Impliziert Widerspruchsfreiheit Existenz? Oskar Beckers Kritik am formalistischen Existenzbegriff*

Volker Peckhaus
Universität Paderborn
Fakultät für Kulturwissenschaften – Philosophie
Warburger Str. 100, D – 33098 Paderborn
E-mail: peckhaus@hrz.upb.de

1 Einleitung

Ende Dezember 1899 schrieb der Göttinger Mathematiker David Hilbert in einem Brief an seinen Jenenser Kollegen Gottlob Frege die folgenden klassischen Worte über den formalistischen Existenzbegriff: „Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und Existenz.“[1] Auf diesen Existenzbegriff spiele ich mit der Titelfrage „Impliziert Widerspruchsfreiheit

*Frühere Fassungen dieses Beitrages (auch in Auszügen) wurden im November 2000 auf dem “Meeting on Existence in Mathematics” des Danish Networks for the History and Philosophy of Mathematics an der Universität Roskilde, im Februar 2001 beim Kolloquium „Die Philosophie und die Wissenschaften. Oskar Beckers Überlegungen zur Begründung der Mathematik“ an der FernUniversität Gesamthochschule Hagen, im März 2001 im „Colloquium logico-philosophicum“ des Instituts für Philosophie der Universität Erlangen-Nürnberg, im Juli 2001 im Kolloquium des Instituts für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld sowie im Oktober 2001 auf der Tagung „Existenz und Prädikation“ an der Humboldt-Universität Berlin vorgetragen. Ich danke den Diskussionsteilnehmern bei diesen Veranstaltungen für ihre Anregungen, insbesondere Peter Janich (Marburg), aber auch den Kollegen, die Vorfassungen des Textes kritisch lasen und kommentierten, insbesondere Paola Cantù (Mailand), Ivor Grattan-Guinness (Bengeo, UK), Reinhard Kahle (Tübingen), Wilfried Sieg (Pittsburgh), Christian Thiel (Erlangen) und Risto Vilkko (Helsinki).

[1]Hilbert an Frege, datiert 29. Dezember 1899, Frege *1976*, 66. Ganz ähnlich äußerte sich übrigens später auch Henri Poincaré: „In der Mathematik kann das Wort: ‚existieren‘ nur einen Sinn haben: es bedeutet ‚widerspruchsfrei sein‘ “ (Poincaré *1914*, 137).

Existenz?“ an. Es ist dieser Existenzbegriff, gegen den Oskar Becker in seinem Buch über *Mathematische Existenz* opponierte (Becker *1927*).

Meine Darstellung der Auseinandersetzung zwischen Hilbert und Becker kann auf Carl Friedrich Gethmanns letztjährigen Vortrag „Hermeneutische Phänomenologie und Logischer Intuitionismus“ (Gethmann *2002*) aufbauen, der u. a. eine treffende Charakterisierung der Beckerschen Positionen zum Hilbertschen Formalismus enthält, soweit Becker sie in *Mathematische Existenz* zum Ausdruck gebracht hat.[2] Gleichwohl werde ich mich an einigen Stellen von Gethmann absetzen und zwar meist dort, wo er sich die Beckerschen Auffassungen, wie ich meine, unkritisch zu eigen gemacht hat. Mir wird es also ein Stück weit um eine Rehabilitation Hilberts gehen, und das obwohl ein Großteil der von Becker gegen Hilbert gerichteten Argumente auch heute noch zum gängigen Repertoire philosophischer Kritik am Formalismus gehört.[3]

Ich werde im folgenden unter „Formalismus“ eine Darstellungsform für deduktive Systeme von Sätzen verstehen, in der willkürlich gesetzte Axiome die Deduktionsanfänge bilden. Die Axiome werden lediglich dadurch gerechtfertigt, daß sie (1) voneinander unabhängig sind, die Axiome also nicht wechselseitig auseinander herleitbar sind, (2) widerspruchsfrei sind, die Axiome und alle Folgerungen aus ihnen sich also nicht widersprechen, und (3) vollständig sind, sich also bei Erweiterung des Axiomensystems um eine aus den Axiomen nicht ableitbare Aussage ein Widerspruch ergibt. Diese Art des Formalismus wird üblicherweise als Hilberts Philosophie der Mathematik bezeichnet und dem Logizismus Gottlob Freges sowie dem Intuitionismus L. E. J. Brouwers entgegengesetzt.

Ich werde in diesem Beitrag dafür argumentieren, daß sich Hilberts Position in der Philosophie der Mathematik nicht auf einen solchen Formalismus einschränken läßt. Es gibt natürlich Elemente Hilbertscher Philosophie der Mathematik, die als „Formalismus“ bezeichnet werden können. Für diese und für ihre Funktion im Rahmen einer umfassenderen Philosophie werde ich im folgenden eine *non-standard* Interpretation vorlegen, deren wesentliche Punkte wie folgt charakterisiert werden können:

1. Der Hilbertsche Formalismus ist keine philosophische Grundlagenposition. Er steht aus diesem Grunde nicht gleichberechtigt neben Logizismus und Intuitionismus, also den Richtungen, mit denen er dem gängigen Bild entsprechend die Trias der geläufigsten Positionen in der Philosophie der Mathematik bildet.

[2] Ein früher Hinweis auf die Kontroverse findet sich bei Roetti *1996*.

[3] Dabei gehe ich auf Hilberts eigene, in großer Erregung brieflich vorgetragene Kritik nicht ein. Vgl. den Briefentwurf Hilberts vom Herbst 1930 sowie Beckers Antwort vom 30. Oktober 1930 (Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 457).

2. Der Hilbertsche Formalismus ist ontologisch und epistemisch neutral, damit aber auch in weiten Bereichen kompatibel zu intuitionistischen, logizistischen, phänomenologischen und transzendentalphilosophischen Begründungsversuchen.

3. Der Hilberts Formalismus muß strikt von seiner in den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelten Beweistheorie getrennt werden. Erst mit der Beweistheorie wurde ein philosophisches Grundlegungsprogramm vorgelegt, das sich in seiner Präferenz für finite Methoden in großen Bereichen nicht wesentlich von intuitionistischen Ansätzen unterscheidet.

4. Der Hilbertsche Formalismus darf nicht isoliert betrachtet werden, sondern muß stets zusammen mit den sich wandelnden Überlegungen Hilberts zur Begründung der Mathematik verbunden werden. Er fällt also nicht mit seiner Philosophie der Mathematik zusammen. Er gibt ganz im Gegenteil lediglich eine methodische Anleitung für die Praxis des Mathematikers bei der Produktion von Mathematik.

5. Aus dieser Einschätzung ergibt sich, daß Beckers Grundlegungsbemühungen als philosophische Ergänzung und Vervollständigung, nicht aber unbedingt als Alternative zum Hilbertprogramm gelesen werden müssen. Seine Polemik wird damit in weiten Teilen gegenstandslos.

Ich werde mich also bemühen, zu zeigen, daß Beckers Opposition gegen Hilbert in *systematischer Hinsicht* nicht gerechtfertigt ist. Er hat allerdings Recht, wenn er sich gegen *ideologische Ansprüche* der Hauptvertreter des Hilbertschen Begründungsprogramms, Hilbert selbst und Paul Bernays, gewendet hat. Becker hat aber diese ideologischen Positionen mit systematischen Ansprüchen verwechselt.

2 Beckers Hilbert-Kritik

Becker stellt sein Buch *Mathematische Existenz* in den Kontext des mathematischen Grundlagenstreits, also der Auseinandersetzung zwischen Luitzen Egbertus Jan Brouwers Intuitionismus und dem Formalismus David Hilberts. Seine eigene Position legt er gleich zu Anfang offen (*1927*, 2):

> Das Ergebnis entscheidet für den Intuitionismus und seine „sachliche“ Mathematik, die allein wirkliche Phänomene entdeckt, die originärer und adäquater Anschauung zugänglich und existentialer Auslegung fähig sind. Insbesondere erweist sich das *Unendliche* in der Form des *Prozesses, und zwar nicht bloß des indefiniten sondern auch des transfiniten* als ein echtes Phänomen des reinen formalen Bewußtseins und

> auch sogar des konkreten historischen Daseins; es ist sowohl der konstitutiven Analyse wie der ontologischen Interpretation erreichbar.

Im zweiten Teil dieses Zitates nimmt Becker Bezug auf seinen ureigensten Beitrag zu dieser Grundlagendebatte, nämlich den Versuch, das Transfinite zugänglich zu machen und damit phänomenologisch zu begründen. Ob ihm dies tatsächlich gelungen ist, darüber kann man geteilter Meinung sein, ein übermäßig großes Echo hat er jedenfalls unter Grundlagenforschern nicht hervorgerufen.

Becker formuliert eine erste Definition mathematischer Existenz, die durchaus der Hilbertschen Auffassung entspricht (29):

> Mathematisch existent heißen Gegenständlichkeiten, die zum Thema einer mathematischen Theorie gemacht werden und in dieser Theorie *widerspruchsfrei fungieren* können.

Becker stellt ebenfalls durchaus zutreffend fest, daß Hilbert auf eine philosophische Klärung des Existenzbegriffs grundsätzlich verzichtet. Daraus ergibt sich für ihn die Notwendigkeit einer immanenten Kritik der Forderung nach Widerspruchsfreiheit (32). Er fragt zunächst, ob die Forderung nach Widerspruchsfreiheit nicht eine *conditio sine qua non* jeglichen wissenschaftlichen Denkens überhaupt sei. Das möge wohl sein, sagt er,

> aber man beachte genau, um was es sich hier bei *Hilbert* handelt! Nicht um die Widerspruchsfreiheit der inhaltlich erforschbaren „Metamathematik", sondern um die der nur formal, in dem Zusammenhang ihrer Konsequenzen und sonst *nicht* irgendwie gegebenen, inhaltlich völlig sinnleeren eigentlichen Mathematik. Man gebe sich über die völlige Inhaltslosigkeit dieser*Hilbert*schen Mathematik keiner Täuschung hin.

Becker will „dieser Merkwürdigkeit" nicht weiter nachforschen, „daß nach *Hilbert* die gesamte Wissenschaft eine gänzlich inhaltsleere Wissenschaft sein soll" (33). Er will aber doch ergründen, was denn überhaupt ein Widerspruch in einer solchen Kette leerer Begriffe sei. Sätze mit sachlichem Gehalt können natürlich nicht zugleich wahr und widerspruchsvoll sein. Diese Selbstverständlichkeit habe aber mit Hilberts Formalismus nichts zu tun, denn dieser führe auf Sätze, die weder wahr noch falsch seien (33). Eher fassungslos bemerkt Becker, daß die Theoreme Hilbertscher Mathematik gar nicht den Anspruch erheben, wahr zu sein, sondern lediglich beweisbar zu sein. Die Aussage, daß ein Theorem beweisbar ist, ist allerdings durchaus wahr oder falsch, sie ist aber keine Aussage der reinen Mathematik, sondern eine der Metamathematik.

An dieser, aber auch an anderen Stellen trennt Becker nicht sauber zwischen finiter Mathematik und Metamathematik. Auch die finite Mathematik zählt für Hilbert zur eigentlichen Mathematik, und diese finite Mathematik muß natürlich von der Metamathematik als Theorie, die den Beweis selbst zum Gegenstand hat, unterschieden werden. Der Begriff der Widerspruchsfreiheit kommt allerdings nur in den Bereichen der Mathematik ins Spiel, die nicht oder noch nicht finit begründet worden sind. Diese Bereiche bestehen aus finiter Mathematik mit adjungierten, sogenannten „idealen Elementen", deren Rechtfertigung über Widerspruchsfreiheitsbeweise erfolgen muß. Gleichwohl würde Hilbert natürlich zustimmen, daß es in der Mathematik gar nicht um Wahrheit und Falschheit, sondern um Richtigkeit und Korrektheit geht. Mathematische Objekte haben keine Referenz, obwohl in der finiten Mathematik die Angabe von Zahlzeichenmodellen möglich ist. Zudem sagt Hilbert genau, wann eine formal-mathematische Theorie widersprüchlich ist, dann nämlich, wenn sich eine Zeichenkombination wie $1 \neq 1$ ableiten läßt (vgl. Hilbert *1925*, 179).

Becker fährt in seiner Analyse konsequent fort, wobei er betont, daß die Forderung der Widerspruchsfreiheit in der Hilbertschen Theorie keine mathematische, sondern lediglich eine metamathematische Bedeutung hat. Wenn mit der Widerspruchsfreiheit keine *conditio sine qua non* für die Wahrheit der Theoreme gegeben sei, schreibt Becker, so ist sie „doch *die conditio sine qua non der Fortführbarkeit des Deduktionsprozesses*. Durch die Widerspruchsfreiheit und durch sie allein ist also das mathematische ‚Formelspiel' vor dem *vorzeitigen Abbrechen geschützt*" (35).

Becker stellt eine Verbindung formaler Mathematik zur Husserlschen *Logik der Konsequenz* her, die dieser ja gegen die Logik der Wahrheit stellte.[4] Er bemüht wieder die Spielmetapher (70), spricht von Gesetztheiten, bezüglich derer keine Sätze mit Anspruch auf Wahrheit formuliert werden, sondern nur mit Anspruch auf Beweisbarkeit bzw. Ableitbarkeit.

> Die Sache liegt aber auch nicht einfach so, daß die formale Mathematik ein „hypothetisch-deduktives System" bildet [...], d. h. nur hypothetische Satzgefüge enthält von der Form: „Wenn die und die Axiome gelten, so gelten die und die Theoreme". Denn auch die *Hilbert*schen Axiome, wenigstens die transfiniten, „gelten" gar nicht, d. h. können gar nicht gelten, sie können gar nicht wahr oder falsch sein.

Becker identifiziert also in diesem Einwand Wahrheit und Geltung. Da er die Wahrheit eines Ausdrucks an seine Referenz auf ein konstruktiv erzeugtes Objekt bindet, macht er die seit Lotze übliche erkenntnistheoretische Unterscheidung zwischen der Wirklichkeit von Ideen und Gesetzen als *Geltung* und der Wirklichkeit der Dinge als *Sein* (Lotze *1880*, § 320) nicht mit.

[4]Becker *1957*, 69; Becker bezieht sich offenbar auf Edmund Husserls Forschungsvorlesung *Erste Prinzipien* von 1923/24 (Husserl *1956*; *Hua* VII, 29*f*.). Husserl arbeitete die Unterscheidung später in *Formale und transzendentale Logik* aus (Husserl *1929*, *Hua* XVII, § 19).

An anderer Stelle wird diese Kritik noch verschärft. Becker bemängelt Hilberts Auffassung, daß formal-mathematische Gegenständlichkeiten *entia rationis* seien, also Kant zufolge „bloße Erdichtungen" (*KrV* B 347*f*.). Ihnen entsprächen keine ausweisbaren Phänomene, sie seien lediglich transphänomenale Gesetztheiten, die auch nicht zu Phänomenen werden könnten, sondern einen intuitiven und formal-ontologischen Widersinn involvierten. Da das Unendliche seiner Natur nach potentiell sei, also ein Prozeß und keine aktuale Menge, seien Aussagen oder „Gesetztheiten" nicht einzeln wahr oder falsch. Nur vom System könne man sagen, es sei „konsequent" oder „widerspruchsfrei". „Die völlige Inhaltslosigkeit der Behauptungen über solche Gesetztheiten" ließe sogar Zweifel aufkommen, ob die Forderung nach Widerspruchsfreiheit eines solchen Systems überhaupt sinnvoll sei. Ihren Sinn sieht Becker auch nun allenfalls darin, daß sie die unbeschränkte Fortsetzbarkeit des „Deduktionsspiels" sichere.

Auch Hilberts mit dem emphatischen Ausruf „am Anfang [...] ist das Zeichen" (Hilbert *1922*, 163) begleitete Auszeichnung von Zeichen als metamathematischen Grundobjekten findet Beckers Gnade nicht. „Zeichen, die nichts bedeuten", sind ihrer Zeigefunktion entkleidete Zeichen, d. h. gar keine Zeichen (Becker *1927*, 193). Diese Kritik entzündete sich an unvorsichtigen Äußerungen Hilberts, der z. B. in einem Vortrag von 1904 das Zeichen 1 als Zahl einführte, dann neue Zahlen durch Erweiterung bestehender Zeichenketten durch Anhängen der Zeichenfolge + und 1 erzeugt. Hilbert bemerkt: „Diese Zahlzeichen, die Zahlen sind und die Zahlen vollständig ausmachen, sind selbst Gegenstand unserer Betrachtung, haben aber sonst keinerlei *Bedeutung*" (ebd.). Paul Bernays kommentiert in seiner Anmerkung zur Neuveröffentlichung dieses Vortrages (Hilbert *1935*, 157–177), daß „die Ausdrucksweise, von ‚Zeichen ohne Bedeutung' zu sprechen, bei Philosophen Anstoß erregt habe",[5] Hilbert daher in späteren Abhandlungen den Terminus „Zahlzeichen" durch „Ziffer" ersetzt habe (ebd., 163, Anm. 2). Dadurch wird aber, das sei hier angemerkt, das Problem eher verschleiert als gelöst, sind doch die Termini „Zahlzeichen" und „Ziffer" synomym. Erfolgreichversprechender erscheint mir die Argumentation, daß die Referenz und damit die Bedeutung dieser Zeichen schlicht unbestimmt gelassen wird. Damit wäre auch Beckers Kritik entkräftet.

In der Summe stellt Becker die in ontologischer Sicht merkwürdige Gegenständlichkeit des Hilbertschen Transfiniten fest, für deren Charakterisierung er sich beim Leibnizschen „Amphibium zwischen Sein und Nichtsein" (Leibniz *1702*, *GM* V, 357) bedient und die von Gauß persiflierte Auffassung imaginärer Größen zitiert, als „ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel, dem man

[5] Bernays bezieht sich auf Aloys Müller *1923a*. Vgl. auch Bernays' Replik *1923* und Müllers Zusatz *1923b*.

ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Größen steuert, verschmähen zu wollen“ (Gauss *1831*, 175).

Erkenntnistheoretisch charakterisiert Becker den Gegensatz zwischen der intuitionistischen und der formalistischen mathematischen Grundlagenauffassung wie folgt (*1927*, 185):

> Der Gegensatz: Intuitionismus – Formalismus ist verwurzelt in dem philosophischen Grundgegensatz der *anthropologischen* und der „*absoluten*“ Auffassung der Erkenntnis (Wissenschaft) und letztlich des Lebens selbst (als der eigentlichen Wirklichkeit).

Die „absolute“ Auffassung sei die einer Welt des Seins „an sich“, die mit bestimmten Ordnungsstrukturen ausgestattet ist, die gewissen formalen allgemeinsten Gesetzen „wesensmäßig“ folgen. „Darin ist der Mensch nur ein unbedeutendes Wesen in der gewaltigen Stufenreihe der Wesen überhaupt“ (ebd.). Becker stellt eine Analogie des Gegensatzes zwischen anthropologischer und absoluter Auffassung zum Gegensatz zwischen Idealismus und Realismus her, rückt damit Hilberts Formalismus in die Nähe des Realismus: eine, wie ich denke, eklatante Fehldeutung, die ich zum Anlaß meiner alternativen Hilbert-Deutung nehmen möchte.

3 Hilberts „Formalismus“

Ich hatte eingangs den Brief an Frege zitiert, in dem Hilbert u. a. behauptet, daß die Widerspruchsfreiheit der Axiome eines Systems die Existenz der durch das System definierten Dinge verbürge und damit Kriterium für Wahrheit und Existenz sei. In demselben Brief illustriert Hilbert seine Position zur mathematischen Theorie mit der folgenden Metapher, die zusammen mit der oben zitierten Stelle das Credo des Formalismus darstellt (Frege *1976*, 67):

> Ja, es ist doch selbstverständlich eine jede Theorie nur ein Fachwerk oder Schema von Begriffen nebst ihren nothwendigen Beziehungen zu einander, und die Grundelemente können in beliebiger Weise gedacht werden. Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z. B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ..., denke und dann nur meine sämmtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z. B. der Pythagoras auch von diesen Dingen. Mit andern Worten: eine jede Theorie kann stets auf unendliche viele Systeme von Dingen angewendet werden.

Wenn ich dafür argumentiere, daß der Formalismus als solcher keine Grundlagenposition und darüber hinaus frei ist von jeder realistischen ontologischen Verpflichtung, dann heißt das nicht etwa, daß ich damit zugleich behaupten wollte, daß der Formalismus frei von jedem philosophischen Einfluß oder erkenntnistheoretischen Komplikationen ist. In dieser Hinsicht widerspreche ich Bartel Leendert van der Waerden, der mit Bezug auf Hilberts axiomatische Darstellung der Euklidischen Geometrie in den „Grundlagen der Geometrie“ 1899 schrieb (*1967*, 3): “With Hilbert’s stroke of genius all the epistemological difficulties connected to geometrical basic concepts and axioms at all times were at one blow done away.” Auch Paul Bernays, der Architekt der Beweistheorie und philosophischer Interpret von Hilberts grundlagentheoretischer Position, behauptete die Emanzipation der Mathematik von der Philosophie. Unter Bezug auf frühere Lehren der Philosophie der Mathematik sah Bernays nämlich den entscheidenden Schritt der Hilbertschern Axiomatik darin, daß sie ihre philosophischen Fesseln durchbrochen habe. Er schrieb 1922 (Bernays *1922*, 94): „Mathematik ließ sich nicht mehr die Methode und die Grenzen ihrer Forschung von der Philosophie vorschreiben, sondern nahm die Erörterung ihrer methodischen Probleme selbst in die Hand.“ Folgt man Bernays, so hatte sich das Verhältnis zwischen Mathematik und Philosophie sogar umgekehrt, hatte sich doch das mathematische Denken „als unentbehrliches Hilfsmittel für die theoretische Philosophie erwiesen“ (ebd.).

Gerhard Gentzen hat diese Position 1938 in seinem Überblicksartikel „Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung“ sehr viel vorsichtiger so charakterisiert (Gentzen *1938*, 258):

> Ein Hauptmerkmal des *Hilbert*schen Standpunkts scheint mir das Bestreben zu sein, das mathematische Grundlagenproblem der *Philosophie* zu entziehen und es soweit wie irgendmöglich mit den eigenen Hilfsmitteln der Mathematik zu behandeln.

Gentzen setzt hinzu: „Ganz ohne außermathematische Voraussetzungen freilich kann man das [mathematische Grundlagen-]Problem nicht lösen.“ Diese Bemerkung führt mich aber zu dem Urteil, daß es sich bei der programmatischen Herauslösung der Mathematik aus der vermeintlichen philosophischen Umklammerung um eine systematisch nicht rechtfertigbare ideologische Position handelt (die insbesondere auch von Hilbert nicht explizit vertreten wurde). Einen Hinweis auf die im Hintergrund stehenden Motive gibt Gentzen, wenn er zum eigenen Programm sagt:

> Ich werde auch im folgenden auf alle *philosophischen Streitfragen*, deren Beantwortung auf die mathematische Praxis keinen Einfluß hat, und welche die Problemlage vielfach unnötig verworren und schwierig erscheinen lassen, nicht eingehen.

Grundlagenforschung im Rahmen des Hilbertschen Programms war von der mathematischen Praxis dirigiert, Problemstellungen ohne Praxisrelevanz wurden ausgeblendet, dadurch aber natürlich nicht gelöst.

Ich werde im folgenden allerdings zeigen, daß sich Hilbert der Notwendigkeit einer philosophischen Rechtfertigung der Mathematik in einem breiteren Sinne durchaus bewußt war. Hilbert präferierte dabei allerdings, anders als Kurt Gödel und die meisten Vertreter der aktuellen ontologischen Debatte in der Philosophie der Mathematik und entgegen der Beckerschen Einschätzung, eine anti-realistische Position.

4 Hilbert und Cantor

Es erscheint mir historisch plausibel, daß die eingangs zitierten Formulierungen Hilberts zum Existenzbegriff in einem engen Zusammenhang mit den Diskussionen stehen, die Hilbert damals mit Georg Cantor über die Existenz der Totalität aller Alephs, also aller Kardinalzahlen geführt hat. Schon in dem ersten der Briefe Cantors an Hilbert, die sich im Hilbertschen Nachlaß in Göttingen befinden, datiert vom 26. September 1897 (Cantor *1991*, 388–389), argumentiert Cantor, daß die Totalität aller Alephs keine wohldefinierte, wie er sagt „fertige Menge“ sei. Würden wir annehmen, sie sei eine fertige Menge, so würde auf diese Totalität der Größe nach ein bestimmtes Aleph folgen. Dieses Aleph gehörte also als Element zu dieser Totalität, würde ihr aber zugleich auch nicht angehören. Damit haben wir einen offensichtlichen Widerspruch, sogar eine Antinomie, die später so genannte Cantorsche Antinomie der Menge aller Kardinalzahlen. Cantor war sich jedoch des antinomischen Charakters dieses Widerspruchs nicht bewußt. Er nahm dessen Ableitung als negativen Existenzbeweis, also als reductio-ad-absurdum-Beweis, mit dem gezeigt werden konnte, daß Totalitäten, die durch unbeschränkte Komprehension zustande kommen und damit also absolut unendlich sind, keine Mengen seien. Auch transfinite Mengen können nicht absolut, sondern lediglich aktual unendlich sein.

Hilberts briefliche Antworten sind nicht überliefert, er veröffentlichte aber seine Ansicht zu den Cantorschen Überlegungen an prominenten Stellen. In dem Vortrag „Über den Zahlbegriff“ von 1900 (Hilbert *1900a*), Hilberts erstem Beitrag zu den Grundlagen der Arithmetik, stellte er ein Axiomensystem für die Arithmetik auf, und behauptete dann, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome „nur einer geeigneten Modifikation bekannter Schlußmethoden“ bedürfe. Bei Gelingen würde der Beweis aber zugleich „die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen“ zeigen. Hilbert betont (Hilbert *1900a*, 184):

> Die Bedenken, welche gegen die Existenz des Inbegriffs aller reellen Zahlen und unendlicher Mengen überhaupt geltend gemacht worden sind, verlieren bei der oben gekennzeichneten Auffassung jede Berechtigung: unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns hiernach

> nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Gesetze zu denken, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern vielmehr — wie eben dargelegt ist — ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch das obige *endliche und abgeschlossene* System von Axiomen [...] gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur Gültigkeit haben, falls man sie mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann.

Hilbert behauptet nun, daß, wenn man in ähnlicher Weise den „Beweis für die Existenz eines Inbegriffs aller Mächtigkeiten", also aller Cantorschen Alephs erbringen wollte, dieser Beweis mißlingen müsse: „in der Tat der Inbegriff aller Mächtigkeiten existirt nicht, oder — in der Ausdrucksweise G. *Cantor*'s — das System aller Mächtigkeiten ist eine nichtconsistente (nichtfertige) Menge" (Hilbert *1900a*, 184).

Hilbert nimmt den Gegenstand in seiner berühmten Pariser Rede „Mathematische Probleme" wieder auf (Hilbert *1900b*). Im Kontext seiner Ausführungen zum zweiten Problem, dem Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Axiome der Arithmetik, führt er dieselben Beispiele aus der Cantorschen Mengenlehre und zum Kontinuumproblem an wie in dem früheren Vortrag. „Wenn man einem Begriffe Merkmale erteilt, die einander widersprechen, so sage ich: der Begriff existirt mathematisch nicht" (*1900b*, 265). Von Existenz zu sprechen, ist also eine terminologische Entscheidung. Hilbert sagt dies ausdrücklich, wenn er betont, daß das System *aller* Mächtigkeiten oder Cantorscher Alephs, für welches kein konsistentes Axiomensystem aufgestellt werden kann, „daher nach meiner Bezeichnungsweise ein mathematisch nicht existirender Begriff ist" (ebd., 266).

Hilbert behauptet also, daß es unmöglich ist, die Menge aller Kardinalzahlen aus einem konsistenten Axiomensystem abzuleiten, diese Menge aller Kardinalzahlen daher nicht existiere. Während Cantor diese Menge auf Grund einer *ad hoc* Entscheidung ausschließt, um Widersprüche zu vermeiden, können diese problematischen Mengen in konsistenten Axiomensystemen gar nicht erst entstehen.

5 Schöpfung mathematischer Objekte

5.1 Gedankendinge

Wie entstehen nun die Objekte formalistischer Mathematik? Sie werden durch mentale Akte geschaffen. Dies geht aus den Worten hervor, mit denen Hilbert seine *Grundlagen der Geometrie* von 1899 eröffnet (§ 1):

> Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des *ersten* Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$;

> die Dinge des *zweiten* Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten *dritten* Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ [...].
>
> Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „*liegen*", „*zwischen*", „*parallel*", „*kongruent*", „*stetig*"; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

Hilberts Objekte sind Gedankendinge, kognitive Schöpfungen, die unabhängig von nicht-kognitiver Realität sind. Den von Kant entlehnten Terminus „Gedankending" verwendet Hilbert explizit in dem 1905 veröffentlichten Vortrag „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik" (Hilbert *1905a*). „Gegenstand unseres Denkens", so schreibt er dort, „heiße ein *Gedankending* oder kurz ein *Ding* und werde durch ein Zeichen benannt." Die Hilbertsche Konzeption war allerdings alles andere als originell in jener Zeit. Für Cantor werden Mengen denkend durch Zusammenfassung von Objekten gebildet, deren ontologischer Status unbestimmt bleibt. In *Was sind und was sollen die Zahlen?* hatte Richard Dedekind unter „Ding" jeden Gegenstand des Denkens verstanden (*1888*, 1). Die Zahlen sind für ihn „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes". Sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer auffassen zu können (ebd., III). Giuseppe Veroneses *Fondamenti di Geometria* von 1891 müssen erwähnt werden, ein Buch, das Hilbert zumindest in seiner deutschen Übersetzung von 1894 bekannt gewesen sein wird (Veronese *1891*, *1894*). Veronese beginnt seine Liste der fundamentalen Prinzipien der Geometrie mit „penso", „Ich denke", womit die Fähigkeit zu denken und der Denkakt selbst gemeint ist.

5.2 Die Freiheit des Mathematikers

Welche Rolle spielt die Freiheit in diesen kreativen Prozessen? Dedekind sprach von freien Schöpfungen. Cantor sah das Wesen der Mathematik gerade in ihrer Freiheit (*1883*, *1932*, 182): Bei der Ausbildung ihres Ideenmaterials muß sie „*einzig* und *allein* auf die *immanente* Realität ihrer Begriffe" Rücksicht nehmen und hat daher keinerlei Verbindlichkeit, „sie auch nach ihrer *transienten* Realität zu prüfen" (ebd., 182). Sie vermag sich daher „durchaus frei von allen metaphysischen Fesseln zu bewegen" (ebd. 183). Und auch Hilbert sprach von dem schöpferischen Prinzip der Mathematik, „das uns im freiesten Gebrauch zu immer neuen Begriffsbildungen berechtigt mit der einzigen Beschränkung der Vermeidung eines Widerspruchs" (*1905a*, 183).

Diese emphatischen Worte von Cantor, Dedekind und Hilbert enthalten einen gewissen Anteil von Ideologie. Ich bin davon überzeugt, daß Hilbert deutlich gesehen hat, daß es noch einige andere Restriktionen der mathematischen Freiheit gibt, nicht im Prinzip, aber doch faktisch.

Akzeptiert man die Annahme, daß mathematische Freiheit bedeutet, zumindest bei der Auswahl der Ausgangssätze von Deduktionen nicht determiniert zu sein, dann muß man nicht zur selben Zeit annehmen, daß es überhaupt keine Voraussetzungen und Restriktionen freier Wahlen gibt. Ich möchte über drei dieser Einschränkungen sprechen:

1. eine logische Voraussetzung,

2. metaphysische Voraussetzungen, und schließlich

3. pragmatische Voraussetzungen.

5.2.1 Die logische Voraussetzung

Die Rolle der logischen Voraussetzung im Hilbertschen Formalismus ist evident. Die kreative Kraft des Mathematikers ist durch die Notwendigkeit, Widersprüche zu vermeiden, eingeschränkt. In Hilberts Programm wurde die Konsistenz zum wesentlichen Kriterium für die Rechtfertigung axiomatischer Systeme, die Suche nach Widerspruchsfreiheitsbeweisen zur wesentlichen Aufgabe bei der Produktion von axiomatischen Systemen.

5.2.2 Metaphysische Voraussetzungen

Die Theorie mathematischer Schöpfungen ist von Fragen betroffen, wie sie von der Kritischen Philosophie gestellt werden, also z. B. von der Frage, „was sind die Voraussetzungen für die Möglichkeit, mathematische Objekte zu schaffen?“ Diese Voraussetzungen ähneln den Postulaten Euklids, d. h. Annahmen, die notwendig sind, damit bestimmte Konstruktionen ausgeführt werden können. Sie sind natürlich außermathematisch, philosophisch. In seinen Vorlesungen aus dem Sommersemester 1905 über *Logische Principien des mathematischen Denkens* formulierte Hilbert ein solches philosophisches Postulat. Er nannte es „Axiom des Denkens“ oder „Axiom von der Existenz einer Intelligenz“, das „‚apriori‘ der Philosophen“, wie Hilbert es in einer Marginalie zur Mitschrift von Ernst Hellinger bezeichnet (Hilbert *1905b*, 219):

> Ich habe die Fähigkeit, *Dinge* zu denken und sie durch einfache Zeichen $(a, b, \dots X, Y, \dots)$ derart in vollkommen charakteristischer Weise zu bezeichnen, dass ich sie daran stets eindeutig wiedererkennen kann; mein Denken operiert mit diesen Dingen in dieser Bezeichnung in gewisser Weise nach bestimmten Gesetzen[,] und ich bin fähig, diese Gesetze durch Selbstbeobachtung zu erkennen und vollständig zu beschreiben.

Hilbert bezeichnete dieses Prinzip als „Axiom“, obgleich es die Bedingungen für mathematische Operationen setzt und obwohl es beansprucht, material wahr zu sein und nicht nur allgemeingültig. Die erwähnte Marginalie indiziert, daß Hilbert die Verantwortung für die Rechtfertigung dieses Prinzips in die Hände der Philosophen legen wollte. Damit wies er der Philosophie eine wichtige Rolle im Rahmen des Unternehmens einer Begründung der Mathematik zu.

5.2.3 Pragmatische Einschränkungen

Eine freie Wahl beim Aufbau eines axiomatischen Systems ist nicht determiniert, aber doch geleitet von den Zielsetzungen, die mit der Axiomatisierung einer gegebenen Theorie erreicht werden sollen. Ich nenne diese Orientierung eine „pragmatische Restriktion“. Axiomatisierung ist kein Zweck an sich, zumindest nicht für Hilbert. Das axiomatische Verfahren beginnt inmitten der bestehenden, nicht-axiomatisierten Mathematik. Die Auswahl der zu axiomatisierenden Theorie wird von der aktuellen mathematischen Diskussion beeinflußt. Die Axiomatisierung einer Theorie kann somit als die Rekonstruktion eines Teils gegebener Mathematik angesehen werden und ist daher auch nicht vollkommen frei von dieser gegebenen Mathematik. Ich möchte dies durch einige Zitate aus Hilberts Werk veranschaulichen.

Diese Interpretation wird schon durch den bereits anfangs zitierten Brief an Frege gestützt. Dort schrieb Hilbert über seine Motive, die Euklidische Geometrie zu axiomatisieren (Frege *1976*, 65):

> Ich bin zu der Aufstellung meines Systems von Axiomen durch die Not gezwungen: ich wollte die Möglichkeit zum Verständnis derjenigen geometrischen Sätze geben, die ich für die wichtigsten Ergebnisse der geometrischen Forschungen halte: dass das Parallelenaxiom keine Folge der übrigen Axiome ist, ebenso das Archimedische etc.

Diese Ansicht kann ergänzt werden durch die Vorstellung, daß die axiomatische Methode als Hilfsmittel für die Entscheidung mathematischer Streitfragen dienen kann. Dies wird klar aus Hilberts Stellungnahmen zu den Problemen der Cantorschen Mengenlehre. Vor allem aber wird die axiomatische Methode zur Sicherung der Grundlagen eingesetzt und zwar dort, wo die Grundlagen in Frage gestellt wurden. Ihre Ergebnisse haben dabei durchaus vorläufigen Charakter. Dies wird ausgedrückt in Hilberts Vergleich der Produktion von Mathematik mit dem Bau eines Hauses. Ich möchte ein sehr illustratives Beispiel aus der Vorlesung von 1905 *Logische Principien des mathematischen Denkens* zitieren (Hilbert *1905c*, 122):

> Es ist in der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft wohl immer so gewesen, dass man ohne viele Scrupel eine Disciplin zu bearbeiten begann und soweit vordrang wie möglich, dass man dabei aber, oft erst

> nach langer Zeit, auf Schwierigkeiten stieß, durch die man gezwungen wurde, umzukehren und sich auf die Grundlagen der Disciplin zu besinnen. Das Gebäude der Wissenschaft wird nicht aufgerichtet wie ein Wohnhaus, wo zuerst die Grundmauern fest fundamentiert werden und man dann erst zum Auf- und Ausbau der Wohnräume schreitet; die Wissenschaft zieht es vor, sich möglichst schnell wohnliche Räume zu verschaffen, in denen sie schalten kann, und erst nachträglich, wenn es sich zeigt, dass hier und da die locker gefügten Fundamente den Ausbau der Wohnräume nicht zu tragen vermögen, geht sie daran, dieselben zu stützen und zu befestigen. Das ist kein Mangel, sondern die richtige und gesunde Entwicklung.

Betrachtet man diese Einschätzung wissenschaftlicher und damit auch mathematischer Praxis, so kann man sich nicht mehr wundern, daß Hilbert seine Begründungsbemühungen in dieser Praxis beginnt, ausgehend von allgemein anerkannten Sätzen des zu axiomatisierenden Bereiches. Er wählt seine Axiomkandidaten aus diesen Sätzen aus, getrieben von seiner Intuition als Mathematiker und aufgrund einer gewissen Trivialität, die diesen Axiomkandidaten anhängt. Die isolierten Axiomkandidaten werden nun daraufhin geprüft, ob sie den Bedingungen der Vollständigkeit, Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit genügen. Das System ist natürlich offen für Modifikationen, die dann notwendig werden, wenn eine oder mehrere der Bedingungen nicht erfüllt sind. Hilberts frühes axiomatisches Programm, üblicherweise angesehen als der Prototyp des Formalismus, ist also kein universales Programm für eine umfassende Reformulierung der Mathematik, wie die spätere „Architektur der Mathematik“ von Bourbaki, der französischen Mathematikergruppe. In Hilberts axiomatischem Programm werden im Gegenteil die Grundlagen nur soweit festgelegt, wie dies für die mathematische Praxis notwendig ist. Der Grad grundlagentheoretischer Qualität hängt also vom jeweiligen Stand der mathematischen Forschung ab. Dies wird durch Hilberts Metapher ausgedrückt, daß die Aufgabe von Grundlegungsbemühungen in der Tieferlegung der Fundamente liegt (Hilbert *1918*, 417). Ein tiefergelegtes Fundament ist aber noch nicht notwendig das tiefste Fundament. Aus diesem Grunde spielt auch die Idee einer Letztbegründung in Hilbertschen Systemen keine Rolle.

6 Ontologie des Gedankendings

6.1 Ontologie als offene Frage

Bis jetzt habe ich über die Axiomatisierung und den kreativen Prozeß in der Mathematik gesprochen, ohne mich zum ontologischen oder erkenntnistheoretischen Status der Objekte zu äußern, die durch kognitive Akte in die

Welt gesetzt werden. Haben diese Objekte, sobald sie geschaffen sind, eine von uns unabhängige Existenz? Natürlich müssen sie in irgendeiner Weise repräsentiert werden, z. B. unter Verwendung einer symbolischen Notation. Diese Symbole stehen dann für diese Gedankendinge. Die Gedankendinge selbst beziehen sich aber auf nichts, sie sind nicht-referentiell. Das Notationssystem ist notwendig, um den subjektiven Prozeß der Produktion von Mathematik objektiv zu machen, also anderen Mathematikern den Zugang zu diesen Konstruktionen zu eröffnen. Aber wieder wird ein kognitiver Akt auf seiten des rezipierenden Mathematikers benötigt, damit überhaupt verstanden wird, daß die Zeichen mathematische Objekte repräsentieren. Erst durch einen kognitiven Akt kann der rezipierende Mathematiker die Bedeutung der Symbole erschließen. Daher haben die kognitiven Schöpfungen keine vom Geist unabhängige Existenz. Man könnte nun alles, was Gegenstand einer Untersuchung werden kann, als existierend ansehen. Aber selbst ein solch' naiver Zugang zur Existenz trifft nicht Hilberts Existenzbegriff. Es gibt vermeintliche Objekte, die nach Hilberts Ansicht keine Existenz haben, nämlich diejenigen Objekte, die grundlegenden Annahmen des axiomatischen Systems widersprechen. Und noch weiter: Offensichtlich ist es möglich, daß ein Objekt in einem axiomatischen System existiert, in einem anderen aber nicht.

Ich bin davon überzeugt, daß sich Hilbert des unbefriedigenden Charakters seiner frühen Metaphysik mathematischer Objekte bewußt gewesen ist. Als Mathematiker war er jedoch nicht hinreichend kompetent, solche philosophischen Fragen zu behandeln. Aus diesem Grunde unterstützte er institutionell die Göttinger Philosophen Leonard Nelson und Edmund Husserl, die an Problemen der systematischen Philosophie, z. B. erkenntnistheoretischen und Grundlagenfragen arbeiteten (vgl. Peckhaus *1990*, 196–224). Eine der Konsequenzen Hilberts war es, die Mathematik so weit als irgend möglich von philosophischen Fragen frei zu halten, nicht in dem Sinne, daß diese Fragen für mathematische Zwecke gelöst worden wären, sondern in dem Sinne, daß diese Frage offen gelassen wurden und das mathematische Gebäude in einer solchen Weise aufgebaut wurde, daß sie für die mathematische Praxis irrelevant würden.

Diese Einstellung, Grundlagenfragen offen zu halten, kann auch im Werk von Hilberts frühen Anhängern gefunden werden. Ernst Zermelo z. B. begann seine Axiomatisierung der Mengenlehre in der Mengenlehre, wie sie historisch gegeben war. Durch regressive Analyse suchte er dann „die Prinzipien aufzusuchen, welche zur Begründung dieser mathematischen Disziplin erforderlich sind“ (Zermelo *1908a*, 261). Diese Prinzipien müssen soweit eingeschränkt sein, daß alle Widersprüche vermieden werden können, sie müssen aber auch hinreichend weit sein, damit alles Wertvolle der Mengenlehre beibehalten werden kann. Zermelo erwähnt dann noch die Notwendigkeit der Unabhängigkeitsuntersuchung und bemerkt schließlich: „Die weitere, mehr philosophische Frage nach dem Ursprung und dem Gültigkeitsbereiche dieser Prinzipien soll hier noch unerörtert bleiben“ (ebd., 262). Zermelo teilte also offensichtlich nicht die Bernayssche Ansicht, daß alle philosophischen Probleme der Mathematik von der Mathematik selbst innerhalb der Mathematik gelöst werden könnten. Zermelo blendete diese Fragen schlicht aus.

6.2 Hypothetisch-deduktive Systeme

Wenn man die Frage offen läßt, ob mathematische Objekte irgendeine Existenz neben ihrer durch die Widerspruchsfreiheit garantierten schlichten Möglichkeit haben, oder ob mathematische Aussagen wahr sind in einem referentiellen Sinne neben ihrer Korrektheit, wie sie durch Ableitung aus widerspruchsfreien Axiomen verbürgt ist, dann mag es sinnvoll sein, ihre Existenz oder Wahrheit schlicht anzunehmen, also so mit ihnen zu verfahren, als wäre ihre philosophische Rechtfertigung bereits gegeben. Dies betrifft besonders die Axiome selbst und die Objekte, die in den Axiomen gesetzt werden. Die Axiome können also als Hypothesen angesehen werden, ein axiomatisches System auf dieser Grundlage wäre ein hypothetisch-deduktives System. Eine frühe Göttinger Quelle für diese von Mario Pieri eingeführte Position kann in Ernst Zermelos Vorlesung über „Mathematische Logik“ aus dem Sommersemester 1908 gefunden werden. Einer der Hörer war Kurt Grelling, der diese Vorlesung ausarbeitete. Die Mitschrift befindet sich in Zermelos Nachlaß in Freiburg. Zermelo beginnt seinen Kurs mit Überlegungen über die Natur mathematischer Urteile, speziell mit der Frage, ob arithmetische Sätze analytisch oder synthetisch seien. Er stellt dabei Frege, Peano und Russell auf der „analytischen Seite“ Poincaré auf der „synthetischen Seite“ gegenüber. Zermelo lehnt es zunächst ab, sich für eine dieser Fraktionen zu entscheiden, er nimmt eine vermittelnde Position ein (*1908b*, 3). „Wir nehmen zunächst an, daß in der Arithmetik synthetische und analytische Urteile nebeneinander vorkommen und stellen uns die Aufgabe, den analytischen Bestandteil zu isolieren.“ Zermelo führt nun eine Methode ein, die er „analytische Reduktion“ nennt und die, wie er sagt, bis auf Euklid zurückgeht, in neuerer Zeit aber von Hilbert perfektioniert worden sei:

> Diese Methode besteht darin, den Beweis eines Lehrsatzes vollständig in Syllogismen aufzulösen und die zum Beweise benutzten Prämissen möglichst vollständig voranzustellen. Man kann nun, statt die Praemissen [sic!] kategorisch zu behaupten, sie als Hypothesen in den Lehrsatz aufnehmen. Wir können aber sagen: Im Allgemeinen sind die mathematischen Sätze noch keine analytischen Urteile, wir können sie aber durch hypothetische Hinzufügung der synthetischen Prämissen *auf analytische reducieren*. Die so entstehenden logisch reducierten mathematischen Theoreme sind analytisch hypothetische Urteile und

> bilden das logische Gerippe einer mathematischen Theorie.

Paul Bernays wurde der Theoretiker dieser Art von Erkenntnistheorie. Dies kann an dem Aufsatz „Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie“ gezeigt werden, der 1930 veröffentlicht wurde. Dort spricht Bernays von der neuen methodologischen Wende in der Axiomatik, die darin bestehe, „daß für die Entwicklung einer axiomatischen Theorie der Erkenntnischarakter ihrer Axiome gleichgültig ist“ (Bernays *1930/31*, Neudruck, 19). Mathematik untersucht Strukturen, d. h. die logische Abhängigkeit zwischen Theoremen und Axiomen. Bernays fährt fort (ebd.):

> Für diese logische Abhängigkeit ist es aber gleichgültig, ob die vorangestellten Axiome wahre Sätze sind oder nicht, sie stellt einen rein hypothetischen Zusammenhang dar: wenn es sich so verhält, wie die Axiome aussagen, dann gelten die Lehrsätze.

Mathematische Deduktionen sind daher unabhängig von der Wahrheit der Ausgangssätze. Die Wahrheit der Axiome festzustellen, gehört nicht zu den Aufgaben des Mathematikers.

Es sei daran erinnert, daß diese Zeilen zu einer Zeit geschrieben wurden, als Hilbert und Bernays ihr metamathematisches Programm ausarbeiteten. Die Metamathematik hat durchaus einen erkenntnistheoretischen Status, aber Metamathematik ist keine Mathematik. Bernays’ Verdikt trifft also nur die eigentliche Mathematik.

6.3 Existentiale Formulierung einer Theorie

In dem Vortrag „Probleme der Grundlegung der Mathematik“, den er 1928 auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Bologna gehalten hatte (*1930*), gab Hilbert eine sehr selbstkritische Beurteilung des bis dahin verwirklichten axiomatischen Programms, wobei er sich insbesondere auf Zermelos Axiomatisierung der Mengenlehre bezog. „Freilich“, sagte er (*1930*, 3),

> eine endgültige Lösung der Grundlagenprobleme ist durch dieses axiomatische Verfahren niemals möglich. Denn die von Zermelo zugrunde gelegten Axiome enthalten echte inhaltliche Annahmen, und diese zu beweisen ist, wie ich glaube, gerade die Hauptaufgabe der Grundlagenforschung, — war doch schon damals die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome zu beweisen eine brennende Frage geworden. Wenn wir aber inhaltliche Axiome als Ausgangspunkte und Grundlagen für die Beweise benutzen, so verliert die Mathematik damit den Charakter des absolut Sicheren. Mit der Annahme von Voraussetzungen kommen wir auf das Gebiet des Problematischen, — beruhen doch

> die Meinungsverschiedenheiten der Menschen meist darauf, daß von verschiedenen Voraussetzungen ausgegangen wird. In einer Reihe von Vorträgen im Laufe der letzten Jahre habe ich daher einen neuen Weg zur Behandlung des Grundlagenproblems betreten. Mit dieser Neubegründung der Mathematik, die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, glaube ich die Grundlagenfragen in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt zu schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren Formel mache und dadurch den ganzen Fragenkomplex in die Domäne der reinen Mathematik versetze.

Aus diesem Zitat scheint klar hervorzugehen, daß Hilbert den hypothetischen Charakter inhaltlicher Mathematik überwinden will. Er will dies auf konstruktive Weise mit Hilfe der Beweistheorie tun. Damit verläßt er aber den Bereich der reinen Mathematik und formuliert ein philosophisches Programm. Es wäre zugleich auch ein Weg eröffnet, die starken Voraussetzungen zu umgehen, die im Rahmen der „existentialen Formulierung einer Theorie" gemacht werden, wie sie z. B. in den *Grundlagen der Mathematik* von Hilbert und Bernays (*1934*) formuliert wurden.[6] Hilbert und Bernays heben dort die existentiale Form als charakteristisches Merkmal der axiomatischen Methode in der formalen Axiomatik hervor (*1934*, 1). „Existentiale Form" heißt, daß die axiomatische Theorie mit einem System von Dingen zu tun hat, „welches einen von vornherein *abgegrenzten Bereich von Subjekten* für alle Prädikate bildet, aus denen sich die Aussagen der Theorie zusammensetzen" (2). Diese Voraussetzung einer Totalität des Individuenbereichs ist, so betonen Hilbert und Bernays, ist „eine idealisierende Annahme, die zu den durch die Axiome formulierten Annahmen hinzutritt" (ebd.).

Es muß festgehalten werden, daß die philosophischen Überlegungen zum Grundlagenproblem im Rahmen der Ausformulierung des Hilbertprogramms seit etwa 1917 eine außerordentlich dynamische Entwicklung nahmen. Wilfried Sieg spricht z. B. schon für den kleinen Zeitraum zwischen 1917 und 1922 im Plural von "Hilbert's programs" (Sieg *1999*). Von dieser Entwicklung war auch die Auseinandersetzung mit dem Existenzproblem tangiert, das in der Kombination von (philosophischer) Beweistheorie und Formalismus eine neue Qualität erhielt. In einer im Hilbert-Nachlaß aufgefundenen, etwa aus der Zeit zwischen 1925 und 1928 stammenden Notiz betonte Paul Bernays, daß für die Beweistheorie die Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit nicht mehr gelte, wobei er zugleich die mit Widerspruchsfreiheitsbeweisen verbundenen Ansprüche zurücknimmt:

> In der Tat ist ja auch gar nicht die Meinung, dass die Möglichkeit eines unendlichen Systems erwiesen werden soll, vielmehr soll nur gezeigt

[6] Zur existentialen Axiomatik vgl. Sieg *1990*, Abschnitt 2.1; Sieg *2001*.

> werden, dass das *Operieren mit einem solchen System* beim Schliessen nicht zu Widersprüchen führt.[7]

Noch 1950 publizierte Bernays einen Aufsatz über „Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit". Nun läßt er die Gleichsetzung von Existenz und Widerspruchsfreiheit wieder zu, betont aber die Bezogenheit mathematischer Existenzaussagen auf ein als methodisch-deduktiver Rahmen fungierendes Gedankensystem (Bernays *1950*, Neudruck, 104*f*.). Bernays bleibt der anti-realistischen Grundhaltung treu, wenn er die selbständige Existenz mathematischer Gegenstände negiert (105). Er betont vielmehr den konstruktiven Charakter der Hilbertschen Beweistheorie und parallelisiert sie einmal mehr mit dem Brouwerschen Intuitionismus (ebd.)

7 Schluß

Abschließend möchte ich noch einmal für meine Ausgangsbehauptung argumentieren, daß der Formalismus in Hinblick auf Ontologie und Grundlagenfragen keine abgeschlossene philosophische Position ist. Der Formalismus dient der Rechtfertigung mathematischer Arbeit durch Sicherstellung ihrer Widerspruchsfreiheit, nicht aber ihrer Grundlegung. Die philosophischen, also ontologischen und erkenntnistheoretischen Probleme, die mit einer Grundlegung der Mathematik verbunden sind, werden daher nicht etwa innerhalb der formalistischen (reinen) Mathematik gelöst, wie dies Hilbert und Bernays gelegentlich glauben machen, sondern schlicht ausgeblendet, soweit sie die Arbeit des Mathematikers nicht tangieren. Im Rahmen eines, den Formalismus umfassenden Grundlegungsprogramms bedarf es also einer philosophischen Ergänzung, wobei festzuhalten ist, daß der Formalismus epistemologisch und ontologisch neutral ist. Formalistische Mathematik kann ergänzt werden durch verschiedene Grundlagenpositionen, etwa durch realistische Konzepte wie Freges Logizismus oder anti-realistische wie Brouwers Intuitionismus, Hilberts eigene finitistische Metamathematik, Paul Lorenzens operative und konstruktive Mathematik, Nelsons transzendentalphilosophische Kritische Mathematik oder Oskar Beckers phänomenologische Rechtfertigung tranfiniter Mathematik. Keine dieser Positionen hat sich durchgesetzt, alle haben ihren programmatischen Charakter beibehalten. Ich halte es bei dieser Sachlage für eine weise Entscheidung, den Formalismus erkenntnistheoretisch offen zu halten. Auch unbegründete Teile der Mathematik haben ihren Nutzen in erfolgreichen Anwendungen und diesem Anwendungsproblem hätten sich alle restriktiven Grundlagenpositionen zu stellen.

---

[7] Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Nachlaß Hilbert, Cod. 685:9, 2. Der Text ist von Wilfried Sieg ediert worden in Sieg *2001*, 32–33, Zitat 33.

Literaturverzeichnis

Becker, Oskar *1927* „Mathematische Existenz. Zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene“, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* **8**, 441–809; auch separat, 2. Aufl., Max Niemeyer: Tübingen 1973.

Bernays, Paul *1922* „Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik“, *Die Naturwissenschaften* **31**, 93–99.

— *1923* „Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller ‚Über Zahlen und Zeichen‘“, *Mathematische Annalen* **90**, 159–163.

— *1930/31* „Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie“, *Blätter für Deutsche Philosophie* **4**, 326–367; Neudruck in: Bernays *1976*, 17–62.

— *1950* „Mathematische Existenz und Widerspruchsfreiheit“, in: *Philosophie des science en hommage à Ferdinand Gonseth*, Editions du Griffon: Neuchatel, 11–25; Neudruck in: Bernays *1976*, 92–106.

— *1976 Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt.

Cantor, Georg *1883* „Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten [5. Teil]“, *Mathematische Annalen* **21**, 545–591; wieder in Cantor *1932*, 165–204.

— *1887* „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten I“, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* **91**, 81–125; wieder in Cantor *1932*, 378–419.

— *1932 Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel*, hg. v. Ernst Zermelo, Berlin: Springer; Neuausgabe Olms: Hildesheim 1962, Springer: Berlin/Heidelberg/New York 1980.

— *1991 Briefe*, hg. v. Herbert Meschkowski/Winfried Nilson, Springer-Verlag: Berlin u. a.

Dedekind, Richard *1888 Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, ^{2}1893, ^{3}1911, ^{8}1960.

Frege, Gottlob *1976 Wissenschaftlicher Briefwechsel*, hg. v. Gottfried Gabriel et al., Felix Meiner: Hamburg (Frege, *Nachgelassene Schriften und wissenschaftlicher Briefwechsel*, Bd. 1).

Gauss, Carl Friedrich *1831* Anzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda*, *Göttingische gelehrte Anzeigen* vom 23. April 1831, in: Ders., *Werke*, hg. v. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 2, o. O. (Göttingen) 1876, 169–178.

Gentzen, Gerhard *1938* „Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung“, *Deutsche Mathematik* **3**, 255–268.

Gethmann, Carl Friedrich *ca. 2002* „Hermeneutische Phänomenlogie und Logischer Intuitionismus. Zu O. Beckers *Mathematische Existenz*“, erscheint in:

Die Philosophie und die Wissenschaften, hg. v. A. Gethmann-Siefert/J. Mittelstraß, Fink-Verlag: München.

HILBERT, David *1899* „Grundlagen der Geometrie“, in: *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*, hg. v. dem Fest-Comitee, B. G. Teubner: Leipzig, 1–92. Aktuelle Ausgabe Hilbert *1999*.

— *1900a* „Über den Zahlbegriff“, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8**, 180–184.

— *1900b* „Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900“, *Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*, 253–297.

— *1905a* „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“, in Adolf Krazer (ed.), *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Leipzig, 174–185.

— *1905b Logische Principien des mathematischen Denkens*, Vorlesung, Sommersemester 1905, Vorlesungsmitschrift von Ernst Hellinger (Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen).

— *1905c Logische Principien des mathematischen Denkens*, Vorlesung SS 1905, Ausarbeitung von Max Born (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 558a).

— *1918* „Axiomatisches Denken“, *Mathematische Annalen* **78**, 405–415, wieder in Hilbert *1964*, 1–11.

— *1925* „Über das Unendliche“, *Mathematische Annalen* **95**, 161–190; wieder in Hilbert *1964*, 79–108.

— *1930* „Probleme der Grundlegung der Mathematik“, *Mathematische Annalen* **102**, 1–9.

— *1935 Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3: *Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Lebensgeschichte*, Springer Verlag: Berlin/Heidelberg; 2. Aufl., Springer: Berlin/Heidelberg/New York 1970.

— *1964 Hilbertiana. Fünf Aufsätze*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt.

— *1999 Grundlagen der Geometrie. Mit Supplementen von Paul Bernays*, 14. Aufl., hg. und mit Anhängen versehen v. Michael Toepell, B. G. Teubner: Stuttgart/Leipzig.

HILBERT, David/BERNAYS, Paul *1934 Grundlagen der Mathematik*, Bd. 1, Julius Springer: Berlin.

HUSSERL, Edmund *1929 Formale und transzendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft*; kritische Ausgabe in Husserl, *Gesammelte Werke (Husserliana)* [*Hua*], Bd. XVII, hg. v. Paul Janssen, Nijhoff: The Hague 1974.

— *1956 Erste Philosophie (1923/24)*, 1. Teil: *Kritische Ideengeschichte*, in: Ders., *Gesammelte Werke (Husserliana)*, Bd. VII, hg. v. Rudolf Boehm, Nijhoff: The Hague.

KANT, Immanuel *1787 Critik der reinen Vernunft* [*KrV*], 2. Aufl., Johann Friedrich Hartknoch: Riga; Akademie-Ausgabe (Kant *1902–*), Bd. 3.

— *1902– Kant's gesammelte Schriften*, hg. v. d. Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Georg Reimer: Berlin, später Walter de Gruyter: Berlin/Leipzig.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm *1702* „Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summas et quadraturas“, *Acta Eruditorum* Mai 1702, 210–219; wieder in Ders., *Mathematische Schriften*, hg. v. C. I. Gerhardt, Bd. 5, H. W. Schmidt: Halle a. S. 1858, Reprint Olms: Hildesheim 1962 [*GM*], 350–361.

LOTZE, Rudolf Hermann *1880 Logik. Drei Bücher vom Denken, vom Untersuchen und vom Erkennen*, 2. Aufl., S. Hirzel: Leipzig (= Lotze, *System der Philosophie*, Tl. 1), teilweiser Neudruck Lotze *1989a,b*.

— *1989a Logik. Erstes Buch. Vom Denken (Reine Logik)*, hg. v. Gottfried Gabriel, Felix Meiner Verlag: Hamburg (= *Philosophische Bibliothek*; 421).

— *1989b Logik. Drittes Buch. Vom Erkennen (Methodologie)*, hg. v. Gottfried Gabriel, Felix Meiner Verlag: Hamburg (= *Philosophische Bibliothek*; 408).

MÜLLER, Aloys *1923a* „Über Zahlen als Zeichen“, *Mathematische Annalen* **90**, 153–158.

— *1923b* „Zusatz zu meiner Note ‚Über Zahlen und Zeichen‘ mit Rücksicht auf die Kritik des Paul Bernays“, *Mathematische Annalen* **90**, 163.

PECKHAUS, Volker *1990 Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*, Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen (= *Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik*; 7).

POINCARÉ, Henri *1914 Wissenschaft und Methode*, dt. Ausgabe v. F. und L. Lindemann, B. G. Teubner: Leipzig/Berlin (= *Wissenschaft und Hypothese*; XVII). Originalausgabe: *Science et méthode*, Flammarion: Paris 1908.

PURKERT, Walter/Hans Joachim ILGAUDS *1987 Georg Cantor 1845–1918*, Basel/Boston/Stuttgart (= *Vita Mathematica*; 1).

ROETTI, Jorge *1996* “El finitismo metamatemático de Hilbert y la critica de Oskar Becker”, *Adef revista de filosofía* **11**, Nrn. 1/2, 3–20.

SIEG, Wilfried *1990* “Relative Consistency and Accessible Domains”, *Synthese* **84**, 259–297.

— *1999* “Hilbert's Programs: 1917–1922”, *Bulletin of Symbolic Logic* **5**, 1–44.

— *2001* “Beyond Hilbert's Reach”, unveröffentlichtes TS.

VAN DER WAERDEN, B.L. *1967* „Klassische und moderne Axiomatik“, *Revue de mathématiques élémentaires* **22**, 1–4.

VERONESE, Giuseppe *1891 Fondamenti di geometria*, Padua; deutsche Übersetzung Veronese *1894*.

— *1894 Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals* [Übersetzung von Adolf Schepp], Leipzig.

ZERMELO, Ernst *1908a* „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I", *Mathematische Annalen* **65**, 261–281.

— *1908b Mathematische Logik*, Vorlesung gehalten in Göttingen im Sommersemester 1908, Ausarbeitung von Kurt Grelling, Nachlaß Zermelo, Universitätsarchiv Freiburg i. Br.