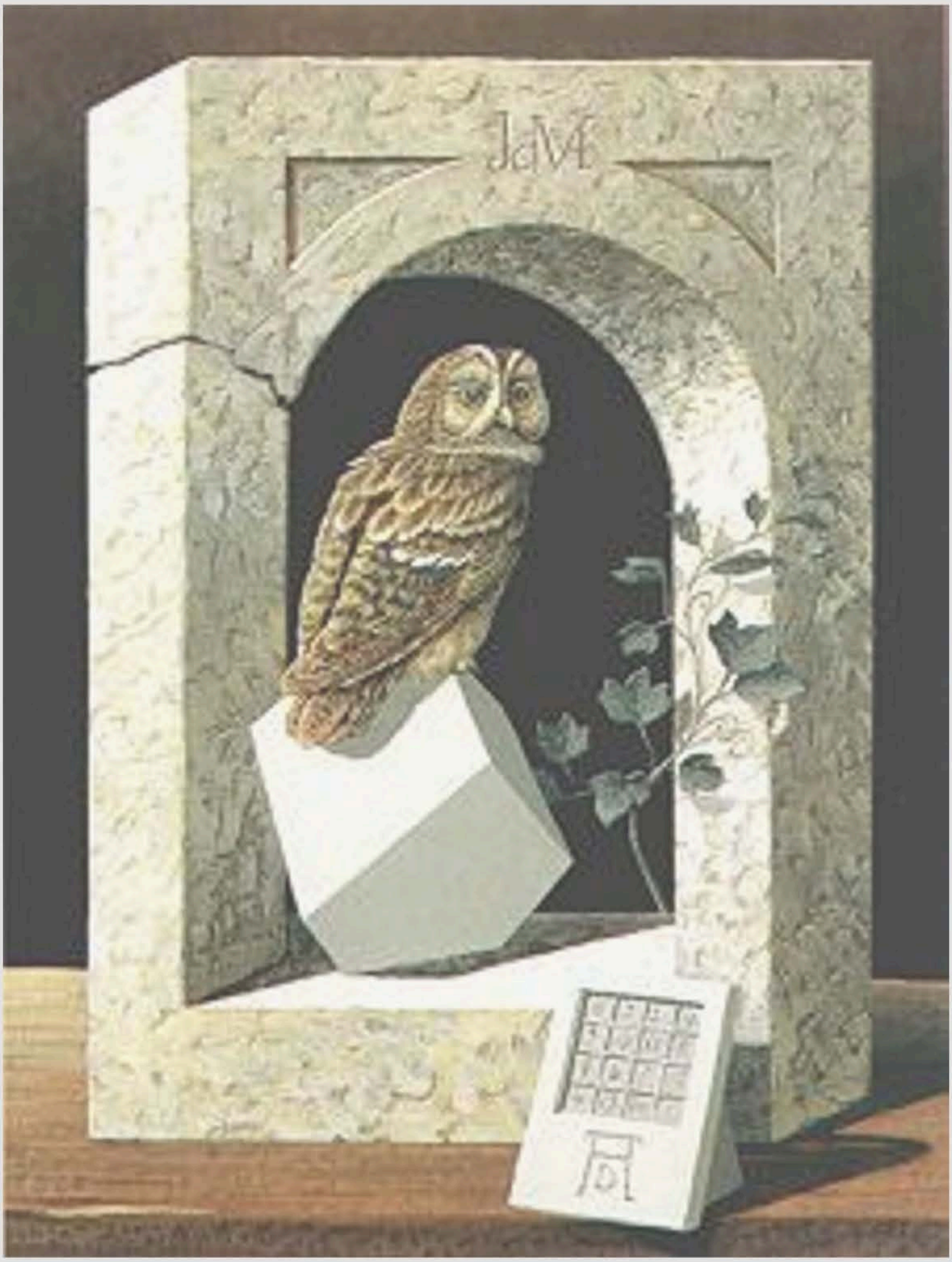


Войтеховский Ю.Л.

12 этюдов на темы кристалломорфологии, минералогии и петрографии

Геологический институт КНЦ РАН
Кольское отделение РМО
Комиссия по истории РМО

Войтеховский Ю.Л.

12 этюдов на темы кристалломорфологии, минералогии и петрографии

Апатиты
2011

ISBN 978-5-902643-14-2
УДК 548.1:51+548.2+552.12

Войтеховский Ю.Л. 12 этюдов на темы кристалломорфологии, минералогии и петрографии. – Апатиты: Изд-во K & M, 2011. – 204 с.

В монографии под необычным углом зрения рассмотрены знакомые кристалломорфологические, минералогические и петрографические объекты: кристаллы минералов как выпуклые полиэдры, комбинации простых форм в классах симметрии, система минералов и минеральные агрегаты, в том числе горные породы, и многие другие. Показано, какую идею реализовала природа в том или ином объекте. Автор называет это предельным пониманием – объект не понят, пока в нём не распознана алгебраическую структура.

Монография представляет интерес для специалистов в области кристаллографии, минералогии, петрографии, математической геологии и студентов соответствующих специальностей.

На обложке – работы фламандского художника Жоса де Мея (Jos de Mey, 1928-2007) <http://www.im-possible.info/russian/art/mey/index.html>

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Книга природы написана языком математики» – сказал Г. Галилей. «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит» – добавил наш великий соотечественник М.В. Ломоносов, 300-летие которого мы отмечаем в этом году. Все согласны. Никто не спорит. Но проблемы возникают, как только приходится прочесть «книгу природы» в математических категориях, прочесть нестандартно, эвристично, открывая новые пути для исследования и понимания… В предлагаемой книге дана дюжина примеров непривычного понимания привычных объектов кристалломорфологии, минералогии и петрографии. Насколько они содержательны – судить читателю. Окончательный приговор вынесет время. Я утверждаю лишь то, что к предельному (читай – математическому) выражению истин должен стремиться любой естествоиспытатель, чем бы он не занимался в повседневной практике.

Благодарю моего ученика к.г.-м.н. Д.Г. Степенщикова, с которым обсуждались некоторые идеи.

27 октября 2011 г. Автор

ВВЕДЕНИЕ

Credo (лат.) – убеждение, символ веры… Нечестно предъявлять читателю тезис, лишь усыпив его бдительность длинными рассуждениями. Поэтому изложу своё кредо в самом начале и сразу в побудительной форме: **в объектах природы ищи алгебраические структуры**.

В его подоплёке лежит моя убеждённость в том, что природа организована в соответствии с единым принципом или – в угоду разбиению естествознания на множество дисциплин – с корпусом непротиворечивых и согласованных в актах природы физических, химических, биологических законов. Как следствие этого принципа, сознание обязано воспроизводить объекты природы в адекватных алгебраических формах. Почему алгебраических? Потому что именно эта дисциплина занята самыми общими структурами, лежащими в основании математики и, стало быть, физики, химии, биологии и геологии, ведь вся природа «написана языком математики».

Как рождается та или иная алгебраическая система, модель, теория, признаваемая затем адекватной? Как отражается генезис природного объекта из вещества и энергии в генезисе его модели из элементов и отношений? Здесь есть проблема. Лишь иногда удаётся проследить эфемерные логические связи. Так, современная кристаллография написана языком теории групп. Но группа выделена из ассоциативных мультипликативных множеств (группоидов) наличием обратных элементов. В свою очередь, обратимость – характерная черта термодинамически равновесного процесса, в котором только и рождается совершенный кристалл, о котором именно и говорит классическая кристаллография. Тут логический круг замыкается.

Несовершенный кристалл, образующийся в далёких от равновесия условиях и богатый структурными нарушениями, описывается в рамках модифицированной теории. И вот С.В. Руднев [1]

[1] Руднев С.В. Применение эллиптической геометрии Римана к исследованию решётчатых структур реальных кристаллов. Автореф. дисс. к.г.-м.н. Л.: ЛГУ, 1986. 18 с.

показал, что зональность реального кристалла в пространстве Евклида можно представить как свойство идеального кристалла в пространстве Римана. Позднее Р.В. Галиулин[2] высказал идею о том, что кристалл доломита, кривогранный в пространстве Евклида, идеален в пространстве Лобачевского. Что показательно в этих примерах? Всё тот же мотив: **в объектах природы ищи алгебраические структуры**, даже если за ними придётся выйти в неевклидовы или многомерные пространства. В конце концов, никто не знает, в каких математических образах проще всего запишется то знание о природном объекте, которое мы назовём истинным. Так, чтобы решить средневековую задачу Фибоначчи о численности популяции кроликов, нужно нырнуть в мир иррациональных чисел. А современные задачи о профиле физически осязаемого крыла или гребного винта решаются не иначе как на языке комплексных чисел.

Ещё более интересна эвристичная, при рождении не поддержанная традицией, сама достойная лечь в основание традиции, мысль акад. Ю.А. Косыгина[3]. «Сущность проблемы, по-видимому, состоит в том, чтобы обнаружить такие математические структуры и алгебры, которые были бы изоморфны геологическим системам, то есть позволяли бы их описывать на математическом языке.» Среди прочего, она показывает, что в российском естествознании (редко в англо-германском, иногда с точностью до зеркального отражения, превращающего правое в левое) имел место трудный опыт концептуальной, идейной, фундаментальной математизации.

Итак, **в объектах природы ищи алгебраические структуры**. Но всегда ли можно довести рассуждение о природных объектах и процессах до таких систем? Дюжина приводимых далее этюдов убеждают меня, что это возможно, если снять с них покровы вещности и историзма – при всём уважении к ис-

---

[2] Галиулин Р.В. Кристаллографическая картина мира // Успехи физ. наук. 2002. Т. 172. № 2. С. 229-233.

[3] Косыгин Ю.А. Статические, динамические и ретроспективные системы в геологических исследованиях // Изв. АН СССР. Сер. геол. 1969. № 6. С. 9-17.

следователям вещественного состава минералов, горных пород и руд, условий и механизмов их формирования. Что же останется? Самая суть, самое средоточие, самый дух явления и процесса, лишь теперь только излагаемые языком математики. Иными словами, далее речь пойдёт о предельном – в определённом выше смысле – понимании знакомых геологических объектов и процессов. О таком их понимании, в котором, например, столь важный большинству естествоиспытателей историзм, якобы принципиально отличающий геологические проблемы от физико-химических, предстаёт последовательностью процессов, обычно неперестановочных. Скажете, что этого мало, что из анализа выхолощен весь историзм? Отнюдь, он-то как раз и сохранён в некоммутативности выявленного группоида, которая именно и гарантирует геологу реконструкцию последовательности событий.

Главы этой книги я посвящаю учителям, открывшим мне удивительный мир природы на геологоразведочном факультете Ленинградского горного института – профессору И.И. Шафрановскому, профессору Д.П. Григорьеву и профессору В.В. Доливо-Добровольскому, а также академику РАН Н.П. Юшкину – моему консультанту в докторантуре Института геологии Коми НЦ УрО РАН. В то же время я благодарен профессорам, обучавшим меня на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета и в Центре геостатистики при Высшей национальной горной школе Парижа.

Наконец, и это самое главное, я хочу напомнить читателям об интеллектуальном течении в российской геологии, завершившемся к началу 1980-х и нигде более не повторившемся, об отчаянной попытке придать математическую форму некоторым фундаментальным категориям геологии. Имена главных действующих лиц упомянуты в тексте. Ныне это течение иссякло до ручейка, сочащегося сквозь тяжёлые пласты геологического эмпирического знания. Но было бы жаль утопить нашу интеллектуальную традицию и самобытность в мощном потоке глобализации.

Моему глубокоуважаемому учителю
профессору Ленинградского горного института
Илариону Иларионовичу Шафрановскому

Профессор И.И. Шафрановский
1907-1994

КРИСТАЛЛОМОРФОЛОГИЯ: СЛОЖНЫЙ МИР ПРОСТЫХ ФОРМ

ЭТЮД 1: КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ ПОЛИЭДРЫ И ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Кажется, всё началось на лекции проф. И.И. Шафрановского о простых формах. «Древние греки полагали, что горный хрусталь образовался из льда, замёрзшего так сильно, что не может растаять», – сказал И.И. У него всегда было много историй, украшавших лекции. В холодной аудитории 3333 в эту легенду верилось сразу. Чтобы не замёрзнуть, сам профессор бодро вышагивал вдоль длинной доски, время от времени вывешивая новый плакат или пуская по рядам очередную модель кристаллического полиэдра, филигранно выточенную из грушевого дерева.

«А это октаэдр (рис. 1.1), одно из платоновых тел. Вы, конечно, его узнали», – произнёс с хитрым прищуром И.И., поощрявший ответы из зала, – «они взяты мной из замечательных книг[4, 5]». «Какие же это октаэдры!» – возмутились первые ряды, – «у левого грани не плоские, у правого – три пятиугольные!» Довольный профессор улыбнулся: «Это потому, что распознавание простых форм на природных кристаллах требует некоторой идеализации. Фигурами роста и растворения на левом кристалле нужно пренебречь, нижнюю грань на правом кристалле надо вернуть на место сдвигом вдоль нормали.

---

[4] Fersmann A., Goldschmidt V. Der Diamant. Eine Studie mit einem Atlas von 43 Taf. Heidelberg: Carl Winter's Universitätsbuchhandlung, 1911. 274 S.

[5] Goldschmidt V. Atlas der Krystallformen. Bd III. Danalith – Feldspat-Gruppe. Heidelberg: Carl Winter's Universitätsbuchhandlung, 1916. 247 Taf. (Bd 1, 2 – 1913, Bd 3 – 1916, Bd 4, 5 – 1918, Bd 6 – 1920, Bd 7, 8 – 1922, Bd 9 – 1923.) Эти книги мне удалось найти лишь много позднее, в личном фонде акад. А.Е. Ферсмана библиотеки Кольского научного центра РАН. Благодаря его переписке с проф. В. Гольдшмидтом в этом фонде есть много уникальных изданий.

Эта процедура сохраняет углы между гранями, что принципиально важно в силу закона постоянства углов. Замечу, что нарушения идеальной формы говорят о жизни кристалла. А вот что говорят – вы узнаете в конце нашего курса и в курсе минералогии».

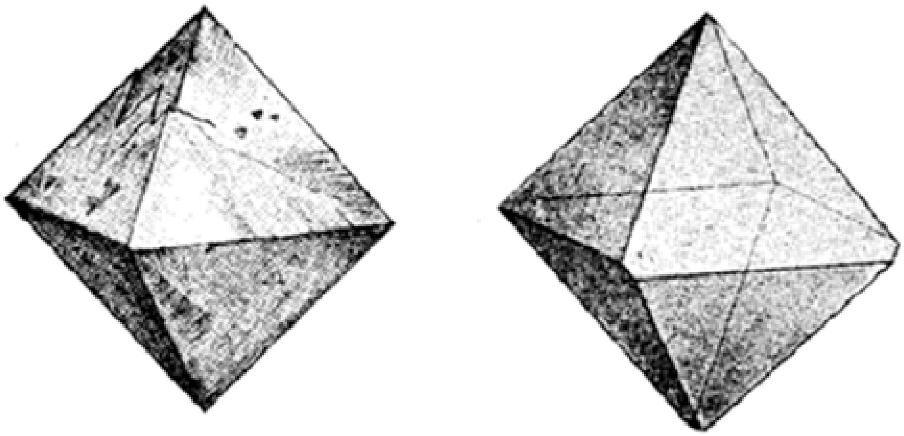


Рис. 1.1. Октаэдры алмаза.

Тогда эти объяснения меня в целом удовлетворили, простые формы мало-помалу распределились по классам, последние – по сингониям… И всё же время от времени всплывали из глубин памяти «странные» факты: призмы и пирамиды без оснований; моноэдр и пинакоид, обитающие в низших и средних сингониях и нарушающие стройность классификации; октаэдры, остающиеся таковыми несмотря на смещение граней вдоль нормалей… – всё это указывало на пропасть, разделяющую геометрическую кристалломорфологию и комбинаторную геометрию выпуклых полиэдров, охватывающую, на первый взгляд, гораздо более обширный мир форм. Посмотреть на мир кристаллических полиэдров на фоне многообразия абстрактных выпуклых полиэдров – вот фундаментальная задача!

Прошли годы… Тщательный поиск обнаружил, что в истории российской науки был учёный, вплотную подошедший к этой задаче – акад. Е.С. Фёдоров. Его труды составляют платформу современной кристаллографии. Казалось бы, они досконально изучены. Но в том и проявляется гениальность учёного, что по прошествии многих лет обнаруживается фундаментальный характер и нерастраченный ресурс его работ, пребывающих на обочине главных творческих идей. Такова статья[6]. Достаточно сказать, что она не числится среди его основных работ[7] и не рассмотрена в фундаментальной работе И.И. Шафрановского по истории кристаллографии[8]. Правда, сам акад. Е.С. Фёдоров писал в предисловии к ней: «Если я решаюсь теперь же предать её опубликованию, то делаю это не потому, чтобы она представляла в моих глазах особое значение по своим приложениям; я делаю это потому, что недавнее появление книги известного немецкого математика Эбергардта "*Zur Morphologie der Polyeder*" может вызвать у многих лиц интерес к предмету и ряд новых исследований в этом направлении» (с. 241). А в письме к П. Гроту от 6 декабря 1895 г. находим: «Работа о морфологии и систематике полиэдров ... имеет весьма ограниченный интерес для минералогов и кристаллографов, ибо она преследует чисто геометрические цели»[9]. Возможно, именно эти обстоятельства отвлекли аналитиков и историков от более глубоко анализа статьи. Впрочем, в её оценке самим акад. Е.С. Фёдоровым не всё однозначно, и мы к ней вернёмся.

Поясним суть статьи. В первую очередь, акад. Е.С. Фёдоров возражает против алгебраической систематики выпуклых полиэдров по Эбергардту, в которой в один класс попадают формы с числами разноименных граней, удовлетворяющими одному и тому же диофантову уравнению, без учёта их симметрии. Тем самым акад. Е.С. Фёдоров явно демонстрирует кристаллографические пристрастия. Именно поэтому он не согла-

---

[6] Фёдоров Е.С. Основания морфологии и систематики многогранников // Зап. Импер. С.-Петербург. минерал. об-ва. 1893. Ч. 30. С. 241-341.

[7] Фёдоров Е.С. Симметрия и структура кристаллов. Основные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1949. 630 с.

[8] Шафрановский И.И. История кристаллографии. XIX век. Л.: Наука, 1980. 324 с.

[9] Шафрановский И.И., Франк-Каменецкий В.А., Доливо-Добровольская Е.М. (Сост.) Евграф Степанович Фёдоров. Переписка. Неизданные и малоизвестные работы. Сер. Научное наследство. Т. 16. Л.: Наука, 1991. 320 с. (с. 68).

сен с тем, что в разные классы попадают кристаллографически родственные куб и октаэдр и, наоборот, в один класс попадают формы, никогда не образующие огранку одного кристалла[10]. В своей статье акад. Е.С. Фёдоров предлагает не принцип систематики, а нечто большее – алгоритм генерирования полного комбинаторного многообразия выпуклых полиэдров из тетраэдра, обеспечивающий их генеалогическую систематику и сохранение кристаллографического родства. Сочетание кристаллографических и геометрических мотивов в алгоритме органично. Ведь притупления ребер новыми гранями, например, в соответствии с законом компликации В. Гольдшмидта – это классическая тема минералогической кристаллографии. С другой стороны, операций притупления в алгоритме ровно три, и они обеспечивают появление на полиэдре необходимых 3-, 4- и 5-угольных граней в силу известной теоремы.

Пусть f_i – число i-угольных граней, f, e и v – общее число граней (facets), рёбер (edges) и вершин (vertices) любого выпуклого полиэдра. Тогда:

$$f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + ... = f \tag{1}$$

$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + ... = 2e \tag{2}$$

Умножаем (1) на 6 и вычитаем (2):

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = (6f - 2e) + f_7 + 2f_8 + 3f_9 + ... \tag{3}$$

Для любого выпуклого полиэдра выполнено соотношение Эйлера:

$$f - e + v = 2 \tag{4}$$

и нестрогое неравенство:

$$2e - 3v \geq 0 \tag{5}$$

в котором равенство достигается для простых полиэдров.

[10] Богомолов С.А. Классификация выпуклых многогранников по Фёдорову и Эбергардту // Зап. РМО. 1929. Ч. 58. С. 265-277.

Умножаем (4) на 6 и прибавляем удвоенное (5):

$$6f - 2e \geq 12 \tag{6}$$

Подставляем (6) в (3):

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 \geq 12 + f_7 + 2f_8 + 3f_9 + ... \tag{7}$$

Для простых полиэдров (7) преобразуется в диофантово уравнение:

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + f_7 + 2f_8 + 3f_9 + ... , \tag{8}$$

решения которого и служат Эбергардту основным классификационным признаком полиэдров.

Из (7) следует невозможность выпуклого полиэдра без 3-, 4- и 5-угольных граней одновременно. Для их генерирования как раз и служат операции α, β и γ фёдоровского алгоритма. Операция α позволяет получить новую треугольную грань отсечением простой (в которой сходятся ровно три ребра) вершины полиэдра. Операция β позволяет получить новую 4-угольную грань отсечением ребра, соединяющего две простые вершины. Операция γ позволяет получить новую 5-угольную грань отсечением трёх смежных простых вершин. Таким образом, три операции отсечения генерируют из простых n-эдров ($n \geq 4$) простые же (n+1)-эдры. Операция ω редукции (стягивания) ребра может применяться последовательно несколько раз (к рёбрам, соединяющим вершины, принадлежащие граням, не имеющим общих вершин), порождая непростые полиэдры всё более высоких порядков с сохранением числа граней.

Из сказанного видно, что фёдоровский алгоритм не свободен от недостатков. Первый состоит в его рекуррентном характере. Ошибка в перечислении простых n-эдров может транслироваться в многообразие простых (n+1)-эдров. Аналогично, ошибка в перечислении непростых (n+1)-эдров может транслироваться в многообразие непростых (n+1)-эдров более высоких порядков. Второй недостаток – большое число повторяющихся форм. Уже операции α и β, применённые к тетраэдру, порождают полиэдр с комбинаторикой 3-гранной призмы. Сравнение и отбраковка повторяющихся форм – хорошо известная ныне проблема изоморфизма графов. Акад. Е.С. Фёдоров оценил её так. «Из изложенного видно, в какой мере усложняется разрешение вопроса всякий раз при переходе от низшего порядка к следующему. Дальнейшие упрощения становятся существенно необходимыми для развития этой области знаний» (с. 329). Именно в этом пункте была предложена следующая оптимизация алгоритма.

Акад. Е.С. Фёдоров рекомендовал следующее рациональное применение алгоритма. Операция α как самая простая применяется для получения простых полиэдров, содержащих хотя бы одну треугольную грань. Операция β применяется для получения простых полиэдров, не содержащих ни одной треугольной грани, но содержащих хотя бы одну 4-угольную грань. Наконец, операция γ применяется для получения простых полиэдров, не содержащих 3- и 4-угольных граней, но содержащих хотя бы одну 5-угольную грань. Но для них из (8) следует:

$$f_5 = 12 + f_7 + 2f_8 + 3f_9 + \ldots \tag{9}$$

а (1) принимает вид:

$$f = 12 + f_6 + 2f_7 + 3f_8 + 4f_9 + \ldots \tag{10}$$

Неотрицательные решения диофантова уравнения (10) возможны лишь при $f \geq 12$. Минимум $f = 12$ достигается при $f_6 = f_7 = f_8 = \ldots = 0$. Одновременно из (9) следует $f_5 = 12$, т.е. все грани – 5-угольные. Это – додекаэдр. Таким образом, «хотя бы одна 5-угольная грань» означает – не менее двенадцати. Для акад. Е.С. Фёдорова, нашедшего «вручную» все 4- … 7-эдры, простые 8- и 9-эдры и так называемые парногранники вплоть до 12-эдров, перспектива систематического вывода хотя бы всех простых 12-эдров в силу их огромного числа осталась неразрешимой, а додекаэдр – единственным полиэдром, для вывода которого была использована операция γ. Отсюда и последовала идея – независимым перечислением простых полиэдров без 3- и

4-угольных граней, для получения которых как раз и нужна операция γ, отложить её применение в фёдоровском алгоритме как можно далее. Задача была решена «вручную» для простых 12- … 20-эдров [11] и с помощью компьютерного алгоритма для простых 12- … 25-эдров [12]. Как показано далее, систематическое перечисление простых 25-эдров находится за обозримым горизонтом. Тем самым операция γ надолго исключена из фёдоровского алгоритма. Алгоритмы перечисления комбинаторных типов полиэдров с заданным гранным символом, их сравнения и определения точечной группы симметрии, построения проекций Шлегеля и 3D изображений рассмотрены в монографии [13].

Не следует думать, что перечисление комбинаторных типов выпуклых полиэдров началось с акад. Е.С. Фёдорова, а начавшись, следовало лишь его алгоритму. История исследований этой проблемы выглядит следующим образом. Систематическое перечисление комбинаторных типов выпуклых полиэдров начал T.P. Kirkman [14], описавший (без рисунков) все 4- ... 8-эдры и двойственные им 4- ... 8-акры (вершинники). Затем акад. Е.С. Фёдоров с помощью оригинального алгоритма нашёл и изобразил все 4- ... 7-, а также простые 8- и 9-эдры. Предыдущая работа ему не была известна. Это ясно из того, что число 7-эдров у них различно и акад. Е.С. Фёдоров это не обсуждает. O. Hermes [15],

---

[11] Войтеховский Ю.Л. Развитие алгоритма Е.С. Федорова о комбинаторных типах многогранников и приложение к структурам фуллеренов // Зап. ВМО. 2001. № 4. С. 24-31.

[12] Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г., Сотникова Т.Д. Число простых 12- … 25-эдров без 3- и 4-угольных граней // Тр. Лаборатории математических исследований в кристаллографии, минералогии и петрографии. 2000-2006. Апатиты: Изд-во K & M, 2006. С. 34-43.

[13] Полиэдрические формы в живой и косной природе / Ю.Л. Войтеховский, Д.Г. Степенщиков, М.Г. Тимофеева и др. Апатиты: Изд-во K & M, 2005. 108 с.

[14] Kirkman T.P. Applications of the theory of the polyedra to the enumeration and registration of results // Proc. Royal Soc. London. 1862/1863. V 12. P 341-380.

[15] Hermes O. Die Formen der Vielflache // J. reine angew. Math. 1899. V 120. S 305-353.

также независимо, нарисовал все 4- ... 8-эдры, M. Brückner[16] – все простые 4- … 10-эдры, C.J. Bouwkamp[17] – все полиэдры с числом ребер до 14. Этим завершился период рисования. Прошло немало лет, прежде чем вооружённые компьютерами математики вернулись к проблеме. D.W. Grace[18] пересчитал все простые 4- ... 11-эдры, R. Bowen и S. Fisk[19] – все 4- … 12-вершинные триангуляции на сфере и тем самым – двойственные им простые 4- ... 12-эдры. D. Britton и J.D. Dunitz[20] изобразили все 4- ... 8-акры, P.J. Federico[21, 22] – дуальные им 4- … 8- и все 9-эдры. Число всех 10-эдров впервые нашли A.J.W. Duijvestijn и P.J. Federico[23], ими же дана статистика полиэдров с различными порядками групп автоморфизмов. P. Engel с помощью компьютерного варианта фёдоровского алгоритма нашел все 11-, 12- и простые 13-эдры[24, 25] и дал наиболее полную статистику простых 4- … 15-эдров по порядкам групп автоморфизмов[26]. В ряде наших работ проверены данные о комбинаторных

---

16 Brückner M. Vielecke und Vielflaeche. Leipzig: Teubner, 1900. 250 s.

17 Bouwkamp C.J. On the dissection of rectangles into squares. Pt I // Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 1946. A 49. P 1176-1188; Pt II, III // Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 1946. A 50. P 58-71, 72-78.

18 Grace D.W. Computer search for non-isomorphic convex polyhedra. Ph.D. Thesis. Comp. Sci. Dept., Stanford University, California, USA. 1965.

19 Bowen R., Fisk S. Generation of triangulations of the sphere // Math. Comp. 1967. V 21. P 250-252.

20 Britton D. & Dunitz J.D. A complete catalogue of polyhedra with eight or fewer vertices // Acta Cryst. 1973. A 29. P 362-371.

21 Federiko P.J. Enumeration of polyhedra: the number of 9-hedra // J. Comb. Theory. 1969. N 7. P 155-161.

22 Federiko P.J. Polyhedra with 4 to 8 faces // Geometr. Dedicata. 1975. V 3. P 469-481.

23 Duijvestijn A.J.W., Federico P.J. The number of polyhedral (3-connected planar) graphs // Math. Comp. 1981. V 37. P 523-532.

24 Engel P. On the enumeration of polyhedra // Discrete Math. 1982. V 41. P 215-218.

25 Engel P. On the morphology of polyhedra // Зап. ВМО. 1994. № 3. С. 20-25.

26 Engel P. On the enumeration of the simple 3-polyhedra // Acta Cryst. 2002. A 59. P 14-17.

типах и точечных группах симметрии всех 4- ... 12-, а также простых 13- ... 16-эдров, устранён ряд ошибок и опубликованы изображения всех 4- ... 8- и простых 9- ... 12-эдров[27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37], поскольку до сих пор их лучшим описанием является изображение. Точечные группы симметрии простых 13- … 16-эдров найдены впервые. Они характеризуют полиэдры гораздо детальнее, чем порядки групп автоморфизмов, и прямо приспособлены к использованию результатов в области кристаллографии и минералогии. Статистики выпуклых 4- … 12-эдров и простых 13- … 16-эдров даны в табл. 1.1. Каталоги[38, 39] их проекций Шлегеля, описания полиэдров точечными

---

27 Войтеховский Ю.Л. Грануломорфология: приводимые 4- … 8-эдры, простые 9- и 10-эдры. Апатиты: Изд-во КНЦ РАН, 1999. 60 с.

28 Войтеховский Ю.Л. Грануломорфология: простые 11-эдры. Апатиты: Изд-во КНЦ РАН, 2000. 72 с.

29 Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г., Ярыгин О.Н. Грануломорфология: простые 12- и 13-эдры. Апатиты: Изд-во КНЦ РАН, 2000. 75 с.

30 Voytekhovsky Y.L. On the symmetry of 4- to 11-hedra // Acta Cryst. 2001. A 57. P 112-113.

31 Voytekhovsky Y.L. The Fedorov algorithm revised // Acta Cryst. 2001. A 57. P 475-477.

32 Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. On the symmetry of 9- and 10-hedra // Acta Cryst. 2002. A 58. P 404-407.

33 Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. On the symmetry of simple 12- and 13-hedra // Acta Cryst. 2002. A 58. P 502-505.

34 Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. On the symmetry of 11-hedra // Acta Cryst. 2003. A 59. P 195-198.

35 Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. On the symmetry of simple 14- and 15-hedra // Acta Cryst. 2003. A 59. P 367-370.

36 Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. The variety of convex 12-hedra revised // Acta Cryst. 2005. A 61. P 581-583.

37 Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. On the symmetry of simple 16-hedra // Acta Cryst. 2006. A 62. P 230-232.

38 Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV: Выпуклые полиэдры. Т. I: 4- … 12-эдры. Апатиты: Изд-во КНЦ РАН, 2008. 833 с.

39 Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV: Выпуклые полиэдры. Т. II: Простые 13-16-эдры. Апатиты: Изд-во КНЦ РАН, 2008. 828 с.

группами симметрии и гранными символами не имеют аналогов в мировой литературе.

Таблица 1.1. Числа комбинаторно различных выпуклых полиэдров с f гранями и v вершинами.

v→ ↓f	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	**1**											
5		**1**	**1**									
6		**1**	**2**	**2**	**2**							
7			**2**	**8**	**11**	**8**	**5**					
8			2	11	42	74	76	38	**14**			
9				8	74	296	633	768	558	219	**50**	
10				5	76	633	2635	6134	8822	7916	4442	1404
11					38	768	6134	25626	64439	104213	112082	79773
12					14	558	8822	64439	268394	709302	1263032	1556952

Продолжение табл. 1.1.

v→ ↓f	16	17	18	19	20	22	24	26	28
10	233								
11	36528	9714	1249						
12	1338853	789749	306470	70454	7595				
13						49566			
14							339722		
15								2406841	
16									17490241

Примечание: жирным шрифтом показаны полиэдры, найденные акад. Е.С. Фёдоровым в статье 1893 г.

Первое приложение результатов следует из текстов самого акад. Е.С. Фёдорова. Так, в письме к П. Гроту от 26 марта 1893 г. читаем: «Через неделю я надеюсь отправить Вам свою новую небольшую работу «Проблема–минимум в учении о симметрии». В этой работе объясняется, почему получается так, что большинство естественных кристаллов симметричны, а не асимметричны, как этого можно было бы ожидать исходя из теории вероятностей. Это следствие принципа наименьшего действия, который приводит к тому, что при образовании кристалла вступает в силу принцип минимальной поверхности. И вот в моей работе доказывается, что самые симметричные формы обладают также и минимальной поверхностью. Так что проявляющуюся в природе симметрию следует рассматривать как закономерное следствие экономии, выраженной в известном законе наименьшего действия строго математически» (с. 35).

Неясно, на каких теоретических данных базировался акад. Е.С. Фёдоров, полагая априорную вероятность асимметричных кристаллических полиэдров более высокой, чем симметричных. Полученная им же статистика абстрактных 4- … 7-, а также простых 8- и 9-эдров говорит обратное: первые асимметричные формы встречаются среди 7-эдров (их доля 7/34), среди простых 8- и 9-эдров их доли равны 2/14 и 16/50. Среди всех 8-эдров доля асимметричных составляет 140/257, то есть уже превышает половину. Но, как было обосновано выше, акад. Е.С. Фёдоров не знал работы T.P. Kirkman'a.

Представляется важным, что он соединял в сознании два многообразия – абстрактных и кристаллических полиэдров и верно ощущал тенденцию абстрактных выпуклых полиэдров к асимметрии с ростом числа граней. Каковы же последние результаты? Все 4-, 5- и 6-эдры (1, 2 и 7, соответственно) комбинаторно симметричны. Из 7-эдров (34) комбинаторно асимметричны 7 (20.588 %), 8-эдров (257) – 140 (54.475 %), 9-эдров (2606) – 2111 (81.005%), 10-эдров (32300) – 30014 (92.923 %), 11-эдров (440564) – 430494 (97.714 %), 12-эдров (6384634) – 6336013 (99.238 %), простых 13-эдров (49566) – 47030 (94.884 %), 14-эдров (339722) – 331796 (97.667 %), 15-эдров (2406841) – 2382352 (98.983 %) и 16-эдров (17490241) – 17411448 (99.550 %). Тенденция очевидна – с ростом числа граней доля комбинаторно асимметричных полиэдров монотонно растёт, по-видимому, асимптотически стремясь к 100 %. Этот результат представляется мне фундаментальным и позволяет понять цитированную ранее мысль акад. Е.С. Фёдорова следующим образом: «…большинство естественных кристаллов симметричны, а не асимметричны, как этого можно было бы ожидать исходя из теории вероятностей» – если бы кристаллы приобретали полиэдрическую форму любого комбинаторного типа случайным образом.

Но последнее не соответствует действительности, и потому правомерен вопрос: насколько многообразие кристаллических полиэдров отвечает выявленной особенности многообразия абстрактных выпуклых полиэдров? По данным ряда авторов[40, 41, 42, 43, 44, 45], в литосфере Земли преобладают минералы точечных групп симметрии *2/m* (26.35 % от общего числа) и *mmm* (16.46 %). Для минералов больших глубин статистика смещается в пользу более высоких, в зоне гипергенеза – низких симметрий. Но она никогда не смещается в пользу точечной группы симметрии *1* столь сильно, чтобы она стала довлеющей. К тому же, для абстрактных полиэдров найдены комбинаторные точечные группы симметрии, характеризующие наиболее симметричных представителей каждого комбинаторного типа. Для минералов же подразумеваются точечные группы симметрии общих кристаллографических форм. При их комбинаторном рассмотрении точечные группы симметрии некоторых пришлось бы повысить, например: группу *-4* тетрагонального тетраэдра – до группы *-43m* кубического тетраэдра, группу *4/mmm* тетрагональной дипирамиды – до группы *m3m* октаэдра и т. д. То есть, статистики точечных групп симметрии абстрактных и кристаллических полиэдров отличны ещё более, чем следует из приведённых выше данных.

---

[40] Юшкин Н.П. Эволюционные представления в современной минералогии // Зап. ВМО. 1982. № 4. С. 432-442.

[41] Шафрановский И.И. Статистические закономерности и обобщающий закон в распределении минералов по их симметрии // Зап. ВМО. 1983. № 2. С. 177-184.

[42] Доливо-Добровольский В.В. К кристаллографии земных оболочек // Зап. ВМО. 1984. № 5. С. 586-590.

[43] Юшкин Н.П., Шафрановский И.И., Янулов К.П. Законы симметрии в минералогии. Л.: Наука, 1987. 335 с.

[44] Доливо-Добровольский В.В. О так называемых «законах статистической минералогии» // Зап. ВМО. 1988. № 3. С. 387-393.

[45] Yushkin N.P. The theory of symmetry: newer application to mineralogy // Зап. ВМО. 1993. № 1. С. 16-25.

Иначе представляет ситуацию и перспективу А.П. Хомяков [46] (табл. 1.2), зафиксировавший около 2005 г. кубо-триклинную инверсию системы минеральных видов и постепенное перестроение последовательности сингоний (по убыванию числа минеральных видов) к «классической»: триклинная – моноклинная – ромбическая – тригональная – тетрагональная – гексагональная – кубическая. Сегодня она имеет вид: моноклинная – ромбическая – тригональная – триклинная – кубическая – гексагональная – тетрагональная. А.П. Хомяков квалифицирует это как важнейшее событие в познании законов эволюции минерального мира. В перспективе, согласно закону Фёдорова-Грота, система минеральных видов будет характеризоваться ещё более резким, чем сегодня, преобладанием сложных по составу и структуре низкосимметричных минералов над высокосимметричными минералами простой конституции. Резюмируем сказанное в трёх направлениях: о многообразии абстрактных выпуклых полиэдров и свойствах 3D евклидова пространства, о его отношении к многообразию природных кристаллических полиэдров и о «классической» последовательности сингоний как фундаментальной асимптоте системы минеральных видов.

Таблица 1.2. Относительные количества минералов триклинной и кубической сингоний.

Сингония	1860 (546)	1891 (644)	1966 (1308)	1980 (2537)	1995 (3442)	2008 (4170)
Триклинная	27-5.0	32-5.0	88-6.7	220-8.67	326-9.47	399-9.57
Кубическая	94-17.2	98-15.2	171-13.1	264-10.41	335-9.73	377-9.04
Отношение трикл. / куб	0.29	0.33	0.51	0.83	0.97	1.06

Примечания: в скобках – общее число учтённых минералов, на первом месте – числа минералов, на втором – проценты.

[46] Хомяков А.П. Кубо-триклинная инверсия общей системы минеральных видов и её связь со структурно-симметрийными особенностями минералов щелочных пород // Тр. VII Всерос. Ферсмановской научн. сессии. Апатиты, 22-23 апр. 2010 г. Апатиты: K & M, 2010. С. 9-13.

Свойства всякого пространства исчерпывающе характеризуются его аксиоматикой и, более ярко, разнообразно, всем корпусом выводимых из неё теорем, а также наиболее общими свойствами вкладываемых в него многообразий. В этом контексте напомним идею П. Кюри о том, что состояния физического пространства характеризуются предельными точечными группами симметрии [47, 48, 49]. В этом же смысле вся совокупность результатов о многообразии комбинаторных типов выпуклых полиэдров и их точечных группах симметрии говорит что-то важное о свойствах 3D евклидова пространства.

Есть ли ограничения на то, чтобы природный кристалл приобрёл форму любого наперёд заданного комбинаторного типа? И.И. Шафрановский замечает [50], что встречаются, хотя и чрезвычайно редко, кристаллы магнетита, целиком покрытые гексоктаэдрическими гранями. То есть, к сфере интересов кристалломорфологии мы смело можем отнести комбинаторное многообразие выпуклых полиэдров вплоть до 48-эдров. А свойство природных кристаллов, известное как мириэдрия [51], «которая состоит в видимой округлости зёрен из-за наличия на них множества (около 1000 и более) плоских, зеркально гладких участков», ещё более увеличивает этот предел. Лабораторный синтез также поставляет минеральные полиэдры с огромным числом граней (рис. 1.2).

Ещё одна, неожиданная область применения теории – петро-

---

[47] Curie P. Sur la symetrie dans les phenomenes physiques, symetrie d'un champ electrique et d'un champ magnetique // J. de Phys. 1894. III. 3. P 393-416.

[48] Curie P. Sur la symetrie dans les phenomenes physiques, symetrie d'un champ electrique et d'un champ magnetique // Oeuvres de P. Curie. Paris. 1908. P 118-141.

[49] Кюри П. О симметрии в физических явлениях: симметрия электрического и магнитного полей // Избранные труды. М.-Л.: Наука, 1966. С. 95-113.

[50] Шафрановский И.И. Лекции по кристалломорфологии. М.: Высшая школа, 1968. 174 с. (с. 147).

[51] Глазов А.И. Морфометрия кристаллов. Автореф. дисс. ... д.г.-м.н. СПб.: СПГГИ, 1999. 42 с. (с. 17).

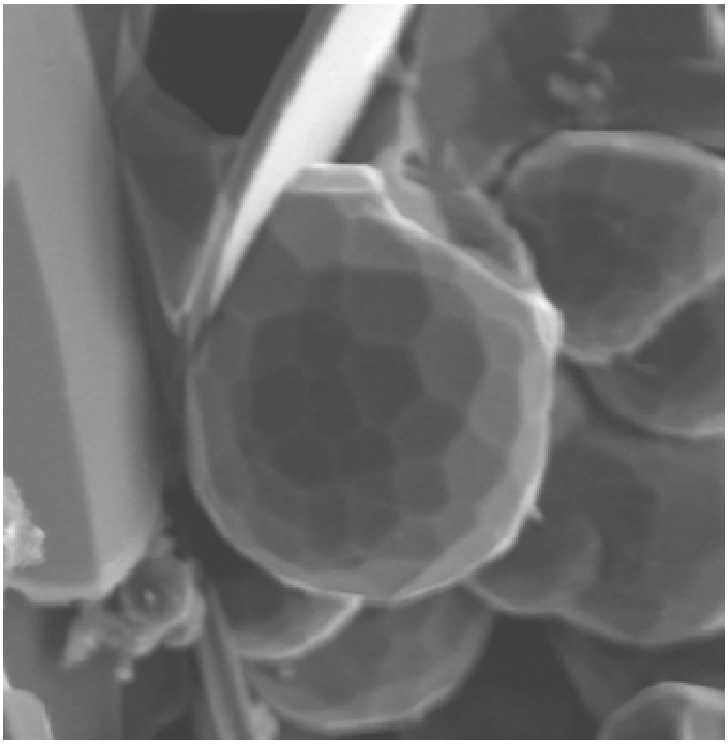


Рис. 1.2. Продукты термической обработки нефтяных коксов. Размер полиэдрической частицы ~60 мкм. Рэм-фото. Предоставлено И.С. Трояновой.

графия. Минеральные индивиды в горных породах называются зёрнами. От кристаллов они терминологически отделены на том основании, что не имеют правильной огранки. Но восприятие тех и других как полиэдров с точностью до комбинаторного типа стирает эту грань. Гранью минерального зерна можно считать контактную поверхность с другим зерном. При таком подходе число граней у порфирового вкрапленника может составлять несколько десятков. Особенности срастаний минеральных зёрен в горных породах в силу случайного расположения зародышей в пространстве приводят к тому, что все они – простые полиэдры, т. е. в каждой вершине сходятся ровно три грани. Впрочем, то же самое Г.Г. Леммлейн [52] утверждал относительно природных кристаллов – всякая «непростая» вершина под достаточно сильной лупой оказывается ребром, соединяющим две простые вершины. Таким образом, можно утверждать, что предметом теоретической кристалломорфологии является полное многообразие выпуклых n-эдров, где верхняя граница n заведомо превышает 50. Применительно к природным минеральным индивидам – кристаллам и зёрнам – наиболее интересны простые полиэдры.

Идея А.П. Хомякова о кубо-триклинной инверсии ставит

[52] Леммлейн Г.Г. Морфология и генезис кристаллов. М.: Наука, 1978. 328 с.

нас перед интересной дилеммой. Если зафиксировать симметрийную статистику минеральных видов в нынешнем состоянии – с преобладанием моноклинной и ромбической сингоний, то придётся признать её качественное отличие от симметрийной статистики абстрактных выпуклых полиэдров. В этом можно видеть специфику кристаллического пространства и пространства земных оболочек, диктующих свои ограничения свободной игре случая и проявлению равных вероятностей, по акад. Е.С. Фёдорову. Если же согласиться с А.П. Хомяковым, то в симметрийной статистике минеральных видов со временем проявится преобладание триклинных минералов, что составляет характернейшую черту симметрийной статистики абстрактных выпуклых полиэдров.

Рассмотрим её для простых полиэдров более детально, сгруппировав точечные группы симметрии по сингониям (сокращения общепринятые, некр. – некристаллографические группы симметрии, вынесены в конец каждого ряда). Расчёт начнём с 8-эдров, среди которых впервые появляются «триклинные» простые полиэдры. **8-эдры** (14): мон. (5) – ромб. (3) – трикл. (2) – тригон. (1) – тетрагон. (1) – гексагон. (1) – куб. (1); **9-эдры** (50): мон. (25) – трикл. (16) – ромб. (5) – гексагон. (2) – тригон. (1) – тетрагон. (0) – куб. (0) – некр. (1); **10-эдры** (233): трикл. (137) – мон. (71) – ромб. (13) – тригон. (7) – тетрагон. (2) – куб. (1) – гексагон. (0) – некр. (2); **11-эдры** (1249): трикл. (970) – мон. (241) – ромб. (27) – тригон. (6) – гексагон. (4) – тетрагон. (0) – куб. (0) – некр. (1); **12-эдры** (7595): трикл. (6760) – мон. (753) – ромб. (60) – тригон. (9) – тетрагон. (8) – гексагон. (2) – куб. (0) – некр. (3); **13-эдры** (49566): трикл. (47030) – мон. (2377) – ромб. (118) – тригон. (40) – тетрагон. (0) – гексагон. (0) – куб. (0) – некр. (1); **14-эдры** (339722): трикл. (331846) – мон. (7576) – ромб. (232) – тригон. (41) – тетрагон. (16) – гексагон. (7) – куб. (2) – некр. (2); **15-эдры** (2406841): трикл. (2382352) – мон. (23994) – ромб. (439) – тригон. (44) – гексагон. (11) – тетрагон. (0) – куб. (0) – некр. (1); **16-эдры** (17490241): трикл. (17411889) – мон. (77139) – ромб. (941) –

тригон. (225) – тетрагон. (41) – куб. (3) – гексагон. (0) – некр. (3). Видно, что «классическая» последовательность сингоний проявляется уже с 10-эдров с отклонениями не более 1 % от общего числа полиэдров, причём величина этого отклонения стремительно падает.

Для 8- … 12-эдров имеющиеся данные позволяют охватить простые и непростые выпуклые полиэдры в единой симметрийной статистике. **8-эдры** (257): трикл. (140) – мон. (90) – ромб. (14) – тетрагон. (4) – тригон. (3) – гексагон. (2) – куб. (2) – некр. (2); **9-эдры** (2606): трикл. (2111) – мон. (445) – ромб. (34) – тригон. (6) – тетрагон. (4) – гексагон. (4) – куб. (0) – некр. (2); **10-эдры** (32300): трикл. (30021) – мон. (2109) – ромб. (116) – тригон. (39) – тетрагон. (8) – куб. (1) – гексагон. (0) – некр. (6); **11-эдры** (440564): трикл. (430494) – мон. (9765) – ромб. (248) – тригон. (41) – гексагон. (10) – тетрагон. (0) – куб. (0) – некр. (6); **12-эдры** (6384634): трикл. (6336214) – мон. (47539) – ромб. (728) – тригон. (80) – тетрагон. (51) – гексагон. (11) – куб. (2) – некр. (9). В этом случае «классическая» последовательность сингоний проявляется уже с 8-эдров, также с быстро возрастающей точностью.

Из приведенных результатов следует, что фундаментальная причина «классической» последовательности сингоний для кристаллических полиэдров лежит за пределами кристаллографии в свойствах самого 3D евклидова пространства. Специфика кристаллического пространства (выражаемая законом Фёдорова-Грота), условия и механизмы кристаллообразования в земных оболочках (высокая гетерогенность приповерхностной оболочки, продуцирующей сложные по составу низкосимметричные минералы) влияют на симметрийную статистику минералов лишь количественно, не будучи в состоянии изменить её качественно. Но в этом проявляется и фундаментальный статус кристаллографии, через симметрийную статистику минерального многообразия проникающей в свойства 3D евклидова пространства.

ЭТЮД 2: РЕАЛЬНЫЕ ПРОСТЫЕ ФОРМЫ И ДИССИММЕТРИЯ

На самом деле всё ещё интереснее – благодаря маленькому сдвигу грани полиэдра вдоль нормали, как это сплошь и рядом демонстрирует природа (рис. 1.1). Акад. А.Е. Ферсман писал: «В истории кристалломорфологии можно наметить три основных пути для изучения кристалла как физического тела; первый путь изучает его внутреннюю структуру в связи с комплексом плоскостей и их ретикулярной плотностью; **второй стремится к изучению явлений роста по нормалям к граням** (*выделено мной – Ю.В.*); третий должен вести к познанию морфологических элементов кристалла»[53]. Стоит создать анизотропию скоростей роста различных граней – и мы получим искажённый кристалл указанного типа. Достойно удивления, что многообразие полиэдров, получаемых при этом для тех или иных простых форм и их наиболее интересных комбинаций, не было изучено кристаллографами ещё в прошлом и позапрошлом веках. Для определённости назовём реальной простой формой любой полиэдр, ограниченный хотя бы некоторыми из граней идеальной простой формы, находящимися в стандартной ориентации, но на произвольном расстоянии от начала координат. Очевидно, это определение принципиально отличает «реальную простую форму» от «ложной формы первого рода» или «подформы истинной простой формы» И.И. Шафрановского[54].

Легко видеть, что смещения вдоль нормалей граней ромбического, тетрагонального и кубического тетраэдров, а также куба и ромбоэдра не приводят к комбинаторно новым формам.

---

[53] Шафрановский И.И. Труды А.Е. Ферсмана по кристаллографии // Ферсман А.Е. Кристаллография алмаза. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 566 с. (с. 536).

[54] Шафрановский И.И., Шафрановский Г.И. Таблицы ложных простых форм искажённых кристаллов // Зап. ЛГИ. 1977. Т. 74. № 2. С. 20-44.

Остальные 25 замкнутых идеальных простых форм порождают меньшие или большие многообразия реальных простых форм. Теорема Минковского утверждает, что выпуклый полиэдр однозначно определён ориентациями нормалей к граням и площадями последних. В нашем случае ориентации нормалей определены типом простой формы, а вариации площадей граней (в принципе измеряемые на кристалле с высокой точностью) порождают комбинаторное разнообразие её реальных разновидностей [55]. Теория вопроса сегодня разработана слабо, а методами компьютерного моделирования он исследован для октаэдра [56], ромбической, тригональной и тетрагональной бипирамид, тригонального и тетрагонального трапецоэдров [57, 58], ромбододекаэдра [59, 60], а также комбинации куба и октаэдра [61].

Все реальные октаэдры показаны на рис. 2.1 и охарактеризованы точечными группами симметрии в табл. 2.1. (Заметим, что в этом случае, в отличие от этюда 1, симметрия полиэдра

---

[55] Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г., Макаров М.С. Теорема Минковского и описание формы кристалла // Зап. РМО. 2006. № 5. С. 101-102.

[56] Voytekhovsky Y.L. On the real crystal octahedra // Acta Cryst. 2002. A 58. P 622-623.

[57] Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. I. Реальные кристаллографические простые формы. Апатиты: Изд-во K & M, 2004. 275 с.

[58] Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Реальные кристаллографические простые формы // Зап. ВМО. 2004. № 2. С. 112-120.

[59] Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. II. Реальные кристаллографические ромбододекаэдры // Полиэдрические формы в живой и косной природе. Апатиты: Изд-во K & M, 2005. С. 51-84.

[60] Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. On the real crystal rhombododecahedra // Acta Cryst. 2004. A 60. P 582-584.

[61] Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. III. Комбинации куба и октаэдра. Апатиты: Изд-во K & M, 2007. 834 с.

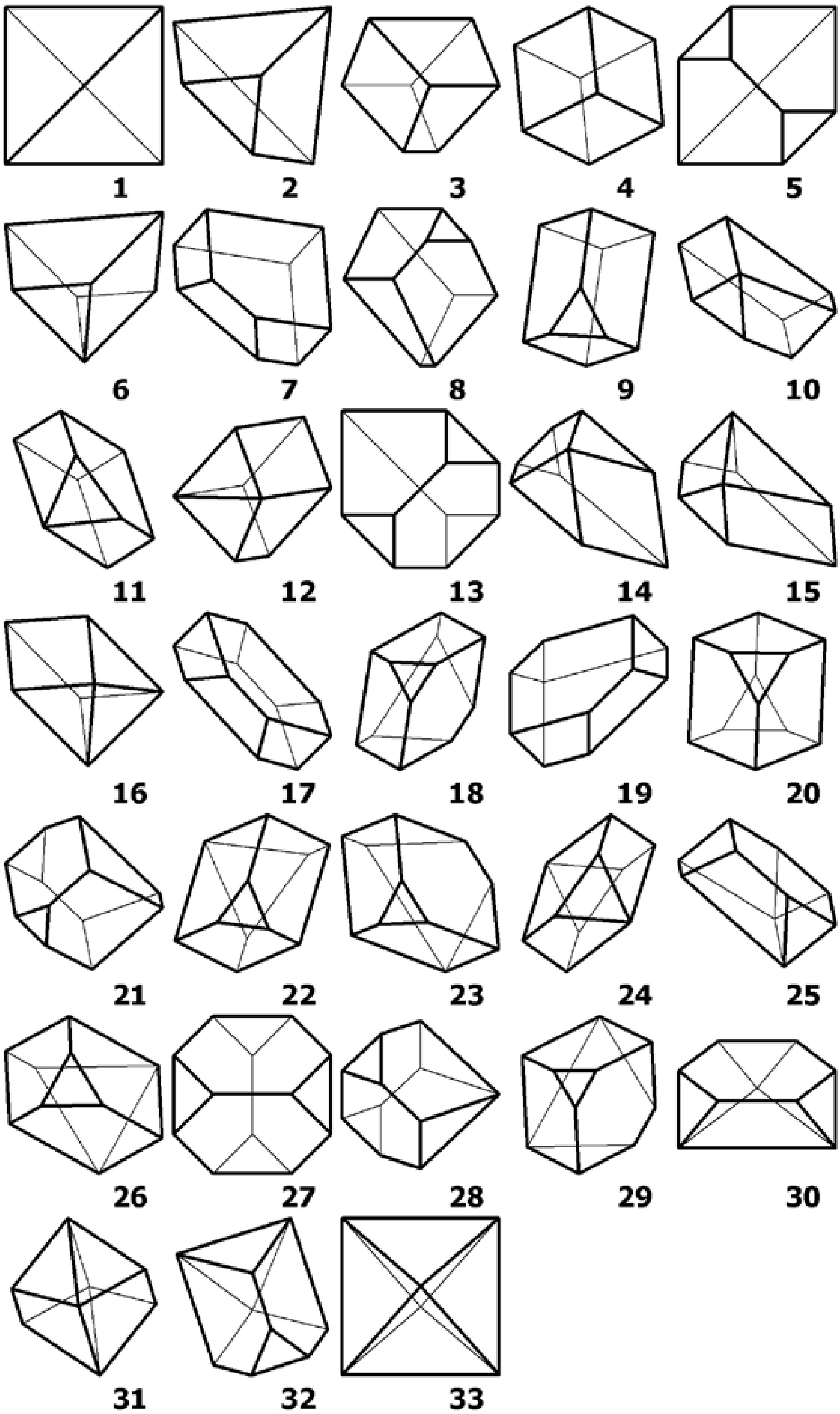


Рис. 2.1. Реальные октаэдры.

определяется с учётом углов между гранями). Легко понять, насколько более информативным становится описание искажённых (в смысле, охватываемом определением реальной простой формы) октаэдров на фоне их полного многообразия. Так, реальный октаэдр из рис. 1.1 (справа) дан на рис. 2.1 под № 32 и имеет симметрию 3m. Она говорит о средней степени диссимметризации кристалла в ряду форм, упорядоченных по порядкам групп автоморфизмов (в скобках): m3m (48), -43m (24), -3m (12), mmm (8), **3m (6)**, mm2 (4), 2/m (4), m (2), 1 (1). Как видно из табл. 2.1, весь этот ряд точечных групп симметрии достижим относительно небольшими смещениями всех граней вдоль нормалей при их сохранении на реальном октаэдре. В этом смысле октаэдр как простая форма – потенциально чуткий индикатор всевозможных вариантов диссимметрии среды.

Таблица 2.1. Точечные группы симметрии реальных октаэдров.

Сингонии	Число граней				
	4	5	6	7	8
трикл.				**1**: 10	**1**: 23
мон.				**m**: 7, 8, 11, 12, 14, 15	**m**: 18, 19, 22, 25, 26, 29; **2/m**: 24
ромб.			**mm2**: 3, 5, 6		**mm2**: 21, 28; **mmm**: 31
тригон.		**3m**: 2	**-3m**: 4	**3m**: 9, 13, 16	**-3m**: 17, 20; **3m**: 30, 32
куб.	**-43m**: 1				**-43m**: 27; **m3m**: 33

Примечание: номера соответствуют рис. 2.1.

Аналогично изучено многообразие реальных ромбододекаэдров, насчитывающее 625 комбинаторно различных форм (табл. 2.2). Как и октаэдр, ромбододекаэдр оказывается потенциально чутким индикатором диссимметрии среды – из 13 допустимых точечных групп симметрии в полногранных формах реализуются 9, за исключением весьма редких: -1, 2/m, 222 и -3m. При этом именно среди них встречаются наиболее симметричные формы m3m и 4/mmm – индикаторы слабой диссимметризации. Полногранные реальные ромбододекаэдры даны на рис. 2.2 и охарактеризованы точечными группами симметрии в табл. 2.3.

Таблица 2.2. Точечные группы симметрии реальных ромбододекаэдров.

Сингонии	Число граней				
	4	5	6	7	8
трикл.			**1** (7)	**1** (32)	**1** (75), **-1** (1)
мон.		**2** (3), **m** (1)	**2** (4), **2/m** (1), **m** (1)	**2** (9), **m** (14)	**2** (12), **2/m** (5), **m** (17)
ромб.		**mm2** (1)	**222** (1), **mm2** (4)	**mm2** (1)	**222** (1), **mm2** (5), **mmm** (1)
тригон.			**-3m** (1)		
тетрагон.	**-42m** (1)				**-42m** (2), **4/mmm** (1)

Продолжение таблицы 2.2.

Сингонии	Число граней			
	9	10	11	12
трикл.	**1** (115)	**1** (87), **-1** (1)	**1** (48)	**1** (3)
мон.	**2** (13), **m** (21)	**2** (22), **m** (39), **2/m** (2)	**2** (12), **m** (12)	**2** (2), **m** (10)
ромб.	**mm2** (1)	**mm2** (9), **mmm** (1), **222** (1)	**mm2** (3)	**mm2** (11), **mmm** (1)
тригон.	**32** (3)			**32** (1)
тетрагон.				**-42m** (3), **4/mmm** (2)
куб.				**m3m** (1)

Примечание: в скобках – число форм с данной точечной группой симметрии.

Многообразие реальных ромбододекаэдров использовано в анализе морфотипов альмандина из месторождений Зап. Кейв, Кольский п-ов: гг. Берёзовая I и II, Слюдяные Сопки,

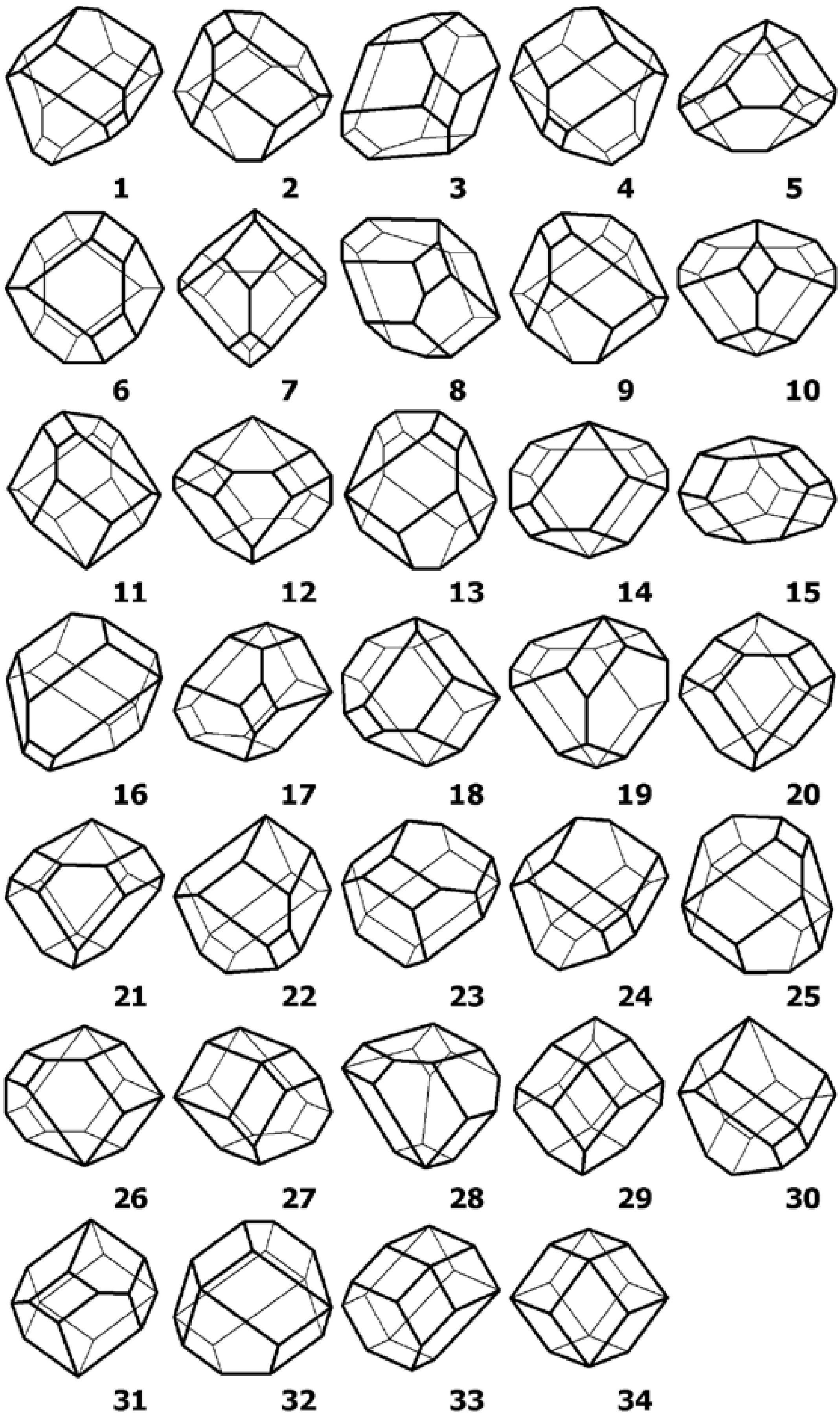


Рис. 2.2. Полногранные реальные ромбододекаэдры.

ЮЗ Ровозеро, Макзапахк, Тахлинтуайв[62, 63], а также Сев. Карелии[64]. Наиболее представительные коллекции хорошо образованных кристаллов собраны на месторождениях гг. Берёзовая I (127 шт., рис. 2.3.), Макзапахк (52 шт., рис. 2.4) и Тахлинтуайв (91, рис. 2.5). На первом месторождении установлено 15, на втором – 10, на третьем – 9 форм ромбододекаэдра, все – полногранные. Сквозными являются формы: 5, 14, 20, 29, 30, 33 и 34 (рис. 2.2). Их распространённость на месторождениях весьма различна. На г. Макзапахк наиболее распространены (в порядке убывания): 34 (m3m) и 29 (4/mmm), на г. Берёзовая I: 29 (4/mmm), 14 (4/mmm) и 20 (mm2), на г. Тахлинтуайв: 5 (mmm), 29 (4/mmm), 14 (4/mmm) и 20 (mm2).

Таблица 2.3. Точечные группы симметрии полногранных реальных ромбододекаэдров.

Сингонии	Точечные группы симметрии
трикл.	**1** (8, 16, 27)
мон.	**m** (2, 4, 9, 10, 15, 17, 22, 23, 25, 28), **2** (18, 21)
ромб.	**mm2** (1, 11-13, 19, 20, 24, 26, 30, 31, 33), **mmm** (5)
тригон.	**32** (3)
тетрагон.	**-42m** (6, 7, 32), **4/mmm** (14, 29)
куб.	**m3m** (34)

Примечание: в скобках – номера форм на рис. 2.2.

В соответствии с принципом диссимметрии Кюри, в форме кристалла сохраняются лишь те элементы симметрии, которые не противоречат симметрии среды, характеризуемой одной из

62 Войтеховский Ю.Л. Принцип Кюри и гранаты г. Макзапахк // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 3. С. 355-358.

63 Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Реальные ромбододекаэдры: теория и приложения к гранатам г. Макзапахк, Зап. Кейвы, Кольский п-ов // Зап. РМО. 2005. № 1. С. 97-103.

64 Войтеховский Ю.Л., Бубнова Т.П. Реальные кристаллографические простые формы – теория и приложения к описанию гранатов Кольского п-ова и Сев. Карелии // Тр. Всерос. научн. школы «Математические исследования в кристаллографии, минералогии и петрографии». Апатиты, 3-7 окт. 2005 г. Апатиты: Изд-во K & M, 2005. С. 95-122.

Рис. 2.3. Альмандин г. Берёзовая I.

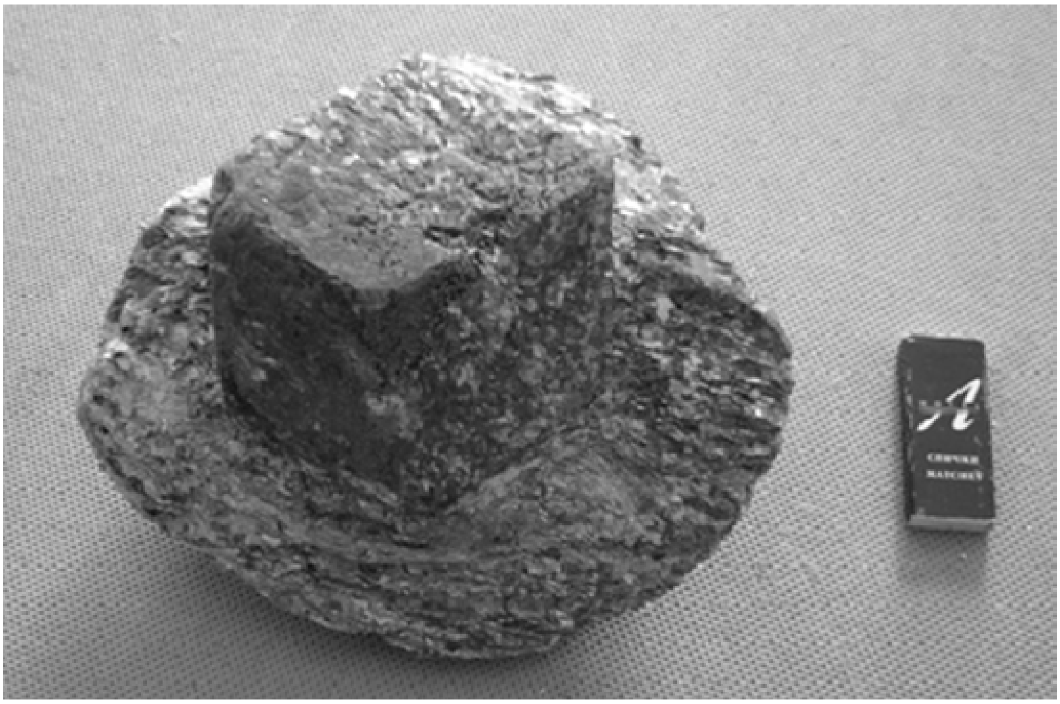


Рис. 2.4. Альмандин г. Макзапахк.

семи предельных точечных групп: ∞, ∞m, $\infty 2$, ∞/m, ∞/mm, ∞/∞, $\infty/\infty m$. Восстановление симметрии среды состоит в определении простейших из перечисленных групп, вмещающих точечную группу симметрии кристалла в качестве собственной

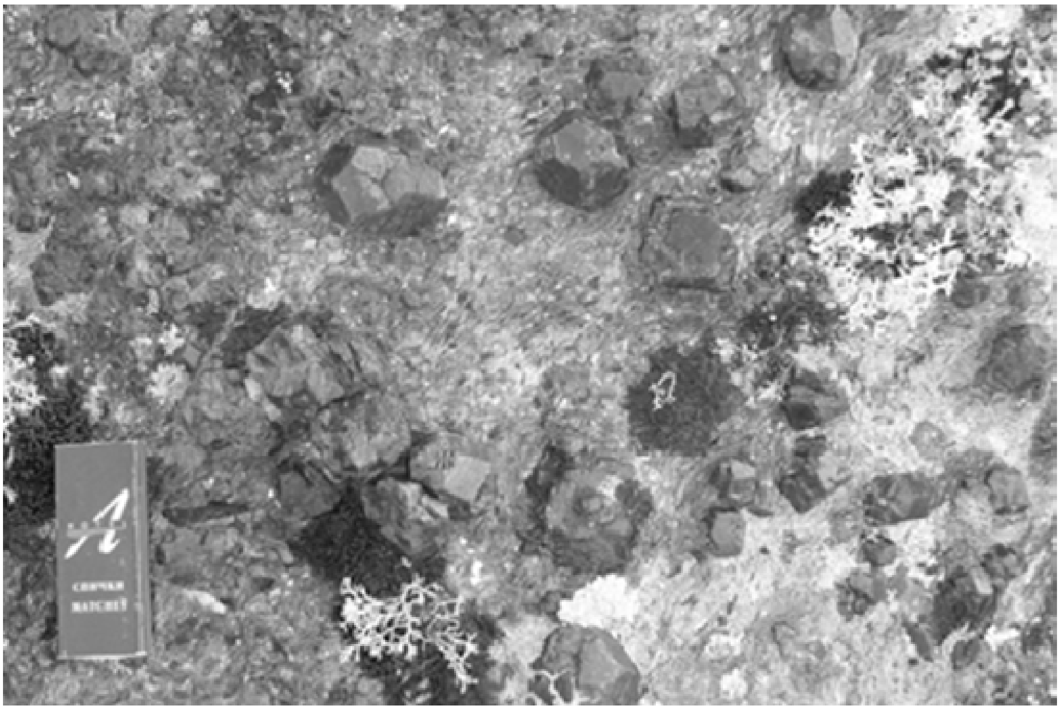


Рис. 2.5. Альмандин г. Тахлинтуайв.

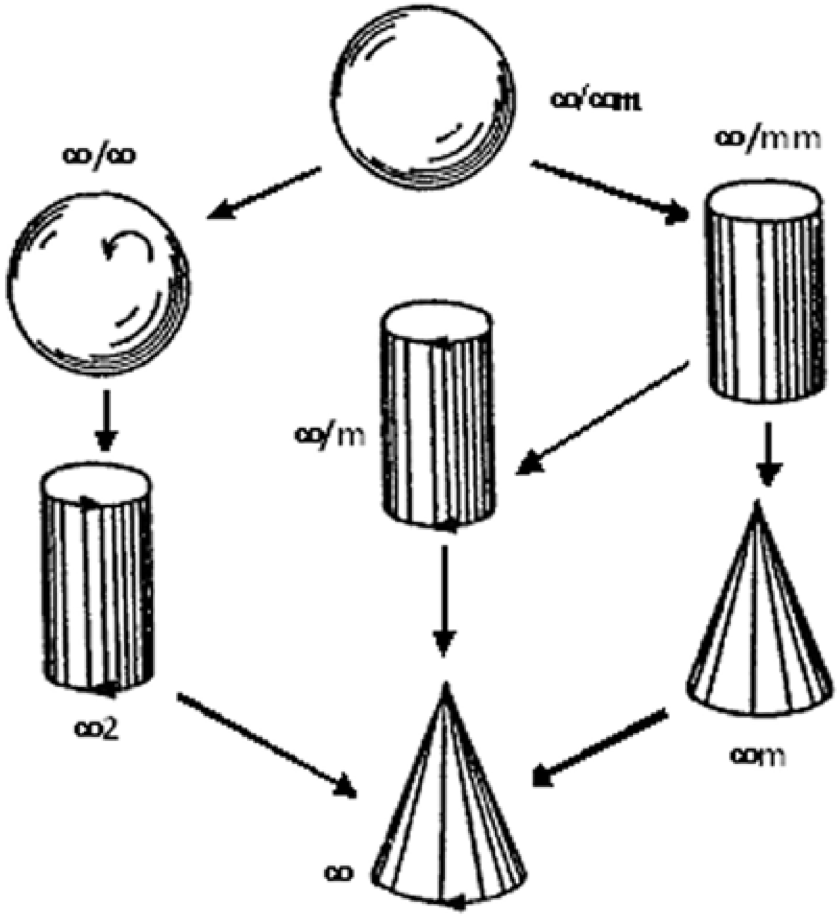


Рис. 2.6. Соподчинение предельных точечных групп симметрии Кюри в геометрической интерпретации.

подгруппы[65] (рис. 2.6) при различных ориентациях их элементов симметрии. (Вариабельность допускают четыре точечных группы симметрии: 2 вкладывается в ∞ и ∞2, m – в ∞/m и ∞m, 2/m – в ∞/m и ∞/mm, mm2 – в ∞m и ∞/mm.)

Так, группа m3m идеального ромбододекаэдра 34 вкладывается только в предельную группу ∞/∞m и указывает на изотропную среду кристаллообразования. Группы 4/mmm реальных ромбододекаэдров 29 и 14, а также mmm реального ромбододекаэдра 5 вкладываются в предельную группу ∞/mm и указывают на симметрию среды типа «покоящегося цилиндра», т. е. двустороннего потока. Группа mm2 реальных ромбододекаэдров 20, 30 и 33 вкладывается в предельную группу ∞m (оси ∞ и 2 параллельны) и указывает на симметрию среды типа «покоящегося конуса», т.е. одностороннего потока, а также в предельную группу ∞/mm (оси ∞ и 2 перпендикулярны) и указывает на симметрию среды типа «покоящегося цилиндра». В качестве единичных находок отмечу формы 18 (г. Берёзовая I) и 27 (гг. Берёзовая I, Макзапахк). Их группы 2 и 1, соответственно, вкладываются в предельную группу ∞ (оси ∞ и 2 параллельны) и указывают на предельно диссимметризованную среду типа «вращающегося конуса», т.е. вращающегося потока. Кроме того, группа 2 вкладывается в предельную группу ∞2 (оси ∞ и 2 перпендикулярны) и указывает на среду типа «скрученного цилиндра», что чрезвычайно интересно с точки зрения геологической интерпретации. Отметим также, что среди природных гранатов нами в основном встречены слабо- и средне-диссимметризованные формы.

В качестве комбинации простых форм рассмотрим реальные кубооктаэдры, многообразие которых насчитывает 77657 (!) морфотипов. Это – фундаментальная основа описания форм природных кристаллов алмаза, впрочем, как и охарактеризованные выше многообразия ромбододекаэдров и октаэдров. Симметрийная статистика реальных кубооктаэдров дана в табл. 2.4.

[65] Шафрановский И.И. Внешняя симметрия реальных кристаллов и симметрия питающей среды // Зап. ВМО. 1954. № 4. С. 198-211.

Таблица 2.4. Точечные группы симметрии реальных кубооктаэдров.

Сингонии	Виды симметрии	Число граней					
		4	5	6	7	8	9
трикл.	1		2	37	282	1259	4267
	-1					4	
мон.	m		9	30	114	314	505
	2		1	2	8	28	26
	2/m			2		15	
ромб.	mm2	1	2	10	8	27	15
	mmm					4	
	222					1	
тригон.	3m	1	2	1	9	9	2
	-3m			1		5	
тетрагон.	4mm		1	1			4
	-42m			1		1	
	4/mmm						
куб.	-43m	1				1	
	m3m			1		1	

Продолжение табл. 2.4.

Сингонии	Виды симметрии	Число граней				
		10	11	12	13	14
трикл.	1	9928	16861	19476	13896	4543
	-1	15		19		11
мон.	m	843	1034	1222	961	697
	2	161	45	240	36	151
	2/m	17		24		29
ромб.	mm2	62	31	93	42	88
	mmm	3		5		10
	222					
тригон.	3m	11	18		8	9
	-3m			3		4
тетрагон.	4mm	9			9	9
	-42m	3		3		
	4/mmm	1		3		5
куб.	-43m	1				
	m3m					3

Как и в предыдущих случаях, полногранные формы кубооктаэдра показывают почти полный спектр точечных групп симметрии, за исключением очень редких форм 222, -42m и -43m. То есть, комбинация куба и октаэдра на природных кристаллах – потенциально чуткий индикатор всевозможных вариантов диссимметрии среды. На рис. 2.7 показаны и в табл. 2.5 охарактеризованы наиболее симметричные – с порядками групп автоморфизмов не менее 12 – формы. По-видимому, именно они должны образовываться в слабо диссимметризованных природных средах.

Таблица 2.5. Точечные группы симметрии самых симметричных реальных кубооктаэдров.

Сингонии	Виды симметрии	Число граней					
		4	6	8	10	12	14
тригон.	-3m		2	4 - 7, 9		13, 17, 18	20, 24, 26, 27
тетрагон.	4/mmm				11	14-16	19, 22, 23, 25, 29
куб.	-43m	1		8	12		
	m3m		3	10			21, 28, 30

Примечание: номера соответствуют рис. 2.7.

Более ста лет назад К.-Ф. Науманн[66] высказал следующую мысль: «Индивиды минерального царства … появляются лишь в более или менее угнетённых или искалеченных формах … которые большей частью не имеют никакого отношения к тем кристаллическим формам, над созданием которых природа, в сущности, трудилась в каждом индивиде» (пер. мой – *Ю.В.*). Предложенный подход замечательно приспособлен к описанию «угнетённых» кристаллов, в которых нарушение идеала состоит в смещении граней вдоль нормалей. Идеальный октаэдр порождает 33 реальных разновидности (17 полногранных), ромбододекаэдр – 625 (34 полногранных), комбинация куба и октаэдра – 77657 (5559 полногранных) и т.д. Без преувеличе-

[66] Naumann C.F. Elemente der Mineralogie. Leipzig: Verlag von W. Engelmann, 1907. 821 S. (S. 4).

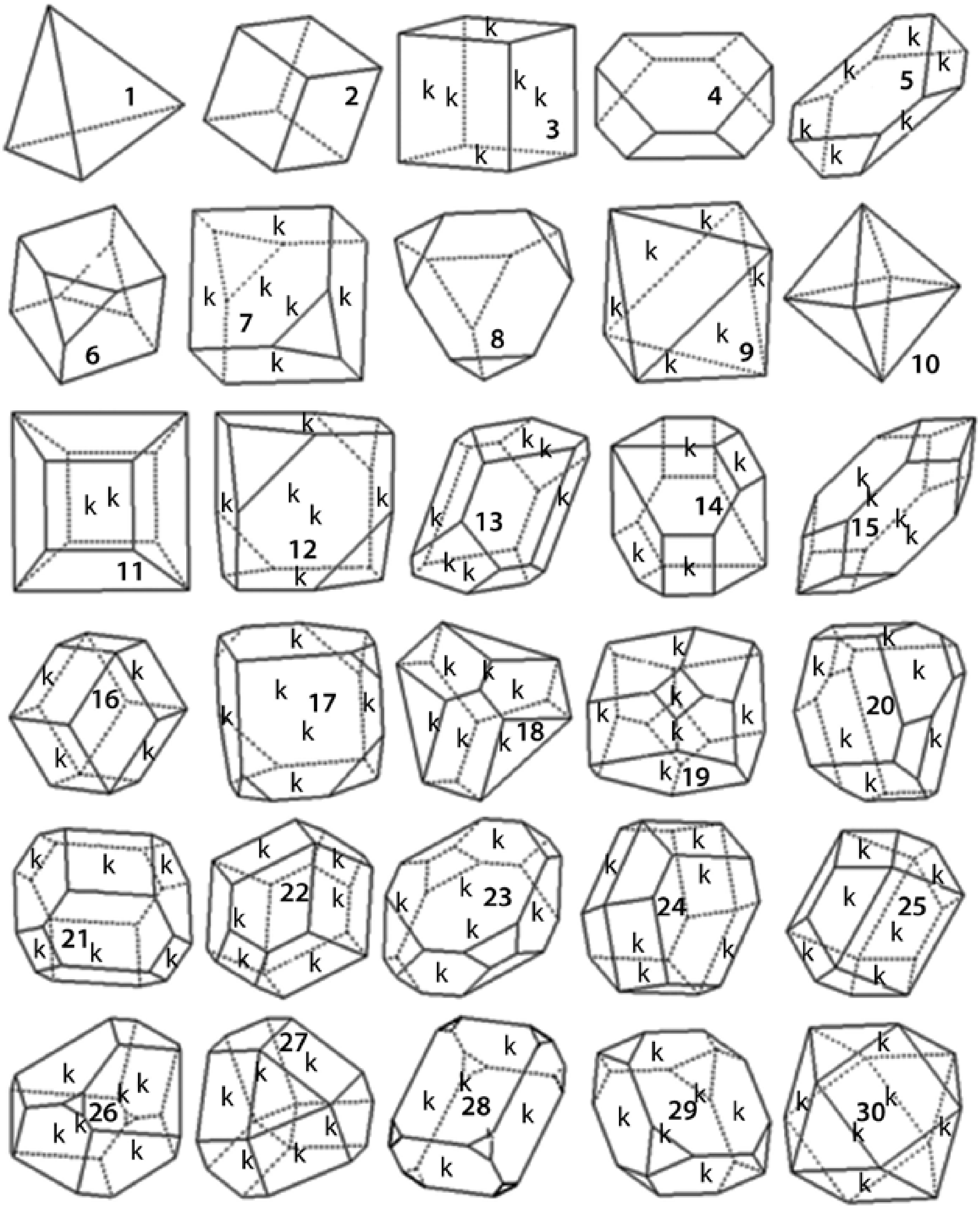


Рис. 2.7. Самые симметричные реальные кубооктаэдры. Куб и октаэдр включены в выборку. Буквами обозначены грани: k – куб, o – октаэдр.

ния можно сказать, что кристалломорфология получает для анализа и практического применения целый мир новых форм. При этом важно, что для данной простой формы и комбинации форм их многообразие заведомо конечно, исчисляемо и строго характеризуемо точечными группами симметрии. К сожалению, это возможно пока лишь компьютерными методами. Но это же обстоятельство объясняет, почему перечисление реальных простых форм и их наиболее интересных комбинаций не было выполнено в XIX и первой половине XX вв., когда задачи такого рода были очень популярны.

Характеризация реальных простых форм и их комбинаций точечными группами симметрии позволяет прямо использовать их для реконструкции условий кристаллообразования согласно принципу диссимметрии Кюри. Это классическая тема российской минералогической кристаллографии. В изученных многообразиях реальных простых форм – как и среди абстрактных выпуклых полиэдров – довлеющим образом преобладают не просто низкосимметричные, но примитивные формы. Этот факт ещё требует осмысления. Среди природных форм, как показывает опыт изучения гранатов на месторождениях Зап. Кейв, преобладают наиболее симметричные, слабо диссимметризованные. В первую очередь это проявляется в том, что кристаллы сохраняют полное число граней. Но даже при этом, на первый взгляд, сильном ограничении полногранные формы являются потенциально чуткими индикаторами различных типов диссимметризации, поскольку среди них встречаются все или почти все точечные группы симметрии, проявленные в полном многообразии. Именно это показывают полногранные реальные ромбододекаэдры Зап. Кейв – почти полный спектр теоретически возможных точечных групп симметрии от идеальной до примитивной.

В качестве заключения этого этюда предлагаю вернуться к его началу, ведь это полезно – время от времени возвращаться к началам, и окинуть взглядом полное комбинаторное многообразие ну хотя бы реальных ромбододекаэдров, которых ни мало, ни много – 625 разновидностей. Отвлечёмся от каких-либо генетических интерпретаций и насладимся исчерпывающей полнотой этого класса форм. Кто-то критически заметит, что подобными перечислительными задачами занимались даже не в XX, а в IX веке: И.Ф. Гессель и А.В. Гадолин (точечные группы симметрии и простые формы), Е.С. Фёдоров (пространственные группы симметрии). Это так. Но ведь полученные результаты легли в фундамент кристалломорфологии и структурной кристаллографии, став привычным инструментом систематического описания форм (В. Гольдшмидт, А.Е. Ферсман) и структур кристаллов. С другой стороны, даже перечисление разновидностей ромбододекаэдра (не говоря о 77657 комбинациях куба и октаэдра) стало возможным лишь сегодня благодаря компьютерным технологиям. Изображениям полиэдров предпошлём их список и статистики по числу граней, гранным символам и точечным группам симметрии.

Список: 4-эдры: [4] (-42m): 1 **5-эдры:** [23] (m): 2 (2): 3-5 [41] (mm2): 6 **6-эдры:** [06] (1): 7-9 (2): 10, 11 (mm2): 12 (2/m): 13 (222): 14 (mm2): 15 (-3m): 16 [222] (1): 17-19 (2): 20 (mm2): 21 [24] (1): 22 (2): 23 (mm2): 24 [321] (m): 25 **7-эдры:** [052] (1): 26-34 (m): 35 (2): 36, 37 (m): 38 (2): 39, 40 [133] (1): 41-47 (m): 48-50 [151] (1): 51-62 (m): 63, 64 [2221] (2): 65, 66 [2302] (2): 67 [232] (1): 68 (2): 69 [2401] (mm2): 70 [25] (1): 71 (2): 72 (m): 73-75 [3031] (m): 76 [313] (1): 77 (m): 78 [331] (1): 79 (m): 80 [43] (m): 81 **8-эдры:** [044] (1): 82-98 (2): 99-102 [0602] (1): 103 (2): 104 (2/m): 105 (222): 106 (mm2): 107 (2/m): 108 [062] (1): 109-117 (m): 118-120 (2): 121, 122 (m): 123 [08] (m): 124 [1331] (1): 125-132 (m): 133, 134 [1412] (1): 135 [143] (1): 136-145 [1511] (1): 146-151 (m): 152, 153 [161] (1): 154-157 [206] (2/m): 158 [2141] (2): 159 (mm2): 160 [2222] (1): 161 (2): 162 (mm2): 163 [224] (1): 164-166 (m): 167 [2321] (1): 168-173 (m): 174 [242] (1): 175-178 (2): 179 (-1): 180 (2/m): 181 [2501] (1): 182, 183 (m): 184 (2): 185 (mm2): 186 [323] (1): 187 (m): 188, 189 [341] (1): 190 [4004] (-42m): 191 [4022] (2): 192 (mm2): 193 [4121] (1): 194 (m): 195 [4301] (m): 196 [44] (2/m): 197 (-42m): 198 (mmm):

199 [503] (m): 200 [8] (4/mmm): 201 **9-эдры:** [036] (1): 202-207 (m): 208-210 (2): 211, 212 (32): 213 [0441] (1): 214-222 (m): 223 (2): 224, 225 [0522] (1): 226-231 (2): 232 [054] (1): 233-244 (m): 245-249 (2): 250 [0603] (32): 251 [0621] (1): 252-265 (2): 266 [072] (1): 267-270 (m): 271 (2): 272-274 [0801] (1): 275, 276 (m): 277 [09] (32): 278 [1251] (1): 279, 280 [1332] (1): 281-286 [135] (1): 287-293 (m): 294 [1431] (1): 295-308 (m): 309 [1512] (1): 310 (m): 311 [153] (1): 312-323 (m): 324, 325 [1611] (1): 326-330 [171] (1): 331-333 (m): 334 [2304] (2): 335 [2322] (1): 336, 337 (2): 338 [234] (1): 339-341 [2421] (1): 342-345 [252] (1): 346 (m): 347-349 [2601] (1): 350 [27] (m): 351 (2): 352 [333] (1): 353 [45] (mm2): 354 **10-эдры:** [028] (1): 355 (m): 356 (2): 357, 358 [0361] (1): 359-362 (m): 363, 364 [0442] (1): 365-371 (2): 372-376 (-1): 377 (2): 378 [046] (1): 379-387 (m): 388, 389 (2): 390 [0523] (m): 391 (2): 392, 393 [0541] (1): 394-412 (m): 413-415 [0604] (222): 416 [0622] (1): 417-420 (2): 421-423 (m): 424 [064] (1): 425-436 (2): 437 (m): 438 (2): 439-441 (mm2): 442 (2/m): 443, 444 [0721] (1): 445-452 (2): 453, 454 [0802] (mm2): 455 [082] (1): 456-460 (2): 461 (mm2): 462 [0901] (m): 463 [0A] (2): 464 (mmm): 465 [1252] (m): 466, 467 [127] (m): 468, 469 [1333] (m): 470 [1351] (1): 471-473 (m): 474 [1414] (m): 475 [1432] (1): 476 (m): 477-480 [145] (1): 481-483 (m): 484-487 [1513] (m): 488 [1531] (1): 489-493 (m): 494, 495 [1612] (m): 496 [163] (1): 497-500 (m): 501-503 [1711] (1): 504 (m): 505 [181] (1): 506 (m): 507 [226] (mm2): 508, 509 [244] (m): 510, 511 (mm2): 512 [262] (m): 513 (mm2): 514, 515 [28] (mm2): 516 **11-эдры:** [0281] (1): 517, 518 (2): 519 [0362] (1): 520 (2): 521 [038] (1): 522, 523 (m): 524 [0443] (1): 525-527 (2): 528 [0461] (1): 529-537 (2): 538 (m): 539 [0524] (2): 540 [0542] (1): 541-544 (m): 545 (2): 546 (m): 547 [056] (1): 548-553 (2): 554, 555 (m): 556-558 [0623] (1): 559, 560 [0641] (1): 561-569 (2): 570 [0722] (1): 571 (m): 572 (2): 573 [074] (1): 574-579 (2): 580 (m): 581, 582 (mm2): 583 [0821] (1): 584, 585 (mm2): 586 [092] (1): 587 (2): 588 (m): 589, 590 [0B] (mm2): 591 **12-эдры:** [0282] (mm2): 592 [0363] (m): 593 (32): 594 [0381] (m): 595 [0444] (-42m): 596 (mmm): 597 (-42m): 598 [0462] (1):

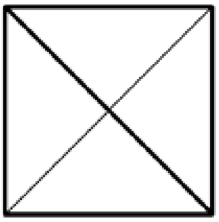
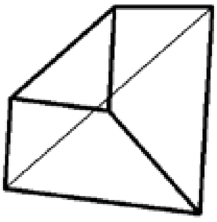
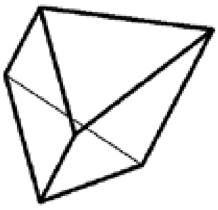
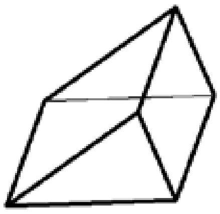
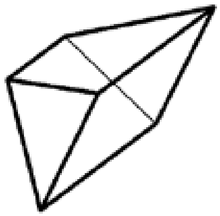
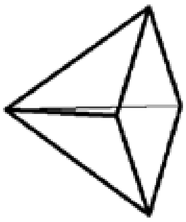
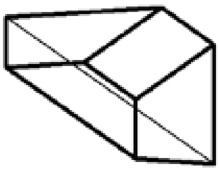
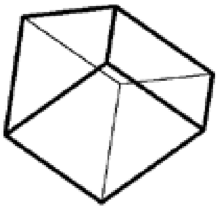
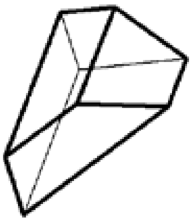
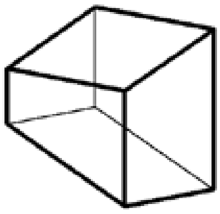
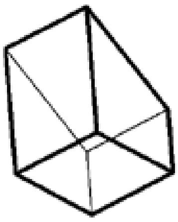
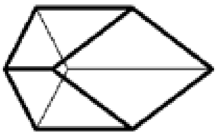
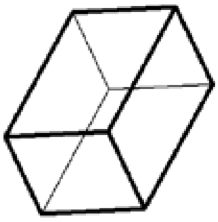
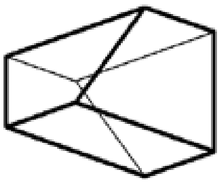
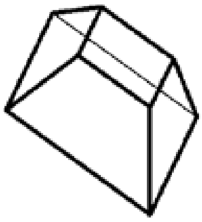
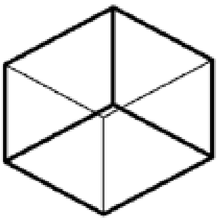
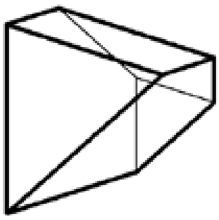
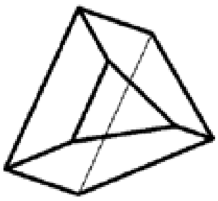
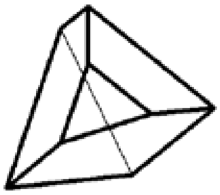
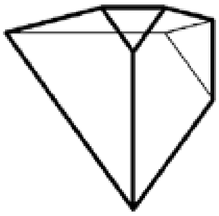
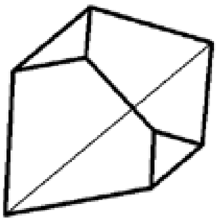
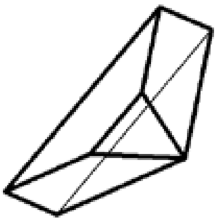
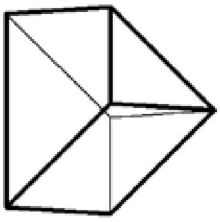
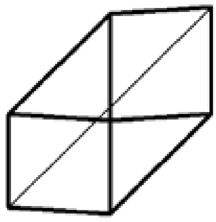
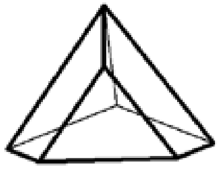
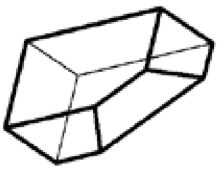
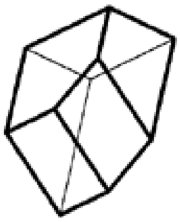
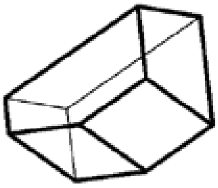
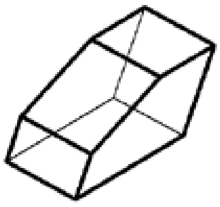
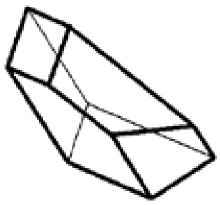
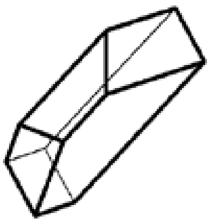
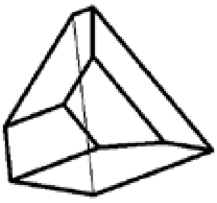
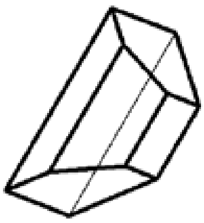
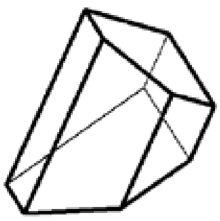
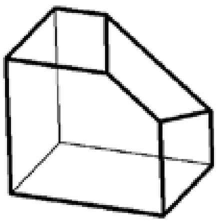
599 (m): 600, 601 (mm2): 602, 603 [048] (mm2): 604 (4/mmm): 605 [0543] (m): 606 [0561] (1): 607 (2): 608 (m): 609 (mm2): 610 [0624] (mm2): 611 [0642] (m): 612, 613 (2): 614 (mm2): 615 [066] (m): 616 (mm2): 617 [0741] (1): 618 (m): 619 [0804] (4/mmm): 620 [0822] (mm2): 621 [084] (mm2): 622 (-42m): 623 [0921] (mm2): 624 [0C] (m3m): 625.

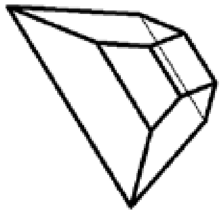
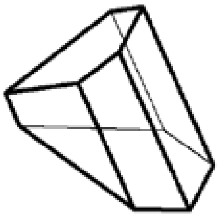
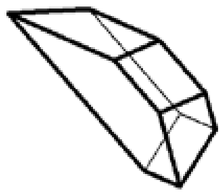
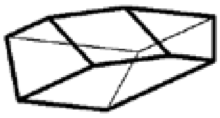
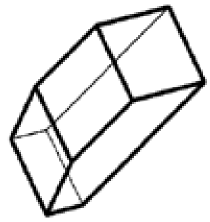
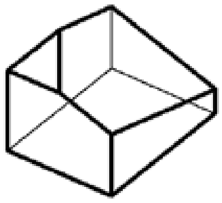
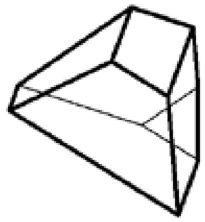
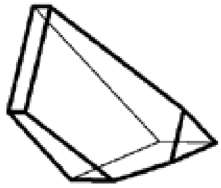
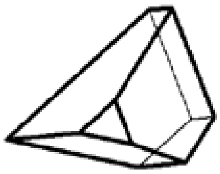
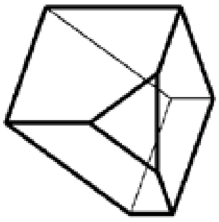
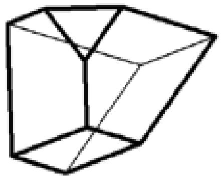
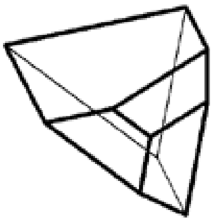
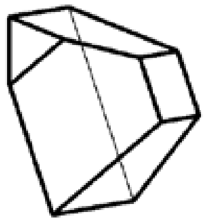
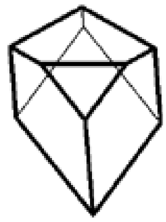
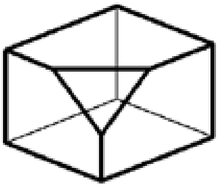
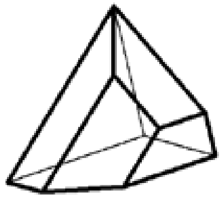
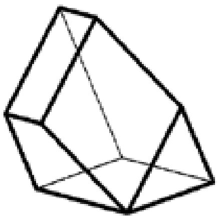
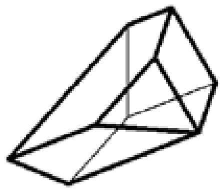
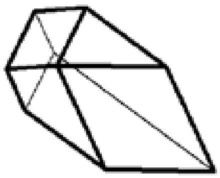
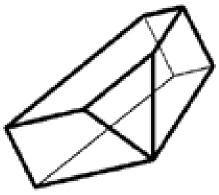
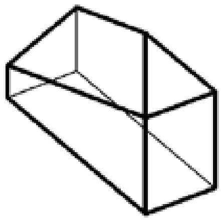
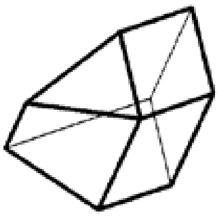
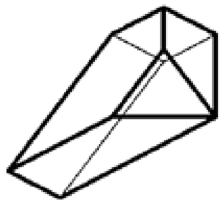
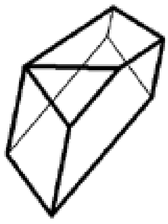
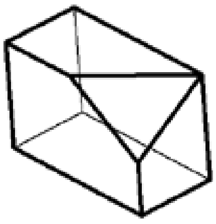
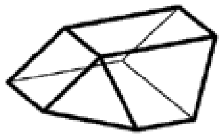
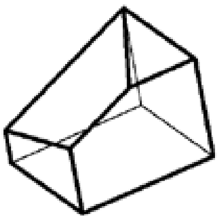
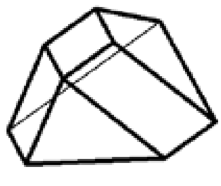
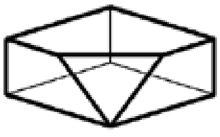
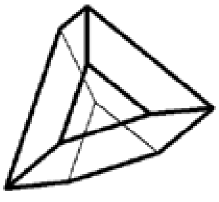
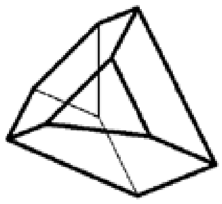
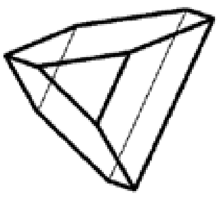
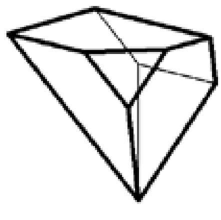
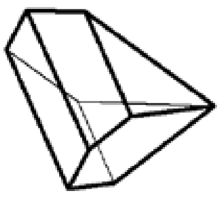
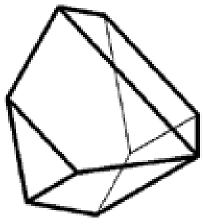
Статистика по числу граней: 4: 1, 5: 5, 6: 19, 7: 56, 8: 120, 9: 153, 10: 162, 11: 75, 12: 34.

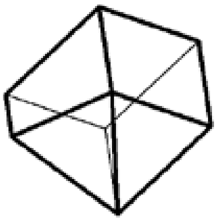
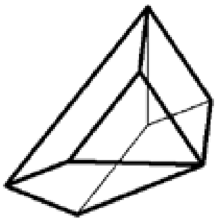
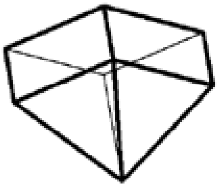
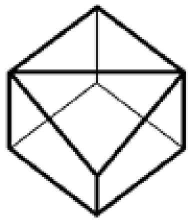
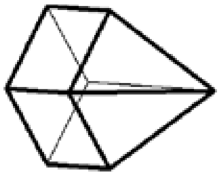
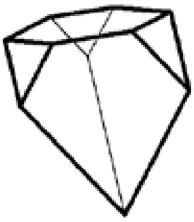
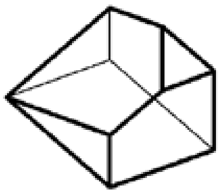
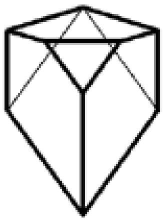
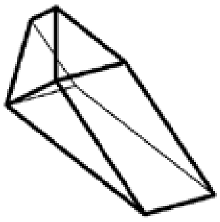
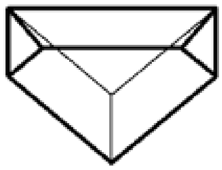
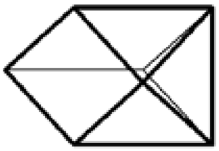
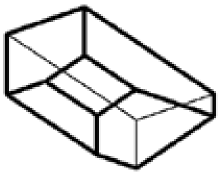
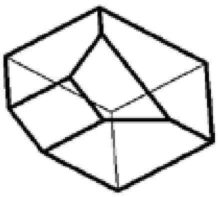
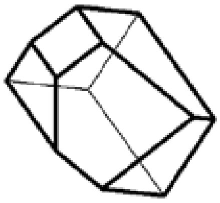
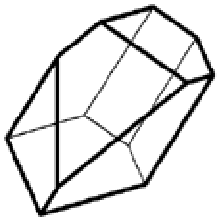
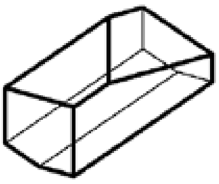
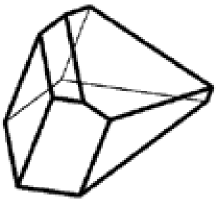
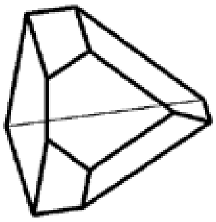
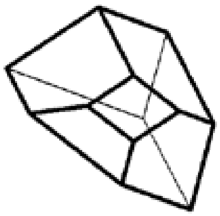
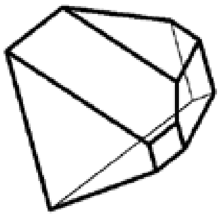
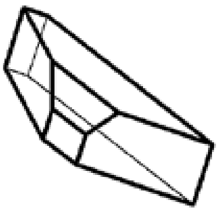
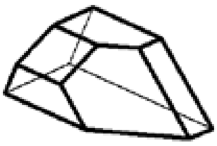
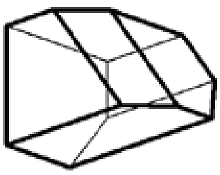
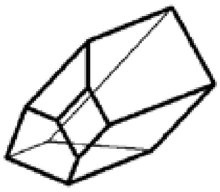
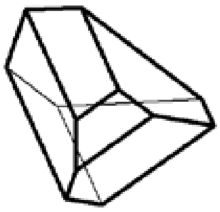
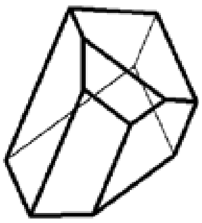
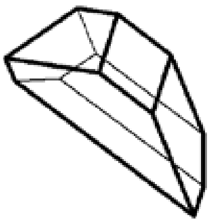
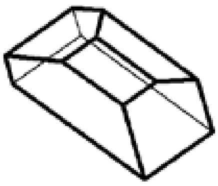
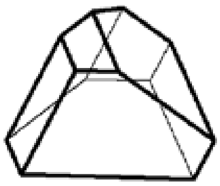
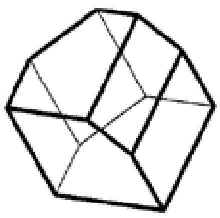
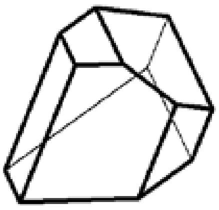
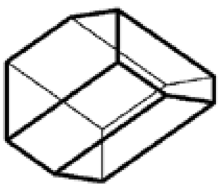
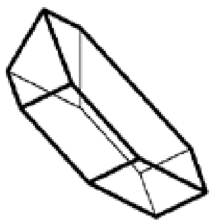
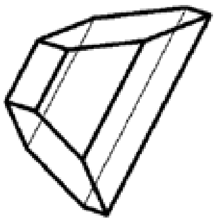
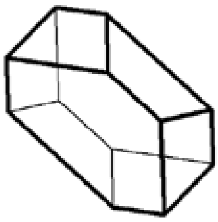
Статистика по гранным символам: [028]: 4 [0281]: 3 [0282]: 1 [036]: 12 [0361]: 6 [0362]: 2 [0363]: 2 [038]: 3 [0381]: 1 [044]: 21 [0441]: 12 [0442]: 14 [0443]: 4 [0444]: 3 [046]: 12 [0461]: 11 [0462]: 5 [048]: 2 [052]: 15 [0522]: 7 [0523]: 3 [0524]: 1 [054]: 18 [0541]: 22 [0542]: 7 [0543]: 1 [056]: 11 [0561]: 4 [06]: 10 [0602]: 6 [0603]: 1 [0604]: 1 [062]: 15 [0621]: 15 [0622]: 8 [0623]: 2 [0624]: 1 [064]: 20 [0641]: 10 [0642]: 4 [066]: 2 [072]: 8 [0721]: 10 [0722]: 3 [074]: 10 [0741]: 2 [08]: 1 [0801]: 3 [0802]: 1 [0804]: 1 [082]: 7 [0821]: 3 [0822]: 1 [084]: 2 [09]: 1 [0901]: 1 [092]: 4 [0921]: 1 [0A]: 2 [0B]: 1 [0C]: 1 [1251]: 2 [1252]: 2 [127]: 2 [133]: 10 [1331]: 10 [1332]: 6 [1333]: 1 [135]: 8 [1351]: 4 [1412]: 1 [1414]: 1 [143]: 10 [1431]: 15 [1432]: 5 [145]: 7 [151]: 14 [1511]: 8 [1512]: 2 [1513]: 1 [153]: 14 [1531]: 7 [161]: 4 [1611]: 5 [1612]: 1 [163]: 7 [171]: 4 [1711]: 2 [181]: 2 [206]: 1 [2141]: 2 [222]: 5 [2221]: 2 [2222]: 3 [224]: 4 [226]: 2 [23]: 4 [2302]: 1 [2304]: 1 [232]: 2 [2321]: 7 [2322]: 3 [234]: 3 [24]: 3 [2401]: 1 [242]: 7 [2421]: 4 [244]: 3 [25]: 5 [2501]: 5 [252]: 4 [2601]: 1 [262]: 3 [27]: 2 [28]: 1 [3031]: 1 [313]: 2 [321]: 1 [323]: 3 [331]: 2 [333]: 1 [341]: 1 [4]: 1 [4004]: 1 [4022]: 2 [41]: 1 [4121]: 2 [43]: 1 [4301]: 1 [44]: 3 [45]: 1 [503]: 1 [8]: 1

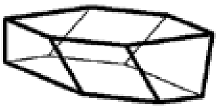
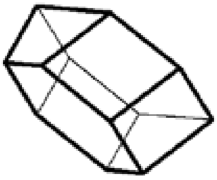
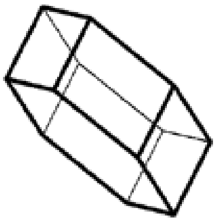
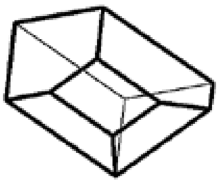
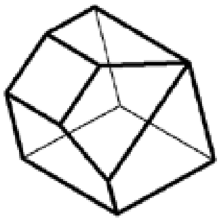
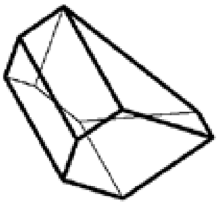
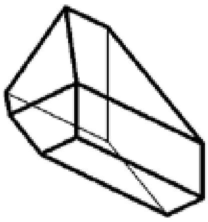
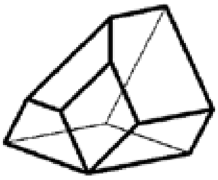
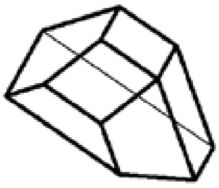
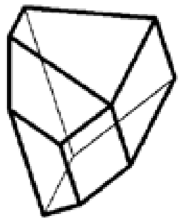
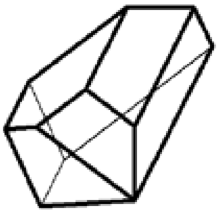
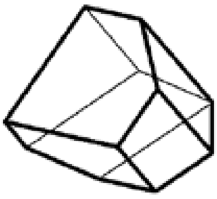
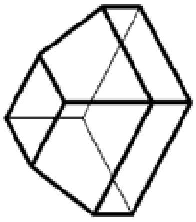
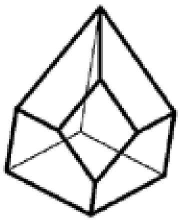
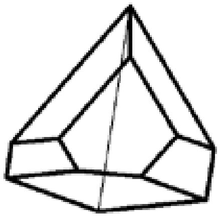
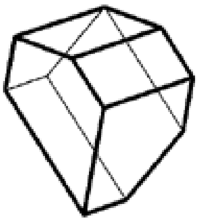
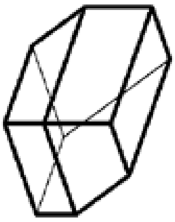
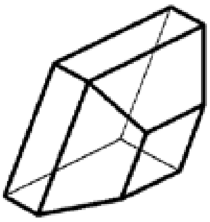
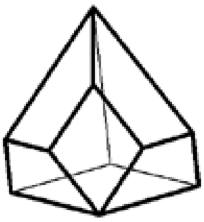
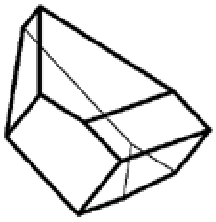
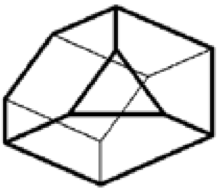
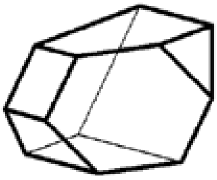
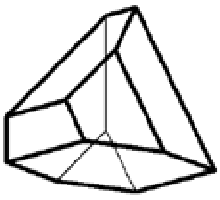
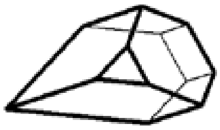
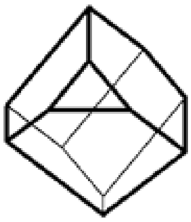
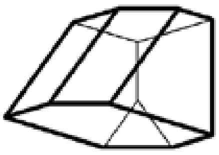
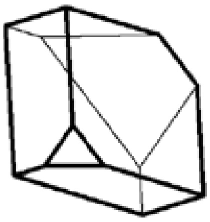
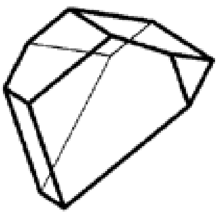
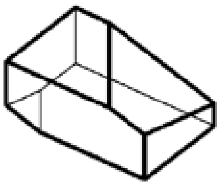
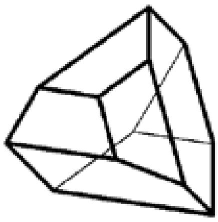
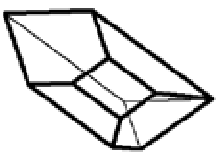
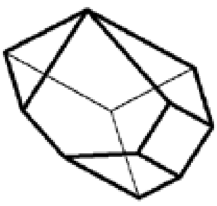
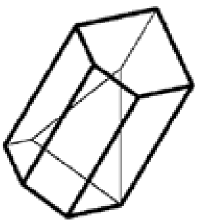
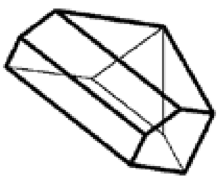
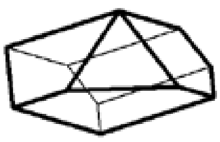
Статистика по точечным группам симметрии: (1): 367, (m): 115, (2): 77, (-1): 2, (2/m): 8, (222): 3, (mm2): 35, (32): 4, (-42m): 6, (mmm): 3, (-3m): 1, (4/mmm): 3, (m3m): 1.

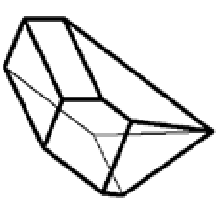
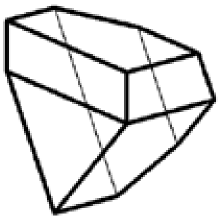
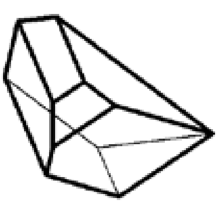
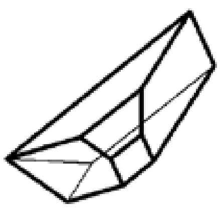
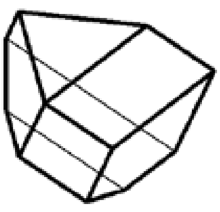
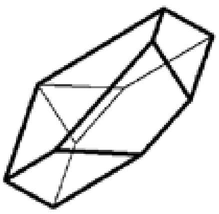
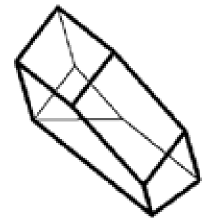
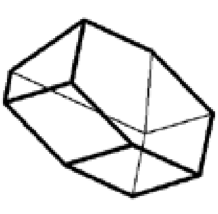
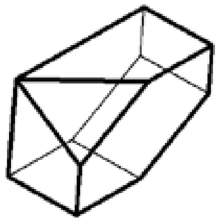
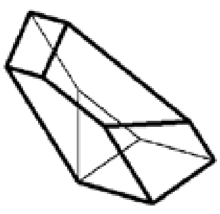
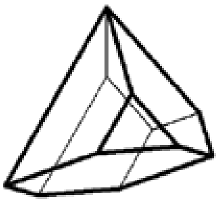
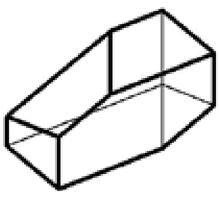
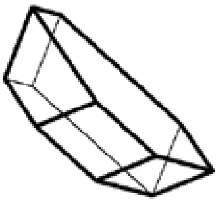
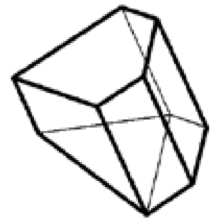
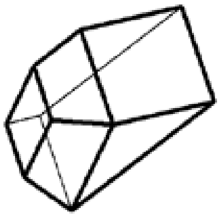
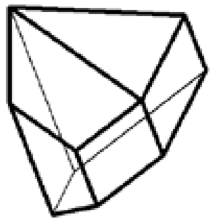
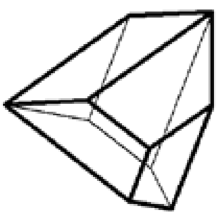
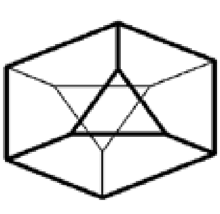
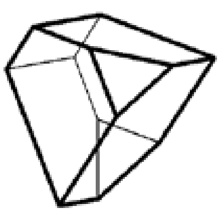
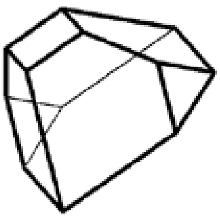
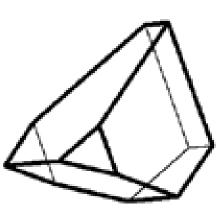
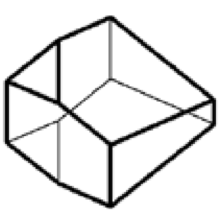
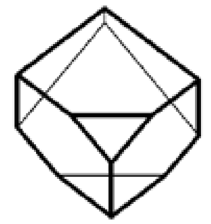
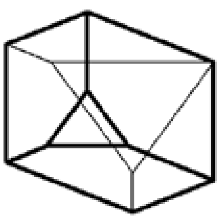
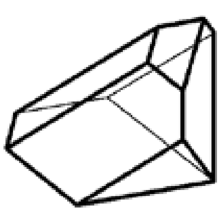
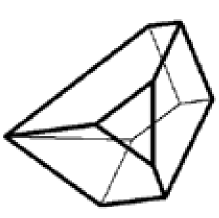
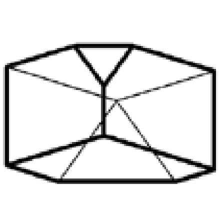
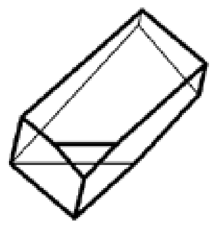
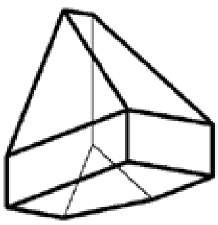
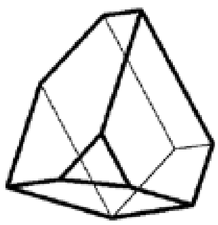
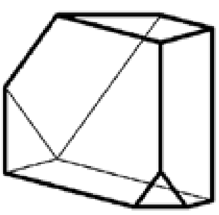
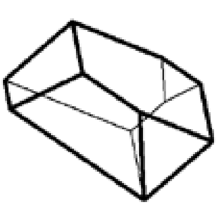
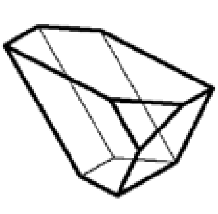
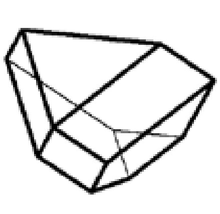
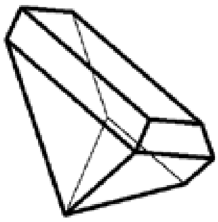
Порядковые номера в списках соответствуют рис. 2.8 (с. 42-59).

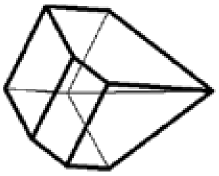
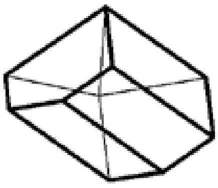
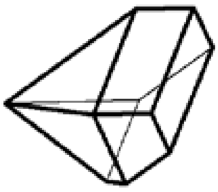
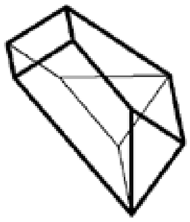
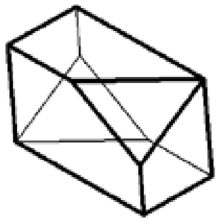
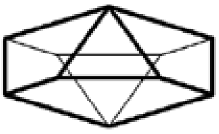
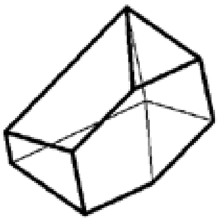
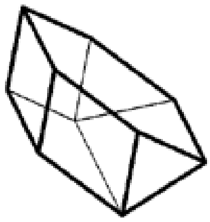
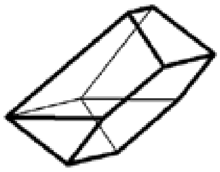
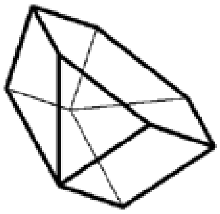
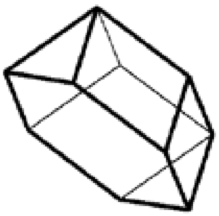
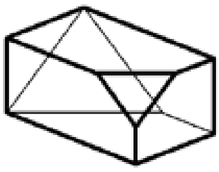
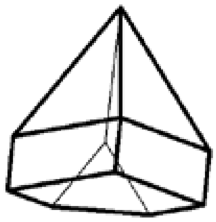
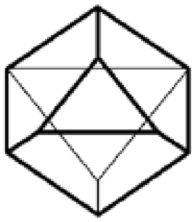
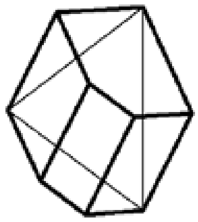
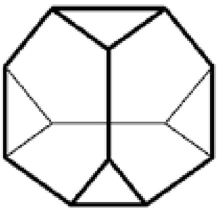
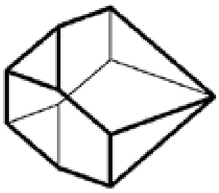
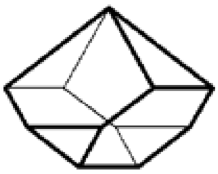
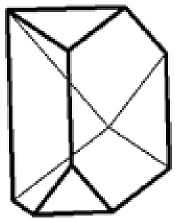
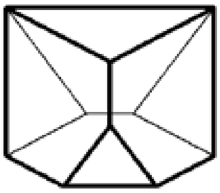
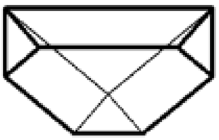
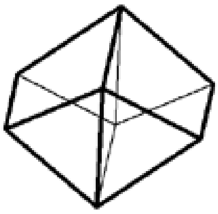
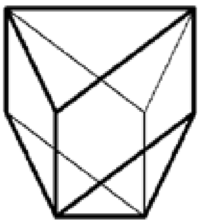
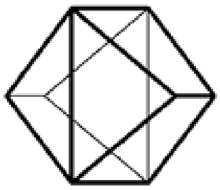
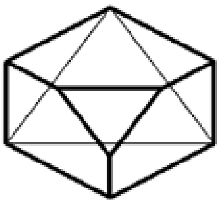
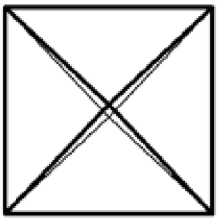
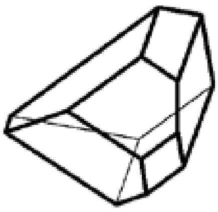
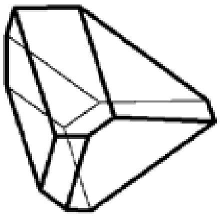
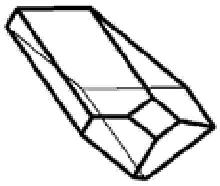
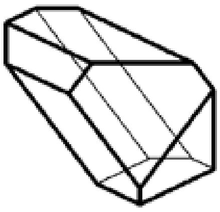
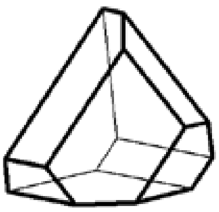
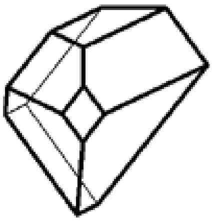
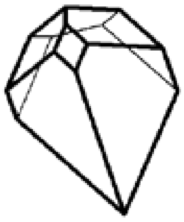
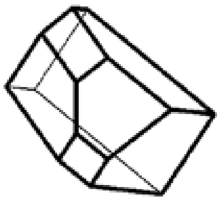
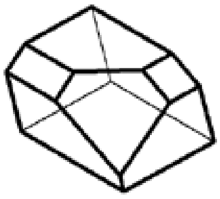

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

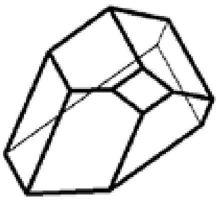
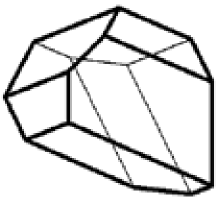
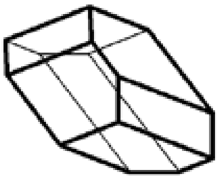
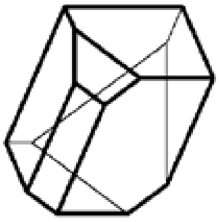
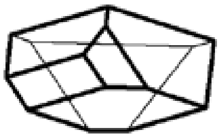
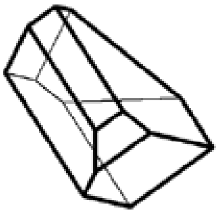
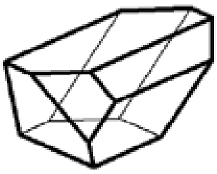
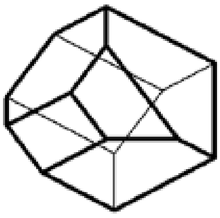
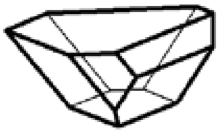
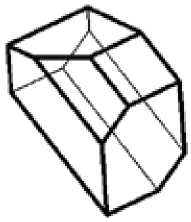
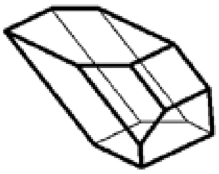
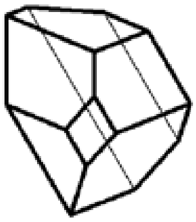
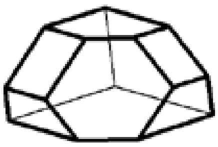
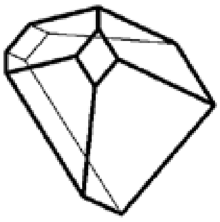
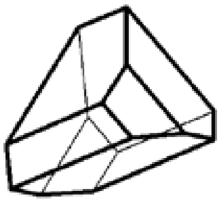
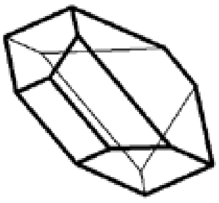
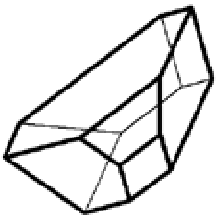
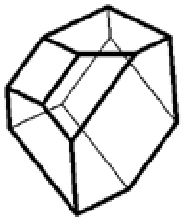
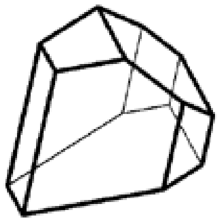
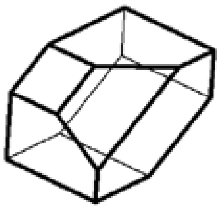
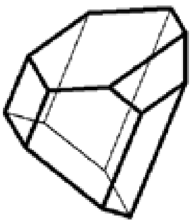
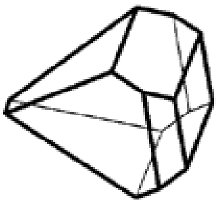
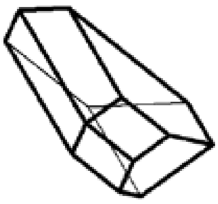
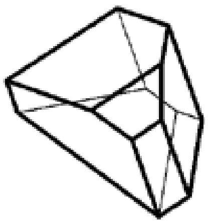
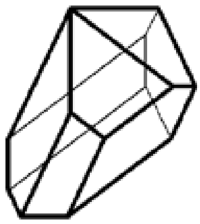
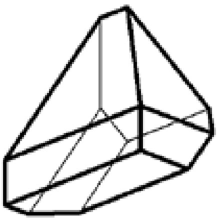
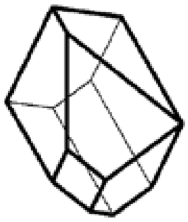
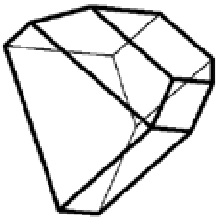
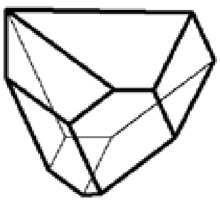
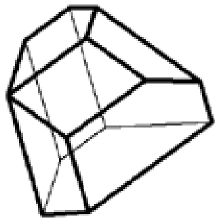
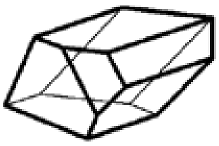
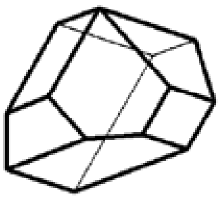
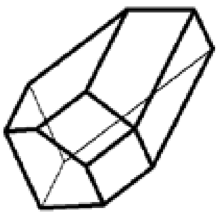
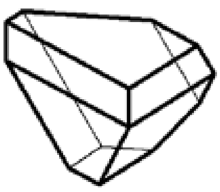
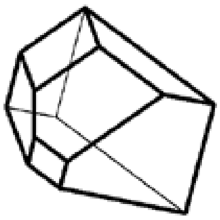

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

46

47

48

49

50

51

52

53

54

55

56

57

58

59

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

70

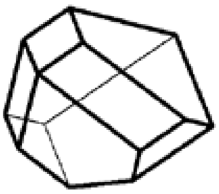
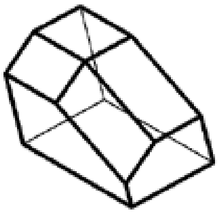
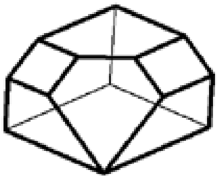
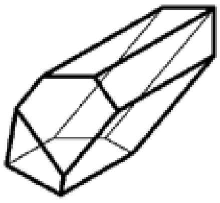
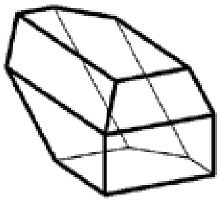
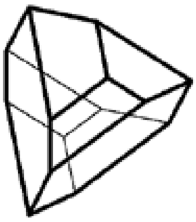
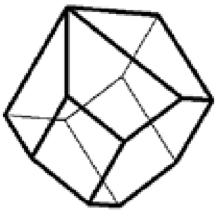
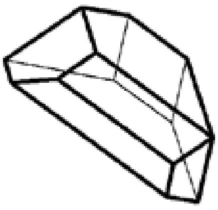
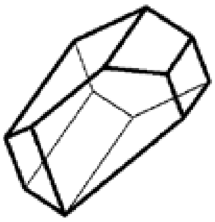
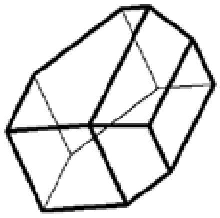
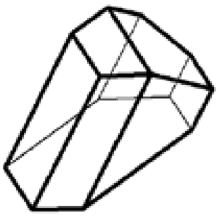
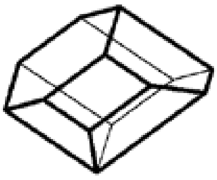
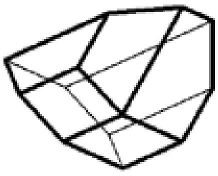
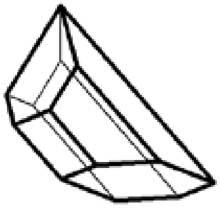
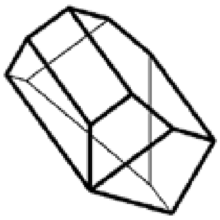
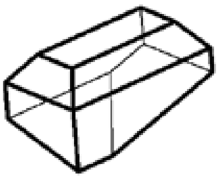
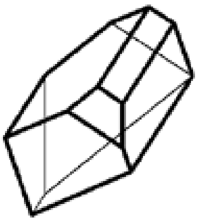
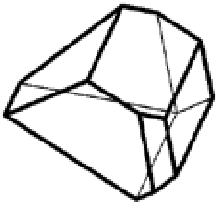
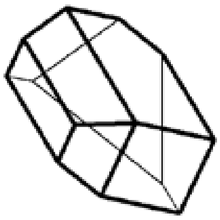
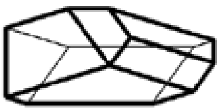
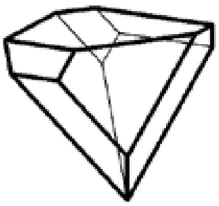
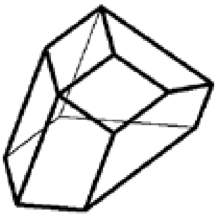
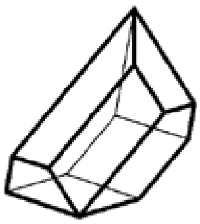
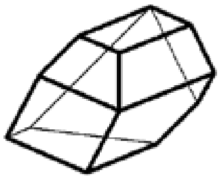
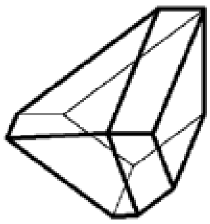
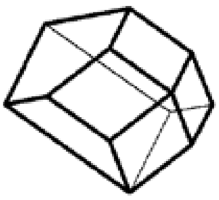
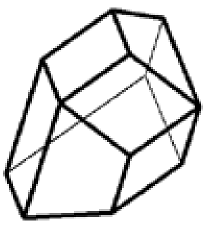
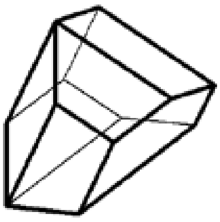
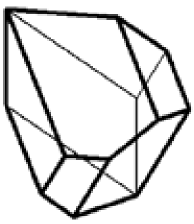
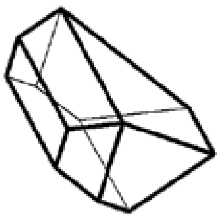
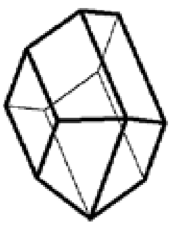
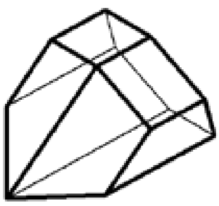
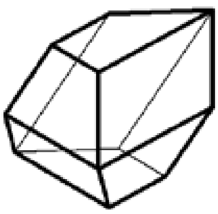
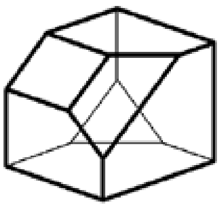
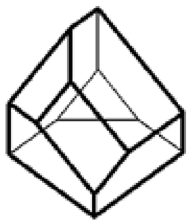

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

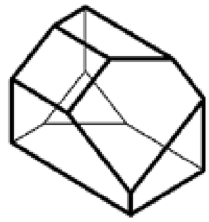
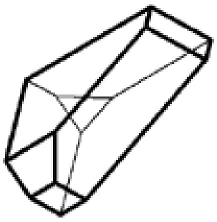
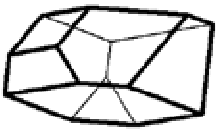
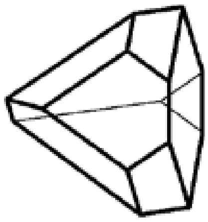
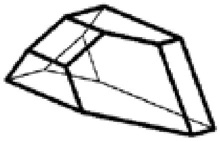
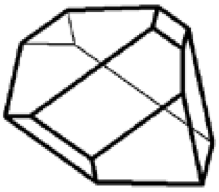
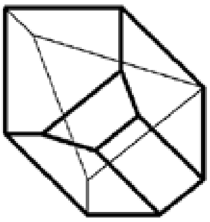
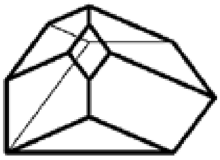
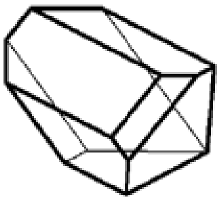
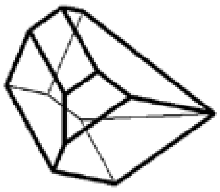
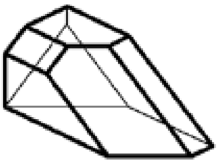
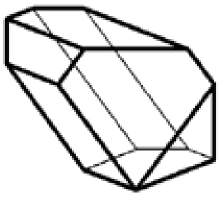
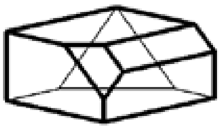
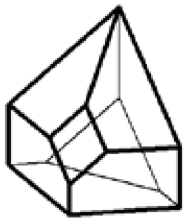
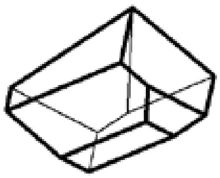
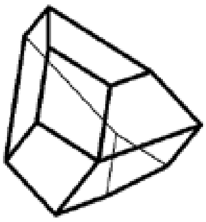
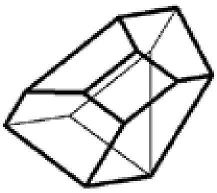
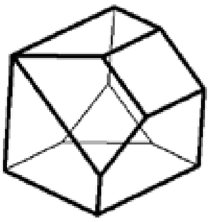
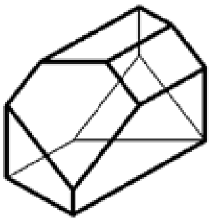
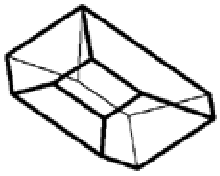
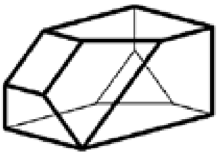
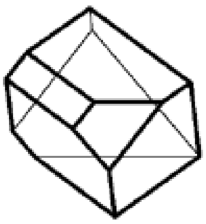
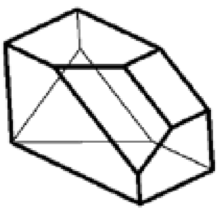
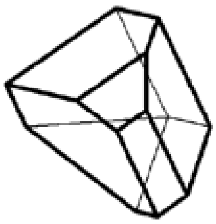
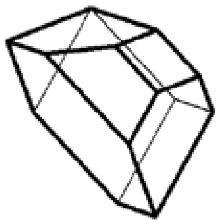
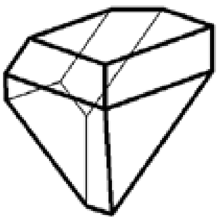
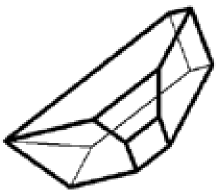
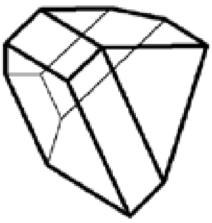
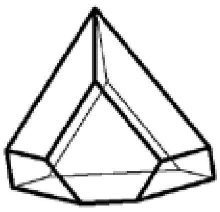
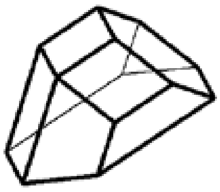
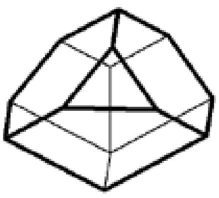
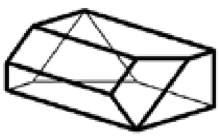
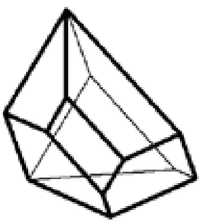
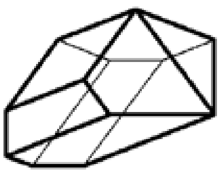
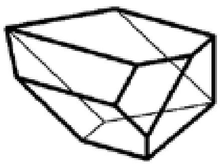

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

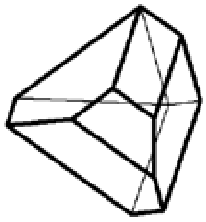
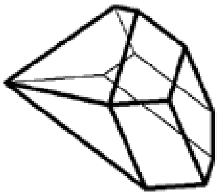
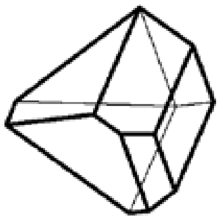
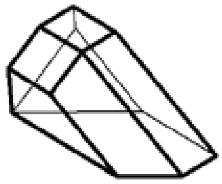
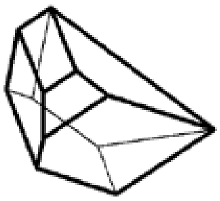
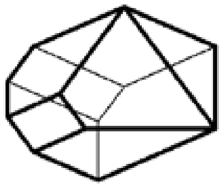
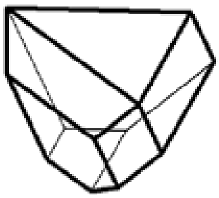
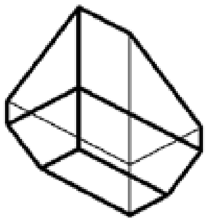
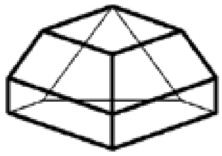
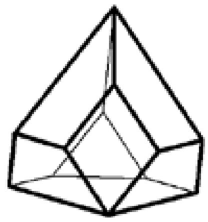
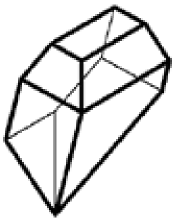
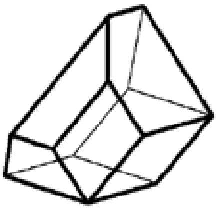
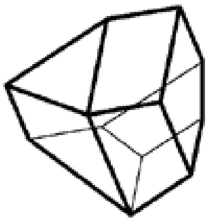
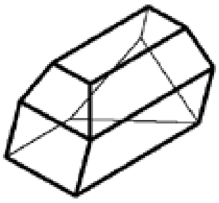
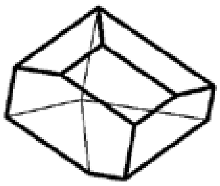
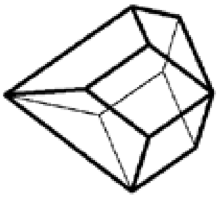
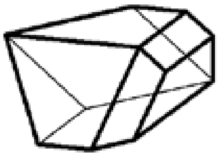
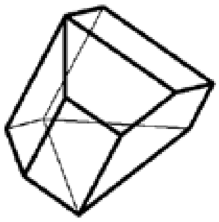
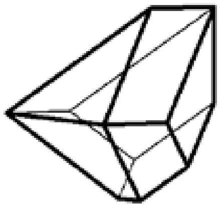
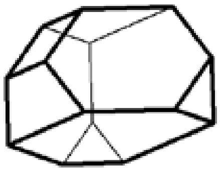
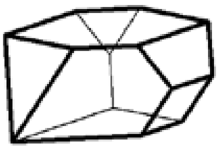
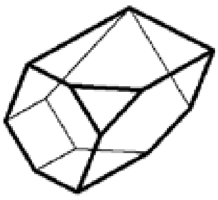
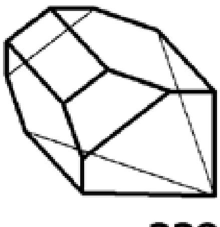
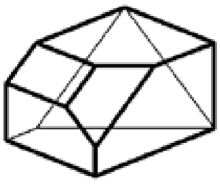
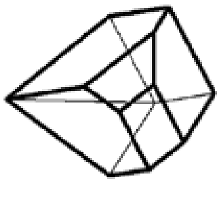
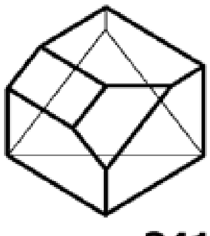
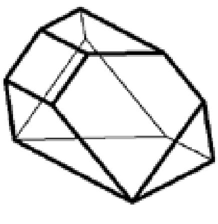
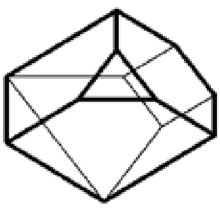
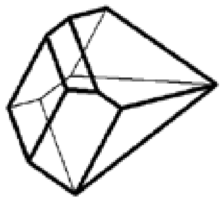
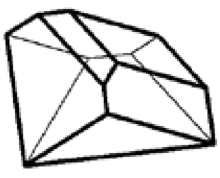
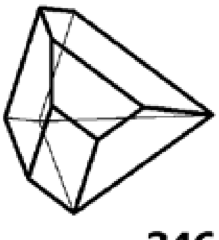
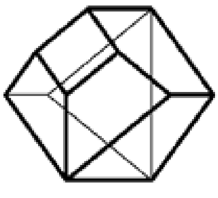
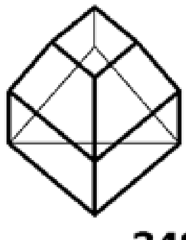
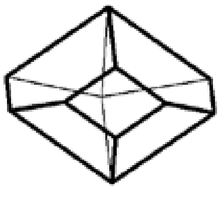
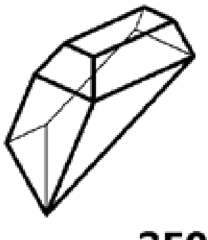

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

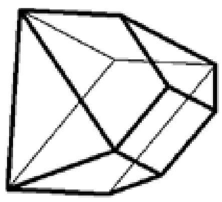
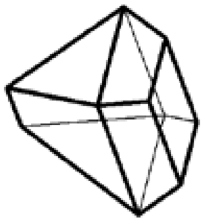
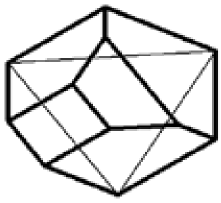
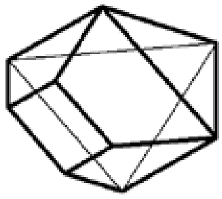
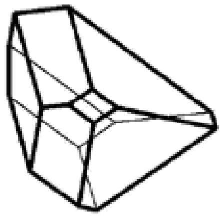
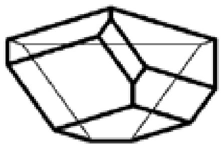
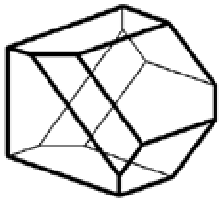
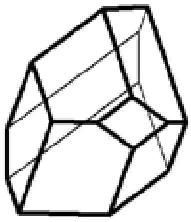
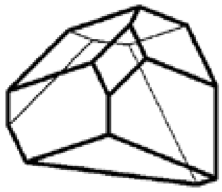
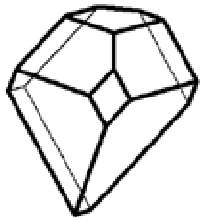
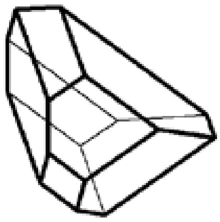
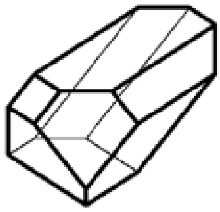
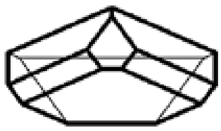
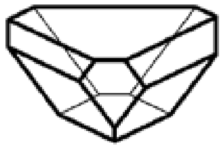
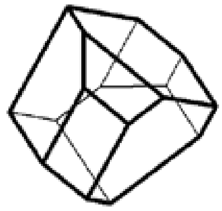
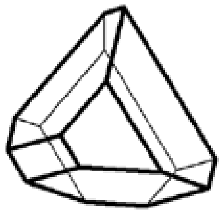
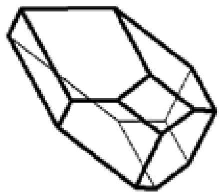
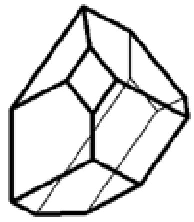
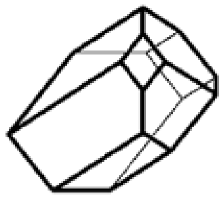
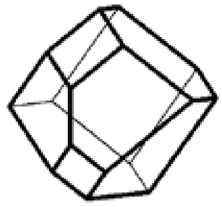
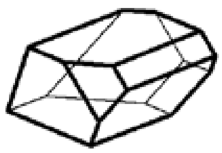
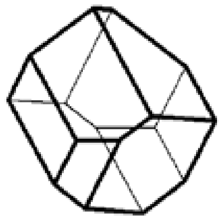
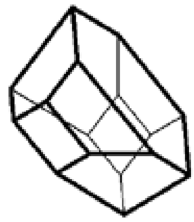
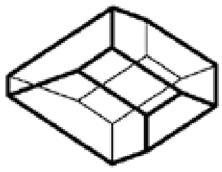
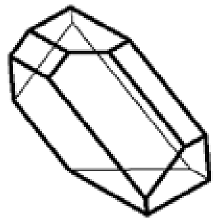
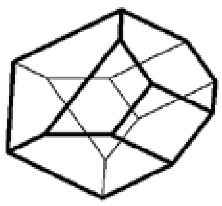
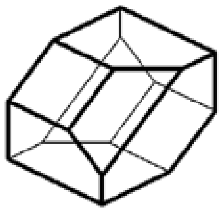
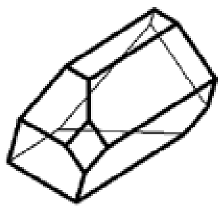
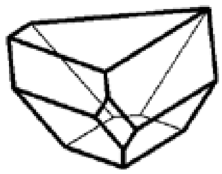
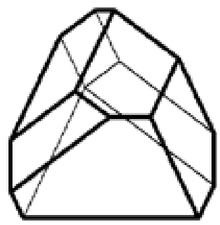
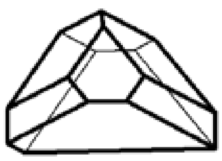
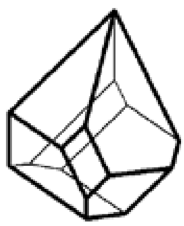
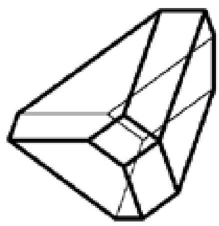
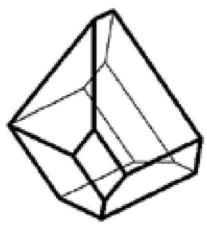
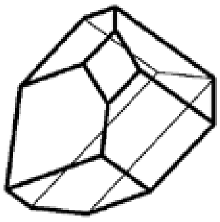

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

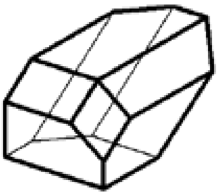
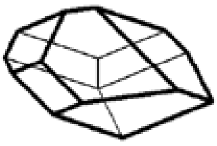
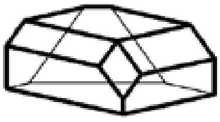
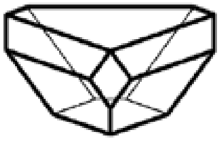
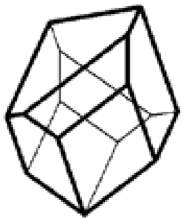
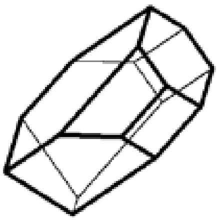
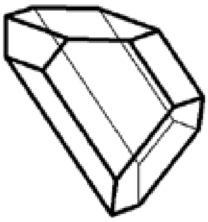
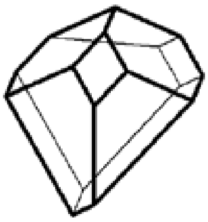
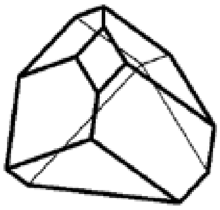
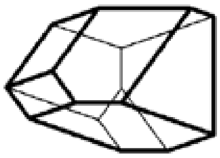
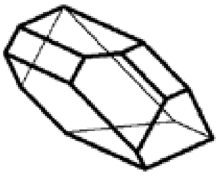
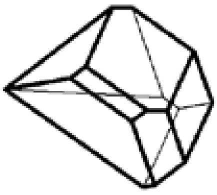
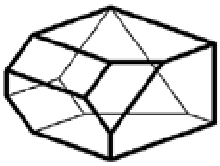
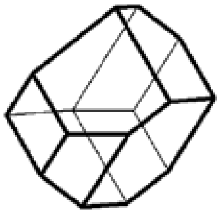
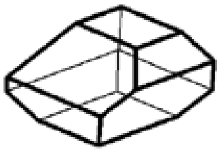
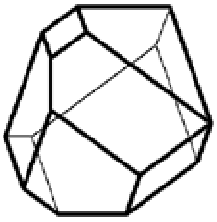
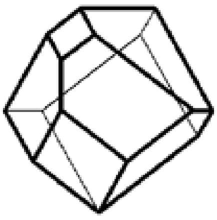
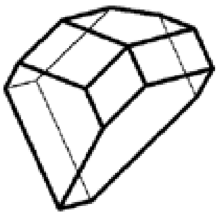
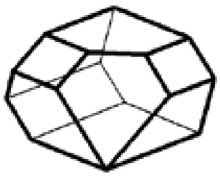
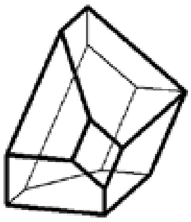
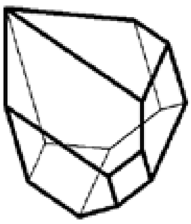
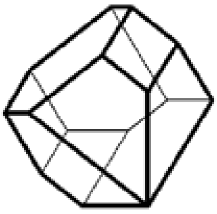
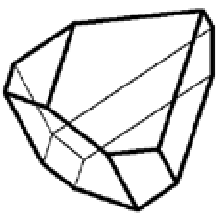
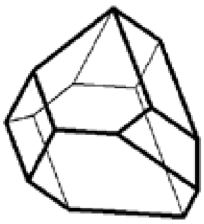
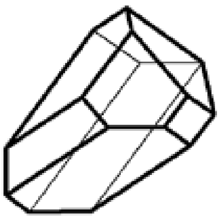
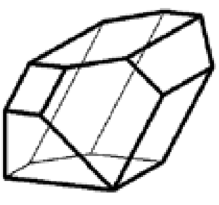
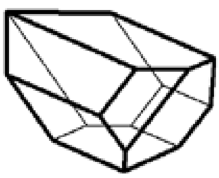
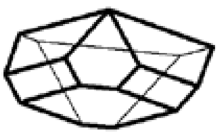
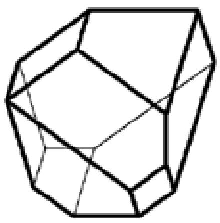
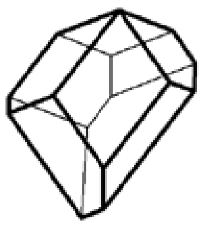
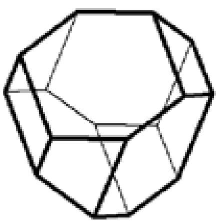
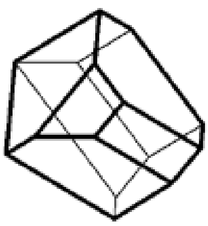
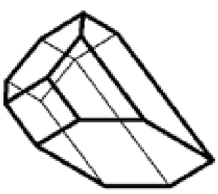
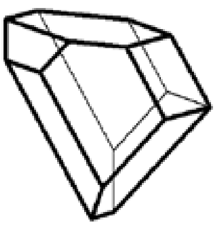
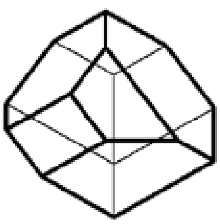

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

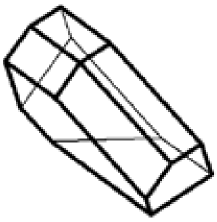

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

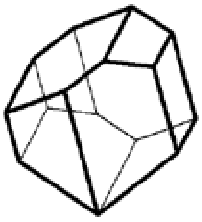

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

294

295

296

297

298

299

300

301

302

303

304

305

306

307

308

309

310

311

312

313

314

315

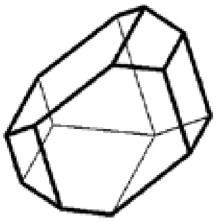

316

317

318

319

320

321

322

323

324

325

326

327

328

329

330

331

332

333

334

335

336

337

338

339

340

341

342

343

344

345

346

347

348

349

350

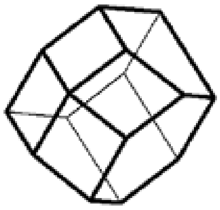

351

352

353

354

355

356

357

358

359

360

361

362

363

364

365

366

367

368

369

370

371

372

373

374

375

376

377

378

379

380

381

382

383

384

385

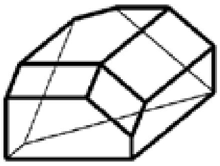

386

387

388

389

390

391

392

393

394

395

396

397

398

399

400

401

402

403

404

405

406

407

408

409

410

411

412

413

414

415

416

417

418

419

420

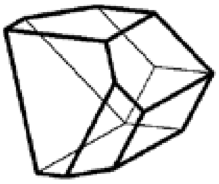

421

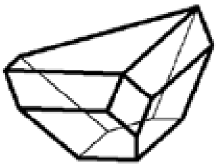

422

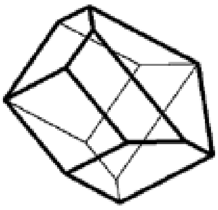

423

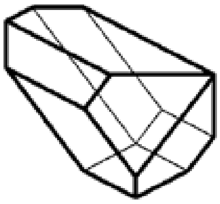

424

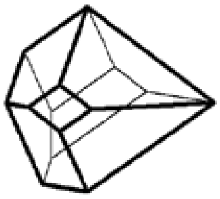

425

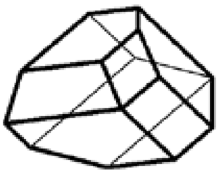

426

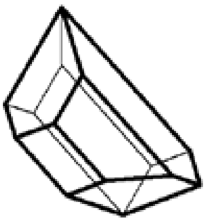

427

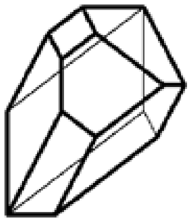

428

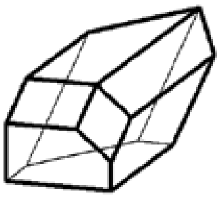

429

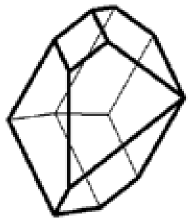

430

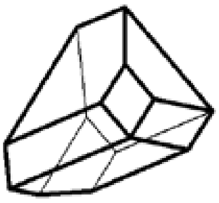

431

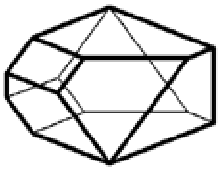

432

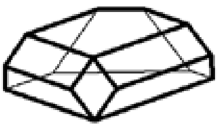

433

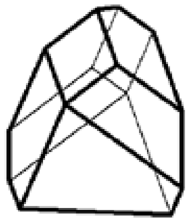

434

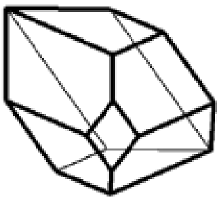

435

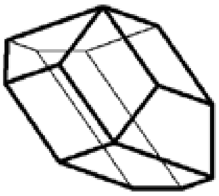

436

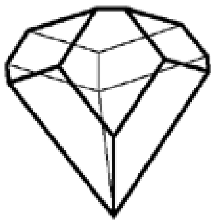

437

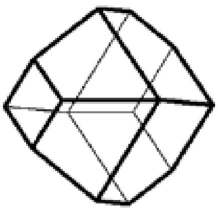

438

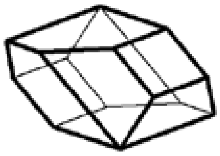

439

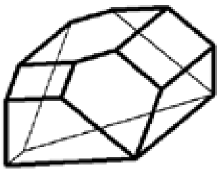

440

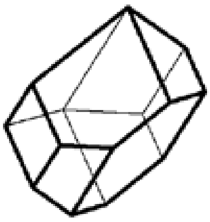

441

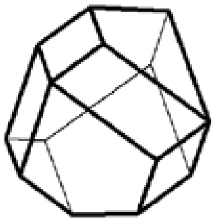

442

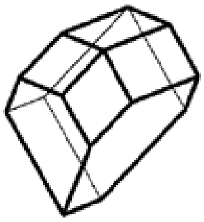

443

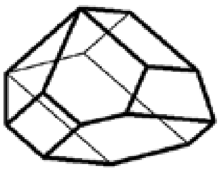

444

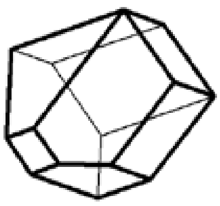

445

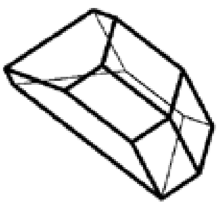

446

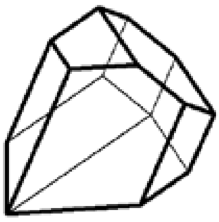

447

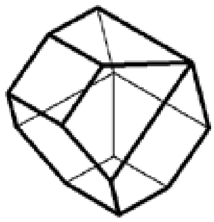

448

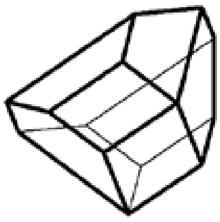

449

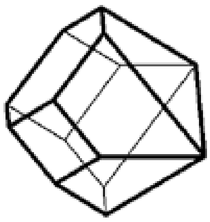

450

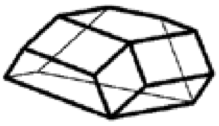
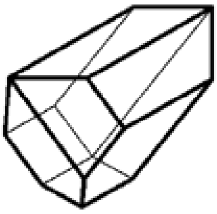
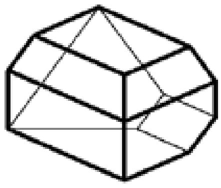
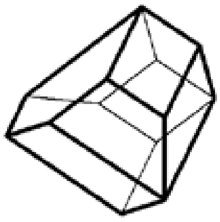
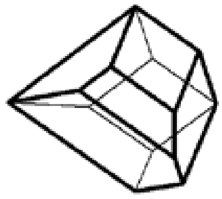
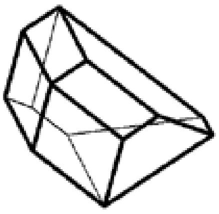
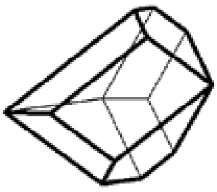
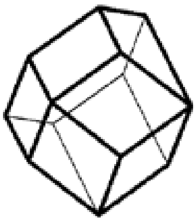
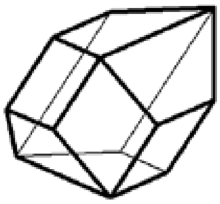
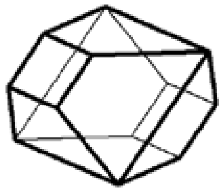
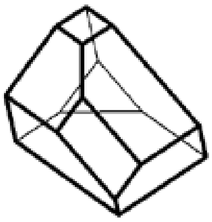
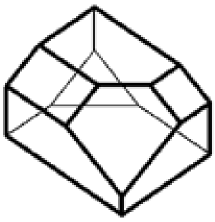
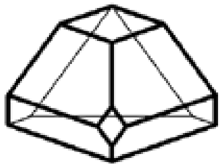
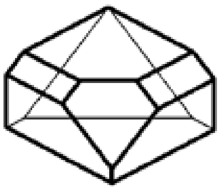
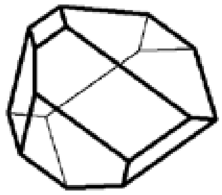
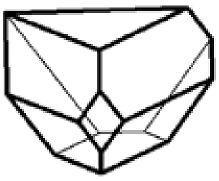
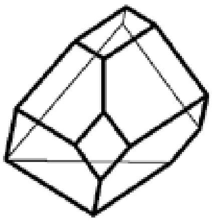
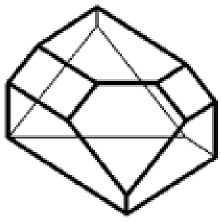
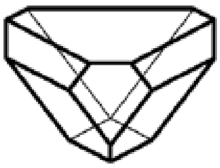
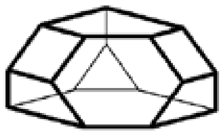
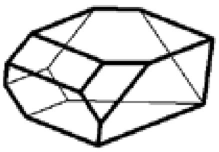
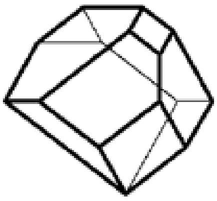
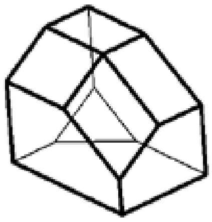
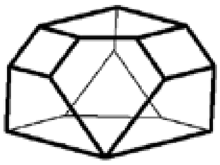
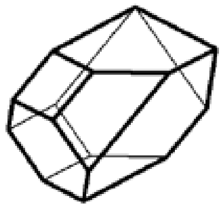
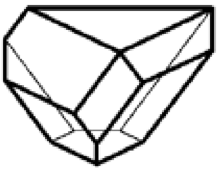
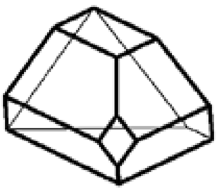
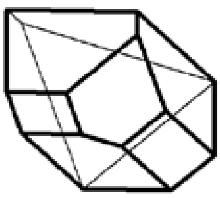
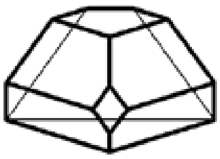
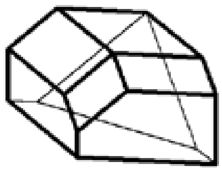
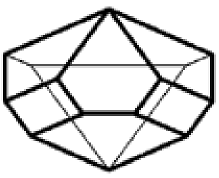
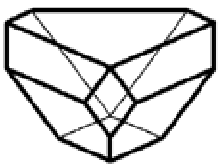
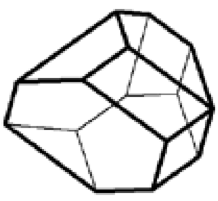
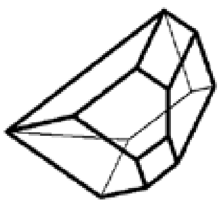
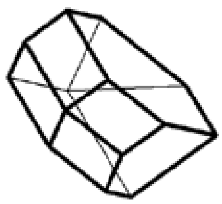

451

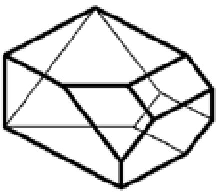
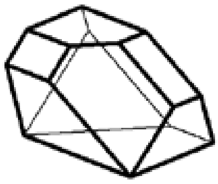
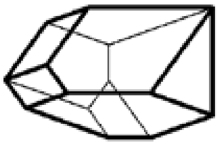
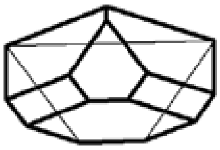
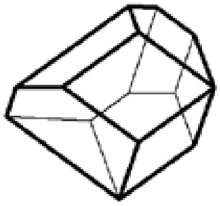
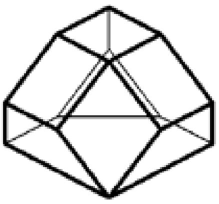
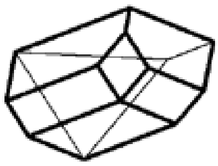
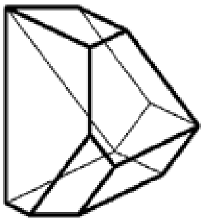
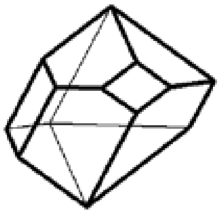
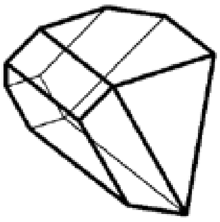
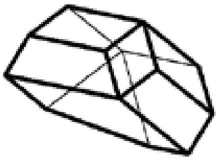
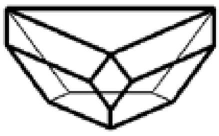
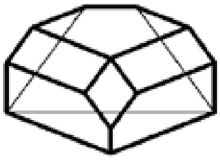
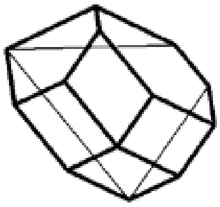
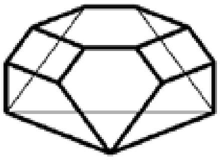
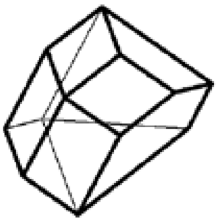
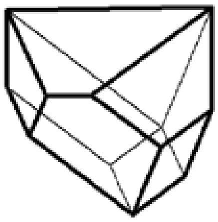
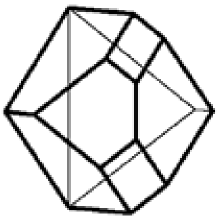
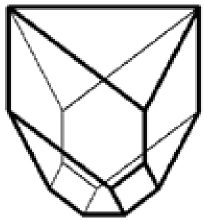
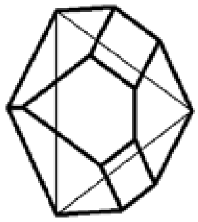
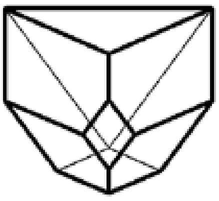
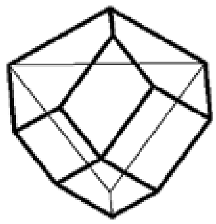
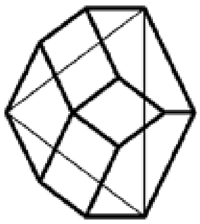
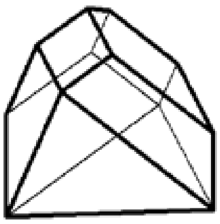
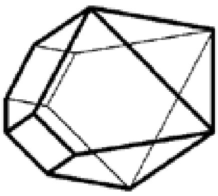
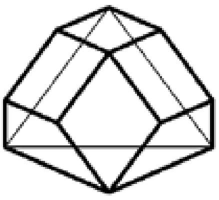
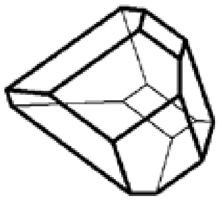
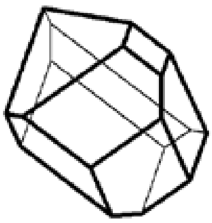
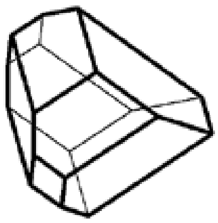
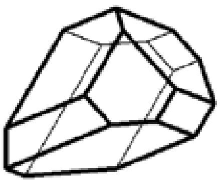
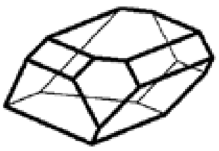
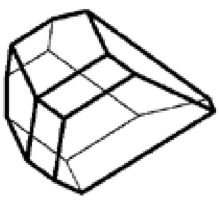
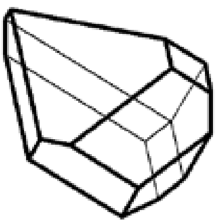
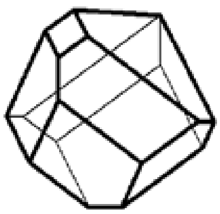
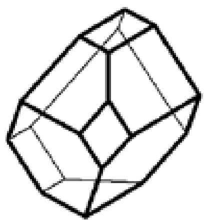

452

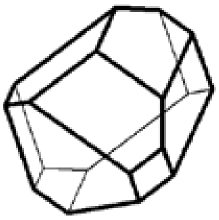
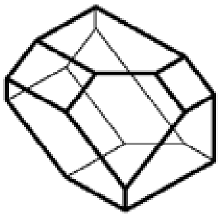
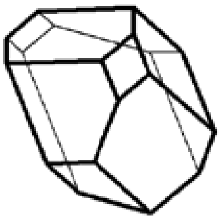
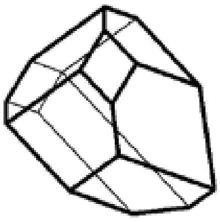
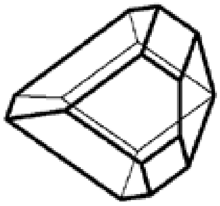
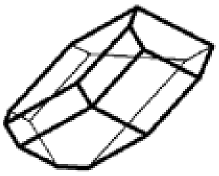
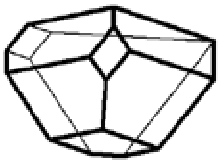
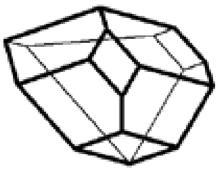
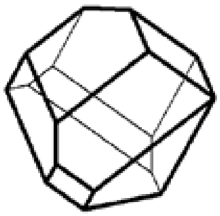
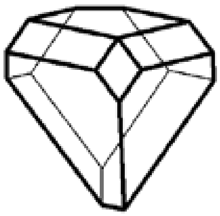
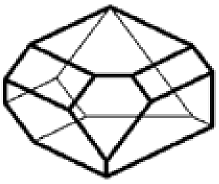
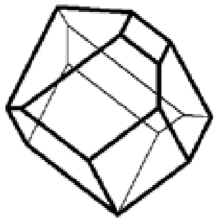
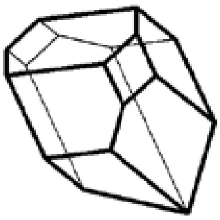
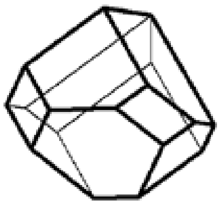
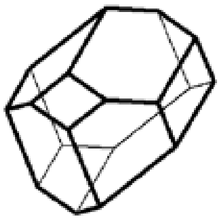
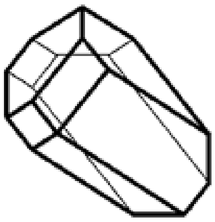
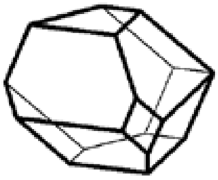
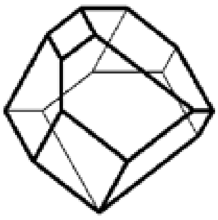
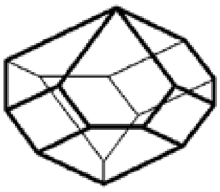
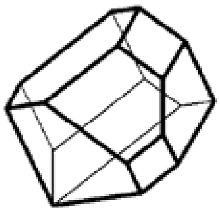
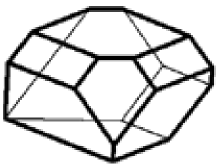
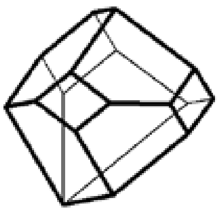
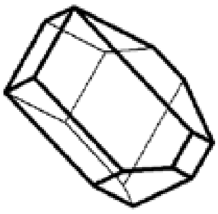
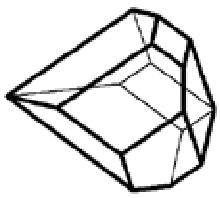
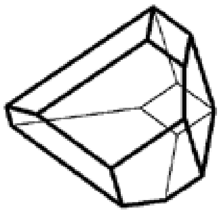
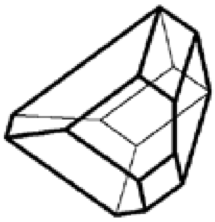
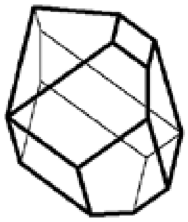
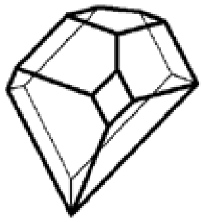
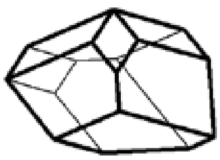
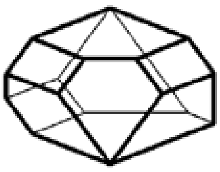
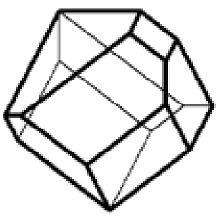
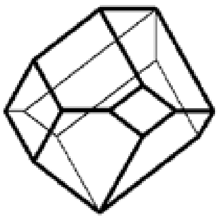
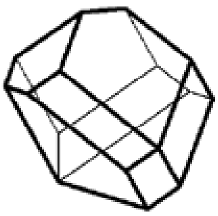
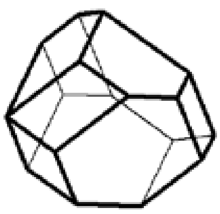
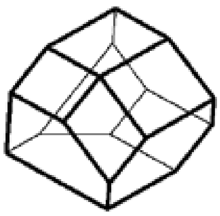

453

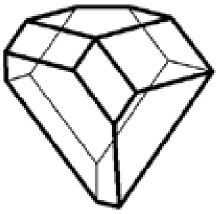
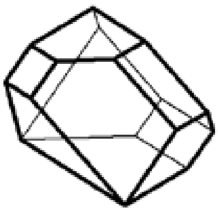
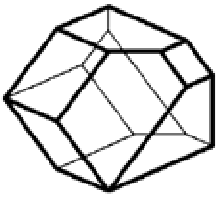
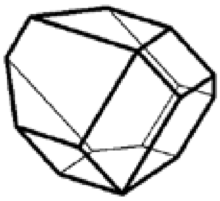
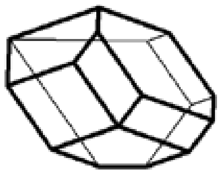
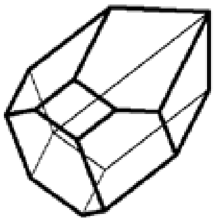
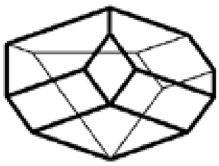
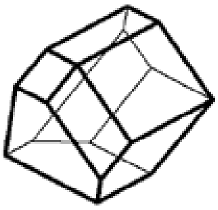
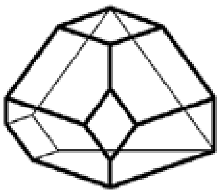
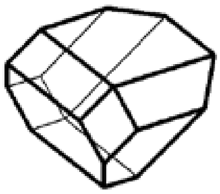
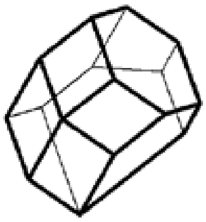
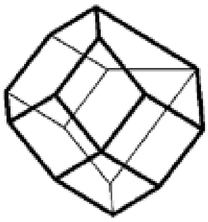
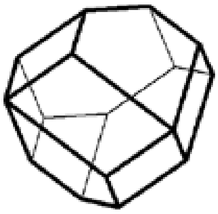
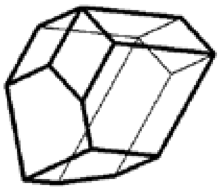
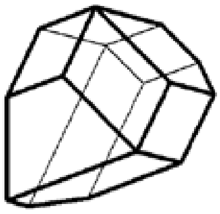
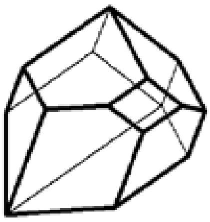
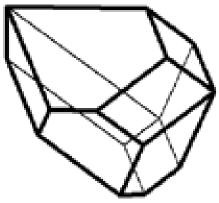
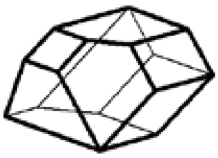
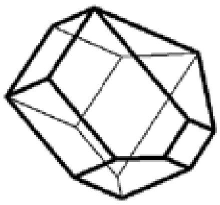
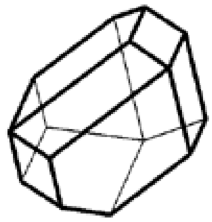
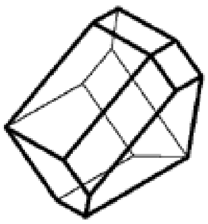
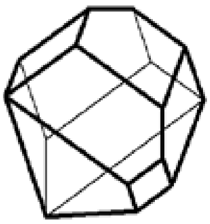
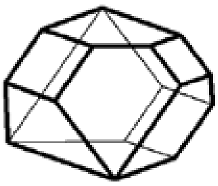
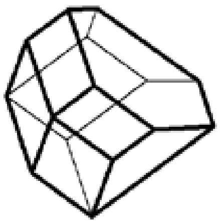
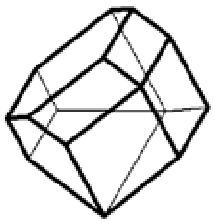
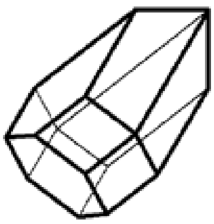
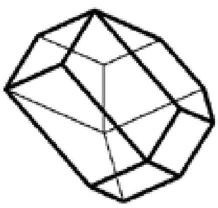
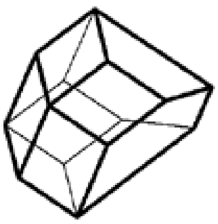
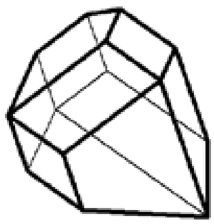
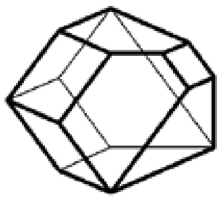
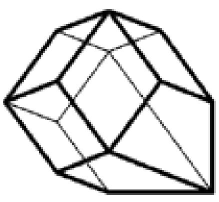
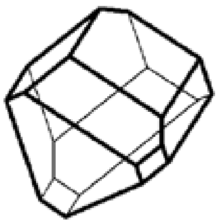
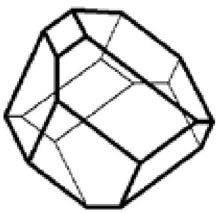
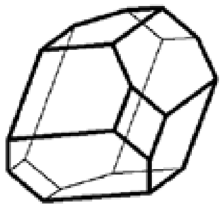
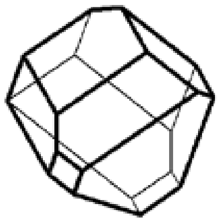

454


455


456

457

458

459

460

461

462

463

464

465

466

467

468

469

470

471

472

473

474

475

476

477

478

479

480

481

482

483

484

485

486

487

488

489

490


491

492

493

494

495

496

497

498

499

500

501

502

503

504

505

506

507

508

509

510

511

512

513

514

515

516

517

518

519

520

521

522

523

524

525


526

527

528

529

530

531

532

533

534

535

536

537

538

539

540

541

542

543

544

545

546

547

548

549

550

551

552

553

554

555

556

557

558

559

560


561

562

563

564

565

566

567

568

569

570

571

572

573

574

575

576

577

578

579

580

581

582

583

584

585

586

587

588

589

590

591

592

593

594

595

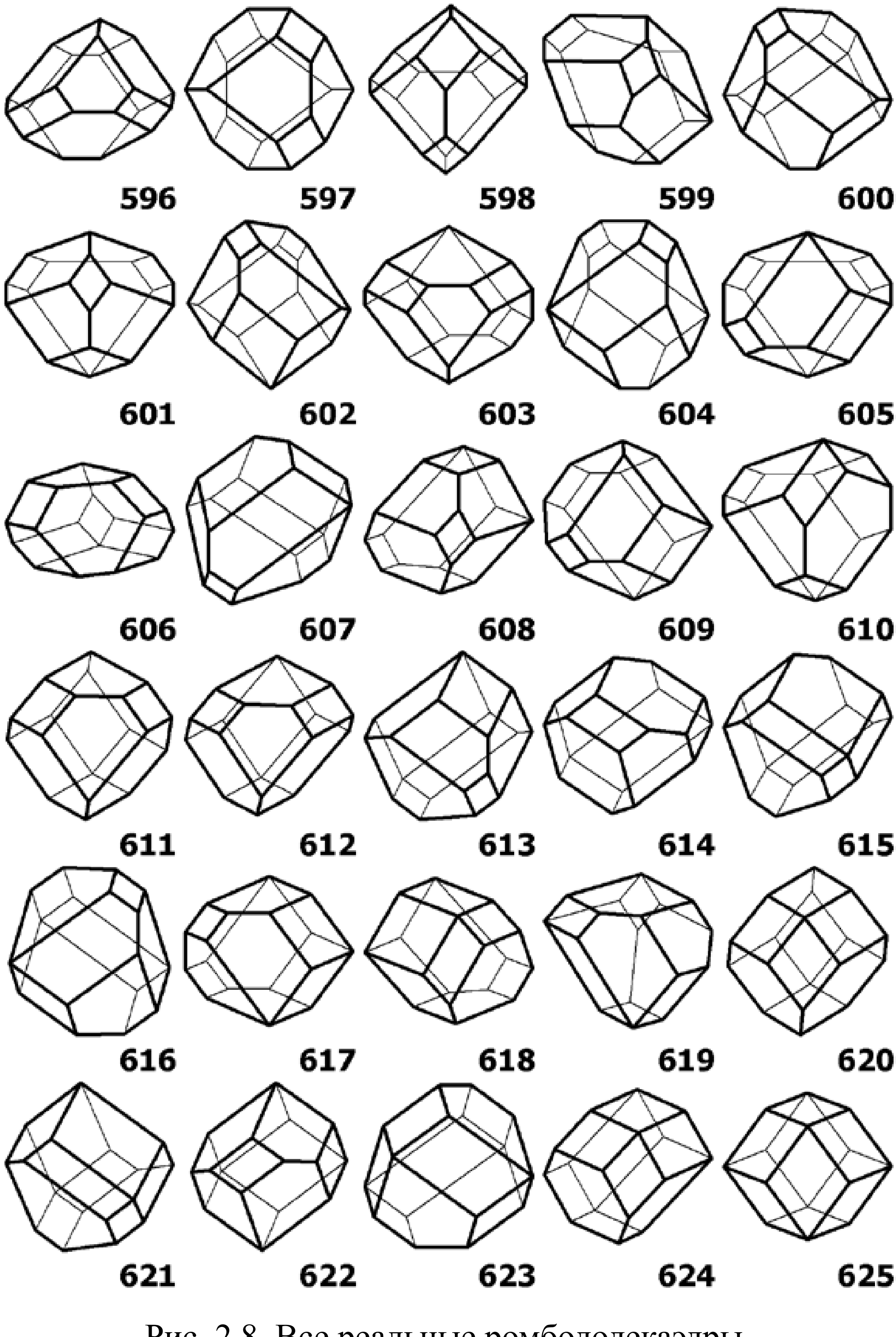


Рис. 2.8. Все реальные ромбододекаэдры.

ЭТЮД 3: ДУАЛЬНЫЕ ПРОСТЫЕ ФОРМЫ И ПОЛНОТА КЛАССОВ, КОМБИНАЦИИ ПРОСТЫХ ФОРМ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Люблю бывать в Минералогическом музее им. акад. А.Е. Ферсмана РАН, медленно переходить от витрины к витрине, подмечать нюансы, пропущенные в прошлый раз. Вот замечательные кристаллы флюорита (рис. 3.1). На некоторых

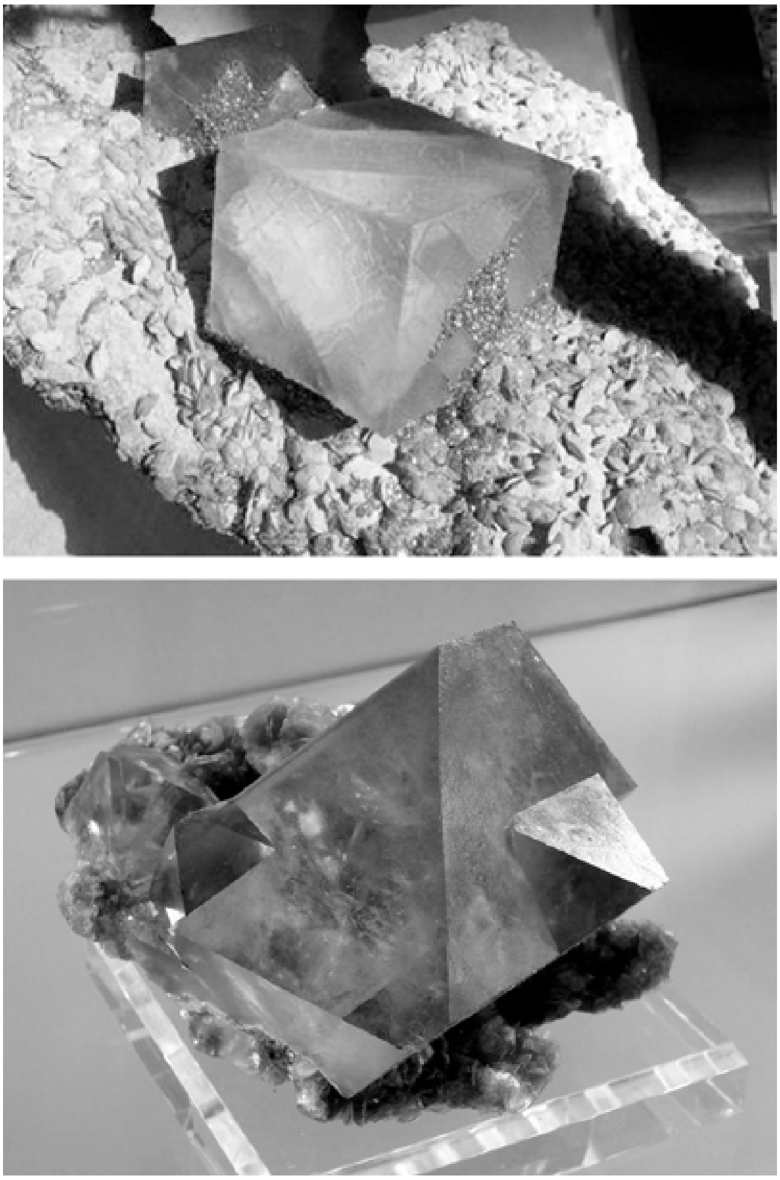


Рис. 3.1. Куб и октаэдр флюорита.
http://geo.web.ru/druza/L-Dalnegor_M.htm,
http://geo.web.ru/druza/m-flu_33-pg138.htm

одна форма просвечивает сквозь другую цветным фантомом, сигнализируя о богатой событиями жизни кристалла в менявшихся условиях. Куб сменялся октаэдром и наоборот, подчёркивая тесное родство этих форм. Напомню, что именно оно было аргументом акад. Е.С. Фёдорова против алгебраической систематики выпуклых полиэдров T.P. Kirkman'a, относившей их к разным классам. Справедливости ради замечу, что последний не был минералогом, ему не могло придти в голову судить о родстве полиэдров по их принадлежности к одному виду симметрии.

Но октаэдр и куб родственны ещё в другом отношении – они дуальны. Поместите в центр каждой грани куба точку, соедините отрезками точки, лежащие на соседних гранях – по-

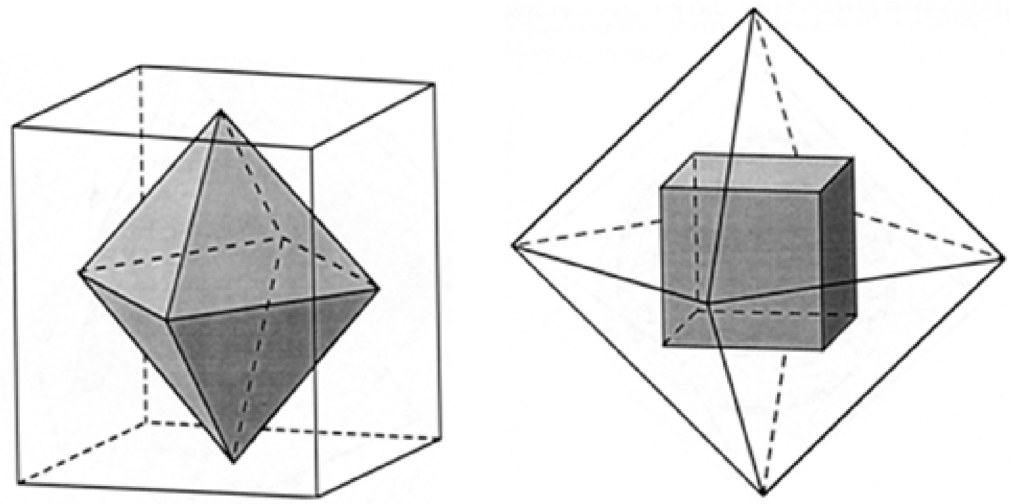


Рис. 3.2. Дуальность куба и октаэдра.

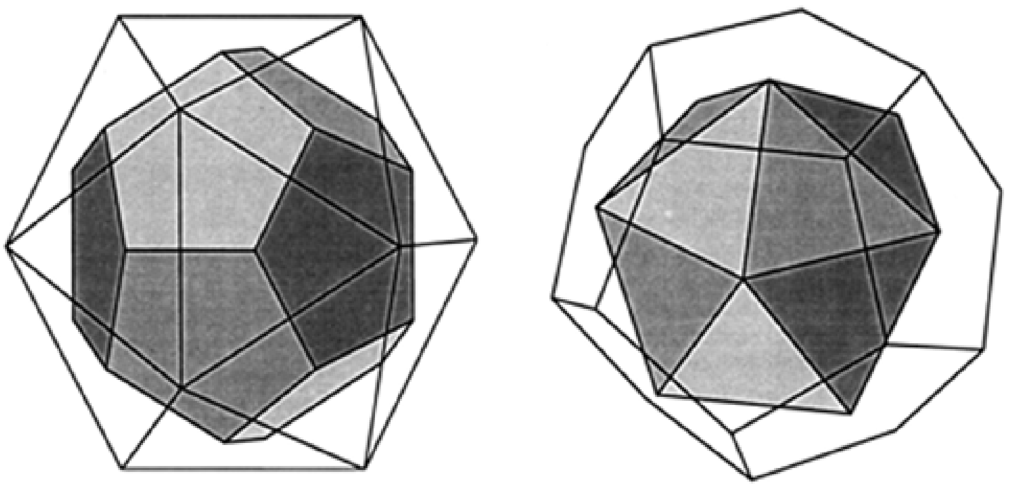


Рис. 3.3. Дуальность икосаэдра и додекаэдра.

лучите октаэдр. Проделайте то же для октаэдра – получите куб (рис. 3.2). Это и называется дуальностью. Так же дуальны икосаэдр и додекаэдр (рис. 3.3). Но, может быть, дуальность подчёркивает не столько сходство, сколько различие? Постройте полиэдр, дуальный тетраэдру. Что получили? Тот же тетраэдр (рис. 3.4)! Таким образом, дуальность всё же подчёркивает сходство, а не различие. Легко понять, что дуальные полиэдры относятся к одной точечной группе симметрии, что важно для дальнейшего рассуждения.

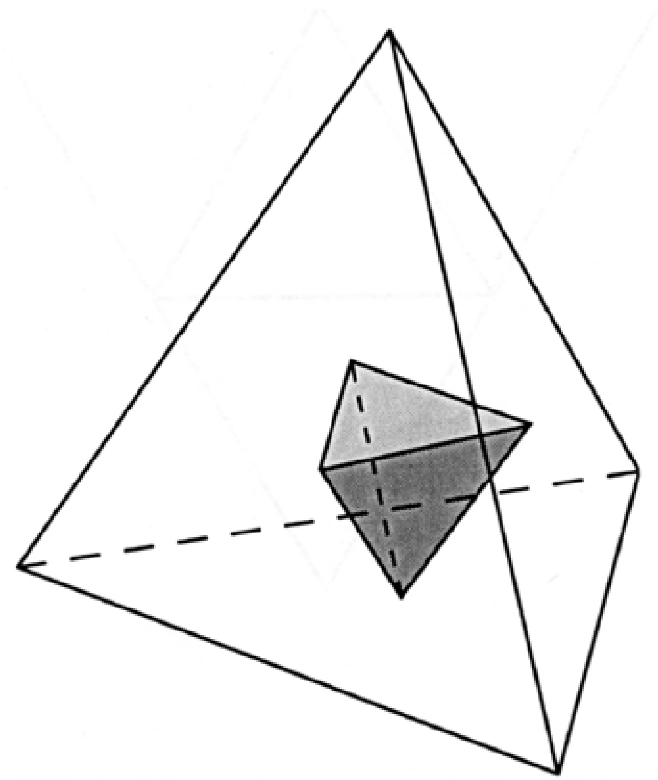


Рис. 3.4. Автодуальность тетраэдра.

Самое время ввести следующие определения. Назовём автодуальным полиэдр, при дуальном преобразовании порождающий себя же, точнее – полиэдр того же комбинаторного типа. Пример – тетраэдр. Назовём автодуальным многообразие полиэдров, переходящее в себя при дуальном преобразовании всех входящих в него полиэдров. Пример – многообразие платоновых тел.

Последний пример наглядно показывает, что дуализм реализуется на парах полиэдров или индивидуальных, особенных, специфических полиэдрах. Но всё же остаются вопросы о разнообразии автодуальных полиэдров и их многообразий, что можно сказать об их общих свойствах: конечно ли их число, конечно ли число входящих в них полиэдров?.. Некоторые ответы лежат на поверхности. Например, полное многообразие выпуклых полиэдров автодуально с очевидностью – ведь всякий полиэдр дуален некоторому другому полиэдру или автодуален. С другой стороны, тетраэдр, определённый как симплекс, т. е. простейший (с минимальными числами граней, вершин и рёбер) в 3D выпуклый полиэдр, является примитивным – состоящим из одного элемента – автодуальным многообразием. Но что происходит в диапазоне между единичным и бесконечным?

Для начала заметим, что всякий автодуальный полиэдр, определённый некоторым естественным образом, есть примитивное многообразие. На эту роль подходит любая n-гранная пирамида (тетраэдр тоже можно рассмотреть как 3-гранную пирамиду). В совокупности они образуют бесконечное автодуальное многообразие. Так как у каждой пирамиды f = v, в табл. 1.1 оно занимает главную диагональ. Классы, содержащие пирамиды, назовём пирамидальными. Все такие классы автодуальны. Содержат ли они другие, кроме пирамид, автодуальные полиэдры?

Первый нетривиальный пример – класс f = v = 6, содержащий два полиэдра (табл. 1.1). Но один из них – 5-гранная пира-

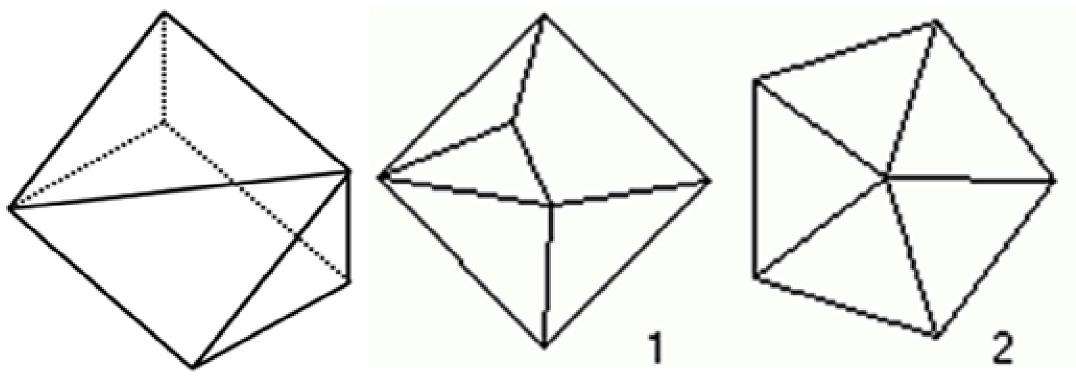


Рис. 3.5. Слева: автодуальный полиэдр f = v = 6, № 1 – он же в проекции Шлегеля на одну из граней, № 2 – 5-гранная пирамида в проекции Шлегеля на основание.

мида. Так как класс в целом автодуален, то и второй полиэдр с необходимостью автодуален (рис. 3.5).

Второй пример – класс f = v = 7, содержащий восемь полиэдров (рис. 3.6). Под № 8 узнаётся 6-гранная пирамида. По уникальной точечной группе симметрии 2 так же легко опознать автодуальный полиэдр № 2. Шесть оставшихся полиэдров распадаются на три пары с точечными группами симметрии 1 (№№ 1, 6), m (№№ 3, 7) и 3m (№№ 4, 5). Являются ли они дуальными парами или среди них есть автодуальные полиэдры? Для исследования этого вопроса определим гранные (г.с.) и вершинные символы (в.с.) полиэдров, т. е. последовательности n-угольных граней и n-валентных вершин. При дуальном переходе гранный символ полиэдра переходит в вершинный символ

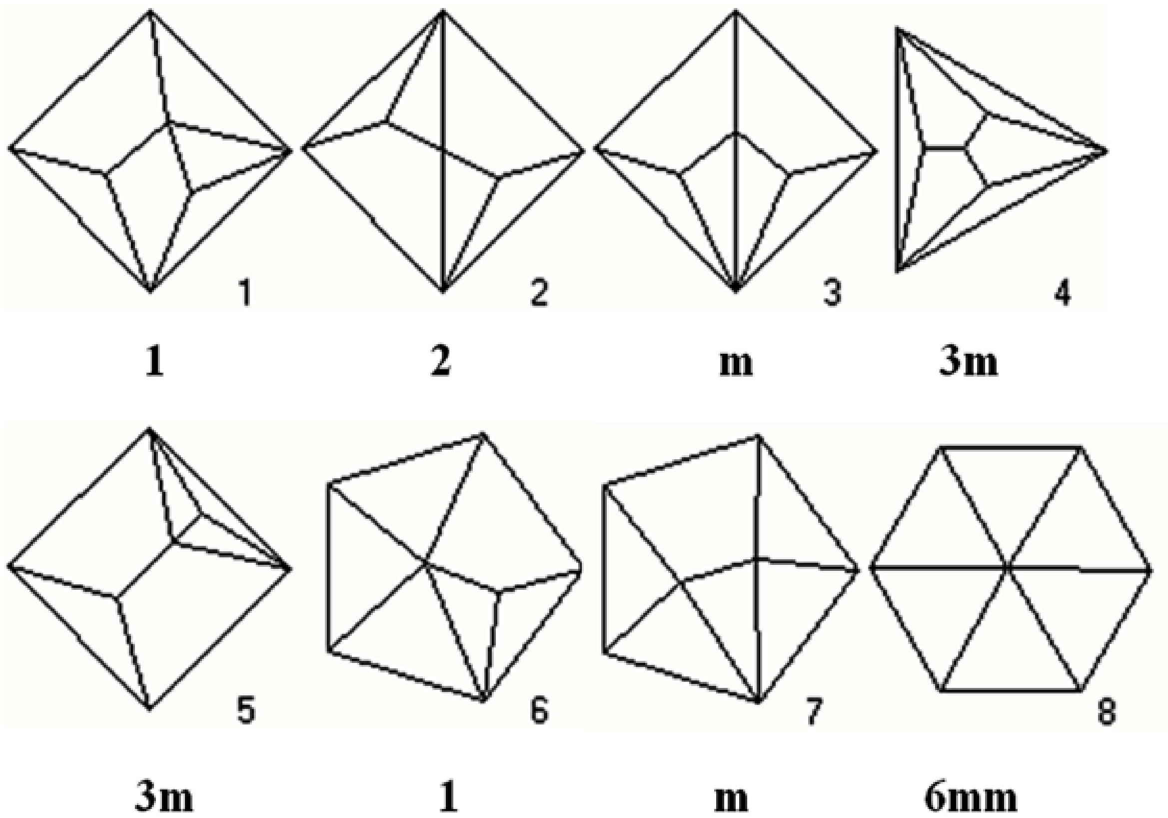


Рис. 3.6. Полиэдры класса f = v = 7 в проекции Шлегеля на одну из граней.

дуального, и наоборот. У автодуального полиэдра оба символа совпадают – необходимое, но недостаточное условие.

Анализ показывает, что в паре с симметрией 1 мы имеем автодуальные полиэдры №№ 1 (г.с. 43, в.с. 43) и 6 (г.с. 511, в.с. 511). В паре с симметрией m имеем дуальные полиэдры №№ 3 (г.с. 43, в.с. 511) и 7 (г.с., 511, в.с. 43). Наиболее интересна пара полиэдров с симметрией 3m: №№ 4 (г.с. 43, в.с. 43) и 5 (г.с. 43, в.с. 43). В вопросе об их дуальности или автодуальности предыдущий подход бессилен. Остаётся расправить в 3D их проекции

Шлегеля, построить для каждого дуальный полиэдр и убедиться, что №№ 4 и 5 автодуальны.

Как следует из приведенных примеров, концепция дуальности и автодуальности полиэдров и их многообразий привлекательна тем, что выражает идею замкнутости – и тем самым целостности, совершенства – многообразия, выражающую собой некоторую закономерность. Примеры автодуальных многообразий бесконечны, состоять они могут из конечного и бесконечного числа элементов, а устроены одинаково – из пар дуальных и отдельных автодуальных полиэдров. Всё сказанное понадобилось нам для того, чтобы вернуться к рассмотрению дуальных (куб и октаэдр) и автодуальных (ромбический, тетрагональный и кубический тетраэдры) простых форм. Есть ли другие дуальные и автодуальные простые формы? Автодуальны ли многообразия закрытых простых форм в 32 кристаллографических классах симметрии? Минералогическая подоплёка этих вопросов состоит в следующем: в каких классах симметрии теоретически возможны кристаллические полиэдры, дуальные закрытым простым формам этого же класса?

Триклинная (классы **1 и -1**) и **моноклинная** (классы **2, m и 2/m**) сингонии не содержат закрытых простых форм, в ромбической сингонии таков класс **mm2**, в тригональной: **3** и **3m**, в тетрагональной: **4** и **4mm**, в гексагональной: **6** и **6mm**.

Ромбическая сингония содержит закрытые простые формы в двух классах – ромбические тетраэдр в **222** и бипирамиду в **mmm**. Тетраэдр автодуален. Бипирамида дуальна комбинации призмы и пинакоида. Итак, первый нетривиальный результат состоит в обнаружении двух типов многообразий закрытых простых форм. Многообразия 1-го типа автодуальны (**222**), 2-го типа – становятся таковыми при их пополнении комбинациями некоторых простых форм того же класса (**mmm**). Пример многообразия 2-го типа, не оставляющий равнодушным ни одного посетителя Минералогического музея им. акад. А.Е. Ферсмана РАН – уральские топазы с хорошо

Рис. 3.7. Комбинации ромбической бипирамиды, ромбической призмы и пинакоида на уральских топазах. http://geo.web.ru/druza/m-topaz-F.htm.

развитыми гранями ромбической бипирамиды, ромбической призмы и пинакоида (рис. 3.7).

В средних сингониях есть ряд классов, вопрос отнесения которых решается просто. Так, в классе **-4** из закрытых простых форм есть лишь тетрагональный тетраэдр, который автодуален – многообразие 1-го типа. В классах **mmm**, **4/m**, **4/mm**, **-6**, **6/m**, **-6m2** и **6/mmm** из закрытых простых форм есть лишь бипирамиды, дуальные комбинациям одноименных призм и пинакоидов – это многообразия 2-го типа. Бипирамиды, сопровождаемые одноименными призмами и пинакоидами, а также тетрагональный тетраэдр встречаются и в других классах. Они, как показано, не мешают автодуальности многообразия. Рассмотрим оставшиеся, не столь очевидные ситуации.

Тригональная сингония. В классах **-3, 32** и **-3m** есть ромбоэдр, дуальный комбинации ромбоэдра (повёрнутого относительно исходного) и пинакоида. Кроме того, в классе **32** тригональный трапецоэдр дуален комбинации повёрнутого трапецоэдра и пинакоида. В классе **-3m** дитригональный скаленоэдр дуален комбинации ромбоэдра и пинакоида. Это – многообразия 2-го типа [67].

Тетрагональная сингония. В классе **422** тетрагональный трапецоэдр дуален комбинации повёрнутого трапецоэдра и пинакоида. В классе **-42m** тетрагональный скаленоэдр дуален комбинации тетрагонального тетраэдра и пинакоида. Это – многообразия 2-го типа.

Гексагональная сингония. В классе **622** гексагональный трапецоэдр дуален комбинации (повёрнутого) гексагонального трапецоэдра и пинакоида – многообразие 2-го типа.

Кубическая сингония. Кубический тетраэдр автодуален (рис. 3.4), куб дуален октаэдру (рис 3.2). Казалось бы, здесь всё просто. Но в классах **23** и **-43m** нет октаэдра! Роль последнего здесь выполняет комбинация двух кубических тетраэдров.

---

[67] В статье Галиулина Р.В. «Теория простых форм кристаллов как правильных систем Делоне в пространствах постоянной кривизны // Кристаллография. 1999. Т. 44. № 5. С. 775-785» дана «Таблица 3. Изогоны, соответствующие 47 типам простых форм кристаллов». Она может помочь читателю при определении дуальных форм. Но Р.В. не ставил целью определить изогон как комбинацию простых форм из того же класса симметрии, что и исходная простая форма. Меня же интересует именно этот вопрос.

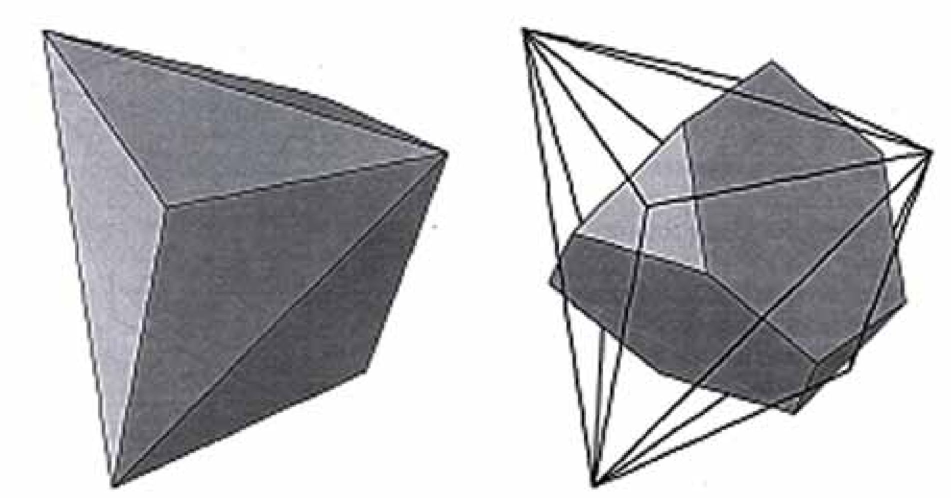


Рис. 3.8. Дуальность тригонтритетраэдра и архимедова усечённого тетраэдра.

Тригонтритетраэдр дуален архимедову усечённому тетраэдру – комбинации двух кубических тетраэдров (рис. 3.8). Тетрагонтритетраэдр дуален комбинации куба и двух кубических тетраэдров. Ромбододекаэдр дуален архимедову кубооктаэдру (рис. 3.9), тригонтриоктаэдр – архимедову усечённому кубу (рис. 3.10), тетрагексаэдр – архимедову усечённому октаэдру (рис. 3.11) – различным комбинациям куба и октаэдра[68]. Тетрагонтриоктаэдр дуален архимедову ромбокубооктаэдру (рис. 3.12), гексоктаэдр – архимедову усечённому кубооктаэдру (рис. 3.13) – различным комбинациям куба, октаэдра и ромбододекаэдра. Пентагонтриоктаэдр дуален архимедову курносому кубу (рис. 3.14) – комбинации пентагонтриоктаэдра (повёрнутого относительно исходного), куба и октаэдра. Пентагондодекаэдр дуален комбинации октаэдра и (повёрнутого) пентагондодекаэдра. Гексатетраэдр дуален комбинации куба и двух тетраэдров. Пентагонтритетраэдр дуален комбинации (повёрнутого) пентагонтритетраэдра и двух тетраэдров. Дидодекаэдр дуален комбинации куба, октаэдра и пентагондо-

[68] О телах Каталани, среди которых 7 из 15 простых форм кубической сингонии, и дуальных им телах Архимеда, представимых в виде комбинаций простых форм кубической сингонии, см. статью Галиулина Р.В. «Идеальные кристаллы в пространствах постоянной кривизны // Кристаллография. 1994. Т. 39. № 4. С. 581-585».

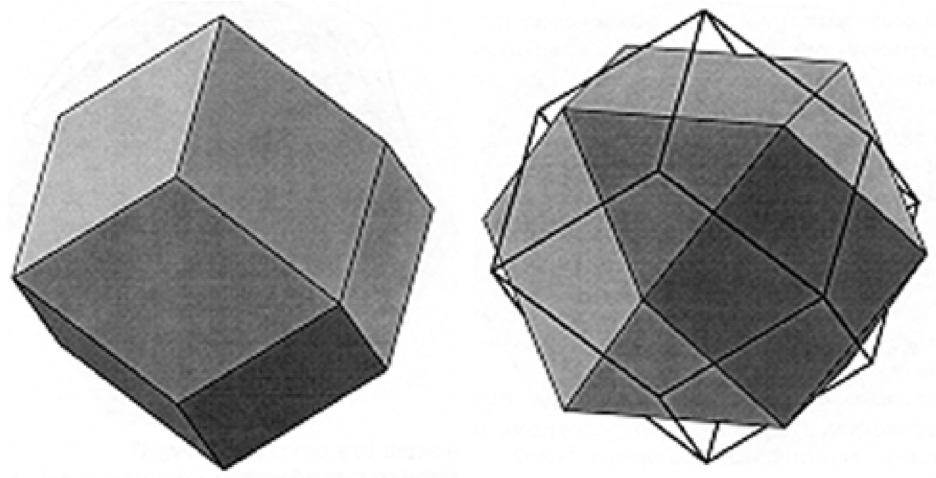


Рис. 3.9. Дуальность ромбододекаэдра
и архимедова кубооктаэдра.

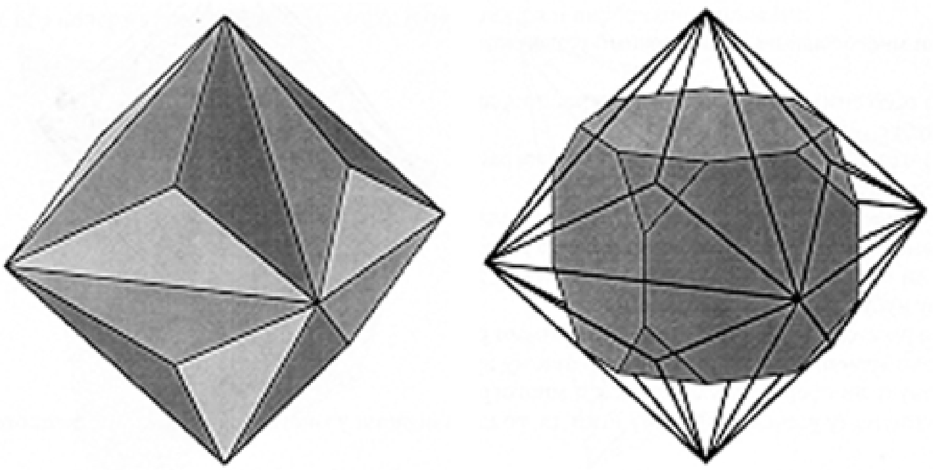


Рис. 3.10. Дуальность тригонтриоктаэдра
и архимедова усечённого куба.

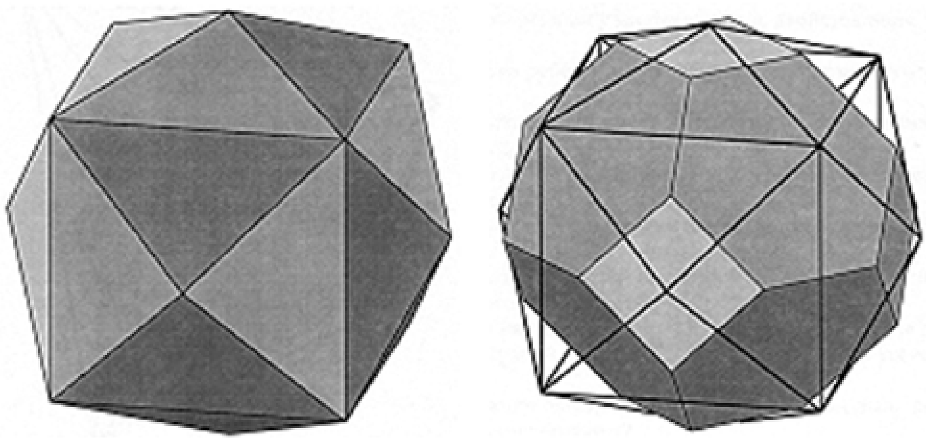


Рис. 3.11. Дуальность тетрагексаэдра
и архимедова усечённого октаэдра.

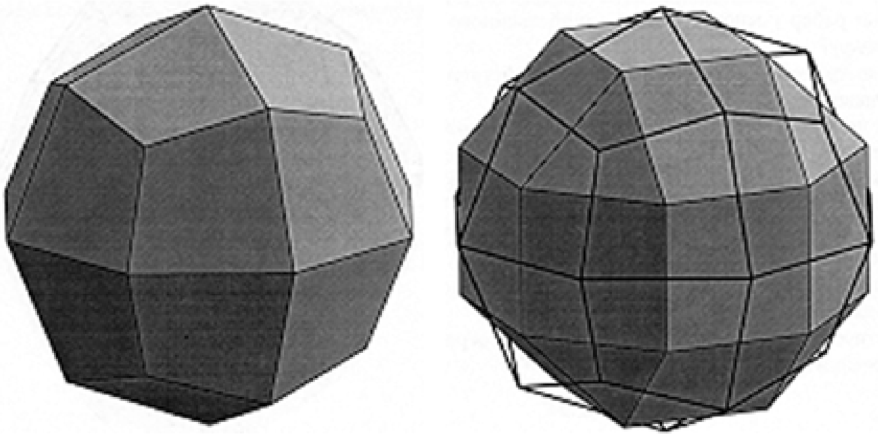


Рис. 3.12. Дуальность тетрагонтриоктаэдра
и архимедова ромбокубооктаэдра.

декаэдра. Легко видеть, что все классы кубической сингонии суть многообразия 2-го типа.

Установленные соответствия позволяют сделать два вывода. Во-первых, все многообразия закрытых простых форм автодуальны и распадаются на два типа. Во-вторых, для замыкания многообразий 2-го типа требуются вполне определённые комбинации простых форм, в каждом классе – свои, тем самым выделенные из разнообразия всех теоретически разрешённых комбинаций. Закономерно возникает новый вопрос: что представляет собой многообразие комбинаций простых форм определённого класса с алгебраической точки зрения?

Этот аспект теоретической кристалломорфологии до сих пор оставался без обсуждения. В данном классе симметрии простые формы связаны пассивно, то есть могут сочетаться на кристаллическом полиэдре в виде комбинации. Иначе говоря, они связаны парагенетически, то есть получены размножением плоскостей (частного и общего положения) элементами общей точечной группы симметрии. Но, как показано ниже, через наглядную идею комбинации простые формы могут быть связаны в нетривиальную алгебраическую систему.

Пусть A_i , A_j , A_k … – простые формы одного класса симметрии; i, j, k … = 1, …, n; где n – число простых форм в классе. Обозначим их комбинацию $A_i * A_j * A_k *$… Операцию * будем по традиции называть умножением. Так как теоретически разрешены любые комбинации простых форм в классе, определим их

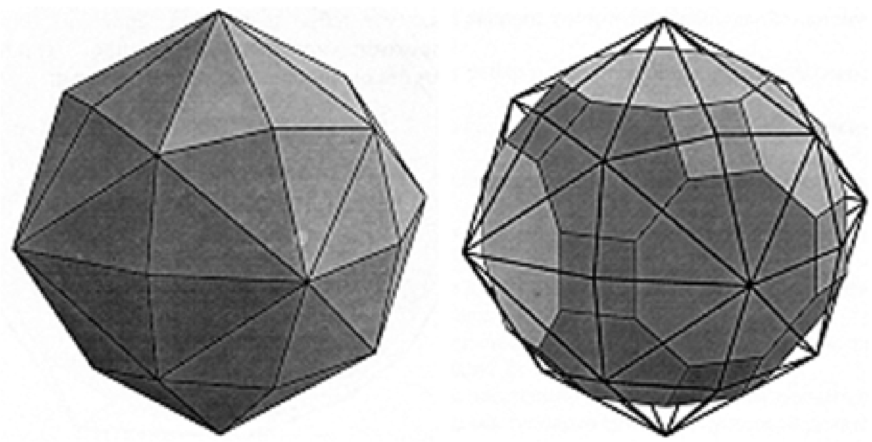


Рис. 3.13. Дуальность гексоктаэдра
и архимедова усечённого кубооктаэдра.

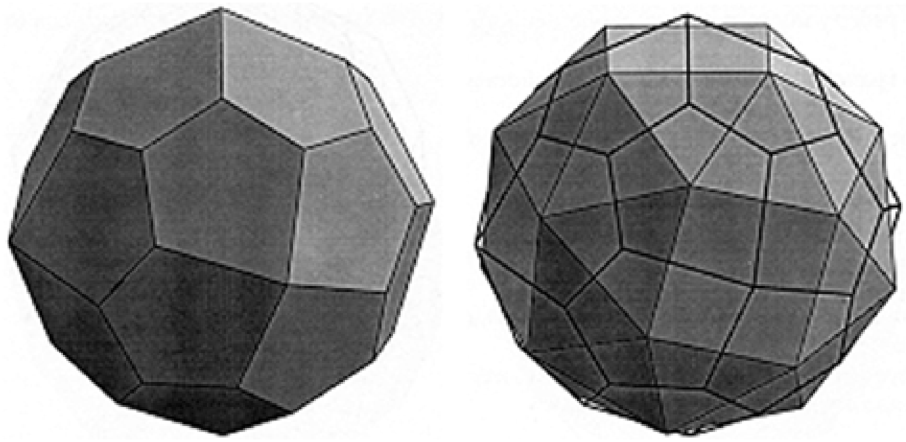


Рис. 3.14. Дуальность пентагонтриоктаэда
и архимедова курносого куба.

полную совокупность: $\Sigma = \{A_i * A_j * A_k * \ldots : \forall\, i, j, k \ldots = 1, \ldots, n\}$. Каковы свойства Σ?

Будем считать комбинацию $A_i * A_j * A_k * \ldots$ однозначно определённой набором входящих в неё простых форм без дополнительных морфологических или генетических смыслов: относительных площадей граней различных простых форм, последовательности образования различных простых форм на кристалле и т. д. Тем самым определено, что Σ – группоид (мультипликативное множество).

При этом имеет место ассоциативность мультипликативной операции: $(A_i * A_j) * A_k = A_i * (A_j * A_k)$, т. е. Σ – полугруппа.

Очевидно, что $A_i * A_j = A_j * A_i$ для любых i, j, т. е. Σ – коммутативная полугруппа.

Из $A_i * A_j = A_i * A_k$ следует $A_j = A_k$. Аналогично, из $A_i * A_k = A_j * A_k$ следует $A_i = A_j$ – имеют место левое и правое сокращения, т. е. Σ – полугруппа с двусторонним сокращением.

Для любой простой формы выполнено: $A_i * A_i = A_i$ – такие элементы в алгебраических системах называются идемпотентами [69]. Т. е. каждый элемент нашей полугруппы идемпотентен. По сути это означает, что каждая простая форма может присутствовать на кристалле в одном экземпляре.

Особую роль в Σ играет полная комбинация простых форм данного класса $П = A_1 * A_2 * \ldots * A_n$. Для любой простой формы A_k выполнено: $A_k * П = П * A_k = П$, т. е. П – двусторонний нуль полугруппы Σ, а каждый элемент из Σ является двусторонней единицей для П.

Легко видеть, что любое подмножество простых форм из полной совокупности $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ порождает полугруппу Σ°, являющуюся подполугруппой для Σ. В полугруппе Σ° есть свой двусторонний нуль П° – полная комбинация образующих её простых форм. Каждый элемент из Σ° является двусторонней единицей для П°. Между тем, в полугруппе Σ нет единицы (т. е. «пустой» простой формы, комбинация которой с любой другой ничего к последней не добавляет), которую, впрочем, можно доопределить внешним образом. (Так часто поступают для упрощения формулировок и рассуждений).

Итак, полная совокупность комбинаций простых форм данного класса симметрии образует коммутативную полугруппу, каждый элемент которой идемпотентен, с двусторонним сокращением и нулём (а также внешне присоединённой единицей). Эти свойства лежат на поверхности, но приводят к содержательному результату ввиду следующей теоремы: *всякая коммутативная полугруппа идемпотентов изоморфна некоторой полугруппе, элементами которой являются подмножества не-*

---

[69] *Idem* (лат.) – то же. *Non bis in idem*! – Не (говори) дважды об одном и том же!

которого множества, а действием – операция пересечения[70]. Искомую полугруппу, изоморфную полугруппе Σ, образуют её подмножества R_X всех элементов, делящихся на X, т. е. всех комбинаций простых форм, содержащих форму X.

В заключение подчеркнём три обстоятельства. Во-первых, полугруппы этого вида играют в алгебре особую роль ввиду их связи с понятием частичной упорядоченности и следующей теоремы: *для каждой коммутативной полугруппы идемпотентов существует единственная сопряжённая с ней полуструктура*. Нужен более глубокий анализ выявленной фундаментальной полугруппы и сопряжённой полуструктуры применительно к теоретическим объектам кристаллографии.

Во-вторых, выявленная коммутативная полугруппа идемпотентов дана нам воочию в виде комбинаций простых форм на природных кристаллах, что говорит о её «естественном» характере. Но пока не ясно, что несут в себе выявленные полугруппы и полуструктуры для описания реальных кристаллов.

В-третьих, выше определена операция перехода от полиэдрической простой формы к дуальной, выражаемой в виде комбинации простых форм того же класса симметрии. Дальнейший вопрос состоит в том, можно ли использовать её для построения ещё более содержательной алгебраической системы, пополнив полугруппу Σ дуальными формами. Как бы то ни было, теоретические вопросы кристалломорфологии не исчерпаны!

---

[70] Ляпин Е.С. Полугруппы. М.: Физматгиз, 1960. 592 с. (с. 83-85).

Моему глубокоуважаемому учителю
профессору Ленинградского горного института
Дмитрию Павловичу Григорьеву

Профессор Д.П. Григорьев
1909-2003

СИСТЕМА МИНЕРАЛОГИИ: УТРАТА ОПРЕДЕЛЁННОСТИ?

ЭТЮД 4: КЛАССИФИКАЦИИ, ПРОСТРАНСТВА ТОЛЕРАНТНОСТИ, СТРУКТУРЫ

Р. Декарт[71] провозгласил анализ и синтез равноправными процедурами мышления. Дополнительные – да. Равноправные – нет. История естественных наук показывает, что расчленение, дробление, выделение элементов осуществляются легче. Лишь в зрелом состоянии каждая из них наилучшим образом, по результатам естественного отбора логических конструкций, осознаёт себя системой с внятно определёнными внутренними и внешними отношениями. Собственно, это и знаменует зрелость научной дисциплины. Минералогия – не исключение…

В рассуждении о системе минералогии мы восходим от минерального индивида к минеральному виду и далее к системе минеральных видов, которая и является системой минералогии. Бытующее определение минерального вида[72] представляется неудовлетворительным. Но эта проблема здесь не обсуждается. Ясно, что категория минерального вида минералогии нужна как фундаментальное основание для классификации индивидов, эквивалентных по главным (диагностическим, определяющим, конституционным) свойствам – кристаллической структуре и химическому составу.

Какой должна быть система минералогии? Как логический конструкт она должна быть непротиворечивой, но не как таковая (в поле науки любая логическая система должна быть непротиворечивой), а как отражение природных процессов, реализуемых по непротиворечивым физическим законам. Других формальных ограничений на характер системы минералогии

---

[71] Декарт Р. Рассуждение о методе. М.: Директ-Медиа, 2002. 96 с.

[72] Никель Е.Х. Твёрдые растворы в номенклатуре минералов // Зап. ВМО. 1992. № 4. С. 89-92; Никель Е.Х. Содержание понятия минерал // Зап. ВМО. 1995. № 4. С. 98-100.

не известно и, скорее всего, быть не может. Тип системы естественным образом следует логическим типам системообразующих элементов и отношений. Для дальнейшего рассуждения нам понадобится минимальный список таковых.

Отношение ♣ называется: рефлексивным, если $\forall$ (для любого) x: x ♣ x; симметричным, если $\forall$ x, y: x ♣ $y \Rightarrow$ (следует) y ♣ x; транзитивным, если $\forall$ x, y, z: x ♣ y, y ♣ $z \Rightarrow x$ ♣ z; антирефлексивным, если $\forall$ x, y: x ♣ $y \Rightarrow x \neq y$; антисимметричным, если $\forall$ x, y: x ♣ y , y ♣ $x \Rightarrow x = y$. Сочетаясь, эти элементарные отношения порождают отношения сложные: транзитивность + рефлексивность + симметричность = эквивалентность; транзитивность + антирефлексивность = строгий порядок; транзитивность + рефлексивность + антисимметричность = нестрогий порядок; транзитивность + рефлексивность = квазипорядок; рефлексивность + симметричность = толерантность [73].

Классификации. Уже на эмпирической стадии естественные науки систематизируют свои объекты. Определяя, мы отождествляем или различаем их, автоматически попадая в логическую ловушку классификаций – систем с рефлексивными, симметричными и транзитивными отношениями эквивалентности между элементами. Имеет место и обратное: всякая классификация *de facto* порождает отношение эквивалентности «принадлежать одному классу». Как правило, естественнонаучные классификации далеки от этих формализмов, строятся на «очевидных основаниях», исходя из «здравого смысла». Минералогические – в том числе, базируются на конституционном принципе с акцентом (изначально) на химическом составе или (с открытием фёдоровских групп и рентгеновских методов диагностики) структуре минералов. Длинный ряд авторов следует начать с Я. Берцелиуса (1814-1824), впервые приписавшего минералам химические формулы, и первых изданий «Системы минералогии»

[73] Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. 255 с.

Дж. Дэна и др.[74], продолжив современными (в хронологическом порядке): А.Г. Бетехтин[75], А.С. Поваренных[76], И. Костов[77], H. Strunz[78], А.А. Годовиков[79], Е.И. Семёнов[80], К. Херлблат, К. Клейн[81], Л. Берри и др.[82], G.B. Bokij et al.[83], A.G. Bulakh et al.[84], Г.Б. Бокий[85], R.V. Gaines et al.[86], Г.Б. Бокий[87]; и др.).

Главное достоинство любой классификации – строгое определение понятий, обеспечивающее чёткость, непротиворечивость мышления. Она может служить основанием для

[74] Дэна Дж.Д., Дэна Э.С., Пэлач Ч. и др. Система минералогии. Т. I, п/том 1: элементы, сульфиды, сульфосоли. М.: Изд-во иностр. лит., 1950. 608 с.; Дэна Дж.Д., Дэна Э.С., Пэлач Ч. и др. Система минералогии. Т. II, п/том 1: галоиды, карбонаты, нитраты, йодаты, бораты, сульфаты. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 773 с.

[75] Бетехтин А.Г. Минералогия. М.: Госгеолтехиздат, 1950. 956 с.

[76] Поваренных А.С. Кристаллохимическая классификация минеральных видов. Киев: Наук. думка, 1966. 547 с.

[77] Костов И. Минералогия. М.: Мир, 1971. 584 с.; Костов И. Минералогия. София: Техника, 1993. 743 с.

[78] Strunz H. Mineralogische Tabellen. Leipzig, 1978. 621 s.

[79] Годовиков А.А. Химические основы систематики минералов. М.: Недра, 1979. 300 с.; Годовиков А.А. Минералогия. М.: Недра, 1983. 626 с.

[80] Семёнов Е.И. Минералогические таблицы. М.: Недра, 1981. 399 с.; Семёнов Е.И. Систематика минералов: справочник. М.: Недра, 1991. 334 с.

[81] Херлблат К., Клейн К. Минералогия по системе Дэна. М.: Недра, 1982. 728 с.

[82] Берри Л., Мейсон Б., Дитрих Р. Минералогия. М.: Мир, 1987. 592 с.

[83] Bokij G.B., Lima-de-Faria J., Moore P.B. Systematics of crystal structures and crystalchemistry classification of minerals // Advanced mineralogy. Springer-Verlag, 1994. P 147-169.

[84] Bulakh A.G., Krivovichev V.G., Zolotarev A.A. Classification and formulae of minerals. St.-Petersburg: University Press, 1995. 28 p.

[85] Бокий Г.Б. Итоги науки и техники. Сер. Кристаллохимия. Т. 31. Систематика природных силикатов. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1997. 192 с.

[86] Gaines R.V., Skinner H.C.W., Foord E.E. et al. Dana's new mineralogy. New York: J. Wiley and Sons, 1997. 1819 p.

[87] Бокий Г.Б. Итоги науки и техники. Сер. Кристаллохимия. Т. 32. Систематика природных оксидов. М.: Изд-во ВИНИТИ, 2000. 120 с.

прогнозов (например, различных свойств минералов от их химического состава и структуры) или источником новых фундаментальных проблем (например, о природе «триклинной инверсии» и крайне неравномерного распределения минеральных видов по фёдоровским группам). Отдавая должное виртуозам диагностики структур и химических составов минералов, открывателям новых минеральных видов и создателям их классификаций, всё же заметим, что классификация – простейший способ представления системы. По сути, классификация – скорее деление целого на части, чем создание целого из частей. Границы классификации – непроницаемы. У представителей разных классов – ничего общего. Удержание в сознании минералогической классификации как целостной системы требует более общего логического основания.

Пространства толерантности. Система минералогии представима не только как классификация, но и как пространство толерантности с рефлексивным и симметричным отношением между элементами. От классификации его формально отличает отсутствие транзитивности, т. е. транслируемости бинарного отношения по цепочке сравниваемых элементов. И это приводит к совершенно другому представлению системы. Толерантность часто называют частичным сходством из-за следующего примера. Пусть минералы А и Б сходны в том смысле, что содержат хотя бы один общий (для определённости – структурообразующий) химический элемент, Б и В – тоже. Но А и В могут оказаться не сходными. По этому принципу в виде пространства толерантности можно представить всю систему минералогии Я. Берцелиуса, основанную на химических составах минералов. Этот взгляд на многообразия химических соединений (не только минералов) впервые предложила и отстаивает Н.Л. Смирнова[88]. Если под сходством понимать наличие общего химического элемента и/или принадлежность к одной пространственной группе, то в пространства толерант-

[88] Смирнова Н.Л. О системе минералов. Уровни // Вестник МГУ. Сер. геол. 1979. № 2. С. 59-63.

ности могут быть преобразованы и современные минералогические классификации.

Как и классификации, пространства толерантности требуют строгого определения элементов – иначе невозможно констатировать их сходство или различие. Их принципиальное отличие от классификаций – переходы от одного класса толерантности к другому через общие элементы. Строго говоря, любая классификация – частный случай пространства толерантности, в котором классы не имеют общих элементов. Но если таковые имеются – именно они связывают классы толерантности в систему. Иногда говорят, что при этом «размываются» границы классификации, что мыслить систему, в которой элемент принадлежит сразу многим классам, пересекающимся столь причудливо, что схему не изобразить на листе бумаги – трудно. Но из чего следует, что представление о системе минералогии должно быть простым?

Структуры. Наименее разработано представление о системе минералов как структуре с одним из порождающих отношений между элементами: строгого, нестрогого или квазипорядка. Поясним эти возможности двумя примерами.

В «Системе минералогии» заявлена следующая новация. «Настоящее издание книги явилось по существу совершенно новой работой… Сделаны следующие коренные нововведения: … новый способ рассмотрения минералов, образующих так называемые серии, заключающийся в описании серии как единого вида» (сноска 7, т. I, с. 9). «Минералы, обнаруживающие непрерывное изменение своих свойств с изменением состава, называются серией и описываются здесь таким же образом, как и вид. В таких случаях естественной минералогической единицей является серия, так как то или иное её произвольное разделение не дает точного представления о частях серии. Плагиоклазы и шпинели представляют собой примеры серий» (там же, с. 13). «В настоящей работе введено понимание минералов как фаз, которые изменяют свой состав в тех или иных естественных пределах, образуя серии, и в соответствии с этим изменяют и свои свойства. За естественную единицу при описании принята серия. И хотя такое единообразное рассмотрение отдельных видов, образующих серию, весьма эффективно в случае бинарных систем, однако сложность некоторых многокомпонентных систем заставляет считать целесообразным подразделение обширных серий на частные с обоснованно установленными границами состава и раздельное их описание. Эта трактовка считается особенно желательной, хотя она и не подходит в качестве способа представления, отвечающего требованиям описания для некоторых обычных и важных серий, например таких, как группа кальцита. В то же время отдельные описания сделаны так, чтобы подчеркнуть неразрывную связь между видами, заключёнными в серии … Описательная минералогия в настоящее время перегружена мелкими названиями, а интересы науки, без сомнения, будут лучше удовлетворены при сокращении количества названий и упрощении номенклатуры … Систематизация номенклатуры таким путем есть естественное выражение концепции изменчивости минерального состава, которая вытесняет старое понимание видов как определенных фаз в основном постоянного состава» [там же, т. II, с. 7-8].

Сегодня наука обладает средствами для эффективного описания даже таких «сложных» минеральных серий как группа кальцита. По данным[89], природные твёрдые растворы не ограничены в парах кальцит-родохрозит, родохрозит-сидерит и сидерит-магнезит, что показано на рис. 4.1 (слева) в виде графа. Из сравнения размеров ионов предполагается [сноска 7, т. II] непрерывная смесимость в парах смитсонит-сидерит и смитсонит-магнезит (рис. 4.1 в центре), а по наблюдениям составов природных фаз – также в паре смитсонит-родохрозит (рис. 4.1 справа).

---

[89] Эссен Э.Дж. Карбонатные твёрдые растворы и взаимная растворимость их конечных членов применительно к геологической термобарометрии // Карбонаты. Минералогия и химия. М.: Мир, 1987. С. 105-127.

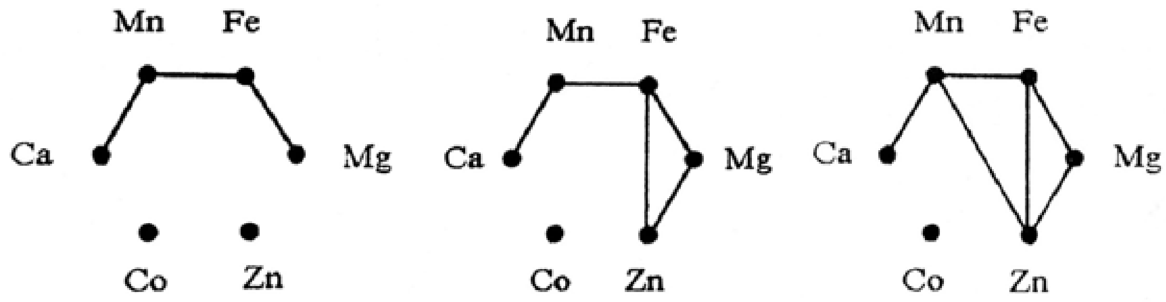


Рис. 4.1. Отношения смесимости в группе кальцита: Ca – кальцит, Mn – родохрозит, Fe – сидерит, Mg – магнезит, Zn – смитсонит, Co – сферокобальтит. Пояснения в тексте.

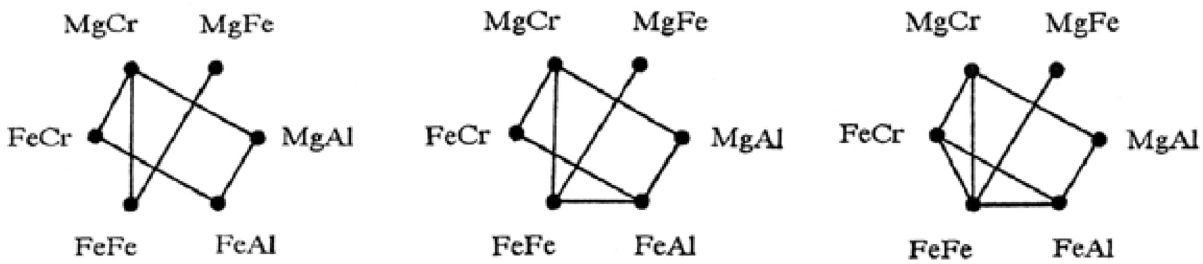


Рис. 4.2. Отношения смесимости в группе шпинели: MgCr – пикрохромит, MgFe – магнезиоферрит, MgAl – шпинель, FeAl – герцинит, FeFe – магнетит, FeCr – хромит. Пояснения в тексте.

Отношения смесимости в группе шпинели по[90] даны на рис. 4.2 (слева). В работе[91] сообщается, что при синтезе выше 860 °С появляется непрерывный твёрдый раствор магнетит-герцинит (рис. 4.2 в центре), а выше 1400 °С – магнетит-хромит (рис. 4.2 справа). Минеральная серия шпинелидов естественно расширяется за счёт ганита $ZnAl_2O_4$. Постепенно накапливаются данные о его твёрдых растворах с хромитом[92,93], шпине-

---

[90] Соколов Г.А. Хромиты Урала, их состав, условия кристаллизации и закономерности распространения // Тр. ИГН АН СССР. Сер. рудн. месторожд. 1948. Вып. 97. 128 с.

[91] Irvine T.N. Chromian spinel as a petrogenetic indicator. Pt 1. Theory // Can. J. Earth Sci. 1965. V 6-7. N 2. P 648-672.

[92] Weiser T. Zink- und Vanadium-fuerende Chromite von Outokumpu, Finland // Neues Jahrb. Miner. Monatsh. 1967. H 7-8. S 234-243.

[93] Осокин А.С. Об акцессорных цинксодержащих хромитах // Новые данные по минералогии медно-никелевых и колчеданных руд Кольского п-ова. Апатиты: Изд-во КФ АН СССР, 1979. С. 89-96.

лью и герцинитом[94]. Сюда же можно включить редкие бруногайерит $GeFe_2O_4$ и купрошпинель $CuFe_2O_4$[95].

Ещё более интересна серия природных гранатов. По данным приведенных выше минералогических справочников и работы[96], отношения смесимости в ней показаны на рис. 4.3.

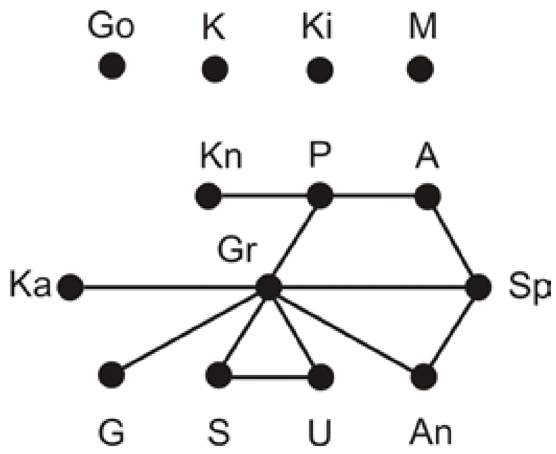


Рис. 4.3. Отношения смесимости в группе гранатов. A – альмандин, An – андрадит, G – гибшит, Go – голдманит, Gr – гроссуляр, K – кальдерит, Ka – катоит, Ki – кимцеит, Kn – кноррингит, M – меджорит, P – пироп, S – шорломит, Sp – спессартин, U – уваровит. Пояснения в тексте.

Как видно, представление минеральных серий в виде графов обеспечивает фиксацию, анализ и сравнение даже самых сложных из известных минеральных серий, причём не только относительно смесимости в парах, но также в триадах и более сложных симплексах. Правила 50, 33.3, 25 %, делящие минеральные серии на куски – минеральные виды, представляются архаичными и отнюдь не безобидными. Они понижают статус минерального вида с фундаментального до операционального. Системы минералогии должны учитывать только естественные границы, автоматически выявляемые минеральными сериями. Представляется, что они и должны считаться минеральными видами. Эволюции минеральных серий в меняющихся физико-химических условиях представимы как разрывы рёбер

94 Spry P.G., Scott S.D. The stability of zincian spinels in sulfide systems and their potential as exploration guides for metamorphosed massive sulfide deposits // Econ. Geol. 1986. V 81. P 1446-1463.

95 Бонштедт-Куплетская Э.М. Новые минералы – члены изоморфных рядов, структурные аналоги известных минералов // Изоморфизм в минералах. М.: Наука. 1975. С. 15.

96 Соболев Н.В. Парагенетические типы гранатов. М.: Наука, 1964. 218 с.

и/или исчезновения вершин графа, а система минералогии – как метаструктура со структурообразующим отношением нестрогого порядка по признаку вложения графов друг в друга. Приставка «мета-» означает то, что структура здесь образована теоретико-графовыми конфигурациями серий без их вещественного наполнения. Понятно, что эволюция конкретной минеральной серии при этом представима как структура без приставки «мета-».

Наконец, недавняя работа[97] даёт нам пример ещё одного представления системы минералогии в качестве структуры, на этот раз – с лексикографическим упорядочением множества ранговых формул химических составов минералов. Последние определены как «последовательности символов химических элементов, расположенных в порядке снижения их атомных содержаний в его (минерала – ЮВ) составе» (с. 5). На первый взгляд – весьма формальное построение. Но заметим, что алфавитом здесь является периодическая система элементов. И это принципиально отличает указанный R-словарь-каталог от минералогического словаря[98], тоже составленного по лексикографическому (орфографическому) принципу, но имеющему совершенно другое назначение. Легко видеть, что R-словарь-каталог представляет собой структуру с образующим отношением лексикографического упорядочения – отношением строгого порядка.

Итак, возможны различные представления о системе минералогии. Означает ли это утрату определённости? Отнюдь нет. Все логические конструкции – классификации, пространства толерантности, структуры… – строятся не иначе как на ранее определённых понятиях минеральных видов и серий. Их вовлечение в систему минералогии предопределено её потребностью к всё более глубокому самопознанию. Следует ли считать

[97] Петров Т.Г., Краснова Н.И. R-словарь-каталог химических составов минералов. СПб.: Наука, 2010. 150 с.

[98] Кривовичев В.Г. Минералогический словарь. СПб.: Изд-во СПб гос. ун-та, 2008. 556 с.

переход от классификаций к пространствам толерантности и структурам всё более содержательным? И нет, и да. Нет – в том смысле, что последующее представление не обязательно охватывает предыдущее. (Например, классификация – частный случай пространства толерантности, так как отношение эквивалентности – частный случай отношения толерантности; она же – разновидность структуры с образующим отношением квазипорядка; частный случай последней – структура с образующим отношением нестрогого порядка; но пространство толерантности и структуры не поглощают друг друга.) Да – в том смысле, что каждое новое представление системы минералогии что-то добавляет в общую картину по логическим свойствам и минералогическим смыслам определяющих межэлементных отношений.

Полагаю, что не может быть самой правильной системы минералогии. Перспектива состоит в согласовании очень разных существующих и будущих представлений по принципу дополнительности. Язык алгебраических представлений сложен, его приложение к природным многообразиям требует усилий. Обилие минералогических классификаций и лишь единичные примеры других представлений отражают именно это обстоятельство. Современная минералогия сделала ставку на глубокое приборное изучение минерального вещества и явно отстаёт в методологическом исследовании своих оснований. Впрочем, за пределами минералогии, в петрографии[99] и общей геологии[100] тоже можно привести лишь по одной работе на эту тему.

---

[99] Миронов Ю.П. Теоретико-множественные модели гранитоидов. М.: Наука, 1975. 228 с.

[100] Усманов Ф.А. Основы математического анализа геологических структур. Ташкент: Изд-во «ФАН», 1977. 206 с.

ЭТЮД 5: ГРАНУЛОМЕТРИЯ – АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Формализация в геологии и других естественных науках нужна там, где поставлена цель строго определить понятия ради построения теории. Есть бесспорные примеры удачной формализации. Один из них – предлагаемое ниже рассуждение выдающегося французского математика Ж. Матерона о гранулометрии – ситовании сыпучих материалов. Эта рутинная технологическая процедура знакома всем минералогам.

Есть еще одна причина, по которой следует обратить внимание на личность Ж. Матерона. Основным достижением учёного обычно считают результат (в случае Ж. Матерона – матероновскую геостатистику), упуская из виду метод, мыслительную процедуру, приведшую к успеху. Усвоить теорию бывает трудно, но метод – почти невозможно. Математик, даже творящий в прикладных науках, редко нисходит до разъяснений. Да и то верно – трудно думать о предмете и одновременно о том, как ты это делаешь… Начнем с определения 7.2.1 в работе[101]: «Пусть $\mathbf{E}$ – некоторое множество и $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{R}(\mathbf{E})$. Гранулометрией на $\mathfrak{I}$ называется всякое однопараметрическое семейство ψ_λ отображений класса $\mathfrak{I}$ в себя (где $\lambda \geq 0$), удовлетворяющее следующим условиям:

α) $\psi_\lambda(\mathbf{A}) \subset A$ для любых $\lambda \geq 0$ и $\mathbf{A} \in \mathfrak{I}$;

β) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{I}, \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Rightarrow \psi_\lambda(\mathbf{A}) \subset \psi_\lambda(\mathbf{B})$ для любых $\lambda \geq 0$;

γ) $\lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \psi_\lambda(\mathbf{A}) \subset \psi_\mu(\mathbf{A})$ для любых $\mathbf{A} \in \mathfrak{I}$;

δ) $\psi_\lambda \times \psi_\mu = \psi_\mu \times \psi_\lambda = \psi_{\sup(\lambda,\mu)}$ для любых $\lambda, \mu \geq 0$.»

Это определение, где $\sup(\lambda,\mu)$ – супремум, точная верхняя грань чисел λ и μ – первое в главе о гранулометриях. Оно простое по сравнению с другими и все же непривычно минералогу. Кто-то даже готов возмутиться – какое вообще отношение оно имеет к гранулометрическому анализу? Давайте рассмотрим определение буквально, то есть буква за буквой.

Пусть даны сыпучий материал $\mathbf{A}$ и сито с размером ячейки λ.

---

[101] Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978. 318 с.

Просеивая **A** через «сито λ», получим на нём остаток ψ_λ(A), который, очевидно, является частью исходного материала: $\psi_\lambda(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}$. (Процедураситования, отображающая исходный материал **A** в его остаток $\psi_\lambda(\mathbf{A})$ на сите λ, здесь и далее обозначена ψ.)

Повторим мысленный эксперимент, взяв исходного материала **B** больше, чтобы $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Просеем его через то же сито λ. Полученный остаток не может быть меньше, чем в первом случае: $\psi_\lambda(\mathbf{A}) \subset \psi_\lambda(\mathbf{B})$.

Возьмём сито с другим размером ячейки μ. Для определённости примем $\mu \leq \lambda$. Понятно, что при любом просеиваемом материале остаток на сите μ не меньше, чем на сите λ: $\psi_\lambda(\mathbf{A}) \subset \psi_\mu(\mathbf{A})$.

Если просеять остаток $\psi_\mu(\mathbf{A})$ через сито с более крупными ячейками λ, то получим остаток $\psi_\lambda(\mathbf{A})$. Просеивание его через сито с более мелкими ячейками μ результат не изменит. Обозначая знаком $\times$ последовательное выполнение ситований, запишем это: $\psi_\lambda \times \psi_\mu = \psi_\mu \times \psi_\lambda = \psi_\lambda$ при $\mu \leq \lambda$.

Добавим к рассуждению последний, немного забавный штрих. Возьмём сито с $\lambda = 0$ – то есть поддон. Результат просеивания материала **A** через него очевиден: $\psi_0(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$.

А теперь отвлечёмся от конкретных, когда-либо виденных сыпучих материалов и сит. В качестве исходного материала возьмём абстрактное множество **E**. Затем построим множество $\mathfrak{R}(\mathbf{E})$ всех его подмножеств. Из него заимствуем достаточное для рассуждения множество $\mathfrak{I}$, а из последнего – множества **A** и **B**, о которых речь шла выше. Вся эта алгебраическая конструкция нужна для обеспечения внутренней свободы и одновременно строгости математического действа.

Все возможные «ситования» множества **A** рассматриваются как его сопоставления «остаткам» на сите, как отображения в свои подмножества и, в конечном счёте, в себя. Все они образуют семейство отображений, зависящее от одного параметра λ. Он вещественный и неотрицательный, но его смысл как размера ячейки сита здесь уже пропадает.

Теперь перечтём определение 7.2.1. Оно совершенно прозрачно! У Ж. Матерона всегда так. Нужно сделать лишь не-большой шаг навстречу его абстрактным текстам, и труд будет вознаграждён – результаты его теоретических работ в области математической морфологии доведены до компьютерных программ и успешно обрабатывают изображения структур металлов и сплавов, горных пород и руд; в области геостатистики оценивают содержания компонентов и запасы руд в месторождениях, залегания геологических поверхностей, литологические разрезы...

К рассуждению о ситованиях добавлю следующее. Для трёх сит имеет место ассоциативность: $(\psi_\lambda \times \psi_\mu) \times \psi_\varphi = \psi_\lambda \times (\psi_\mu \times \psi_\varphi) = \psi_{\max(\lambda,\mu,\varphi)}$. Выполняется и условие идемпотентности: $\psi_\lambda \times \psi_\lambda = \psi_\lambda$. И вот совершенно неожиданный для минералога вывод, в котором гранулометрия понимается как допустимое многообразие ситований некоторого исходного материала: **всякая гранулометрия есть коммутативная полугруппа, в которой каждый элемент идемпотентен**.

Впрочем, употребление термина «полугруппа» иногда ограничивают случаями, когда разрешены сокращения слева и справа[102], что в нашем случае не имеет места: из $\psi_\lambda \times \psi_\mu = \psi_\lambda \times \psi_\varphi$ не следует $\psi_\mu = \psi_\varphi$, из $\psi_\lambda \times \psi_\varphi = \psi_\mu \times \psi_\varphi$ не следует $\psi_\lambda = \psi_\mu$. Тогда вывод звучит так: **всякая гранулометрия есть ассоциативный и коммутативный группоид, в котором каждый элемент идемпотентен**. Как бы то ни было, вот с чем минералог имеет дело в рутинной повседневности – если называть вещи своими именами!

Я смотрю в окно. Вдали – Хибины с пятнами снега, быстро тающего под ярким весенним солнцем, буквально съедаемого первыми дождями. По склонам текут ручьи и впадают в бурные речки, в предгорьях вливающиеся в реки, текущие в Имандру и, далее, в Белое море. Вся эта водная система переносит огромную массу рыхлого материала, сортируя его по гидравлической крупности, реализуя – без человека и до человека, с тех пор как по Земле текут реки – всё ту же процедуру, как бы её не называли минералоги, которая по сути есть ассоциативный и коммутативный группоид, в котором каждый элемент идемпотентен…

---

[102] Ляпин Е.С. Полугруппы. М.: Физматгиз, 1960. 592 с. (с. 29).

ЭТЮД 6: МИНЕРАЛОГИЯ – В КРУГЕ ПЕРВОМ, ВТОРОМ, ТРЕТЬЕМ...

Современная минералогия – не просто дисциплина в составе геологии как науки, но сама представляет собой систему дисциплин, смело перекрывающихся со смежными естественными науками: физикой, химией, биологией… Самое интересное происходит на территории «пограничий минерального мира», как их ёмко назвал акад. Н.П. Юшкин. Минералогия, некогда имевшая дело с минералами, радующими нас – хотя бы под оптическим микроскопом – сверкающими гранями, видится мне портом, из которого корабли минералогической мысли отчалили во все пределы. Это радует и беспокоит. С одной стороны, оттуда, из пограничий в минералогию поступают караваны диковинной информации. С другой стороны, в минералогии сегодня есть не всеми ощущаемая проблема удержания принципов, очерчивающих границы этой науки.

Впрочем, мечта о расширении границ минералогии и проблема её методологической целостности не нова. Ещё акад. Н.И. Кокшаров[103] писал: «При наших настоящих сведениях и понятиях о природе, в самом деле, странно видеть предметы, между собой почти тождественные, разбросанными, один от других отделёнными!.. Когда наступит для Минералогии эта новая, желательная эра, тогда все вообще неорганические тела природы, как предметы между собой тождественные, представляющие одно неразрывное целое, по всей вероятности, будут называться минералами, и тогда Натуральная История самым естественным образом разделится на три науки: Зоологию, Ботанику и Минералогию. Слово «Анорганография» сделается тогда синонимом слова «Минералогия»».

«Почти так же, как Н.И. Кокшаров, представлял себе будущее минералогии молодой П. Грот. Такой подход следует осо-

[103] Кокшаров Н.И. Предмет минералогии, краткая её история, кристаллы как настоящие индивидуумы неорганической природы // Зап. Минерал. об-ва. 1876. Ч. 10. С. 133-158. (с. 151).

бенно приветствовать в связи со становлением современного естествознания на рельсы математизации, так как кристаллография представляет подлинную математику природы … и должна служить подлинным математическим костяком минералогии» – заметил И.И. Шафрановский[104]. И далее: «Нам сейчас ясно, что «анорганография», или будущая утопическая минералогия Н.И. Кокшарова и П. Грота, в общем соответствует нынешней науке о кристаллах… В упоминавшейся книге Н.П. Юшкина[105] предпринята интересная попытка сформулировать обобщающие законы, относящиеся к взаимодействию минерала и минералообразующей среды… Демонстрация этих законов во многом выиграла бы, если бы автор книги придал им не общенатурфилософский, а строго математический, т. е. кристаллографический характер».

Ставить знак равенства между кристаллографией и математикой, конечно, не следует. Сегодня даже в пределах минералогии математические методы описания объектов гораздо шире специальных кристаллографических. Но верно, что кристаллография по-прежнему составляет фундамент минералогии и, что важно в контексте нашего рассуждения, показывает ей пример целостности. Это качество ей обеспечивает концепция симметрии, формализованная в алгебраической теории фёдоровских групп. Её многочисленные расширения и специализации не нарушают целостность платформы, поскольку сохраняют её ядро – идею симметрии. Даже характеризуя асимметричный объект, кристаллография содержит в себе идею симметрии как то, от чего можно оттолкнуться, вплоть до её отрицания – за неимением конструктивного определения асимметрии.

Перечитывая труды Д.П. Григорьева[106] и А.Г. Жабина[107] –

---

[104] Белов Н.В., Вайнштейн Б.К., Елисеев Э.Н. (ред.) Методологические проблемы кристаллографии. М.: Наука, 1985. 296 с. (с. 264-266).

[105] Юшкин Н.П. Топоминералогия. М.: Недра, 1982. 288 с.

[106] Григорьев Д.П. Онтогения минералов. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1961. 284 с.

[107] Жабин А.Г. Онтогения минералов: агрегаты. М.: Наука, 1979. 275 с.

выдающихся методологов минералогии, задаю себе вопрос: что можно предложить в качестве её современной платформы? Понятие минерального индивида? Но что есть наноразмерный минеральный индивид, не решаемый рентгенографически и не определённый кристалломорфологически? Понятие минерального вида? Сегодня таковым считается и фрагмент непрерывной минеральной серии. Но биологическая параллель, идущая от К. Линнея, требует несмесимости видов. Или мы отказались от неё? Но тогда минеральный вид – не «атом», не кирпичик мироздания, не фундаментальная, а лишь операциональная категория. Требование кристалличности? Но минералогия традиционно считает своими объектами полукристаллические и аморфные природные вещества. Естественность происхождения? Но как быть с минералогией техногенных объектов и биоминералогией? Естественно ли образование уролитов в организме человека? Если отвести ему активную роль – нет, если роль пассивного биологического автоклава – да. Вывод очевиден: расширение пределов минералогии неизбежно требует идейных компромиссов. Иначе: о том, насколько принципиально очередное расширение пределов минералогии, можно вполне судить по степени идейного компромисса.

Научные идеи – как круги на воде. Эта нехитрая метафора поможет мне описать ситуацию. **В круге первом** расположу классическую минералогию – здание, прочно стоящее на классическом определении минерала: здесь он вполне определён конституционно – по кристаллической структуре и химическому составу, образован в природном – без малейшего участия человека – процессе, стабилен в определённом диапазоне физико-химических параметров. Более широкую панораму минералогии можно описать различно. Но представляется, что упорядоченность, структурированность – важнейшее свойство минерального объекта. Это первое, на чём будет настаивать, и последнее, от чего откажется минералог, определяя объект своих исследований. Поэтому логично расположить **в круге втором** те природные объекты, в которых можно зафиксировать хоть какую-то упорядоченность. Между прочим, задача не тривиальна. Тот, кто полагает под порядком лишь таковой кристаллографического толка, далёк от истины.

Первый пример – фуллерен, гость из мира наноразмерных объектов, обладающий почти всеми атрибутами минерального индивида. Действительно, всякий фуллерен определён как выпуклый полиэдр, на котором разрешены только 5- и 6-угольные грани, сходящиеся по три в каждой вершине. Более точное описание использует точечную группу симметрии, которой часто бывает недостаточно из-за сильно развитой изомеризации форм. Фуллерены образуются в природных условиях (в шунгитах[108], фульгуритах[109], зювитах[110], хондритах[111]) из атомизированного углерода или фрагментов графитовых сеток при их пластической деформации[112]. Что же настораживает? Все стабильные природные (и почти все синтезированные) фуллерены обладают высокими, но некристаллографическими (в основном икосаэдрическими -3-5m и 235) симметриями. Это возможно лишь потому, что они не обладают трансляционной симметрией, представляя замкнутый на себя фрагмент графеновой сетки. Впрочем, это же обстоятельство позволяет обойти указанную трудность следующим логическим трюком. Молекулу фуллерена можно рассматривать не только в 3D, но и в 2D. При этом повороты в 3D интерпретируются как трансляции, совмещающие 2D поверхность фуллерена с собою. Алгебра и геометрия фуллеренов – активно изучаемая область.

---

108 Buseck P.R, Tsipursky S.J., Hettich R. Fullerenes from the geological environment // Science. 1992. V 257. N 5067. P 215-217.

109 Daly T.K., Busek P.R., Williams P. et al. Fullerenes from a fulgurite // Science. 1993. V 259. N 5101. P 1599-1601.

110 Becker L., Bada J.L., Winas R.E. et al. Fullerenes in the 1.85 billion year old Sudbury impact structure // Science. 1994. V 265. P 642-645.

111 Anders E., Zinner E. Interstellar grains in primitive meteorites: diamond, silicon carbide and graphite // Meteoritics. 1993. V 28. N 4. P 490-514.

112 Новгородова М.И. Фрагменты фуллереновой структуры в пластически деформированном графите // Докл. АН. 1999. Т. 367. № 2. С. 241-243.

На сегодня доказано более десятка теорем о фуллеренах[113]. Между тем, до сих пор нет их последовательного изложения. «Подводную часть айсберга» при их доказательстве явно или неявно составляют соотношение Эйлера $f + v = e + 2$ для любых – простых и непростых – выпуклых полиэдров и следующее из него равенство $\Sigma\ (6\text{-}k)\ f_k = 12$ для выпуклых простых полиэдров (для непростых полиэдров имеет место неравенство >), где f_k – число *k*-угольных граней. Для фуллеренов оно сводится к чрезвычайно простому соотношению $f_5 = 12$ без ограничений на f_6[114]. Большинство теорем о фуллеренах доказывается конструктивно – указанием процедуры, приводящей к построению проекции Шлегеля фуллерена на одну из граней. Здесь подразумевается фундаментальная теорема о том, что проекция может быть расправлена в 3D полиэдр с реализацией его максимальной (комбинаторной) симметрии. Имея в виду эти оговорки, приведём далеко не полный список самых наглядных теорем о фуллеренах с минимальными пояснениями.

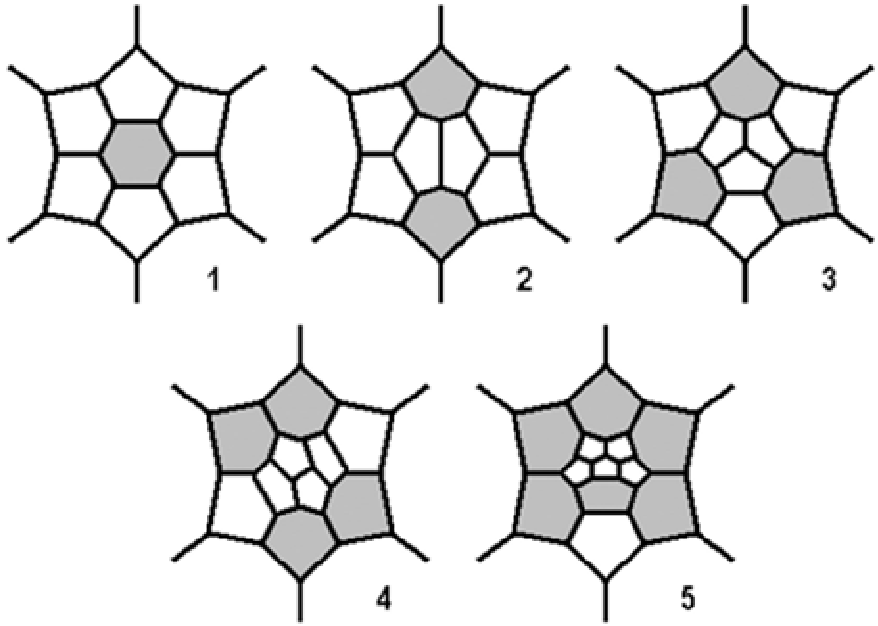
Теорема о существовании фуллерена C_v для v = 20 и любого чётного v ≥ 24. Доказана в[115] и, независимо, в[116]. C_{20} – додекаэдр, простейший из фуллеренов. Невозможность фуллерена C_{22} доказывается геометрически невозможностью построения его проекции Шлегеля. Весьма досадно то, что это же не удаётся доказать алгебраически, из известных комбинаторно-геометрических соотношений. Существование бесконечной серии фуллеренов начиная с C_{24} в обоих случаях доказана кон-

[113] Войтеховский Ю.Л. К геометрии фуллеренов // Геометрия, топология, алгебра, теория чисел и приложения. Матер. Межд. конф. Москва, 16-20 авг. 2010. М.: Изд-во МИ РАН, МГУ, 2010. С. 174-176.

[114] Войтеховский Ю.Л. Развитие алгоритма Е.С. Фёдорова о комбинаторных типах многогранников и приложение к структурам фуллеренов // Зап. ВМО. 2001. № 4. С. 24-31.

[115] Grünbaum B., Motzkin T.S. The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra // Can. J. Math. 1963. V 15. P 744-751.

[116] Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. On the Motzkin-Grünbaum theorem // Acta Cryst. 2005. A61. P 584-585.



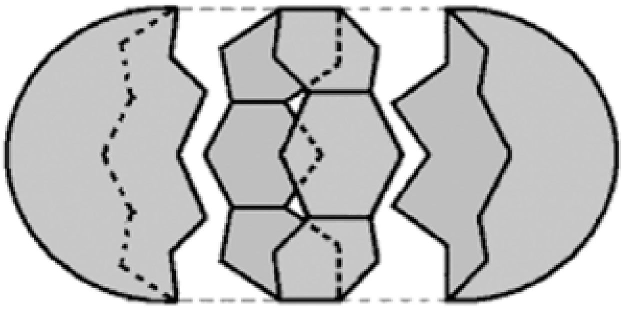


Рис. 6.1. Конструирование фуллерена C_v для чётных $v \geq 24$.

структивно – предъявлением «полусферических» фрагментов различной конструкции, т. е. по-разному заполняющих контур типа «шестерёнка» (1-5 на рис. 6.1), композиция которых с различным числом поясов из гексагонов обеспечивает существование фуллерена C_v с нужным $v \geq 24$. Встраивание поясов гексагонов порождает серию специфических фуллеренов – «тубуленов».

Теорема о существовании простейших фуллеренов C_v **без триад пентагонов, контактирующих в общей вершине, для $v = 50$**. Доказана в[117] конструктивным способом с построением двух таких фуллеренов C_{50} (-10m2, 32). Компьютерные пере-

[117] Schmalz T.G., Seitz W.A., Klein D.J., Hite G.E. Elemental carbon cages // J. Am. Chem. Soc. 1988. V 110. P 1113-1127.

числения показали, что число таких форм быстро растёт с v, для диапазона C_{50}-C_{70} все они найдены и охарактеризованы точечными группами симметрии в[118]. Но отсутствует доказательство того, что такие фуллерены возможны для любого чётного v > 50. Физической подоплёкой теоремы служит то, что в организации таких фуллеренов (по сравнению с фуллеренами с триадами контактирующих пентагонов) совершается важный скачок на пути к потенциальной стабильности, в особенности при наличии допирующих атомов.

Теорема о существовании фуллерена C_v без контактирующих пентагонов для **v = 60 и любого чётного v ≥ 70** (рис. 6.2) Доказана в[119] и[120] конструктивным способом, по аналогии с доказательством теоремы о существовании фуллерена C_v для v = 20 и любого чётного v ≥ 24. В первой работе использованы 4 «полусферических» фрагмента, во второй – все 18, порождающих гораздо большее разнообразие бесконечных серий искомых фуллеренов. Физическая подоплёка теоремы состоит в том, что наиболее стабильны именно фуллерены без контактирующих пентагонов. Теорема указывает важные ограничения для числа атомов в таких фуллеренах.

Теорема о существовании икосаэдрических фуллеренов C_v **при v = 20 (h^2 + hk + k^2), где 0 < h ≥ k ≥ 0 – целые числа**. Доказана в[121]. Указывает необходимое и достаточное условие для числа вершин (атомов) икосаэдрических (самых симметричных и потому потенциально наиболее стабильных) фуллеренов. Достаточность реализуется через конструктивную схему построения фуллерена с заданным **v**. Фуллерены (h, 0) и (h, h) имеют симметрию -3-5m, фуллерены (h, k) при h ≠ k – симме-

---

[118] Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. On the spectrum of fullerenes // Acta Cryst. 2002. A58. P 295-298.

[119] Klein D.J., Liu X. Theorems for carbon cages // J. Math. Chem. 1992. N 11. P 199-205.

[120] Voytekhovsky Y.L., Stepenshchikov D.G. A theorem on the fullerenes with no adjacent pentagons // Acta Cryst. 2004. A60. P 278-280.

[121] Caspar D.L.D., Klug A. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. 1962. V 27.

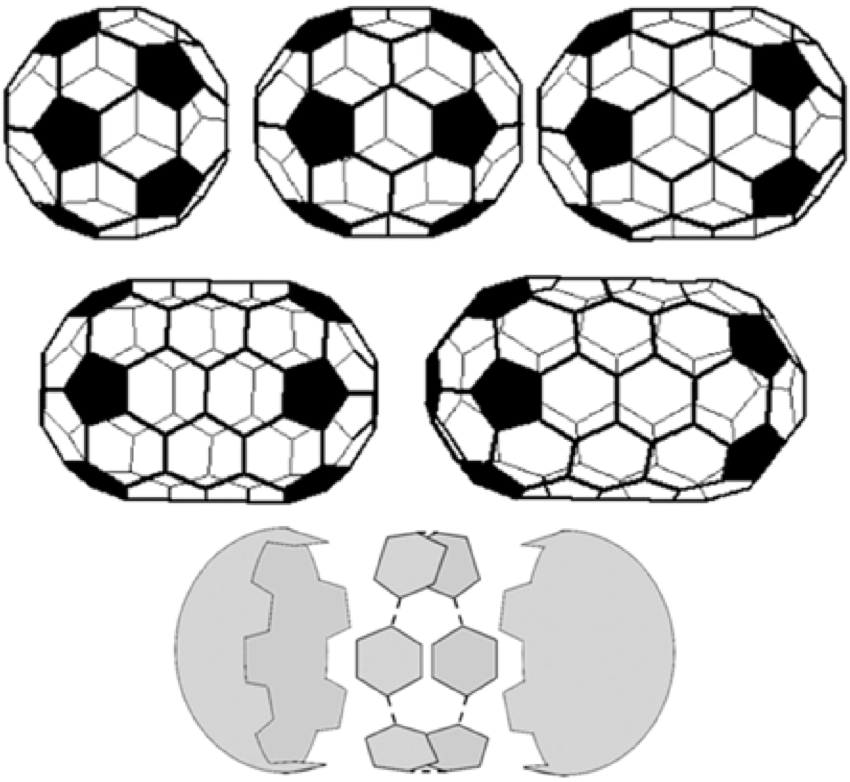


Рис. 6.2. Серия фуллеренов, порождаемая «нобелевским» C_{60} (-3-5m) встраиванием поясов гексагонов (слева направо): C_{70} (-10m2), C_{80} (-5m), C_{90} (-10m2), C_{100} (-5m).

трию 235. Биологическая подоплёка теоремы состоит в существовании обширного класса икосаэдрических вирусов, радиолярий и простейших водорослей, для которых она указывает строгие принципы классификации[122] (рис. 6.3).

Теорема о фуллеренах-генераторах. Доказана в[123]. Показано, что в множестве икосаэдрических фуллеренов существуют бесконечные серии двух типов. (i) Порождается «преобразованием подобия» (h, k) $\rightarrow$ (th, tk), где t – любой натуральный множитель. Число вершин фуллерена увеличивается при этом в t^2 раз. (ii) Порождается переходом к дуальному полиэдру и

[122] Войтеховский Ю.Л. Фуллерены как пример биоминеральной гомологии // Докл. АН. 2003. Т. 393. № 5. С. 664-668.

[123] Войтеховский Ю.Л., Ярыгин О.Н. Теоретико-числовой подход к исследованию икосаэдрических фуллеренов // Структура, вещество, история литосферы Тимано-Североуральского сегмента. Сыктывкар: Геопринт, 2002. С. 30-32.

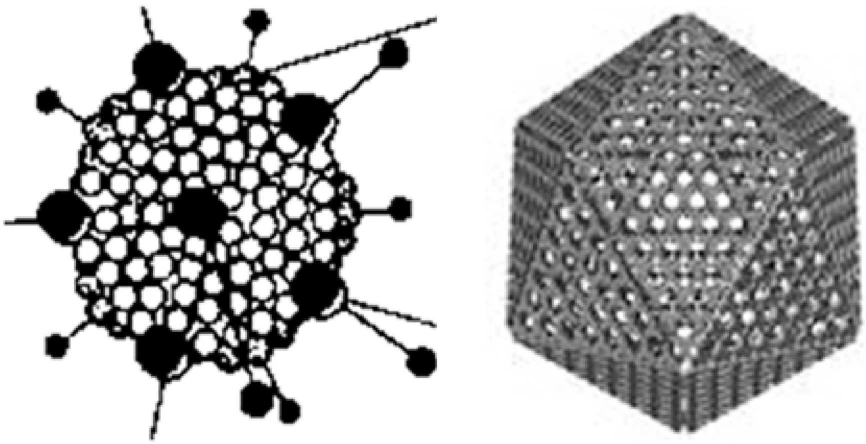


Рис. 6.3. Капсид икосаэдрического вируса построен из белковых глобул (слева), как бы облекающих жёсткий каркас (справа).

усечением его по всем вершинам: (h, k) → (h+2k, h-k). Число вершин увеличивается при этом в 3 раза. Двукратное применение процедуры (ii) равносильно процедуре (i) с t = 3. Генераторами названы фуллерены, не получаемые процедурами (i) и (ii) из более простых. Показано, что генераторами являются те и только те фуллерены (h, k), для которых h и k взаимно просты и не сравнимы по модулю 3. Описание многообразия икосаэдрических форм на уровне генераторов проще, чем на уровне индивидуальных форм. Теорема углубляет предыдущую и также имеет прямое отношение к описанию многообразий икосаэдрических вирусов, радиолярий, других минеральных и биологических форм.

Теорема об икосаэдрических фуллеренах-изомерах. Анализ спектра икосаэдрических фуллеренов обнаруживает изомеры, простейшие из них – (7, 0) и (5, 3) с 980 вершинами, а также (9, 1) и (6, 5) с 1820 вершинами. Они столь огромны, что имеют лишь теоретический интерес. То есть, в ближайшей области спектра пара чисел (h, k) фиксирует даже комбинаторный тип фуллерена. Но теоретически интересен вопрос о простейших тройках, четвёрках … n-ках икосаэдрических фуллеренов-изомеров. Компьютерными перечислениями найдены простейшие серии, включающие до 10 изомеров. Алгебраически задача состоит в отыскании минимальных натуральных N, допускающих n различных представлений в виде неполного квадрата h^2+hk+k^2. В общем виде она не решена. Но легко показать, что в серии икосаэдрических изомеров лишь один может иметь симметрию -3-5m. Действительно, икосаэдрические (-3-5m) фуллерены представлены лишь сериями вида (h, 0) и (h, h) с числами вершин h^2 и $3h^2$, соответственно. Очевидно, они не пересекаются. В пределах каждой серии пара чисел (h, k) определяет комбинаторный тип фуллерена однозначно, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Теорема о замкнутом контуре. Доказана в виде леммы, предваряющей доказательство теоремы о существовании фуллерена C_v без контактирующих пентагонов для v = 60 и любого чётного v ≥ 70. Показывает, что число пентагонов внутри любого замкнутого контура на поверхности фуллерена строго определено самим контуром: $f_5 = 6 + e_{in} - e_{out}$, где e_{in} и e_{out} – числа ребер, примыкающих к контуру изнутри и снаружи, соответственно. Она даёт теоретическую возможность поиска пентагонов на как угодно большой поверхности фуллерена.

Теорема о «среднем радиусе» фуллерена C_v. Доказана в[124]. Под «средним радиусом» фуллерена понимается радиус эквиплощадной сферы. Он ограничен радиусами сфер, вписанных в фуллерен и описанных около него. Показано, что «средний радиус» фуллерена пропорционален длине ребра гексагона, а коэффициент пропорциональности φ(v) табулирован для v = 60 ÷ 100. Размер фуллерена чрезвычайно важен ввиду его способности включать атомы и их кластеры с образованием эндоэдральных структур.

Итак, если фуллерены – объекты минералогии, то тем самым она приобретает в удел целый мир неклассических (или неоклассических?) природных форм и адекватных им алгебраических (и геометрических – между ними есть корректный перевод) структур.

[124] Voytekhovsky Y.L. A formula to estimate the size of a fullerene // Acta Cryst. 2003. A 59. P 193-194.

Второй пример представляется не менее интересным, обещающим весьма широкий взгляд на объекты минералогии, обязательным признаком которых – в круге втором – мы договорились считать хоть как-то определяемую упорядоченность. В качестве отправной точки возьмём исследования почвенного слоя в диссертации[125]: «результаты анализа гранулометрического состава фракции частиц стоксовым диаметром < 10 мкм методом лазерной дифракции показывают полную однотипность распределения частиц по размерам в профиле почв» до глубины 1.5 м с коэффициентом вариации > 5 % лишь в одном случае из семи. Занятый специальным вопросом – изучением структурной и фазовой неоднородности органо-смектитов – автор диссертации по ходу дела установил высокую структурированность почвенного слоя. Ведь структура – это всегда инвариант, проявляющийся на фоне изменения. Кристаллическая структура совмещается с собой при движениях любой из 230 фёдоровских групп, кристаллический полиэдр – любой из 32 точечных групп симметрии, фрактальная структура (геометрическая, стохастическая) – при изменении масштаба восприятия. В нашем случае, начиная с некоторого объёма, сохраняется гранулометрический спектр почвенных частиц. Обобщающая **идея состоит в том, чтобы принять устойчивость некоторой спектральной характеристики (при этом не важно, имеет ли спектр вид классического распределения) природного объекта в качестве признака упорядоченности.** Пространственное распределение минеральных тел (частиц, зёрен…) присутствует здесь неявно, весьма опосредованно. Это – всё тот же компромисс, плата за расширенное определение порядка.

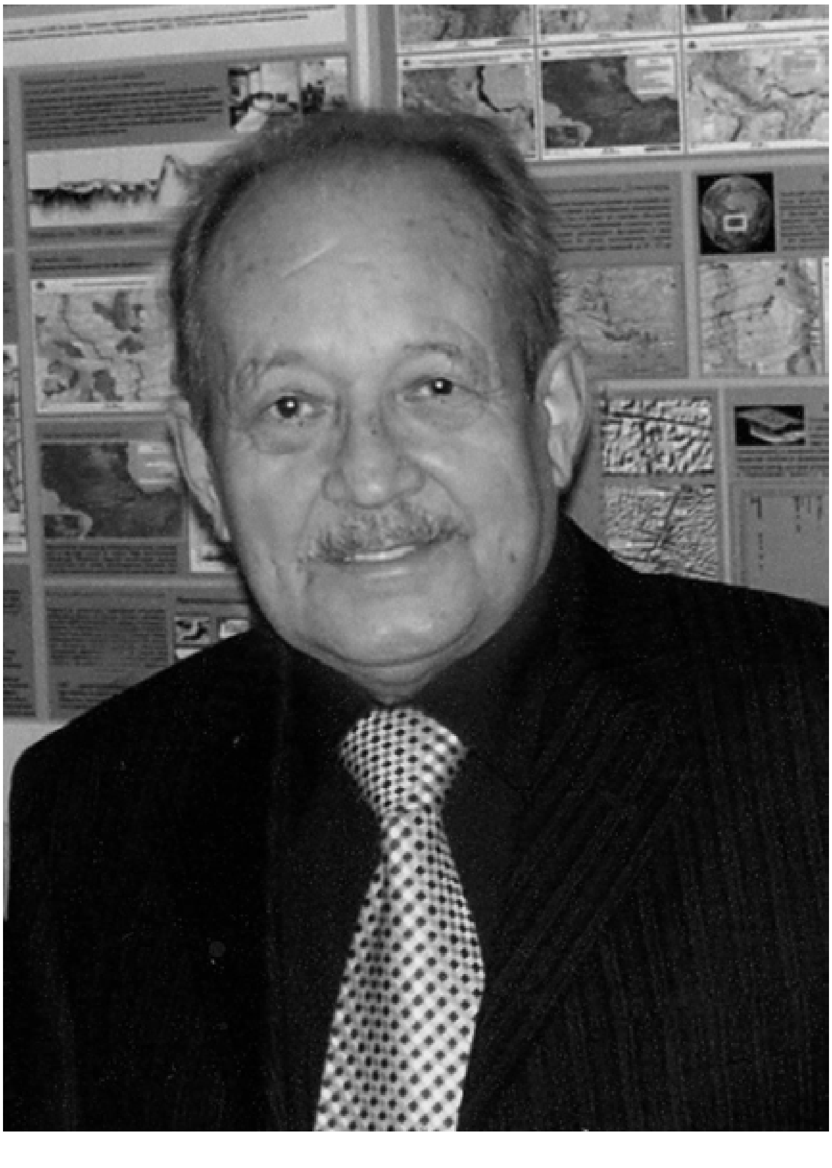
Что поместить **в круге третьем**? Очевидно, все те природные объекты, в которых не удаётся определить упорядоченность. Этот круг распахнут в мир каких угодно объектов.

В завершение уместно задать себе вопрос: может быть, ме-

[125] Шинкарёв А.А. Структурная и фазовая неоднородность органо-смектитов в природных объектах. Автореф. дисс. ... к.г.-м.н. М.: ВИМС, 2011. 20 с. (с. 15).

тодологическая чистота и строгость определений той или иной естественнонаучной дисциплины не столь важны, идеал науки – взаимное проникновение всех дисциплин, слияние их в одно знание, на пути к которому рушатся все идеалы, смысл которых в этом именно и состоит? Может быть… Есть в этом своя логика… И всё же, удаляясь от идеалов, следует отдавать себе отчёт в каждом сделанном шаге. Представляется, так ответил бы на вопрос выдающийся педант отечественной минералогии проф. Д.П. Григорьев.

Моему глубокоуважаемому учителю
академику РАН Николаю Павловичу Юшкину



Академик РАН Н.П. Юшкин

МИНЕРАЛОГИЯ: ЗАКОН АГРЕГАЦИИ МИНЕРАЛЬНЫХ ИНДИВИДОВ

ЭТЮД 7: МИНЕРАЛЬНЫЙ АГРЕГАТ – ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

В 1859 г. выдающийся немецкий минералог К.Ф. Науманн сформулировал закон агрегации минеральных индивидов.

«**Aggregation und unbestimmte Massgrosse der Individuen.** Es unterscheiden sich namlich die Individuen des Mineralreichs von denen der organischen Natur, wie durch vielemandere Eigenschaften, so besonders dadurch, dass eine freie und vollstandige Formausbildung bei ihnen zu den selteneren Fallen gehort, indem sie dem vorherrschenden Gesetz der Aggregation unterworfen und daher gewohnlich in grosser Anzahl neben, uber und durch einander ausgebildet sind ... Die einzelnen Individuen erscheinen dann nur in mehr oder weniger verdruckten oder verkruppelten Gestalten, deren Contouren durch ganz zufallige und regellose Contactflachen bestimmt werden, welche meist in gar keiner Beziehung zu derjenigen Krystallform stehen, auf deren Ausbildung die Natur doch eigentlich in jedem Individuum hinarbeitete ... Einer weiterer Gegensatz zu den Individuen der organischen Welt besteht fur die vollkommen ausgebildeten Individuen eines und desselben Minerals darin, dass ihre absolute Grosse an kein bestimmtes mittleres Normalmass gebunden ist, sondern zwischen sehr weiten Grenzen schwankt...»[126]

«**Агрегация и неопределенный размер индивидов.** А именно, индивиды минерального царства отличаются от таковых органической природы среди многих прочих свойств в особенности тем, что свободное и полное образование форм является для них редчайшим случаем, в то время как они подчиняются господствующему закону агрегации и потому обычно образуются в большом количестве друг около друга, друг на друге и один сквозь другого... Отдельные индивиды появля-

[126] Naumann C.F. Elemente der Mineralogie. 15te Aufl. Leipzig: Verlag von W. Engelmann, 1907. 821 S. (с. 4).

ются только в более или менее угнетённых или искалеченных формах, контуры которых определяются совершенно случайными и незакономерными контактными поверхностями, которые большей частью не имеют никакого отношения к тем кристаллическим формам, над созданием которых природа все же, в сущности, трудилась в каждом индивиде... Ещё одно отличие полностью образованных индивидов одного и того же минерала от индивидов органического мира состоит в том, что их абсолютный размер не связан ни с каким определенным средним нормальным размером, а колеблется в очень широких границах...» (пер. авт.)

Далее следует ещё один параграф, суть которого относится к нашему рассмотрению.

«**Verschiedene Grade der Aggregation.** Durch das Zusammentreten vieler Individuen entstehen eigentumliche Aggregationsformen, welche, obgleich verschieden fon den Kristallformen, doch noch bisweilen eine gewisse Regelmassigkeit erkennen lassen. Die ersten, unmittelbar durch die Verwachsung der Individuen gebildeten Formen nennen wir Aggregationsformen des ersten Grades. Allein die Aggregation wiederholt sich sehr haufig, indem neben oder uber dem zuerst gebildeten Aggregat ein zweites, drittes, viertes usw. abgesetzt wurde, durch welche doppelte Zusammensetzung Aggregationsformen des zweiten Grades entstehen, deren nachste Elemente nicht Individuen, sondern Aggregate des ersten Grades sind. Durch eine nochmalige Wiederholung der Aggregation konnen Aggregate des zweiten Grades abermals zu Aggregaten verbunden sein, welche demnach als solche des dritten Grades zu bezeichnen waren.» (Ibid., S. 171).

«**Различная степень агрегации.** В результате схождения многих индивидов образуются своеобразные агрегационные формы, которые, хотя и отличаются от кристаллических форм, но иногда ещё позволяют распознать некоторую закономерность. Первые формы, образованные непосредственно благодаря срастанию индивидов, мы называем агрегационными формами первой степени. Но агрегация очень часто повторяется, в результате чего около или на ранее образованном агрегате формируются второй, третий, четвёртый и т. д., при повторном составлении которых возникают агрегационные формы второй степени, ближайшими элементами которых являются не индивиды, а агрегаты первой степени. В результате ещё одного повторения агрегации агрегаты второй степени могут быть снова объединены в агрегаты, которые, следовательно, могли бы быть названы таковыми третьей степени.» (пер. авт.)

Большое значение закона агрегации вскоре после его опубликования отмечал акад. Н.И. Кокшаров [127], вторя К.Ф. Науманну: «Минеральные неделимые были часто образованы в стеснённом пространстве и поэтому или окристаллизовались только отчасти, или иногда даже вовсе не окристаллизовались» [128]. Тем не менее, этот странный – очень абстрактный и, изъятый из контекста, похожий на банальность, трюизм – закон постепенно выпал из круга фундаментальных минералогических идей. После столетнего забвения он был возвращён в научный обиход акад. Н.П. Юшкиным [129].

Но мне ещё не всё ясно в содержании закона агрегации. Ведь есть известная трудность в том, чтобы понять мысль, высказанную полтора столетия назад. Чем больше вчитываюсь в тексты К.Ф. Науманна, тем яснее понимаю, что подоплёку его суждений следует искать в философской атмосфере своего времени. К сожалению, тексты очень кратки. И всё же кое-что удаётся заметить. Обращает внимание специфическое словоупотребление. Описывая идеальный облик кристаллов в систематической части учебника минералогии, он использует термины Form и Krystallform. В формулировке закона агрегации ощущается приподнятость стиля и употребляется слово

---

[127] Кокшаров Н.И. Предмет минералогии, краткая её история, кристаллы как настоящие индивидуумы неорганической природы // Зап. минерал. об-ва. 1876. Т. 2. Ч. 10. С. 253-272.

[128] Кокшаров Н.И. Лекции по минералогии. СПб, 1863. 226 с. (с. 7).

[129] Юшкин Н.П. История минералогии и эволюция фундаментальных минералогических идей. Препринт. Сыктывкар: Коми филиал АН СССР, 1984. 52 с. (с. 20, 29).

Gestalt. Нельзя не заметить, что для К.Ф. Науманна Gestalt – нечто большее, чем Form. Но ведь Gestalt – центральное понятие гегелевской философии, определившей стиль мышления поколения немецких естествоиспытателей, к которому принадлежал и К.Ф. Науманн.

Обращение к философии в минералогической работе может показаться странным. Но вот исторический факт, побуждающий задуматься. В 1804 г. Йенское минералогическое общество и Общество естествоиспытателей Вестфалии избрали ещё мало известного Гегеля своим действительным членом за только что прочитанный курс лекций по философии природы [130]. Влияние этой философии на воззрения К.Ф. Науманна и его современников заслуживает отдельного рассмотрения. Здесь я лишь прикоснусь к этой теме, пытаясь полнее понять содержание закона агрегации. Стоит ли вообще ворошить столь древние манускрипты? Непременно! Ведь за прошедшие полтора века мало что было сказано о минеральных агрегатах столь же фундаментального. Минералогии, устремившейся внутрь минерального индивида с помощью умных приборов, в этом пункте грозит потеря концептуальных ориентиров.

Итак, «Философия природы» [131]. Рассматривая физику особенной индивидуальности, Гегель определяет Gestalt как форму существования индивидуализированных неорганических тел. Здесь она проявляет себя пассивно, не обладая целостностью, устойчивостью, не следуя из содержания самой индивидуальности, поскольку та обособляется главным образом под воздействием извне. Минералогический пример – капля самородной ртути. Но, рассматривая физику целостной индивидуальности, Гегель определяет Gestalt как «тело, у которого не только специфический способ внутренней связи, но и его внешнее ограничение в пространстве определено имманентной и развернутой формой – деятельностью. Форма проявлена

[130] Гулыга А. Гегель. М.: Соратник, 1994. 256 с.

[131] Гегель. Сочинения. Т. II. Философия природы. М.-Л.: Соцэкгиз, 1934. 683 с.

теперь сама собой и не есть лишь обнаружение своеобразного способа отпора внешнему насилию ... Без всякого импульса со стороны тело носит в себе тайного, тихого геометра, который как вполне проникающая форма организует его вовне и внутри» (с. 209). Коротко пересказывая представления Р.-Ж. Гаюи, здесь Гегель приводит поясняющий образ целостной индивидуальности – идеальный кристалл.

Нетрудно видеть, что Gestalt в употреблении К.Ф. Наумана следует связывать с гегелевской особенной индивидуальностью. «Образуясь в большом количестве друг около друга, друг на друге и один сквозь другого», минеральные зёрна в совместном усилии формируют среду, определяющую форму каждого индивида как результат их конкуренции. Значение закона агрегации как опыта самостоятельного мышления о минеральном агрегате состоит в том, что исходный пункт рассуждения перенесён из сферы целостной индивидуальности в сферу индивидуальности особенной. Иначе говоря, в основу представления о минеральном агрегате положена мысль не об идеальных, а о реальных индивидах – без предустановленной идеи об их внешних формах. На первый взгляд, здесь устраняется сама мысль о кристалличности индивидов. Отнюдь. Она лишь выносится за скобки. Ведь механизм взаимодействия в той или иной мере определяется и кристалличностью зёрен.

Вот ещё один аспект закона агрегации на фоне философии Гегеля. «Тело как индивидуальность есть прежде всего механизм» (с. 209). Или, Gestalt есть «деятельность, перешедшая в свой продукт» (с. 226). Это сказано о кристаллах минералов. Следует ли понимать минеральный агрегат именно как процесс и последовательное становление? На первый взгляд, так и поступает К.Ф. Науманн, вводя понятие агрегационных форм различных степеней. Но Гегель утверждает обратное. «Этот ряд событий оставляет в стороне самый вопрос о необходимости, о понимании... Этот способ объяснения есть превращение пространственной последовательности во временную... Эта точка зрения не имеет ничего общего с философским рассмотрением.

Смысл и дух процесса составляет внутренняя связь, необходимое соотношение образований, к которому временная смена ничего не прибавляет. Требуется познать всеобщий закон этой последовательности, для чего нет надобности в форме истории... Внутренняя связь существует в настоящем как рядоположность ... Весь интерес заключается в том, что дано – в наличной системе различенных образований» (с. 354-355). К.Ф. Науманну очевидны «наличные системы» (минеральные агрегаты) и «различенные образования» (минеральные зёрна). Проблема состоит в том, чтобы познать их «необходимое соотношение».

Сегодня известны три основных подхода, физически обосновывающих оптимальную конституцию минерального агрегата. Это идея А.Г. Жабина с соавторами [132] о ячейке Коксетера как форме минерального зерна, доставляющей агрегату в целом минимум поверхностной свободной энергии и равенство сил поверхностного натяжения на всех межзерновых границах; представление Е.П. Макагонова [133] о закономерных срастаниях минеральных индивидов, в которых согласованы одинаковые элементы симметрии их кристаллических решёток, концепция Р.Л. Бродской [134] о равенстве ретикулярных плотностей кон-

---

[132] Жабин А.Г., Харченков А.Г. Равновесная структура минерального агрегата // Кристаллография и минералогия. Л.: ЛГИ, 1972. С. 61-71; Жабин А.Г. Структуры и текстуры минеральных агрегатов как источники генетической информации о рудообразовании. Автореф. дис. … д.г.-м.н. М.: ИМГРЭ, 1975. 48 с.; Жабин А.Г., Гладких В.С. Равновесные структуры минеральных агрегатов в глубинных лерцолитовых нодулях // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 5. С. 1200-1203.

[133] Макагонов Е.П. Симметрия сростков. Препринт. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. 51 с.; Макагонов Е.П. Структура сростков минеральных индивидов: симметрия, соподчинение, классификация, свойства. Автореф. дис. … к.г.-м.н. Л.: ЛГИ, 1984. 22 с.; Макагонов Е.П. К теории строения сростков минеральных индивидов // Материалы к минералогии рудных районов Урала. Свердловск: Уральский горный ин-т, 1988. С. 4-11.

[134] Бродская Р.Л. Термодинамические (кинетические) критерии формирования и эволюции структуры минеральных агрегатов // Зап. ВМО. 1988. № 5. С. 623-633; Бродская Р.Л., Макагонов Е.П. Определение пространственной ориентировки кристаллических

тактных поверхностей минеральных зёрен в агрегатах и регулярности их организации как условиях термодинамического равновесия. Высоко оценивая каждую из этих физических моделей, я задаю себе вопрос: как быть, если в минеральном агрегате нашлись зёрна, ещё не соответствующие ячейке Коксетера; или межзерновые границы, на которых однородные элементы симметрии минеральных индивидов ещё не согласованы; или контактные поверхности, на которых ещё не успели сравняться ретикулярные плотности зёрен?

Иначе говоря, проблема видится не в том, чтобы охарактеризовать меру несовершенства, неидеальности, неправильности таких минеральных агрегатов. Представляется, что они – реальные – не нуждаются в определениях с приставкой «не» и должны найти своё место в рамках более общей концепции, необходимой не вместо, но как вместилище и основание любых физических моделей. Заметим, что три указанных подхода к минеральным агрегатам замечательно иллюстрируют теорию сложных динамических систем Л. Берталанфи[135], разработанную для эквифинальных (стремящихся к заведомо известному финалу независимо от начального состояния) систем. Как заметили И.В. Блауберг и др.[136], это лишь частный случай систем. Уже поэтому видится необходимость в их более общем анализе, в котором существо организации минерального агрегата трактуется из соотнесённости минеральных индивидов, характеризуемой законом агрегации К.Ф. Науманна. Сказанное не противоречит преобладающему сегодня в минералогии онтогеническому принципу исследования[137]. И я акцентирую

индивидов при микроструктурном анализе и перспективы его использования в стереометрической петрографии // Зап. ВМО. 1990. № 4. С. 84-93.

135 Берталанфи Л. Общая теория систем – обзор проблем и результатов // Системные исследования. М.: Наука, 1969. С. 30-54.

136 Блауберг И.В., Садовский В.Н., Юдин Э.Г. Системные исследования и общая теория систем // Системные исследования. М.: Наука, 1969. С. 7-29.

137 Григорьев Д.П., Жабин А.Г. Онтогения минералов. Индивиды.

внимание на самостоятельной познавательной ценности такого (агенетического, догенетического) анализа.

В отечественной науке есть два идейных течения, использующих минеральные образования как средство или как цель исследования. Во-первых, это философская мысль, как и два тысячелетия назад выясняющая связи категорий: части и целого, количества и качества, формы и содержания, структуры и функции... [138]. Для настоящего исследования интерес представляют идеи философов о форме системы как совокупности отношений, общей для всех изоморфных с нею систем; о её структуре как совокупности отношений, инвариантных относительно движений, которые сами образуют некоторую структуру; о несводимости структуры целого лишь к качеству и количеству её элементов... Во-вторых, это тяготеющий к математике анализ геологических объектов как формальных систем. Его цель ёмко сформулировали акад. Ю.А. Косыгин и

М.: Наука, 1975. 339 с.; Жабин А.Г. Онтогения минералов. Агрегаты. М.: Наука, 1979. 275 с.

[138] Абрамова Н.Т. О соотношении части и целого в строении материи // Вопросы философии. 1962. № 2. С. 46-56; Агудов В.В. Соотношение категорий «форма» и «структура» // Философские науки. 1970. № 1. С. 62-70; Агудов В.В. Категории «структура» и «элемент» // Философские науки. 1974. № 3. С. 112-121; Вальт Л.О. Соотношение структуры и элементов // Вопросы философии. 1963. № 5. С. 44-53; Егоров Ю.Л., Хасанов М.Х. Система, структура, функция // Философские науки. 1978. № 5. С. 38-47; Кремянский В.И. К анализу понятий системы и структуры // Философские науки. 1975. № 5. С. 62-69; Новик И.Б. Сложные динамические системы // Структура и формы материи. М.: Наука, 1967. С. 141-158; Овчинников Н.Ф. Структура и симметрия // Системные исследования. М.: Наука, 1969. С. 111-121; Петров Ю.А. Категории содержания и формы // Философские науки. 1976. № 6. С. 31-42; Тюхтин В.С. Категории «форма» и «содержание» и их структурный анализ // Вопросы философии. 1971. № 10. С. 88-98; Шептулин А.П. О взаимосвязи категорий «содержание» и «форма», «структура» и «элемент» // Философские науки. 1980. № 1. С. 67-74; Шептулин А.П. Принцип системности // Философские науки. 1985. № 5. С. 56-63.

В.А. Соловьёв[139] «Сущность проблемы, по-видимому, состоит в том, чтобы обнаружить такие математические структуры и алгебры, которые были бы изоморфны геологическим системам, то есть позволяли бы их описывать на математическом языке». А ещё раньше, в 1930-е годы, акад. В.И. Вернадским[140] высказано представление о «пространстве горной породы» как специфическом состоянии «пространства земной реальности». О горной породе – специфическом минеральном агрегате – речь пойдёт впереди. Но категория пространства, выше упомянутая дважды, настоятельно стучится в сознание и кажется достаточно общей и плодотворной в дальнейших рассуждениях о любом минеральном агрегате.

Примем в качестве исходного пункта, что минеральные агрегаты сложены минеральными индивидами (кристаллами и зёрнами) тех или иных минеральных видов. Здесь есть определённая иерархия естественных объектов, отражённая в иерархии понятий. Чуть далее мы определим произвольный минеральный агрегат как топологическое пространство, устроенное по определенным правилам. Они, на первый взгляд формальные, позволят в дальнейшем построить следующие этажи теории. Топологический подход к анализу геологических объектов уже заявлен в некоторых работах[141]. Но их авторы, как правило, избегают определения понятий и последовательного

[139] Косыгин Ю.А., Соловьёв В.А. Статические, динамические и ретроспективные системы в геологических исследованиях // Изв. АН СССР. Сер. геол. 1969. № 6. С. 9-17 (с. 16). См. также: Косыгин Ю.А. Понятие структуры в геологических исследованиях // Геология и геофизика. 1970. № 4. С. 76-86.

[140] Вернадский В.И. Химическое строение биосферы Земли и её окружения. М.: Наука, 1987. 340 с. (с. 154). См. также: Вернадский В.И. О состояниях физического пространства // Философские мысли натуралиста. М.: Наука, 1988. С. 255-274.

[141] Казицын Ю.В. Топологические аспекты формационного анализа // Геологические формации. Л.: ВСЕГЕИ, 1968. С. 32-35; Миронов Ю.П. Теоретико-множественные модели гранитоидов. М.: Наука, 1975. 228 с.

построения объекта как топологического пространства. Рассмотрение возможных топологий минерального агрегата – наиболее абстрактный уровень его структурного анализа.

Введём следующее **определение**[142]: Множество $\mathfrak{R}$ элементов любой природы называется топологическим пространством, если оно может быть представлено как объединение некоторого семейства $\mathfrak{I}$ своих подмножеств, замкнутого относительно объединения любого числа и пересечения любых двух из них. $\mathfrak{I}$ называется топологией $\mathfrak{R}$. Если в $\mathfrak{R}$ можно выбрать семейство $\aleph$ подмножеств так, что каждое множество из $\mathfrak{I}$ есть объединение некоторых множеств из $\aleph$, то $\aleph$ называется базой топологии $\mathfrak{R}$.

Одно множество допускает различные топологии. И тогда это будут различные топологические пространства. Известно, что на всяком множестве можно задать тривиальную ($\mathfrak{I}$ состоит из самого $\mathfrak{R}$) и дискретную ($\mathfrak{I}$ содержит любое подмножество $\mathfrak{R}$) топологии. Рассмотрим интерпретацию этих возможностей для минерального агрегата. В первом случае в качестве топологии предъявляется сам агрегат без разложения на минеральные индивиды: $\mathfrak{I} = \{\mathfrak{R}\}$. Во втором случае топология включает все возможные сочетания минеральных индивидов в агрегате: $\mathfrak{I} = \{2^{\mathfrak{R}}\}$ – в принятых в теории множеств обозначениях. В первом случае базой топологии является сам агрегат. Во втором случае – полная совокупность слагающих его минеральных индивидов. В этих схемах реализуются ранее не применявшиеся в смысловом поле минералогии аксиоматики теории множеств по Е. Цермело и Б. Расселу[143].

В случае дискретной топологии кажется непривычным представлять элементами топологии наряду со связными агрегатами любые дисперсные совокупности минеральных

[142] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 833 с. (с. 377).

[143] Ван Хао, Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств. М.: Иностранная литература, 1963. 54 с.

индивидов. Но ведь именно эта процедура выполняется всякий раз, когда проверяется пространственная коррелируемость не контактирующих между собой минеральных зёрен, например, в работах школы А.Б. Вистелиуса[144]. Представление о минеральном агрегате как пространстве с дискретной топологией лишь узаконивает подобный взгляд на любую совокупность минеральных индивидов в нём. В этом случае база $\aleph$ агрегата $\mathfrak{R}$ включает каждый индивид и этим исчерпывается, поскольку оказывается заведомо достаточной для композиции любой топологии $\mathfrak{I}$. Иначе говоря, обычный взгляд на минеральный агрегат как объединение минеральных индивидов отнюдь не является тривиальным. Наоборот, в нём интуитивно схвачено представление о минеральном агрегате как пространстве с базой, дающей максимум возможностей для конструирования топологий.

Здесь уместно привести ещё одно **определение**[145]: Алгеброй называется непустая совокупность подмножеств множества $\mathfrak{R}$, замкнутая относительно операций объединения их конечного числа и (теоретико-множественного) вычитания любых двух из них, причём исходное множество $\mathfrak{R}$ принадлежит совокупности. Нетрудно видеть, что дискретная топология $\mathfrak{I}$ минерального агрегата $\mathfrak{R}$ является алгеброй, поскольку состоит

[144] Вистелиус А.Б. Стохастическая модель кристаллизации аляскитов и отвечающие ей переходные вероятности // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170. № 3. С. 653-656; Вистелиус А.Б., Фаас А.В. О вероятностных свойствах последовательностей зёрен кварца, калиевого полевого шпата и плагиоклаза в магматических гранитоидах // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198. № 4. С. 925-928; Вистелиус А.Б., Фаас А.В. О преобразованиях последовательностей зёрен кварца, калиевого полевого шпата и плагиоклаза в идеальных гранитах под действием слабого метасоматоза // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. № 6. С. 1386-1389; Вистелиус А.Б., Романова М.А. О типах последовательностей зёрен кварца, калиевого полевого шпата и плагиоклаза в гранитах // Тр. Ленингр. Об-ва естествоисп. 1974. Т. 74. № 2. С. 28-36.

[145] Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1965. 304 с.

из всех возможных сочетаний слагающих его минеральных индивидов. Уверен, это – одна из алгебр, о которых говорили Ю.А. Косыгин и В.А. Соловьёв: «Сущность проблемы, по-видимому, состоит в том, чтобы обнаружить такие математические структуры и алгебры, которые были бы изоморфны геологическим системам…»

Но существуют ли для произвольного минерального агрегата топологии, промежуточные между двумя указанными крайностями? Кажется, этот вопрос хотя бы отчасти формулирует чаяния целого ряда исследователей, интуитивно ищущих принципы организации минеральных агрегатов (в частности, горных пород), столь же ясные, как и принципы организации кристаллов, выраженные алгебраическим языком теории групп или геометрическим языком теории симметрии. Укажем алгоритм построения различных топологий для минерального агрегата $\mathfrak{R}$. Пусть T_i – субагрегаты, образующие его покрытие:

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{i=1}^{n} T_i \ .$$

Рассмотрим все сочетания номеров $\{i_1, i_2 \ldots i_k\}$ из ряда $\{1, 2 \ldots n\}$ и сопоставим им совокупности следующего вида:

$$T\ \{i_1, i_2 \ldots i_k\} = \bigcap_{j=1}^{k} T_{i_j} \setminus \bigcup_{p} T_p \ ,$$

$$\text{где } p \in \{1, 2 \ldots n\} \setminus \{i_1, i_2 \ldots i_k\} \ .$$

Относительно них имеет место **утверждение**: совокупности вида $T\{i_1, i_2 \ldots i_k\}$ образуют разбиение $\mathfrak{R}$. **Доказательство**. Пусть k – минеральный индивид в $\mathfrak{R}$. Так как совокупности T_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ образуют покрытие $\mathfrak{R}$, то k принадлежит хотя бы одной из них. Пусть k принадлежит совокупностям с номерами $\{i_1, i_2 \ldots i_k\}$ и только им. Тогда k принадлежит совокупности $T\{i_1, i_2 \ldots i_k\} = \bigcap_{j=1}^{k} T_{i_j} \setminus \bigcup_{p} T_p$. Поскольку k – любой индивид в $\mathfrak{R}$, то совокупности вида $T\{i_1, i_2 \ldots i_k\}$ образуют покрытие $\mathfrak{R}$. Пусть теперь k принадлежит совокупности

$$T\{i_1, i_2 \dots i_k\} = \bigcap_{j=1}^{k} T_{i_j} \setminus \bigcup_{p} T_p \text{ , где } p \in \{1, 2 \dots n\} \setminus \{i_1, i_2 \dots i_k\}.$$

Тогда k принадлежит совокупностям Ti с номерами $\{i_1, i_2 \dots i_k\}$ и только им. Поэтому k принадлежит только совокупности $T\{i_1, i_2 \dots i_k\}$. Следовательно, совокупности вида $T\{i_1, i_2 \dots i_k\}$ образуют разбиение $\mathfrak{R}$.

Важным следствием является то, что объединение совокупностей $T\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ можно взять в качестве топологии $\mathfrak{I}$ для минерального агрегата $\mathfrak{R}$. При этом совокупности $T\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ образуют базу $\aleph$. Алгоритм позволяет извлечь из любого покрытия агрегата $\mathfrak{R}$ его дискретную топологию, построенную из совокупностей $T\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, в общем случае более крупных, чем отдельные минеральные индивиды. Представляет интерес частный случай рассмотренной конструкции. Пусть совокупности, образующие покрытие агрегата $\mathfrak{R}$, вложены друг в друга:

$$T_i \subseteq T_j \text{ при } i < j; \; i, j \in \{1, 2 \dots n\} \; .$$

Согласно предложенному выше алгоритму, база такого пространства имеет вид:

$$\aleph = \{T_1 , T_2 \setminus T_1 , \dots, T_n \setminus T_{n-1}\} \; .$$

Каждая совокупность $T_i \setminus T_{i-1}$ есть «слой», окружающий ядро T_{i-1} в T_i. По сути, это формальное выражение «модели воспроизведения» горных пород по А.Ф. Белоусову[146], в которой фундаментальную роль играет понятие горнопородного слоя и которая имеет ясный физический смысл для осадочных и расслоенных магматических пород. Ту же модель заполнения пространства (или организации себя как пространства) реали-

[146] Белоусов А.Ф. К общей концепции горной породы. Препринт. Новосибирск: ИГГ СО РАН, 1987. 52 с. Кажется, до предложенной нами конструкции концепция кристаллической горной породы А.Ф. Белоусова была единственной, в которой просматривалась фундаментальная математическая идея, угаданная интуитивно.

зует всякий минеральный агрегат скорлуповатого (коркового, зонального ...) строения.

У проблемы есть ещё один ракурс. Индуцирование топологии минерального агрегата из его покрытия произвольными совокупностями минеральных индивидов – формальная процедура, не гарантирующая физического смысла в элементах топологии и её базы. Попробуем поставить физический смысл во главу угла, для чего проделаем ту же процедуру в обратном порядке применительно к специфическому минеральному агрегату – горной породе, о которой А.Ф. Белоусовым сказано: «Фактом является отсутствие в настоящее время достаточно мотивированного и конструктивного общего определения понятия горной породы... Классическая трактовка горной породы как природного минерального агрегата может считаться системно состоятельной. Но без дополнительной расшифровки она мало конструктивна» (с. 2-3).

И всё же в концептуальном анализе кристаллических горных пород шаг был сделан – в научный обиход введено понятие элементарной ячейки [147] как минимального объёма, пе-

[147] Чайка Л.А., Егоров Л.С., Ильинская Н.Б. и др. Взаимосвязь состава и свойств горных пород. Сборник анализов. Л.: НИИГА, 1967. 174 с.; Косыгин Ю.А. Понятие структуры в геологических исследованиях // Геология и геофизика. 1970. № 4. С. 76-86; Васильев В.И., Черепанов В.А. Изучение уровней организации вещества. Петрография, петрология, литология // Тр. ВСЕГЕИ. Т. 177. Л.: ВСЕГЕИ, 1971. С. 146-153; Драгунов В.И. Онтологические аспекты геологии // Тр. ВСЕГЕИ. Т. 177. Л.: ВСЕГЕИ, 1971. С. 85-101; Гордеев Р.А. Проблемы иерархии рудных объектов и вопросы прогнозирования // Методология геологических исследований. Владивосток: Ин-т тектоники и геофизики, 1976. С. 150-152; Гордеев Р.А., Забродин В.Ю., Кулындышев В.А. и др. Естественная иерархия природных систем // Методология геологических исследований. Владивосток: Ин-т тектоники и геофизики, 1976. С. 6-9; Плющев Е.В. Об элементарных ячейках горных пород // Симметрия структур геологических тел. Л.: ВСЕГЕИ, 1976. С. 123-125; Черкасов Р.Ф. Тело, структура, форма в геологии. Некоторые противоречия и проблемы // Методология геологических исследований. Владивосток: Ин-т тектоники и геофизики, 1976. С. 88-100; Забродин В.Ю.,

редающего её состав и структуру при весьма расплывчатом определении последней. Заимствование понятия «ячейка» из кристаллографии кажется неудачным. Так, В.И. Драгунов пишет: «Трансляция элементарной ячейки определённого вида позволяет выполнить весь объём тела... Петрографии необходим аналог кристаллографии» (с. 89). А в статье Р.А. Гордеева элементарная ячейка отождествлена с парагенезисом минералов – здесь попросту смешаны структурная и генетическая методологии исследования. Таким образом, корректно никем не определённое, дискуссионное понятие «элементарной ячейки» не позволило сформулировать последовательное представление о горной породе, но заострило проблему и помогло разложить сложные вопросы на более простые: о морфологии и границах элементарных ячеек, о принципах их организации из отдельных минеральных зёрен и т.д.

Попробуем построить горную породу $\mathfrak{R}$ из минеральных агрегатов, подходящих на роль её гипотетических элементарных ячеек – неделимых носителей вещественного состава и структуры, в рамках представлений о топологическом пространстве. Неделимость ячеек будем понимать в том смысле, что никакое собственное подмножество ячейки уже ячейкой не является. Могут ли элементарные ячейки образовать топологию $\mathfrak{I}$ или базу $\aleph$ горной породы $\mathfrak{R}$? Вопрос решается следующими **утверждениями**.

1. Элементарные ячейки не образуют топологию $\mathfrak{I}$ горной породы $\mathfrak{R}$. **Доказательство**. Возможны два варианта: (i) никакие две ячейки не пересекаются, (ii) существует пересечение ячеек, являющееся собственным подмножеством хотя бы одной из них. Но (i) противоречит замкнутости $\mathfrak{I}$ относитель-

---

Кириллова Г.Л., Кулындышев В.А. и др. Иерархия геологических тел. Терминологический справочник. Хабаровск: Хабаровское кн. изд-во, 1977. 679 с.; Делицин И.С. Структурообразование кварцевых пород. М.: Наука, 1985. 191 с.; Поваренных М.Ю. О пространственной регулярности («элементарной ячейке») горных пород // Биохим. карбонаты антропогенных озёр и источников. Пермь: Пермский гос. ун-т, 1989. С. 138-151.

но объединений своих элементов, а (ii) – её замкнутости относительно их пересечений. Утверждение доказано.

2. Элементарные ячейки могут образовать базу $\aleph$ горной породы $\mathfrak{R}$, если образуют её разбиение. **Доказательство**. От $\aleph$ не требуется замкнутости относительно пересечений элементов. Поэтому элементарности ячеек в $\aleph$ противоречит лишь условие (ii) из предыдущего утверждения. Поскольку элементы топологии $\mathfrak{I}$ в целом покрывают $\mathfrak{R}$, а каждый элемент из $\mathfrak{I}$ есть объединение некоторых элементов из $\aleph$, то и элементы базы $\aleph$ в целом покрывают $\mathfrak{R}$. При условии (i) $\aleph$ есть разбиение горной породы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{I}$ вкладывается в индуцированную им дискретную топологию $\{2^{\aleph}\}$. В случае (ii) достаточно рассмотреть две возможности. Если элементы $\mathfrak{I}$ пересекаются лишь по целым ячейкам, то существует сужение $\aleph_1$ базы $\aleph$, содержащее только непересекающиеся ячейки и образующее разбиение $\mathfrak{R}$. Тогда $\mathfrak{I}$ вкладывается в дискретную топологию $2^{\aleph 1}$. Если же некоторые элементы $\mathfrak{I}$ пересекаются по нецелым ячейкам, то такие пересечения должны входить в $\aleph$ и тогда ячейки базу не образуют. Утверждение доказано.

Итак, совокупность элементарных ячеек не может образовать топологию, но может служить базой горной породы – если только образует её разбиение. При этом любая возможная топология вкладывается в индуцированную такой базой дискретную топологию. И здесь уместно вернуться к началу этюда. Иерархическое конструирование всякого минерального агрегата согласно закону агрегации К.Ф. Науманна[148] согласуется со

[148] В заключение приведу цитату из ещё одного автора. «Мы можем рассматривать мысли наших пращуров о вещах в мире как необходимое порождение, самоизображение тогдашнего состояния земной природы… Довольно рано вдумчивый человек натолкнулся на трудность объяснения рождения форм из тех безобразных сил и морей. Он пытался развязать узел каким-нибудь способом соединения, превращая первоначала в твёрдые оформленные тельца, которые он, однако, считал мельчайшими сверх всякого понимания… Нынче некоторым представляется вовсе недостойным труда следить за бесконечными дроблениями природы, и это, кроме того, опасное предприятие, бесплодное и безвыходное.

структурой топологического пространства, если копирует его организацию из минеральных зёрен, то есть когда элементы каждого следующего уровня иерархии образуют его базу и разбиение. Горная порода может быть по-разному представлена как топологическое пространство. Но её представление в виде пространства с дискретной топологией фундаментально – все возможные минеральные субагрегаты, образующие её покрытие, уже содержатся в такой топологии. Несмотря на притягательность этого решения, вопрос о наиболее общих принципах организации минеральных агрегатов не закрыт. Минералогический мир ждёт новых решений. Он ждёт того, кто скажет, какую математическую идею заложила природа в устройство минерального агрегата, в частности, горной породы. А пока ... пока кажется полезным пристроить к делу наиболее общие математические концепции. Историкам науки ещё предстоит ответить на вопрос, почему оказалось проще построить теорию кристаллического пространства из невидимых атомов, чем теорию минеральных арегатов из видимых минеральных индивидов.

Так же, как никогда не найти мельчайшего зерна твёрдых тел, ни простейшего волокна, ибо всякая величина начинается и теряется в Бесконечном…» Это Новалис (Фридрих фон Гарденберг) [Ученики в Саисе: магические романы и философические фрагменты. СПб.: ООО Издательский дом «Леонардо», 2011. 352 с. (с. 14, 22)] – великий немецкий романтик. Кажется, немецкая минералогия не дала бы столь замечательной плеяды учёных, не опирайся она на солидную натурфилософскую платформу. Ныне этот альянс расстроен, главным образом по вине специальных наук, вооружающихся против природы современными физическими приборами на платформе ветхой методологии. Тому свидетельство – почти полное отсутствие научных конференций, объединяющих философов и представителей естественных наук.

ЭТЮД 8: МИНЕРАЛЬНЫЙ АГРЕГАТ – ПРОСТРАНСТВО ТОЛЕРАНТНОСТИ

Перечтём «закон агрегации минеральных индивидов». «…Индивиды минерального царства отличаются от таковых органической природы среди многих прочих свойств в особенности тем, что свободное и полное образование форм является для них редчайшим случаем, в то время как они подчиняются господствующему закону агрегации и потому обычно образуются в большом количестве друг около друга, друг на друге и один сквозь другого... Отдельные индивиды появляются только в более или менее угнетённых или искалеченных формах, контуры которых определяются совершенно случайными и незакономерными контактными поверхностями, которые большей частью не имеют никакого отношения к тем кристаллическим формам, над созданием которых природа все же, в сущности, трудилась в каждом индивиде... Ещё одно отличие полностью образованных индивидов одного и того же минерала от индивидов органического мира состоит в том, что их абсолютный размер не связан ни с каким определенным средним нормальным размером, а колеблется в очень широких границах...»

Итак, К.Ф. Науманн рассматривает минеральный агрегат, абстрагируясь от идеальных кристаллических форм, присущих свободно образованным минеральным индивидам, от их абсолютных и относительных размеров, поскольку ни эти формы, ни размеры не могут быть положены в основание наиболее общего представления. Лишь сам факт агрегации принципиально важен и выводится в ранг закона. Здесь требуется принцип эвристический, лежащий за пределами собственно минералогического и петрологического знания о минеральных агрегатах, в том числе о горных породах, но что-то существенное о них говорящий. И что же остается? Лишь факт агрегации большего или меньшего числа минеральных индивидов. Только из него требуется вывести математически точный принцип, систематизирующий минеральные агрегаты. И коль скоро речь идет о принципе, то рассмотрению подлежит все их мыслимое многообразие, выводимое из нескольких исходных посылок и заведомо натурными наблюдениями не исчерпываемое. Возможно ли это?

Внимательно вчитаемся в текст «закона агрегации» - и выяснится, что в нём кроется немалый список отношений, позволяющий подвергнуть минеральный агрегат содержательному анализу. Он оставляет нам три фундаментальных отношения между минеральными индивидами во всяком агрегате: (i) их (не) тождественность, (ii) их видовую (не) тождественность, (iii) их (не) контактирование в агрегате. Чтобы продвинуться в их рассмотрении, вспомним элементы алгебраической теории бинарных отношений [149].

Отношение ♣ называется: рефлексивным, если $\forall$ (для любого) x: x ♣ x; симметричным, если $\forall$ x, y: x ♣ y $\Rightarrow$ (следует) y ♣ x; транзитивным, если $\forall$ x, y, z: x ♣ y, y ♣ z $\Rightarrow$ x ♣ z; антирефлексивным, если $\forall$ x, y: x ♣ y $\Rightarrow$ x $\neq$ y; антисимметричным, если $\forall$ x, y: x ♣ y , y ♣ x $\Rightarrow$ x = y. Сочетаясь, эти элементарные отношения порождают отношения сложные: транзитивность + рефлексивность + симметричность = эквивалентность; транзитивность + антирефлексивность = строгий порядок; транзитивность + рефлексивность + антисимметричность = нестрогий порядок; транзитивность + рефлексивность = квазипорядок; рефлексивность + симметричность = толерантность. А теперь обратим внимание на неповторяемость выявленных выше отношений (i) - (iii) и их логическое содержание.

(i) В каждом минеральном агрегате имеет место нетождественность минеральных индивидов, так как в нём есть как минимум два индивида, *de facto* не тождественных друг другу. Более строго, тождественность индивидов здесь также имеет место, так как всякий индивид тождественен самому себе. Отношение тождественности рефлексивно, симметрично и тран-

---

[149] Кроме цитированной выше книги Ю.А. Шрейдера, рекомендую: Скорняков Л.А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1970. 148 с. Более популярное изложение: Дунаев В.В. Занимательная математика. Множества и отношения. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 336 с. Целый ряд примеров бинарных отношений среди геологических объектов рассмотрен в книге, опередившей своё время: Усманов Ф.А. Основы математического анализа геологических структур. Ташкент: Изд-во «ФАН», 1977. 205 с.

зитивно, то есть является **эквивалентностью**, ведущей к классификации (разбиению) минерального агрегата на индивиды. Отношение нетождественности антирефлексивно, симметрично и не транзитивно.

(ii) В минеральном агрегате может иметь место видовая тождественность минеральных индивидов (мономинеральный агрегат), их видовая нетождественность (сросток нескольких индивидов, все – различных видов) или оба отношения вместе (полиминеральный агрегат с несколькими индивидами хотя бы одного из видов). Более строго, отношение видового тождества есть и во втором примере, так как всякий индивид тождественен себе по минеральному виду. Отношение видовой тождественности рефлексивно, симметрично, транзитивно и является **эквивалентностью**, ведущей к классификации (разбиению) минерального агрегата на мономинеральные ассоциации индивидов. Отношение видовой нетождественности антирефлексивно, симметрично и не транзитивно.

(iii) В каждом минеральном агрегате имеет место отношение контактирования, так как в нём есть как минимум два контактирующих друг с другом минеральных индивида. Неконтактирование в агрегате может и отсутствовать – как в элементарных сростках минеральных индивидов: двух – по общей поверхности, трёх – по ребру, четырёх – в общей точке. Отношение контактирования определено лишь для различных индивидов, то есть антирефлексивно. Кроме того, оно симметрично и не транзитивно. Отношение неконтактирования рефлексивно, симметрично и не транзитивно, то есть является **толерантностью**, ведущей к определению минерального агрегата как пространства толерантности.

Чего стоит достигнутый результат? Если мы согласимся с тем, что изучение природы состоит в поиске структур, подразумевающих в объекте тот или иной из перечисленных выше порядков, то ответ выглядит следующим образом. Пространство толерантности – не структура. Формально этому мешает наличие симметричности и отсутствие транзитивности у порождающего отношения. С другой стороны, именно благодаря отказу от транзитивности толерантность есть логическое расширение эквивалентности, а пространства толерантности – обобщения классификаций, лежащих в основаниях всех естественных науках как первый шаг, требующий шага второго.

Можно ли дать неформальную интерпретацию пространству толерантности применительно к минеральному агрегату? Сделаем такую попытку, обратившись к работе А.Б. Вистелиуса[150]. «Рассмотрим теперь кристаллизацию участка гомогенного расплава, близкого по составу к эвтектике и удалённого от контактов с вмещающей полостью. При этом пусть кристаллизация идёт так, что выделяющиеся кристаллы не претерпевают взаимного смещения. Поскольку кристаллизация носит эвтектический характер, естественно допустить, что кристаллы всех состояний растут примерно одновременно. В этом случае соотношение «кристалл состава I и его сосед – кристалл состава J» таково, что при росте I происходит в окрестности I обеднение расплава веществом, формирующим I… Вследствие этого рядом с I скорее всего появится зерно минерала не I… В таких условиях естественно предположить возникновение простой марковской цепи, обладающей обратимостью и стационарным начальным распределением» (с. 241). Итак, в механизме кристаллизации расплава на фундаментальном уровне заложен механизм «отталкивания» минеральных индивидов одного вида. То, что в реальности породообразующие минералы одного вида контактируют друг с другом, обусловлено необходимостью связного заполнения объёма, в случае магматического расплава физически реализующейся через механизм вязкости.

Любопытно, что минеральный агрегат проявляет себя как пространство толерантности именно через отношение неконтактирования, но любых – не только одного вида – минеральных индивидов. Ситуация выглядит так, как будто в кристаллизации расплава природа реализует один из вариантов гораздо более общей логической возможности, проглядывающей в каждом минеральном агрегате сквозь отношения его элементов. И это – фундаментально…

---

[150] Вистелиус А.Б. Основы математической геологии. Л.: Наука, 1980. 389 с.

ЭТЮД 9: ПРОСТРЕМЯ МИНЕРАЛЬНОГО АГРЕГАТА

«Пространство переходит во время, как тело в душу… Время есть внутреннее пространство. Пространство – внешнее время (синтез последнего). Всякое тело имеет своё время, всякое время – своё тело… Пространство и время возникают разом и таким образом, как субъект и объект суть едино. Пространство есть устойчивое время, время текучее, изменчивое пространство; пространство есть база всего устойчивого, время – база всего изменчивого. Пространство – схема, время – понятие, действие этой схемы». Это Новалис [151]. «Прекрасные, нагретые на солнце камни, похожие на спящие тела, как я завидую вашей незыблемой, неподвижной, тяжёлой свободе. О, свобода иметь форму и не знать о ней, свобода падать и не страдать от этого, свобода существовать, презирая время и течение его. Медленное движение глубоко спрятанного электрического напряжения, смутное ощущение чередования геологических периодов, а также солнечных и даже суточных смен…». [152] И от российского писателя, наблюдавшего «нагретые на солнце камни» парижских мостовых в начале 1930-х, не ускользнуло «смутное ощущение» в них текучего времени и «чередования геологических периодов». Всего три фразы – и богатейшая проблематика: форма (топология пространства) геологического тела, относительная независимость его пространства и времени, диалектика непрерывного и дискретного (квантованного) в фундаментальных свойствах времени. Впрочем, последние термины – из другой, научной статьи, пробуждающей много мыслей по поводу введенной авторами категории «простремя». [153]

---

[151] Новалис (Фридрих фон Гарденберг). Ученики в Саисе: магические романы и философические фрагменты. СПб.: Издательский дом «Леонардо», 2011. 352 с. (с. 78, 84, 96).

[152] Поплавский Б.Ю. Метафизический граммофон. СПб.: ООО «Леонардо», 2010. 192 с. (с. 158).

[153] Жабин А.Г., Юшкин Н.П., Маликов А.В. Простремя и его квантование в процессах природного минералообразования // Зап. ВМО. 1994. № 4. С. 104-110.

Натуралист представляет себе природный объект большей частью погруженным во внешний и индифферентный ему пространственно-временной континуум, услужливо уступающий требуемое место, но при этом настолько подчиняющий собственной сути, как если бы пронизывал его, просачивался насквозь, не ощущая границ раздела. Натурфилософ, определяющий объект как само пространство, топология которого следует из содержания «рядоположности элементов», идёт дальше уже потому, что охватывает этим мироустройством и предыдущую возможность как отрицающую его крайность. «Мы не можем обнаружить никакого пространства, которое было бы самостоятельным пространством; оно есть всегда наполненное пространство и нигде оно не отлично от своего наполнения... Предметы природы находятся в пространстве, и оно остается основой, потому что природа лежит в оковах внешности».[154] Удивительным образом новейшая физическая парадигма, рассматривающая элементарные частицы и взаимодействия как возбуждения пространственно-временного континуума, предоставляет аргументы обеим точкам зрения. Но рассмотрение пространства лишь как пустоты и возможности присутствия в нём[155] для естествознания, скорее всего, не конструктивно, так как останавливает диалог о сущностях природных (геологических, биологических) пространств на пороге философии.

«Пространство горной породы есть специфическое состояние пространства земной реальности». Эта максима акад. В.И. Вернадского крепко связала философскую проблематику с естественнонаучной в концептуальном поле геологических наук. Полстолетия размышлений о естественных природных телах как специфических пространствах, отделённых друг от

---

[154] Гегель. Сочинения. Т. II. Философия природы. М.-Л.: Соцэкгиз, 1934. 683 с. (с. 44).

[155] Хайдеггер М. Искусство и пространство // Самосознание европейской культуры XX века. М.: Изд-во политической литературы, 1991. С. 95-102 (с. 96).

друга интуитивно распознаваемой, но трудно выразимой целостностью, подготовили очередной кризис. Его симптомами в представлениях о пространствах минеральных индивидов агрегатов являются идеи С.В. Руднева и Р.В. Галиулина (см. Введение). Общее в подходах при всём их различии – вовлечение в категорию пространства специфики его материального носителя.

В то же время, «пространство представляет собою следующее противоречие: оно обладает отрицанием, но обладает им так, что это отрицание распадается на равнодушные друг к другу существования. Так как, следовательно, пространство представляет собою лишь это внутреннее противоречие, то снятие им самим его моментов является его истиной... Истиной пространства является время; так пространство становится временем» (Гегель, с. 48-49). Тема собственного времени геологического тела, определяемого материальным носителем, разработана очень слабо. А.Г. Жабин с соавторами отмечают, что «из двух аспектов времени – длительности (метрика) и последовательности (топология) – в геологии фундаментален в смысле реальной диагностики и информационной ёмкости второй» (с. 106). Мы определяем время минералогического объекта как его деятельное (не) бытие, проявляющее себя лишь в момент перестройки топологии. Понятно, что геохронология, встраивающая объект в общую картину мира вне их осязаемых отношений, в контексте нашего рассуждения мало интересна. Время объекта и время мира совпадают только тогда, когда объект погружён в топологию мира.

Как всякое движение, изменение объекта если и схвачено нашим сознанием, то лишь как последовательность актов состояния, в общем непонятным образом соединённых в непрерывное дление. Уже поэтому, если движение что-то и предъявляет взору кроме абстрактного себя, то потому только, что это что-то присутствовало в каждой мгновенной реплике объекта как возможность его интегрирования вдоль траектории существования. Но ведь, по Гегелю, «смысл и дух процесса составляет внутренняя связь, необходимое соотношение образований, к которому временная смена ничего не прибавляет. Требуется познать всеобщий закон этой последовательности..., для чего нет надобности в форме истории». То есть, всякий последующий акт узнавания ничего не добавляет к предыдущему из последовательности различенных образований как таковой. Как это возможно? Или последующее состояние ничем не отличается от предыдущего, или, наоборот, по сути ничем на него не походит и потому с ним не сравнимо. До перестройки топологии никакая реплика объекта ничего не добавляет к иной, поскольку ей тождественна и ещё не случилось события, включившего бы его внутреннее время. После перестройки новое состояние ничего не сообщает нам о прежнем, так как ничем с ним не связано и его не помнит, начав собой новое время (или, что равно в смысле дополнительности, безвременье) своего деятельного (не) бытия.

Минеральный агрегат может быть различным образом представлен как топологическое (см. выше), измеримое, метрическое и частично упорядоченное (см. далее) пространство. В каждом случае в определении исходных категорий используются лишь естественные, имеющиеся в любом минеральном агрегате элементы и отношения. И если его время определено перестройками топологии, то оно должно быть окрашено спецификой элементов, отношений, мер, метрик... В этом смысле оно относительно. Дальнейшая разработка этой темы кажется важной. Как обычно бывает в философии, здесь ничего нельзя доказать, хотя показать кое-что можно. Под «философией минералогии» мы понимаем философию минералога, вполне осознающего принципы миропорядка в предметах своей науки, философию, всякий раз интересную не претензией на предельное понимание вещей, но очарованием личности, состоявшейся в акте самостоятельного мышления.

Моему глубокоуважаемому учителю
профессору Ленинградского горного института
Владимиру Витальевичу Доливо-Добровольскому

Профессор В.В. Доливо-Добровольский
1927-2009

ПЕТРОГРАФИЯ: ПРОСТРАНСТВО ОЧЕВИДНОЕ И … ВЕРОЯТНОСТНОЕ

ЭТЮД 10: ГОРНАЯ ПОРОДА – ПРОСТРАНСТВО ИЗМЕРИМОЕ, МЕТРИЧЕСКОЕ И КОРРЕЛИРОВАННОЕ

«Горные породы – минеральные агрегаты, обладающие более или менее постоянным составом и структурой. Составные части литосферы… Шнейдерхён определяет горные породы как минеральные агрегаты, занимающие значительные участки земной коры и в связи с массовым распространением не относящиеся к минеральным месторождениям. Броньяр называет горными породами все большие каменные, солевые, горючие и металлические массы, входящие в структуру Земли»[156]. Определение, данное позднее[157], гораздо хуже, поскольку перечисление атрибутов горной породы подменяет перечислением известных разновидностей горных пород. Как бы то ни было, во всех определениях явно или неявно заложена интуиция горной породы как «большого» минерального агрегата, для которого достигается статистическая устойчивость состава и строения «от места к месту». Нужное слово произнесено – статистика. Но прежде чем применить к описанию горной породы статистические методы, определим её как измеримое и метрическое пространство.

Введём **определение**[158]: Множество $\mathfrak{R}$ элементов любой природы называется метрическим пространством, если для его любых двух элементов i и j определено вещественное число h_{ij}, называемое метрикой (расстоянием) и обладающее свойствами: (i) $h_{ij} \geq 0$, причём $h_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$;

---

[156] Петрографический словарь Ф.Ю. Левинсон-Лессинга и Э.А. Струве / Ред. Г.Д. Афанасьев и др. М.: Госгеолтехиздат, 1963. 448 с. (с. 86).

[157] Петрографический словарь / Ред. В.П. Петров и др. М.: Недра, 1981. 496 с.

[158] Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1965. 304 с.

(ii) $h_{ij} = h_{ji}$ для любых i и j; (iii) для любых i, j, k выполнено $h_{ij} + h_{jk} \geq h_{ik}$.

Пусть i и j – два минеральных зерна в горной породе $\mathfrak{R}$. Обозначим dist (i,j) количество бинарных межзерновых границ, пересекаемых на некотором непрерывном пути из i в j. Тогда имеет место утверждение: величина h_{ij} = min dist (i,j) – метрика в $\mathfrak{R}$. Доказательство. (i) следует из смысла h_{ij} , принимающего лишь целые неотрицательные значения. (ii) Пусть $h_{ij} = p$. Так как из j в i можно пройти тем же путем, что из i в j, то $h_{ji} \leq p$. Но если $h_{ji} < p$, то есть существует более короткий путь из j в i, то им также можно пройти из i в j. Тогда $h_{ij} < p$. Это противоречит исходному допущению и доказывает (ii). (iii) почти очевидно. Пусть $h_{ij} = p$, $h_{jk} = q$. Тогда существует путь из i в k через j и числом пересекаемых межзерновых границ dist (i,k) = p + q. Отсюда сразу следует (iii):

$$h_{ik} = \min \text{dist}\,(i,k) \leq \text{dist}\,(i,k) = p + q = h_{ij} + h_{jk}\,.$$

Тем самым всякая горная порода представлена как метрическое пространство с метрикой h_{ij}, заданной для любых пар зёрен. По сути, именно с ней выполнен целый ряд интересных исследований горных пород[159].

Как и в случае с топологиями, для одной горной породы могут быть заданы различные метрики. И тогда это будут различные метрические пространства. Так, метрикой является величина ρ_{ij}:

---

[159] Rogers J.J.W., Bogy D.B. A study of grain contacts in granitic rocks // Science. 1958. V 127. N 3296. P 470-471; Giger H., Erkan Y., Amstutz G.C. Topologische Eigenschaften von Mineralaggregaten // Separatdrück aus Verh. Schweiz. Naturforsch. Ges. 1967. S 125-129; Amstutz G.C., Giger H. Metric and topological properties of rock and ore textures // Proc. Int. Symp. on Experimental and natural rock deformation. Darmstadt, Germany, Febr. 17-18, 1969. Berlin: Springer-Verlag, 1970. P 496-516; Erkan Y., Amstutz G.C. Quantitative Untersuchung der Verwachsungverhältnisse in Normal-Diabas W-1 und in einem Norit // Neues Jahrb. Mineral. Monatsh. 1975. N 9. S 419-425; см. также цитированные выше работы А.Б. Вистелиуса с соавторами.

$$\rho_{ij} = \begin{bmatrix} 1, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{bmatrix}.$$

Аксиомы (i) - (iii) проверяются здесь элементарно перебором вариантов. Легко видеть, что ρ_{ij} есть загрубленная метрика h_{ij}:

$$\rho_{ij} = \begin{bmatrix} 1, & h_{ij} \geq 1 \\ 0, & h_{ij} = 0 \end{bmatrix}$$

и потому для практического применения она мало интересна. Гораздо важнее её расширение на любые минеральные субагрегаты и даже несвязные ассоциации A и B минеральных зёрен в пределах горной породы. Таковым является минимаксная метрика Хаусдорфа $\sigma(A,B) = \max \{\{\zeta(a,B)|a \in A\}, \{\zeta(b,A)|b \in B\}\}$, где $\zeta(a,B) = \min \{h(a,b)|b \in B\}$, $\zeta(b,A) = \min \{h(b,a)|a \in A\}$. Аксиомы (i) и (ii) проверяются для $\sigma(A,B)$ просто. Проверим (iii)[160]. Для этого рассмотрим такие минеральные зерна a и c (рис. 10.1), что $h(a,c) = \sigma(A,C)$. Без потери общности примем, что $h(a,c) = \zeta(a,C)$. Далее, возьмем такие $b \in B$ и $c' \in C$, что $h(a,b) = \zeta(a,B)$ и $h(b,c') = \zeta(b,C)$. Тогда $h(a,b) \leq \sigma(A,B)$ и $h(b,c') \leq \sigma(B,C)$. По определению $\zeta(a,C)$ имеем $h(a,c) \leq h(a,c')$. По свойству $h(a,c')$ имеем $h(a,c') \leq h(a,b)+h(b,c')$. Отсюда следует: $\sigma(A,C) = h(a,c) \leq h(a,c') \leq h(a,b)+h(b,c') \leq \sigma(A,B)+\sigma(B,C)$.

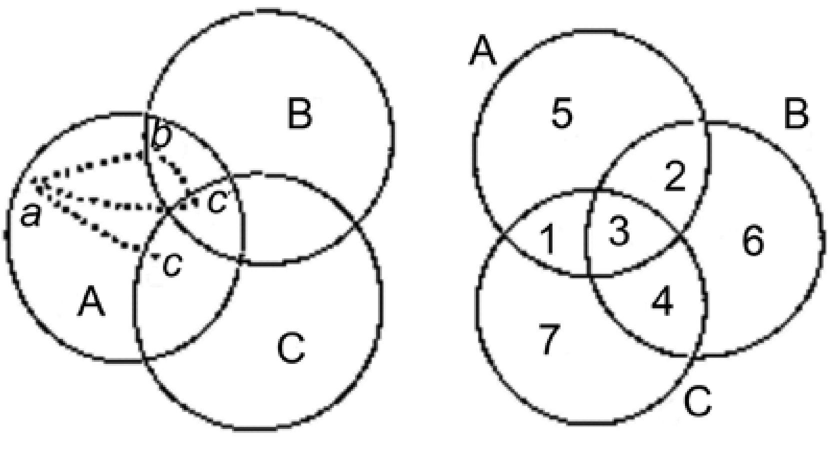


Рис. 10.1. Проверка аксиомы (iii) для метрик σ(A,B) (слева) и ζ(A,B) (справа).

---

[160] Voytekhovsky Y.L., Fishman M.A. Rock kriging with the microscope // Math. Geol. 2003. V 35. N 4. P 451-458.

Следующее **определение** вводит ещё одно понятие, важное для задания различных метрик: Мерой μ в множестве $\mathfrak{R}$ называется вещественная, неотрицательная, монотонная, аддитивная и ограниченная функция с областью определения в некоторой алгебре $\mathfrak{I}$ подмножеств множества $\mathfrak{R}$. Множество с мерой называется измеримым пространством.

В определении для алгебры использовано обозначение $\mathfrak{I}$, принятое выше для топологии, поскольку дискретная топология для $\mathfrak{R}$ заведомо является алгеброй. Всякая другая топология может быть известным образом доопределена до алгебры. Простейшие меры для минеральных агрегатов: число образующих их минеральных зёрен, занимаемый ими объём в пространстве горной породы или площадь – в плоскости петрографического шлифа. С использованием меры μ можно задать следующие метрики: $\xi(A,B) = \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B)$ и $\rho(A,B) = 1 - \mu(A \cap B) / \mu(A \cup B)$. Проверка аксиом (i) и (ii) выполняется для них элементарно. Проверим аксиому (iii).

Для $\xi(A,B)$ обозначим попарно непересекающиеся минеральные агрегаты (рис. 10.1): $(A \cap C)\backslash B = 1$, $(A \cap B)\backslash C = 2$, $A \cap B \cap C = 3$, $(B \cap C)\backslash A = 4$, $A\backslash(B \cup C) = 5$, $B\backslash(A \cup C) = 6$, $C\backslash(A \cup B) = 7$. Нужно показать, что $\xi(A,B)+\xi(B,C) \geq \xi(A,C)$, то есть $\mu(A \cup B) - \mu(A \cap B) + \mu(B \cup C) - \mu(B \cap C) \geq \mu(A \cap C) - \mu(A \cap C)$ или $\mu 1 + \mu 2 + \mu 3 + \mu 4 + \mu 5 + \mu 6 - \mu 2 - \mu 3 + \mu 1 + \mu 2 + \mu 3 + \mu 4 + \mu 6 + \mu 7 - \mu 3 - \mu 4 \geq \mu 1 + \mu 2 + \mu 3 + \mu 4 + \mu 5 + \mu 7 - \mu 1 - \mu 3$, или $\mu 1 + \mu 6 \geq 0$, что следует из неотрицательности мер $\mu 1$ и $\mu 6$ и доказывает (iii) для $\xi(A,B)$.

Для $\rho(A,B)$ следует доказать, что $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$, то есть $1 - \mu(A \cap B) / \mu(A \cup B) + 1 - \mu(B \cap C) / \mu(B \cup C) \geq 1 - \mu(A \cap C) / \mu(A \cup C)$ или $\sum = \mu(A \cap B) / \mu(A \cup B) + \mu(B \cap C) / \mu(B \cup C) - \mu(A \cap C) / \mu(A \cup C) \leq 1$. Но $\sum$ мажорируется $\sum^* = (\mu 2+\mu 3) / (\mu A+\mu 4) + (\mu 3+\mu 4) / (\mu C+\mu 2) - \mu 3 / (\mu A+\mu C-\mu 3)$. Покажем, что $\sum^* \leq 1$. Для этого рассмотрим $F(\mu 2) = (\mu 2+\mu 3) / (\mu A+\mu 4) + (\mu 3+\mu 4) / (\mu C+\mu 2)$ на отрезке $[0, \mu A-\mu 3]$. $dF/d\mu 2 = 1 / (\mu A+\mu 4) - (\mu 3+\mu 4) / (\mu C+\mu 2)^2 = 0$ в точке $\mu 2^* = [(\mu A+\mu 4)(\mu 3+\mu 4)]^{1/2} - \mu C$. При этом $d^2F/d(\mu 2)^2|_{\mu 2*} = 2(\mu 3+\mu 4) / (\mu C+\mu 2^*)^3 = 2(\mu A+\mu 4)^{-3/2} (\mu 3+ \mu 4)^{-1/2} >$

0. Итак, $F(\mu 2)$ достигает максимума на одном из концов отрезка. Аналогично, $F(\mu 4) = (\mu 2+\mu 3) / (\mu A+\mu 4) + (\mu 3+\mu 4) / (\mu C+\mu 2)$ достигает максимума на одном из концов отрезка $[0, \mu C-\mu 3]$.

Совместное рассмотрение $F(\mu 2)$ и $F(\mu 4)$ даёт четыре варианта. В трёх случаях сразу получаем: $\sum^* \le F(0,\mu C-\mu 3) = F(\mu A-\mu 3,0) = F(\mu A-\mu 3, \mu C-\mu 3) = 1$. В четвёртом случае $\sum^* \le F(0, 0) = \mu 3/\mu A + \mu 3/\mu C - \mu 3/(\mu A+\mu C-\mu 3) = F(\mu 3)$. Рассмотрим $F(\mu 3)$ на отрезке $[0, \min(\mu A,\mu C)]$. Производная $dF/d\mu 3 = 1/\mu A + 1/\mu C - (\mu A+\mu C)/(\mu A+\mu C-\mu 3)^2 = 0$ в точке $\mu 3^* = \mu A+\mu C-(\mu A\mu C)^{1/2}$. Так как $\min(\mu A,\mu C) \le (\mu A\mu C)^{1/2} \le \max(\mu A,\mu C)$, то $\mu 3^* \ge \min(\mu A,\mu C)$ находится, по меньшей мере, на правом конце отрезка. В этой точке $d^2F/d(\mu 3)^2 \mid_{\mu 3^*} = -2(\mu A+\mu C) / (\mu A+\mu C-\mu 3^*)^3 = -2(\mu A+\mu C) / (\mu A\mu C)^{3/2} < 0$, то есть $F(\mu 3)$ достигает максимума на правом конце отрезка. Без потери общности положим $\min (\mu A,\mu C) = \mu A$. Отсюда следует $\sum^* \le F(\mu A) = 1$ и (iii) для $\rho(A,B)$ доказана.

На примере простейшей из рассмотренных метрик (h_{ij}) покажем, как можно развить представление о геометрии пространства горной породы. Введём **определение**: Минеральный агрегат C называется строго выпуклым в горной породе $\mathfrak{R}$, если для любых двух минеральных зёрен $i, j \in C$ все неспрямляемые (длиной h_{ij}) пути из i в j лежат в C, и выпуклым в $\mathfrak{R}$, если хотя бы один неспрямляемый путь из i в j лежит в C. Понятия неспрямляемого пути и строго выпуклого агрегата аналогичны геометрическим понятиям отрезка и выпуклого множества. Строго выпуклый в $\mathfrak{R}$ агрегат является выпуклым в $\mathfrak{R}$. Рассмотрим простейшие **утверждения**.

(1) Агрегаты вида $C(1) = \{i, j: h_{ij} \le 1\} \in \mathfrak{R}$ строго выпуклы в $\mathfrak{R}$, агрегаты вида $C_i(1) = \{j: h_{ij} \le 1\} \in \mathfrak{R}$ выпуклы в $\mathfrak{R}$. **Доказательство**. Пусть минеральные зёрна $i, j \in C(1)$. Рассмотрим в $\mathfrak{R}$ путь из i в j через зерно $k \notin C(1)$. Его длина $h_{ikj} \ge 2$. Но $h_{ij} = 1$. Следовательно, в $\mathfrak{R}$ нет неспрямляемых путей из i в j, лежащих вне C(1). Поэтому агрегат C(1) строго выпуклый в $\mathfrak{R}$. Пусть в $C_i(1)$ существуют такие зёрна k и l, что $h_{kl} > 1$. (Иначе $C_i(1) = C(1)$ и мы находимся в рамках первой части утверждения.) Тогда $h_{kl} = 2$, ведь всегда существует путь из k в l через i, ле-

жащий в $C_i(1)$. Следовательно, агрегат $C_i(1)$ выпуклый в $\mathfrak{R}$. Он не строго выпуклый, если в $\mathfrak{R}$ существует такое $m \notin C_i(1)$, что $h_{km} = 1$ и $h_{ml} = 1$.

Нетрудно видеть, что к агрегатам вида C(1) относятся сростки двух зёрен по общей поверхности, трёх – по общему ребру и четырёх – в общей точке. Это нормальные соотношения между минеральными зёрнами в любой горной породе. В определённом далее смысле агрегатами C(1) многообразие строго выпуклых агрегатов исчерпывается. Действительно, пусть в некотором строго выпуклом агрегате C содержатся такие зерна i и j, что $h_{ij} = 2$. Легко представить ситуацию, когда в $\mathfrak{R}$ найдется такое зерно $k \notin C$, что $h_{ik} = h_{jk} = 1$. Но тогда в $\mathfrak{R}$ существует неспрямляемый путь из i в j через k, лежащий вне C. Агрегат C – не строго выпуклый в $\mathfrak{R}$. Приведенное рассуждение не противоречит тому, что в некоторой горной породе могут быть установлены строго выпуклые агрегаты более сложного строения, чем C(1).

(2) Пересечение двух строго выпуклых в $\mathfrak{R}$ агрегатов строго выпукло в $\mathfrak{R}$. **Доказательство**. Пусть C_1 и C_2 - строго выпуклые в $\mathfrak{R}$ агрегаты и есть два таких зерна i и j, что $i, j \in C_1 \cap C_2$. Тогда $i, j \in C_1$ и C_2, а все неспрямляемые пути из i в j лежат как в C_1, так и в C_2. Поэтому они лежат и в $C_1 \cap C_2$. Следовательно, агрегат $C_1 \cap C_2$ строго выпуклый в $\mathfrak{R}$.

(3) Пересечение выпуклого и строго выпуклого в $\mathfrak{R}$ агрегатов выпукло в $\mathfrak{R}$. **Доказательство**. Пусть C_1 – выпуклый, C_2 – строго выпуклый в $\mathfrak{R}$ агрегаты и существуют два такие зерна i и j, что $i, j \in C_1 \cap C_2$. Тогда $i, j \in C_1$ и C_2. Хотя бы один неспрямляемый путь из i в j лежит в C_1. Он же лежит в C_2, так как в C_2 лежат все неспрямляемые пути из i в j. Следовательно, он лежит в $C_1 \cap C_2$. Поэтому агрегат $C_1 \cap C_2$ выпуклый в $\mathfrak{R}$. Он не строго выпуклый в $\mathfrak{R}$, если не все неспрямляемые пути из i в j лежат в C_1.

Ещё более ослабляя условия утверждений, заметим, что пересечение двух выпуклых в $\mathfrak{R}$ агрегатов не обязательно выпукло в $\mathfrak{R}$. Действительно, пусть C_1 и C_2 – выпуклые в $\mathfrak{R}$ агрегаты. Если в $\mathfrak{R}$ существуют такие i и j, что $i, j \in C_1 \cap C_2$, то $i, j \in C_1$ и C_2. Следовательно, в C_1 и C_2 существует хотя бы по одному неспрямляемому пути из i в j. Но путь, лежащий в C_1, может не лежать в C_2, и наоборот. При этом условии все неспрямляемые пути из i в j лежат в $\mathfrak{R}$ за пределами субагрегата $C_1 \cap C_2$. Следовательно, он не является выпуклым в $\mathfrak{R}$.

Здесь можно снова вернуться к рассмотрению топологий горной породы и возможности её построения из элементарных ячеек. Требование замкнутости топологии относительно теоретико-множественного пересечения её элементов вынуждает рассматривать в качестве претендентов на эту роль лишь строго выпуклые агрегаты зёрен – иначе пересечение двух элементов не обязательно принадлежит к топологии. Но требование строгой выпуклости в общем случае выполняется лишь для сростков небольшого числа зерен. И они не годятся на роль элементарных ячеек для полиминеральных горных пород. Так, пытаясь одновременно удовлетворить аксиоматике топологического пространства и требованию представительности элементарных ячеек по минеральному составу, мы снова приходим к представлению о горной породе как пространстве с дискретной топологией, в которой гипотетические элементарные ячейки находят своё место, но играют лишь вспомогательную роль.

Итак, кристаллическая горная порода определена как метрическое пространство и это обстоятельство можно использовать для дальнейшего развития теории. Как говорилось выше, растущий минеральный индивид забирает из среды необходимые компоненты, понижая вероятность образования зародышей своего вида в непосредственной близости. Поэтому следует ожидать, что в горной породе зёрна различных видов на малых расстояниях коррелированы. В подоплеке предлагаемого далее представления также лежит интуиция пространственной коррелируемости зерен в горной породе. Но оно в равной мере распространяется и на случаи, когда коррелируемость отсутствует, как это было установлено для пироксен-скаполиттитанитового гранулита из Квебека[161]. Иначе говоря, излагаемый подход свободен от генетических допущений. Наоборот, результат исследования породы по предлагаемой методике даёт её объективную характеристику, которая может быть осмыслена с точки зрения условий и механизмов образования.

Нашим инструментом будет теория ковариаций пространственно распределённых случайных функций[162]. Некоторая сложность её применения к описанию горных пород состоит в том, что приходится иметь дело не с численно определённой функцией, а с феноменом качественного порядка – наличием или отсутствием данного минерального вида в данном зерне породы. Для кодирования зёрен различных видов мы используем индикаторы. Если случайная функция M(x) пространственной переменной x принимает в некоторой области лишь конечное число значений $m_1, m_2, ..., m_n$, то она может быть записана в виде суммы:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, I[M(x)=m_i] \quad , \tag{1}$$

где $I[M(x)=m_i]$ – индикаторы, определяемые следующим образом:

$$I[M(x)=m_i] = \begin{cases} 1, & M(x) = m_i \\ 0, & M(x) \neq m_i \end{cases} . \tag{2}$$

Они позволяют закодировать дискретную функцию в терминах её значений сразу во всех точках, реализуя между ними обратную связь.

Индикатор есть случайная функция координаты x. Используя (2), найдём его математическое ожидание E_i:

$$E_i = E\{I[M(x)=m_i]\} = 1 \times P\{I[M(x)=m_i]=1\} + 0 \times P\{I[M(x)=m_i]=0\}$$
$$= P\{I[M(x)=m_i]=1\} = P[M(x)=m_i] \; . \tag{3}$$

[161] Kretz R. On the spatial distribution of crystals in rock // Lithos. 1969. V 2. N 1. P 39-65.

[162] Rivoirard J. Introduction to disjunctive kriging and non-linear geostatistics. Oxford: Clarendon Press, 1994. 181 p.

Здесь и далее P – вероятность события, описанного в скобках. Из (2) видно, что квадрат индикатора совпадает с самим индикатором. Поэтому его дисперсия V_i равна:

$$V_i = V\{I[M(x)=m_i]\} = E\{I^2[M(x)=m_i]\}- E^2\{I[M(x)=m_i]\} =$$
$$= E\{I[M(x)=m_i]\} \times \{1-E\{I[M(x)=m_i]\}$$
$$= P[M(x)=m_i] \times P[M(x)\neq m_i]. \qquad (4)$$

Используя (2) и (3), найдем ковариацию $C_{ii}(h)$ значений индикатора в точках, удалённых на расстояние h:

$$C_{ii}(h) = C\{I[M(x)=m_i], I[M(x+h)=m_i]\} = E\{I[M(x)=m_i] \times$$
$$I[M(x+h)=m_i]\} - E\{I[M(x)=m_i]\} \times E\{I[M(x+h)=m_i]\}.$$

Но произведение индикаторов есть индикатор совместного события, а координата x+h в совокупности пробегает все допустимые значения, как и координата x. Поэтому:

$$C_{ii}(h) = E\{I[M(x)=m_i, M(x+h)=m_i]\} - E^2\{I[M(x)=m_i]\} =$$
$$= P[M(x)=m_i, M(x+h)=m_i] - P^2[M(x)=m_i]. \qquad (5)$$

При h=0 из (5) следует (4) – дисперсия индикатора есть его ковариация в нуле. Найдем ковариацию $C_{ij}(h)$ двух различных индикаторов в точках, удалённых на h:

$$C_{ij}(h) = C\{I[M(x)=m_i], I[M(x+h)=m_j]\} =$$
$$= E\{I[M(x)=m_i] \times I[M(x+h)=m_j]\} - E\{I[M(x)=m_i]\} \times$$
$$E\{I[M(x+h)=m_j]\} =$$
$$= P[M(x)=m_i, M(x+h)=m_j] - P[M(x)=m_i] \times P[M(x)=m_j]. \qquad (6)$$

По сути, в (6) содержится вся теория, необходимая для дальнейших приложений. При j=i из (6) следует (5), а при j=i, h=0 - (4).

Адаптируем теорию к анализу горных пород. Под m_i будем понимать минеральные виды. Расстоянием между зёрнами будет метрика h_{ij}. Тогда (1) означает формальное описание её организации. Под $P[M(x)=m_i]$ в (3) - (6) будем понимать долю минеральных зёрен вида m_i в общем числе зёрен. Тогда из (5) и (6) для $h_{ij}=1$ следует:

$$P[M(x)=m_i, M(x+1)=m_i] = C_{ii}(1) + P^2[M(x)=m_i],$$
$$P[M(x)=m_i, M(x+1)=m_j] = C_{ij}(1) + P[M(x)=m_i] \times P[M(x)=m_j]. \quad (7)$$

В соотношениях (7) слева стоят вероятности p_{ii} и p_{ij} межзерновых контактов. Для расчёта радиуса корреляции минеральных зёрен различных видов в пространстве горной породы нужен критерий коррелируемости. Нетрудно видеть, что если h_{ij} превышает радиус корреляции, то события $M(x)=m_i$ и $M(x+h)=m_j$ независимы для любых i, j. Тогда вероятность совместного события равна:

$$P[M(x)=m_i, M(x+h)=m_j] = P[M(x)=m_i] \times P[M(x)=m_j]$$

- и из (6) следует:

$$C_{ij}(h) = C_{ji}(h) = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) и выражает искомый критерий.

Для анализа горных пород можно предложить дополнительный критерий, основанный на «несимметричных» ковариациях. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть h_{ij} как «вектор» с началом в m_i и концом в m_j. Тогда для h_{ij}, превышающих радиус корреляции, имеет место:

$$P[M(x)=m_i, M(x+h)=m_j] = P[M(x+h)=m_j]$$

- и из (6) следует:

$$C_{ij}(h) = P[M(x+h)=m_j] - P[M(x)=m_i] \times P[M(x+h)=m_j] =$$
$$= P[M(x)\neq m_i] \times P[M(x+h)=m_j] = P[M(x)\neq m_i] \times P[M(x)=m_j] \quad (9)$$

Равенство (9) дает искомый критерий для случая, когда рассматривается не взаимное, а направленное влияние m_i на m_j. Нетрудно видеть, что:

$$C_{ji}(h) = P[M(x)=m_i] \times P[M(x)\neq m_j] \neq C_{ij}(h).$$

Из (9) легко получить совместный критерий правильности расчёта ковариаций для h_{ij}, превышающих радиус корреляции:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P[M(x) \neq m_i] \times P[M(x) = m_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P[M(x) \neq m_j] = \sum_{j=1}^{n} P[M(x) = m_j] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{1 - P[M(x) = m_i]\} = n - \sum_{i=1}^{n} P[M(x) = m_i] = n - 1 \quad (10)$$

где n - число минералов в породе.

Теперь покажем, как в пространстве горной породы может быть статистически оценен вид минерального зерна, если он известен для соседних зёрен. Для этого используем ещё не применявшуюся в петрографии теорию индикаторного кригинга. Общая теория изложена в работах [163]. Краткие сведения приведены в справочниках [164]. Некоторые дискуссионные вопросы рассмотрены в статьях [165]. Но все они не адаптированы к применению в петрографии.

---

[163] Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. М.: Мир, 1968. 408 с.; Марголин А.М. Оценка запасов минерального сырья. Математические методы. М.: Недра, 1974. 264 с.; Марголин А.М. Методы геометризации разведуемых запасов полезных ископаемых. Усовершенствованная процедура крайгинга. М.: ВИЭМС, 1983. 81 с.; Давид М. Геостатистические методы при оценке запасов руд. Л.: Недра, 1980. 360 с.; Journel A.G., Huijbregts Ch.J. Mining geostatistics. London: Academic Press, 1991. 600 p.; Armstrong M. Basic linear geostatistics. Berlin: Springer-Verlag, 1997. 160 p.

[164] Дэвис Дж. Статистика и анализ геологических данных. М.: Мир, 1977. 574 с.; Дэвис Дж.С. Статистический анализ данных в геологии. М.: Недра, 1990. Т. 1 – 319 с., т. 2 – 427 с.; Родионов Д.А. и др. Справочник по математическим методам в геологии. М.: Недра, 1987. 335 с.

[165] Philip G.M., Watson D.F. Matheronian geostatistics – quo vadis? // Math. Geol. 1986. V 18. N 1. P 93-117; Journel A.G. Geostatistics: models and tools for the Earth sciences // Math. Geol. 1986. V 18, N 1. P 119-140; Srivastava R.M. Philip and Watson – quo vadunt? // Math. Geol. 1986. V 18, N 1. P 141-146; Krige D.G. “Matheronian geostatistics – quo vadis?” by G.M. Philip and D.F. Watson // Math. Geol. 1986. V 18, N 5. P 501-502; Matheron G. Philipian / Watsonian high (flying) philosophy // Math. Geol. 1986. V 18, N 5. P 503-504; Merks J.W. Applied statistics in mineral exploration // Mining engineering. 1997. V 49. N 2. P 78-82.

Пусть Z_i – индикаторы, заданные на множестве минеральных зёрен x_i горной породы. Обозначим x_0 зерно, минеральный вид которого нас интересует; h_{ij} – расстояние между x_i и x_j; c_{ij} – ковариацию индикаторов на расстоянии h_{ij}. Наложим на функции Z_i принципиальное ограничение – будем считать их стационарными. Это означает, что математическое ожидание $E[Z_i]$ в любом зерне x_i породы одно и то же, что является математическим условием её однородности. Оценивание состоит в учёте влияния каждого из минеральных зёрен на своё окружение. Оно падает с увеличением расстояний h_{ij} между зёрнами, но в случае кригинга оценивающая функция не содержит их явно. Они заложены в весовых коэффициентах, рассчитываемых для каждого зерна x_0 в зависимости от его расположения относительно взятых для оценивания зёрен:

$$Z_0^* = \sum_i \lambda_i Zi . \qquad (11)$$

Нужно, чтобы оценивание давало в каждом зерне несмещенную оценку:

$$E[Z_0^* - Z_0] = 0.$$

Использовав (11), получим:

$$E[\sum_i \lambda_i Z_i - Z_0] = \sum_i \lambda_i E[Z_i] - E[Z_0] = E[Z_i] (\sum_i \lambda_i - 1) = 0.$$

В последнем равенстве использовано свойство стационарности Z_i, в силу чего $E[Z_i] = E[Z_0]$ для любых x_i и x_0. В общем случае $E[Z_i] \neq 0$. Поэтому:

$$\sum_i \lambda_i - 1 = 0. \qquad (12)$$

Идея расчета λ_i состоит в том, чтобы при соблюдении (11) и (12) минимизировать дисперсию оценки $V[Z_0^*-Z_0]$:

$$V[Z_0^*-Z_0] = V[\sum_i \lambda_i Z_i-Z_0] = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j c_{ij} + c_{ii} - 2 \sum_i \lambda_i c_{0i}. \qquad (13)$$

Для минимизации $V[Z_0^*-Z_0]$ при условии (12) используем метод Лагранжа. Приравнивая к нулю частные производные функции

$$F[\lambda_i, \mu] = V[Z_0^{*}-Z_0] - 2\,\mu(\sum_i \lambda_i -1), \tag{14}$$

получаем матричное уравнение для отыскания λ_i и μ :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} & 1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_i \\ -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ \ldots \\ c_{0i} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Дисперсия оценки из (13) равна:

$$V[Z_0^{*}-Z_0] = c_{ii} + \sum_i \lambda_i \sum_j \lambda_j\, c_{ij} - 2\sum_i \lambda_i\, c_{0i} =$$

$$= c_{ii} + \sum_i \lambda_i\,(c_{0i} + \mu) -$$

$$- 2\sum_i \lambda_i\, c_{0i} = c_{ii} - \sum_i \lambda_i\, c_{0i} + \mu \sum_i \lambda_i =$$

$$= c_{ii} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_i & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ \ldots \\ c_{0i} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Применим теорию кригинга к оцениванию габбронорита из интрузива Панских тундр, Кольский п-ов. Экспериментальные ковариограммы показаны на рис. 10.2. Уже для $h_{ij}>3$ они практически совпадают с предельными значениями, рассчитанными согласно (8) и (9). При этом использованы следующие значения вероятностей: $P[M(x)=m_1] = 0.21$, $P[M(x)=m_2] = 0.31$, $P[M(x)=m_3] = 0.48$, обозначения: m_1 – ортопироксен, m_2 – клинопироксен, m_3 – плагиоклаз. Таким образом, при $h_{ij}<4$ ощутима корреляция между минеральными зёрнами. Для $h_{ij}>3$ её можно считать отсутствующей в той степени, в какой все $C_{ij}(h)$ можно считать совпадающими с предельными значениями. Достоинство подхода состоит в том, что известными статистическими методами достоверность совпадения можно охарактеризовать количественно.

На рис. 10.3 дан увеличенный фрагмент рис. 10.2. Оценим ситуацию в зерне x_0 (являющемся ортопироксеном), полагая известным, что x_1 – ортопироксен, x_2 – клинопироксен, x_3 – плагиоклаз и используя ковариации индикаторов из рис. 10.2.

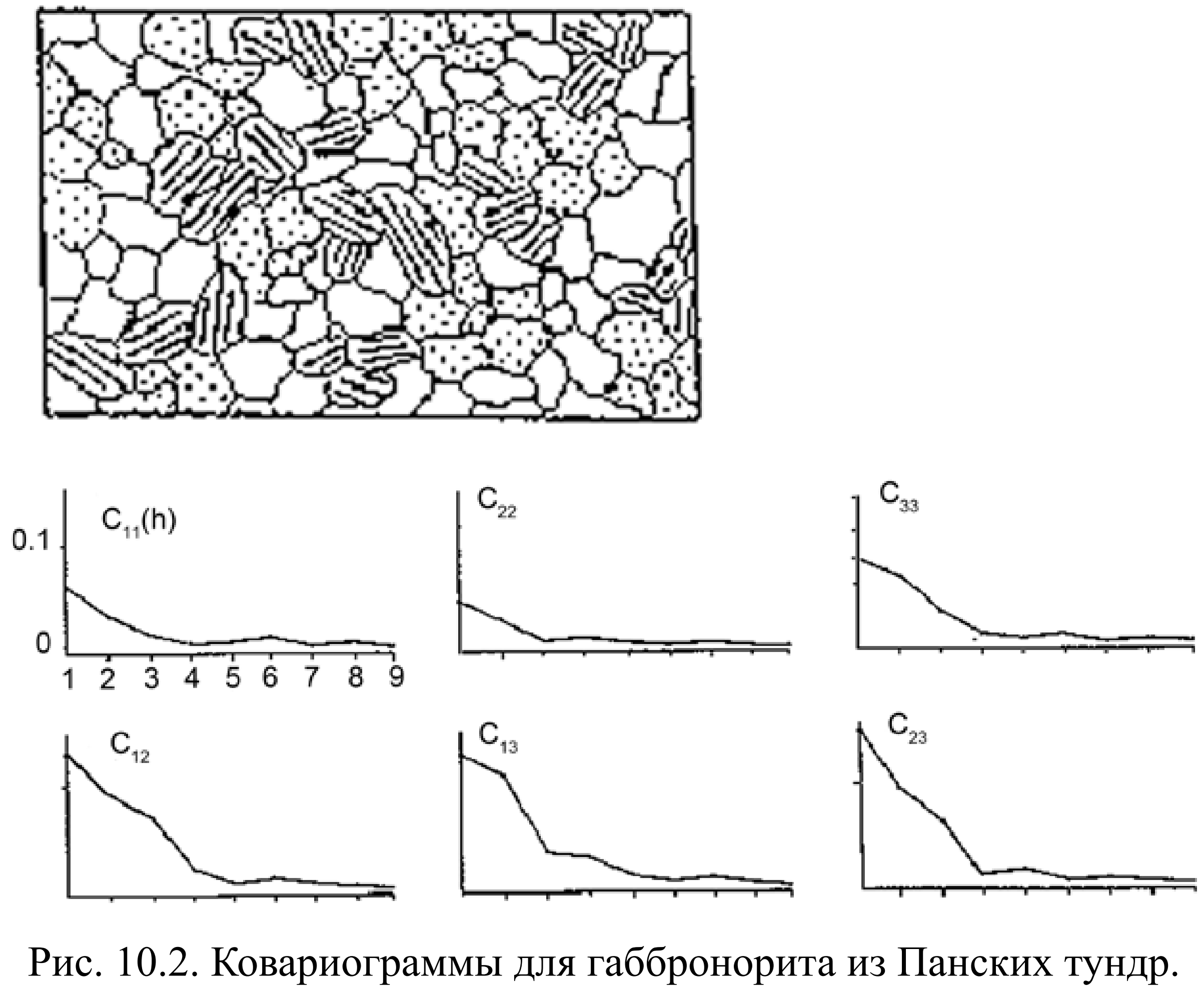


Рис. 10.2. Ковариограммы для габбронорита из Панских тундр.

В первую очередь найдем расстояния между всеми участвующими в оценивании минеральными зёрнами: $h_{01}=1$, $h_{02}=1$, $h_{03}=2$, $h_{12}=2$, $h_{13}=2$, $h_{23}=2$. Брать для оценивания x_0 зёрна, удаленные на расстояние $h_{0i}>3$, не имеет смысла, потому что установленный радиус корреляции равен трём. Количество взятых для оценивания зёрен определяет как достоверность оценки, так и порядок обращаемых далее матриц. Оценить следует три события: x_0 – ортопироксен, x_0 – клинопироксен, x_0 – плагиоклаз. Мы найдем вероятность лишь первого события.

Оценка вероятности для ортопироксена имеет вид:

$$P[M(x_0)=m_1] = E\{I[M(x_0)=m_1]\} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \times I[M(x_i)=m_1]. \quad (17)$$

Из Рис. 10.3 видно, что $I[M(x_1)=m_1] = 1$, $I[M(x_2)=m_1] = 0$, $I[M(x_3)=m_1] = 0$. Поэтому (17) сводится к равенству: $P[M(x_0)=m_1] = \lambda_1$. Весовые коэффициенты найдем из системы (15). Одинаковое положение зёрен x_1 и x_2 относительно x_0 и x_3 позволяет уменьшить порядок матриц. В этом случае $\lambda_1 = \lambda_2$ и λ_3 выражается через них из (12). После преобразования получим (15) в виде:

$$\begin{bmatrix} c_{11}+c_{12}-2c_{13} & 1 \\ c_{13}+c_{23}-2c_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01}-c_{13} \\ c_{03}-c_{33} \end{bmatrix} ,$$

Рис. 10.3. Кригинг минерального зерна x_0.

Значения ковариаций $C_{11}(h)$ индикатора $I[M(x)=m_1]$ в зависимости от расстояний между зёрнами возьмем из рис. 10.2: $c(0) = 0.166$, $c(1) = 0.062$, $c(2) = 0.037$. Предыдущее уравнение принимает вид:

$$\begin{bmatrix} 0.129 & 1 \\ -0.258 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025 \\ -0.129 \end{bmatrix}$$

и легко решается:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.398 & 0.398 & 0.204 & -0.026 \end{bmatrix} \cdot$$

Итак, вероятность того, что зерно x_0 является ортопироксеном, равна 0.398. Для расчета дисперсии оценки воспользуемся формулой (16):

$$V = 0.166 - \begin{bmatrix} 0.398 & 0.398 & 0.204 & -0.026 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.062 \\ 0.062 \\ 0.037 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.135.$$

Аналогично могут быть оценены вероятности того, что зерно x_0 является клинопироксеном или плагиоклазом.

В пределах изложенной теории зерно ортопироксена влияет на своё окружение так же, как зерно клинопироксена или плагиоклаза, то есть на три оболочки вокруг. Но в реальности эта картина складывалась постепенно. Каждый минерал влиял лишь на последующие и только в пределах оставшегося пространства кристаллизации. Пока не ясно, как разложить совокупный результат во временную последовательность. Но полученный радиус корреляции содержит объективную информацию об истории кристаллизации изученного габбронорита. Чтобы ее понять и использовать, предложенный подход следует связать с теорией кристаллизации расплавов. Здесь видится заманчивая перспектива исследований, перебрасывающих мост от физиографии кристаллических горных пород к их петрологии.

ЭТЮД 11: ПЕТРОГРАФИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И ПРОБЛЕМА ХАРКЕРА

В 1895 г. А. Харкер в кембриджском учебнике по петрологии[166] высказал о сложных минеральных агрегатах (горных породах) следующее суждение.

«**Classification and nomenclature of rocks.** Petrology has not yet arrived at any philosophical classification of rocks. Further, it is easy to see that no classification can be framed which shall possess the definiteness and precision found in some other branches of science. The mathematically exact laws of chemistry and physics, which give individuality to mineral species, do not help us in dealing with complex mineral aggregates, and any such fundamental principle as that of descent, which underlies classification in the organic world, has yet to be found in petrology. Rocks of different types are often connected by insensible gradations, so that any artificial classification with sharp divisional lines can not truly represent the facts of nature. At present, therefore, the best arrangement is that which brings together as far as possible, for convenience of description, rocks which have characters in common, the characters to be first kept in view being those which depend most directly upon important genetic conditions. The grouping adopted below must be regarded as one of convenience rather than of principle.»

«**Классификация и номенклатура горных пород.** Петрология до сих пор не выработала никакой философской классификации горных пород. Далее, легко видеть, что не может быть создана никакая классификация, которая обладала бы определённостью и точностью, найденными в некоторых других областях науки. Математически точные законы химии и физики, которые придают индивидуальность минеральным видам, не помогают нам в работе со сложными минеральными агрегатами и какой-то фундаментальный принцип, наподобие лежа-

---

[166] Harker A. Petrology for students. Cambridge: University Press, 1908. 336 p. (p. 20).

щего в основании классификации органического мира, ещё должен быть найден в петрологии. Горные породы различных типов часто связаны непрерывными переходами, так что никакая искусственная классификация с резкими разделительными границами не может истинно представлять факты природы. На сегодня, следовательно, наилучшей систематикой является та, которая объединяет, насколько это возможно ради удобства описания, горные породы с общими свойствами, в первую очередь имея в виду те свойства, которые наиболее прямо зависят от важных генетических условий. Использованная ниже систематика должна рассматриваться как одно из соглашений, а не как принцип.» (пер. авт.).

Заметим, что «ниже использована» вполне современная классификация горных пород на плутонические, гипабиссальные, вулканические, осадочные – с дальнейшим их делением по химическому и минеральному составу и структуре, и метаморфические – с делением по типу метаморфизма. Принятый А. Харкером подход к описанию петрографических структур также сохранился до сих пор в неизменном виде. В отечественной литературе он систематически изложен в монографиях [167] и многочисленных атласах по отдельным видам полезных ископаемых.

Фраза А.Харкера весьма насыщена смыслами, отчасти противоречивыми. Очень важна констатация того, что генетическая классификация горных пород есть не более чем удобное соглашение, а какой-то фундаментальный принцип ещё должен быть найден в петрологии. У большинства современных

[167] Талдыкин С.И. и др. Атлас структур и текстур руд. М.: Госгеолтехиздат, 1954. 170 с.; Штейнберг Д.С. Структуры горных пород. Свердловск: Свердловский горный ин-т, 1957. 72 с.; Бетехтин А.Г. и др. Текстуры и структуры руд. М.: Госгеолтехиздат, 1958. 436 с.; Бетехтин А.Г. и др. Структурно-текстурные особенности эндогенных руд. М.: Недра, 1964. 598 с.; Шахов Ф.Н. Текстуры руд. М.: АН СССР, 1961. 180 с.; Исаенко М.П. Определитель структур и текстур руд. М.: Недра, 1964. 156 с.; Половинкина Ю.Ир. Структуры и текстуры изверженных и метаморфических горных пород. М.: Недра, 1966. Ч. 1 – 240 с., ч. 2, т. 1 – 424 с., ч. 2, т. 2 – 272 с.

авторов этого понимания уже нет. Генетический подход возобладал и сегодня мыслится как тот самый фундаментальный принцип, о котором вопрошал А. Харкер.

С другой стороны, «горные породы различных типов часто связаны непрерывными переходами, так что никакая искусственная классификация с резкими разделительными границами не может истинно представлять факты природы». Но всякая классификация имеет резкие разделительные границы. Обобщением классификаций являются пространства толерантности, в которых предклассы могут пересекаться по общим элементам. Эти непустые пересечения иногда интерпретируются как «нерезкие» границы. Итак, возможное развитие мысли А. Харкера состоит в том, чтобы вместо классификации горных пород строить пространство толерантности, в котором от типа к типу возможны постепенные переходы по составу (химическому, минеральному) и / или строению.

Кроме того, А. Харкер говорит, что «никакая искусственная классификация с резкими разделительными границами не может истинно представлять факты природы». Если сделать акцент на слове «искусственная», то станет понятно, что А. Харкер вопрошал о некоторой «естественной» классификации, неизбежно резкие границы которой не противоречили бы непрерывным переходам от типа к типу. Далее будем понимать эту формулировку как **проблему Харкера**.

Наконец, внутренняя противоречивость позиции А. Харкера состоит в том, что утверждается (как и сегодня – на основании эмпирического опыта) непрерывность переходов от типа к типу при неопределённости (всего лишь интуитивной схваченности, привязанности к распространённой горной породе: тип гранита, тип базальта…) самого понятия типа. Между тем, специфика типа сегодня выражается общесистемной категорией структуры, которая в петрографии расщеплена на «структуру» и «текстуру».

«Структура горной породы – строение горной породы, в широком смысле слова – совокупность её признаков, определяемых морфологическими особенностями отдельных составных частей и их пространственными взаимоотношениями. В более тесном значении этот термин охватывает признаки, обусловленные степенью кристалличности, размерами и формой кристаллов, способом сочетания их между собой и со стеклом и другими особенностями, определяемыми лишь под микроскопом, и потому означает собственно микроструктуру. Под структурой осадочных пород обычно понимают внешние особенности отдельных минеральных зёрен, слагающих данную породу; структура зависит, таким образом, а) от размера составных частей породы, б) от формы минеральных зёрен и в) от характера их поверхности. См. текстура» (Петрографический словарь…,1963, с.337).

«Текстура – особенности расположения и соотношения отдельных участков, слагающих горную породу и характеризующих степень однородности её сложения. По Бетехтину, под текстурой следует понимать сочетания минеральных агрегатов, неравнозначных по структуре и минеральному составу. Морфологической единицей текстуры является минеральный агрегат, а структуры – минеральное зерно. Шахов считает, что структурный узор возникает в породах и рудах в период их формирования и отражает закономерности расположения минерального вещества. Для определения текстуры необходима характеристика состава, формы, величины (крупных или микроскопических) минеральных агрегатов и их взаимоотношений. В американской, английской и частью во французской литературе термины текстура и структура имеют обратное значение. См. структура.» (там же, с. 345).

Новейший петрографический словарь (1981) добавляет к приведенным определениям интересный акцент. «Текстура зависит не от условий образования горных пород, а от закономерностей их изменения в пространстве и во времени» (с. 390). «Структура горной породы предопределяется условиями её формирования, текстура – устойчивостью или закономерностями преобразования этих условий во времени и пространстве» (с. 421). В целом, морфологическая составляющая приведенных определений перекликается (особенно в определении текстуры) с законом агрегации К.Ф. Науманна, динамическая составляющая (опять же, в определении текстуры) побуждает связать дифференциальным уравнением неоднородность сложения горной породы с изменением условий её формирования в пространстве и времени. Но – и это главное – описательный характер определений и смешение в нём большого числа различных параметров (степень кристалличности, размеры и формы кристаллов, способы сочетания их между собой и со стеклом и др.) не позволяют этого сделать.

Предлагаемый далее подход к описанию организации горных пород состоит в том, чтобы сделать акцент на статистическом описании межзерновых отношений в полиминеральной горной породе. Рассмотрим совокупность вероятностей p_{ij} всех возможных бинарных межзерновых контактов в некотором n-минеральном агрегате. По смыслу вероятностей, имеет место неравенство:

$$0 \le p_{ij} \le 1. \qquad (1)$$

Сумма всех вероятностей равна единице:

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} = 1. \qquad (2)$$

Отношение контактирования зёрен симметрично:

$$p_{ij} = p_{ji}. \qquad (3)$$

В полиминеральном агрегате каждый из минералов образует не только мономинеральные срастания, иначе агрегат не был бы связным:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \neq 0; \quad i = 1, \ldots, n; \; j \neq i. \qquad (4)$$

Пусть $m_1, \ldots, m_n$ - список минералов, образующих агрегат. Тогда уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} m_i m_j = 1 \qquad (5)$$

будем понимать так, что сумма вероятностей всех возможных межзерновых контактов равна 1. В то же время оно позволяет сделать важный шаг в анализе возможных распределений вероятностей. А именно, содержащуюся в (5) квадратичную форму можно записать в виде произведения:

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\, m_i m_j = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_n \end{bmatrix} \qquad (6)$$

В нём чётко разделены роли матрицы вероятностей P_{ij} и образующих горную породу минералов $\{m_i\}_1^n$. Организацию горной породы можно рассмотреть как отображение $\{m_i\}_1^n$ на себя (автоморфизм), управляемое оператором P_{ij}:

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\, m_i m_j = \{m_i\}_1^n \xrightarrow{P_{ij}} \{m_i\}_1^n\ . \qquad (7)$$

Этот подход интересен тем, что опровергает мнение о неприменимости многозначных отображений к описанию минералогических объектов[168].

К предложенному формализму сделаем примечание. Уже отмечалось, что в минеральных агрегатах нормой являются межзерновые контакты двух зёрен по поверхности, трёх – по общему ребру и четырёх в – точке. Но тогда к (5) можно добавить ещё два уравнения:

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} p_{ijk}\, m_i m_j m_k = 1\ , \qquad (8)$$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} p_{ijkl}\, m_i m_j m_k m_l = 1\ . \qquad (9)$$

Соотношения, аналогичные (6), в этом случае записать нельзя – для этого нужны трёх- и четырёхмерные матрицы.

[168] Михеев В.И. Гомология кристаллов. Л.: Гостоптехиздат, 1961. 208 с. (с. 8).

Но существо автоморфизма (7) остаётся в силе, если заменить оператор P_{ij} на P_{ijk} и P_{ijkl}, соответственно.

Заметим следующее. По вероятностям p_i минеральных зёрен в горной породе можно рассчитать априорные вероятности различных межзерновых контактов как члены разложения $(p_1 + p_2 + ... + p_n)^d$, где $d = 2, 3, 4$ в зависимости от типа контактов (бинарные, тернарные, куотернарные). Для $d = 2$: $p_{ii} = p_i^2$, $p_{ij} = 2p_ip_j$; для $d = 3$: $p_{iii} = p_i^3$, $p_{iij} = 3p_i^2p_j$, $p_{ijk} = 6p_ip_jp_k$; для $d = 4$: $p_{iiii} = p_i^4$, $p_{iiij} = 4p_i^3p_j$, $p_{iijj} = 6p_i^2p_j^2$, $p_{iijk} = 12p_i^2p_jp_k$, $p_{ijkl} = 24p_ip_jp_kp_l$. По-видимому, априорные вероятности межзерновых контактов характеризуют однородное, массивное сложение горных пород, при котором все тенденции контактирования минеральных индивидов различных видов уравновешены. Различные отклонения от априорных вероятностей порождают известное разнообразие текстур.

Между вероятностями p_{ij}, p_{ijk} и p_{ijkl} для одной горной породы существует строгая, но односторонняя связь. Она следует из простого наблюдения – контакт четырёх зёрен в точке есть одновременно контакт четырёх рёбер, то есть их тройных контактов, а контакт трёх зерен по ребру есть одновременно контакт трёх межзерновых поверхностей по тому же ребру. Зная распределение вероятностей p_{ijkl}, всегда можно перейти к распределениям p_{ijk} и p_{ij}. Так, для биминеральных агрегатов эти переходы имеют следующий вид (нули в матрицах опущены):

$$p_{ijkl} \to p_{ijk} : \begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{112} \\ p_{122} \\ p_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & & & \\ & 3/4 & 1/2 & & \\ & & 1/2 & 3/4 & \\ & & & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1111} \\ p_{1112} \\ p_{1122} \\ p_{1222} \\ p_{2222} \end{bmatrix},$$

$$p_{ijk} \to p_{ij} : \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & & \\ & 2/3 & 2/3 & \\ & & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{112} \\ p_{122} \\ p_{222} \end{bmatrix},$$

$$p_{ijkl} \to p_{ij}: \quad \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/6 & & \\ & 1/2 & 2/3 & 1/2 & \\ & & 1/6 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1111} \\ p_{1112} \\ p_{1122} \\ p_{1222} \\ p_{2222} \end{bmatrix}.$$

Для трёхминеральных горных пород они лишь немного сложнее:

$p_{ijkl} \to p_{ijk}$:

$$\begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{112} \\ p_{113} \\ p_{122} \\ p_{123} \\ p_{222} \\ p_{133} \\ p_{223} \\ p_{233} \\ p_{333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 & & & & & & & & & & & & \\ & 3/4 & & 1/2 & 1/4 & & & & & & & & & & \\ & & 3/4 & & 1/4 & 1/2 & & & & & & & & & \\ & & & 1/2 & & & 3/4 & 1/4 & & & & & & & \\ & & & & 1/2 & & & 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ & & & & & & 1/4 & & & & 1 & 1/4 & & & \\ & & & & & 1/2 & & & 1/4 & 3/4 & & & & & \\ & & & & & & & 1/4 & & & & 3/4 & 1/2 & & \\ & & & & & & & & 1/4 & & & & 1/2 & 3/4 & \\ & & & & & & & & & 1/4 & & & & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1111} \\ p_{1112} \\ p_{1113} \\ p_{1122} \\ p_{1123} \\ p_{1133} \\ p_{1222} \\ p_{1223} \\ p_{1233} \\ p_{1333} \\ p_{2222} \\ p_{2223} \\ p_{2233} \\ p_{2333} \\ p_{3333} \end{bmatrix}$$

$p_{ijk} \to p_{ij}$:

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & & & & & & & \\ & 2/3 & & 2/3 & 1/3 & & & & & \\ & & 2/3 & & 1/3 & & 2/3 & & & \\ & & & 1/3 & & 1 & & 1/3 & & \\ & & & & 1/3 & & & 2/3 & 2/3 & \\ & & & & & & 1/3 & & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{111} \\ p_{112} \\ p_{113} \\ p_{122} \\ p_{123} \\ p_{222} \\ p_{133} \\ p_{223} \\ p_{233} \\ p_{333} \end{bmatrix}$$

$p_{ijkl} \to p_{ij}$:

$$
\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 1/2 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & & & & & & & & & \\
 & 1/2 & & 2/3 & 1/3 & & 1/2 & 1/3 & 1/6 & & & & & & \\
 & & 1/2 & & 1/3 & 2/3 & & 1/6 & 1/3 & 1/2 & & & & & \\
 & & & 1/6 & & & 1/2 & 1/6 & & & 1 & 1/2 & 1/6 & & \\
 & & & & 1/6 & & & 1/3 & 1/3 & & & 1/2 & 2/3 & 1/2 & \\
 & & & & & 1/6 & & & 1/6 & 1/2 & & & 1/6 & 1/2 & 1
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} p_{1111} \\ p_{1112} \\ p_{1113} \\ p_{1122} \\ p_{1123} \\ p_{1133} \\ p_{1222} \\ p_{1223} \\ p_{1233} \\ p_{1333} \\ p_{2222} \\ p_{2223} \\ p_{2233} \\ p_{2333} \\ p_{3333} \end{bmatrix}
$$

Легко понять, что описание организации горной породы целесообразно создавать на основе распределения вероятностей p_{ijkl}. Но контакт четырёх зёрен не фиксируется в петрографическом шлифе – геометрическая вероятность пересечения им точки равна нулю. Поэтому нахождение p_{ijkl} не является в этом смысле даже задачей стереологической реконструкции. Расчёт истинных вероятностей p_{ijk} и p_{ij} по их двумерным аналогам – нерешённая проблема. Мы по необходимости пользуемся вероятностями, найденными в плоских сечениях. Но все теоретические рассуждения без изменений переносятся на реальные горные породы. Теоретически в некоторых случаях возможно восстановление вероятностей p_{ijkl} по p_{ijk}, а последних – по p_{ij} (раздельно для вероятностей истинных и установленных в петрографических шлифах). Необходимые и достаточные условия следуют из известных теорем о разрешимости систем линейных уравнений. В n-минеральной горной породе для этого должны отсутствовать: при восстановлении p_{ijkl} по p_{ijk} – хотя бы C^4_{n+2} (число сочетаний из n+2 по 4) типов четверных контактов из C^4_{n+3} теоретически возможных, при восстановлении p_{ijk} по p_{ij} – хотя бы C^3_{n+1} типов тройных контактов из C^3_{n+2} возможных, при восстановлении p_{ijkl} по p_{ij} – хотя бы $C^4_{n+2} + C^3_{n+1}$ типов четверных контактов из C^4_{n+3} возможных.

От предложенного выше способа описания организации горных пород остался лишь один шаг к определению их структуры. Пусть по-прежнему $m_1 \dots m_n$ – список минералов, образующих горную породу. Идея состоит в том, чтобы через уравнение (5) поставить в соответствие каждой породе квадратичную поверхность в пространстве координат $m_1 \dots m_n$. Она однозначно определена матрицей вероятностей P_{ij}. При выполнении условий (1) - (4) нет формальных запретов на то, чтобы считать это соответствие обратимым, а число типов квадратичных форм зависит только от n. Так возникает возможность типизировать петрографические структуры по типу соответствующей алгебраической поверхности. Этот подход назван нами **методом структурной индикатрисы**[169]. Рассмотрим этот формализм подробно на примере би- и трёхминеральных горных пород.

Уже первый случай охватывает их немалое разнообразие. С алгебраической точки зрения здесь мы имеем для классификации многообразие симметрических матриц вида:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Типы кривых второго порядка на плоскости (m_1, m_2) определяются знаками двух инвариантов:

$$I_1 = p_{11} + p_{22}\,, \quad I_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} = p_{11}\,p_{22} - p_{12}^{\,2}\,.$$

Прямыми скобками здесь и далее обозначены определители матриц. Полная классификация кривых второго порядка по

[169] Войтеховский Ю.Л. Приложение теории квадратичных форм к проблеме классификации структур полиминеральных горных пород // Изв. ВУЗов. Геол. и разведка. 1995. № 1. С. 32-42; Войтеховский Ю.Л. Количественный анализ петрографических структур: метод структурной индикатрисы и метод вычитания акцессориев // Изв. ВУЗов. Геол. и разведка. 2000. № 1. С. 50-54.

этим инвариантам хорошо известна. Проверяя совместимость всех типов кривых с условиями (1) - (4), находим лишь три непротиворечивых:

$$S_2^1 : I_1 > 0, I_2 > 0 \; ; \; S_2^2 : I_1 > 0, I_2 < 0 \; ; \; S_2^3 : I_1 > 0, I_2 = 0 \, .$$

Их геометрическими образами являются эллипс, гипербола и пара параллельных прямых, соответственно. Они являются структурными индикатрисами, отражающими в геометрических образах типичные (структурные) черты организации горных пород.

Петрографическими аналогами типов S_2^1 и S_2^2 являются нориты из интрузива Панских тундр, Кольский п-ов (рис. 11.1). По поводу типа S_2^3 следует сделать замечание. В этом случае имеет место:

$$I_2 = p_{11}\, p_{22} - p_{12}{}^2 = 0.$$

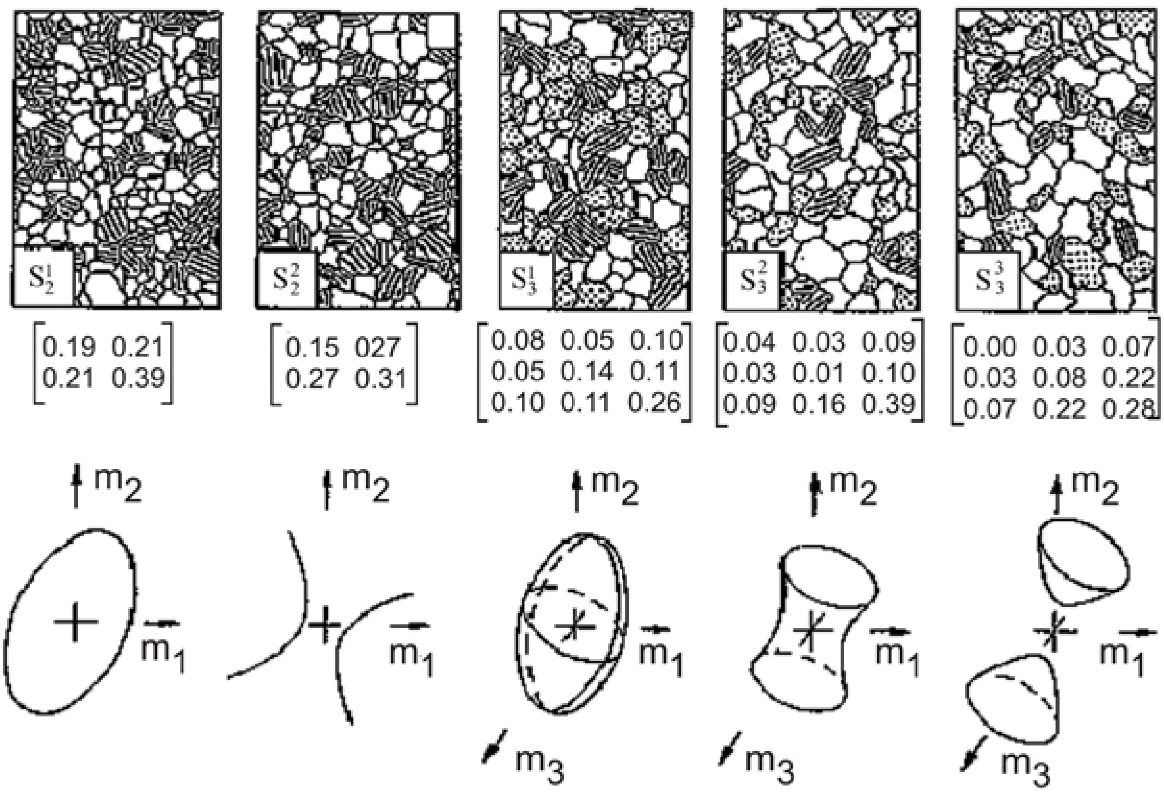


Рис. 11.1. Петрографические структуры норитов и габброноритов Панских Тундр, их матрицы P_{ij} и структурные индикатрисы.

Иначе говоря, наблюдается равновесие между вероятностями мономинеральных (p_{11}, p_{22}) и полиминеральных (p_{12}) межзерновых контактов. Уточним смысл сказанного. На рис. 11.2 дана барицентрическая диаграмма, основным свойством которой является важное в нашем рассмотрении условие (2). Ради наглядности она разнесена на три уровня. Отчётливо видно отличие поля структурного типа S_2^3, представленного линией, от полей S_2^1 и S_2^2, занимающих определённую площадь (заштрихованы). Геометрическая вероятность случайного попадания фигуративной точки на линию S_2^3 в поле диаграммы равна нулю. Нет физических оснований, чтобы обосновать такое попадание (то есть представить тип S_2^3 как аттрактор – притягивающее множество состояний). Поэтому впредь будем иметь в виду подобные структурные типы как возможные с вероятностью нуль и называть их вырожденными.

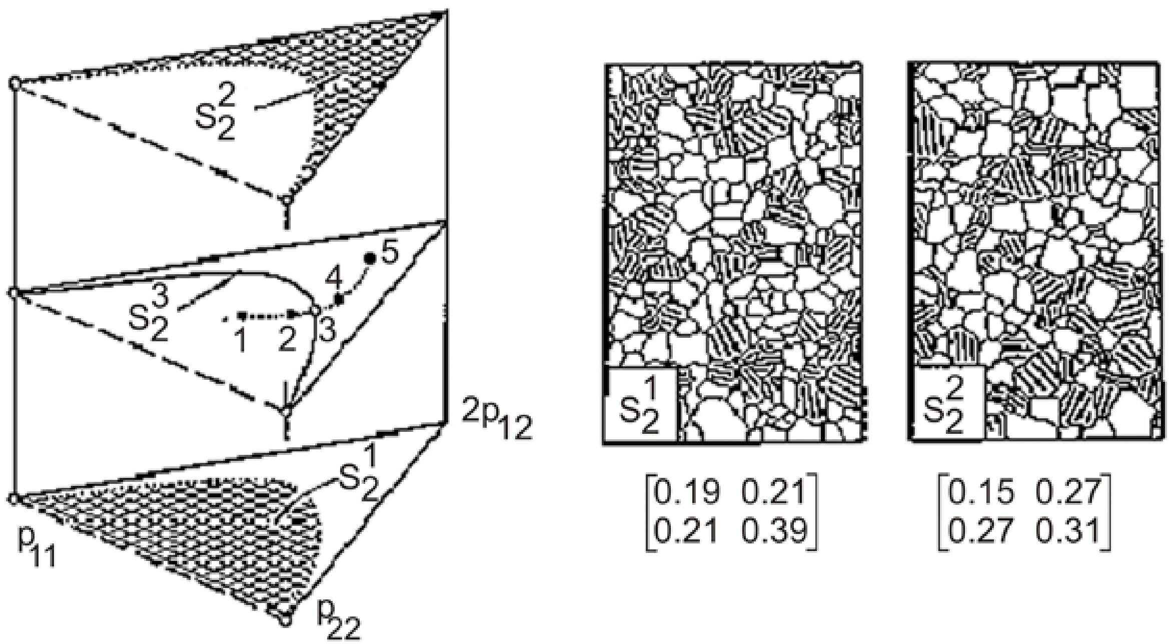


Рис. 11.2. Барицентрическая диаграмма вероятностей p_{ij} в биминеральной горной породе.

Они будут играть роль разделительных границ классификации. Пересекая такую границу непрерывным движением фигуративной точки, горная порода скачком переходит из одного типа в другой. На рис. 11.2 показан такой путь между состояниями 1 и 5, установленными в норитах Панских тундр, через состояния 2, 3 и 4. На рис. 11.3 показано изменение соответствующих образов – уравнений и кривых второго порядка. На пути от 1 к 5 тип S_2^1 (ему соответствует эллипс, постепенно поворачивающийся в системе координат m_1, m_2 и вытягивающийся вдоль одной из своих главных осей) в точке 3 мгновенно перестраивается (эллипс разрывается в бесконечно удаленной точке, превращаясь в пару параллельных прямых) в тип S_2^2 (прямые искривляются, порождая семейство гипербол).

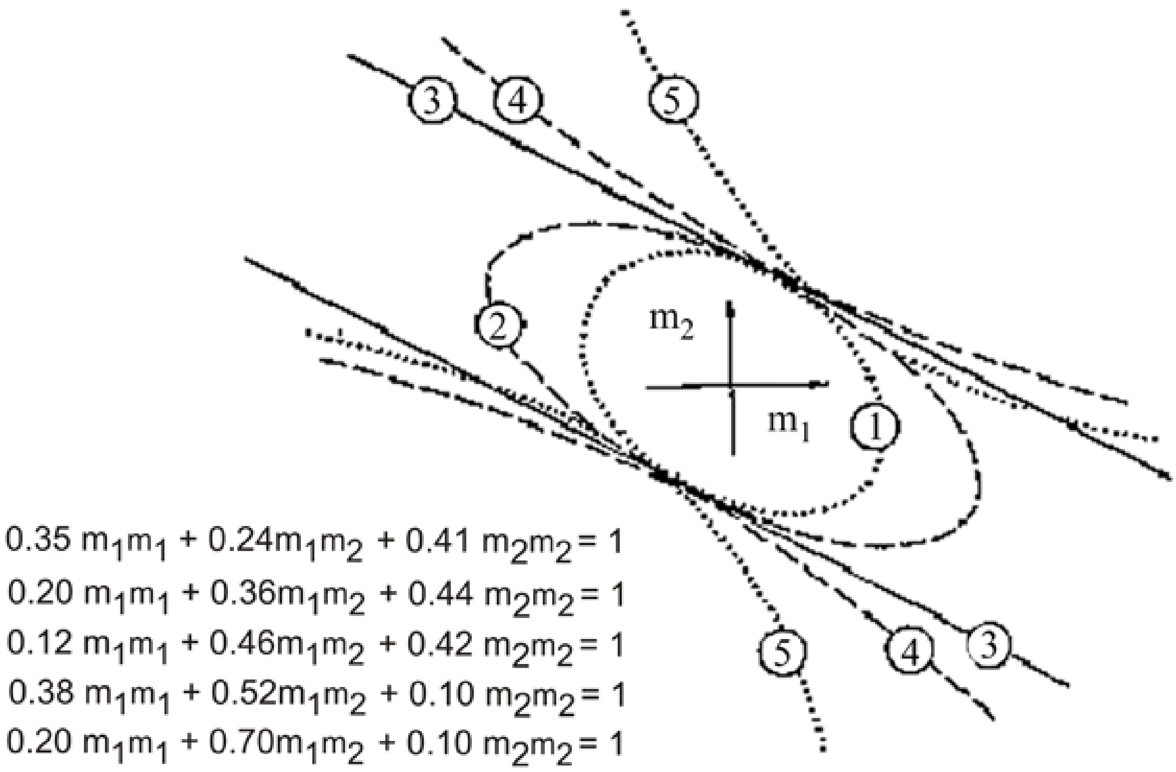


Рис. 11.3. Структурные индикатрисы состояний 1-5 из рис. 11.2.

Кажется удивительным, что причина такой перестройки состоит в ничем более не примечательном непрерывном переходе инварианта I_2 через нуль. Именно так петрограф не замечает соответствующего перехода от одного структурного типа горной породы к другому, тоже хорошо выраженному. Так, на рис. 11.1 тип S_2^1 характеризуется явным тяготением ортопироксена и плагиоклаза к образованию мономинеральных срастаний. Это особенно заметно для подчинённого ортопироксена, образующего кластеры в плагиоклазовой матрице. Тип S_2^2 характеризуется преобладанием их срастаний друг с другом. Тип S_2^3 есть не улавливаемая визуально граница двух указанных тенденций. Заметим, что те же границы классификации известны в популяционной генетике как равновесия Харди-Вайнберга, отвечающие балансу конкурирующих аллелей.

Перейдем к рассмотрению трёхминеральных горных пород. Вместе с предыдущим, этого случая достаточно, чтобы в первом приближении рассмотреть организацию большей части пород. С формальной точки зрения, здесь предстоит рассмотреть матрицы вида:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

Тип квадратичной поверхности в пространстве (m_1, m_2, m_3) определяется знаками трёх инвариантов:

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Проверяя совместимость классификационных типов квадратичных поверхностей с условиями (1) - (4), находим только шесть допустимых: S_3^1 : $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, $I_3 > 0$ – эллипсоид, S_3^2 : $I_1 > 0$, $I_2 < 0$, $I_3 < 0$ – однополостный гиперболоид, S_3^3 : $I_1 > 0$, $I_2 < 0$, $I_3 > 0$ – двуполостный гиперболоид, S_3^4 : $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, $I_3 = 0$ – эллиптический цилиндр, S_3^5 : $I_1 > 0$, $I_2 < 0$, $I_3 = 0$ – гиперболический цилиндр, S_3^6 : $I_1 > 0$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ – пара параллельных плоскостей.

Иллюстрацией трёх первых случаев являются показанные на рис. 11.1 габбронориты интрузива Панских тундр. В трёх остальных случаях по нулевым значениям инвариантов I_2 и /

или I_3 можно узнать вырожденные типы – границы классификации. Здесь логика качественных изменений состоит в том, что на каждой из границ S_3^4, S_3^5 и S_3^6 происходит перестройка топологии квадратичных поверхностей S_3^1, S_3^2 и S_3^3 в виде их разрыва или склеивания. Это отражает в геометрических образах сложное сочетание всё тех же моно- и полиминеральных межзерновых контактов в горной породе. Здесь оно осложнено большим, чем в биминеральных породах, разнообразием контактов. На рис. 11.1 видно, что для типа S_3^1 характерно образование мономинеральных кластеров сразу для двух минералов (пироксенов), в типе S_3^2 - для одного (ортопироксена), а в типе S_3^3 преобладают полиминеральные срастания.

Рассмотренные примеры позволяют перейти к общему случаю n-минеральной горной породы. Здесь мы имеем матрицы P_{ij} произвольного порядка n. Поступая по аналогии, следовало бы для каждого n вычислять ряд инвариантов и проверять их совместимость с условиями (1) - (4). Это требует немалых вычислений уже для n = 4 и, что хуже, не позволяет охватить все случаи одним рассуждением. Поступим иначе. Известно, что всякая симметрическая матрица P_{ij} может быть приведена невырожденным линейным преобразованием к каноническому диагональному виду:

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} q_{11} & & & \\ & q_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & q_{nn} \end{bmatrix}.$$

С геометрической точки зрения это означает, что соответствующая квадратичная поверхность рассматривается в более удобной системе координат, оси которой совпадают с главными осями поверхности. Ее уравнение приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ii}\, c_i\, c_i = 1\,. \qquad (10)$$

Тип квадратичной поверхности теперь совсем просто узнаётся по знакам коэффициентов q_{ii}. Для $n > 3$ поверхности не имеют собственных названий. Можно лишь пересчитать все их типы, совместимые с условиями (1) - (4). Пояснив предыдущим рассуждением связь между описанием горных пород матрицами P_{ij} и теорией квадратичных форм, введём следующее **определение**: петрографической структурой называется канонический тип Q_{ii} (с точностью до знаков коэффициентов) матрицы вероятностей P_{ij}, характеризующей организацию горной породы.

К сказанному необходимо следующее примечание. Из теории квадратичных форм известно, что подобные, то есть связанные невырожденным преобразованием подобия, симметрические матрицы приводятся к одному каноническому типу. Поэтому структура горной породы – это инвариант всех горных пород, характеризуемых подобными матрицами P_{ij}. Следующее **утверждение** показывает число возможных структурных типов горной породы в зависимости от числа n образующих её минералов: число возможных петрографических структур для n-минеральной горной породы равно $n(n+1)/2$, из них n – невырожденные, $n(n-1)/2$ – вырожденные. Доказательство. Прежде всего заметим, что один из коэффициентов q_{ii} в (10) должен быть положительным. Иначе исходная квадратичная форма была бы отрицательно определена и для некоторой горной породы:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ii} < 0 ,$$

что невозможно, так как каждая из вероятностей p_{ii} неотрицательна. Этим условием в качестве структурных индикатрис запрещаются мнимые квадратичные поверхности. Остальные коэффициенты q_{ii} в (10) могут быть положительными, отрицательными и нулями. Распределение плюсов, минусов и нулей на оставшихся (n-1) местах в (10) можно рассмотреть как выборку с повторениями из трёх элементов по (n-1). Их число равно $n(n+1)/2$[170]. Невырожденные квадратичные формы и отвечающие им петрографические структуры получаются, когда среди q_{ii} в (10) отсутствуют нули. В этом случае распределение плюсов и минусов на оставшихся (n-1) местах можно рассмотреть как выборку с повторениями из двух элементов по (n-1). Число таких выборок равно n. Вычитанием второго результата из первого находим число вырожденных структурных типов горных пород. Оно равно $n(n-1)/2$.

Легко проверить, что в случаях би- и трёхминеральных горных пород получено именно столько структурных типов. Все они были установлены в норитах и габброноритах Панского интрузива. Фактически показано, что в общем случае следует считать возможными все петрографические структуры, предусмотренные предыдущим утверждением. Поясним, почему вырожденные структуры в общем случае можно считать границами классификации. Ведь для $n > 3$ перестройки топологии квадратичных поверхностей уже не очевидны, так как для представления требуют многомерных пространств. Необходимое пояснение дается следующим **утверждением**: всякую вырожденную петрографическую структуру можно естественным образом поставить во взаимно-однозначное соответствие паре невырожденных структур. Доказательство. Число сочетаний из n невырожденных структур по две равно $n(n-1)/2$ – ровно столько, сколько существует вырожденных структур. Каждой паре невырожденных структур поставим в соответствие вырожденную по следующему правилу. В их канонических записях (10) выберем совпадающие – с точностью до знаков q_{ii} – части. Это всегда можно сделать, так как они заведомо содержат по одному положительному коэффициенту. Их несовпадающие части будут содержать в одном случае лишь положительные, в другом – отрицательные коэффициенты. Поставим в соответствие этой паре вырожденную структуру, которая в канонической записи содержит те же – с точностью до знаков

[170] Нефёдов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М.: МАИ, 1992. 264 с.

– ненулевые коэффициенты q_{ii}. По вырожденному типу однозначно восстанавливается пара разделяемых им невырожденных типов структур. Для иллюстрации укажем, что в многообразии трёхминеральных горных пород границами структур служат: для S_3^1 и S_3^2 - S_3^4, для S_3^2 и S_3^3 - S_3^5, для S_3^1 и S_3^3 - S_3^6. Изображения этих поверхностей и их алгебраическая систематика приведены в [171].

Хотя вырожденным структурам выше была приписана нулевая вероятность, их роль в нашей классификации велика. Они не только разделяют, но и сращивают невырожденные петрографические структуры в одно многообразие. Вполне просматриваются контуры алгебраической теории, в рамках которой можно будет описать качественные переходы между структурными типами и количественные – в пределах типа. Почти весь необходимый аппарат теории матриц изложен в книге [172]. Лишь немногие моменты требуют обращения к более глубоким пластам теории [173]. Есть объективная трудность в том, чтобы представить себе переход горной породы из одного структурного типа в другой через границы предлагаемой классификации в ходе геологического процесса. В подтверждение приведем цитату из предисловия к замечательной книге [174]. «Философ один раз не в переносном, а в буквальном смысле затанцевал, когда мы после мучительных усилий напали на интуитивную картину взаимного движения вещественных и мнимых фокусов в кривых второго порядка при последовательном переходе их одна в другую». Трудности неизмеримо возрастут, если попытаться представить себе структурные индикатрисы третьего и четвертого порядков. Тем не менее, в классификации петрографических структур пора отказаться от многословных описаний в пользу логики математической теории.

---

[171] Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М.: Наука, 1990. 672 с.

[172] Боревич З.И. Определители и матрицы. М.: Наука, 1988. 184 с.

[173] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

[174] Лосев А.Ф. Хаос и структура. М.: Мысль, 1997. 831 с. (с. 16).

Следует сказать о физической интерпретации предложенного формализма. Уравнение (10) определяет квадратичную поверхность и отвечающую ей петрографическую структуру с более удобной точки зрения, чем (5). Координаты новой системы линейно выражаются через координаты старой:

$$c_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, m_i \,. \qquad (11)$$

Процедура аналогична той, что выполняется всякий раз в факторном анализе для выявления групп коррелируемых величин[175]. Но m_i – это минералы исходной горной породы. Возникает идея представить c_k как их кластеры, составленные по правилам, выявляемым процедурой приведения матрицы вероятностей P_{ij} к диагональному виду Q_{ii}. Подходящая нормировка коэффициентов q_{ii} позволяет придать им смысл вероятностей. Тогда (10) опишет разбиение горной породы на монокластерные сочетания $c_k c_k$, поскольку в Q_{ii} вероятности межкластерных сочетаний равны нулю. Принцип предложенной систематики петрографических структур сводится к тому, чтобы выявить число образующих породу кластеров c_k и знаки, с которыми они входят в каноническую запись (10). По-видимому, знаки должны обозначать характер сочетаний кластеров в горной породе. При этом не ясно, являются ли кластеры и их сочетания связными – её дискретная топология позволяет различные варианты. Всё указывает на необходимость и возможность дальнейшего развития теории.

Внимательный читатель может заметить, что, например, перекристаллизация горных пород совершается главным образом благодаря диффузии частиц через бинарные, а не тернарные и тем более куотернарные границы. Поэтому описание петрографических структур в терминах вероятностей бинарных межзерновых контактов с этой точки зрения представляется физически

---

[175] Йереског К.Г. и др. Геологический факторный анализ. Л.: Недра, 1980. 223 с.; Белонин М.Д. и др. Факторный анализ в геологии. М.: Недра, 1982. 269 с.

наиболее обоснованным. Но заметим, что миграция вещества легче протекает именно вдоль тернарных контактов-каналов. А зарождение новых минеральных фаз энергетически наиболее выгодно именно в точках куотернарных контактов. Таким образом, каждый из вариантов классификации оказывается акцентированным на тот или иной аспект минерального агрегата.

Дальнейший шаг – развитие предложенного метода структурной индикатрисы на основе алгебраических форм 3-го порядка. Хотя теория кубических форм существует [176], но в общем виде она трудна для адаптации к нашему случаю. Зато хорошо разработана классификация Ньютона плоских кривых 3-го порядка [177]. Применим её к классификации биминеральных горных пород по статистикам тернарных межзерновых контактов. Для этого случая (8) преобразуется к виду:

$$p_{111}m_1^3 + p_{112}m_1^2 m_2 + p_{122}m_1 m_2^2 + p_{222}m_2^3 = 1 \qquad (12)$$

Перечисление таких кривых и составляет нашу задачу. Классификация кривых 3-го порядка выполнена по числу и взаимному положению бесконечных ветвей. Общее уравнение кривой обычно приводится к виду

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + \ldots$$
$$+ 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0 \qquad (13)$$

В нашем случае: $A = p_{111}$, $3B = p_{112}$, $3C = p_{122}$, $D = p_{222}$, $E = F = G = H = K = 0$, $L = -1$. Пусть $y = kx + b$ – асимптота. Для кривой (13) угловой коэффициент k определяется из уравнения

---

[176] Манин Ю.И. Кубическе формы. Алгебра, геометрия, арифметика. М.: Наука, 1972. 304 с.

[177] Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 294 с.; Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Физматиз, 1962. 478 с.; Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. СПб: Изд-во «Лань», 2002. 416 с.

$$A + 3Bk + 3Ck^2 + Dk^3 = 0, \tag{14}$$

b – из уравнения

$$(B + 2Ck + Dk^2)b = -(E + 2Fk + Gk^2). \tag{15}$$

Уравнение (14) дает три действительных или одно действительное и два комплексных *k*. Этим определяются число и направления бесконечных ветвей. Чтобы асимптота для *k* существовала, *b* должно определяться из (15). В нашем случае E = F = G = 0, поэтому

$$(B + 2Ck + Dk^2)\, b = 0\,. \tag{16}$$

Если

$$B + 2Ck + Dk^2 \neq 0\,, \tag{17}$$

то говорят, что ветвь имеет гиперболический тип. Если $b = 0$, то асимптота проходит через начало координат. Если при действительных *k* коэффициент *b* не определён, то ветвь не имеет асимптоты и говорят, что кривая имеет параболический тип. В зависимости от вида корней уравнения (14) можно классифицировать все структурные индикатрисы 3-го порядка петрографических структур на четыре группы, которые мы приводим, сохраняя название по Ньютону и указывая характерные формы.

1-я группа: все корни (14) действительны и различны; кривая имеет три асимптоты и три гиперболические ветви. Кривые носят название *hyperbolae reduntantes* (раскинутые гиперболы). Их формы:

• три гиперболические ветви и овал или две гиперболические и одна прямолинейная ветвь; прямолинейной называется ветвь, вытянутая вдоль асимптоты, которую пересекает и к которой приближается в двух противоположных направлениях (рис. 11.4 а, б),

• три гиперболические ветви (рис. 11.4 в),

• три гиперболические ветви, две из которых пересекаются, или три гиперболические ветви, одна из которых имеет узловую точку (рис. 11.4 г, д),

• три гиперболические ветви и изолированная точка (рис. 11.4 е),

• три гиперболические ветви, одна из которых имеет точку возврата (рис. 11.4 ж).

2-я группа: уравнение (14) имеет один действительный корень, кривые – одну асимптоту и прямолинейную ветвь. Они называются *hyperbolae defectivae* (дефективные гиперболы). Их формы:

• одна прямолинейная ветвь и овал (рис. 11.5 а),

• одна прямолинейная ветвь (рис. 11.5 б),

• прямолинейная ветвь с узлом (рис. 11.5 в),

• прямолинейная ветвь и изолированная точка (рис. 11.5 г),

• прямолинейная ветвь с точкой возврата (рис. 11.5 д).

3-я группа: уравнение (14) имеет двукратный действительный корень и $E+2Fk+Gk^2 = 0$. Эти кривые называются hyperbolism sectionum conicarum (гиперболизмы конических сечений). Их формы:

• две ветви с общими асимптотами и бесконечно удалённой точкой возврата (рис. 11.6 а),

• прямолинейная ветвь с бесконечно удалённой изолированной точкой (рис. 11.6 б).

4-я группа: уравнение (14) имеет трёхкратный действительный корень. Здесь возможен только один случай: $E+2Fk+Gk^2 = F+Gk = 0$, при этом $H+Kk = 0$ – кривая распадается на три параллельные прямые.

Таким образом, даже для биминеральных горных пород уравнение (14) порождает большое разнообразие структурных индикатрис 3-го порядка, выражающих статистики тернарных межзерновых контактов, то есть в конечном счёте – типы взаимных пространственных отношений минеральных зёрен различных видов.

Мне известен скепсис в отношении предложенного «слишком алгебраического» способа типизации петрографических

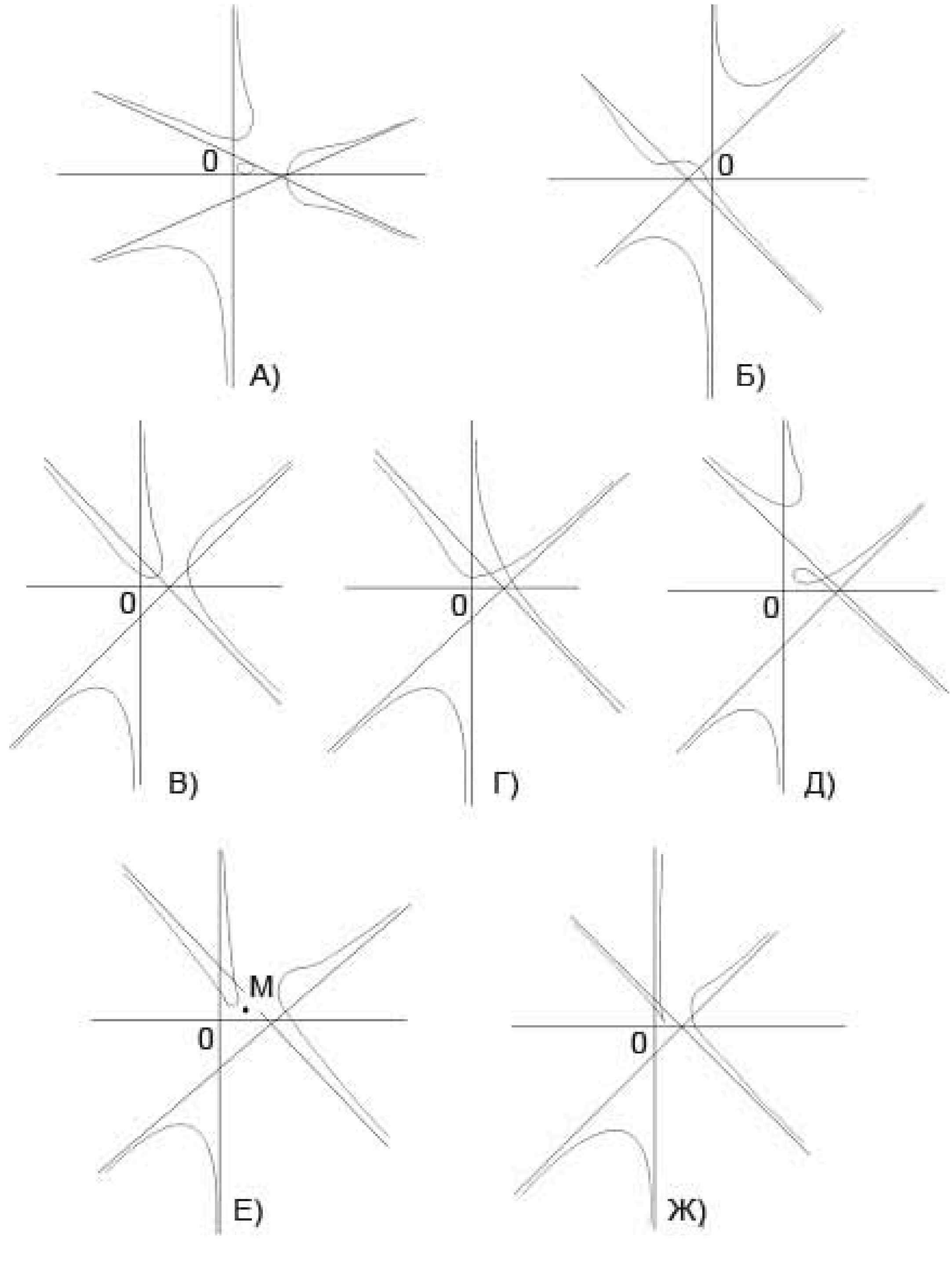


Рис. 11.4. Кривые 1-ой группы.

структур. Но вот исторический пример, обнаруженный совсем недавно. «Аналитическая геометрия устанавливает различные виды сингулярностей: точки узловые (фиг. 20, a), возврата (фиг. 20, b), уединённые, точки прекращения (фиг. 20, c), угловые (фиг. 20, d). Из них для химических диаграмм наибольший интерес представляют: a) узловые точки (*Nodus, Knote*), которые могут встречаться как в алгебраических, так и в трансцен-

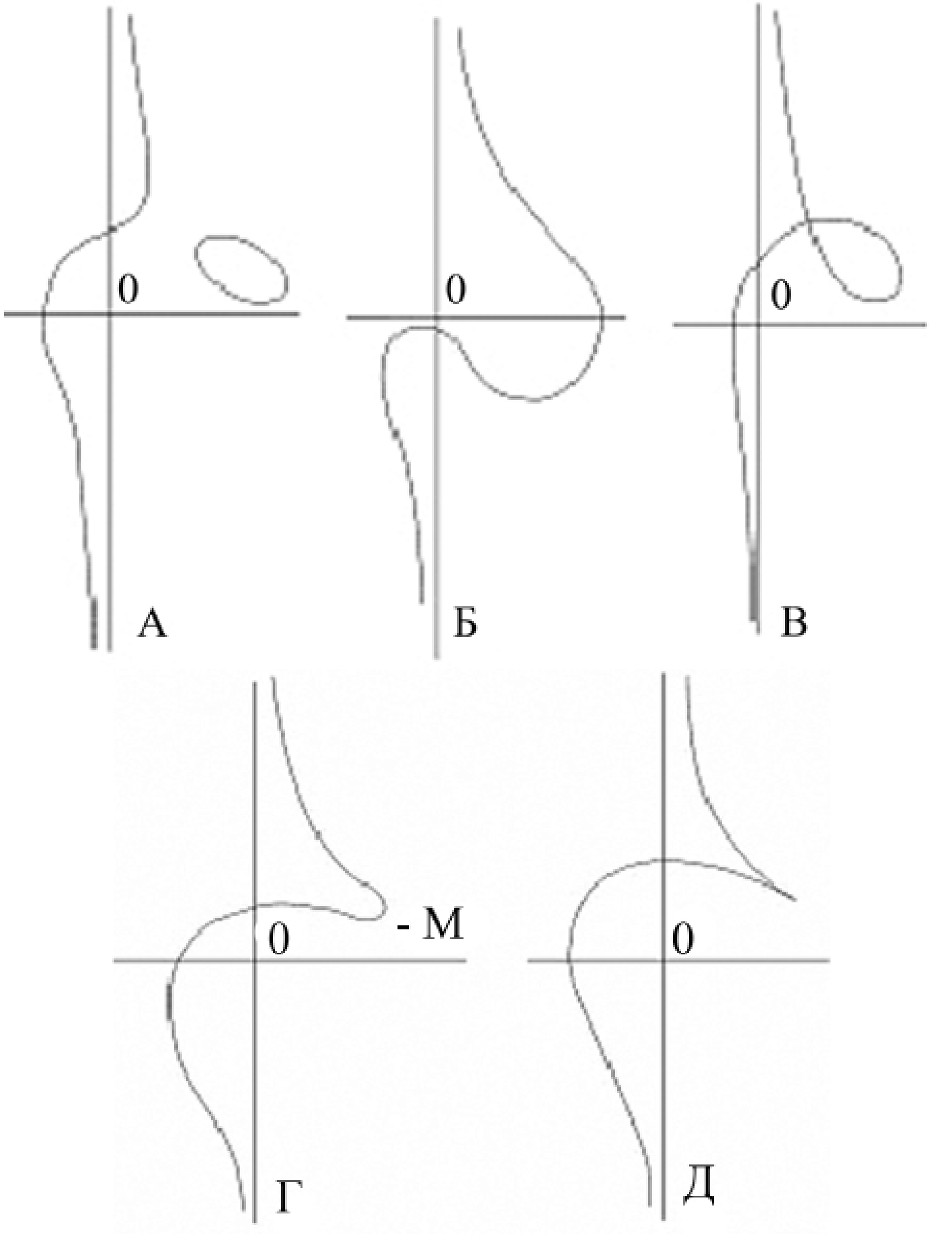


Рис. 11.5. Кривые 2-ой группы.

дентных кривых; b) точки возврата (*Cuspis, Spinode, points de rebroussement, Rückkehrpunkte*) представляют частный случай двойных узловых точек, когда обе касательные совпадают друг с другом; c) угловые точки (*points anguleux*, *Ecke*), наблюдаемые только в трансцендентных, например, в логарифмических и показательных кривых…

Рассмотрим сначала узловы точки, свойственные алгебраическим кривым 3-го и высших порядков… Кривыя 3-го порядка дают примеры различных форм вещественного узла, изо-

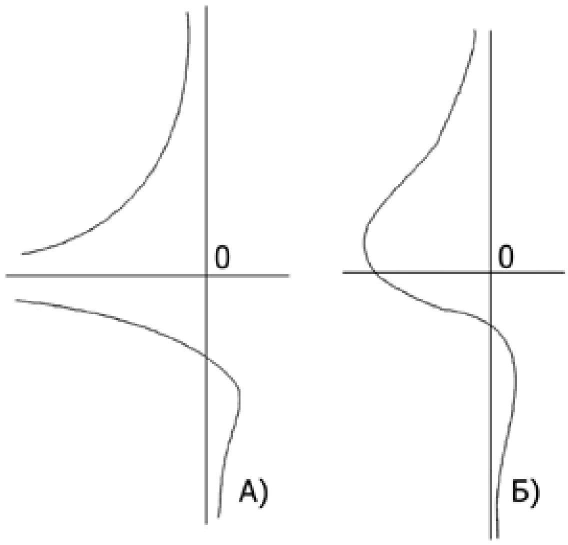
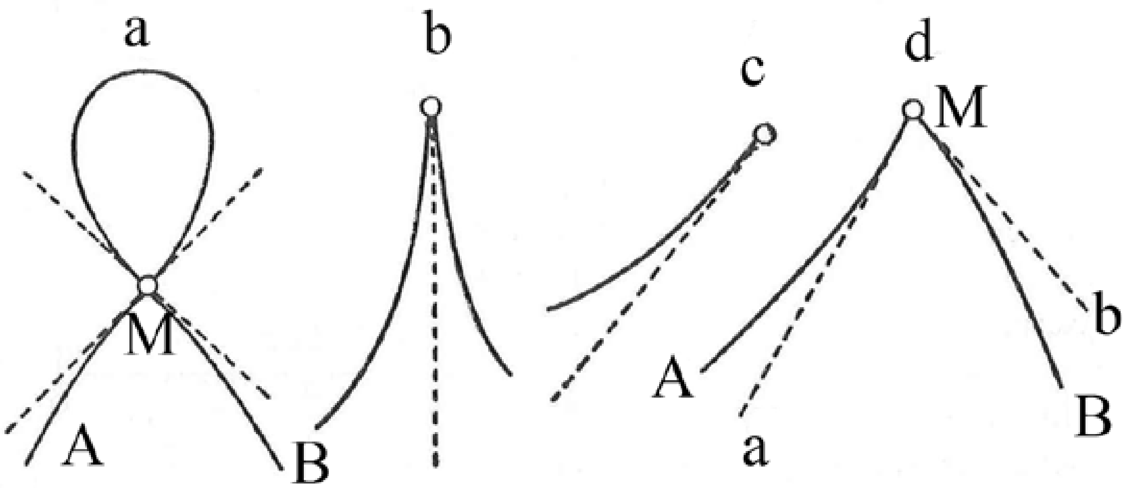


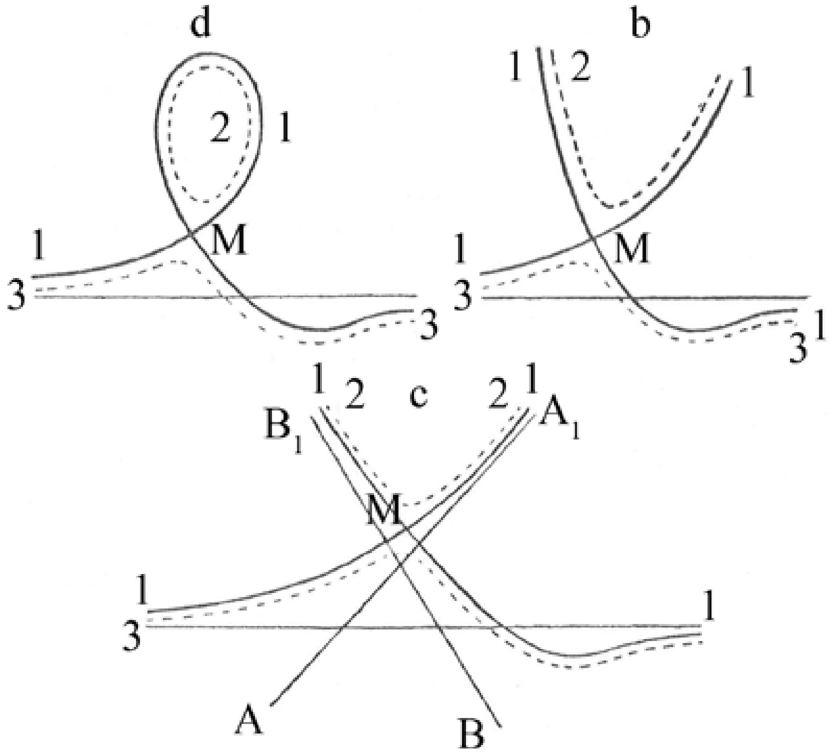
Рис. 11.6. Кривые 3-ей группы.



Фиг. 20.

бражённых на фиг. 21, a, b, c. Кроме замкнутого в конечном расстоянии от сингулярной точки M (фиг. 21, a, кривая 1) эллиптического узла имеются также параболическая (фиг. 21, b, 1) и гиперболическая (фиг. 21, c, 1) формы, в которых замыкание ветвей совершается в бесконечно удалённых точках. Последние при гиперболическом узле лежат на двух пересекающихся под углом асимптотах AA_1 и BB_1, которые следует считать относящимися к одной непрерывной кривой…

Приведенные данные показывают, что геометрическое и химическое понятия о сингулярностях покоятся на одних и тех



Фиг. 21.

же основаниях… Соответствие между геометрическими инвариантами положения или сингулярными точками кривых и химическими инвариантами превращений или определёнными соединениями является в высшей степени замечательным соотношением, которое лежит в основе химической диаграммы и определяет весь её строй… Тесная связь между геометрическими и химическими инвариантами уже теперь даёт возможность сделать ряд выводов, которые намечают новые пути для химического исследования. Общие свойства геометрических инвариантов должны быть перенесены также и на химические инварианты»[178]. По сути, моя идея состоит в том же – перевести инварианты алгебраических поверхностей 2-го, 3-го и 4-го

[178] Курнаков Н.С. Введение в физикохимический анализ. Три речи: Соединение и химический индивид. Непрерывность химических превращений вещества. Сингулярные точки химических диаграмм. Л.: Научное химико-техническое изд-во, 1925. 88 с. (с. 65-85). Работа обнаружена в личном фонде акад. А.Е. Ферсмана научной библиотеки Кольского НЦ РАН.

порядков в n-мерном пространстве на язык петрографических инвариантов, которые и есть петрографические структуры.

Здесь было бы уместно перейти к алгебраическим поверхностям (или хотя плоским кривым) 4-го порядка, но такой теории пока нет. Вместо этого вспомним, что нерассмотренными остались мономинеральные горные породы, к которым предложенный подход не применим. Здесь особенности организации заключаются не во взаимном расположении минеральных индивидов различных видов, а в различной координации индивидов одного вида. Но и этот акцент замечательно характеризуется статистически.

Рассмотрим полигональное разбиение плоскости с условием – полигоны контактируют лишь по два (по общей стороне) и по три (в общей точке) (рис. 11.7). Легко видеть, что рёбра ячеистой поверхности образуют граф. Сама природа подсказывает нам необходимый аппарат. Вот уж воистину «природа написана языком математики»! Пусть N_0 – число вершин графа, N_1 – рёбер, N_2 – ячеек. Найдём среднюю координацию ячейки, то есть среднее число сторон полигона. Она равна $2N_1 / N_2$,

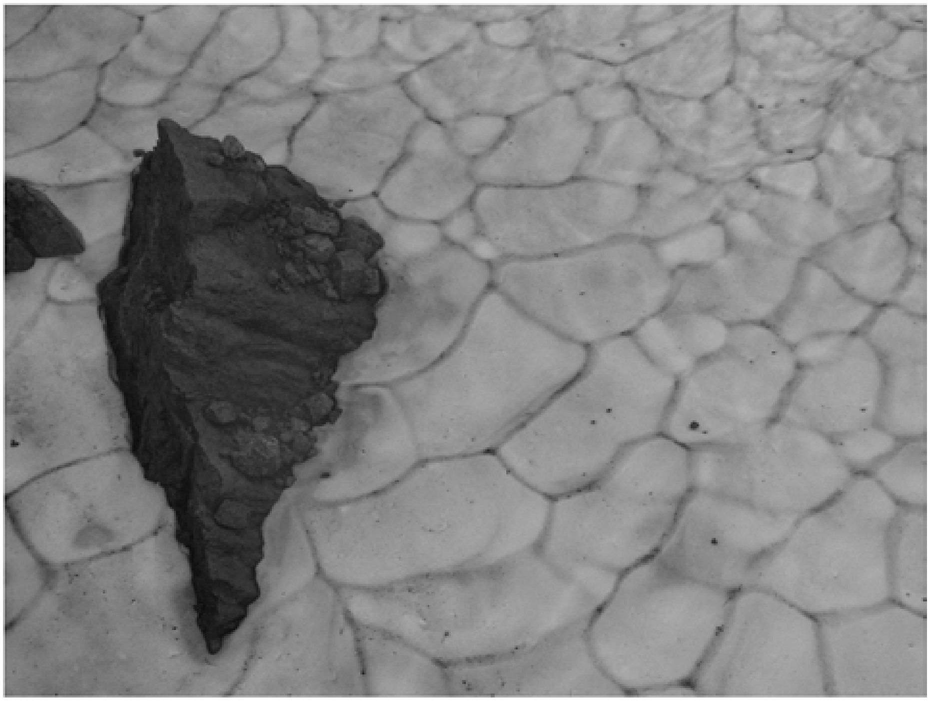


Рис. 11.7. Ячеистая поверхность снежника. Перевал Сев. Рисчорр, Хибины, лето 2011 г.

поскольку каждое ребро графа принадлежит двум полигонам. По теореме Эйлера, $N_0 - N_1 + N_2 = 2$. Так как из каждой вершины графа исходит ровно три ребра, то $3N_0 = 2N_1$. Решая совместно два последних уравнения, находим: $2N_1 / N_2 = 6 (1 - 2 / N_2)$. Устремив N_2 в бесконечность, получим $2N_1 / N_2 = 6$. Итак, для «достаточно большого» разбиения плоскости координация ячейки равна 6. Разве не удивительно? В этом результате сплелись особенности топологии плоскости (теорема Эйлера) и дополнительное условие (в каждой вершине графа контактируют ровно три ячейки). Но как достигается эта средняя координация?

Легко представить себе замощение плоскости шестиугольными плитками – пример из классической кристаллографии. Это – не наш случай. Даже на рис. 11.7 видно, что координации ячеек варьируют, как минимум, от 3 до 8, образуя некоторое статистическое распределение. Это – важный результат. Если 6 – инвариант ячеистой поверхности снежника, то распределение координаций – его вариабельная характери-стика, говорящая о текущем состоянии, которое, возможно, ранее было другим и, быть может, стремится к другому.

Рис. 11.8. Шкала структур перекристаллизации.

Рассмотрим аналогично реальную горную породу, в которой по общей поверхности граничат два минеральных индивида, по ребру – три, в общем узле – четыре. Пусть N_0 – число узлов, N_1 – рёбер, N_2 – граней, N_3 – ячеек графа. Найдём среднюю координацию ячейки $2N_2 / N_3$. Параметры связаны соотношением Эйлера-Пуанкаре $N_0 - N_1 + N_2$

$-N_3 = 0$. Почти очевидно, что $N_1 = 2\ N_0$. Ещё одну связь можно получить, определив параметр k как среднее число рёбер у грани ячейки: $3\ N_1 = k\ N_2$. Решая совместно три последних уравнения, находим: $2N_2 / N_3 = 12 / (6 - k)$. Итак, средняя координация зерна в реальном агрегате не является инвариантом. График её зависимости от k дан на рис. 11.8. По сути, это шкала структур перекристаллизации мономинеральных горных пород. Знаменитая равновесная «структура Коксетера» (рис. 11.9) отвечает на ней значению $k = 5.12$.

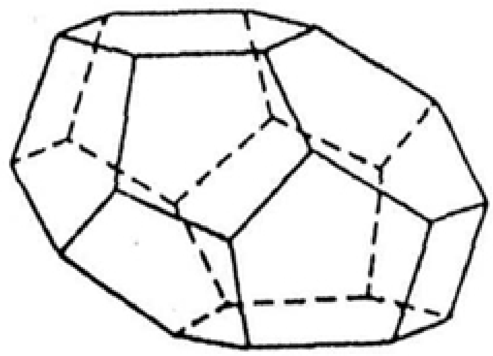


Рис. 11.9. Тетракайдекаэр – одно из полиэдрических приближений к «ячейке Коксетера», образующей «структуру Коксетера».

На пути к этой «идеальной» структуре средняя координация минерального зерна может проходить ряд «кристаллографических» значений 4, 6, 8, 12, которые локально могут реализоваться в виде «правильных» упаковок минеральных зёрен, фиксироваться физическими методами и создавать ложное представление об организации любой горной породы в духе кристаллографии (отсюда – идея «элементарной ячейки», путём трансляции покрывающей весь объём горной породы).

Неизвестно, языком какой математической дисциплины будет наилучшим образом изложена теория петрографических структур. Ясно лишь, что этот язык и эту теорию пора настоятельно искать, если эквифинальная «структура Коксетера» (по сути – структура мыльной пены) – лучшее, чем обладает петрография, гляциология, металлография[179]…

[179] Бродская Р.Л. Термодинамические (кинетические) критерии формирования и эволюции структуры минеральных агрегатов // Зап. ВМО. 1988. № 5. С. 623-633; Жабин А.Г., Харченков А.Г.

В заключение этого этюда обратим внимание на то, что в вопросах классификации петрографических структур сегодня недооценивается роль акцессорных минералов – этих «родимых пятнышек», которые всегда присутствуют в горных породах и в специальных исследованиях дают ценную информацию (например, для изотопной геохимии и геохронологии). Предлагаемый далее **метод вычитания акцессориев** базируется на принципе: два акцессория занимают в петрографической структуре одинаковую позицию, если после их «вычитания» оставшаяся матрица относится к одному структурному типу. Покажем, как работает метод, определяя структурный тип матрицы по индикатрисе 2-го порядка, которую будем определять по канонической форме матрицы P_{ij}. Существо процедуры приведения исходной квадратичной формы к канонической следует из наблюдения, что разность:

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} m_i m_j - \frac{1}{p_{1j}} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{1j} m_j \right)^2, \tag{18}$$

не содержит m_1 . Повторяя процедуру необходимое число раз, исходную форму всегда можно привести к сумме квадратов:

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} m_i m_j = \sum_{k=1}^{n} q_k \alpha_k^2, \tag{19}$$

Равновесная структура минерального агрегата // Кристаллография и минералогия. Л.: Изд-во ЛГИ, 1972. С. 61-71; Обер Дж.Г., Крейник Э.М., Рэнд П.Б. Водные пены // В мире науки. 1986. № 7. С. 36-45; Салтыков С.А. Стереометрическая метеллография. М.: Металлургия, 1958. 446 с.; Coxeter H.S.M. Close-packing and froth // Ill. J. Math. 1958. V 2. N 4B. P 746-758; Myers E.J., Sinnot M.J. Quantitative metallography for particles having polyhedral shapes // Computer applications in metallurgical engineering. Amer. Soc. Metals. 1964. P 17-21; Thompson d’Arsy Wentworth. On growth and form. Cambridge: University Press; New York: MacMillan Co, 1945. 1116 p.; Watson D.F. The number of edges per face in a large aggregate of space-filling, random-sized, randomly arranged polyhedral // Math. Geol. 1975. V 7. N 4. P 349-354; Watson D.F. The structure of paraequilibrium aggregates // Math. Geol. 1981. V 13. N 4. P 357-360.

где α_k – стоящая в скобках в (18) линейная комбинация. Типизация петрографической структуры сводится теперь к выяснению числа положительных и отрицательных q_k. Теорема, известная как «закон инерции квадратичных форм», гарантирует, что оно не зависит от очередности выделения m_i согласно (19). Для определённости применим следующий **принцип номенклатуры**: запись S_n^m означает структуру n-минеральной горной породы, у которой в канонической записи ровно m положительных q_k.

Рассмотрим процедуру приведения исходной квадратичной формы к каноническому виду на примере норитов и габбро-норитов Панских тундр (рис. 11.1). Нориты характеризуются следующими матрицами P_{ij} вероятностей межзерновых контактов:

$$\begin{bmatrix} .15 & .27 \\ .27 & .31 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .19 & .21 \\ .21 & .39 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие квадратичные формы приводятся к каноническому виду следующим образом:

$$0.15\, m_1^2 + 0.31\, m_2^2 + 0.54\, m_1 m_2 = \frac{1}{0.15}\,(0.15\, m_1 + 0.27\, m_2)^2 - 0.176\, m_2^2$$

$$0.19\, m_1^2 + 0.39\, m_2^2 + 0.42\, m_1 m_2 = \frac{1}{0.19}\,(0.19\, m_1 + 0.21\, m_2)^2 + 0.158\, m_2^2$$

В соответствии с принципом номенклатуры, первый тип структуры следует назвать S_2^1, второй - S_2^2.

Габбронориты характеризуются следующими матрицами P_{ij} вероятностей межзерновых контактов:

$$\begin{bmatrix} .00 & .03 & .07 \\ .03 & .08 & .22 \\ .07 & .22 & .28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .04 & .03 & .09 \\ .03 & .01 & .16 \\ .09 & .16 & .39 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .08 & .05 & .10 \\ .05 & .14 & .11 \\ .10 & .11 & .26 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие квадратичные формы приводятся к каноническому виду следующим образом:

$$0.08\,m_2^{\,2} + 0.28\,m_3^{\,2} + 0.06\,m_1\,m^2 + 0.14\,m_1\,m^3 + 0.44\,m_2\,m_3 =$$
$$\frac{1}{0.08} = (0.03\,m_1 + 0.08\,m_2 + 0.22\,m_3)^2 - \frac{1}{0.325}(0.0125\,m_1 + 0.325\,m_3)^2 - 0.0108\,m_1^{\,2}$$

$$0.04\,m_1^{\,2} + 0.01\,m_2^{\,2} + 0.39\,m_3^{\,2} + 0.06\,m_1\,m_2 + 0.18\,m_1\,m_3 + 0.32\,m_2\,m_3 =$$
$$= \frac{1}{0.04}(0.04\,m_1 + 0.03\,m_2 + 0.09\,m_3)^2 + \frac{1}{0.1875}(0.0925\,m_2 + 0.1875\,m_3)^2 - 0.0581\,m_2^{\,2}$$

$$0.08\,m_1^{\,2} + 0.14\,m_2^{\,2} + 0.26\,m_3^{\,2} + 0.10\,m_1\,m_2 + 0.20\,m_1\,m_3 + 0.22\,m_2\,m_3 =$$
$$= \frac{1}{0.08}(0.08\,m_1 + 0.05\,m_2 + 0.10\,m_3)^2 + \frac{1}{0.109}(0.109\,m_2 + 0.0475\,m_3)^2 + 0.114\,m_3^{\,2}$$

В соответствии с предложенным принципом номенклатуры, структурные типы габброноритов следует назвать S_3^1, S_3^2 и S_3^3.

Применим метод вычитания акцессориев к анализу гранулита из террейна Гренвилл, Канада[180] (рис. 11.10). Он интересен тем, что представляет собой «чистую мозаику» без пространственных корреляций зёрен различных минеральных видов, тестированную целым рядом статистических методов. Его слагают шесть минералов, распадающихся на три группы. Скаполит и пироксен образуют каркас горной породы. Удаление любого из них нарушает её связность. Апатит и циркон встречаются в единичных зёрнах и не дают представительной статистики межзерновых отношений. Ради упрощения расчётов они исключены из дальнейшего рассмотрения. Титанит и амфибол – минералы, структурные позиции которых будем сравнивать. Они не являются каркасообразующими, но их до-

---

[180] Kretz R. On the spatial distribution of crystals in rock // Lithos. 1969. V 2. N 1. P 39-65.

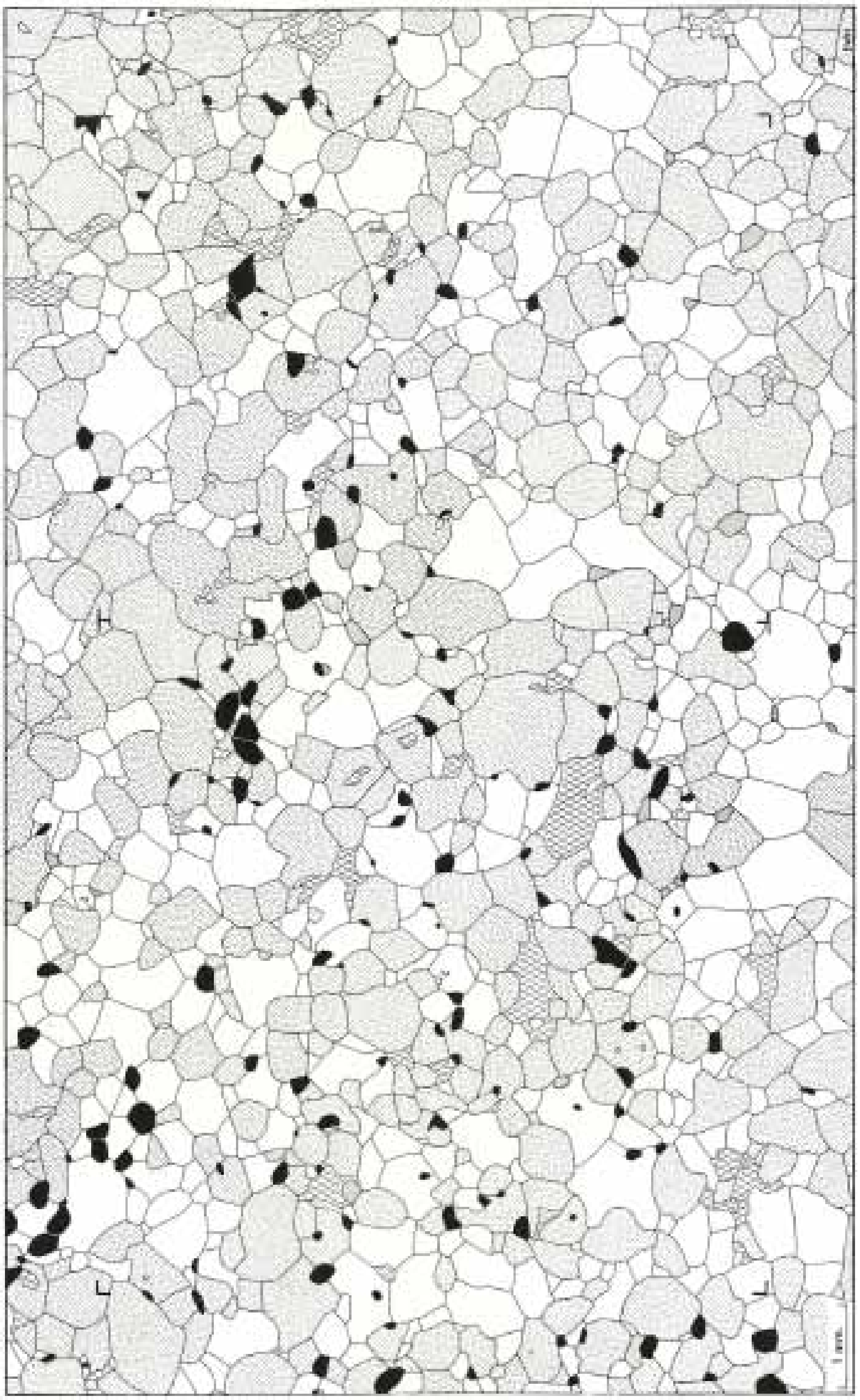


Рис. 11.10. Гранулит из террейна Гренвилл, Канада. Белый – скаполит, светло-серый – пироксен, средне-серый – апатит, чёрный – титанит, заштрихован – амфибол, Z – циркон.

статочно, чтобы иметь представительную для анализа статистику межзерновых отношений.

Рассчитанные по всему рис. 11.10, матрицы чисел межзерновых контактов и вероятностей p_{ij} даны ниже. В них первые строки (и столбцы) соответствует скаполиту (s), вторые – пироксену (p), третьи – амфиболу (a), четвертые – титаниту (t). Предоставляю читателю убедиться, что квадратичная форма приводится к каноническому виду $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2$. То есть, рассматриваемый без зёрен апатита и циркона, гранулит относится к структурному типу S_4^3.

$$\begin{bmatrix} 605 & 535 & 35 & 124 \\ 535 & 619 & 44 & 120 \\ 35 & 44 & 14 & 6 \\ 124 & 120 & 6 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} .203 & .181 & .012 & .042 \\ .181 & .208 & .015 & .040 \\ .012 & .015 & .005 & .002 \\ .042 & .040 & .002 & .003 \end{bmatrix}.$$

Исключим из рассмотрения поочередно зёрна амфибола и титанита. Формально для этого достаточно исключить из матриц их строки и столбцы:

$$\begin{bmatrix} 605 & 535 & 124 \\ 535 & 619 & 120 \\ 124 & 120 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 605 & 535 & 35 \\ 535 & 619 & 44 \\ 35 & 44 & 14 \end{bmatrix}.$$

Теперь квадратичные формы приводятся к следующим каноническим видам:

$$605\ s^2 + 619\ p^2 + 10\ t^2 + 1070\ sp + 248\ st + 240\ pt =$$

$$= \frac{1}{605}\ (605\ s + 535\ p + 124\ t)^2 + \frac{1}{146}\ (146\ p + 10\ t)^2 - 16\ t^2,$$

$$605\ s^2 + 619\ p^2 + 14\ a^2 + 1070\ sp + 70\ sa + 88\ pa =$$

$$= \frac{1}{605}\ (605\ s + 535\ p + 35\ a)^2 + \frac{1}{146}\ (146\ p + 13\ a)^2 + 11\ a^2 \quad .$$

Таким образом, для зёрен амфибола и титанита окружающая их порода имеет структурные типы S_3^2 и S_3^3, соответственно. Амфибол и титанит занимают в структуре гранулита различные позиции. Это особенно любопытно потому, что в целом он является «чистой мозаикой».

Выше указано, что метод вычитания акцессориев предназначен для сравнения структурных позиций минералов, «вычитание» которых из горной породы не нарушает её связности. Этот критерий достаточно нагляден и позволяет однозначно разделить минералы на группы с принципиально различной ролью в организации горной породы. С физической точки зрения какие-либо условные количественные границы для вероятностей p_{ij} представляются менее приемлемыми. Но с алгебраической точки зрения не существенно, какие строки и столбцы удаляются из исходной матрицы вероятностей. В этом смысле метод пригоден для сравнения структурных позиций любых минералов.

Предыдущее замечание подводит к более общему вопросу о строгих критериях, которые могли бы различить минералы по их структурной роли в горной породе. Так, правомерна следующая формулировка задачи: при некоторых допущениях относительно пространственного распределения минералов в n-минеральной горной породе найти, какое их число заведомо образует связный каркас, а также критерии их выявления.

Нельзя забывать, что теоретически все вероятности p_{ij} мыслятся рассчитанными для трёхмерной горной породы и её статистически устойчивыми характеристиками. Первая процедура сегодня технически невозможна и потому метод иллюстрируется плоскими сечениями горной породы. Важно знать, отвечает ли в общем случае найденный в сечениях структурный тип S_n^m истинному. Если нет, то каковы области изменения p_{ij}, для которых 2D диагностика типа S_n^m соответствует 3D диагностике. Что касается устойчивости вероятностей p_{ij}, то в 2D случае она может быть изучена без труда.

Расчёт q_k при переходе от исходной квадратичной формы к её каноническому виду должен выполняться с точностью, обеспечивающей тождественность преобразования (19). Только при этом условии можно быть уверенным в правильности знаков для q_k. Именно они, а не абсолютные значения q_k имеют значение для диагностики петрографических структур.

Это особенно важно для горных пород с переходной, пограничной – между различными типами S_n^m - организацией.

Оба метода – структурной индикатрисы и вычитания акцессориев – предназначены для выяснения геометрии горной породы в терминах вероятностей межзерновых контактов. Выявляемые на этом пути особенности организации обусловлены как состоянием исходного субстрата, так и его последующей историей. Но перейти к генетическим реконструкциям можно будет только после изучения обширного многообразия горных пород. Именно поэтому, несмотря на трудности восприятия математического аппарата, мы рекомендуем рассмотренные методы классификации петрографических структур к широкому применению и разносторонней проверке. Да и нет другого выхода, поскольку «природа написана языком математики…»

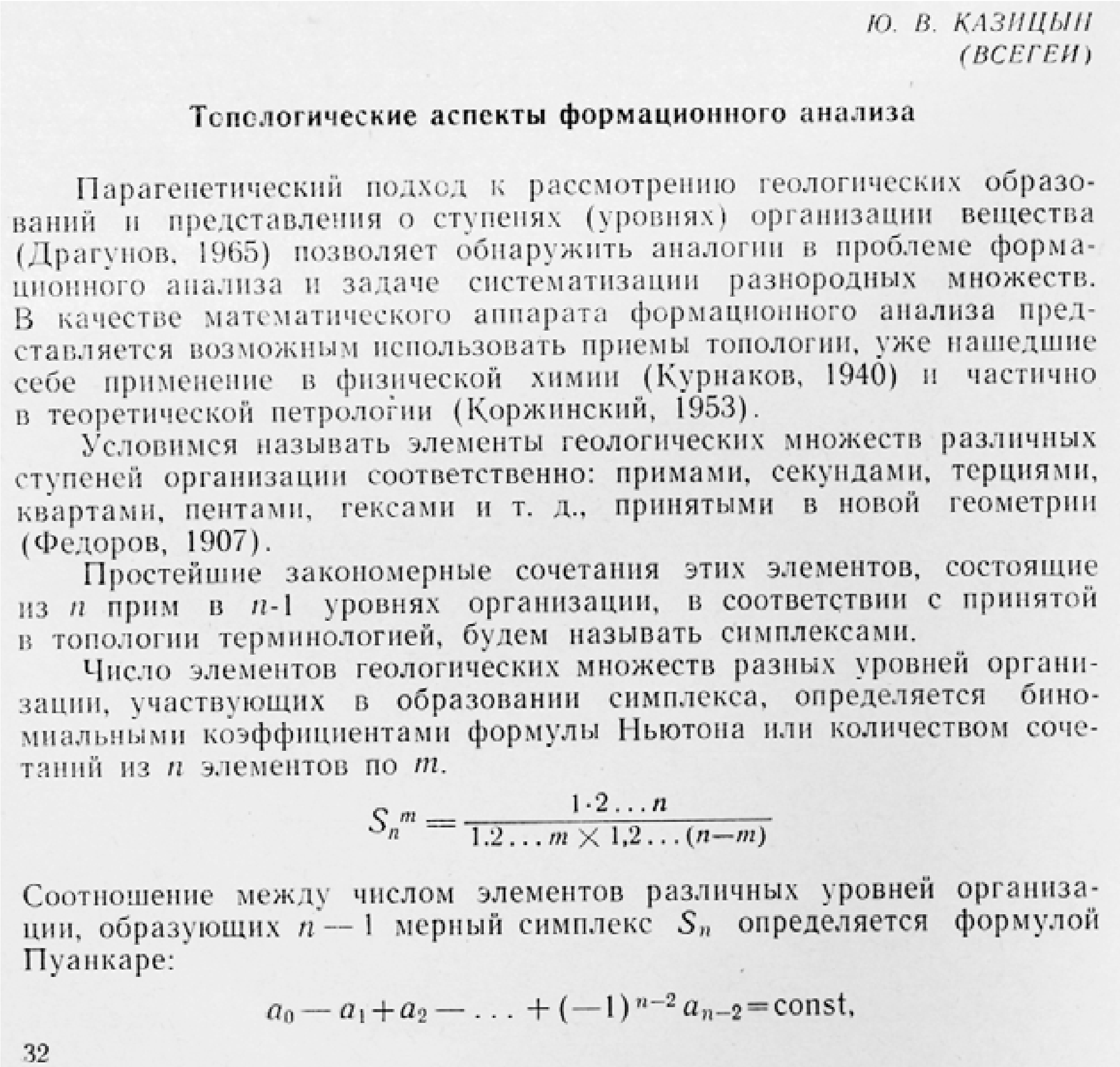
ЭТЮД 12: ПРАВИЛО ФАЗ И ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Есть личности, встреча с которыми запоминается и питает тебя долгие годы высказанными и невысказанными смыслами. А есть личности, встреча с которыми не состоялась, и об этом ты жалеешь столь же сильно. Для меня таковыми являются А.Б. Вистелиус, Ю.А. Косыгин, Ю.В. Казицын… Последний известен как специалист по метасоматизму гидротермальных месторождений. В 1977 г., поступив на ГРФ ЛГИ, я слышал о его курсе лекций, незадолго до того прочитанном в Горном институте, и который мне уже не дано было прослушать. А много позднее, уже на Кольском п-ове, в научной библиотеке Кольского НЦ РАН обнаружил среди работ Ю.В. статью[181] в четыре странички (рис. 12.1), которая в моём представлении обозначила Ю.В. как одного из самых оригинальных и смелых мыслителей в отечественной геологии.

В первом приближении суть статьи понятна. Ю.В. обратил внимание на совпадение двух фундаментальных уравнений: формулы Эйлера **В – Р + Г = 2** для выпуклых полиэдров (В – число вершин, Р – число рёбер, Г – число граней) и правила фаз Гиббса **f – n + k = 2** для равновесных систем (f – число степеней свободы, n – число компонентов, k – число фаз). Далее он заметил, что формула Эйлера обобщается на многомерные политопы в виде формулы Пуанкаре $\Sigma\ (-1)^i A_i = 1$ (где A_i – число i-мерных граней n-мерного политопа, $i = 0, 1 \dots n$), или в эквивалентной форме, приводимой Ю.В., $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$, и эвристично обобщил правило фаз Гиббса на геологические системы, иерархически организованные из компонентов, фаз, фаций, сервий, нимий, формаций… Здесь сфера деятельности геологии заканчивается, но уравнение Ю.В. открыто для добавления новых – космического масштаба – чле-

[181] Казицын Ю.В. Топологические аспекты формационного анализа // Геологические формации. Материалы к совещанию. Ленинград, 21-24 мая 1968 г. Л.: ВСЕГЕИ, 1968. С. 32-35.

нов и превращается в универсальное уравнение состояния как угодно сложной природной системы. Грандиозно! Но более внимательное прочтение текста обнаруживает ряд тонких мест, обсуждение которых вскрывает «подводную часть айсберга».



Ю. В. КАЗИЦЫН
(ВСЕГЕИ)

Топологические аспекты формационного анализа

Парагенетический подход к рассмотрению геологических образований и представления о ступенях (уровнях) организации вещества (Драгунов, 1965) позволяет обнаружить аналогии в проблеме формационного анализа и задаче систематизации разнородных множеств. В качестве математического аппарата формационного анализа представляется возможным использовать приемы топологии, уже нашедшие себе применение в физической химии (Курнаков, 1940) и частично в теоретической петрологии (Коржинский, 1953).

Условимся называть элементы геологических множеств различных ступеней организации соответственно: примами, секундами, терциями, квартами, пентами, гексами и т. д., принятыми в новой геометрии (Федоров, 1907).

Простейшие закономерные сочетания этих элементов, состоящие из n прим в n-1 уровнях организации, в соответствии с принятой в топологии терминологией, будем называть симплексами.

Число элементов геологических множеств разных уровней организации, участвующих в образовании симплекса, определяется биномиальными коэффициентами формулы Ньютона или количеством сочетаний из n элементов по m.

$$S_n^m = \frac{1\cdot 2\ldots n}{1.2\ldots m \times 1,2\ldots(n-m)}$$

Соотношение между числом элементов различных уровней организации, образующих $n-1$ мерный симплекс S_n определяется формулой Пуанкаре:

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^{n-2} a_{n-2} = \text{const},$$

32

Рис. 12.1. Начало статьи Ю.В. Казицына.

1. Легко видеть, что в уравнение Эйлера входят однородные величины: **В** – 0-мерные грани, **Р** – 1-мерные грани, **Г** – 2-мерные грани. В правиле фаз Гиббса к однородным величинам можно отнести: **n** – число компонент и **k** – число фаз, в силу их следующих определений: **компонент** (независимое составляющее вещество) – составляющее систему вещество,

концентрация которого может быть выбрана произвольно без изменения числа фаз (NB: составляющее вещество – это вещество, которое может быть выделено из системы и существовать вне её); **фаза** – совокупность всех гомогенных частей системы, одинаковых во всех точках по составу, химическим и физическим свойствам и отграниченных от других частей поверхностью раздела. Иначе говоря, компоненты и фазы обладают пространственной протяжённостью, что роднит их между собой и с величинами уравнения Эйлера. В то же время, **f** – число степеней свободы, подразумевает изменение параметров равновесной системы, не имеющих протяжения, например, температуры и / или давления. Таким образом, аналогия однородного уравнения Эйлера и неоднородного соотношения Гиббса настораживает.

2. Второе обстоятельство, обращающее на себя внимание – что с чем сопоставляется в уравнениях Эйлера и Гиббса? Ясно, что **Р** соответствует **n**, ведь только они входят в уравнения со знаком минус. Но чему отвечает **В**: **f** или **k**? (Соответственно, чему отвечает **Г**: **k** или **f**?) На самом деле, можно принять любой из вариантов, поскольку дуальным переходом (от куба к октаэдру и наоборот, от додекаэдра к икосаэдру и наоборот…) всегда можно перейти к полиэдру, у которого числа вершин **В** и граней **Г** меняются местами.

3. В правой части обоих уравнений стоит привычная, ускользающая от анализа двойка. Между тем, в солидных учебниках физической химии отмечается, что она подразумевает основные внешние факторы, управляющие равновесием в системе – температуру и давление. При наличии дополнительного переменного фактора равновесия, например, электрического потенциала, правило фаз принимает вид **f – n + k = 3**. Наоборот, при P = const или T = const имеем **f – n + k = 1**, а при P = const и T = const получаем **f – n + k = 0**. Соотношение Эйлера отзывается на эту вариабельность удивительной аналогией. А именно, его правая часть закономерно меняется для графов, нарисованных на поверхностях разного рода: сфере (**2**); торе,

поверхности Мёбиуса, бутылке Клейна (**0**); «кренделе» с двумя дырками (**-2**); «прянике» с тремя дырками (**-4**). Эти константы столь важны, что получили название эйлеровых характеристик поверхностей. Иначе говоря, анализ систем с P = const и T = const параллелизуется с рассмотрением комбинаторики графов на торе (рис. 12.2). Любопытная аналогия!

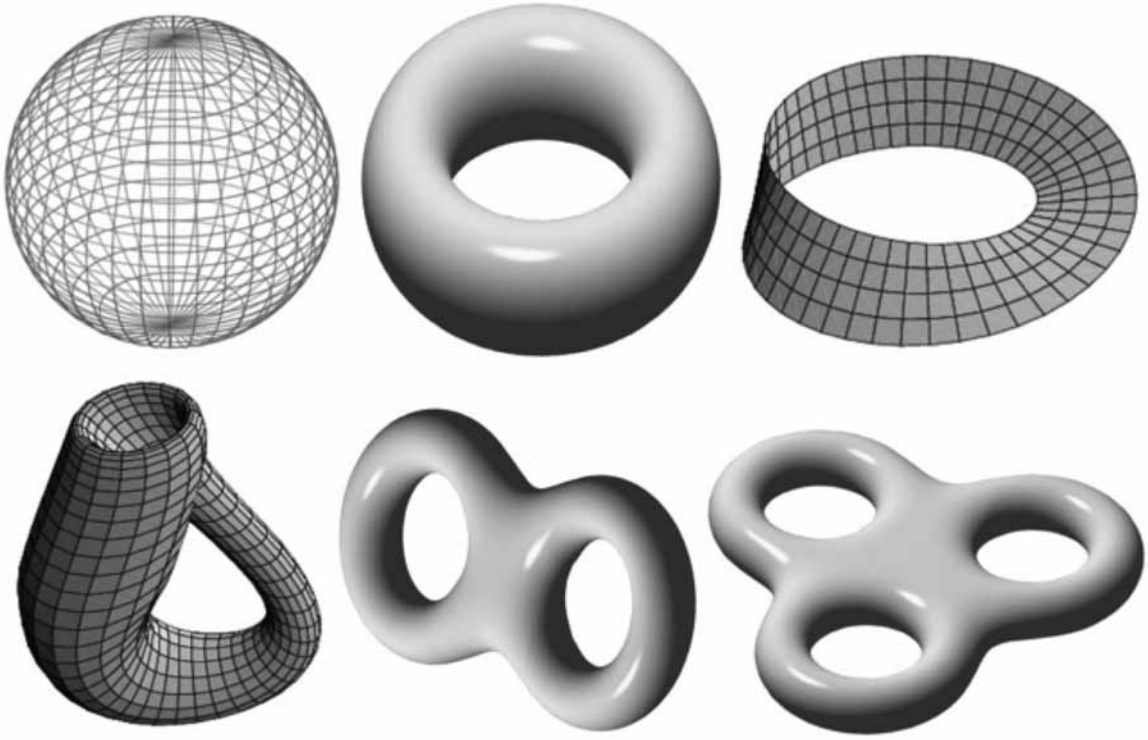


Рис. 12.2. Поверхности с эйлеровыми характеристиками 2, 0, -2, -4 (пояснения в тексте).

4. Говоря о соотношениях Эйлера и Пуанкаре, Ю.В. постоянно говорит о симплексах, а не о полиэдрах и политопах общего вида. «Число элементов геологических множеств разных уровней организации, участвующих в образовании симплекса, определяется биномиальными коэффициентами формулы Ньютона или количеством сочетаний из n элементов по m» (с. 32). И далее: «Соотношение между числом элементов различных уровней организации, образующих (n-1)-мерный симплекс S_n, определяется формулой Пуанкаре» (*Ibid.*). Здесь заключена какая-то загадка. На самом деле формулу Пуанкаре можно рассматривать как комбинаторное тождество, связы-

вающее числа i-членных подмножеств n-членного множества (i = 0, 1 … n). Как таковое, оно получается из формулы бинома Ньютона $(a+b)^n = \Sigma\ C_n^{\ m}\ a^{n-m}\ b^m$ (m = 0, 1 … n). При подстановке a = 1, b = -1 получаем $C_n^{\ 0} - C_n^{\ 1} + C_n^{\ 2} - \ldots + (-1)^n\ C_n^{\ n} = 0$.

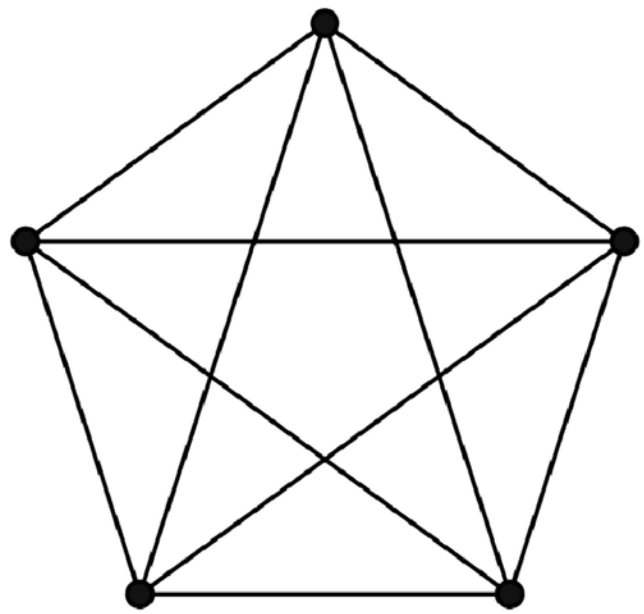


Рис. 12.3. Заведомо не планарный и потому не полиэдрический граф.

Легко проверить, что оно выполняется даже для заведомо непланарного (т. е. не изображаемого на плоскости без самопересечений) графа, уже потому не расправляемого в полиэдр (рис. 12.3): 1 – 5 + 10 – 10 + 5 – 1 = 0. Здесь последовательно: 1 – число пустых подмножеств 5-элементного множества (по определению, $C_n^{\ 0}$ = 1 для любого n), 5 – число 1-элементных подмножеств (вершин графа), 10 – число 2-элементных подмножеств (рёбер графа), 10 – число 3-элементных подмножеств (треугольников, образованных рёбрами графа), 5 – число 4-элементных подмножеств (четырёхугольников, образованных рёбрами графа), 1 – само 5-элементное множество (вершин графа). Очевидно, в силу общности соотношение выполняется и для чисел i-членных подмножеств n-членного точечного множества (i = 0, 1 … n), выпуклая оболочка которого есть полиэдр. Но в указанном комбинаторном контексте соотношение Пуанкаре имеет лишь теоретико-множественную подоплёку, по-видимому, далёкую от того смысла, который вкладывал в него Ю.В.

5. Соотношение Пуанкаре выполняется, если учитывать в нём не все i-членные подмножества n-членного точечного множества (i = 0, 1 … n), выпуклая оболочка которого образует политоп, а лишь те, которые образуют его i-мерные грани.

В частности, для полиэдров оно сводится к формуле Эйлера. Легко проверить его для любого полиэдра: куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра… Но Ю.В. не использует этой возможности, везде упоминая только симплексы – «простейшие <…> сочетания <…> элементов из n прим (в терминологии «новой геометрии» Е.С. Фёдорова) в n-1 уровнях организации» (с. 32), говоря сегодняшним языком – простейшие n-эдры (или n-вершинники, что одно и то же в силу дуальности: куб и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр…, но тетраэдр дуален сам себе!) в (n-1)-мерном пространстве. Таким образом, сужение обширного поля действия уравнения Пуанкаре до комбинаторики симплексов у Ю.В. явно не случайно. Он унаследовал эту традицию от акад. Н.С. Курнакова и акад. Д.С. Коржинского, успешно применивших диаграммы состояния «в тетраэдрах» для анализа 4-компонентных систем в физической химии и петрологии, соответственно. Скорее всего, отсюда следует и термодинамическая подоплёка уравнения Ю.В. для иерархических геологических систем.

6. Встаёт вопрос о проверке уравнения Ю.В., будь то в его теоретико-множественной или термодинамической подоплёке. Заметим, что оно не выведено теоретически из каких-либо начал, что сделало бы его эмпирическую проверку неуместной (как неуместна проверка формулы Эйлера перебором всех полиэдров). Но тогда возможна ли его опытная проверка на геологических системах? Анализ определений для геологических категорий, охватываемых уравнением, показывает следующее. «**Фация** – горная порода, на всём протяжении обладающая одинаковым составом и заключающая в себе одинаковые фауну и флору… **Сервия** – комплекс фаций, постепенно переходящих друг в друга и образующих единое географическое явление. В ископаемом виде представляет свиту пластов, реже один слой, изменяющий состав по простиранию. От фации отличается неоднородностью литологического состава, фауны и флоры... **Нимия** – комплекс сервий, постепенно переходящих

друг в друга и образующих крупные географические области. В ископаемом виде представляет толщу или свиту слоёв более или менее значительной мощности. Обособление сервий от нимий в ископаемом состоянии иногда несколько затруднительно... **Формация** – комплекс нимий, крупнейшая составная часть земной поверхности. Обычно выделяют три формации: континентальную лагунную и морскую...

Например, **формация море** содержит нимии: открытый шельф, обособленный шельф, лагунная область, материковое море, внутреннее море, архипелаг, рифовая область, батиальная область. В свою очередь, **нимия открытый шельф** содержит сервии: равнинный берег, гористый берег, подводная долина, открытый пролив, подводная возвышенность, остров, область ледниково-морских и ледово-морских отложений, область эолово-морских отложений, область псевдоабиссальных отложений. **Нимия обособленный шельф** включает сервии: бухта, губа, ватт, мангровая заросль, иловая впадина, застойный бассейн. **Нимия лагунная область** содержит сервии: лагуна, лиман, береговой такыр, самосадочная лагуна, коса, береговое озеро, торфяная лагуна, береговое болото, сапропелевая лагуна…» [182]

Строги ли и однозначно ли понимаются всеми геологами определения фации, сервии, нимии, формации? Есть ли уверенность в том, что в систематике предусмотрены все таксоны? Нет. Таким образом, нет и оснований считать, что уравнение Ю.В. Казицына можно проверить эмпирически, изучив какие-либо сложные геологические системы. Лишний раз становится очевидным – без строгих определений геологических категорий невозможен качественный скачок в понимании геологических систем, а всякий «анализ» (в том числе формационный) пока остаётся описательной процедурой без прогнозной силы, присущей (математическим, физическим, химическим…) уравнениям.

[182] Наливкин Д.В. Учение о фациях. Т. 1. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1955. 534 с. (с. 6-14).

• Если в эвристическом уравнении Ю.В. Казицына видеть лишь теоретико-множественную подоплёку, то оно провозглашает актуальность всех возможных подсистем в системе и определённо выражает принцип «всё взаимодействует со всем».

• Если в уравнении Ю.В. Казицына акцентировать внимание на топологии симплексов, то оно обращает нас к термодинамической подоплёке физико-химического анализа и ставит проблему выделения внешних факторов равновесия для иерархических геологических систем.

• Эмпирическая проверка уравнения Ю.В. Казицына сегодня невозможна из-за отсутствия корректных критериев разделения подсистем: фаций, сервий, нимий, формаций…

• Тем не менее, феноменологическое уравнение Ю.В. Казицына – первое, утверждающее нечто нетривиальное об организации сложных геологических систем на языке математики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пользуясь жанром «этюда» (то есть наброска, незаконченного произведения), я позволил себе максимально живое, с обращениями в смежные науки, философию и даже художественную литературу, изложение того, как можно математизировать различные разделы кристалломорфологии, минералогии и петрографии. Это сделано именно потому, что предмет весьма сложен. А лучшим заключением будет список задач на будущее. По одним есть задел, который можно было бы уже включить в эту книгу, другие сформулировались по ходу её написания.

Этюд 1. Кристаллические полиэдры и евклидово пространство. Необходимо дальнейшее компьютерное генерирование и характеризация точечными группами симметрии комбинаторных многообразий выпуклых полиэдров как платформы для анализа полиэдров кристаллических. Было бы важно разработать алгоритмы их нерекуррентного получения. Нужно найти математический принцип классификации довлеющего многообразия комбинаторно асимметричных полиэдров, что особенно актуально ввиду зафиксированной А.П. Хомяковым «триклинной инверсии» системы минеральных видов.

Этюд 2. Реальные простые формы и диссимметрия. Необходимо дальнейшее компьютерное генерирование и характеризация точечными группами симметрии комбинаторных многообразий реальных простых форм и их практически интересных комбинаций. Важно понять, насколько соответствует природному кристаллообразованию принцип независимого движения граней вдоль нормалей, заложенный в указанный компьютерный алгоритм. На всём имеющемся материале нужна проверка гипотезы о том, что в природе образуются формы минеральных индивидов, наименее диссимметричные из возможных.

Этюд 3. Дуальные простые формы и полнота классов, комбинации простых форм как алгебраические структуры. Необходим дальнейший анализ коммутативной полугруппы комбинаций простых форм и сопряжённой полуструктуры применительно к природным кристаллам. Следует выяснить, можно ли использовать дуальные простые формы как взаимно-обратные элементы для построения ещё более содержательной алгебраической системы, пополнив ими указанную полугруппу. Нужно более глубоко понять различие автодуальных классов симметрии и становящихся таковыми при их пополнении некоторыми комбинациями простых форм того же класса.

Этюд 4. Классификации, пространства толерантности, структуры. Необходим систематический поиск содержательных пространств толерантности и структур с различными отношениями порядка (строгого, нестрогого, квазипорядка) среди геологических объектов. Для более корректного определения понятия минерального вида и более концептуального представления системы минералогии важно развитие понятия минеральной серии. Для описания минеральных серий нужно разработать теоретико-графовый аппарат с фиксацией смесимости в симплексах различной размерности.

Этюд 5. Гранулометрия – алгебраическая структура. Интересен дальнейший поиск алгебраических структур в подоплёке технологических и природных процессов ради установления пределов их изоморфизма. Важно найти алгебраические структуры, специфичные для природных процессов. Для развития концептуальной базы технологической минералогии перспективно положить алгебраические структуры в основу классификации технологических процессов.

Этюд 6. Минералогия – в круге первом, втором, третьем. Важно определить, какие виды порядка (строгий, нестрогий, трансляционный, квазипорядок, масштабное самоподобие, устойчивость произвольной спектральной характеристики…) являются критериями минералогических объектов. Необходимо понять, что влечёт признание минеральных «наноиндивидов» для категории минерального вида, и без того плохо определённой. Нужно определиться, являются ли фуллерены объектом минералогии *de jure*, то есть в силу структурного принципа и естественного происхождения, или *de facto* – в силу сложившейся традиции.

Этюд 7. Минеральный агрегат – топологическое пространство. Для кристаллической горной породы необходим дальнейший поиск топологий, промежуточных между тривиальной и дискретной. Следует понять, в какой мере соотношение текстуры и структуры горной породы в их традиционном понимании является отражением соотношения топологии и её базы. Для поиска вариантов топологии полезным может оказаться смысловой анализ известных петрографических структур и текстур (в петрографических словарях их – сотни).

Этюд 8. Минеральный агрегат – пространство толерантности. Нужно более глубокое понимание того, почему максимум возможного (пространство толерантности) в концептуальном понимании горной породы достигается через отношение «неконтактирования» минеральных зёрен. Не ясно, насколько глубока здесь аналогия с аксиомой «отталкивания» в модели идеального гранита А.Б. Вистелиуса. Следует решить, целесообразно ли рассмотрение дополнительных межзерновых отношений ради получения новых концептуальных моделей горной породы.

Этюд 9. Простремя минерального агрегата. Не ясно, как ввести пространственно-временной репер в минеральном агрегате с той или иной (из рассмотренных) метрикой. Если внутреннее время минерального агрегата событийно, то нужно понять, можно ли синхронизовать времена, связанные с его разными топологиями. Не понятно, сохраняется ли в событийной хронологии минерального агрегата «длительность» времени.

Этюд 10. Горная порода – пространство измеримое, метрическое и коррелированное. Для полиминеральных горных пород необходимо расширение списка метрик, использующих различные меры. Нужны алгоритмы и компьютерные программы, выполняющие вариограммный анализ и процедуру кригинга петрографических шлифов для известных метрик. Кажется перспективным развитие представлений о кристаллической горной породе как коррелированном (включая предельный случай отсутствия корреляций) пространстве, в котором апостериорная вероятность каждого минерального индивида (кластера) рассчитывается по его окружению.

Этюд 11. Петрографическая структура и проблема Харкера. Необходимо расширить классификацию петрографических структур по тернарным межзерновым контактам на триминеральные горные породы. Важно понять, как соотносятся разделительные границы классификаций, построенных на статистиках бинарных и тернарных межзерновых контактов. Нужна алгебраическая теория организационных (в пределах класса) и структурных (между классами) преобразований горной породы.

Этюд 12. Правило фаз и топология поверхностей. На фоне совпадения правила фаз Гиббса и уравнения Эйлера важно понять, есть ли взаимно-однозначное соответствие между комбинаторными типами выпуклых полиэдров и топологическими типами физико-химических диаграмм. Не ясно, конструктивно ли рассмотрение графов на торе и поверхности Мёбиуса для физико-химического анализа минеральных систем. Дальнейшего осмысления требует эвристичное уравнение Ю.В. Казицына для иерархических геологических систем.

И это далеко не полный список задач, требующих для своего решения пытливого ума и свежего взгляда, свойственного молодости. Надеюсь, что уже на очередной Всероссийской школе «Математические исследования в естественных науках» часть этих вопросов получит исчерпывающие ответы.

ПРИЛОЖЕНИЕ
ЭТЮД 13: О НОВАТОРАХ В ИСКУССТВЕ И НАУКЕ

Этот текст был написан давно, в состоянии головокружения от впервые прочитанных книг Ю.П. Миронова и Ф.А. Усманова, статей Н.Л. Смирновой и Ю.В. Казицына, о которых речь шла выше, и публиковался в «Вестнике Института геологии Коми НЦ УрО РАН». Здесь он публикуется с небольшими изменениями с единственной целью – обратить на них внимание творческой научной молодёжи, работающей в геологии, но ощущающей тяготение к математике, строгому определению понятий и эвристичным решениям проблем. К счастью, таковая есть и принимает участие в ежегодной Всероссийской научной школе «Математические исследования в естественных науках», проводимой под эгидой Геологического института КНЦ РАН и Кольского отделения РМО.

* * *

Как это люди искусства умудряются выразить все краски, звуки, формы и смыслы мира в одной картине, музыкальной пьесе, скульптуре и стихотворении?

Вот Илья Глазунов. Берёт белый холст. Белым маслом населяет его кромешным снегопадом. Всё собой заполняющим. Спокойным. Даже равнодушным. А в центре – едва-едва различимый бредёт странник. Тоже белый. И весь этот странный мир цвета праха – в акцентировано грубой, топорно сработанной раме. Из плах. Берёзовых. Тоже белых. На фоне белой стены не нужных, белёсым абрисом белизну из белизны не вырезающих. Кто этот путник? Он, ты, я. Зачем бредёт? Обречён, не сам собой призван, не может иначе. Шаг за шагом раздвигает рамки своего мирка в пространстве стены-мира. Ищет красок, чтобы его расцветить. И не находит. Но не удовлетворяется. Для перфекциониста мир всегда остаётся белым фоном невыразимого многоцветья, своей белизной о нём заявляющим.

А вот Кристиан Линдберг. Берёт в руки тромбон и за семнадцать с половиной минут извлекает из него полтора десятка чистых звуков. От едва слышного, осторожного, с грустью, протяжного вздоха до резкого, совершенно отвращающего вопля, крика, стона. Но слух настораживают и режут не они, а долгие-долгие паузы. Чьи это звуки? Его, твои, мои. Чьи паузы? Мира. Звуки лишь трассируют редким пунктиром его невыразимое многозвучье. Их было бы достаточно всего двух в одномерном континууме тишины. В начале и конце. Высказать полифонию они не в силах. Но суть соло – не в череде вздохов, всхлипов, вскриков, а в тишине между ними. И это соло тишины Джона Кэйджа началось не с его первой ноты, а с сотворения мира, и не завершится с угасанием последнего эха под сводами зала. Тишина – единственное вместилище многоголосья мира в его полноте.

Или Генри Мур. Его поразила пластика слоновьего черепа, подаренного ему на день рождения. Она почти совершенна! Теперь Мур берёт каменную глыбу и отсекает лишнее, ища в ней идеальную форму. Но абсолют не может походить на что-то знакомое. И он ищет форму, ничего не напоминающую. В этом смысле – бесформенную форму. Но если не напоминает – значит, молчит? Ничуть! Если бы напоминала – говорила бы о конкретном, ограниченном, земном. А так – чистая форма, обиталище всех мыслимых форм. Как белый холст, набрякший всеми красками сразу. Как оглушительная тишина, у которой в горле – вся какофония мира. Так же невыразима и неизлагаема. И потому терзается Генри Мур, снова и снова узнавая в рукотворном мирское и не умея разорвать эту привязанность.

То же – Айги. Он только что сочинил «Стихотворение-название: белая бабочка, перелетающая через сжатое поле». Вам нравится название? Вы ждёте стихотворение? Оно уже прозвучало! Вот – название… Далее – белая страница как сжатое поле... Внизу – 1982… И ничего более! Почему? Так ведь незачем! Если вы видели сжатое поле и белую бабочку, через него перелетающую. Вспомнили, пока длились пустые строки, подаренные вам для рефлексии поэтом? Значит, для вас стихотворение прозвучало. Конечно, Айги лукавит. Не всё оно – в названии. Очень важны эти строки немоты. Может быть, даже всё оно – в этих строчках. А название – те же рамки с картины Глазунова, те же звуки из соло Кэйджа. Они вам нужны – и не нужны. Айги намекает на то, о чём следовало бы молчать. Лишь немота – пригодная обёртка для всех смыслов сразу.

Чем всё это достигается? Об этом знают только художники, музыканты и поэты. Каждый из них уносит тайну с собой…

У науки – те же способы освоения вещей предельных. Сказанное подвело нас к основной теме – о талантливых, неповторимых новаторах-первопроходцах в отечественной математической геологии. О тех, кто, оставаясь на почве геологического реализма, рассмотрел сложный объект или отношение как математический формализм, чей шаг был самостоятелен, рассудителен, но смел до отчаянности.

Вот Ю.П. Миронов и его книга [Теоретико-множественные модели гранитоидов. М.: Наука, 1975. 228 с.] (рис. 13.1). Не всякий петрограф поставит рядом такие слова. О чём она? Всем известно, что «природа написана языком математики». Ю.П. понял Галилея буквально и адаптировал его афоризм. Он считает парагенетическую минеральную ассоциацию буквой. Тогда всякая горная порода – слово, а сложно построенный, дифференцированный или сформировавшийся в несколько этапов породный массив – фраза. (Что есть абзац или строфа, повесть или поэма?) Природа разговаривает с петрографом более или менее содержательными фразами! Вместо бытующего в петрографии бесструктурного иероглифического языка, где «гранит» – иероглиф, «диорит» – тоже иероглиф, Ю.П. вводит язык структурный и предлагает изучать его методами порождающих грамматик или контекстно-свободных языков, анализа временных рядов, аналитической лингвистики, теории множеств и теории графов. Сам автор для сравнительного анализа гранитоидов Восточного Забайкалья использует три последних метода и превращает петрографическое исследование двух десятков гранитоидных массивов в задачу не менее волнующую, чем расшифровка написанных на уже умершем языке апокрифов. Читаю книгу – и ощущаю волнение автора.

Наверняка здесь записана великая трагедия! Да и кто из геологов усомнится в том, что в жизни многофазного плутона были вспышки гнева, жар горения и напряжение внутренних сил – всё признаки нешуточной страсти?

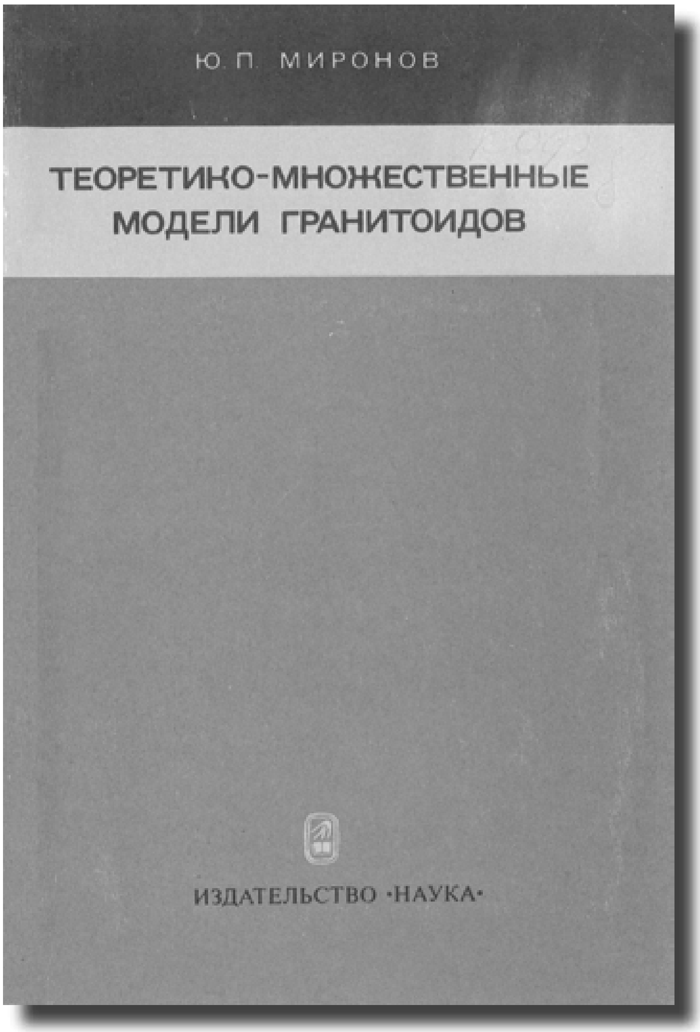


Рис. 13.1. Книга Ю.П. Миронова.

Что же выясняется? Например, что Шахтаминский массив – особенный. Наряду с типичной дополнительной в нём есть и редкая эквиполлентная дистрибуция минеральных парагенезисов. А ещё здесь налицо четыре дистрибутивные семейства пород, заданные над его петрографическим языком. Это много! Кроме того, массив обладает необыкновенно высокой петрографической омонимией – в петрографическом контексте слагающих его горных пород участвуют одни и те же минеральные ассоциации. Язык, на котором природа написала Шахтаминский гранитоидный массив, не совершенен, не полностью адекватен и не аморфен. В то же время, как и для большинства рассмотренных массивов, он полностью однороден, прост и чисто парадигматичен. Читатель догадался, что всё это – специальные термины. Даже слова «контекст», «прост», «совершенен». Они обнаруживают незнакомый, очарованный взгляд на знакомый гранитоидный мир. Особенный его ракурс. Зачем нам это? Затем, что, не теряя никаких смыслов из уже нажитого, этот язык, строго логичный и исчерпывающий все возможные отношения между парагенезисами-буквами, содержит много новых выразительных средств. Буква за буквой, слово за словом (читай – порода за породой), фраза за фразой (массив за массивом) – и вот перед нами захватывающая эпопея под названием «Эволюция гранитоидного магматизма Восточного Забайкалья». Её язык специфичен, поначалу труден. Наш речевой аппарат не сразу соглашается произнесть некоторые дифтонги. Они *difficult* для петрографического *tongue*. Но ведь каждый язык – дверь в новую культуру. Если его освоить и на нём разговаривать. Пока же я не видел ни одной ссылки на эту книгу Ю.П. Миронова. Не востребована. Ещё ждет своего благодарного читателя.

А вот Ф.А. Усманов и его книга [Основы математического анализа геологических структур. Ташкент: Изд-во ФАН, 1977. 206 с.] (рис. 13.2). Как и предыдущая, сегодня она выглядит эрратической глыбой, лежащей на инородном основании. И так же не девальвирован за прошедшие десятилетия заложенный в ней драгоценный запас. А предлагается процедура нешуточная – если не в практике геологоразведочных работ, то уж в теории никак не пренебрегать рассмотрением геологических структур на уровне изначальном, первичном, то есть теоретико-множественном. Особенность в том, что автор делает акцент на детальном логическом анализе возможных межэлементных отношений и указывает их геологические прототипы. Что такое «отношение»? Нет другого способа определить это, кроме как назвав все совокупности элементов, находящихся в данном отношении. Налицо тавтология. Но тавтология продуктивная.

Ф.А. рассматривает только бинарные отношения. Их – первичных – не так много: рефлексивность, симметричность и транзитивность. Вот их производные: антирефлексивность, антитранзитивность, антисимметричность и асимметричность. Комбинируя, получим отношения эквивалентности, толерантности, квазипорядка, строгого и нестрогого порядков, совершенных строгого и нестрогого порядков... Зачем нам это? Да затем, что в науках более строгих «структура» – всегда множество с каким-либо из отношений порядка. Или она – не структура, а всего лишь некая неоднородность, флуктуация, телесная ли, мыслимая ли, называемая этим ответственным именем безосновательно, как бы авансом, с претензией – от большого желания увидеть структуру там, где её нет. Вот «петрографическая структура». Панидиоморфнозернистая или гипидиоморфнозернистая. Но отношения идиоморфизма и ксеноморфизма антирефлексивны и асимметричны. Чтобы определить порядок на множестве – этого мало. По меньшей мере, недостает транзитивности. Какая же это структура? Отношение вмещающего контактирования есть редукция строгого порядка. А вот отношения вмещения и следования суть строгие порядки и ведут к подлинным структурам. Позаботившись о должном определении минимального и максимального элементов, в пойкилитовой горной породе можно рассмотреть «зародыши» структур, а расслоенный интрузив в целом можно назвать этим ответственным именем. Кто-то спросит – и это всё? Только их? Не только. Среди геологических объектов можно найти множество других структур. А также не структур, которые получат подлинные имена и займут своё место в общем реестре. И это не всё. Далее можно рассмотреть их возможные эволюции – математически строго и с

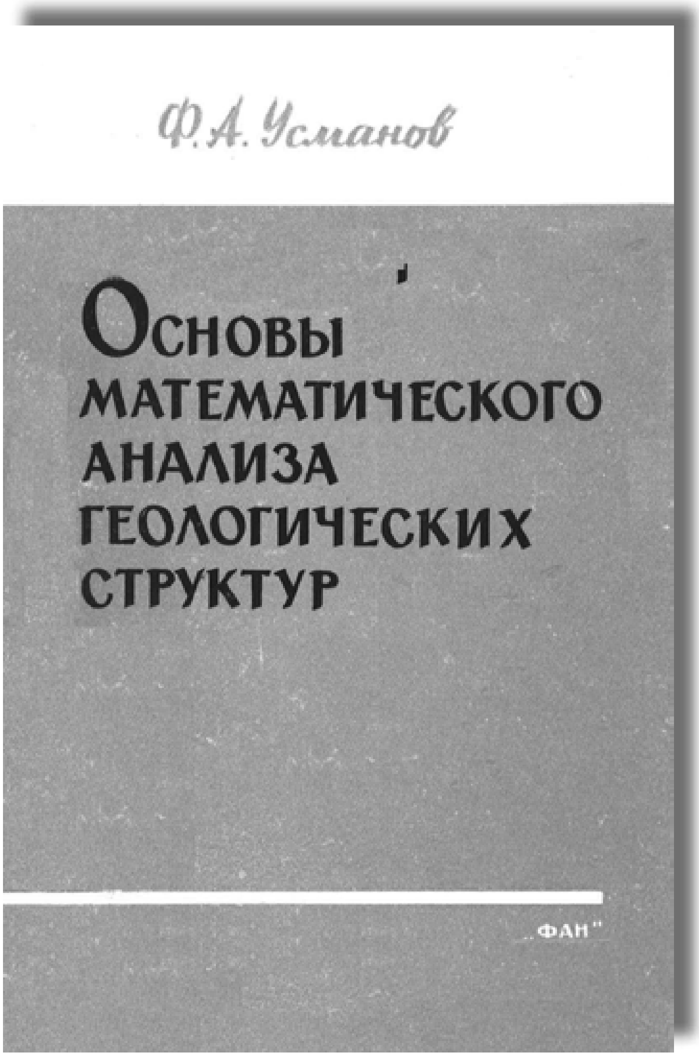


Рис. 13.2. Книга Ф.А. Усманова.

пониманием потенциальных возможностей каждой. Но до этого дело дойдёт не скоро, пожалуй. Хотя это составило бы важную часть теоретического базиса геологии.

Вот Н.Л. Смирнова и её статья [О системе минералов. Уровни // Вестник МГУ. Сер. геол. 1979. № 2. С. 59-63]. Вот когда родилась идея. Или даже раньше. Но она всё так же нова, не исчерпана. Н.Л. рассматривает минералы как устойчивые химические соединения и предлагает положить в основу их систематики тип образующих атомов и сходство группировок. Здесь и возникает проблема выбора. Какое сходство принять в расчёт? Есть отношение эквивалентности, по логической природе рефлексивное, симметричное и транзитивное. Это полное сходство. Оно лежит в основании всякой классификации. И классификация минерального мира есть разбиение на классы эквивалентности. Здесь – алмазы, здесь – топазы... Нет никакого различия между алмазами. Нет никакого сходства между алмазами и топазами. Потом оговаривается, что одни группы минералов всёе же ближе по составу и структуре, чем другие. Но это – за рамками самой классификации.

Н.Л. предложила другой логический ход. На уровне фундаментальном. Она кладёт в основание систематики отношение толерантности, которое рефлексивно и симметрично, но не транзитивно. Толерантность – отношение частичного сходства. Итак, минералы как химические соединения суть различные сочетания *s-, p-, d-, f*-атомов. Всё их многообразие делится на классы по наличию в группировке какого-либо из типов атомов. Это – классы толерантности. Пересекаясь по общим элементам, они образуют пространство толерантности. В чём результат? В том, что любое представление системы минералов в виде пространства толерантности не терпит резких разделительных границ. Сознаемся – ведь нам очень удобно смотреть на систему минералов как на классификацию. Каждый минеральный вид как элементарная частица – это наглядно. Мир без резких разделительных границ мыслить трудно. Но в этом лишь половина правды. Вспомним, что петрографы тоже пользуются классификацией горных пород. Но ещё в начале XX века А. Харкер обратил внимание на её условность, поскольку на самом деле между породами существуют непрерывные переходы. В минералогии подобная антитеза никем не высказана. Проблема не заострена. А ведь минеральные виды очень часто образуют между собой непрерывные переходы – минеральные серии. Ускоряющееся открытие новых минералов «на кончике иглы» приводит к тому, что их система становится более обширной и более связной, непрерывной. В этом – вторая половина правды. Как её формальным образом высказать? Да вот же – система минералов есть пространство толерантности!

А вот Ю.В. Казицын и его совершенно не цитируемая статья [Топологические аспекты формационного анализа // Геологические формации. Л.: Изд-во ВСЕГЕИ, 1968. С. 32-35]. В названии – трудно сочетаемые термины. О чём эта работа? Ю.В. обратил внимание на совпадение двух уравнений. Одно из них – правило фаз Гиббса, связывающее числа компонентов, фаз и степеней свободы в термодинамически закрытой системе. Другое – уравнение Эйлера для произвольного выпуклого полиэдра, объединяющее числа его вершин, рёбер и граней. В любом случае – одно уравнение и три переменных, независимых – две. Их вариабельность ограничена иными, физическими или математическими причинами. Но второе уравнение обобщается на многомерные пространства! Получаем уравнение Пуанкаре. Такие политопы уже не представить, но логически ситуация непротиворечива. У Ю.В. хватило решимости разрешить экспансию этого уравнения на мир геологический. И вот оно увязывает воедино числа компонентов, минеральных фаз, фаций, сервий, нимий, формаций... и степеней свободы в сложной, иерархически не ограниченной сверху геологической системе.

Не правда ли, грандиозно! Относительно недавно активно заговорили о синергетике геологических систем! Ведь это и есть главная задача – научиться описывать поведение этих потому сложных систем, что в них взаимодействуют иерархически соподчиненные подсистемы. Но движение нельзя описать иначе как изменение состояний. Свое уравнение состояния любой геологической системы, эвристичное, феноменологическое, качественное (не количественное) Ю.В. написал сорок лет назад. И кто знает, не окажется ли оно фундаментальным? Ответ даст только время...

* * *

В системе наук геология занимает двусмысленное положение, тяготея более к гуманитарным (история, филология), чем к естественным (физика, химия). Историзм и генетизм сделали здесь своё дело. Геофизика и геохимия всё ещё остаются приложениями физики и химии к составным частям системы «Земля» и не встроены органично в геологию с её пространственно-временными масштабами. Но и это – вторично. Геология останется описательной наукой, пока не определит свои объекты и процессы языком математики. Поэтому – **в объектах природы ищи алгебраические структуры**, в этом – их предельное понимание.

СОДЕРЖАНИЕ

Для заметок

Для заметок

Для заметок

12 этюдов на темы кристалломорфологии, минералогии и петрографии

Приложение
к Трудам VII Всероссийской (с международным участием)
научной школы
«Математические исследования в естественных науках»,
посвящённой 300-летию со дня рождения
М.В. Ломоносова

Апатиты, 3-6 октября 2011 г.

Поддержано Комиссией РАН по работе с молодёжью

Отпечатано в ЗАО «K & M»

184209 г. Апатиты Мурманской обл.
ул. Ферсмана, д. 17 а
тел. / факс 8 (81555) 77329

Тираж 200 экз.