0) = -2^3 \\ f^{(4)}(x) = 2^4 \operatorname{sen} 2x & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = 2^5 \cos 2x & f^{(5)}(0) = 2^5, \\ \vdots & \end{array}$$

en donde, después de reemplazar, llegamos a la misma expresión.

Ejercicios 10.3

1. Encuentre una aproximación para $\frac{\pi}{4}$ usando una serie de Taylor.

2. Encuentre la serie de Maclaurin para cada una de las siguientes funciones y determine los valores de x para los cuales es convergente.

a) xe^x.

b) $x\cos x$.

c) $x^2 \operatorname{sen} x$.

d) $x\cos(2x)$.

e) e^{x^2}.

f) $\ln(1+x)$.

g) $\operatorname{sen}\sqrt{x}$.

h) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

i) $\ln(1-x)$.

j) $\operatorname{arc\,sen} x$.

k) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

l) $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

m) $\ln(\cos x)$.

n) $e^x \operatorname{sen} x$.

3. Usando las series de potencias del ejercicio anterior, aproxime los valores de lo siguientes números.

   a) $\operatorname{arc\,sen} 1$.

   b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$.

   c) e^2.

   d) $\ln 2$.

4. Complete el ejemplo 10.42 y compruebe que la serie de Maclaurin asociada a $\operatorname{sen} x$ converge a $\operatorname{sen} x$.

5. Realice la misma verificación del ejercicio 4 para la función $\cos x$.

6. Encuentre la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}^2 x$.

7. ¿Es posible verificar la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ usando series de Maclaurin?

8. Encuentre una aproximación para $\frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}\right)$ con una exactitud de tres cifras decimales.

Apéndice

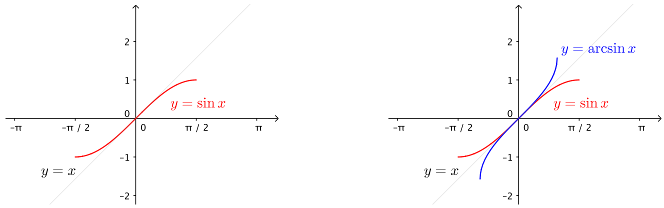
A

Funciones especiales

A continuación revisamos algunos conceptos básicos de las funciones trigonométricas inversas, las hiperbólicas y sus derivadas.

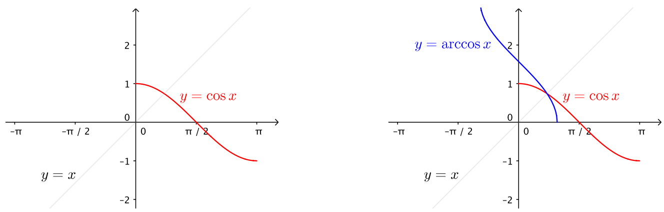
Funciones trigonométricas inversas

Teniendo en cuenta que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función inyectiva cuando se considera definida en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, podemos pensar en su función inversa, que se nota $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$. Recuerde que la gráfica de la inversa se obtiene reflejando la función original con respecto a la recta $y = x$.



A partir de esto, podemos concluir que el dominio de $\operatorname{arc\,sen} x$ es $[-1, 1]$ (el rango de f) y el rango $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (el dominio de f).

De la misma forma, consideramos $g(x) = \cos x$ definida sobre $[0, \pi]$ para que sea inyectiva y así obtener su inversa, llamada $\arccos x$, con dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$.



Las derivadas de estas funciones se pueden hallar por derivación implícita, usando la identidad pitagórica. Por ejemplo, si $y = \operatorname{arc\,sen} x$, entonces $\operatorname{sen} y = x$. Al derivar obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos y \cdot y' &= 1 \\
y' &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} \\
y' &= \frac{1}{1 - x^2}.
\end{aligned}$$

Si tenemos $y = \arctan x$, esto significa que $\tan y = x$. Al derivar implícitamente obtenemos $\sec^2 y \cdot y' = 1$, al despejar queda $y' = \frac{1}{\sec^2 y}$, y en este punto es donde usamos la identidad $\tan^2 y + 1 = \sec^2 y$, entonces obtenemos $y' = \frac{1}{\tan^2 y + 1}$. Por último sustituimos $\tan y$ por x, con lo cual

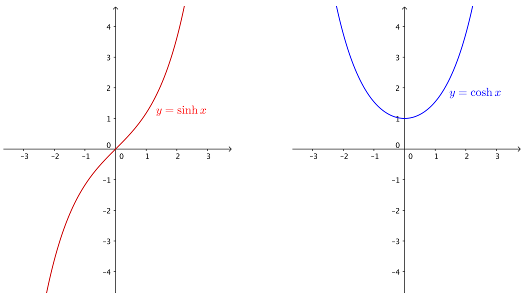
$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Funciones hiperbólicas

Recordemos las definiciones de seno y coseno hiperbólico, respectivamente:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

De acuerdo con estas expresiones, podemos ver que cada una de estas funciones tiene como dominio el conjunto de los números reales. Para determinar su rango, veamos sus gráficas.



De acuerdo con ellas, $\operatorname{senh} x$ recorre todos los reales, mientras que $\cosh x$ tiene como rango $[1, \infty)$. De estas gráficas también podemos deducir que $\operatorname{senh} x$ es una función impar y $\cosh x$ es par.

Al igual que con las funciones trigonométricas, aquí existe una identidad fundamental

$$1 = \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x,$$

que se deduce de la definición, así:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}\\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

Encontremos de forma explícita las funciones inversas hiperbólicas. Si $y = \cosh^{-1} x$, podemos escribir $\cosh y = x$, esto es,

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^y + \frac{1}{e^y}\right) = \frac{e^{2y}+1}{2e^y} \\ 2e^y x &= e^{2y} + 1 \\ 0 &= e^{2y} - 2xe^y + 1. \end{aligned}$$

Esta es una ecuación cuadrática en la variable e^y, luego

$$\begin{aligned} e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} \\ e^y &= x \pm \sqrt{x^2-1} \\ y &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \end{aligned}$$

donde hemos omitido el signo menos delante de la raíz con el objeto de obtener una función; y para asegurarnos de que el argumento del logaritmo sea positivo, debemos tomar $x \in [1, \infty)$. De manera similar, podemos deducir que la función inversa $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ puede escribirse explícitamente como $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Al hacer los cálculos, el estudiante verá que nuevamente se ha omitido el signo menos de la raíz, pero esta vez podemos tomar $x \in \mathbb{R}$.

Es evidente, a partir de las definiciones, que la derivada de $\operatorname{senh} x$ es $\cosh x$ y la derivada de $\cosh x$ es $\operatorname{senh} x$. Estas son más fáciles de recordar que las trigonométricas, pues ambas son positivas. Veamos a continuación las derivadas de las hiperbólicas inversas, que nos ayudarán en el cálculo de integrales. Si $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} y &= x \\ \cosh y \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 y}}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la diferenciación implícita y la identidad fundamental de las funciones hiperbólicas. Por último, vamos a sustituir $\operatorname{senh} y$ por x, con lo que obtenemos

$$\frac{d(\operatorname{senh}^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Esto nos permite concluir que $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1} x + C$.

Como es de esperar, las demás funciones hiperbólicas se definen a partir de las dos primeras así:

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}.$$

Para ilustrar el uso de las funciones hiperbólicas, considere $\int \sqrt{1+x^2}dx$. Lo primero que se nos puede ocurrir es la sustitución $x = \tan\theta$, que nos lleva a $\int \sec^3\theta d\theta$, cuya solución está en el ejemplo 5.23. Por otra parte, podemos pensar en hacer $x = \operatorname{senh} t$, con lo cual la integral se transforma en

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}\ \cosh t\,dt = \int \cosh^2 t\,dt,$$

para la última integral apelamos a la definición

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\,dt \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right] + C. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Encuentre el dominio y rango de las funciones trigonométricas inversas que faltan, explique. Realice la gráfica de cada una de ellas.

2. Calcule las derivadas de las funciones trigonométricas inversas restantes.

3. Verifique (mediante diferenciación) las siguientes fórmulas de integración.

   a) $\arctan x + C = \int \frac{1}{1+x^2}dx.$

   b) $\operatorname{arc\,sen} x + C = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

   c) $\arccos x + C = \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

   d) $\sec^{-1} x + C = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx.$

   e) $\cot^{-1} x + C = \int \frac{-1}{x^2+1}dx.$

4. Encuentre el dominio y rango de las funciones hiperbólicas que faltan y de sus inversas. Realice la gráfica de cada una de ellas.

5. Pruebe que $\operatorname{senh} x$ es una función impar y $\cosh x$ una función par.

6. Verifique las identidades:

   a) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$,

   b) $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$.

7. Deduzca la forma explícita para $y = \operatorname{senh}^{-1} x$.

8. Calcule $\frac{d}{dx}(\cosh x)$.

9. Encuentre la derivada de las funciones hiperbólicas y de sus inversas.

10. Verifique la siguiente fórmula de integración

$$\cosh^{-1} x + C = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

11. En los siguientes problemas, calcule la integral utilizando la sustitución indicada.

   a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$, con $x = \operatorname{senh} t$.

   b) $\displaystyle\int \frac{dw}{\sqrt{1 + w^2}}$, con $w = \tan t$.

   c) $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$, con $u = \cosh t$.

   d) $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$, con $y = \sec t$.

Apéndice B

Error aproximando

No se confunda, no crea que hemos cometido errores en el capítulo 4, lo que vamos a mostrar en este apéndice es cómo se pueden acotar los errores cometidos al utilizar una aproximación numérica para calcular el valor de una integral definida.

Error en la regla del trapecio. Como ya dijimos, la regla del trapecio nos permite aproximar la integral definida de una función por medio de polinomios lineales, pero al ser una aproximación siempre se comete un error, esto es, el valor obtenido nunca será exacto -a menos que estemos aproximando una función lineal, lo cual no es muy interesante-. A continuación deducimos la fórmula dada en el capítulo 4, cuya prueba no se incluyó allí porque es necesario usar algunos resultados que pueden no ser conocidos por los estudiantes del curso de cálculo integral. La prueba que se muestra se realizó siguiendo las sugerencias dadas por Spivak en [5].

Lo primero que necesitamos es la **fórmula de interpolación de Lagrange**, la cual afirma que, dados $x_1, \ldots, x_n$ números distintos, es posible encontrar una función polinómica P de grado $n-1$ tal que $P(x_i) = a_i$, donde $a_1, \ldots, a_n$ son números dados. En efecto,

$$P(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}. \tag{B.1}$$

Afirmación B.1. *Suponga que tenemos f, una función continua en $[a, b]$, n-veces diferenciable en (a, b), y que $f(x) = 0$ para $n+1$ puntos diferentes de $[a, b]$. Entonces, $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x de (a, b).*

Demostración. Demostraremos esto haciendo inducción sobre n.

- $n = 1$. Suponemos f diferenciable en (a, b) y $f(x) = 0$ en dos puntos x_1 y x_2. Como f es continua en $[x_1, x_2]$, existe un valor $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(x) = 0$ (T. Rolle).

- Suponemos que la afirmación es válida para $n-1$. Sea f n-veces diferenciable tal que $f(x) = 0$ para los $n+1$ puntos $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$. Entonces, si consideramos los n primeros puntos, tenemos que, por hipótesis de inducción, existe x tal que $f^{(n-1)}(x) = 0$ y, para el mismo x, se tiene que $f^{(n)}(x) = 0$.

☑

Afirmación B.2. *Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ puntos arbitrarios del intervalo $[a, b]$ y sea*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i).$$

Suponga que f es una función $(n+1)$-veces diferenciable y que P es el polinomio de interpolación de Lagrange de f, de grado n. Entonces, para cada x de $[a, b]$, existe un número c de (a, b) tal que

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}. \tag{B.2}$$

Demostración. En efecto, si x es uno de los x_i, como $f(x_i) = P(x_i)$, entonces $f(x) - P(x) = 0 = Q(x)$, así que se puede escoger cualquier c. Supongamos $x \neq x_i$ para cada i y sea

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)].$$

Para $i = 1, \ldots, n+1$, tenemos $F(x_i) = 0$ y, además, $F(x) = 0$, en otras palabras, F se anula en $n+2$ puntos diferentes. Entonces, por la afirmación B.1 existe $c \in (a, b)$ tal que $F^{(n+1)}(c) = 0$.

Ahora bien, para calcular la derivada $(n+1)$-ésima de F, recordamos que P es un polinomio de grado $\leq n$, así que $P^{(n+1)}(t) = 0$, mientras que $Q^{(n+1)}(t) = (n+1)!$, luego

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(t) &= Q(x)[f^{(n+1)}(t) - P^{(n+1)}(t)] - Q^{(n+1)}(t)[f(x) - P(x)] \\ &= Q(x)[f^{(n+1)}(t) - 0] - (n+1)![f(x) - P(x)]. \end{aligned}$$

Entonces

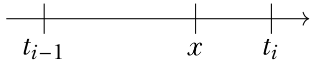
$$0 = F^{(n+1)}(c) = Q(x) f^{(n+1)}(c) - (n+1)![f(x) - P(x)],$$

lo que implica

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

que era lo que se quería. ☑

Teniendo en mente que nuestro objetivo es aproximar la integral de f, tomemos $n = 1$ y $x_1 = t_{i-1}$, $x_2 = t_i$ (dos puntos de una partición) y adicionalmente supongamos que f'' es continua.



Observe que en este caso nuestra función Q es $Q(x) = (x - t_{i-1})(x - t_i)$ y, para $x \in [t_{i-1}, t_i]$, se tiene que $Q(x) \leq 0$. Como Q es de grado 2, podemos considerar P_i la función lineal que coincide con f en t_{i-1} y t_i. Si n_i y N_i son el mínimo y máximo de f'' en $[t_{i-1}, t_i]$, entonces, para el punto $c \in [t_{i-1}, t_i]$ dado por la afirmación anterior, se tiene que

$$n_i \leq f''(c) \leq N_i;$$

multiplicando por $Q/2$, tenemos

$$\frac{n_i}{2}(x-t_{i-1})(x-t_i) \geq (x-t_{i-1})(x-t_i)\frac{f''(c)}{2} \geq \frac{N_i}{2}(x-t_{i-1})(x-t_i);$$

remplazando la expresión del medio de acuerdo con (B.2)

$$\frac{n_i}{2}(x-t_{i-1})(x-t_i) \geq f(x) - P_i(x) \geq \frac{N_i}{2}(x-t_{i-1})(x-t_i). \tag{B.3}$$

Si adicionalmente definimos

$$I = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x-t_{i-1})(x-t_i)dx,$$

tenemos

$$\frac{n_i I}{2} \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f - P_i) \geq \frac{N_i I}{2}. \tag{B.4}$$

Veamos cuál es el valor de I

$$\begin{aligned}
I &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x^2 - (t_i + t_{i-1})x + t_{i-1}t_i)\, dx \\
&= \frac{x^3}{3} - (t_i + t_{i-1})\frac{x^2}{2} + (t_{i-1}t_i)x\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \\
&= \frac{t_i^3}{3} - \frac{t_{i-1}^3}{3} - \frac{t_i^2(t_i + t_{i-1})}{2} + \frac{t_{i-1}^2(t_i + t_{i+1})}{2} + t_i^2 t_{i-1} - t_{i-1}^2 t_i \\
&= \frac{t_{i-1}^3}{6} - \frac{t_i^3}{6} - \frac{t_{i-1}^2 t_i}{2} + \frac{t_i^2 t_{i-1}}{2} \\
&= \frac{(t_{i-1} - t_i)^3}{6} = -\frac{h^3}{6},
\end{aligned}$$

donde $h = (t_i - t_{i-1})$. Reemplazando esta expresión en (B.4), obtenemos

$$-\frac{n_i h^3}{12} \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f - P_i) \geq -\frac{N_i h^3}{12}. \tag{B.5}$$

Note que estamos pensando en la partición $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$. Para facilitar las cosas, suponemos que es una partición regular, así que podemos escribir $h = \frac{b-a}{n}$ y una desigualdad del tipo (B.5) para cada subintervalo. Al sumarlas todas, obtenemos

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n n_i}{n} \leq T_n - \int_a^b f \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n}.$$

Si m es el mínimo y M el máximo de f'' sobre $[a, b]$, entonces $m \leq n_i$ y $N_i \leq M$ para todo i y, además, $m \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{n}$ y $\frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n} \leq M$. Luego,

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot m \leq T_n - \int_a^b f \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M.$$

Como hemos supuesto que f'' es continua, entonces existe c en (a, b) tal que

$$T_n - \int_a^b f = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

Hemos probado el siguiente resultado.

Teorema B.3 (Error en la regla del trapecio). *Si f'' es continua y M es una cota superior para los valores de $|f''|$ en $[a, b]$, entonces el error E_T en la aproximación por la regla del trapecio de la integral desde a hasta b de $f(x)$, en n pasos, satisface la desigualdad*

$$|E_T| = \left| T_n - \int_a^b f \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Error en la regla de Simpson. Veamos ahora cómo acotar el error cuando se usa la regla de Simpson para aproximar la integral definida de una función f. De acuerdo con lo visto en el capítulo 4, la ecuación 4.1 nos proporciona un polinomio $P(x)$ de grado 2, que coincide con f en los puntos a, b y $\frac{a+b}{2}$, entonces aproximamos $\int_a^b f(x)dx$ por medio de $\int_a^b P(x)dx$. Ahora consideramos el polinomio cúbico definido por

$$Q(x) = P(x) + A(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

para alguna función A. Es fácil verificar que $Q(a) = f(a)$, $Q(b) = f(b)$, $Q\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. En efecto,

$$\begin{aligned} Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) &= P'\left(\frac{a+b}{2}\right) + A\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) \\ &= P'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{A(b-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

Como $b - a \neq 0$, podemos escoger la función A tal que se anule en $\frac{a+b}{2}$ y, así, $Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. (Esta observación muestra la necesidad de incluir la función A).

Es un ejercicio de rutina verificar que $\int_a^b A(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = 0$, lo que implica que $\int_a^b Q(x)dx$ coincide con $\int_a^b P(x)dx$, cuyo valor está dado por (4.2).

Afirmación B.4. *Si $f^{(4)}(x)$ está definida en $[a,b]$, entonces para cada x en $[a,b]$ tenemos*

$$f(x) - Q(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \tag{B.6}$$

para algún ξ en (a,b).

Demostración. Ya sabemos que la afirmación es válida si x es a, b ó $\frac{a+b}{2}$. Para verificar la afirmación en otros valores de x, definimos

$$\begin{aligned} F(t) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)[f(t) - Q(t)] \\ - (t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 (t-b)[f(x) - Q(x)]. \end{aligned}$$

Con esta definición, tenemos que F se anula en a, b, $\frac{a+b}{2}$ y x. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a < \frac{a+b}{2} < x < b$, lo que implica que F' se anula en tres puntos ξ_1, ξ_2, ξ_3, con

$$a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < x < \xi_3 < b.$$

Adicionalmente, $F'(\frac{a+b}{2}) = 0$. Hasta ahora tenemos que F' se anula en cuatro puntos de (a,b), de acuerdo con la afirmación B.1, se tiene que $F^{(4)}$ es cero en algún punto $\xi \in (a,b)$. La cuarta derivada de F es

$$F^{(4)}(t) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)[f^{(4)}(t) - Q^{(4)}(t)] - 24[f(x) - Q(x)].$$

Teniendo en cuenta que Q es un polinomio de grado 3, entonces

$$\begin{aligned} 0 = F^{(4)}(\xi) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)f^{(4)}(\xi) - 4![f(x) - Q(x)] \\ f(x) - Q(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}, \end{aligned}$$

que era lo que se quería. ☑

Nuestro propósito es imitar la prueba realizada para acotar el error en la regla del trapecio. Para tal fin, consideramos una partición regular del intervalo $[a,b]$ en $2n$ subintervalos, donde la longitud de cada subintervalo será $\Delta x = \frac{b-a}{2n}$. Ya que la afirmación anterior es válida para cualquier intervalo cerrado, tenemos una ecuación del tipo (B.6) para cada subintervalo

$[t_{i-1}, t_{i+1}]$, cuyo punto medio es t_i. Sean además m_i y M_i el mínimo y el máximo de $f^{(4)}$ sobre $[t_{i-1}, t_{i+1}]$. Entonces

$$\frac{m_i}{4!}(x - t_{i-1})(x - t_i)^2 (x - t_{i+1}) \geq f(x) - Q_i(x) \geq \frac{M_i}{4!}(x - t_{i-1})(x - t_i)^2 (x - t_{i+1}) \tag{B.7}$$

para todo $x \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$. Otra vez, note que $(x - t_{i-1})(x - t_i)^2 (x - t_{i+1})$ es negativo. Observe además que el polinomio cúbico $Q_i(x)$ está dado por

$$Q_i(x) = P_i(x) + A_i(x - t_{i-1})(x - t_i)(x - t_{i+1}),$$

donde $P_i(x)$ es el polinomio de grado 2 que coincide con f en los puntos t_{i-1}, t_i y t_{i+1} y A_i es alguna función que se anula en t_i. Copiando la prueba del trapecio, sea

$$J := \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} (x - t_{i-1})(x - t_i)^2 (x - t_{i+1}) dx.$$

Para resolver la integral, usamos la sustitución $u = x - t_i$ y escribimos $h = t_{i+1} - t_{i-1}$, entonces

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_{i-1}-t_i}^{t_{i+1}-t_i} (u + t_i - t_{i-1}) u^2 (u + t_i - t_{i+1}) du \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u^2 \left(u + \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{2}\right)\left(u + \frac{t_{i-1} - t_{i+1}}{2}\right) du \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(u^4 - u^2 \frac{(t_{i+1} - t_{i-1})^2}{4}\right) du \\ &= \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{12}h^2\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{-h^5}{120}. \end{aligned}$$

Si en (B.7) integramos entre t_{i-1} y t_{i+1} a cada lado, obtenemos

$$\frac{m_i}{4!}J \geq \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(x) - Q_i(x) dx \geq \frac{M_i}{4!}J.$$

Al sustituir el valor de J y multiplicar por -1, tenemos

$$\frac{h^5}{120}\frac{m_i}{4!} \leq \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} Q_i(x) - f(x) dx \leq \frac{h^5}{120}\frac{M_i}{4!}. \tag{B.8}$$

Para cada intervalo $[t_{i-1}, t_{i+1}]$, tenemos una desigualdad del tipo (B.8). Al sumarlas todas, conseguimos

$$\frac{(b-a)^5}{120n^5}\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{4!} \leq \int_a^b Q_i(x) - f(x)dx \leq \frac{(b-a)^5}{120n^5}\frac{\sum_{i=1}^n M_i}{4!}$$
$$\frac{(b-a)^5}{4!\ 120n^4}\frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n} \leq S_{2n} - \int_a^b f(x)dx \leq \frac{(b-a)^5}{4!\ 120n^4}\frac{\sum_{i=1}^n M_i}{n}.$$

Si m y M son respectivamente el mínimo y el máximo de $f^{(4)}(x)$ en $[a, b]$, entonces $m \leq \frac{\sum m_i}{n}$ y $\frac{\sum M_i}{n} \leq M$, luego

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4}m \leq S_{2n} - \int_a^b f(x)dx \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}M.$$

Como hemos supuesto que $f^{(4)}$ es continua, entonces existe algún valor $c \in (a, b)$ tal que

$$S_{2n} - \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(c).$$

Teorema B.5 (Error en la regla de Simpson). *Si $f^{(4)}$ es continua y M es cualquier cota superior para los valores de $|f^{(4)}(x)|$ en $[a, b]$, entonces el error E_S al aproximar la integral de $f(x)$ desde a hasta b con $2n$ subintervalos satisface la desigualdad*

$$|E_S| \leq \left|S_{2n} - \int_a^b f\right| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}.$$

Bibliografía

[1] T.M. Apostol, *Calculus, cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*, Reverté, segunda edición, 2002.

[2] N. Piskunov, *Cálculo diferencial e integral, vol. i, ii*, Mir Moscú, tercera edición, 1977.

[3] F. Revilla, *www.fernandorevilla.es*, http://fernandorevilla.es/blog/2014/06/05/criterios-de-la-raiz-cociente-y-raabe/, Recuperada: 2019-06-04.

[4] H. Dueñas & M. Rubio, *Cálculo diferencial en una variable, colección notas de clase*, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, 2015.

[5] M. Spivak, *Calculus*, Reverté, segunda edición, 2012.

[6] J. Stewart, *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*, Cengage Learning, sexta edición, 2008.

[7] G. Thomas, *Cálculo en una variable*, Pearson Education, undécima edición, 2005.

[8] S. Vera, *Cálculo para la ingeniería, tomo II*, https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/05/20-Calculo-para-la-Ingenieria-Salvador-Vera-Tomo-II.pdf, Recuperada: 2019-06-04.

[9] J. Abia Vian, *Series numéricas, anexo 4*, http://www.ma.uva.es/antonio/Industriales/Apuntes12-13/Mat1/SucesionesSeriesAnexo.pdf, Recuperada: 2019-06-04.

Editado por el Centro Editorial de la Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.
Fuente principal Baskerllive y Fira Sans.

Colección
textos

Este libro está dirigido a estudiantes de la carrera de Matemáticas y puede ser usado como texto guía para estudiantes de Ciencias e Ingeniería que estén en su primer año de formación matemática universitaria. Tratamos de usar en él un lenguaje sencillo, sin dejar de lado el formalismo y la rigurosidad exigidas para demostrar de ciertos teoremas. El libro se divide en cuatro partes principales: la integral definida, técnicas de integración, aplicaciones de la integral y sucesiones y series. Cada capítulo contiene una sección de ejercicios con distinto grado de dificultad, así como numerosos ejemplos y aplicaciones para facilitar el aprendizaje.

Matemáticas