ANALİZ III

Mert Çağlar

Matematik-Bilgisayar Bölümü
İstanbul Kültür Üniversitesi
Bakırköy 34156 İstanbul
http://web.iku.edu.tr/~mcaglar/
m.caglar@iku.edu.tr

ey can hümâsı, bize bu ruzigârdan
bir sayfa okur musun?

—HİLMİ YAVUZ
Bedreddin Üzerine Şiirler

İçindekiler

Önsöz

İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi'nin 2010-2011 Güz yarıyılında başlattığı *Örgün Öğretimde Uzaktan Öğretim Desteği* (UDES) projesi kapsamında, örgün öğretimde kullanılan ders notlarının internet ortamına aktarılması amaçlanmaktadır. Özellikle temel bilimler alanında nitelikli Türkçe ders notu sıkıntısı çekilen Türkiye'de, UDES projesiyle, sadece İstanbul Kültür Üniversitesi öğrencilerine değil, Türkiye'deki tüm üniversitelerin lisans öğrencilerine ulaşılma hedefi güdülmektedir. 2005-2006 Güz yarıyılından bu yana İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde vermekte olduğum Analiz III (MC 311) dersinin notlarından oluşan bu derleme, temel olarak, William R. Wade'in *An Introduction to Analysis* [17] kitabının ilgili bölümleri kullanılarak oluşturulmuştur. Ders kitabı olarak kullanılan bu kaynağa ek olarak, kimi yerlerde, gerekli olduklarını düşündüğüm bâzı açıklama ve eklemeler yapılmıştır. Öklidyen uzayların yapısı ve bu uzaylar üzerinde tanımlı çok-değişkenli fonksiyonların limit, süreklilik ve diferansiyellenebilme özelliklerinin incelendiği bu ders notları düzenlenirken, tek-değişkenli analizin temel kavramlarının ve sonuçlarının bilindiği varsayımıyla hareket edilmiştir. Okuyucunun ilgisini çok-değişkenli hesabın temel kavramlarına yönlendirebildiği oranda, bu notlar amacına ulaşmış olacaktır.

Dersin uygulamalarını yürüten ve notları dikkâtle okuyarak kimi yanlışları düzelten Uğur Gönüllü'ye teşekkür ederim. Yine de gözden kaçan bâzı hatâlar varsa, sorumluluk tamâmen bana aittir.

İstanbul, Ocak 2011 — Mert Çağlar

1 Öklidyen uzaylar

Tek gerçel-değişkenli fonksiyonlar, gerek teoride gerekse uygulamada karşılaşılan birçok problemin formüle edilebilmesinde yetersiz kalırlar; pek çok problem, birden fazla değişkenin kontrol edilmesini gerektirir. Bundan dolayı, değişken sayısı birden çok olan fonksiyonları analiz edebilmek için gerekli alt-yapıya ihtiyaç vardır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid j = 1, 2, \ldots, n \text{ için } x_j \in \mathbb{R}\}$$

olsun. $\mathbb{R}^n$ kümesinin $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elemanları ***nokta*** ya da ***vektör*** veya ***sıralı n'li*** olarak, her x_j sayısı ise $\mathbf{x}$ vektörünün j'inci ***koordinat***ı ya da ***bileşen***i olarak adlandırılır. $n = 1$ olduğunda elde edilen $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ kümesinin her elemanına bir ***skaler*** denir.

1.1 $\mathbb{R}^n$ uzayının cebirsel yapısı

Tek-değişkenli hesabın analizindekine benzer biçimde, ilk olarak $\mathbb{R}^n$ kümesinin cebirsel yapısını inceleyerek başlayacağız.

Tanım 1.1.1. $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbb{R}^n$ içinde vektörler ve $\alpha \in \mathbb{R}$ bir skaler olsun.

(i) Her $j = 1, \ldots, n$ için $x_j = y_j$ ise, yani bileşenleri eşitse, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri ***eşit*** olarak adlandırılır.

(ii) Tüm bileşenleri sıfır olan vektöre ***sıfır vektörü*** denir ve $\mathbf{0}$ olarak gösterilir.

(iii) Her $j = 1, \ldots, n$ için, $\mathbb{R}^n$ içinde, j'inci koordinatı 1 diğerleri 0 olan $\mathbf{e}_j$ vektörlerinden müteşekkil $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ailesine $\mathbb{R}^n$ kümesinin ***doğal taban***ı denir.

(iv) $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin ***toplam***ı,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

olarak tanımlanan vektördür.

(v) $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin ***fark***ı,

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} := (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$$

olarak tanımlanan vektördür.

(vi) α skaleriyle $\mathbf{x}$ vektörünün ***çarpım***ı,

$$\alpha\,\mathbf{x} := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

vektörüdür.

(vii) $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin ***Öklidyen/skaler/iç çarpım***ı,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

olarak tanımlanan *skalerdir.*

(viii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ koşulunu sağlayan *sıfırdan farklı* $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri ***ortogonal*** olarak adlandırılır.

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. Tanımdan dolayı, $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$ gerçeklenir; diğer taraftan, $i \neq j$ olduğunda $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ olur. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^n$ içindeki her vektör, ortogonal elemanlardan oluşan doğal taban vâsıtasıyla tek türlü ifade edilebilir.

Üzerine, Tanım 1.1.1'in (i)-(vi) özellikleriyle verilen toplama ve skalerle çarpma işlemi, ve Tanım 1.1.1 (vii) ile verilen Öklidyen çarpım konulan bir $\mathbb{R}^n$ kümesi bir ***Öklidyen uzay*** olarak adlandırılır. n sabitlendiğinde, $\mathbb{R}^n$ kümesine ***n-boyutlu Öklidyen uzay*** denir.

Teorem 1.1.2. *$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda; $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\alpha(\beta\mathbf{x}) = \beta(\alpha\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$, $\alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\alpha\mathbf{y})$, $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$, $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$, ve $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ eşitlikleri gerçeklenir.*

Kanıt. Tanımların ve gerçel sayıların karşılık gelen özelliklerinin doğrudan sonuçlarıdır. □

Tanım 1.1.3. $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) $\mathbf{x}$ vektörünün ***sup-normu***,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

skaleridir.

(ii) $\mathbf{x}$ vektörünün ***(Öklidyen) normu***,

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}$$

skaleridir.

(iii) $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki ***(Öklidyen) uzaklık***, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ skaleridir.

Teorem 1.1.4 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)**.** *Her* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Kanıt. $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ için istenen eşitsizliğin doğru olduğu açıktır. $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ olsun. Tanım gereğince, her t skaleri için

$$0 \leqslant \|\mathbf{x} - t\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - t\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - t\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 2t(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + t^2\|\mathbf{y}\|^2 \qquad (1.1.1)$$

doğru olur; bu ise, (1.1.1) eşitsizliğinde $t := (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})/\|\mathbf{y}\|^2$ konularak,

$$0 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 - t(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{y}\|^2},$$

yani $0 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2/\|\mathbf{y}\|^2$ sonucuna ulaştırır. Bu son eşitsizlik düzenlenip pozitif karekök alınarak da, istenen elde edilir. □

Teorem 1.1.5. $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *olsun. Bu durumda,*

(i) *eşitlik durumu sadece* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *için sağlanmak üzere,* $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$*;*

(ii) *her* α *skaleri için* $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$*;*

(iii) $|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,| \leqslant \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ***(üçgen eşitsizlikleri)****;*

(iv) $\|\mathbf{x}\| \leqslant \sum_{j=1}^n |x_j|$*; ve*

(v) *her* $j = 1, \ldots, n$ *için* $|x_j| \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant \sqrt{n}\, \|\mathbf{x}\|_\infty$

özellikleri gerçeklenir.

Kanıt. (i), (ii) ve (v) doğrudan gözlemlenebilir; (iii) için Teorem 1.1.2 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği; (v) içinse, $A := \{(i,j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n \text{ ve } i < j\}$ olmak üzere,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 + 2 \sum_{(i,j)\in A} |x_i|\,|x_j|$$

özdeşliğini gözlemlemek yeterlidir. □

Genel olarak, vektörler ve noktalar arasında bir ayırım yapılmayacaktır; ancak her durumda, o durum için en uygun olan yapı kullanılacaktır. Örneğin, $\mathbb{R}^n$ uzayı orijinden çıkan vektörler ailesi olarak göz önüne alındığında, sıfırdan farklı bir $\mathbf{a}$ vektörünün yine sıfırdan farklı bir $\mathbf{b}$ vektörüne ***paralel*** olması, $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ eşitliğini gerçekleyen bir t skalerinin var olması olarak tanımlanacaktır. Diğer taraftan, örneğin $\mathbb{R}^n$ uzayı noktaların bir ailesi olarak göz önüne alındığında, $\mathbf{a}$ noktası ile $\mathbf{b}$ noktasını birleştiren ***doğru parçası***

$$L(\mathbf{a};\mathbf{b}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} := \phi(t) := (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b},\ t \in [0,1]\}$$

kümesi olarak tanımlanacaktır.

Noktaların ve vektörlerin bu şekilde eşdeğer görülmeleri, geometrik kavramların analitik problemlerde kolaylık yaratacak şekilde kullanılmalarını sağlar. İki-boyutlu Öklidyen uzaydan bir örnek vermek gerekirse, $\mathbb{R}^2$ içindeki $\mathbf{a} := (a_1, a_2)$ ve $\mathbf{b} := (b_1, b_2)$ noktaları vâsıtasıyla tanımlanan

$$\mathcal{P} := \{(x,y) = u(a_1,a_2) + v(b_1,b_2) \mid u, v \in [0,1]\}$$

kümesi, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ tarafından belirlenen ***paralelkenar***dır.

İki-boyutlu Öklidyen uzay içinde göz önüne alınan sıfırdan farklı her $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörü için tek türlü belirli bir $\theta \in [0,\pi]$ gerçel sayısı, üçgenler için Kosinüs Teoremi nedeniyle,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|} \tag{1.1.2}$$

gerçeklenecek biçimde vardır. (1.1.2) eşitliğinden ilham alınarak, her $n \in \mathbb{N}$ için, sıfırdan farklı $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri arasındaki ***açı***, (1.1.2) eşitliğiyle tanımlanan tek türlü belirli $\theta \in [0,\pi]$ gerçel sayısı olarak tanımlanacaktır.

$\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir ***açık top***, bir $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ve bir $r > 0$ için,

$$B_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$$

yapısında bir kümedir; $\mathbf{a}$ noktası $B_r(\mathbf{a})$ açık topunun ***merkez***i, r skaleri ise aynı açık topun ***yarıçap***ı olarak adlandırılır. $B_1(\mathbf{0})$ topuna bir ***birim top*** denir.

Merkez noktasının her bileşeni ve yarıçapı rasyonel sayılardan oluşan bir açık top, ***rasyonel*** olarak adlandırılacaktır.

$\mathbb{R}^n$ içindeki, bir $\mathbf{a}$ vektörü ve sıfırdan farklı bir $\mathbf{b}$ vektörü için

$$\Pi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0\}$$

olarak tanımlanan kümeye, $\mathbb{R}^n$ içinde bir ***hiper-düzlem*** denir; $\mathbf{b}$ vektörü $\Pi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$ hiper-düzleminin ***normal vektörü*** olarak adlandırılır. $\mathbf{x} \in \Pi$ koşulunu sağlayan bir Π hiper-düzlemi için, "$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ***noktasından geçer***," denir. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere, bir Π hiper-düzleminin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ noktasından geçmesi için $F(\mathbf{x}) = 0$ olmasının gerekli ve yeterli olduğu $F(\mathbf{x}) = 0$ formundaki bir ifadeye, Π hiper-düzleminin bir ***denklem***i denir. Dolayısıyla bir $\Pi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$ hiper-düzleminin denklemi, $\mathbf{b} := (b_1, \ldots, b_n)$ ve $d := b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n$ olmak üzere,

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = d$$

olarak verilir.

Tanım 1.1.6. Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ve her α skaleri için $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{y})$ ve $\mathbf{F}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{x})$ koşullarını gerçekleyen bir $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu ***lineer*** olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.7. Tek-değişkenli bir $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun lineer olması, ancak ve yalnız bir m skalerinin her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = mx$ gerçeklenecek biçimde var olmasıyla mümkündür.

Çok-değişkenli fonksiyonlar söz konusu olduğunda Örnek 1.1.7'dekine benzer bir gösteriliş elde etmek için, Lineer Cebir'in standart araçları kullanılacaktır: $(m \times n)$-boyutlu ve girdileri b_{ij} skalerlerinden ya da gerçel-değerli fonksiyonlarından oluşan bir B matrisi

$$B := [b_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

olarak; bir $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ noktası ise,

$$[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

biçiminde $(1 \times n)$-boyutlu satır matrislerle ya da

$$[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

biçiminde $(n \times 1)$-boyutlu sütun matrislerle gösterilecektir. Notasyon zorlanarak, $(m \times n)$-boyutlu bir B matrisiyle $(n \times 1)$-boyutlu bir $[\mathbf{x}]$ sütun matrisinin çarpımı $B\mathbf{x}$ olarak yazılacaktır. Tüm girdileri sıfır skalerlerinden oluşan $(m \times n)$-boyutlu bir matris bir ***sıfır matrisi*** olarak adlandırılacak ve $O_{m \times n}$ sembolüyle gösterilecektir. $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal tabanı $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ olmak üzere, her $j = 1, \ldots, n$ için, j'inci satırı (ya da sütunu) $\mathbf{e}_j$ vektörü olan $(n \times n)$-boyutlu kare matris *n-boyutlu* bir ***birim matris*** olarak isimlendirilecek ve I_n ile gösterilecektir. $B := [b_{ij}]_{m \times n}$ ve $C := [b_{\nu k}]_{p \times q}$ olmak üzere, B matrisinin bir α skaleriyle ***çarpım***ı

$$\alpha B := [\alpha b_{ij}]_{m \times n}$$

olarak; $m = p$ ve $n = q$ olduğunda B ve C matrislerinin ***toplam***ı

$$B + C := [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n}$$

olarak; ve $n = p$ olduğunda B ve C ***matrislerinin çarpımı***

$$BC = \left[\sum_{\nu=1}^{n} b_{i\nu} c_{\nu j}\right]_{m \times q}$$

olarak tanımlanan matrislerdir. Matris cebiriyle ilgili temel özellikler için, [2] ya da [5] kaynaklarına bakılabilir.

Örnek 1.1.8. $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]$ fonksiyonu vektör toplamını matris toplamına, iç çarpımı matris çarpımına, ve skaler çarpımı skaler çarpıma taşır: yani, her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ve her α skaleri için

$$[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = [\mathbf{x}] + [\mathbf{y}], \quad [\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}] = [\mathbf{x}]\,[\mathbf{y}]^T, \quad \text{ve} \quad [\alpha \mathbf{x}] = \alpha [\mathbf{x}]$$

gerçeklenir.

Aşağıdaki iki netice, Lineer Cebir'in temel sonuçlarındandır.

Teorem 1.1.9. *$B := [b_{ij}]_{m \times n}$, girdileri gerçel sayılar olan bir matris ve $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal tabanı $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ olsun. Eğer her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) := B\mathbf{x} \tag{1.1.3}$$

ise, $\mathbf{F}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}^m$ uzayına bir lineer fonksiyondur, ve her $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj}) = \mathbf{F}(\mathbf{e}_j) \tag{1.1.4}$$

gerçeklenir. Tersine, eğer $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu lineer ise ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin girdileri (1.1.4) eşitliğini gerçekliyorsa, bu durumda $\mathbf{F}$ ve B, (1.1.3) eşitliğini sağlar. Özel olarak, her $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer fonksiyonu için, (1.1.3) eşitliğini sağlayan tek bir $(m \times n)$-boyutlu B matrisi vardır.

Kanıt. Her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için (1.1.3) sağlansın. Bu durumda, Örnek 1.1.8 ve matris çarpımının dağılma özelliğinden dolayı,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = B[\mathbf{x}+\mathbf{y}] = B([\mathbf{x}]+[\mathbf{y}]) = B[\mathbf{x}] + B[\mathbf{y}] = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{y})$$

eşitlikleri her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır. Benzer biçimde, her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$\mathbf{F}(\alpha\mathbf{x}) = B[\alpha\mathbf{x}] = B(\alpha[\mathbf{x}]) = \alpha B[\mathbf{x}] = \alpha\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

olur. Dolayısıyla, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu lineerdir. Diğer taraftan, matris çarpımının tanımından dolayı, her $j = 1, 2, \ldots, n$ için (1.1.4) gerçeklenir.

Tersine, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu lineer olsun, ve B matrisi, girdileri her $j = 1, 2, \ldots, n$ için (1.1.4) eşitliğiyle verilen matris olarak tanımlansın. Böylece,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{F}(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_{1j}, \sum_{j=1}^{n} x_j b_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_j b_{mj}\right) = B\mathbf{x}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. □

Açıklama 1.1.10. Teorem 1.1.9 ile verilen (1.1.3) eşitliğini sağlayan ve tek türlü belirli olan B matrisine, $\mathbf{F}$ lineer fonksiyonunu ***temsil eden matris*** denir. Diğer taraftan yine Teorem 1.1.9'dan dolayı, $\mathbb{R}^n$ içindeki bir hiper-düzlemin denklemi, bir lineer $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $F(\mathbf{x}) = d$ formundadır.

Sonuç 1.1.11. *Eğer $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve $\mathbf{G} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonları lineer ise, $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonu da lineerdir. Bu durumda $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ fonksiyonunu, $\mathbf{F}$ fonksiyonunu temsil eden $(m \times n)$-boyutlu matris B ve $\mathbf{G}$ fonksiyonunu temsil eden $(p \times m)$-boyutlu matris C olmak üzere, CB matrisi temsil eder.*

Kanıt. $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ fonksiyonunun lineer olduğu âşikârdır. $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$, ve $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_p\}$, sırasıyla, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, ve $\mathbb{R}^p$ uzaylarının doğal tabanları olsun. Eğer $B := [b_{ij}]_{m\times n}$ ve $C := [c_{\nu k}]_{p\times m}$ matrisleri, sırasıyla, $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{G}$ lineer fonksiyonlarını temsil ediyorsa, Teorem 1.1.9'dan, her $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$\sum_{k=1}^{m} b_{kj}\mathbf{u}_k = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj}) = \mathbf{F}(\mathbf{e}_j),$$

ve her $k = 1, 2, \dots, m$ için

$$\sum_{\nu=1}^{p} c_{\nu k}\mathbf{w}_\nu = (c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{pk}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_k)$$

sağlanır. Dolayısıyla, her $j \in \{1,\dots,n\}$ için,

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(\mathbf{e}_j) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathbf{e}_j)) = \mathbf{G}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj}\mathbf{u}_k\right) &= \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\mathbf{G}(\mathbf{u}_k)\\ = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{p} b_{kj}c_{\nu k}\mathbf{w}_\nu &= \left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj}c_{1k}, \sum_{k=1}^{m} b_{kj}c_{2k}, \dots, \sum_{k=1}^{m} b_{kj}c_{pk}\right)\end{aligned}$$

olur; bu ise, son eşitlikteki vektörün CB matrisinin j'inci sütunu olmasından dolayı, CB matrisin $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ fonksiyonunu temsil eden matris olması anlamına gelir. $\square$

Matris çarpımı iç çarpımın bir genelleştirilmesi olarak görülebileceğinden, aşağıdaki sonuç Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir benzeridir.

Teorem 1.1.12. *Eğer $B := [b_{ij}]_{m\times n}$, girdileri gerçel sayılar olan bir matris ve*

$$\|B\|_\infty := \max\{|b_{ij}| \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

ise, her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|B\mathbf{x}\| \leqslant \sqrt{(mn)}\,\|B\|_\infty\,\|\mathbf{x}\|$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Kanıt. Teorem 1.1.5 (v) ve Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'nin sonucudur. $\square$

Tanım 1.1.13. $\mathbb{R}^3$ içindeki iki $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)$ ve $\mathbf{y} := (y_1, y_2, y_3)$ vektörünün ***vektörel çarpım***ı,

$$\mathbf{x}\times\mathbf{y} := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

olarak tanımlanan vektördür.

$\mathbb{R}^3$ uzayının doğal tabanı olarak $\mathbf{i} := \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} := \mathbf{e}_2$, ve $\mathbf{k} := \mathbf{e}_3$ yazıp determinant operatörünü kullanarak,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

olduğunu gözlemlemek oldukça kolaydır.

İç çarpım için olduğu gibi, vektörel çarpım için de cebir kuralları geçerlidir.

Teorem 1.1.14. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ *vektörler ve α bir skaler olsun. Bu durumda,*

(i) $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ *ve* $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$;

(ii) $(\alpha\mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{x} \times (\alpha\mathbf{y})$;

(iii) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$;

(iv) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$;

(v) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$; *ve*

(vi) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$

özellikleri gerçeklenir.

Kanıt. Tüm özellikler, tanımların doğrudan sonuçlarıdır. □

Sonuç 1.1.15. $\mathbf{x}$ *ve* $\mathbf{y}$*, aralarındaki açı θ olan, $\mathbb{R}^3$ içinde iki vektör ise,*

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \sin\theta$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Teorem 1.1.13 (vi) ve (1.1.2) eşitliğinin sonucudur. □

Problemler

1. (a) $z = x$ düzleminde olan ve $(1, -1, 0)$ vektörüne dik olan sıfırdan farklı tüm vektörleri bulunuz.
   (b) Bileşenlerinin toplamı dört olan ve $(3, 2, -5)$ vektörüne dik olan sıfırdan farklı tüm vektörleri bulunuz.

(c) $(1, 0, 1)$ noktasını içeren ve normali $(-1, 2, 1)$ olan düzlemin denklemini bulunuz.
(d) $(-1, 1, 1)$ noktasından geçen ve $3x + 2y - 5z = 0$ düzlemine dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

2. $\mathbb{R}^3$ içinde, doğrusal olmayan ve bir Π düzlemi tarafından içerilen üç nokta $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ olsun. Π düzleminin denkleminin

$$\det \begin{bmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{bmatrix} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

3. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olsun. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ olması için, bir $\alpha \geqslant 0$ skalerinin $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ gerçeklenecek biçimde bulunmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

4. $\mathcal{C}[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli}\}$ ve $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ olsun.
(a) Her $f \in \mathcal{C}[a, b]$ için $\|f\|_\infty$ büyüklüğünün, sonlu ve negatif-olmayan bir gerçel sayı olduğunu kanıtlayınız.
(b) $\|f\|_\infty = 0$ olması için, her $x \in [a, b]$ için $f(x) = 0$ olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösteriniz.
(c) Her $f \in \mathcal{C}[a, b]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için, $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \, \|f\|_\infty$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.
(d) Her $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ için, $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ ve $\|f - g\|_\infty \geqslant \|f\|_\infty - \|g\|_\infty$ eşitsizliklerinin gerçeklendiğini ispatlayınız.

5. (a) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ sıfırdan farklı vektörler ise,

$$\mathcal{P} := \{(x, y, z) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \mid u, v \in [0, 1]\}$$

paralelkenarının alanının $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ olduğunu ispatlayınız.
(b) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ sıfırdan farklı vektörler ise,

$$\mathcal{P} := \{(x, y, z) = t\mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \mid t, u, v \in [0, 1]\}$$

dörtyüzlüsünün hacminin $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ olduğunu kanıtlayınız.

6. Bir $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$B := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

olsun.
(a) Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için, $\|B(x, y)\| = \|(x, y)\|$ olduğunu ispatlayınız.
(b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sıfırdan farklı bir vektör ve $B(x, y)$ ve (x, y) vektörleri arasındaki açı φ ise, $\cos\varphi = \cos\theta$ olduğunu kanıtlayınız. Bunu kullanarak, B matrisinin $\mathbb{R}^2$ uzayını θ açısı kadar döndüren lineer fonksiyonu temsil eden matris olduğunu gösteriniz.

7. $\mathbb{R}^3$ içinde, bir $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından bir Π düzlemine olan ***uzaklık***, Π üzerindeki bir (x_1, y_1, z_1) noktası için $\mathbf{v} := (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ ve $\mathbf{v}$ vektörü Π düzleminin normaline paralel olmak üzere,

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \Pi) := \begin{cases} 0, & \mathbf{x}_0 \in \Pi \text{ ise;} \\ \|\mathbf{v}\|, & \mathbf{x}_0 \notin \Pi \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $\mathbf{x}_0$ noktasından $ax+by+cz=d$ denklemiyle belirlenen Π düzlemine olan uzaklığın

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x}_0, \Pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

olduğunu göstererek, yukarıda yapılan uzaklık tanımının $\mathbf{v}$ vektöründen bağımsız olduğunu ispatlayınız.

8. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer fonksiyon,

$$\|T\| := \inf\{C > 0 \mid \text{her } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ için } \|T(\mathbf{x})\| \leqslant C\|\mathbf{x}\|\} \quad \text{ve} \quad M := \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|T(\mathbf{x})\|$$

olsun.

(a) Her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\|T(\mathbf{x})\| \leqslant \|T\|\,\|\mathbf{x}\|$ olduğunu gösteriniz.

(b) $M \leqslant \|T\|$ olduğunu kanıtlayınız.

(c) Her $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ için $M \geqslant \frac{\|T(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$ olduğunu ispatlayınız.

(d) $M = \|T\|$ eşitliğini kanıtlayınız.

(e) Yukarıda gösterilenlerden faydalanarak,

$$\|T\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|T(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

olduğunu ispatlayınız.

9. X bir Öklidyen uzay; B, bu uzayın doğal tabanı; ve B kümesinin kendisine eşit olmayan boştan-farklı bir alt-kümesi S olsun. $T : X \to X$ fonksiyonu, her $\mathbf{x} \in X$ için

$$T\mathbf{x} := \sum_{\mathbf{v}\in B\setminus S} (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}$$

olarak tanımlansın. $\operatorname{Ker} T = \operatorname{span}(S)$ olduğunu gösteriniz.

10. X bir Öklidyen uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyon olsun. Tek türlü belirli bir $\mathbf{a} \in X$ vektörünün, her $\mathbf{x} \in X$ için $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$ gerçeklenecek biçimde var olduğunu ispatlayınız.

1.2 $\mathbb{R}^n$ içinde açık ve kapalı kümeler

Öklidyen uzayların topolojilerinin inceleneceği bu ve bunu izleyen iki kısımda, bundan sonraki tüm kavramlar için temel teşkil edecek yapılar tanımlanacaktır. Klâsik analiz ve geometriden doğmuş olan Topoloji, *açık* küme kavramı üzerine kurulur ve aksiyomatik olarak tanımlanır. Gerçel sayılar kümesi içindeki bir (a, b) açık aralığına ait her x noktasının bu aralığın içinde kalan noktalar tarafından tamamen 'örtülebilmesi', aşağıdaki tanıma yol açar.

Tanım 1.2.1. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\mathbf{x} \in V$ için bir $\varepsilon > 0$ sayısı $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ açık topu V kümesinin içinde kalacak biçimde bulunabiliyorsa, V kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde ***açık*** olarak adlandırılır.

Örnek 1.2.2. $\mathbb{R}^n$ içindeki her açık top açıktır: Gerçekten, eğer $B_r(\mathbf{a}) \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık top ve $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})$ ise, $\varepsilon := r - \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > 0$ yarıçaplı ve $\mathbf{x}$ noktası merkezli $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ açık topuna ait her $\mathbf{y}$ noktası için

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r$$

gerçekleneceğinden, $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq B_r(\mathbf{a})$ olur.

Gerçel sayılar kümesinin yoğunluğu göz önüne alınarak yapılan açık küme tanımına dikkât edilirse, $\mathbb{R}$ kümesinin içindeki kapalı bir aralığın tümleyeninin de, tıpkı bir açık aralık gibi, kendisine ait her noktayı yine kendisinin içinde kalan noktalarla 'örtebildiği' görülür. Bu temel gözlem, aşağıdaki tanımı anlamlı kılar.

Tanım 1.2.3. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $E^c := \mathbb{R}^n \setminus E$ kümesi açıksa, E kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde ***kapalı*** olarak adlandırılır.

Örnek 1.2.4. Her $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ve $r \geqslant 0$ için, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant r\}$ kümesi kapalıdır.

Örnek 1.2.5. $\mathbb{R}^n$ içindeki her sonlu küme kapalıdır. Bunu görmek için, $\mathbb{R}^n$ içinde sonlu bir $E := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ kümesi ve bir $\mathbf{x} \in E^c$ noktası göz önüne alındığında,

$$\varepsilon := \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \mid k = 1, 2, \ldots, p\}$$

olmak üzere, $\mathbf{x}_k \notin B_\varepsilon(\mathbf{x})$ özelliğinin her $k = 1, 2, \ldots, p$ için doğru olduğunu gözlemlemek yeterlidir.

Örnek 1.2.6. Açık ve kapalı küme tanımının doğal bir sonucu olarak, boş küme ve tüm uzay olan $\mathbb{R}^n$, hem açık hem kapalıdır.

Açık kümelerden ve kapalı kümelerden müteşekkil aileler, birleşim ve kesişim işlemleri altında benzer davranışları sergilemezler.

Teorem 1.2.7. *X bir Öklidyen uzay olsun.*

(i) *X içinde açık olan kümelerden oluşan bir $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ailesi için, $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ kümesi açıktır.*

(ii) *X içinde açık olan kümelerden oluşan sonlu bir $\{V_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$ ailesi için, $\bigcap_{k=1}^{n} V_k$ kümesi açıktır.*

(iii) *X içinde kapalı olan kümelerden oluşan bir $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ailesi için, $\bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha$ kümesi kapalıdır.*

(iv) *X içinde kapalı olan kümelerden oluşan sonlu bir $\{V_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$ ailesi için, $\bigcup_{k=1}^n V_k$ kümesi kapalıdır.*

(v) *Eğer V kümesi X içinde açık ve E kümesi X içinde kapalıysa, $V \setminus E$ kümesi açık, $E \setminus V$ kümesi kapalıdır.*

Kanıt. (i) $\mathbf{x} \in \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ olsun. Bu durumda bir $\alpha \in I$ için $\mathbf{x} \in V_\alpha$ olur. Hipotezden dolayı V_α açıktır; yani bir $\varepsilon > 0$ sayısı, $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq V_\alpha$ gerçeklenecek biçimde bulunur. Bu ise $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq V_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, yani $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ kümesinin açık olması demektir.

(ii) $\mathbf{x} \in \bigcap_{k=1}^n V_k$ olsun. Bu durumda her $k = 1, 2, \ldots, n$ için $\mathbf{x} \in V_k$ olur. Her V_k açık olduğundan dolayı bir $\varepsilon_k > 0$ sayısı, $B_{\varepsilon_k}(\mathbf{x}) \subseteq V_k$ gerçeklenecek biçimde bulunur. O hâlde, $\varepsilon := \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \varepsilon_k$ denirse, $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq V_k$ içermesi her $k = 1, 2, \ldots, n$ için doğru olur. Bu ise $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq \bigcap_{k=1}^n V_k$, yani $\bigcap_{k=1}^n V_k$ kümesinin açık olması demektir.

(iii), (iv) ve (v) için, (i) ve (ii) özelliklerini ve De Morgan kuralları kullanmak yeterlidir. □

Açıklama 1.2.8. Teorem 1.2.7'deki (ii) ve (iv) numaralı özellikler, herhangi birleşim ve kesişimler için doğru değildir. $X := \mathbb{R}$ uzayında

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) = \{0\}$$

kesişimi kapalı,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1} \right] = (0, 1)$$

birleşimi açıktır.

Öklidyen bir uzayın bir alt-kümesini 'örtebilmek' için kaç tane açık kümeye ihtiyaç duyulacağı, bu tip uzayların yapılarıyla ilgili temel bilgilerdendir. Lindelöf Teoremi olarak adlandırılan bu önemli netice, iki yardımcı sonuç vâsıtasıyla kanıtlanacaktır.

Lemma 1.2.9. *$\mathbb{R}^n$ içindeki her $B_r(\mathbf{x})$ açık topu için bir rasyonel $B_q(\mathbf{a})$ açık topu, $\mathbf{x} \in B_q(\mathbf{a})$ ve $B_q(\mathbf{a}) \subseteq B_r(\mathbf{x})$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olmak üzere, $B_r(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ açık topu verilsin. Her $j = 1, 2, \ldots, n$ için, rasyonel sayılar kümesinin gerçel sayılar içinde yoğun olduğu kullanılarak bir $a_j \in \mathbb{Q}$ sayısı,

$$|x_j - a_j| < \frac{r}{4n}$$

olacak biçimde seçilsin, ve $\mathbf{a} := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ olsun. Böylece, Teorem 1.1.5 (iv)'den,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| \leqslant n \cdot \frac{r}{4n} = \frac{r}{4}$$

elde edilir. $q \in \mathbb{Q}$ sayısı $r/4 < q < r/2$ olacak biçimde seçilsin; bu, $r/4 < q$ olması nedeniyle, $\mathbf{x} \in B_q(\mathbf{a})$ olması demektir. Diğer taraftan, eğer $\mathbf{y} \in B_q(\mathbf{a})$ ise,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| < q + \frac{r}{4} < \frac{r}{2} + \frac{r}{4} < r$$

olur; bu ise $B_q(\mathbf{a}) \subseteq B_r(\mathbf{x})$ içermesini gerektirir. □

Lemma 1.2.10. *$\mathbb{R}^n$ içindeki rasyonel açık topların $\mathcal{B}$ ailesi sayılabilirdir.*

Kanıt. Sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleri sayılabilir olduğundan,

$$\mathcal{B} = \bigcup_{a_1 \in \mathbb{Q}} \cdots \bigcup_{a_n \in \mathbb{Q}} \{B_q(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n),\ q \in \mathbb{Q},\ q > 0\}$$

ailesi sayılabilirdir. □

Teorem 1.2.11 (Lindelöf Teoremi)**.** *$\mathbb{R}^n$ uzayının bir alt-kümesi E olsun. Eğer açık kümelerden oluşan bir $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ailesi için $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ ise, I kümesinin*

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha \in I_0} V_\alpha$$

gerçeklenecek biçimde sayılabilir bir I_0 alt-kümesi vardır.

Kanıt. $\mathbf{x} \in E$ olsun. Hipotezden dolayı, bir $\alpha \in I$ için $\mathbf{x} \in V_\alpha$ olur. Lemma 1.2.10'dan dolayı sayılabilir olduğu bilinen $\mathbb{R}^n$ içindeki rasyonel açık topların $\mathcal{B}$ ailesinin içinden bir $B_{\mathbf{x}}$ topu, o hâlde, Lemma 1.2.9 nedeniyle

$$\mathbf{x} \in B_{\mathbf{x}} \subseteq V_\alpha \tag{1.2.1}$$

gerçeklenecek biçimde seçilebilir. $\mathcal{B}$ ailesinin sayılabilirliğinden,

$$\{U_1, U_2, \ldots\} := \{B_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in E\} \tag{1.2.2}$$

alt-ailesinin de sayılabilir olduğu sonucuna ulaşılır. (1.2.1)'den, her $k \in \mathbb{N}$ için, $U_k \subseteq V_{\alpha_k}$ gerçeklenecek biçimde en az bir $\alpha_k \in I$ bulunduğu görülür; bu ise, (1.2.2) sebebiyle,

$$E \subseteq \bigcup_{\mathbf{x} \in E} B_{\mathbf{x}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_{\alpha_k}$$

olması demektir. $I_0 := \{\alpha_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ alınarak ispat tamamlanır. □

Tanım 1.2.12. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) E kümesinin ***iç*i**

$$E^\circ := \bigcup \{V \mid V \subseteq E \text{ ve } V \text{ kümesi } \mathbb{R}^n \text{ içinde açık}\}$$

kümesidir.

(ii) E kümesinin ***kapanış*ı**

$$\overline{E} := \bigcap \{B \mid B \supseteq E \text{ ve } B \text{ kümesi } \mathbb{R}^n \text{ içinde kapalı}\}$$

kümesidir.

(iii) E kümesinin ***sınır*ı**

$$\partial E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{her } r > 0 \text{ için, } B_r(\mathbf{x}) \cap E \neq \varnothing \text{ ve } B_r(\mathbf{x}) \cap E^c \neq \varnothing\}$$

kümesidir.

Açıklama 1.2.13. Teorem 1.2.7 (i) & (iii)'den dolayı bir kümenin içi açık, kapanışı kapalıdır.

Teorem 1.2.14. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *olsun. Bu durumda,*

(i) $E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E}$*;*

(ii) *eğer* V *açık ve* $V \subseteq E$ *ise,* $V \subseteq E^\circ$*;*

(iii) *eğer* F *kapalı ve* $F \supseteq E$ *ise,* $F \supseteq \overline{E}$*;*

(iv) $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$

olur.

Kanıt. (i), (ii) ve (iii), iç ve kapanış tanımlarının doğrudan sonuçlarıdır. (iv)'deki eşitliği görmek içinse, aşağıdaki iki denkliği gözlemlemek yeterlidir:

(†) $\mathbf{x} \in \overline{E}$ olması, ancak ve yalnız her $r > 0$ için $B_r(\mathbf{x}) \cap E \neq \varnothing$ olmasıyla mümkündür;

(‡) $\mathbf{x} \notin E^\circ$ olması için, $r > 0$ olduğunda $B_r(\mathbf{x}) \cap E^c \neq \varnothing$ olması gerekli ve yeterlidir.

(†) denkliğini göstererek, benzer olan (‡) denkliğini göstermeyi okuyucuya bırakacağız. $\mathbf{x} \in \overline{E}$ olsun ve bir $r_0 > 0$ için $B_{r_0}(\mathbf{x}) \cap E = \varnothing$ gerçeklensin. Bu durumda $(B_{r_0}(\mathbf{x}))^c$, E kümesini içeren kapalı bir küme olur ve (iii)'den dolayı $\overline{E} \subseteq (B_{r_0}(\mathbf{x}))^c$ gerçeklenir. Bu ise $\overline{E} \cap B_{r_0}(\mathbf{x}) = \varnothing$, yani $\mathbf{x} \notin \overline{E}$ çelişkisine ulaştırır.

Tersine, $\mathbf{x} \notin \overline{E}$ olsun. Bu durumda $(\overline{E})^c$ açık olduğundan bir $r_0 > 0$ sayısı, $B_{r_0}(\mathbf{x}) \subseteq (\overline{E})^c$ gerçeklenecek biçimde bulunur. Bu ise, (i)'deki ikinci içermeden dolayı, $\varnothing = B_{r_0}(\mathbf{x}) \cap \overline{E} \supseteq B_{r_0}(\mathbf{x}) \cap E$, yani bir $r_0 > 0$ için $B_{r_0}(\mathbf{x}) \cap E = \varnothing$ olması demektir. □

Açıklama 1.2.15. Teorem 1.2.7 (v) ve Teorem 1.2.14 (iv)'den dolayı, bir kümenin sınırı kapalıdır.

Teorem 1.2.14 (ii), E kümesinin içerdiği tüm açık kümeler içerme bağıntısıyla sıralanarak 'en büyük' kavramı anlamlandırılırsa, E° kümesinin$-E$ kümesinin içerdiği her açık kümeyi içermesi anlamında$-$, E kümesinin içerdiği en büyük açık küme olduğunu gösterir. Benzer biçimde, Teorem 1.2.14 (iii) kullanılarak $\overline{E}$ kümesinin$-E$ kümesini içeren her kapalı küme tarafından içerilmesi anlamında$-$, E kümesini içeren en küçük kapalı küme olduğu sonucuna ulaşılır.

Yukarıdaki gözlemler, basit fakat oldukça önemli olan, iç ve kapanış işlemlerinin içerme bağıntısı altında korunduğu gerçeğini de kanıtlar: eğer $E \subseteq F$ ise, açık olan E° kümesi F kümesinin içinde kalacağından, $E^\circ \subseteq F^\circ$ gerçeklenir; kapalı olan $\overline{F}$ kümesi E kümesini içerdiğinden de, $\overline{E} \subseteq \overline{F}$ olur.

Problemler

1. Her gerçel $a < b$ sayı çifti için, (a, b), (a, ∞) ve $(-\infty, b)$ kümelerinin açık; $[a, b]$, $[a, \infty)$ ve $(-\infty, b]$ kümelerinin kapalı; ve $[a, b)$ ve $(a, b]$ kümelerinin ise ne açık ne de kapalı olduklarını gösteriniz.
2. Aşağıdaki E kümelerinin hangilerinin açık, kapalı, ya da ne açık ne de kapalı olduklarını belirleyiniz. Bunlara ek olarak, her durum için E kümesini çiziniz, ve E°, $\overline{E}$ ve ∂E kümelerini belirleyiniz.
   (a) $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 1\}$.
   (b) $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 = 0\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [2, 3]\}$.
   (c) $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2 \text{ ve } 0 \leqslant y < 1\}$.
   (d) $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1 \text{ ve } -1 < y < 1\}$.
3. $s < r$ gerçel sayılar, $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid s < \|\mathbf{x}\| < r\}$, ve $E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid s \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant r\}$ ise, V kümesinin açık, E kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.
4. E kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde kapalı ve $\mathbf{a} \notin E$ ise,
$$\inf_{\mathbf{x} \in E} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > 0$$
olduğunu gösteriniz.

5. (a) $\mathbb{R}^n$ uzayının açık ve boş-olmayan alt-kümelerinden müteşekkil bir $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ailesi I içindeki her $\alpha \neq \beta$ elemanı için $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ olması koşulunu sağlıyorsa, I kümesinin sayılabilir olduğunu ispatlayınız.

(b) $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ailesinin elemanlarının açık olmaları koşulu kaldırıldığında, (a) kısmındaki sonucun yine geçerli olup olmayacağını araştırınız.

6. V kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde açıksa,

$$V = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$$

gerçeklenecek biçimde $B_1, B_2, \ldots$ açık toplarının var olduklarını kanıtlayınız.

7. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ ise,

(a) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ ve $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ve $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

(c) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ ve $\partial(A \cap B) \subseteq (A \cap \partial B) \cup (B \cap \partial A) \cup (\partial A \cap \partial B)$

olduğunu gösteriniz.

8. Teorem 1.2.14 (iv)'ün kanıtındaki (‡) denkliğini ispatlayınız.

9. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme olsun.

(a) $\partial E \subseteq E$ olduğunu kanıtlayınız.

(b) $\partial E = E$ olması için, $E^\circ = \varnothing$ olmasının gerekli ve yeterli olduğunu ispatlayınız.

(c) E kümesi kapalı değilse, (b) kısmındaki önermenin genel olarak doğru olmadığını gösteriniz.

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olmasının, her I açık aralığı için $f^{-1}(I)$ kümesinin $\mathbb{R}$ içinde açık olmasına denk olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme: f fonksiyonunun bir ξ noktasında sürekli olduğunu gösterirken, $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $I := (f(\xi) - \varepsilon, f(\xi) + \varepsilon)$ açık aralığını göz önüne alınız.

1.3 $\mathbb{R}^n$ içinde diziler ve kompakt kümeler

Bu kısımda, Öklidyen bir uzayın içindeki bir vektörler dizisinin sınırlı veya yakınsak olmasının ne anlama geldiği incelenecektir. Bu incelemeyi mümkün kılacak olan temel motivasyon, tek-değişkenli teorinin klâsik sonuçlarıdır.

$\mathbb{R}^n$ *içinde* bir ***dizi***, bir $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonudur; fonksiyonel gösterilim yerine alt-indis notasyonu kullanılıp terimler numaralandırılarak, $\mathbf{x}$ dizisi $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olarak gösterilir. Bir $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ dizisi ve kesin artan bir $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu için, $\mathbf{x} \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna $\mathbf{x}$ dizisinin bir ***alt-dizi***si denir ve, yine alt-indis notasyonu kullanılarak, $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.1. $\mathbb{R}^n$ uzayı içindeki noktaların bir dizisi $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ve $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) Bir $M > 0$ sayısı her $k \in \mathbb{N}$ için $\|\mathbf{x}_k\| \leqslant M$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi ***sınırlı*** olarak adlandırılır.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı, her $k \geqslant N$ için $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ gerçeklenecek biçimde bulunabiliyorsa, "$(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbf{x}$ noktasına ***yakınsar***," denir ve $\mathbf{x}$ noktası $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin ***limiti*** olarak adlandırılır; bu durumda, ($k \to \infty$ için) $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ ya da $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ gösterilimleri kullanılır.

Öklidyen bir uzaydaki diziler için yapılan yukarıdaki tanımlar, gerçel sayı dizilerinde karşılık gelenlerde mutlak değer fonksiyonu norm fonksiyonuyla değiştirilerek elde edilmiştir; Teorem 1.1.5'deki norm özelliklerinden dolayı, sayısal diziler için geçerli olan temel sonuçların tümü vektör dizileri için de geçerlidir.

Örnek 1.3.2. $\mathbb{R}^n$ içindeki noktaların bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ noktasına yakınsaması için, $\mathbb{R}$ içinde $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \to 0$ olması gerekli ve yeterlidir.

Örnek 1.3.3. $\mathbb{R}^n$ içindeki bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin en çok bir tane limiti vardır: $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ noktalarının $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin limitleri olmaları, $k \to \infty$ için

$$0 \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\| \to 0,$$

yani $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ olmasını gerektirir.

Örnek 1.3.4. Öklidyen bir uzaydaki yakınsak her dizi sınırlıdır: Gerçekten, eğer $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin limiti $\mathbf{x}$ ise, her $k \geqslant N$ için $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < 1$ gerçeklenecek biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı seçilir ve

$$M := \max\{1 + \|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{x}_1\|, \ldots, \|\mathbf{x}_N\|\}$$

olarak tanımlanırsa, $\|\mathbf{x}_k\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\|$ eşitsizliğinden dolayı, her $k \in \mathbb{N}$ için $\|\mathbf{x}_k\| \leqslant M$ olur.

Örnek 1.3.5. $\mathbb{R}^n$ içindeki bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart, $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin her $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ alt-dizisinin $\mathbf{x}$ noktasına yakınsamasıdır.

Aşağıdaki sonuç, Öklidyen bir uzaydaki bir dizinin limitini belirleme işleminin gerçel sayı dizilerinin limitlerini belirleme işlemine indirgenebileceğini gösterir.

Teorem 1.3.6. *$\mathbb{R}^n$ içindeki bir dizi $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ve $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\mathbf{x}_k$ teriminin ve $\mathbf{x}$ noktasının j'inci bileşeni, sırasıyla, $x_k(j)$ ve $x(j)$ ile gösterilsin. $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\mathbf{x}$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart, her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $(x_k(j))_{k\in\mathbb{N}}$ bileşenler dizisinin $\mathbb{R}$ içinde $x(j)$ noktasına yakınsamasıdır.*

Kanıt. Teorem 1.1.5 (v)'den dolayı,

$$|x_k(\ell) - x(\ell)| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_k(j) - x(j)|$$

eşitsizlikleri her $\ell = 1, 2, \ldots, n$ için geçerli olur. Bu ise, sayısal diziler için Sıkıştırma Teoremi[1] ve Örnek 1.3.2 göz önüne alındığında, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ olmasının her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $x_k(j) \to x(j)$ olmasına denk olduğunu gösterir. □

Sayısal dizilerde olduğu gibi, Öklidyen uzaylardaki dizilerde de yakınsaklık temel işlemler altında korunur.

Teorem 1.3.7. $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *ve* $(\mathbf{y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^n$ *içinde diziler olsun. Eğer* $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_k \to \mathbf{y}$, *ve* $\alpha \in \mathbb{R}$ *ise,*

$$\alpha\mathbf{x}_k \to \alpha\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k \to \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad \textit{ve} \quad \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k \to \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

gerçeklenir.

Kanıt. Teorem 1.1.5 ve Cauchy-Schwarz Eşitsizliği kullanılarak elde edilir. □

Tek-değişkenli analizin temel sonuçlarından birisi, sınırlı her gerçel sayı dizisinin yakınsak bir alt-dizisinin var olduğunu bildiren Bolzano-Weierstrass Teoremi'dir.[2] Aynı sonuç, Öklidyen uzaylardaki diziler için de geçerlidir.

Teorem 1.3.8 (Bolzano-Weierstrass Teoremi)**.** $\mathbb{R}^n$ *içindeki her sınırlı dizinin yakınsak bir alt-dizisi vardır.*

Kanıt. $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}^n$ içinde sınırlı olsun ve her $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için, $\mathbf{x}_k$ vektörünün j'inci bileşeni $x_k(j)$ ile gösterilsin. Hipotezden dolayı, her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $(x_k(j))_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}$ içinde sınırlıdır.

$j = 1$ olsun. Gerçel sayı dizileri için Bolzano-Weierstrass Teoremi nedeniyle, $1 \leqslant k(1,1) < k(1,2) < \cdots$ olacak biçimde bir tam sayılar dizisi ve bir $x(1)$ sayısı, $\nu \to \infty$ için $x_{k(1,\nu)}(1) \to x(1)$ gerçeklenecek biçimde bulunur.

$j = 2$ olsun. $(x_{k(1,\nu)}(2))_{\nu\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}$ içinde sınırlı olduğundan, yine tek-değişkenli Bolzano-Weierstrass Teoremi kullanılarak, $(k(1,\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $(k(2,\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ alt-dizisi ve bir $x(2)$ sayısı, $\nu \to \infty$ için $x_{k(2,\nu)}(2) \to x(2)$ olacak biçimde elde edilir. $(k(2,\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ dizisi $(k(1,\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt-dizisi olduğundan, aynı zamanda, $\nu \to \infty$ için $x_{k(2,\nu)}(1) \to x(1)$ olur; yani, her $1 \leqslant \ell \leqslant j = 2$ için, $\nu \to \infty$ olması durumunda $x_{k(2,\nu)}(\ell) \to x(\ell)$ gerçeklenir.

[1]Bkz. [17, Theorem 1.12].
[2]Bkz. [17, Theorem 1.19].

Bu süreç $j = n$ oluncaya değin devam ettirilirse, her $1 \leqslant \ell \leqslant j = n$ için

$$\lim_{\nu \to \infty} x_{k_\nu}(\ell) = x(\ell)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $k_\nu := k(n, \nu)$ alt-dizisi ve $x(\ell)$ noktaları bulunmuş olur. Şimdi $\mathbf{x} := (x(1), x(2), \ldots, x(n))$ denir ve Teorem 1.3.6 kullanılırsa, $\nu \to \infty$ için $\mathbf{x}_{k_\nu} \to \mathbf{x}$ olduğu sonucuna ulaşılır ve kanıt tamamlanır. □

Tanım 1.3.9. Her $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısının, her $k, m \geqslant N$ indis çifti için $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$ gerçeklenecek biçimde bulunabildiği $\mathbb{R}^n$ içindeki bir $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi, bir ***Cauchy dizisi*** olarak adlandırılır.

Teorem 1.3.10. *$\mathbb{R}^n$ içindeki bir dizinin yakınsak olması için, bu dizinin bir Cauchy dizisi olması gerekli ve yeterlidir.*

Kanıt. $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda, bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı, $k \geqslant N$ olduğunda $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon/2$ gerçeklenecek biçimde bulunur; bu ise, her $k, m \geqslant N$ için

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

yani $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması anlamına gelir.

Tersine, $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir Cauchy dizisi olsun. Buradan, bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı her $m \geqslant N$ için $\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_m\| < 1$ olacak biçimde seçilir ve

$$M := \max\{\|\mathbf{x}_1\|, \|\mathbf{x}_2\|, \ldots, \|\mathbf{x}_{N-1}\|, 1 + \|\mathbf{x}_N\|\}$$

olarak tanımlanırsa, her $k \in \mathbb{N}$ için $\|\mathbf{x}_k\| \leqslant M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği, yani $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin sınırlı olduğu sonucuna ulaşılır. Bolzano-Weierstrass Teoremi'nden, o hâlde, $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir $(\mathbf{x}_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ alt-dizisinin var olduğu elde edilmiş olur. Bu alt-dizinin limiti $\mathbf{x}$ olsun.

Şimdi, $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlensin. $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu kullanılarak bir $N_1 \in \mathbb{N}$ sayısı, her $k, m \geqslant N_1$ için $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon/2$ olacak biçimde; diğer taraftan, $(\mathbf{x}_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ alt-dizisinin limiti $\mathbf{x}$ olan yakınsak bir dizi olduğu kullanılarak bir $N_2 \in \mathbb{N}$ sayısı, $j \geqslant N_2$ olması $\|\mathbf{x}_{k_j} - \mathbf{x}\| < \varepsilon/2$ olmasını gerektirecek biçimde seçilsin. Böylece, $j \geqslant N_2$ sayısı $k_j \geqslant N_1$ olacak şekilde sabitlenirse, her $k \geqslant N_1$ için

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k_j}\| + \|\mathbf{x}_{k_j} - \mathbf{x}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği, yani $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisinin, limiti $\mathbf{x}$ olan yakınsak bir dizi olduğu sonucuna ulaşılır. □

Açıklama 1.3.11. $\mathbb{R}^n$ içindeki bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart, $\mathbf{x}$ noktasını içeren her V açık kümesine karşılık bir $N\in\mathbb{N}$ sayısının, $k\geqslant N$ olduğunda $\mathbf{x}_k\in V$ gerçeklenecek biçimde bulunmasıdır.

Bu denkliği görmek için, ilk olarak, $\mathbf{x}_k\to\mathbf{x}$ olduğu kabul edilsin ve $\mathbf{x}$ noktasını içeren bir açık V kümesi alınsın. Açık olma tanımından dolayı, bir $r>0$ sayısı $B_r(\mathbf{x})\subseteq V$ gerçeklenecek biçimde bulunur. Bu ise, yakınsama tanımı $\varepsilon=r$ için kullanılırsa bir $N\in\mathbb{N}$ sayısının, $k\geqslant N$ olduğunda $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}\|<\varepsilon=r$, yani $\mathbf{x}_k\in B_r(\mathbf{x})\subseteq V$ olacak biçimde bulunması anlamına gelir.

Tersine, $\mathbf{x}\in V$ olan her açık V kümesi için bir $N\in\mathbb{N}$ sayısı, $k\geqslant N$ olduğunda $\mathbf{x}_k\in V$ gerçeklenecek biçimde var olsun. Bu durumda, ilgili koşul verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için $V:=B_\varepsilon(\mathbf{x})$ açık kümesine uygulanırsa, bir $N\in\mathbb{N}$ sayısının $k\geqslant N$ olduğunda $\mathbf{x}_k\in V$, yani $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}\|<\varepsilon$ olacak biçimde bulunabildiği görülür: bu ise, yakınsama tanımından dolayı, $\mathbf{x}_k\to\mathbf{x}$ olması demektir.

Açıklama 1.3.11, dizilerin yakınsaklığının ε-formalizmi yerine açık kümeler kullanılarak tanımlanabileceğini gösterir; bu kullanılarak, kapalı kümelerin diziler vâsıtasıyla karakterize edilebilmesini sağlayan aşağıdaki önemli sonuca ulaşılır.

Teorem 1.3.12. *$E\subseteq\mathbb{R}^n$ olsun. E kümesinin kapalı olması için, terimleri E kümesinde olan yakınsak her dizinin limitinin de E kümesinde olması gerekli ve yeterlidir.*

Kanıt. E kümesinin boş küme olması durumunda istenenin doğru olduğu, mantıksal bir gerekliliktir.

E, boş-olmayan bir kapalı küme olsun. Eğer terimleri E kümesinde ve $\mathbf{x}$ ile göstereceğimiz limit noktası açık olan E^c kümesinde bulunan yakınsak bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi var olsaydı, Açıklama 1.3.11'den dolayı, bir $N\in\mathbb{N}$ sayısı her $k\geqslant N$ için $\mathbf{x}_k\notin E$ gerçeklenecek biçimde mevcut olur ve hipotezle çelişilirdi.

Tersine, E, içinden alınan her yakınsak dizinin limitinin de yine E içinde kaldığı boş-olmayan bir küme olsun. Eğer E kapalı değilse, Örnek 1.2.6 nedeniyle $E\neq\mathbb{R}^n$ gerçeklenir, ve tanımdan dolayı E^c kümesi boş ya da açık olmaz; bu ise, en az bir $\mathbf{x}\in E^c$ noktası için, hiçbir $B_r(\mathbf{x})$ açık topunun E^c tarafından içerilemeyeceğini gösterir. Her $k\in\mathbb{N}$ için, o hâlde, bir $\mathbf{x}_k\in B_{1/k}(\mathbf{x})\cap E$ noktası seçilebilir ve bu nedenle tüm terimleri E kümesinde kalan $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi, her $k\in\mathbb{N}$ için $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}\|<1/k$ olmasından dolayı, $\mathbf{x}$ noktasına yakınsar. Böylece, hipotez nedeniyle, $\mathbf{x}\in E$ çelişkisine ulaşılır. □

Tanım 1.3.13. $\mathcal{V}:=\{V_\alpha\mid\alpha\in I\}$, Öklidyen bir $\mathbb{R}^n$ uzayının alt-kümelerinden oluşan bir aile ve $E\subseteq\mathbb{R}^n$ olsun.

(i) Eğer $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ ise, $\mathcal{V}$ ailesi E kümesinin bir ***örtülüş***ü olarak adlandırılır.

(ii) Eğer $\mathcal{V}$ ailesi E için bir örtülüş ve her $\alpha \in I$ için V_α açıksa, $\mathcal{V}$ ailesine E kümesinin bir ***açık örtülüş***ü denir.

(iii) $\mathcal{V}$ ailesi E için bir örtülüş olsun. Eğer I kümesinin sonlu ya da sayılabilir bir I_0 alt-kümesi $\{V_\alpha \mid \alpha \in I_0\}$ ailesi E için bir örtülüş olacak biçimde varsa, $\mathcal{V}$ ailesinin, sırasıyla, bir ***sonlu alt-örtülüş***ünün ya da bir ***sayılabilir alt-örtülüş***ünün var olduğu söylenir.

Örnek 1.3.14. $\mathcal{V} := \{(\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ ve $\mathcal{W} := \{(-\frac{1}{k}, \frac{k+1}{k}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ aileleri $(0,1)$ aralığı için açık örtülüşlerdir; $\mathcal{V}$ örtülüşünün bir sonlu alt-örtülüşü olmamasına karşın, $\mathcal{W}$ örtülüşünün her elemanı $(0,1)$ aralığını örter.

Lindelöf Teoremi'nden dolayı, $\mathbb{R}^n$ içindeki bir kümenin her açık örtülüşünün bir sayılabilir alt-örtülüşü vardır. Genel olarak, bir kümenin bir açık örtülüşünün bir sonlu alt-örtülüşünün var olması gerekmez. Bu özelliği gerçekleyen kümeler, matematikte temel öneme sahiptir.

Tanım 1.3.15. Öklidyen bir uzayın, her açık örtülüşünün bir sonlu alt-örtülüşü var olan bir alt-kümesine, ***kompakt*** denir.

Örnek 1.3.16. Boş küme ve Öklidyen bir uzayın her sonlu alt-kümesi kompakttır.

Örnek 1.3.17. $\mathbb{R}$ kompakt değildir: $\mathcal{V} := \{(-k, k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ ailesi, bir sonlu alt-örtülüşü olmayan bir açık örtülüştür.

Teorem 1.3.18. *Öklidyen bir uzayda, aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

(i) *Kompakt bir kümenin kapalı bir alt-kümesi kompakttır.*

(ii) *Kompakt bir küme kapalıdır.*

Kanıt. (i) E kapalı, H kompakt, ve $E \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. E kümesinin bir $\mathcal{V} := \{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ açık örtülüşü göz önüne alınsın. $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ kümesi açık olduğundan, $\mathcal{V} \cup \{E^c\}$ ailesi H için bir açık örtülüştür; H kompakt olduğundan da,

$$H \subseteq E^c \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I_0} V_\alpha \right)$$

gerçeklenecek biçimde I kümesinin sonlu bir I_0 alt-kümesi vardır. $E \cap E^c = \varnothing$ olduğundan, o hâlde, E kümesi $\{V_\alpha \mid \alpha \in I_0\}$ ailesi tarafından örtülür.

(ii) $H \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi kompakt olsun. Eğer H kapalı değilse, Teorem 1.3.12'den, terimleri H kümesinde bulunan fakat limit noktası olan $\mathbf{x}$ bu kümede olmayan yakınsak bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Her $\mathbf{y} \in H$ için, $r(\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|/2$ olsun. $\mathbf{x}$ noktası H içinde olmadığından, (i) ve §1.2, Problem 4'den, $r(\mathbf{y}) > 0$ gerçeklenir, yani $\{B_{r(\mathbf{y})}(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in H\}$ ailesi H için bir açık örtülüş olur. H kompakt olduğundan, $\{B_{r_j}(\mathbf{y}_j) \mid j = 1, 2, \ldots, N\}$ ailesi H için bir örtülüş olacak biçimde sonlu ve N adet $\mathbf{y}_j$ noktaları ve $r_j := r(\mathbf{y}_j)$ yarıçapları bulunur.

$r := \min\{r_1, \ldots, r_N\}$ olsun. $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ olduğundan, Açıklama 1.3.11'den, yeterince büyük k sayıları için $\mathbf{x}_k \in B_r(\mathbf{x})$ olduğu görülür; diğer taraftan, her $\mathbf{x}_k \in H \cap B_r(\mathbf{x})$ için bir $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ sayısı, $\mathbf{x}_k \in B_{r_j}(\mathbf{y}_j)$ gerçeklenecek biçimde vardır. Böylece, r_j ve r sayılarının seçiminden,

$$\begin{aligned} r_j &\geqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_j\| \geqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_j\| - \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \\ &= 2r_j - \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| > 2r_j - r \geqslant 2r_j - r_j = r_j \end{aligned}$$

çelişkisine ulaşılır. O hâlde varsayım yanlış, yani H kümesi kapalıdır. □

Teorem 1.3.19 (Cantor Arakesit Teoremi)**.** *$\mathbb{R}^n$ içindeki boş-olmayan kompakt kümelerden oluşan bir dizi $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ olsun. Eğer her $j \in \mathbb{N}$ için $H_j \supseteq H_{j+1}$ ise, $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} H_j \neq \varnothing$ olur.*

Kanıt. İddianın doğru olmadığı, yani $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} H_j = \varnothing$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda De Morgan kuralları nedeniyle $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} H_j^c$ gerçeklenir; bu ise, $\{H_j^c \mid j \in \mathbb{N}\}$ ailesinin kompakt olan H_1 kümesi için bir açık örtülüş olması demektir. Dolayısıyla,

$$H_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} H_j^c, \quad \text{yani} \quad H_1^c \supseteq \bigcap_{j=1}^{N} H_j \tag{1.3.1}$$

gerçeklenecek biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı bulunur. H_j kümeleri iç-içe olduklarından, tümevarımla, bir $m \in \mathbb{N}$ sayısının

$$\bigcap_{j=1}^{m} H_j = H_m \subseteq H_1$$

sağlanacak biçimde var olduğu görülür. Bu gözlem (1.3.1) ile birlikte kullanılırsa, $H_N \subseteq H_1 \cap H_1^c = \varnothing$, yani H_N kümesinin boş küme olduğu çelişkisine ulaşılır ve kanıt tamamlanmış olur. □

Bir $H \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi, terimleri H içinde bulunan her dizinin yine H içinde kalan bir noktaya yakınsayan yakınsak bir alt-dizisi varsa, ***dizisel kompakt*** olarak adlandırılır. Diğer taraftan, bir $M > 0$ sayısının her $\mathbf{x} \in H$ için $\|\mathbf{x}\| \leqslant M$ gerçeklenecek biçimde bulunabildiği Öklidyen bir uzayın bir H alt-kümesine, ***sınırlı*** denir. Aşağıdaki çok önemli netice, kompaktlık ile birlikte, bu kavramların birbirlerinden hiç de uzak olmadıklarını gösterir.

Teorem 1.3.20 (Heine-Borel Teoremi)**.** *Öklidyen bir $\mathbb{R}^n$ uzayının bir H alt-kümesi için, aşağıdaki önermeler birbirine denktir:*

(i) *H kompakttır.*

(ii) *H dizisel kompakttır.*

(iii) *H, kapalı ve sınırlıdır.*

Kanıt. İlk olarak, (i) önermesinin (ii) önermesini gerektirdiğini görelim. H kümesi kompakt olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{x}_k \in H$ gerçeklenecek biçimde bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi alındığında, aşağıdaki iki durumdan birisi geçerli olmak zorundadır:

($*$) Bir $\mathbf{a} \in H$ noktası, her $r > 0$ için $B_r(\mathbf{a})$ açık topu sonsuz çoklukta k için $\mathbf{x}_k$ noktasını içerecek biçimde vardır; ya da

($**$) her $\mathbf{a} \in H$ için bir $r_{\mathbf{a}} > 0$ sayısı, $B_{r_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$ açık topu sonlu sayıda k için $\mathbf{x}_k$ noktasını içerecek biçimde bulunur.

Eğer ($**$) doğruysa

$$H \subseteq \bigcup_{\mathbf{a}\in H} B_{r_{\mathbf{a}}}(\mathbf{a})$$

gerçeklenir; H kümesinin kompakt olmasından dolayı, bu,

$$H \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{r_{\mathbf{a}_j}}(\mathbf{a}_j)$$

sağlanacak biçimde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_N$ noktalarının bulunması anlamına gelir. Her $B_{r_{\mathbf{a}_j}}(\mathbf{a}_j)$ açık topu sonlu sayıda k için $\mathbf{x}_k$ noktasını içerdiğinden ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{x}_k \in H$ olduğundan, o hâlde, $\mathbb{N}$ kümesinin sonlu olduğu çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla, ($**$) önermesi gerçeklenemez: bu durumda, âşikâr olarak, ($*$) önermesi doğru olmalıdır.

$\mathbf{x}_{k_1} \in B_1(\mathbf{a})$ olsun. $B_{1/2}(\mathbf{a})$ açık topu sonsuz çoklukta k için $\mathbf{x}_k$ noktasını içerdiğinden, $\mathbf{x}_{k_2} \in B_{1/2}(\mathbf{a})$ sağlanacak biçimde bir $k_2 > k_1$ indisi vardır. Bu şekilde devam edilerek, her $j \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{x}_{k_j} \in B_{1/j}(\mathbf{a})$ gerçeklenecek biçimde $k_1 < k_2 < \cdots$ doğal sayıları bulunmuş olur. Bu ise, her $j \in \mathbb{N}$ için $\|\mathbf{x}_{k_j} - \mathbf{a}\| < 1/j$ olmasından dolayı, $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ alt-dizisinin $\mathbf{a}$ noktasına yakınsamasını gerektirir. O hâlde, H kümesi dizisel kompakttır.

Şimdi, (ii) önermesinin (iii) önermesini gerektirdiğini kanıtlayalım. H kümesi dizisel kompakt olsun. Bu kümenin kapalı olduğunu görmek için, terimleri H kümesinde ve limiti $\mathbf{x}$ olan yakınsak bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda, Örnek 1.3.5'den, $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin her $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ alt-dizisi de $\mathbf{x}$ noktasına yakınsar; bu ise, H dizisel kompakt olduğundan, $\mathbf{x} \in H$ olması demektir. Böylece, Teorem 1.3.12'den, H kümesinin kapalı olduğu sonucuna ulaşılır.

H kümesinin sınırlı olduğunu görmek için, bunun doğru olmadığı, yani, her $k \in \mathbb{N}$ için $\|\mathbf{y}_k\| \geqslant k$ gerçeklenecek biçimde bir $\mathbf{y}_k \in H$ noktasının var olduğu kabul edilsin. H kümesi dizisel kompakt olduğundan dolayı yakınsak ve bunun sonucu olarak Örnek 1.3.4 nedeniyle sınırlı olan bir $(\mathbf{y}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ alt-dizisinin var olması gerektiğinden, ilgili varsayım, her $j \in \mathbb{N}$ için $\|\mathbf{y}_{k_j}\| \geqslant k_j \geqslant j$ koşulunu gerçekleyen[3] bu alt-dizinin sınırlı olduğu çelişkisine ulaştırır. H kümesi, o hâlde, sınırlıdır.

Son olarak, (iii) önermesinin (i) önermesini gerektirdiğini görelim. Bir çelişkiye ulaşmak amacıyla, kapalı ve sınırlı olduğu kabul edilen H kümesinin kompakt olmadığı varsayılsın. Bu durumda H kümesinin, bir sonlu alt-örtülüşü var olmayan bir $\mathcal{V}$ açık örtülüşü vardır, ve Lindelöf Teoremi'nden dolayı $\mathcal{V} := \{V_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ olarak alınabilir: yani,

$$H \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k \tag{1.3.2}$$

olur. $\mathcal{V}$ ailesinin seçiminden, hiçbir $k \in \mathbb{N}$ için $\bigcup_{j=1}^{k} V_k$ kümesi H kümesini içeremez. Her $k \in \mathbb{N}$ için, o hâlde,

$$\mathbf{x}_k \in H \setminus \bigcup_{j=1}^{k} V_j \tag{1.3.3}$$

olacak biçimde bir $\mathbf{x}_k$ noktası seçilebilir. H sınırlı olduğundan, bu noktalardan oluşan $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlıdır. Bolzano-Weierstrass Teoremi, bundan dolayı, $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir $(\mathbf{x}_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ alt-dizisinin var olduğunu söyler. Bu alt-dizinin limiti $\mathbf{x}$ olsun. H kapalı olduğundan, Teorem 1.3.12'den, $\mathbf{x} \in H$ gerçeklenir. Böylece, (1.3.2)'den, bir $N \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{x} \in V_N$ olduğu sonucuna ulaşılır;

[3] Alt-diziyi tanımlayan $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu kesin artan olduğundan, her $j \in \mathbb{N}$ için $k_j \geqslant j$ olur: Gerçekten, eğer $\mathfrak{S} := \{j \in \mathbb{N} \mid k_j < j\}$ kümesi boş değilse, doğal sayılar kümesi iyi-sıralanmış olduğundan, $\mathfrak{S}$ kümesinin m gibi bir en küçük elemanı bulunur; bu ise, $M := k_m$ doğal sayısı için $k_M < M$ olacağından, $M < m$ ve $M \in \mathfrak{S}$ çelişkisine ulaştırır.

ancak V_N açık olduğundan bir $M \in \mathbb{N}$ sayısı, Açıklama 1.3.11 nedeniyle, $\nu \geqslant M$ olduğunda $k_\nu > N$ ve $\mathbf{x}_{k_\nu} \in V_N$ gerçeklenecek biçimde bulunur, ve (1.3.3) ile çelişilir. O hâlde varsayım yanlış, yani H kümesi kompakttır. □

Açıklama 1.3.21. Cantor Arakesit Teoremi ve Heine-Borel Teoremi, Öklidyen bir $\mathbb{R}^n$ uzayındaki boş-olmayan, kapalı ve sınırlı $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots$ kümelerinin arakesitlerinin boş küme olmadığını garantiler. Bu ifadedeki kapalı ya da sınırlı olma koşulları kaldırılamaz: Gerçel sayılar uzayındaki boş-olmayan ve kapalı $[1, \infty) \supset [2, \infty) \supset \cdots$ kümeleri ve yine aynı uzaydaki boş-olmayan ve sınırlı $(0, 1) \supset (0, 1/2) \supset \cdots$ kümeleri için,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [k, \infty) = \varnothing = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (0, 1/k)$$

olur.

Problemler

1. Her $k \in \mathbb{N}$ için terimleri aşağıda verilen vektör dizilerinin limitlerini hesaplayınız:

$$\text{(a) } \mathbf{x}_k := \left(\frac{1}{k}, \frac{k - 3k^2}{k + k^2}\right); \quad \text{(b) } \mathbf{y}_k := \left(1, e^{-k}, \cos(1/k)\right);$$

$$\text{(c) } \mathbf{z}_k := \left(k - \sqrt{(k^2 + k)}, k^{1/k}, 1/k\right); \quad \text{(d) } \mathbf{w}_k := \left((1 + 1/k)^k, \sin(2\pi e k!), \ln k/k\right).$$

2. $\mathbb{R}^n$ içinde, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{0}$ ve $(\mathbf{y}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi sınırlı olsun. $\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{y}_k \to 0$ olduğunu ispatlayınız.
3. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ve $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, her $r > 0$ gerçel sayısı için $E \cap B_r(\mathbf{a})$ kümesi sonsuz sayıda eleman içeriyorsa, $\mathbf{a}$ noktası E kümesinin bir ***yığılma noktası*** olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^n$ uzayının sınırlı ve sonlu-olmayan her alt-kümesinin en az bir yığılma noktasına sahip olduğunu kanıtlayınız.
4. $\mathbb{R}^n$ uzayının bir alt-kümesinin kapalı olması için, bu kümenin, tüm yığılma noktalarını içermesinin gerekli ve yeterli olduğunu ispatlayınız.
5. Kompaktlık tanımını kullanarak, gerçel sayılar içindeki kapalı bir aralığın kompakt olduğunu kanıtlayınız.
6. Aşağıdaki E kümelerinin kompakt olup olmadıklarını belirleyiniz. E kümesi kompakt değilse, $E \subset H$ koşulunu sağlayan en küçük H kompakt kümesini−eğer varsa−bulunuz.
   (a) $E := \{1/k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
   (b) $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b$ ve $0 < a < b\}$.
   (c) $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid$ bir $x \in (0, 1]$ için $y = \sin(1/x)\}$.
   (d) $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |xyz| \leqslant 1\}$.
7. A ve B kümeleri $\mathbb{R}^n$ içinde kompaktsa, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerinin de kompakt olduklarını kanıtlayınız.
8. $E \subseteq \mathbb{R}$ kümesi kompakt ise, $\sup E \in E$ olduğunu gösteriniz.

9. $\mathbb{R}^n$ uzayının içindeki boş-olmayan kümelerden oluşan bir $(E_k)_{k=0}^{\infty}$ dizisi, her $k \in \mathbb{N}$ için $\overline{E_k} \subseteq E_{k-1}$ koşulunu sağlasın. Eğer E_0 kümesi sınırlıysa, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k$ kümesinin boş küme olmadığını gösteriniz.

10. Bolzano-Weierstrass Teoremi'nin, $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ normuyla donatılmış $\mathcal{C}[a,b]$ uzayında (bkz. §1.1, Problem 4) geçerli olmadığını ispatlayınız.

Yol gösterme: Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için $f_n(x) := x^n$ ise, $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sınırlı olduğunu, fakat hiçbir $f \in C[0,1]$ ve hiçbir $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ alt-dizisi için $(\|f_{n_k} - f\|_\infty)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin sıfıra yakınsamadığını ispatlayınız.

1.4 $\mathbb{R}^n$ içinde konveks ve bağlantılı kümeler

Tek-değişkenli analizin bazı temel sonuçları, gerçel sayılar kümesinin alt-aralıklarının—açık, kapalı ya da kompakt olma gibi topolojik özelliklerle birlikte—geometrik denilebilecek birtakım özelliklerine de bağlıdır. Örneğin Ortalama Değer Teoremi, bir aralığın, içinden alınan herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının yine kendisi içinde kaldığı gerçeğini kullanır; benzer biçimde Ara-Değer Teoremi, aralıkların, bir tür 'süreklilik' arzeden tek bir parçadan meydana gelmesi olgusuna dayanır. Bu kısımda, sözü edilen bu tip geometrik kavramlar Öklidyen uzaylarda incelenecektir.

Tanım 1.4.1. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ için $L(\mathbf{a};\mathbf{b})$ doğru parçası E kümesinin bir alt-kümesi oluyorsa, E kümesine ***konveks*** denir.

Örnek 1.4.2. $\mathbb{R}^n$ içindeki her açık top konvekstir: Gerçekten, eğer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B_r(\mathbf{c})$ ve $\mathbf{x} \in L(\mathbf{a};\mathbf{b})$ ise, doğru parçasının tanımından dolayı $\mathbf{x} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ olacak biçimde bir $t \in [0,1]$ sayısı bulunduğundan,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = \|(1-t)(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + t(\mathbf{b}-\mathbf{c})\| < (1-t)r + tr = r,$$

yani $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{c})$ olur.

Örnek 1.4.3. $\mathbb{R}^2$ içindeki $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant |x|\}$ kümesi konveks değildir.

Geometrik bir özellik olan konvekslik, topolojik işlemler olan iç ve kapanış altında korunur.

Teorem 1.4.4. *Eğer $E \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise, E° ve $\overline{E}$ kümeleri de konvekstir.*

Kanıt. E° kümesinin konveks olduğunu göstererek, ispatı daha kolay olan $\overline{E}$ kümesinin de aynı özelliğe sahip olduğunun kanıtını okuyucuya bırakacağız.

$$V := \{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^\circ \text{ ve } 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

olsun. Tanım gereğince, E° kümesinin konveks olması için $V \subseteq E^\circ$ olması gerekli ve yeterlidir; Teorem 1.2.14 (ii)'den dolayı, o hâlde, V kümesinin açık olduğunu ve $V \subseteq E$ içermesinin sağlandığını göstermek kâfidir.

Teorem 1.2.14 (i)'den $E^\circ \subseteq E$ gerçeklendiğinden ve hipotezden dolayı E kümesi konveks olduğundan, $V \subseteq E$ içermesi sağlanır. V kümesinin açık olduğunu görmek içinse, $t \in [0,1]$ olmak üzere, $(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \in V$ noktası verildiğinde bir $r_0 > 0$ sayısının, $B_{r_0}((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \subseteq V$ gerçeklenecek biçimde bulunabildiğini görmek yeter. $t \in [0,1]$ sayısı ve $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^\circ$ noktaları sabitlensin. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ noktaları açık olan E° kümesinde olduklarından, $B_r(\mathbf{a})$ ve $B_r(\mathbf{b})$ açık topları E° kümesinin içinde kalacak biçimde bir $r > 0$ sayısı vardır.

Eğer $t = 0$ ise, $r_0 := r$ almak yeterlidir: bu durumda $(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{a}$ olduğundan ve V kümesinin tanımından dolayı $E^\circ \subseteq V$ gerçeklendiğinden, $B_{r_0}((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) = B_r(\mathbf{a}) \subseteq E^\circ \subseteq V$ olur.

Şimdi, $0 < t \leqslant 1$ olsun. $r_0 := tr$ denilerek, $\mathbf{x}_0 \in B_{r_0}((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})$ noktası sabitlensin. Böylece,

$$\mathbf{x}_0 = (1-t)\mathbf{a} + t \cdot \frac{1}{t}(\mathbf{x}_0 - (1-t)\mathbf{a})$$

olduğundan ve

$$\left\| \frac{1}{t}(\mathbf{x}_0 - (1-t)\mathbf{a}) - \mathbf{b} \right\| = \frac{1}{t}\|\mathbf{x}_0 - (1-t)\mathbf{a} - t\mathbf{b}\| < \frac{r_0}{t} = r,$$

yani $\frac{1}{t}(\mathbf{x}_0 - (1-t)\mathbf{a}) \in B_r(\mathbf{b}) \subseteq E^\circ$ gerçeklendiğinden, $\mathbf{x}_0 \in V$ sağlanır; bu ise $B_{r_0}((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \subseteq V$ olması demektir. □

Tanım 1.4.5. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{R}^n$ içindeki açık kümelerden oluşan bir U, V çifti için $E \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$, $E \cap U \neq \varnothing$, ve $E \cap V \neq \varnothing$ özellikleri gerçekleniyorsa, "U, V açık kümeler çifti E kümesini ***ayırır***," denir.

(ii) Eğer E kümesi $\mathbb{R}^n$ içindeki hiçbir açık küme çifti tarafından ayrılamıyorsa, E kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde ***bağlantılı*** olarak adlandırılır.

Örnek 1.4.6. Boş küme ve, bir $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ için, tek elemanlı $E := \{\mathbf{a}\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde bağlantılıdır.

Tanım 1.4.7. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) Bir $U \subseteq E$ kümesi, eğer $\mathbb{R}^n$ içinde açık olan bir V kümesi $U = E \cap V$ olacak biçimde varsa, *E içinde* ***göreli açık*** olarak adlandırılır.

(ii) Bir $A \subseteq E$ kümesi, eğer $\mathbb{R}^n$ içinde kapalı olan bir C kümesi $A = E \cap C$ olacak biçimde varsa, *E içinde* ***göreli kapalı*** olarak adlandırılır.

Aşağıdaki sonuç, Öklidyen bir uzaydaki bağlantılı kümelerin göreli açık kümeler vâsıtasıyla karakterize edilebileceğini gösterir.

Teorem 1.4.8. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. E kümesinin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart, $U \cap V = \varnothing$, $E = U \cup V$, $U \neq \varnothing$, ve $V \neq \varnothing$ gerçeklenecek biçimde E içinde göreli açık olan U ve V kümelerinin bulunmamasıdır.*

Kanıt. E kümesi bağlantılı olsun. İddianın doğru olmadığı, yani E içinde göreli açık olan U ve V kümelerinin, $U \cap V = \varnothing$, $E = U \cup V$, $U \neq \varnothing$, ve $V \neq \varnothing$ gerçeklenecek biçimde bulunabildiği varsayılsın. $\mathbb{R}^n$ içinde açık olan ve bağlantılı E kümesini ayıran bir U_0, V_0 kümeler çifti inşâ ederek, bir çelişkiye ulaşacağız.

İlk olarak,

$$\overline{U} \cap V = \varnothing \tag{1.4.1}$$

olduğu gözlemlensin: Gerçekten, V kümesi E içinde göreli açık olduğundan dolayı $\mathbb{R}^n$ içinde açık olan bir Ω kümesi, $V = E \cap \Omega$ gerçeklenecek biçimde bulunur; bu ise, $U \cap V = \varnothing$ olması nedeniyle $U \subseteq \Omega^c$ sağlandığından ve Ω^c kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde kapalı olduğundan, $\overline{U} \subseteq \overline{\Omega^c} = \Omega^c$ içermesinin doğru olması, yani (1.4.1) eşitliğinin gerçeklenmesi demektir.

(1.4.1) göz önüne alınarak her $\mathbf{x} \in V$ için

$$\delta_{\mathbf{x}} := \inf \left\{ \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| \mid \mathbf{u} \in \overline{U} \right\}$$

sayısı, ve buna istinâden

$$V_0 := \bigcup_{\mathbf{x} \in V} B_{\delta_{\mathbf{x}}/2}(\mathbf{x})$$

kümesi tanımlansın. Şimdi, §1.2, Problem 4 nedeniyle, her $\mathbf{x} \notin \overline{U}$ için $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ gerçeklenir ve bundan dolayı V_0 kümesi tanımlıdır; açık kümelerin bir birleşimi olduğundan V_0 kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde açıktır; ve V_0 kümesi V kümesini içerir, yani $V_0 \cap E \supseteq V$ olur. Diğer taraftan, inşâ nedeniyle $V_0 \cap U = \varnothing$ olduğundan ve hipotezden dolayı $E = U \cup V$ gerçeklendiğinden, aynı zamanda, $V_0 \cap E \subseteq V$ içermesi de sağlanır. O hâlde, $V_0 \cap E = V$ olur.

Benzer biçimde hareket edilerek her $\mathbf{y} \in U$ için

$$\varepsilon_{\mathbf{y}} := \inf \left\{ \|\mathbf{v} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{v} \in \overline{V} \right\}$$

yarıçapları inşâ edilir ve

$$U_0 := \bigcup_{\mathbf{y} \in U} B_{\varepsilon_{\mathbf{y}}/2}(\mathbf{y})$$

olarak tanımlanırsa, $U_0 \cap E = U$ koşulunu sağlayan ve $\mathbb{R}^n$ içinde açık olan bir U_0 kümesi elde edilmiş olur.

U_0 ve V_0 kümelerinin E kümesini ayırdıklarını görmek için kanıtlanması gereken son olgu, $U_0 \cap V_0 = \varnothing$ olduğudur. Eğer bir $\mathbf{a} \in U_0 \cap V_0$ noktası var olsaydı, bir $\mathbf{x} \in V$ için $\mathbf{a} \in B_{\delta_{\mathbf{x}}/2}(\mathbf{x})$ ve bir $\mathbf{y} \in U$ için $\mathbf{a} \in B_{\varepsilon_{\mathbf{y}}/2}(\mathbf{y})$ olması gerekirdi; ancak bu durumda, genelliği bozmaksızın $\delta_{\mathbf{x}} \leqslant \varepsilon_{\mathbf{y}}$ olduğu kabul edilerek,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a} - \mathbf{y}\| < \frac{\delta_{\mathbf{x}}}{2} + \frac{\varepsilon_{\mathbf{y}}}{2} \leqslant \varepsilon_{\mathbf{y}}$$

olması gerektiği görülür, ve bundan dolayı, $\mathbf{x} \in V$ olduğu için gerçeklenmesi mümkün olmayan, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \inf\left\{\|\mathbf{v} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{v} \in \overline{V}\right\}$ çelişkisine ulaşılırdı. O hâlde, $U_0 \cap V_0 = \varnothing$ olmalıdır.

Tersine, eğer E kümesi bağlantılı değilse, yani $\mathbb{R}^n$ içinde açık olan bir U_0, V_0 kümeler çifti E kümesini ayırıyorsa, bu durumda $U := U_0 \cap E$ ve $V := V_0 \cap E$ kümeleri E içinde göreli açık, $U \cap V = \varnothing$, $E = U \cup V$, $U \neq \varnothing$, ve $V \neq \varnothing$ olur. □

Örnek 1.4.9. $\mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{R}$ içinde bağlantılı değildir: $\mathbb{Q}$ içinde göreli açık olan $U := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ ve $V := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$ kümeler çifti $\mathbb{Q}$ kümesini ayırır.

Öklidyen $\mathbb{R}$ uzayında bağlantılılığı karakterize ederek, bu kısmı kapatacağız.

Teorem 1.4.10. *Gerçel sayıların boş-olmayan bir E alt-kümesinin bağlantılı olması için gerekli ve yeterli koşul, E kümesinin bir aralık olmasıdır.*

Kanıt. E, gerçel sayıların boş-olmayan ve bağlantılı bir alt-kümesi olsun. Eğer E kümesi tek bir noktadan oluşuyorsa, yani bir dejenere kapalı aralıksa, Örnek 1.4.6'dan dolayı bağlantılıdır. E kümesi en az iki nokta içeriyorsa, $a := \inf E$ ve $b := \sup E$ olarak tanımlansın; bu durumda $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ olur. Genelliği bozmaksızın $a, b \notin E$ olduğu, yani $E \subseteq (a, b)$ içermesinin de sağlandığı varsayılabilir. Eğer $E \neq (a, b)$ ise, $x \notin E$ gerçeklenecek biçimde bir $x \in (a, b)$ noktası vardır; bu ise, supremum ve infimum tanımları nedeniyle, $E \cap (a, x) \neq \varnothing$ ve $E \cap (x, b) \neq \varnothing$ olması demektir. Varsayım nedeniyle, böylece, $E \subseteq (a, x) \cup (x, b)$ olur, yani E kümesinin (a, x) ve (x, b) açık kümeleri tarafından ayrılabildiği çelişkisine ulaşılır. O hâlde, $E = (a, b)$ olmalıdır.

Tersine, E, bağlantılı olmayan bir aralık olsun. Bu durumda E kümesini ayıran ve $\mathbb{R}$ içinde açık olan U ve V kümeleri vardır: yani $E \subseteq U \cup V$ içermesi gerçeklenir, ve $x_1 \in E \cap U$ ve $x_2 \in E \cap V$ noktaları bulunur. Genelliği bozmaksızın $x_1 < x_2$ olduğu kabul edilerek,

$$W := \{t \in E \mid (x_1, t) \subseteq U\}$$

kümesi göz önüne alınsın. U kümesi açık olduğundan $W \neq \varnothing$ olur; diğer taraftan, V kümesinin açık olması nedeniyle, $x_2 \notin W$ gerçeklenir ve W kümesi bir $c < x_2$ sayısıyla üstten sınırlı olur. Böylece $x_3 := \sup W$ sayısının, E içinde kalan $(x_1, c]$ aralığına ait olan sonlu bir sayı olduğu sonucuna ulaşılır. Bu durumda ya $x_3 \in U$ ya da $x_3 \in V$ olmalıdır.

$x_3 \in U$ olsun. U kümesi açık ve $x_3 > x_1$ olduğundan, $(x_3 - \delta, x_3 + \delta) \subseteq U$ ve $x_3 - \delta > x_1$ gerçeklenecek biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Supremum tanımından dolayı ise, $t > x_3 - \delta$ ve $(x_1, t) \subseteq U$ sağlanacak biçimde bir $t \in W$ noktası bulunur. Bu ise $(x_1, x_3 + \delta) = (x_1, t) \cup (x_3 - \delta, x_3 + \delta) \subseteq U$ olduğu, yani x_3 sayısının W kümesinin supremumu olmadığı çelişkisine ulaştırır. Diğer taraftan, eğer $x_3 \in V$ ise, benzer düşünme biçimiyle, bir $\delta > 0$ sayısının $(x_3 - \delta, x_3 + \delta) \subseteq V$ ve bir $t \in W$ noktasının $t > x_3 - \delta$ ve $(x_3 - \delta, t) \subseteq U$ gerçeklenecek biçimde bulunabildiği görülür. Bu ise $(x_3 - \delta, t) \subseteq U \cap V$, yani $U \cap V \neq \varnothing$ çelişkisine ulaştırır. O hâlde U, V açık kümeler çifti E kümesini ayıramaz, yani E kümesi bağlantılıdır. $\square$

Problemler

1. a, b, c, d gerçel sayılar ve $a \leqslant b$ ve $c \leqslant d$ ise,

$$[a, b] \times [c, d] := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ ve } y \in [c, d]\}$$

dikdörtgeninin kapalı, konveks, ve bağlantılı olduğunu gösteriniz.

2. A ve B kümeleri $\mathbb{R}^n$ içinde konveks olsun. $A \cap B$ kümesinin konveks olduğunu kanıtlayınız; $A \cup B$ kümesinin de konveks olup olmadığını belirleyiniz.

3. Eğer $E \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise, $\overline{E}$ kümesinin de konveks olduğunu ispatlayınız.

4. (a) $\mathbb{R}$ uzayı içinde bağlantılı olan kümelerden oluşan bir ailenin arakesitinin bağlantılı olduğunu ispatlayınız.
(b) "$\mathbb{R}$ uzayı" ifadesi "$\mathbb{R}^2$ uzayı" ifadesiyle değiştirilirse, (a) kısmındaki önermenin genel olarak doğru olmadığını kanıtlayınız.

5. (a) $\mathbb{R}$ uzayı içinde E kümesi bağlantılı ise, E° kümesinin de bağlantılı olduğunu ispatlayınız.
(b) "$\mathbb{R}$ uzayı" ifadesi "$\mathbb{R}^2$ uzayı" ifadesiyle değiştirilirse, (a) kısmındaki önermenin genel olarak doğru olmadığını kanıtlayınız.

6. E kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde bağlantılı ve $E \subseteq A \subseteq \overline{E}$ ise, A kümesinin bağlantılı olduğunu ispatlayınız.

7. $\mathbb{R}^n$ uzayının her konveks alt-kümesinin bağlantılı olduğunu kanıtlayınız. Bu önermenin tersinin de geçerli olup olmadığını belirleyiniz.

8. $H \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. H kümesinin kompakt olması için, H kümesinin, H içinde göreli açık olan kümelerden oluşan her $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$ örtülüşünün bir sonlu alt-örtülüşünün var olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

9. $\{E_\alpha \mid \alpha \in I\}$, $\mathbb{R}^n$ içinde bağlantılı olan ve $\cap_{\alpha\in I} E_\alpha \neq \varnothing$ koşulunu sağlayan kümelerden oluşan bir aile ise, $E := \cup_{\alpha\in I} E_\alpha$ kümesinin bağlantılı olduğunu ispatlayınız.

10. I, gerçel sayılar içinde bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\alpha \in [0,1]$ ve her $x, y \in I$ için
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$
eşitsizliği gerçekleniyorsa, f fonksiyonu I aralığı üzerinde ***konveks*** olarak adlandırılır. I kümesi gerçel eksenin bir alt-aralığı ise, bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I üzerinde konveks olması için,
$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ ve } y \geqslant f(x)\}$$
kümesinin $\mathbb{R}^2$ içinde konveks olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

1.5 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı fonksiyonların limitleri

§§1.1-1.4 kısımlarında geliştirilen yapılar, tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan temel sonuçların benzerlerinin çok-değişkenli fonksiyonlar için kurulabilmelerini sağlar. Bu bağlamda ilk olarak−yani bu kısımda−Öklidyen uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonların limitlerini inceleyeceğiz.

Bir $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi ve bir $\mathbf{f} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ikili bağıntısı verildiğinde, eğer her $\mathbf{x} \in E$ için $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{f}\}$ kümesi tek elemanlıysa ve
$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{ bir } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \text{ için } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{f}\}$$
gerçekleniyorsa, $\mathbf{f}$ bağıntısına E *üzerinde* bir ***fonksiyon*** denir ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ notasyonu kullanılır. Bu durumda, E kümesi $\mathbf{f}$ fonksiyonunun ***tanım kümesi*** olarak adlandırılır ve $\operatorname{dom}(\mathbf{f})$ ile gösterilir; $\mathbf{x} \in \operatorname{dom}(\mathbf{f})$ olduğunda $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{f}$ olmasını sağlayan tek türlü belirli $\mathbf{y}$ elemanına ise $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{x}$ noktasındaki ***değeri*** denir ve $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ olarak yazılır. $\mathbf{f}$ fonksiyonunun tanım kümesine ait her $\mathbf{x}$ noktası için $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ olduğundan, $j = 1, 2, \ldots, m$ indislerine karşılık, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ eşitliği her $\mathbf{x} \in \operatorname{dom}(\mathbf{f})$ için gerçeklenecek biçimde $f_j : \operatorname{dom}(\mathbf{f}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları vardır: bu fonksiyonlara $\mathbf{f}$ fonksiyonunun ***bileşen fonksiyonları*** denir. Tek bir bileşeninin var olduğu $m = 1$ durumunda, $\mathbf{f}$ fonksiyonu ***gerçel-değerli*** olarak adlandırılır ve f ile gösterilir.

Örnek 1.5.1. $\mathbf{f}(x,y) := \left(\sqrt{(1-x^2)}, \ln(x^2-y^2), \sin x \cos y\right)$ fonksiyonu için, $f_1(x,y) = \sqrt{(1-x^2)}$, $f_2(x,y) = \ln(x^2-y^2)$, $f_3(x,y) = \sin x \cos y$, ve
$$\operatorname{dom}(\mathbf{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ve } -|x| < y < |x|\}$$
olur.

Mutlak değer fonksiyonu yerine norm fonksiyonu kullanılarak, tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan limit tanımı çok-değişkenli fonksiyonlara taşınabilir.

Tanım 1.5.2. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ olsun.

(i) Her $r > 0$ gerçel sayısı için $B_r(\mathbf{a}) \cap E$ kümesi sonsuz sayıda nokta içeriyorsa, $\mathbf{a}$ noktası E kümesinin bir ***yığılma noktası*** olarak adlandırılır.

(ii) $\mathbf{a}$ noktası E kümesinin bir yığılma noktası, $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon, ve $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı, $\mathbf{x} \in E$ ve $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ olması $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$ olmasını gerektirecek biçimde bulunabiliyorsa, "$\mathbf{x}$ noktası E üzerinden $\mathbf{a}$ noktasına yaklaştığında $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{L}$ noktasına ***yakınsar***," denir. Bu durumda, "$\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için $\mathbf{f}$ fonksiyonunun bir ***limit***e sahip olduğu," söylenir ve "E üzerinden $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{L}$" ya da

$$\mathbf{L} = \lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

yazılımları kullanılır.

Açıklama 1.5.3. Tek-değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki değeri bu fonksiyonun E üzerinden $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için limitinin var olup olmamasını etkilemez; aynı zamanda limit, eğer varsa, tek türlü belirlidir.

Açıklama 1.5.4. Eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{x}$ noktası bir açık $B_r(\mathbf{a})$ topu üzerinden $\mathbf{a}$ noktasına yaklaştığında $\mathbf{L}$ noktasına yakınsıyorsa, bu fonksiyon, $\mathbf{a}$ noktasının bir yığılma noktası olduğu her E kümesi üzerinden de $\mathbf{L}$ noktasına yakınsar: bu durumda

$$\mathbf{L} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

yazılımı kullanılır.

Çok-değişkenli bir $\mathbf{f}$ fonksiyonunun bir limite sahip olduğunu göstermek için, $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|$ değerini sınırlayan ve $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için $g(\mathbf{x}) \to 0$ koşulunu sağlayan, gerçel-değerli ve negatif-olmayan bir g fonksiyonu bulmak kolaylık sağlar.

Örnek 1.5.5. Her $(x, y) \neq (0, 0)$ için

$$f(x, y) := \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $2|xy| \leqslant x^2 + y^2$ olduğundan,

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{3}{2}\,|x|$$

eşitsizliği tüm $(x, y) \neq (0, 0)$ çiftleri için gerçeklenir. Şimdi, $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlendiğinde $\delta := \varepsilon/2$ olarak alınırsa, $0 < \|(x, y)\| < \delta$ olduğunda

$$|f(x, y) - 0| \leqslant 2|x| \leqslant 2\|(x, y)\| < 2\delta = \varepsilon$$

sağlanır; bu ise, tanım gereğince,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

olması demektir.

Tanım 1.5.2, eğer $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{L}$ noktasına yakınsıyorsa, $\mathbf{x}$ noktası $\mathbf{a}$ noktasına yeterince yakın olduğunda $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\|$ değerinin istenildiği kadar küçük kılınabileceğini bildirir. Dolayısıyla, eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için bir limiti varsa, bu limit, $\mathbf{x}$ noktaları $\mathbf{a}$ noktasına hangi yoldan yaklaşırsa yaklaşsın aynı olmak zorundadır. Bu gözlem, bir limitin *var olmadığını* göstermek için oldukça kullanışlı bir yöntem önerir.

Örnek 1.5.6. Her $(x, y) \neq (0, 0)$ için

$$f(x, y) := \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Eğer f fonksiyonunun $(x, y) \to (0, 0)$ için bir L limit değeri var olsaydı, $(0, 0)$ noktasına hangi yoldan yaklaşılırsa yaklaşılsın bu limit değerinin aynı olması gerekirdi. Bir taraftan bu, $(0, 0)$ noktasına $x = 0$ doğrusu üzerinden yaklaşıldığında, her $y \neq 0$ için $f(0, y) = 0$ olduğundan, $L = 0$ olmasını gerektirirdi; ancak diğer taraftan, aynı noktaya $y = x$ doğrusu üzerinden yaklaşıldığında, her $x \neq 0$ için $f(x, x) = 1$ olduğundan, $L = 1$ sonucuna ulaşılmış olurdu. f fonksiyonunun, o hâlde, $(x, y) \to (0, 0)$ için bir limiti var olamaz.

Çok-değişkenli fonksiyonların limitleri, diziler kullanılarak da belirlenebilir.

Teorem 1.5.7. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon, ve $\mathbf{a}$ noktası E kümesinin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda,*

$$\mathbf{L} := \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a} \\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

limitinin var olması için gerekli ve yeterli koşul, terimleri $E \smallsetminus \{\mathbf{a}\}$ kümesinde olan ve $\mathbf{a}$ noktasına yakınsayan her $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{L}$ olmasıdır.

Kanıt. E üzerinden $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için $\mathbf{f}$ fonksiyonunun limiti $\mathbf{L}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı, $\mathbf{x} \in E$ ve $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ olması $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$ olmasını gerektirecek biçimde bulunur. Diğer taraftan, eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{x}_k \in E \setminus \{\mathbf{a}\}$ koşulunu sağlayan $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbf{a}$ noktasına yakınsıyorsa, $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < \delta$ eşitsizliği her $k \geqslant N$ için gerçeklenecek biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{x}_k \in E$ ve $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ olduğundan, o hâlde, $k \geqslant N$ olduğunda $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$ sağlanır: yani, $k \to \infty$ için $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{L}$ olur.

Tersine, terimleri $E \setminus \{\mathbf{a}\}$ kümesinde olan ve $\mathbf{a}$ noktasına yakınsayan her $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{L}$ olsun. Eğer E üzerinden $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{L}$ noktasına yakınsamıyorsa, bu durumda bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı, her $\delta > 0$ sayısı için, $\mathbf{x} \in E$ ve $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ olduğunda $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| \geqslant \varepsilon_0$ gerçeklenecek biçimde bulunur. Dolayısıyla her $k \in \mathbb{N}$ için bir $\mathbf{x}_k \in E$ noktası, $0 < \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < 1/k$ ve $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{L}\| \geqslant \varepsilon_0$ sağlanacak biçimde vardır; bu ise, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$ gerçeklendiğinden, hipotezden dolayı $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{L}$ olması sonucuna, yani yeterince büyük k sayıları için $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{L}\| < \varepsilon_0$ olması gerektiği çelişkisine ulaştırır. □

Yukarıdaki sonuç ve §1.3 kısmındaki ilgili netice kullanılarak, çok-değerli fonksiyonların limitlerini belirleme işleminin gerçel-değerli fonksiyonlarınkini belirleme işlemine indirgenebileceği kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 1.5.8. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_m) : E \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon, $\mathbf{a}$ noktası E kümesinin bir yığılma noktası, ve $\mathbf{L} := (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$ olsun. Bu durumda,*

$$\mathbf{L} = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a} \\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart, her $j = 1, 2, \dots, m$ için

$$L_j = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a} \\ \mathbf{x}\in E}} f_j(\mathbf{x})$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. Teorem 1.3.6 ve Teorem 1.5.7 kullanılarak elde edilir. □

Öklidyen uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonların cebirsel kombinasyonlarıyla ilgili standart sonuçları ifade edebilmek için, tek-değişkenli fonksiyonlardakine benzer biçimde, bu tip cebirsel kombinasyonları tanımlamak gerekir. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{f}, \mathbf{g} : E \to \mathbb{R}^m$ olmak üzere, her $\mathbf{x} \in E$ için, $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g}$ fonksiyonlarının ***toplam***ı

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x});$$

bir $\alpha \in \mathbb{R}$ skaleriyle $\mathbf{f}$ fonksiyonunun ***çarpım***ı

$$(\alpha\mathbf{f})(\mathbf{x}) := \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x});$$

ve $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g}$ fonksiyonlarının ***Öklidyen/iç çarpım***ı

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.5.9. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}$ noktası E kümesinin bir yığılma noktası, $\alpha \in \mathbb{R}$, ve $\mathbf{f}, \mathbf{g} : E \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \textit{ve} \quad \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

limitleri varsa,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} (\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{g}(\mathbf{x}), \qquad \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} (\alpha\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \alpha \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\right) \cdot \left(\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{g}(\mathbf{x})\right), \qquad \left\|\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\right\| = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|,$$

ve, $m = 1$ olduğunda ve g fonksiyonunun limiti sıfır olmadıkça,

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} f(\mathbf{x})\right) / \left(\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} g(\mathbf{x})\right)$$

özellikleri sağlanır.

Kanıt. Tüm özellikler, tanımların doğrudan sonuçlarıdır. □

Örnek 1.5.10. Problem 4'den dolayı, $(x, y) \to (0, 0)$ için, $2 + x - y \to 2$ ve $1 + 2x^2 + 3y^2 \to 1$ gerçeklenir; bu ise, Teorem 1.5.9'dan,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2 + x - y}{1 + 2x^2 + 3y^2} = \frac{2}{1} = 2$$

olması demektir.

Çok-değişkenli bir fonksiyonun limitinin var olup olmadığı belirlenmek istendiğinde, fonksiyonun değişkenlerinin her birini bağımsız olarak hareket ettirerek ilgili limiti göz önüne almak doğal olarak akla gelir. Ancak Örnek 1.5.6 ve Örnek 1.5.10 karşılaştırılırsa, bu yöntemin her zaman işlemediği de görülür. Yine de, limit hesaplarında kolaylık sağlayan bu yöntemin işletilebileceği durumları saptamak faydalıdır. Bunun için, yazılımda kolaylık sağlamak amacıyla, *kalan kısımda 2-boyutlu Öklidyen uzayda çalışılacaktır.*

$E \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ olarak alınsın, ve $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ noktası E kümesinin bir yığılma noktası olsun. $\mathbf{f}$ fonksiyonunun (a, b) noktasındaki ***ardışık limit***leri, ilgili limitler var olduğunda,

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}\mathbf{f}(x,y) := \lim_{x\to a}\Big(\lim_{y\to b}\mathbf{f}(x,y)\Big) \text{ ve } \lim_{y\to b}\lim_{x\to a}\mathbf{f}(x,y) := \lim_{y\to b}\Big(\lim_{x\to a}\mathbf{f}(x,y)\Big)$$

olarak tanımlanır.

Bir fonksiyonun ardışık limitleri var olmayabilir; var olsalar bile, fonksiyonun ilgili noktadaki limitinin varlığını garantilemezler: Örnek 1.5.6'daki f fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasındaki ardışık limitlerinin var$-$ve ikisinin de sıfır$-$olmasına rağmen, f fonksiyonunun $(x, y) \to (0, 0)$ için limiti yoktur.

Ardışık limitler, farklı değerler olarak da var olabilirler.

Örnek 1.5.11. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) := \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

olarak verilsin. Her $x \neq 0$ için, $y \to 0$ durumunda $x^2/(x^2+y^2) \to 1$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

olur; diğer taraftan,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

gerçeklenir.

Yukarıdaki gözlemler ve Örnek 1.5.11, ardışık limitlerin ne zaman aynı oldukları sorusunu akla getirir. Aşağıdaki sonuç, bir fonksiyonunun bir noktada limiti varsa ve aynı noktada fonksiyonun ardışık limitleri mevcutsa, bu limit değerlerinin eşit olduklarını söyler.

Teorem 1.5.12. *I ve J gerçel sayılar içinde açık aralıklar olsun ve $a \in I$ ve $b \in J$ olarak alınsın. Her $y_0 \in J$ için $\lim_{x\to a} \mathbf{f}(x, y_0)$ ve her $x_0 \in I$ için $\lim_{y\to b} \mathbf{f}(x_0, y)$ limitleri var olsun. Eğer*

$$\mathbf{L} := \lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathbf{f}(x, y)$$

limiti varsa, bu durumda

$$\mathbf{L} = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} \mathbf{f}(x, y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} \mathbf{f}(x, y)$$

olur.

Kanıt. Her $x \in I$ için,

$$\mathbf{g}(x) := \lim_{y\to b} \mathbf{f}(x, y)$$

olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlendiğinde $\delta > 0$ sayısı, $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ olması $\|\mathbf{f}(x, y) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$ olmasını gerektirecek biçimde seçilsin. Aynı zamanda, $x \in I$ ve $0 < |x - a| < \delta/\sqrt{2}$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $0 < |y - b| < \delta/\sqrt{2}$ koşulunu sağlayan her y için, $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ ve

$$\|\mathbf{g}(x) - \mathbf{L}\| \leqslant \|\mathbf{g}(x) - \mathbf{f}(x, y)\| + \|\mathbf{f}(x, y) - \mathbf{L}\| < \|\mathbf{g}(x) - \mathbf{f}(x, y)\| + \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu son eşitsizliğin $y \to b$ için limiti alınırsa, $|x - a| < \delta/\sqrt{2}$ koşulunu sağlayan her $x \in I$ için $\|\mathbf{g}(x) - \mathbf{L}\| \leqslant \varepsilon$ olduğu görülür; bu ise $x \to a$ için $\mathbf{g}(x) \to \mathbf{L}$, yani

$$\mathbf{L} = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} \mathbf{f}(x, y)$$

olması demektir. Diğer ardışık limitin de var ve $\mathbf{L}$ değerine eşit olduğu, benzer biçimde hareket edilerek elde edilir. □

Teorem 1.5.12, bir $\mathbf{f}$ fonksiyonunun limitinin *var olmadığını* göstermek için kullanılabilecek bir diğer yöntemi önerir: eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonunun bir (a, b) noktasındaki ardışık limitleri varsa ve farklı değerlerse, bu durumda $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $(x, y) \to (a, b)$ için limiti yoktur. Diğer taraftan Örnek 1.5.11, Teorem 1.5.12'deki $\mathbf{L}$ limitinin var olması koşulunun kaldırılamayacağını da gösterir: bir başka deyişle, eğer bir fonksiyonun bir noktada limiti yoksa, bu noktadaki ardışık limitlerin hangi sırayla alındığına dikkât edilmelidir.

Problemler

1. Aşağıdaki limitleri sorulan fonksiyonların her birinin tanım kümelerini bulunuz, verilen limitlerin var olduklarını ispatlayınız, ve bu limit değerlerini hesaplayınız:

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \left(\frac{x-1}{y-1}, \frac{x^2+x-2}{x-1} \right)$;

(b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(\frac{y\sin x}{x}, \tan\left(\frac{x}{y}\right), x^2+y^2-xy \right)$;

(c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(\frac{x^2-1}{y^2+1}, \frac{x^2y-2xy+y-(x-1)^2}{x^2+y^2-2x-2y+2} \right)$;

(d) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{[3]}(x^2+y^2)} \right)$.

2. Aşağıdaki fonksiyonların $(0,0)$ noktasındaki ardışık limitlerini hesaplayınız, hangi fonksiyonların $\mathbb{R}^2$ içinde $(x,y)\to(0,0)$ durumunda limitinin var olduğunu belirleyiniz, ve var olan limit değerlerini hesaplayınız:

$$\text{(a) } f(x,y) := \frac{\sin x \sin y}{x^2+y^2}; \quad \text{(b) } g(x,y) := \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}; \quad \text{(c) } h(x,y) := \frac{|x|^\alpha y^4}{x^2+y^4}, \quad \alpha > 0;$$

$$\text{(d) } u(x,y) := \frac{x^2+y^4}{x^2+2y^4}; \qquad \text{(e) } v(x,y) := \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha}, \quad \alpha < 1/2.$$

3. $i = 1,2,3,4$ için $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f_1(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise;} \end{cases} \qquad f_2(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise;} \end{cases}$$

$$f_3(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise;} \end{cases} \qquad f_4(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak; $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $j = 1,2,3,4$ için E_j kümeleri ise

$$E_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax\}, \quad E_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2\},$$
$$E_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}, \quad E_4 := \mathbb{R}^2$$

olarak tanımlansın. Her $i,j \in \{1,2,3,4\}$ için,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in E_j}} f_i(x,y), \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f_i(x,y), \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f_i(x,y)$$

limitlerini hesaplayınız.

4. $a_{j_1,\ldots,j_n}$ skalerler ve $N_1,\ldots,N_n$ negatif-olmayan tam sayılar olmak üzere,

$$P(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{j_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{j_n=0}^{N_n} a_{j_1,\ldots,j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$$

biçimindeki bir fonksiyon, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir ***polinom*** olarak adlandırılır. P, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir polinom ve $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ise, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{a})$ olduğunu ispatlayınız.

5. Teorem 1.5.8 ve Teorem 1.5.9'un kanıtlarını tamamlayınız.

1.6 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı fonksiyonların sürekliliği

Analiz, kendisini betimleyen sıfat (reel, kompleks, fonksiyonel, nümerik, vs) ne olursa olsun, temel olarak, fonksiyonlar kategorisindeki en önemli sınıf olan *sürekli fonksiyonların* özelliklerinin incelenmesidir. Öklidyen uzaylar üzerinde tanımlı—yani, çok-değişkenli—bu tip fonksiyonların inceleneceği bu kısımda, tek-değişkenli teorinin bazı klâsik sonuçları, §§1.1-1.5 kısımlarında geliştirilen yapılar kullanılarak genelleştirilecektir.

Aşağıdaki tanım, tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan tanımın çok-değişkenli fonksiyonlara doğal olarak genişletilmesidir.

Tanım 1.6.1. $\mathbb{R}^n$ uzayının boş-olmayan bir alt-kümesi E ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun.

(i) $\mathbf{a} \in E$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı, $\mathbf{x} \in E$ ve $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ olması $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ olmasını gerektirecek biçimde bulunabiliyorsa, $\mathbf{f}$ fonksiyonuna "$\mathbf{a}$ noktasında ***sürekli***dir," denir.

(ii) $A \subseteq E$ olmak üzere, eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonu her $\mathbf{a} \in A$ noktasında sürekli ise, $\mathbf{f}$ fonksiyonu *A üzerinde* ***sürekli*** olarak adlandırılır, ve "$\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^m$ süreklidir," yazılımı kullanılır.

(iii) Tanım kümesi olan E üzerinde sürekli ise, $\mathbf{f}$ fonksiyonuna ***sürekli*** denir.

Açıklama 1.6.2. Tanım 1.5.2 ve Tanım 1.6.1 karşılaştırılırsa, E kümesinin bir yığılma noktası olan her $\mathbf{a} \in E$ için, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında sürekli olmasının

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \to \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.6.1}$$

eşitliğinin sağlanmasına denk olduğu görülür. Diğer taraftan, (1.6.1) eşitliği ve Teorem 1.5.8 göz önüne alınırsa, bir $\mathbf{f}$ fonksiyonunun bir $\mathbf{a} \in E$ noktasında ya da bir $A \subseteq E$ kümesi üzerinde sürekli olabilmesi için, bu fonksiyonun her f_j bileşen fonksiyonunun, sırasıyla, $\mathbf{a}$ noktasında ya da A kümesi üzerinde sürekli olmasının gerekli ve yeterli olduğu sonucuna da ulaşılır; diğer bir ifadeyle, çok-değerli fonksiyonların sürekliliği gerçel-değerli fonksiyonların sürekliliğine indirgenerek incelenebilir. Temel işlemler altında sürekliliğin korunması da, (1.6.1) eşitliğinin ve Teorem 1.5.9'un sonucudur: eğer $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g}$ fonksiyonları noktasal olarak ya da bir küme üzerinde sürekli iseler, $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$, $\|\mathbf{f}\|$, ve her α skaleri için $\alpha\mathbf{f}$ fonksiyonları da aynı yerde sürekli olurlar.

Teorem 1.5.7'nin basit bir uygulaması olarak, ilgili noktalarda sürekli olan fonksiyonların bileşkelerinin de sürekli olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 1.6.3. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} : E \to \Omega$, ve $\mathbf{g} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ olsun. Eğer E üzerinden $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \to \mathbf{L}$ ise ve $\mathbf{g}$ fonksiyonu $\mathbf{L}$ noktasında sürekli oluyorsa, bu durumda*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} (\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\left(\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\right)$$

eşitliği gerçeklenir.

Kanıt. Terimleri $E \setminus \{\mathbf{a}\}$ kümesinde olan ve $\mathbf{a}$ noktasına yakınsayan bir dizi $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olsun. Bu durumda, Teorem 1.5.7'den, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{L}$ ve $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)) \to \mathbf{g}(\mathbf{L})$ gerçeklenir, yani

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{x}_k) = \mathbf{g}(\mathbf{L}) = \mathbf{g}\left(\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\in E}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\right)$$

olur; bu ise, yine Teorem 1.5.7'den, E üzerinden $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ için $(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{x}) \to \mathbf{g}(\mathbf{L})$ olması demektir. □

Süreklilik kavramına daha yakından bir bakış, bir fonksiyonun bir noktada sürekli olmasının yalnız bu noktada değil, bu noktanın 'yakınında' da fonksiyonun davranışıyla ilgili bilgi verdiğini gösterir. Tanım 1.6.1'den dolayı, eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonu bir $\mathbf{a} \in E$ noktasında sürekli ve $\varepsilon > 0$ ise, bir $\delta > 0$ sayısının $\mathbf{f}(B_\delta(\mathbf{a}) \cap E) \subseteq B_\varepsilon(\mathbf{f}(\mathbf{a}))$, yani

$$B_\delta(\mathbf{a}) \cap E \subseteq \mathbf{f}^{-1}\left(B_\varepsilon(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\right)$$

sağlanacak biçimde bulunabildiği görülür: diğer bir ifadeyle, $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ merkezli bir açık topun ters görüntüsü, E kümesinin $\mathbf{a}$ 'merkezli' göreli açık bir alt-kümesini içerir. Bu gözlem, sürekli fonksiyonların karakterizasyonuyla ilgili aşağıdaki temel sonuca yol açar.

Teorem 1.6.4. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ olsun. $\mathbf{f}$ fonksiyonunun E üzerinde sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathbb{R}^m$ içinde açık olan her V kümesi için $\mathbf{f}^{-1}(V) \cap E$ kümesinin E içinde göreli açık olmasıdır.*

Kanıt. $\mathbf{f}$ fonksiyonu E üzerinde sürekli ve V kümesi $\mathbb{R}^m$ içinde açık olsun. Genelliği bozmaksızın, $\mathbf{f}^{-1}(V) \cap E$ kümesinin boş küme olmadığı varsayılabilir. $\mathbf{a} \in \mathbf{f}^{-1}(V) \cap E$, yani, $\mathbf{a} \in E$ ve $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in V$ olarak alınsın. V açık olduğundan bir $\varepsilon > 0$ sayısı, $B_\varepsilon(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \subseteq V$ sağlanacak biçimde vardır. Diğer taraftan bir $\delta > 0$ sayısı da, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında sürekli olmasından dolayı,

$$B_\delta(\mathbf{a}) \cap E \subseteq \mathbf{f}^{-1}\left(B_\varepsilon(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\right) \subseteq \mathbf{f}^{-1}(V) \tag{1.6.2}$$

gerçeklenecek biçimde bulunur. Şimdi,

$$U := \bigcup_{\mathbf{a}\in\mathbf{f}^{-1}(V)} B_\delta(\mathbf{a})$$

olarak tanımlansın. Açık kümelerin bir birleşimi olduğundan, U kümesi açıktır. Aynı zamanda, V kümesinin $\mathbf{f}$ fonksiyonu altındaki ters görüntüsüne ait olan noktalar merkezli açık topların birleşimi olmasından dolayı, U kümesi $\mathbf{f}^{-1}(V)$ kümesini içerir: yani, $U\cap E \supseteq \mathbf{f}^{-1}(V)\cap E$ olur. Diğer taraftan, (1.6.2)'den dolayı $U\cap E \subseteq \mathbf{f}^{-1}(V)\cap E$ içermesi de sağlanır. O hâlde $\mathbf{f}^{-1}(V)\cap E = U\cap E$ gerçeklenir; bu ise, Tanım 1.4.7 (i)'ye nazaran, $\mathbf{f}^{-1}(V)\cap E$ kümesinin E içinde göreli açık olması demektir.

Tersine, $\varepsilon > 0$ ve $\mathbf{a}\in E$ olsun, ve $V := B_\varepsilon(\mathbf{f}(\mathbf{a}))$ olarak alınsın. Hipotezden dolayı, $\mathbf{f}^{-1}(V)\cap E$ kümesi E içinde göreli açıktır. $\mathbf{a}\in\mathbf{f}^{-1}(V)$ olduğundan, o hâlde, bir $\delta > 0$ sayısı $E\cap B_\delta(\mathbf{a}) \subseteq \mathbf{f}^{-1}(V)$ gerçeklenecek biçimde bulunur: bu ise, $\mathbf{x}\in E$ ve $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$ olduğunda $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ olması demektir$-$yani $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında süreklidir. □

Açıklama 1.6.5. Teorem 1.6.4, açık olma kavramının sürekli fonksiyonların ters görüntüleri altında korunduğunu gösterir. Benzer biçimde, kapalı olma kavramı da sürekli fonksiyonların ters görüntüleri altında korunur (bkz. Problem 3). Kompakt kümeler içinse, aynı olgu genel olarak doğru değildir: her $x > 0$ için $f(x) := 1/x$ olarak tanımlanan f fonksiyonunun $(0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve $H := [0,1]$ kümesinin$-$Heine-Borel Teoremi'nden dolayı$-\mathbb{R}$ içinde kompakt olmasına rağmen, $f^{-1}(H) = [1,\infty)$ kümesi$-$yine Heine-Borel Teoremi'nden dolayı$-$kompakt değildir. Aşağıdaki sonuç kompaktlığın, sürekli fonksiyonların ters görüntülerinden ziyade, *görüntüleri* altında korunduğunu söyler.

Teorem 1.6.6. *Eğer H kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde kompakt ve $\mathbf{f} : H \to \mathbb{R}^m$ sürekliyse, $\mathbf{f}(H)$ kümesi $\mathbb{R}^m$ içinde kompakttır.*

Kanıt. $\mathbf{f}(H)$ kümesinin bir açık örtülüşü $\{V_\alpha \mid \alpha\in I\}$ olsun. Bu durumda

$$H \subseteq \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(H)) \subseteq \mathbf{f}^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}\mathbf{f}^{-1}(V_\alpha)$$

olur. Dolayısıyla, Teorem 1.6.4'den, H içinde göreli açık olan kümelerden oluşan $\{\mathbf{f}^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha\in I\}$ ailesinin H için bir örtülüş olduğu sonucuna ulaşılır. H kümesi kompakt olduğundan, bu, §1.4, Problem 7'den dolayı,

$$H \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}\mathbf{f}^{-1}(V_{\alpha_j})$$

sağlanacak biçimde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ indislerinin var olmaları anlamına gelir. O hâlde

$$\mathbf{f}(H) \subseteq \mathbf{f}\left(\bigcup_{j=1}^{N} \mathbf{f}^{-1}(V_{\alpha_j})\right) = \bigcup_{j=1}^{N} (\mathbf{f} \circ \mathbf{f}^{-1})(V_{\alpha_j}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} V_{\alpha_j}$$

gerçeklenir: yani, $\mathbf{f}(H)$ kümesi kompakttır. □

Açıklama 1.6.7. 'Kompakt' kelimesi 'açık' ya da 'kapalı' kelimesiyle değiştirildiğinde, Teorem 1.6.6 genel olarak doğru olmaz: her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) := x^2$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $V := (-1, 1)$ kümesi $\mathbb{R}$ içinde açık olmasına karşın, $f(V) = [0, 1)$ kümesi $\mathbb{R}$ içinde ne açık ne de kapalıdır; benzer biçimde, her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\pi(x, y) := x$ olarak tanımlanan $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = 1/x\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde kapalı olmasına rağmen, $\pi(K) = (0, \infty)$ kümesi $\mathbb{R}$ içinde kapalı değildir. Diğer bir deyişle, açık ya da kapalı olmak, sürekli fonksiyonların görüntüleri altında *korunmaz.*

Bağlantılılık da, kompaktlık gibi, sürekli fonksiyonların görüntüleri altında korunan bir diğer özelliktir.

Teorem 1.6.8. *Eğer E kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde bağlantılı ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ sürekliyse, $\mathbf{f}(E)$ kümesi $\mathbb{R}^m$ içinde bağlantılıdır.*

Kanıt. $\mathbf{f}(E)$ kümesinin $\mathbb{R}^m$ içinde bağlantılı olmadığı varsayılsın, ve buna istinâden, bu kümeyi ayıran ve $\mathbb{R}^m$ içinde açık olan bir U, V kümeler çifti alınsın. Teorem 1.6.4'den dolayı, $\mathbf{f}^{-1}(U) \cap E$ ve $\mathbf{f}^{-1}(V) \cap E$ kümeleri E içinde göreli açıktır. $\mathbf{f}(E) \subseteq U \cup V$ olduğundan da,

$$E = \left(\mathbf{f}^{-1}(U) \cap E\right) \cup \left(\mathbf{f}^{-1}(V) \cap E\right)$$

sağlanır. Diğer taraftan, $U \cap V = \varnothing$ olması nedeniyle, $\mathbf{f}^{-1}(U) \cap \mathbf{f}^{-1}(V) = \varnothing$ gerçeklenir. $\mathbf{f}^{-1}(U) \cap E$, $\mathbf{f}^{-1}(V) \cap E$, o hâlde, E kümesini ayıran bir göreli açık kümeler çiftidir. Bu ise, Teorem 1.4.8 nedeniyle, E kümesinin bağlantılı olmaması demektir. □

Şimdiye dek gösterilen sonuçların sağladığı alt-yapıyla, artık tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan bazı klâsik sonuçları çok-değişkenli ve gerçel-değerli fonksiyonlara genişletebiliriz.

Teorem 1.6.9 (Ekstremum Değer Teoremi)**.** *H, Öklidyen bir uzayın boş-olmayan ve kompakt bir alt-kümesi, ve $f : H \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Bu durumda*

$$M := \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in H\} \quad \textit{ve} \quad m := \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in H\}$$

değerleri sonlu gerçel sayılardır, ve $M = f(\mathbf{x}_M)$ *ve* $m = f(\mathbf{x}_m)$ *gerçeklenecek biçimde* H *kümesine ait* $\mathbf{x}_M$ *ve* $\mathbf{x}_m$ *noktaları bulunur.*

Kanıt. İsteneni M için göstererek, kanıtı benzer olan m ile ilgili sonucun ispatını okuyucuya bırakacağız. H kompakt ve f sürekli olduğundan, Teorem 1.6.6'dan, $f(H)$ kümesi kompakttır. Heine-Borel Teoremi'nden, bu, $f(H)$ kümesinin kapalı ve sınırlı olması anlamına gelir. Sınırlı olduğundan, gerçel sayıların bir altkümesi olan $f(H)$ kümesinin supremumu vardır: yani, M değeri sonludur. Diğer taraftan, supremum tanımı kullanılırsa, terimleri H kümesinde olan ve $k \to \infty$ için $f(\mathbf{x}_k) \to M$ koşulunu sağlayan bir $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin var olduğu görülür. Bu ise, $f(H)$ kümesi kapalı olduğundan, Teorem 1.3.12 nedeniyle, $M \in f(H)$ olması demektir: bir $\mathbf{x}_M \in H$ noktası, o hâlde, $M = f(\mathbf{x}_M)$ olacak biçimde bulunur. □

Teorem 1.6.10 (Ara-Değer Teoremi)**.** *E, Öklidyen bir uzayın bağlantılı bir altkümesi olsun. Eğer* $f : E \to \mathbb{R}$ *sürekli, bir* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ *çifti için* $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$*, ve* y *sayısı* $f(\mathbf{a})$ *ve* $f(\mathbf{b})$ *değerleri arasında ise, bu durumda* $f(\mathbf{x}) = y$ *gerçeklenecek biçimde bir* $\mathbf{x} \in E$ *noktası vardır.*

Kanıt. E bağlantılı ve f sürekli olduğundan, Teorem 1.6.8'den, $f(E)$ kümesi $\mathbb{R}$ içinde bağlantılıdır. Bu ise, Teorem 1.4.10'dan, $f(E)$ kümesinin bir aralık olması demektir: y sayısı bu aralıkta olduğundan, o hâlde, bir $\mathbf{x} \in E$ için $f(\mathbf{x}) = y$ olmalıdır. □

Bu kısımda son olarak, düzgün süreklilik kavramını Öklidyen uzaylarda inceleyeceğiz.

Tanım 1.6.11. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı, $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in E$ ve $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ olması $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ olmasını gerektirecek biçimde bulunabiliyorsa, bu durumda $\mathbf{f}$ fonksiyonuna "E üzerinde ***düzgün sürekli***dir," denir ve "$\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ düzgün süreklidir," yazılımı kullanılır.

Açıklama 1.6.12. Tanım 1.6.1 ve Tanım 1.6.11 karşılaştırılırsa, düzgün sürekli bir fonksiyonun sürekli olduğu görülür; sürekli bir fonksiyon ise, genel olarak, düzgün sürekli olmak zorunda değildir: her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) := x^2$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, sürekli olmasına karşın, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli değildir.

Sürekliliğin ne zaman düzgün sürekliliği gerektirdiği, bu kısımda ispatlanacak son netice olacaktır. Bunun için önce, bu iki kavram arasındaki farkı çok iyi gösteren bir yardımcı sonuç kanıtlanacaktır.

Lemma 1.6.13. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ düzgün sürekli olsun. Eğer $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi E içinde bir Cauchy dizisi ise, $(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi de $\mathbb{R}^m$ içinde bir Cauchy dizisidir.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlensin ve $\mathbf{f}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğu kullanılarak bir $\delta > 0$ sayısı, $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in E$ ve $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ olduğunda $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| < \varepsilon$ gerçeklenecek biçimde seçilsin. Diğer taraftan, $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu kullanılarak bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı, her $k, m \geqslant N$ için $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \delta$ olacak biçimde alınsın. Böylece, $k, m \geqslant N$ olduğunda $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_m)\| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı, yani $(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\mathbb{R}^m$ içinde bir Cauchy dizisi olduğu elde edilmiş olur. □

Açıklama 1.6.14. Lemma 1.6.13, Cauchy dizilerinin düzgün sürekli fonksiyonlarla yine Cauchy dizilerine gönderildiklerini gösterir. Aynı sonuç, genel olarak, sürekli fonksiyonlar için doğru değildir: $E := (0, 1]$ olmak üzere, $f(x) := 1/x$ olarak tanımlanan $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde sürekli ve $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi−Teorem 1.3.10 nedeniyle−E içinde bir Cauchy dizisi olmasına karşın, $(f(1/k))_{k\in\mathbb{N}} = (k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi−yine Teorem 1.3.10 nedeniyle−$\mathbb{R}$ içinde bir Cauchy dizisi değildir.

Artık, kompakt kümeler üzerinde tanımlı fonksiyonlar için düzgün sürekliliğin sürekliliğe ek bir bilgi getirmediğini−çünkü ona denk olduğunu−gösterebilecek durumdayız.

Teorem 1.6.15. *$H \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ olsun. $\mathbf{f}$ fonksiyonunun H üzerinde sürekli olması için, bu fonksiyonun H üzerinde düzgün sürekli olması gerekli ve yeterlidir.*

Kanıt. Açıklama 1.6.12, verilen koşulun $\mathbf{f}$ fonksiyonunun H üzerinde sürekli olması için yeterli olduğunu gösterir.

Tersine, $\mathbf{f}$ fonksiyonu bir kompakt $H \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde sürekli olsun. Bir çelişkiye ulaşmak amacıyla, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun H üzerinde düzgün sürekli olmadığı kabul edilsin. Bu durumda bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı, her $k \in \mathbb{N}$ için $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| < 1/k$ ve

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{y}_k)\| \geqslant \varepsilon_0 \tag{1.6.3}$$

koşullarını sağlayan $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in H$ noktaları var olacak biçimde bulunur. Heine-Borel Teoremi'nden, kompakt olan H kümesi dizisel kompakttır; yani $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin, $j \to \infty$ için $\mathbf{x}_{k_j} \to \mathbf{x} \in H$ gerçeklenecek biçimde bir $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ alt-dizisi vardır. Aynı nedenlerle $(\mathbf{y}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin, $\nu \to \infty$ için $\mathbf{y}_{k_{j_\nu}} \to \mathbf{y} \in H$ sağlanacak biçimde bir $(\mathbf{y}_{k_{j_\nu}})_{\nu\in\mathbb{N}}$ alt-dizisi bulunur. $(\mathbf{x}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt-dizisi olması sebebiyle $(\mathbf{x}_{k_{j_\nu}})_{\nu\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\nu \to \infty$ durumunda $\mathbf{x}_{k_{j_\nu}} \to \mathbf{x}$ gerçekleneceğinden ve $\mathbf{f}$ sürekli olduğundan, (1.6.3), Teorem 1.5.7, ve Teorem 1.5.9 kullanılarak, $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ olması gerektiği böylece görülür: yani, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{y})$ sonucuna ulaşılır. Ancak bu, her $k \in \mathbb{N}$ için geçerli olan $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| < 1/k$ eşitsizliğinden dolayı gerçeklenen $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, yani $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ durumuyla çelişir. O hâlde varsayım yanlış, yani $\mathbf{f}$ fonksiyonu H üzerinde düzgün süreklidir. $\square$

Problemler

1.

$$f(x,y) := \begin{cases} e^{-1/|x-y|}, & x \neq y \text{ ise;} \\ 0, & x = y \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ispatlayınız.

2. $r \in \mathbb{Q}$ ve $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ olduğunda $f(r,s) = 0$ olan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise, her $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x,y) = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

3. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ olsun. $\mathbf{f}$ fonksiyonunun E üzerinde sürekli olması için, $\mathbb{R}^m$ içinde kapalı olan her C kümesi için $\mathbf{f}^{-1}(C) \cap E$ kümesinin E içinde göreli kapalı olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

4. X ve Y Öklidyen uzaylar, $H \subseteq X$ kompakt bir küme, ve $\mathbf{f} : H \to Y$ bir sürekli fonksiyon olsun.

(a) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık,

$$H \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{\delta_j}(\mathbf{x}_j) \quad \text{ve} \quad \mathbf{f}\left(H \cap B_{2\delta_j}(\mathbf{x}_j)\right) \subseteq B_{\varepsilon/2}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_j))$$

sağlanacak biçimde $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N \in H$ noktalarının ve $\delta_1, \ldots, \delta_N$ pozitif gerçel sayılarının var olduğunu ispatlayınız.

(b) (a) kısmındaki sonucu kullanarak, Teorem 1.6.15 için başka bir kanıt veriniz.

5. X ve Y Öklidyen uzaylar, $H \subseteq X$, ve $\mathbf{f} : H \to Y$ fonksiyonu H üzerinde bire-bir olsun.

(a) Her $E \subseteq H$ için, $(\mathbf{f}^{-1})^{-1} = \mathbf{f}(E)$ olduğunu gösteriniz.

(b) Problem 3 ve (a) kısmındaki sonucu kullanarak, H kümesi kompakt ve $\mathbf{f}$ fonksiyonu H üzerinde sürekli ve bire-bir ise, $\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyonunun $\mathbf{f}(H)$ üzerinde sürekli olduğunu ispatlayınız.

6. (a) $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_\infty \leqslant 3\}$ ise, $\|\mathbf{a}\| = \min\{\|\mathbf{x}\| \mid \mathbf{x} \in U\}$ gerçeklenecek biçimde bir $\mathbf{a} \in U$ noktasının var olduğunu gösteriniz.

(b) X ve Y Öklidyen uzaylar ve $\mathbf{f} : X \to Y$ bir lineer fonksiyon olsun. Bir $\mathbf{e} \in X$ birim vektörünün, X içindeki her $\mathbf{x}$ birim vektörü için $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{f}(\mathbf{e})\|$ gerçeklenecek biçimde var olduğunu ispatlayınız.

7. (a) Her $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$ noktası için bir $\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonunun, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{f}(1) = \mathbf{b}$, ve her $t \in [0,1]$ için $\mathbf{f}(t) \in S$ gerçeklenecek biçimde bulunabildiği bir $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi, ***yay-bağlantılı*** olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^n$ uzayının yay-bağlantılı bir alt-kümesinin bağlantılı olduğunu ispatlayınız.

(b) $\mathbb{R}^2$ uzayının, $(1,3)$ ve $(4,-1)$ noktalarını içeren bağlantılı bir alt-kümesi S olsun. S kümesinin $x = y$ doğrusu üzerinde bulunan bir nokta içerdiğini gösteriniz.

8. (a) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. E kümesinin herhangi iki noktası birbirine çokgensel bir yolla bağlanabiliyorsa, yani her $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ için sonlu sayıda $\mathbf{x}_k \in E$ $(k = 1, \ldots, N)$ noktaları, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$, ve $k = 1, \ldots, N$ için $L(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{x}_k) \subseteq E$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, E kümesi ***çokgensel bağlantılı*** olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^n$ içindeki her çokgensel bağlantılı kümenin bağlantılı olduğunu ispatlayınız.

(b) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi açık ve bağlantılı, ve $\mathbf{x}_0 \in E$ olsun. U, E içinde kalan çokgensel bir yolla $\mathbf{x}_0$ noktasına bağlanabilen $\mathbf{x} \in E$ noktalarından oluşan küme ise, U kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

(c) $\mathbb{R}^n$ içindeki açık ve bağlantılı her kümenin çokgensel bağlantılı olduğunu kanıtlayınız.

9. H, Öklidyen bir uzayın boş-olmayan ve kompakt bir alt-kümesi olsun.

(a) $\mathbf{f} : H \to \mathbb{R}^m$ sürekli ise,

$$\|\mathbf{f}\|_\infty := \sup_{\mathbf{x} \in H} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$$

büyüklüğünün sonlu olduğunu, ve bir $\mathbf{x}_0 \in H$ noktasının $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{f}\|_\infty$ eşitliği gerçeklenecek biçimde var olduğunu gösteriniz.

(b) Her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{f}_k : H \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonlarından oluşan bir $(\mathbf{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi ve bir $\mathbf{f} : H \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu için, eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı, $k \geqslant N$ ve $\mathbf{x} \in H$ olması $\|\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})\| < \varepsilon$ olmasını gerektirecek biçimde bulunabiliyorsa, "$(\mathbf{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin $\mathbf{f}$ fonksiyonuna H üzerinde ***düzgün yakınsadığı***," söylenir. $(\mathbf{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin $\mathbf{f}$ fonksiyonuna H üzerinde düzgün yakınsaması için, $\mathbb{R}$ içinde $\|\mathbf{f}_k - \mathbf{f}\|_\infty \to 0$ olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

(c) Bir $(\mathbf{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin $\mathbf{f}$ fonksiyonuna H üzerinde düzgün yakınsaması için gerekli ve yeterli koşulun, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N \in \mathbb{N}$ sayısının, $k, m \geqslant N$ olması $\|\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_m\|_\infty < \varepsilon$ olmasını gerektirecek biçimde bulunabilmesi olduğunu ispatlayınız.

10. X bir Öklidyen uzay olsun.

(a) $a \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{b} \in X$ olmak üzere, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := a\mathbf{x} + \mathbf{b}$ olarak tanımlanan $\mathbf{f} : X \to X$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

(b) Her $\mathbf{x} \in X$ için $g(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_\infty$ olarak tanımlanan $g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu kanıtlayınız.

(c) $M \subseteq X$ boş küme değilse, her $\mathbf{x} \in X$ için

$$d(\mathbf{x}) := \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| \mid \mathbf{m} \in M\}$$

olarak tanımlanan $d : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz, ve bu fonksiyonun hangi koşullar altında düzgün sürekli olduğunu belirleyiniz.

2 $\mathbb{R}^n$ üzerinde diferansiyellenebilme

Çok-değişkenli fonksiyonlar için diferansiyellenebilme kavramı, boyutu birden büyük olan Öklidyen uzayların topolojik yapılarının gerçel sayılarınkinden farklı olmasından dolayı, tek-değişkenli fonksiyonlar için türevin var olmasına denk olan aynı kavrama nazaran ciddî farklılıklar arzeder. Bu farklılıkları belirlemek ve tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan temel sonuçların çok-değişkenli fonksiyonlar için benzerlerini elde etmek, bu bölümün başlıca uğraş konusunu oluşturacaktır.

2.1 Kısmî türevler ve integraller

Değişken sayısı birden fazla olan fonksiyonlar için türev ve integral kavramlarını tanımlamanın ilk akla gelen ve en doğal olan yolu, değişkenlerin her birini bağımsız olarak hareket ettirerek ilgili yapıları tek-değişkenli teorinin standart araçları vâsıtasıyla kurmaktır. Bu şekilde elde edilecek nesnelerin$-$yani, *kısmî türevler*in ve *kısmî integraller*in$-$ve limit alma işleminin değişmeli olacağı koşulları belirlemek, bu kısmın ana gâyesidir.

Hiçbiri boş küme olmayan sonlu sayıda bir $E_1, E_2, \ldots, E_n$ kümeler ailesinin ***kartezyen çarpım***ı,

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid j = 1, 2, \ldots, n \text{ için } x_j \in E_j\}$$

olarak tanımlanan kümedir. $\mathbb{R}$ kümesinin n tane alt-kümesinin kartezyen çarpımı, o hâlde, $\mathbb{R}^n$ kümesinin bir alt-kümesi olur. n tane kapalı ve sınırlı aralığın kartezyen çarpımı, $\mathbb{R}^n$ *içinde* bir ***dikdörtgen***, ya da bir n***-boyutlu dikdörtgen*** olarak adlandırılır. Eğer her $j = 1, \ldots, n$ için $|b_j - a_j| =: s$ ise, n-boyutlu $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ dikdörtgenine *ayrıt uzunluğu s olan* bir n***-boyutlu küp*** denir.

Gerçel-değerli $f : \{x_1\} \times \cdots \times \{x_{j-1}\} \times [a, b] \times \{x_{j-1}\} \times \cdots \times \{x_n\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Her $t \in [a, b]$ için

$$g(t) := f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

şeklinde tanımlanan *tek-değişkenli* fonksiyon $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ olarak gösterilecektir. Eğer g fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebiliyorsa, f fonksiyonunun x_j değişkenine göre $[a, b]$ aralığı üzerindeki ***kısmî integral***i

$$\int_a^b f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_j := \int_a^b g(t)\, dt$$

olarak tanımlanır. Eğer g fonksiyonu bir $t_0 \in (a, b)$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa, f fonksiyonunun x_j değişkenine göre $(x_1, \ldots, x_{j-1}, t_0, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ noktasındaki ***kısmî türev***i (ya da ***birinci-mertebeden kısmî türev***i)

$$f_{x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, t_0, x_{j+1}, \ldots, x_n) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, t_0, x_{j+1}, \ldots, x_n) := g'(t_0)$$

biçiminde verilir. Dolayısıyla, kısmî türev tanımı tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan türev tanımıyla birlikte düşünülürse, f_{x_j} kısmî türevinin bir $\mathbf{a}$ noktasında var olması için,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{h}$$

limitinin varlığının gerekli ve yeterli olduğu görülür.

Gerçel-değerli fonksiyonlar için yapılan kısmî türev tanımı, çok-değerli fonksiyonlara doğal olarak genişletilebilir: eğer $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, ve $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_m) : V \to \mathbb{R}^m$ bir çok-değerli fonksiyon ise, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun her bileşen fonksiyonunun x_j değişkenine göre $\mathbf{a} \in V$ noktasındaki kısmî türevleri var olduğunda,

$$\mathbf{f}_{x_j}(\mathbf{a}) := \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)$$

olarak tanımlanan çok-değerli fonksiyona $\mathbf{f}$ çok-değerli fonksiyonunun x_j değişkenine göre ***birinci-mertebeden kısmî türev***i denir. Yüksek-mertebeli kısmî türevler, gerçel- ya da çok-değerli fonksiyonlar için, iterasyon yoluyla doğal olarak tanımlanır: örneğin, gerçel-değerli f fonksiyonunun x_j ve x_k değişkenlerine göre ***ikinci-mertebeden kısmî türev***i

$$f_{x_j x_k} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \tag{2.1.1}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyondur; benzer olarak, $p_1, \dots, p_n$ negatif-olmayan tam sayılar, $p := p_1 + \cdots + p_n$, ve $i_1, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere, gerçel-değerli f fonksiyonunun ***p'inci-mertebeden kısmî türev***lerini gösteren

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}$$

sembollerinin anlamları açıktır. $j \neq k$ olduğunda, (2.1.1) ile verilen ikinci-mertebeden kısmî türevler ***karışık*** olarak adlandırılır.

Şimdiye dek elde edilenler, aşağıdaki önemli fonksiyon ailelerinin tanımlanmasına olanak sağlar.

Tanım 2.1.1. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon, ve $p \in \mathbb{N}$ olsun.

(i) $1 \leqslant k \leqslant p$ olmak üzere, eğer her k için $\mathbf{f}$ fonksiyonunun k'ıncı-mertebeden kısmî türevleri varsa ve V üzerinde sürekli ise, $\mathbf{f}$ fonksiyonuna "V üzerinde ***$\mathcal{C}^p$-sınıfından***dır," denir, ve bu tip fonksiyonların ailesi için $\mathcal{C}^p(V)$ yazılımı kullanılır. V üzerinde sürekli olan fonksiyonların ailesi $\mathcal{C}(V)$ ile gösterilir.

(ii) Her $p \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^p(V)$ ise, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun "V üzerinde ***$\mathcal{C}^\infty$-sınıfından*** olduğu," söylenir, ve bu tip fonksiyonların ailesi $\mathcal{C}^\infty(V)$ olarak gösterilir.

Yazılımda kolaylık sağlamak amacıyla, bu kısmın kalan parçasındaki sonuçlar $n = 2$ durumu için verilecek, ve x_1 ve x_2 değişkenleri yerine, sırasıyla, x ve y yazılacakır. Notasyonda gerekli değişiklikleri yaparak ilgili sonuçların her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduklarını gözlemlemek oldukça kolaydır.

Kısmî türev ve kısmî integral kavramları temel olarak 'bir-boyutlu' fikirler olduklarından, tek-değişkenli fonksiyonların türevleri ve integralleriyle ilgili her sonuç, kısmî türevler ve kısmî integraller hakkında bilgi içerir. Tipik bir örnek, tek-değişkenli fonksiyonların türevleri için geçerli olan Çarpım Kuralı[1] nedeniyle, f_x ve g_x var olduklarında,

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}$$

eşitliğinin gerçeklenmesidir. Benzer biçimde, tek-değişkenli Ortalama Değer Teoremi[2] kullanılarak, $f(\cdot, y)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve $f_x(\cdot, y)$

[1] Bkz. [17, Theorem 2.13].
[2] Bkz. [17, Theorem 2.16].

kısmî türevi (a,b) aralığı üzerinde var olduğunda, y değerine bağlı olan bir $c \in (a,b)$ sayısının

$$f(b,y) - f(a,y) = (b-a)\frac{\partial f}{\partial x}(c,y)$$

sağlanacak biçimde bulunabileceği görülür. Diğer taraftan İntegral Hesabın Temel Teoremi,[3] $f(\cdot,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ise

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(t,y)\,dt = f(x,y)$$

eşitliğinin doğru olacağını; aynı zamanda da $f_x(\cdot,y)$ kısmî türevi $[a,b]$ aralığı üzerinde varsa ve bu aralık üzerinde integrallenebiliyorsa

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = f(b,y) - f(a,y)$$

eşitliğinin sağlanacağını bildirir.

İlk olarak, karışık kısmî türevlerin hangi koşullar altında eşit olduklarını görelim.

Teorem 2.1.2. *$V \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık küme, $(a,b) \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer f fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından ise ve f fonksiyonunun karışık kısmî türevlerinden biri V üzerinde varsa ve (a,b) noktasında sürekli oluyorsa, bu durumda f fonksiyonunun diğer karışık kısmî türevi de (a,b) noktasında vardır, ve*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. f_{yx} kısmî türevi V üzerinde var ve (a,b) noktasında sürekli olsun. Bir $r > 0$ sayısı $B_r((a,b)) \subseteq V$ gerçeklenecek biçimde alınsın, ve $|h| < r/\sqrt{2}$ ve $|k| < r/\sqrt{2}$ için

$$\Delta(h,k) := f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)$$

olarak tanımlansın. Ortalama Değer Teoremi iki kere kullanıldığında,

$$\Delta(h,k) = k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+\eta k) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+\eta k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\vartheta h,b+\eta k)$$

[3] Bkz. [17, Theorem 3.13].

eşitliği sağlanacak biçimde $\vartheta, \eta \in (0,1)$ sayılarının var oldukları görülür; bu ise, son eşitlikteki karışık kısmî türev fonksiyonunun (a,b) noktasında sürekli olmasından dolayı,

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) \tag{2.1.2}$$

olması demektir. Diğer taraftan, yine Ortalama Değer Teoremi'nden dolayı bir $\xi \in (0,1)$ sayısı,

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= f(a+h,b+k) - f(a,b+k) - f(a+h,b) + f(a,b)\\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a+\xi h, b+k) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a+\xi h, b)\end{aligned}$$

gerçeklenecek biçimde vardır. Böylece, (2.1.2) nedeniyle,

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\xi h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\xi h, b)\right)\\ &\qquad = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\end{aligned}$$

olduğu görülür. f_x fonksiyonunun $B_r((a,b))$ üzerinde sürekli olması nedeniyle yukarıdaki ilk eşitlikte $h=0$ alınabileceğinden, o hâlde,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)$$

sonucuna ulaşılır. □

Açıklama 2.1.3. Teorem 2.1.2, verilen koşullar altında birinci-mertebeden kısmî türevlerin *değişmeli* olduklarını söyler. Aşağıdaki örnek, teoremin hipotezindeki ikinci-mertebeden kısmî türevin sürekli olması koşulunun genel olarak kaldırılamayacağını gösterir.

Örnek 2.1.4. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq \mathbf{0} \text{ ise;}\\ 0, & (x,y) = \mathbf{0} \text{ ise;}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Türev kuralları kullanılarak, her $(x,y) \neq (0,0)$ için,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= xy\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(xy)\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\\ &= xy\left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xy\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\\ &= -xy\left(\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right) + x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür. $2|xy| \leqslant x^2+y^2$ olduğundan, o hâlde, her $(x,y) \neq (0,0)$ için $|f_x(x,y)| \leqslant 2|y|$ ve $|f_y(x,y)| \leqslant 2|x|$ gerçeklenir; bu ise, $(x,y) \to (0,0)$ için, $f_x(x,y) \to 0$ ve $f_y(x,y) \to 0$ olması demektir. Diğer taraftan, kısmî türev tanımı kullanılarak,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

elde edilir. O hâlde, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ gerçeklenir. Öte yandan, yine kısmî türev tanımı kullanılırsa,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h} = -1$$

ve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$$

olduğu görülür.

Kısmî integral ve limit işlemleri, integrand bir dikdörtgen üzerinde sürekliyse, değişmelidir.

Teorem 2.1.5. *$H := [a,b] \times [c,d]$ bir dikdörtgen ve $f : H \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun. Eğer $F(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$ ise, F fonksiyonu $[c,d]$ aralığı üze-*

rinde süreklidir; yani,

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in[c,d]}} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in[c,d]}} f(x,y)\,dx$$

eşitliği her $y_0 \in [c,d]$ için gerçeklenir.

Kanıt. Kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli olan tek-değişkenli bir fonksiyon bu aralık üzerinde integrallenebildiğinden[4] ve her $y \in [c,d]$ için $f(\cdot,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğundan, her $y \in [c,d]$ için $F(y)$ vardır.

$y_0 \in [c,d]$ noktası sabitlensin ve $\varepsilon > 0$ alınsın. Heine-Borel Teoremi'nden dolayı H kompakt olduğundan, Teorem 1.6.15 kullanılarak bir $\delta > 0$ sayısının, $(x,y),(z,w) \in H$ ve $\|(x,y)-(z,w)\| < \delta$ olduğunda

$$|f(x,y)-f(z,w)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

sağlanacak biçimde var olduğu görülür. Bu ise, $|y-y_0| = \|(x,y)-(x,y_0)\|$ olmasından dolayı, $|y-y_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $y \in [c,d]$ için

$$|F(y)-F(y_0)| \leqslant \int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)| < \varepsilon$$

olması demektir. O hâlde, $[c,d]$ üzerinden $y \to y_0$ için $F(y) \to F(y_0)$ gerçeklenir. □

Kısmî türev fonksiyonu bir dikdörtgen üzerinde sürekli olduğunda, türev ve integral işlemleri de değişmelidir. ***İntegral işareti altında türev*** işlemi olarak adlandırılan bu önemli sonuç, aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 2.1.6. *$H := [a,b]\times[c,d]$ bir dikdörtgen ve $f : H \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $y \in [c,d]$ için $f(\cdot,y)$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olduğu, ve her $x \in [a,b]$ için $f_y(x,\cdot)$ kısmî türevinin $[c,d]$ üzerinde var olduğu kabul edilsin. Eğer $f_y(x,y)$ fonksiyonu H üzerinde sürekli ise, bu durumda her $y \in [c,d]$ için*

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

eşitliği sağlanır.

[4]Bkz. [17, Theorem 3.1].

Kanıt. $f_y(x,\cdot)$ kısmî türevinin $[c,d]$ üzerinde var olması, aynı kısmî türevin (c,d) üzerinde var olması ve

$$f_y(x,c) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x,c+h)-f(x,c)}{h}, \quad f_y(x,d) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x,d+h)-f(x,d)}{h}$$

limitlerinin var olmaları anlamına geldiğinden, istenen, her $y \in [c,d)$ için

$$\lim_{h\to 0^+} \int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

eşitliğinin, ve her $y \in (c,d]$ için

$$\lim_{h\to 0^-} \int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

eşitliğinin sağlandığı görülürse kanıtlanmış olur. Kanıtları benzer olduğundan, sadece ilk eşitliğin sağlandığını göstereceğiz.

$x \in [a,b]$ ve $y \in [c,d)$ noktaları sabitlensin ve $h > 0$ sayısı, $y+h \in [c,d)$ olacak biçimde seçilsin. Ortalama Değer Teoremi'nden dolayı y ve $y+h$ noktaları arasında bulunan bir $z(x;h)$ noktası,

$$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,z(x;h))$$

gerçeklenecek biçimde vardır; bu ise, $h \to 0^+$ için $z(x;h) \to y$ olduğundan, Teorem 2.1.5'den,

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{h\to 0^+} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,z(x;h))\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

olması demektir. □

Tanım 2.1.7. $a < b$ genişletilmiş gerçel sayılar, I gerçel sayılar içinde bir aralık, ve $f : (a,b) \times I \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $y \in I$ için $f(\cdot,y)$ fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde genelleştirilmiş-integrallenebiliyorsa,[5] ve her $\varepsilon > 0$ için $A, B \in (a,b)$

[5]Sınırlı olması *gerekmeyen* bir (a,b) aralığı üzerinde tanımlı bir $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, (a,b) aralığının her $[c,d]$ kapalı alt-aralığı üzerinde integrallenebiliyorsa, (a,b) üzerinde ***lokal-integrallenebilir*** denir. Eğer f fonksiyonu (a,b) üzerinde lokal-integrallenebiliyorsa ve

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to a^+}\left(\lim_{d\to b^-}\int_c^d f(x)\,dx\right)$$

olarak gösterilen limit var ve sonlu ise, f fonksiyonu (a,b) üzerinde ***genelleştirilmiş-integrallenebilir*** olarak adlandırılır. Bu durumda $\int_a^b f(x)\,dx$ limitine, f fonksiyonunun (a,b) üzerindeki ***genelleştirilmiş integral***i denir.

gerçel sayıları

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$$

eşitsizliği her $\alpha \in (a,A)$, $\beta \in (B,b)$, ve $y \in I$ için sağlanacak biçimde bulunabiliyorsa,

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

genelleştirilmiş integraline I üzerinde ***düzgün yakınsak*** denir.

Aşağıdaki sonuç, genelleştirilmiş integrallerin düzgün yakınsak olup olmadıklarını belirlemek için oldukça kullanışlıdır.

Teorem 2.1.8 (Weierstrass M-testi)**.** *$a < b$ genişletilmiş gerçel sayılar, $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $f : (a,b) \times I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, ve her $y \in I$ için $f(\cdot,y)$ fonksiyonu (a,b) üzerinde lokal-integrallenebilir*[6] *olsun. Eğer (a,b) üzerinde mutlak-integrallenebilir*[7] *olan ve her $x \in (a,b)$ ve $y \in I$ için $|f(x,y)| \leqslant M(x)$ koşulunu sağlayan bir $M : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa, o zaman*

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

genelleştirilmiş integrali I üzerinde düzgün yakınsaktır.

Kanıt. Hipotez ve genelleştirilmiş integraller için Karşılaştırma Teoremi[8] göz önüne alınırsa, $\int_a^b f(x,y)\,dx$ integralinin her $y \in I$ için var ve sonlu olduğu görülür. Ayrıca, M fonksiyonu (a,b) üzerinde genelleştirilmiş integrallenebilir olduğundan, $a < A < B < b$ ve

$$\int_a^A M(x)\,dx + \int_B^b M(x)\,dx < \varepsilon$$

gerçeklenecek biçimde A ve B gerçel sayıları bulunur. O hâlde, her $y \in I$ ve $a < \alpha < A < B < \beta < b$ koşulunu sağlayan her α ve β sayısı için,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right| &\leqslant \int_a^\alpha |f(x,y)|\,dx + \int_\beta^b |f(x,y)|\,dx \\ &\leqslant \int_a^A M(x)\,dx + \int_B^b M(x)\,dx < \varepsilon\end{aligned}$$

---

[6]Bkz. Dipnot 5.

[7]Sınırlı olması *gerekmeyen* bir (a,b) aralığı üzerinde tanımlı ve bu aralık üzerinde lokal-integrallenebilir olan bir $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, eğer $|f|$ fonksiyonu (a,b) üzerinde genelleştirilmiş-integrallenebiliyorsa, (a,b) üzerinde ***mutlak-integrallenebilir*** adını alır.

[8]Bkz. [17, Theorem 3.17].

olur. □

Genelleştirilmiş integraller için, Teorem 2.1.5'dekine benzer bir sonuç doğrudur.

Teorem 2.1.9. *$a < b$ genişletilmiş gerçel sayılar, $c < d$ sonlu gerçel sayılar, ve $f : (a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer $F(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$ integrali $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsak ise, F fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde süreklidir; yani,*

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in [c,d]}} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in [c,d]}} f(x,y)\,dx$$

eşitliği her $y_0 \in [c,d]$ için gerçeklenir.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ ve $y_0 \in [c,d]$ sabitlensin. $a < A < B < b$ koşulunu sağlayan A ve B gerçel sayıları, her $y \in [c,d]$ için

$$\left| F(y) - \int_A^B f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gerçeklenecek biçimde seçilsin. Teorem 2.1.5 kullanıldığında bir $\delta > 0$ sayısının, $|y - y_0| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $y \in [c,d]$ için

$$\int_A^B |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde var olduğu görülür. Bu ise, $|y - y_0| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $y \in [c,d]$ için

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &\leqslant \left| F(y) - \int_A^B f(x,y)\,dx \right| + \left| \int_A^B (f(x,y) - f(x,y_0))\,dx \right| \\ &\quad + \left| F(y_0) - \int_A^B f(x,y_0)\,dx \right| \\ &\leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \int_A^B |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx < \varepsilon \end{aligned}$$

olması demektir. □

Teorem 2.1.6 ile verilen ve kısmî türev ve integralin değişmeli olduğu durumları sabitleyen sonuç, genelleştirilmiş integraller için de—aşağıdaki koşullar altında—geçerlidir.

Teorem 2.1.10. *$a < b$ genişletilmiş gerçel sayılar, $c < d$ sonlu gerçel sayılar, $f : (a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ sürekli, ve her $y \in [c,d]$ için $F(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$ genelleştirilmiş integrali var olsun. Eğer $f_y(x,y)$ fonksiyonu $(a,b) \times [c,d]$ üzerinde var ve sürekli ise, ve*

$$\phi(y) := \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

genelleştirilmiş integrali $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsak oluyorsa, o zaman F fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde diferansiyellenebilirdir ve $F'(y) = \phi(y)$ gerçeklenir; yani, her $y \in [c,d]$ için

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Genelleştirilmiş integral tanımı ve Teorem 2.1.6'nın sonucudur. □

Problemler

1. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci-mertebeden tüm karışık kısmî türevlerini hesaplayınız, ve bu türevlerin eşit olduklarını belirleyiniz:

   (a) $f(x,y) := xe^y$; (b) $g(x,y) := \cos(xy)$; (c) $h(x,y) := \dfrac{x+y}{x^2+1}$.

2. Aşağıdaki fonksiyonların birinci-mertebeden tüm kısmî türevlerini hesaplayınız, ve bu türevlerin sürekli oldukları bölgeleri belirleyiniz:

   (a) $f(x,y) := x^2 + \sin(xy)$; (b) $g(x,y,z) := \dfrac{xy}{1+z}$; (c) $h(x,y) := \sqrt{}(x^2+y^2)$.

3. Aşağıdaki fonksiyonlar için f_x kısmî türevini hesaplayınız, ve bu türevin sürekliliğini inceleyiniz:

   (a) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise;} \end{cases}$

   (b) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{}[3](x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise.} \end{cases}$

4. $\mathbb{R}^n$ içindeki her dikdörtgenin kompakt olduğunu ispatlayınız.

5. $H := [a,b] \times [c,d]$ bir dikdörtgen, $f : H \to \mathbb{R}$ sürekli, ve $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir olsun.

   $$F(y) := \int_a^b g(x) f(x,y)\,dx$$

   olarak tanımlanan F fonksiyonunun $[c,d]$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

6. (a)

$$\int_0^1 \frac{\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x}}\,dx$$

integralinin $(-\infty,\infty)$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu kanıtlayınız.

(b) $\int_0^\infty e^{-xy}\,dx$ integralinin $[1,\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu ispatlayınız.

(c) $\int_0^\infty ye^{-xy}\,dx$ integralinin; her $y\in[0,\infty)$ için var olduğunu, her $[a,b]\subset(0,\infty)$ aralığı üzerinde düzgün yakınsadığını, fakat $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

7. Aşağıdakileri hesaplayınız:

(a) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\int_0^1 \cos(x^2y+xy^2)\,dx;$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dy}\left(\int_{-1}^1 \sqrt{(x^2y^2+xy+y+2)}\,dx\right)\Big|_{y=0};$

(c) $\displaystyle\lim_{y\to 0+}\int_0^1 \frac{x\cos y}{\sqrt{[3]}(1-x+y)}\,dx;$ (d) $\displaystyle\frac{d}{dy}\left(\int_\pi^\infty \frac{e^{-xy}\sin x}{x}\,dx\right)\Big|_{y=1}.$

Tanım 2.1.11. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, eğer

$$\mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

integrali yakınsaksa, "f fonksiyonunun $s\in(0,\infty)$ noktasındaki ***Laplace dönüşümü*** vardır," denir.

8. Aşağıdakileri gösteriniz:

(a) Her $s>0$ için, $\mathcal{L}\{\mathbf{1}\}(s)=1/s;$

(b) her $s>0$ ve $n\in\mathbb{N}$ için, $\mathcal{L}\{t^n\}(s)=n!/s^{n+1};$

(c) $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere, her $s>a$ için, $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s)=1/(s-a);$

(d) her $s>0$ ve $b\in\mathbb{R}$ için, $\mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s)=s/(s^2+b^2);$

(e) her $s>0$ ve $b\in\mathbb{R}$ için, $\mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s)=b/(s^2+b^2).$

9. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olarak alınsın, ve *bir* $a\in(0,\infty)$ *için* $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace dönüşümü var olsun. Her $t\in(0,\infty)$ için,

$$\phi(t) := \int_0^t e^{-au}f(u)\,du$$

olarak tanımlansın.

(a) Her $N\in\mathbb{N}$ için

$$\int_0^N e^{-st}f(t)\,dt = \phi(N)e^{-(s-a)N} + (s-a)\int_0^N e^{-(s-a)t}\phi(t)\,dt$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Her $b > a$ için $\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\phi(t)\,dt$ integralinin $[b,\infty)$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu, ve her $s > a$ için

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = (s-a)\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\phi(t)\,dt$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

(c) $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace dönüşümünün var olduğunu, (a,∞) aralığı üzerinde sürekli olduğunu, ve

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f\}(s) = 0$$

olduğunu ispatlayınız.

(d) Her $t \in (0,\infty)$ için, $g(t) := tf(t)$ olsun. $\mathcal{L}\{f\}$ fonksiyonunun (a,∞) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir olduğunu, ve

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f\}(s) = -\mathcal{L}\{g\}(s)$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

(e) Eğer, verilen koşullara ek olarak, f' fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve sınırlı ise, her $s \in (a,\infty)$ için

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlayınız.

10. Problem 8 ve Problem 9'daki sonuçları kullanarak, $t \mapsto te^t$, $t \mapsto t\sin(\pi t)$, ve $t \mapsto t^2\cos t$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini bulunuz.

2.2 Diferansiyellenebilme

Tek-değişkenli fonksiyonlar için türevin varlığına denk olan diferansiyellenebilme kavramıyla lineer fonksiyonlar arasındaki yakın ilişki (bkz. Problem 2), çok-değişkenli fonksiyonlar için aşağıdaki tanıma yol açar.

Tanım 2.2.1. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0} \tag{2.2.1}$$

gerçeklenecek biçimde bir *lineer* $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu varsa, "$\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında ***diferansiyellenebilir*** olduğu," söylenir; bu durumda $T_{\mathbf{a}}$ lineer fonksiyonuna, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki ***tam türev***i ya da ***Fréchet türevi*** denir.

Açıklama 2.2.2. Eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa, bu durumda (2.2.1) eşitliğini sağlayan $T_{\mathbf{a}}$ lineer fonksiyonu tek türlü belirlidir:

Gerçekten, eğer bir $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer fonksiyonu $T_{\mathbf{a}}$ yerine konulduğunda (2.2.1) eşitliğini sağlıyorsa, öncelikle, bu iki fonksiyon da lineer olduklarından, $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = T_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gerçeklenir. Diğer taraftan, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olduğunda $u > 0$ için $\mathbf{h} = u\mathbf{x}$ yazılarak $u \to 0^+$ için $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ olduğu gözlemlenirse, her iki fonksiyonun da lineer oldukları ve (2.2.1) eşitliğini sağladıkları kullanılarak, $u \to 0^+$ için

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} &= \frac{u\mathbf{F}(\mathbf{x}) - uT_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})}{u\|\mathbf{x}\|} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{h}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) + \mathbf{f}(\mathbf{a})}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to \mathbf{0}\end{aligned}$$

olduğu görülür; yani, her $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ için $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ olur. O hâlde, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\mathbf{F} = T_{\mathbf{a}}$ olmalıdır.

Tam türev $\mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}^m$ uzayına tanımlı bir lineer fonksiyon olduğundan, Teorem 1.1.9 kullanılarak bu fonksiyon için bir matris gösterilişi elde edilebilir.

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $\mathbf{a} \in V$ olsun. $\mathbf{a}$ noktasındaki birinci-mertebeden kısmî türevleri var olan her $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_m) : V \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu için,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) := \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan $(m \times n)$-boyutlu matrise, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki ***Jacobi matrisi*** denir. Eğer $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ ise, ilgili birinci-mertebeden kısmî türevler var olduklarında,

$$\frac{\partial(f_{k_1}, \ldots, f_{k_n})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} := \det\left[\frac{\partial f_{k_i}}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right]_{n\times n} = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{k_1}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_{k_1}}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_{k_n}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_{k_n}}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

yazılımı kullanılır. $m = n$ olduğunda elde edilen

$$\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) := \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det D\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

değerine, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki ***Jacobi determinantı*** denir.

Jacobi matrisinin önemi, $\mathbf{f}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğunda, bu fonksiyonun tam türevinin temsil eden matris olmasıdır.

Teorem 2.2.3. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa, bu durumda $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki birinci-mertebeden kısmî türevleri vardır ve $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki tam türevi $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ olur; yani, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki tam türevi $T_{\mathbf{a}}$ ise ve B matrisi $T_{\mathbf{a}}$ lineer fonksiyonunu temsil ediyorsa, $B = D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ gerçeklenir.*

Kanıt. $B := [b_{ij}]_{m\times n}$ matrisi $T_{\mathbf{a}}$ lineer fonksiyonunu temsil ettiğinden, Teorem 1.1.9 nedeniyle, her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_j) = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj})$ gerçeklenir. $1 \leqslant j \leqslant n$ sayısı sabitlenerek $u > 0$ için $\mathbf{h} = u\mathbf{e}_j$ denirse,

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+u\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{u} - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_j)$$

olduğu görülür. $u \to 0^+$ için limite geçilip (2.2.1) eşitliği kullanılarak da,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+u\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{u} = T_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_j) = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj})$$

olarak elde edilir. Benzer argümanlar, yukarıdaki ilk eşitliğin solundaki oranın $u \to 0^-$ için limitinin de var ve $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj})$ vektörüne eşit olduğunu gösterir. Bu ise, Teorem 1.5.8 sebebiyle, her $i = 1, 2, \ldots, m$ için, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun her f_i bileşen fonksiyonunun x_j değişkenine göre $\mathbf{a}$ noktasındaki kısmî türevinin var olması ve

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = b_{ij}$$

eşitliğinin sağlanması anlamına gelir. O hâlde, $B = D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ gerçeklenir. □

Açıklama 2.2.4. Teorem 2.2.3, $T_{\mathbf{a}}$ lineer fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerine

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})$$

olarak etki ettiğini gösterir; söz konusu eşitliğin sağı, $(m \times n)$-boyutlu $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ matrisiyle $(n \times 1)$-boyutlu $[\mathbf{h}]$ matrisinin çarpımdan oluşan ifadedir. Dolayısıyla, Teorem 2.2.3 ve Açıklama 2.2.2 birlikte düşünülürse, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon, ve B matrisi

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - B\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

eşitliğini sağlayan $(m \times n)$-boyutlu bir matris olduğunda, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir olduğu ve $B = D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ olması gerektiği görülür. Notasyon zorlanarak, $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ sembolü hem Jacobi matrisinin hem de $T_{\mathbf{a}}$ tam türevinin yerine kullanılacaktır.

$n = 1$ ya da $m = 1$ olduğunda, Jacobi matrisi, sırasıyla, $(m \times 1)$- ya da $(1 \times n)$-boyutlu bir matristir: bundan dolayı bir vektörle eş olarak görülebilir. Eğer $n = 1$ ise,

$$D\mathbf{f}(a) = \begin{bmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{bmatrix}$$

matrisiyle eşlenen vektör

$$\mathbf{f}'(a) := (f_1'(a), \ldots, f_m'(a))$$

olarak gösterilir. $m = 1$ (yani, ilgili fonksiyon gerçel-değerli) olduğunda

$$Df(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

matrisiyle eşlenen

$$\nabla f(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

vektörüne, f fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki ***gradyant***ı denir.

Bir-boyutlu durumdakine benzer biçimde, diferansiyellenebilme sürekli olmaktan daha kuvvetlidir.

Teorem 2.2.5. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa, $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında süreklidir.*

Kanıt. (2.2.1) eşitliği ve Teorem 2.2.3'den dolayı bir $\delta > 0$ sayısı, $\|\mathbf{h}\| < \delta$ olduğunda

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| < \|\mathbf{h}\|$$

gerçeklenecek biçimde vardır; bu ise, üçgen eşitsizliği ve Teorem 1.1.12 nedeniyle,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leqslant \|D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| + \|\mathbf{h}\| \leqslant \left(\sqrt{(mn)}\, \|D\mathbf{f}(\mathbf{a})\|_\infty + 1\right) \|\mathbf{h}\|$$

olması demektir. Dolayısıyla, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \to \mathbf{f}(\mathbf{a})$ gerçeklenir: $\mathbf{f}$ fonksiyonu, o hâlde, $\mathbf{a}$ noktasında süreklidir. □

Açıklama 2.2.6. Teorem 2.2.3, diferansiyellenebilir bir fonksiyonun ilgili noktadaki birinci-mertebeden kısmî türevlerinin var olduklarını gösterir; bu önermenin tersi ise−çok-değişkenli fonksiyonlarla tek-değişkenli fonksiyonlar arasındaki temel farklardan birisi olarak−, aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi, genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.2.7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) := \begin{cases} x+y, & x=0 \text{ veya } y=0 \text{ ise;} \\ 1, & \text{diğer durumlarda;} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

olduğundan, f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli olmaz; dolayısıyla, Teorem 2.2.5 nedeniyle, aynı noktada diferansiyellenebilir de değildir. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

olduğundan, f fonksiyonunun birinci-mertebeden kısmî türevleri $(0,0)$ noktasında mevcuttur.

Açıklama 2.2.8. Örnek 2.2.7'deki f fonksiyonunun sürekli olmadığı için orijinde diferansiyellenebilir olmaması, akla, bir noktada sürekli olan ve aynı noktada birinci-mertebeden kısmî türevleri var olan bir fonksiyonun söz konusu noktada diferansiyellenebilir olup olmayacağı sorusunu getirir. Bu sorunun cevabı da, aşağıdaki örnek vâsıtasıyla görülebileceği gibi, olumlu *değildir.*

Örnek 2.2.9. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq \mathbf{0} \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = \mathbf{0} \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Türev kuralları, f fonksiyonunun her $(x,y) \neq (0,0)$ noktasında birinci-mertebeden kısmî türevlerinin var ve sürekli olduklarını gösterir. Diğer taraftan, $(x,y) \neq (0,0)$ olduğunda

$$|f(x,y)| = \frac{|x|\,|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqslant |x|$$

gerçeklendiğinden,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

olur; yani, f fonksiyonu orijinde süreklidir. Bunlara ek olarak,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

olduğundan, f fonksiyonunun birinci-mertebeden kısmî türevleri $(0,0)$ noktasında mevcuttur. Eğer f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında diferansiyellenebilir olsaydı, (2.2.1) eşitliği nedeniyle,

$$0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{(h^2+k^2)}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

olması gerekirdi; ancak bu, ilgili limit $k = h$ yolu üzerinden göz önüne alındığında

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{-2h^3}{(2h^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

olduğundan, mümkün değildir.

Örnek 2.2.7 ve Örnek 2.2.9, birinci-mertebeden kısmî türevlerin varlığının ve/veya ilgili noktada sürekli olmanın bir fonksiyonun diferansiyellenebilir olması için yeterli olmadıklarını gösterir; buna karşın, bir açık küme üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından olmak, bir fonksiyonun diferansiyellenebilir olmasını *gerektirir.*

Teorem 2.2.10. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonunun birinci-mertebeden kısmî türevleri V üzerinde varsa ve $\mathbf{a}$ noktasında sürekli oluyorlarsa, o zaman $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilirdir.*

Kanıt. Teorem 1.5.8 nedeniyle, genelliği bozmaksızın, $m = 1$ olduğu varsayılabilir; bu durumda istenen,

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

eşitliği gösterilirse kanıtlanmış olur. $\mathbf{a} := (a_1,\dots,a_n)$ olsun, ve V kümesinin açık olduğu kullanılarak $\mathbf{h} := (h_1,\dots,h_n) \neq \mathbf{0}$ vektörü, $\mathbf{a}+\mathbf{h} \in V$ olacak biçimde alınsın. Tek-değişkenli Ortalama Değer Teoremi kullanılıp işareti farklı terimler sadeleştirilip toplanarak, her $j = 1, \ldots, n$ için a_j ve $a_j + h_j$ noktaları arasında bulunan bir c_j sayısının,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) &= f(a_1+h_1, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) \\ &\quad + \cdots + f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n+h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}+h_{j+1}, \ldots, a_n+h_n) \end{aligned}$$

gerçeklenecek biçimde var olduğu görülür. Bu ise, her $j = 1, \ldots, n$ için bileşenleri

$$u_j := \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}+h_{j+1}, \ldots, a_n+h_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots, a_n)$$

olan vektör $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{u} \tag{2.2.2}$$

olması demektir. **f** fonksiyonunun birinci-mertebeden kısmî türevleri **a** noktasında sürekli olduklarından dolayı her $j \in \{1, \ldots, n\}$ için $u_j \to 0$ gerçekleneceğinden, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\|\mathbf{u}\| \to 0$ olur. Böylece, Cauchy-Schwarz Eşitsizliği ve (2.2.2) kullanılarak, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ için

$$0 \leqslant \frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{|\mathbf{h} \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{h}\|} \leqslant \|\mathbf{u}\| \tag{2.2.3}$$

elde edilir; bu ise, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için (2.2.3)'deki ilk oranın sıfıra gitmesi, yani **f** fonksiyonunun **a** noktasında diferansiyellenebilir olması demektir. □

Açıklama 2.2.11. Bir $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ noktasında ya da bir açık $V \subseteq \mathbb{R}^n$ üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan bir fonksiyon, sırasıyla, **a** noktasında ya da V kümesi üzerinde ***sürekli-diferansiyellenebilir*** olarak adlandırılır. Bir $1 \leqslant p \leqslant \infty$ için V üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan bir fonksiyon, o hâlde, V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilirdir. Teorem 2.2.10, sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyonun zorunlu olarak diferansiyellenebilir olduğunu gösterir; aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi, diferansiyellenebilir bir fonksiyon sürekli-diferansiyellenebilir olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.12. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, & (x,y) \neq \mathbf{0} \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = \mathbf{0} \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Türev kuralları nedeniyle $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\})$ olduğu açıktır; dolayısıyla, Teorem 2.2.10 nedeniyle, f fonksiyonu $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ kümesi üzerinde diferansiyellenebilirdir. Diğer taraftan,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(h \sin \frac{1}{|h|} \right) = 0,$$

ve benzer şekilde $f_y(0,0) = 0$ olur. Böylece, $(h,k) \to (0,0)$ için,

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (h,k)}{\|(h,k)\|} = \sqrt{(h^2+k^2)} \sin \frac{1}{\sqrt{(h^2+k^2)}} \to 0$$

gerçeklendiğinden, diferansiyellenebilme tanımı nedeniyle f fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında da diferansiyellenebilir olduğu görülür. f fonksiyonu, o hâlde, $\mathbb{R}^2$ üzerinde diferansiyellenebilirdir. Ancak Çarpım Kuralı kullanılıp $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \cos \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + 2x \sin \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

olduğu gözlemlenirse, $x \to 0$ için $f_x(x,0)$ fonksiyonunun bir limite sahip olmadığı görülür: dolayısıyla, f_x kısmî türevi $(0,0)$ noktasında sürekli değildir. Bu ise, f fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olmaması demektir.

Açıklama 2.2.13. Teorem 2.2.5, Teorem 2.2.10, ve §1.5, Problem 4 nedeniyle, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ailesi $\mathbb{R}^n$ üzerindeki tüm polinomları içerir; yine Teorem 2.2.5 ve Teorem 2.2.10'dan dolayı, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $p > q \geqslant 1$ tam sayılar olduğunda

$$\mathcal{C}^\infty(V) \subset \mathcal{C}^p(V) \subset \mathcal{C}^q(V)$$

olur, ve bu içermeler kesindir.

Örnek 2.2.14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) := |x|^3$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $x \geqslant 0$ için $f'(x) = 3x^2$, $x < 0$ için $f'(x) = -3x^2$, her $x \in \mathbb{R}$ için $f''(x) = 6|x|$, $x > 0$ için $f'''(x) = 6$, ve $x < 0$ için $f'''(x) = -6$ gerçeklenir, ve $f'''(0)$ yoktur. O hâlde, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \smallsetminus \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ olur.

Tek-değişkenli ve gerçel-değerli bir f fonksiyonu bir a noktasında diferansiyellenebiliyorsa, $f'(a)$ değeri $y = f(x)$ eğrisine $x = a$ noktasından çizilen teğetin eğimidir. Aşağıdaki netice, bu sonucun iki-boyutlu duruma genelleştirilmesidir.

Teorem 2.2.15. *$V \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık küme ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(a,b) \in V$ noktasında diferansiyellenebilir olsun. Eğer Π, denklemi $F(x,y,z) = d$ olan,*

$(a, b, f(a, b))$ noktasından geçen, ve $F(x, b, z) = d$ ve $F(a, y, z) = d$ doğrularının, sırasıyla, $x = a$ noktasında $z = f(x, b)$ ve $y = b$ noktasında $z = f(a, y)$ eğrilerine teğet oldukları düzlem ise, bu durumda

$$\mathbf{n} := (-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1)$$

vektörü Π düzleminin normali, ve

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

ifadesi Π düzleminin bir denklemidir.

Kanıt. f fonksiyonu (a, b) noktasında diferansiyellenebildiğinden, $f(\cdot, b)$ fonksiyonu a noktasında ve $f(a, \cdot)$ fonksiyonu b noktasında diferansiyellenebilirdir. Dolayısıyla, $z = f(x, b)$ eğrisine $x = a$ noktasında teğet olan doğrunun eğimi $f_x(a, b)$ olur; yani, $\mathbf{u} := (1, 0, f_x(a, b))$ vektörü Π düzlemine paraleldir. Benzer nedenlerle, $\mathbf{v} := (0, 1, f_y(a, b))$ vektörünün de Π düzlemine paralel olduğu görülür. O hâlde,

$$\mathbf{n} := \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1)$$

vektörü Π düzleminin normali, ve bu nedenle

$$\mathbf{n} \cdot (x - a, y - b, z - f(a, b)) = 0$$

ifadesi Π düzleminin bir denklemidir. □

Bu kısmın kalan parçasında, diferansiyellenebilir bir fonksiyonun tam türevi ile aynı fonksiyonun kısmî türevleri arasındaki ilişki incelenecektir. İlk olarak, tam türevin tek türlü belirli bir lineer fonksiyon olduğu kullanılarak, diferansiyellenebilmenin bir karakterizasyonu elde edilecektir.

Teorem 2.2.16. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki birinci-mertebeden tüm kısmî türevleri varsa, bu durumda $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ olan ve yeterince küçük $\mathbf{h}$ vektörleri (yani, bir $r > 0$ sayısı için $\|\mathbf{h}\| < r$ koşulunu sağlayan tüm $\mathbf{h}$ vektörleri) için*

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}) \tag{2.2.4}$$

eşitliğini gerçekleyen bir $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun var olmasıdır.

Kanıt. V kümesinin açık olduğu kullanılarak bir $r > 0$ sayısı, $B_r(\mathbf{a}) \subseteq V$ olacak biçimde alınsın. $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa, $0 < \|\mathbf{h}\| < r$ koşulunu sağlayan tüm $\mathbf{h}$ vektörleri için

$$\varepsilon(\mathbf{h}) := \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \tag{2.2.5}$$

olarak, diğer durumlarda ise $\varepsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$ olarak tanımlanan $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Aşikâr olarak, (2.2.4) eşitliği $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ için sağlanır; diğer taraftan (2.2.5) nedeniyle (2.2.4) eşitliği, $0 < \|\mathbf{h}\| < r$ koşulunu sağlayan tüm $\mathbf{h}$ vektörleri için de doğru olur. Tanım 2.2.1 kullanıldığında ise, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ olduğu görülür. Tanımlanan ε, o hâlde, verilen koşulları sağlayan fonksiyondur.

Tersine, eğer (2.2.4) eşitliği $\|\mathbf{h}\| < r$ koşulunu sağlayan tüm $\mathbf{h}$ vektörleri için doğru oluyorsa, (2.2.5) eşitliği de $0 < \|\mathbf{h}\| < r$ koşulunu sağlayan tüm $\mathbf{h}$ vektörleri için doğru olur; bu ise, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ olduğundan, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir olması anlamına gelir. □

Örnek 1.1.7'den dolayı bir m skalerinin her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = mx$ gerçeklenecek biçimde var olması lineer olabilmesi için gerekli ve yeterli bir koşul olan tek-değişkenli bir $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in \mathbb{R}$ için $F'(x) = (mx)' = m$ özelliğini sağlar. Aşağıdaki sonuç, bu özelliğin çok-değişkenli benzeridir.

Sonuç 2.2.17. *Eğer* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *fonksiyonu lineer ise,* $\mathbf{F}$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}^n$ *uzayının her noktasında diferansiyellenebilirdir ve her* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *için* $D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}$ *olur; yani, eğer* $\mathbf{F}$ *fonksiyonunu temsil eden matris* B *ise, her* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *için* $D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = B$ *sağlanır.*

Kanıt. $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu lineer olduğundan, her $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{h})$$

sağlanır; bu ise, Teorem 2.2.16'daki denklik $\varepsilon \equiv \mathbf{0}$ fonksiyonu için kullanıldığında, her $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ için $D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}$ olması demektir. □

Tek-değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, diferansiyellenebilme temel işlemler altında doğal olarak korunur.

Teorem 2.2.18. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *bir açık küme,* $\mathbf{a} \in V$*,* α *bir skaler, ve* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : V \to \mathbb{R}^m$ *olsun. Eğer* $\mathbf{f}$ *ve* $\mathbf{g}$ *fonksiyonları* $\mathbf{a}$ *noktasında diferansiyellenebiliyorlarsa, bu* *durumda* $\mathbf{f}+\mathbf{g}$, $\alpha\mathbf{f}$, *ve* $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ *fonksiyonları da* $\mathbf{a}$ *noktasında diferansiyellenebilirdir, ve*

$$D(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a}), \tag{2.2.6}$$

$$D(\alpha\mathbf{f})(\mathbf{a}) = \alpha D\mathbf{f}(\mathbf{a}), \tag{2.2.7}$$

ve

$$D(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathbf{g}(\mathbf{a})D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{a})D\mathbf{g}(\mathbf{a}) \tag{2.2.8}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

Kanıt. (2.2.6) ve (2.2.7) eşitlikleri Tanım 2.2.1 kullanılarak kolayca elde edilebileceklerinden, sadece (2.2.8) eşitliğinin kanıtı verilecektir. Açıklama 2.2.2 nedeniyle, istenen,

$$B := \mathbf{g}(\mathbf{a})D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{a})D\mathbf{g}(\mathbf{a}) \tag{2.2.9}$$

olarak tanımlanan $(1\times n)$-boyutlu B matrisinin

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{a}) - B\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

eşitliğini sağladığı gösterilirse elde edilmiş olur. $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g}$ fonksiyonlarının $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir oldukları kullanılarak, $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h})\to\mathbf{0}$ ve $\delta(\mathbf{h})\to\mathbf{0}$ olan, ve yeterince küçük $\mathbf{h}$ vektörleri için

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})$$

ve

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}) = D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\delta(\mathbf{h})$$

eşitliklerini gerçekleyen $\varepsilon, \delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonları alınsın. (2.2.9) nedeniyle

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{a}) - B\mathbf{h} \\
&\qquad = (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})D\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})D\mathbf{g}(\mathbf{a}) \\
&\qquad = (\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}))\cdot\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \\
&\qquad\quad + (D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}))\cdot(\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})) \\
&\qquad\qquad + \mathbf{f}(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}) - D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{h})) \\
&\qquad =: T_1(\mathbf{h}) + T_2(\mathbf{h}) + T_3(\mathbf{h})
\end{aligned}$$

olur. Tam türevin tek türlü belirli olmasından dolayı, şu hâlde, her $j = 1, 2, 3$ için, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ durumunda $T_j(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to 0$ olduğu gösterilirse kanıt tamamlanır.

Şimdi, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve ε fonksiyonunun özelliğinden dolayı,

$$\begin{aligned} |T_1(\mathbf{h})| &\leqslant \|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \, \|\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h})\| \\ &= \|\mathbf{h}\| \, \|\varepsilon(\mathbf{h})\| \, \|\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h})\| \end{aligned}$$

sağlanır; bu ise, Teorem 2.2.5 nedeniyle $\mathbf{g}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında sürekli olduğundan ve $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ gerçeklendiğinden, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $T_1(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to 0$ olmasını gerektirir. Benzer argümanlarla, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $T_3(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to 0$ olduğu da görülür. Diğer taraftan, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Teorem 1.1.12 kullanılarak,

$$\begin{aligned} |T_2(\mathbf{h})| &\leqslant \|D\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \, \|\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\| \\ &\leqslant \sqrt{(mn)} \, \|D\mathbf{f}(\mathbf{a})\|_\infty \, \|\mathbf{h}\| \, \|\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\| \end{aligned}$$

elde edilir; böylece, yine Teorem 2.2.5 nedeniyle $\mathbf{g}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında sürekli olduğu kullanılıp $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için limite geçildiğinde,

$$\frac{|T_2(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \leqslant \sqrt{(mn)} \, \|D\mathbf{f}(\mathbf{a})\|_\infty \, \|\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\| \to 0$$

olduğu görülmüş olur. $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ fonksiyonu, o hâlde, $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilen ve tam türevi B matrisi olan fonksiyondur. □

Açıklama 2.2.19. Çok-değişkenli ve çok-değerli fonksiyonların tam türevleri için Teorem 2.2.18 ile verilen (2.2.6), (2.2.7), ve (2.2.8) eşitlikleri, sırasıyla, ***Toplam Kuralı***, ***Homojenlik***, ve ***İç Çarpım Kuralı*** olarak adlandırılır.

Tek-değişkenli fonksiyonlar için temel öneme sahip olan Zincir Kuralı, çok-değişkenli fonksiyonlar için de, aşağıdaki şekilde, geçerlidir.

Teorem 2.2.20 (Zincir Kuralı). *V kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde açık, U kümesi $\mathbb{R}^m$ içinde açık, $\mathbf{g} : V \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in V$, ve $\mathbf{g}(\mathbf{a}) \in U$ olsun. Eğer $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{f}$ fonksiyonları, sırasıyla, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ noktalarında diferansiyellenebiliyorlarsa, bu durumda $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : V \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilirdir, ve*

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))D\mathbf{g}(\mathbf{a}) \tag{2.2.10}$$

eşitliği gerçeklenir.

Kanıt. İsteneni göstermek için

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h})) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) - D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0} \tag{2.2.11}$$

olduğu görülmelidir. $\mathbf{b} := \mathbf{g}(\mathbf{a})$ olsun. $\mathbf{g}$ ve $\mathbf{f}$ fonksiyonlarının, sırasıyla, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ noktalarında diferansiyellenebilir oldukları kullanılarak, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ ve $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$ için $\delta(\mathbf{k}) \to \mathbf{0}$ olan, ve yeterince küçük $\mathbf{h}$ ve $\mathbf{k}$ vektörleri için

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a}) = D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}) \tag{2.2.12}$$

ve

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}+\mathbf{k}) - \mathbf{f}(\mathbf{b}) = D\mathbf{f}(\mathbf{b})(\mathbf{k}) + \|\mathbf{k}\|\delta(\mathbf{k}) \tag{2.2.13}$$

eşitliklerini gerçekleyen $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ve $\delta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ fonksiyonları seçilsin. $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ sabitlensin, ve $\mathbf{k} := \mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})$ alınsın. (2.2.12) ve (2.2.13) eşitlikleri

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h})) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) &= \mathbf{f}(\mathbf{b}+\mathbf{k}) - \mathbf{f}(\mathbf{b}) = D\mathbf{f}(\mathbf{b})(\mathbf{k}) + \|\mathbf{k}\|\delta(\mathbf{k}) \\ &= D\mathbf{f}(\mathbf{b})(D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})) + \|\mathbf{k}\|\delta(\mathbf{k})\end{aligned}$$

olmasını gerektirdiğinden, $\mathbf{k}$ vektörünün $\mathbf{h}$ vektörüne bağlı olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h})) - \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) - D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) &= \|\mathbf{h}\|\, D\mathbf{f}(\mathbf{b})\varepsilon(\mathbf{h}) + \|\mathbf{k}\|\delta(\mathbf{k}) \\ &=: T_1(\mathbf{h}) + T_2(\mathbf{h})\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Tam türevin tek türlü belirli olmasından dolayı, o hâlde, her $j = 1, 2$ için, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ durumunda $T_j(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to \mathbf{0}$ olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur.

Şimdi, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$ sağlandığından, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ iken $T_1(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to \mathbf{0}$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, (2.2.12) ve Teorem 1.1.12 nedeniyle,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{k}\| &= \|\mathbf{g}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})\| = \|D\mathbf{g}(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})\| \\ &\leqslant \sqrt{(mn)}\, \|\mathbf{h}\| \,(\|D\mathbf{g}(\mathbf{a})\|_\infty + \|\varepsilon(\mathbf{h})\|)\end{aligned}$$

gerçeklenir; yani, yeterince küçük $\mathbf{h}$ vektörleri için $\|\mathbf{k}\|/\|\mathbf{h}\|$ değeri sınırlıdır. Böylece, Teorem 2.2.5 nedeniyle $\mathbf{g}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında sürekli olması gerektiği kullanılıp $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$ (ve bundan dolayı, $\delta(\mathbf{k}) \to \mathbf{0}$) olduğu gözlemlenirse, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ durumunda

$$\frac{\|T_2(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|}\,\|\delta(\mathbf{k})\| \to 0$$

olduğu görülmüş olur. Sonuç olarak, (2.2.11) eşitliği sağlanır: $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ fonksiyonu, şu hâlde, $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilen ve tam türevi $D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))D\mathbf{g}(\mathbf{a})$ matrisi olan fonksiyondur. □

Açıklama 2.2.21. (2.2.10) eşitliğinin sağ yanı, $(p\times m)$-boyutlu $D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))$ matrisiyle $(m\times n)$-boyutlu $D\mathbf{g}(\mathbf{a})$ matrisinin çarpımlarından oluşur: Zincir Kuralı bu çarpımın sonucunun, eşitliğin sol yanını gösteren $(p\times n)$-boyutlu $D(\mathbf{f}\circ\mathbf{g})(\mathbf{a})$ matrisi olduğunu bildirir.

Örnek 2.2.22. $F, G, H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun, ve $z := F(x,y)$, $x := G(r,\theta)$, ve $y := H(r,\theta)$ olarak kabul edilsin. Bu varsayımlar altında, $z := \psi(r,\theta) := F(G(r,\theta), H(r,\theta))$ ve $\phi := (G,H)$ alınırsa, Teorem 2.2.3 kullanılarak,

$$DF = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad D\psi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \quad D\phi = \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{bmatrix}$$

olduğu görülür; bu ise, $\psi = F\circ\phi$ olması nedeniyle, Zincir Kuralı'ndan dolayı

$$D\psi = DF(\phi)D\phi,$$

yani

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olması demektir.

Örnek 2.2.23. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve $\phi, \psi, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları diferansiyellenebilir olsun, ve $w := f(x,y,z)$, $x := \phi(t)$, $y := \psi(t)$, ve $z := \sigma(t)$ olarak kabul edilsin. Bu durumda, $w := G(t) := f(\phi(t), \psi(t), \sigma(t))$ ve $g := (\phi, \psi, \sigma)$ alınırsa, Teorem 2.2.3 kullanılarak,

$$Df = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad Dg = \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix}, \quad DG = \begin{bmatrix} \dfrac{dw}{dt} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür; bu ise, $G = f\circ g$ olması nedeniyle, Zincir Kuralı'ndan dolayı

$$DG = Df(g)Dg,$$

yani

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix}$$

olması demektir.

Problemler

1. Aşağıdaki fonksiyonların $D\mathbf{f}$ Jacobi matrislerini—var oldukları noktalarda—hesaplayınız:

(a) $\mathbf{f}(x, y) := (\sin x, \sqrt{(xy)}, \cos y)$; (b) $\mathbf{f}(s, t, u, v) := (st + u^2, uv - s^2)$;
(c) $\mathbf{f}(t) := (\ln t, 1/(1 + t))$; (d) $\mathbf{f}(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

2. Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun, Tanım 2.2.1'e nazaran, bir $a \in \mathbb{R}$ noktasında diferansiyellenebilir olması için,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0$$

eşitliği gerçeklenecek biçimde bir *lineer* $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

Yol gösterme: Örnek 1.1.7'yi göz önüne alınız.

3. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun.

Tanım 2.2.24. $\mathbb{R}^n$ içinde bir ***birim vektör*** $\mathbf{u}$ (yani, $\|\mathbf{u}\| = 1$) olmak üzere bir $\delta > 0$ sayısı, $|t| < \delta$ koşulunu sağlayan her t gerçel sayısı için $\mathbf{a} + t\mathbf{u} \in V$ gerçeklenecek biçimde bulunsun. Bu durumda, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{u}$ *doğrultusunda* $\mathbf{a}$ *noktasındaki* ***yönlendirilmiş türevi***, ilgili limit var olduğunda,

$$D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{a}) := \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t}$$

olarak tanımlanır.

(I) (a) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_k$ olması durumunda $D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$ yönlendirilmiş türevinin var olması için $\mathbf{f}_{x_k}(\mathbf{a})$ kısmî türevinin var olmasının gerekli ve yeterli olduğunu, ve bu durumda

$$D_{\mathbf{e}_k}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}(\mathbf{a})$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlayınız.

(b) Eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonunun bir $\mathbf{a}$ noktasında her doğrultuda yönlendirilmiş türevi varsa, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında birinci-mertebeden kısmî türevlerinin var olduğunu ispatlayınız, ve bu önermenin tersinin her zaman doğru olmadığını gösteriniz.

(c)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & y \neq 0 \text{ ise;} \\ 0, & y = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında her doğrultuda yönlendirilmiş türevlerinin var olduğunu, ancak fonksiyonun $(0,0)$ noktasında sürekli ya da diferansiyellenebilir olmadığını kanıtlayınız.

(II) $m = 1$ ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir olsun.

(a) $\mathbb{R}^n$ içindeki her $\mathbf{u}$ birim vektörü için $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$ yönlendirilmiş türevinin var olduğunu, ve

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlayınız.

(b) $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, ve $\mathbf{u}$ ve $\nabla f(\mathbf{a})$ vektörleri arasındaki açı θ ise,

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos\theta$$

olduğunu gösteriniz.

(c)

$$\max\{D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n,\ \|\mathbf{u}\| = 1\} = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$$

olduğunu, ve ilgili maksimum değerin $\mathbf{u}$ vektörü $\nabla f(\mathbf{a})$ vektörüne paralel olduğunda alındığını kanıtlayınız.

4. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_m) : V \to \mathbb{R}^m$ olsun. $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir olması için, her f_j bileşen fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir olmasının gerekli ve yeterli olduğunu ispatlayınız.

5. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık, $a \in I$, ve $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^m$ olsun.

(a) $\mathbf{f}$ fonksiyonunun a noktasında diferansiyellenebilir olması için,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a)}{h}$$

limitinin var olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız; bu durumda ilgili limitin $\mathbf{f}'(a)$ olduğunu, ve her α skaleri için $(\alpha\mathbf{f})'(a) = \alpha\mathbf{f}'(a)$ eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

(b) $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g}$ fonksiyonları a noktasında diferansiyellenebiliyorlarsa,

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(a) = \mathbf{f}'(a) + \mathbf{g}'(a) \quad \text{ve} \quad (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(a) = \mathbf{g}(a) \cdot \mathbf{f}'(a) + \mathbf{f}(a) \cdot \mathbf{g}'(a)$$

eşitliklerinin sağlandığını kanıtlayınız.

(c) $J \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık, $b \in J$, $h : J \to \mathbb{R}$, ve $a = h(b)$ olsun. Eğer $\mathbf{f}$ ve h fonksiyonları, sırasıyla, a ve b noktalarında diferansiyellenebiliyorlarsa,

$$(\mathbf{f} \circ h)'(b) = h'(b)\mathbf{f}'(h(b))$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

6. Teorem 2.2.18 ile verilen (2.2.6) ve (2.2.7) eşitliklerini kanıtlayınız.

7. $f(x,y) := \sqrt{(|xy|)}$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında diferansiyellenebilir olmadığını gösteriniz.

8.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sin\sqrt{(x^2+y^2)}}, & 0 < \|(x,y)\| < \pi \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : B_\pi(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında diferansiyellenebilir olmadığını gösteriniz.

9. $r > 0$ ve $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f : B_r(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bir $\alpha > 1$ sayısı her $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{0})$ için $|f(\mathbf{x})| \leqslant \|\mathbf{x}\|^\alpha$ sağlanacak biçimde bulunabiliyorsa, f fonksiyonunun $\mathbf{0}$ noktasında diferansiyellenebilir olduğunu ispatlayınız; $\alpha = 1$ olması durumunda aynı sonucun geçerli olup olmadığını belirleyiniz.

10. Her $\alpha \geqslant 1$ için,

$$f(x,y) := \begin{cases} (xy)^\alpha \ln(x^2+y^2), & (x,y) \neq \mathbf{0} \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = \mathbf{0} \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde diferansiyellenebilir olduğunu kanıtlayınız.

11. Her $\alpha < 3/2$ için,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^\alpha}, & (x,y) \neq \mathbf{0} \text{ ise;} \\ 0, & (x,y) = \mathbf{0} \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ üzerinde diferansiyellenebilir olduğunu ispatlayınız.

12. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathcal{C}^2$-sınıfından olsun. Eğer, $x := f(p,q)$, $y := g(p,q)$ ve $z := h(p,q)$ olmak üzere, $w := F(x,y,z)$ ise, w_p, w_q, w_{pq} ve w_{pp} kısmî türevlerini belirleyiniz.

13. $r > 0$ bir gerçel sayı, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, ve $\mathbf{g} : B_r(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir olsun.

(a) $f : B_r(g(\mathbf{a})) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(\mathbf{a})$ noktasında diferansiyellenebilir ise, $h := f \circ \mathbf{g}$ fonksiyonunun kısmî türevlerinin, her $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

eşitliğini sağladıklarını gösteriniz.

(b) $n = m$ ve $\mathbf{f} : B_r(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\mathbf{g}(\mathbf{a})$ noktasında diferansiyellenebilir ise,

$$\Delta_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}(\mathbf{a}) = \Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{a}))\, \Delta_{\mathbf{g}}(\mathbf{a})$$

olduğunu ispatlayınız.

14. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları iki kere diferansiyellenebilir olsun. $u(x,y) := f(xy)$ fonksiyonunun

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

denklemini; $v(x,y) := f(x-y) + g(x+y)$ fonksiyonunun ise, ***dalga denklemi*** olarak adlandırılan

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

15. $u : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

$$F(x,y,z) := u\left(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\right)$$

fonksiyonunun

$$u'\left(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\right) = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right)^{1/2}$$

eşitliğini gerçeklediğini gösteriniz.

16. $x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için,

$$u(x,t) := \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{(4\pi t)}}$$

olsun.

(a) u fonksiyonunun, her $x \in \mathbb{R}$ ve $t > 0$ için, ***ısı denklemi*** olarak adlandırılan $u_{xx} - u_t = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

(b) Eğer $a > 0$ ise, $x \in [a, \infty)$ için düzgün olarak, $t \to 0^+$ durumunda $u(x,t) \to 0$ olduğunu kanıtlayınız.

17. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu I üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer bir $r > 0$ için $\mathbf{f}(I) \subseteq \partial B_r(\mathbf{0})$ ise, her $t \in I$ için $\mathbf{f}(t)$ ve $\mathbf{f}'(t)$ vektörlerinin ortogonal olduklarını kanıtlayınız.

18. $z = F(x,y)$ fonksiyonu bir (a,b) noktasında diferansiyellenebilir, $F_y(a,b) \neq 0$, ve a noktasını içeren bir açık aralık I olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında diferansiyellenebilir ve her $x \in I$ için $F(x, f(x)) = 0$ ise,

$$\frac{df}{dx}(a) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}$$

olduğunu ispatlayınız.

19. $r > 0$ ve $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $f : B_r((a,b)) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. f_x ve f_y kısmî türev fonksiyonlarının $B_r((a,b))$ üzerinde var ve (a,b) noktasında diferansiyellenebilir oldukları varsayılsın.

(a)

$$\Delta(h) := f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a,b)$$

ise, h gerçel sayıları yeterince küçük olduklarında, bir $t \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(h)}{h} =& f_y(a+h, b+th) - f_y(a,b) - \nabla f_y(a,b) \cdot (h, th) \\ &- (f_y(a, b+th) - f_y(a,b) - \nabla f_y(a,b) \cdot (0, th)) + h f_{yx}(a,b)\end{aligned}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

(b)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a,b)$$

olduğunu gösteriniz.

(c)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

20. $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları, $\mathbb{R}^2$ üzerinde,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

eşitlikleriyle verilen ve ***Cauchy-Riemann denklemleri*** olarak adlandırılan denklemleri sağlasınlar. Bu durumda, eğer $u(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ve $v(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ise,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

eşitliklerinin sağlandığını ispatlayınız.

21. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde C^2-sınıfından ve $u(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ olsun. Eğer f fonksiyonu ***Laplace denklemi*** olarak adlandırılan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

denklemini gerçekliyorsa,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

2.3 Ortalama Değer Teoremi ve Taylor Formülü

Kapalı, sınırlı, ve tek noktadan oluşmayan bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olan gerçel-değerli bir f fonksiyonu (a,b) aralığı üzerinde diferansiyellenebiliyorsa,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

eşitliği gerçeklenecek biçimde bir $c \in (a,b)$ sayısı vardır. Tek-değişkenli ve gerçel-değerli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi olarak adlandırılan bu özellik, $m > 1$ olmak üzere, diferansiyellenebilen bir $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonuna genelleştirilmek istendiğinde−bir-boyutlu durumda $Df(c) = f'(c)$ olduğu göz önüne alınarak−, bir $\mathbf{c} \in L(\mathbf{x};\mathbf{a})$ için

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{c})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

eşitliğinin sağlanacağı yolunda bir tahminde bulunulabilir. Ancak bu tahmin, aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi, *yanlıştır.*

Örnek 2.3.1. Her $t \in \mathbb{R}$ için $\mathbf{f}(t) := (\cos t, \sin t)$ olarak tanımlanan $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Tüm gerçel t değerleri için $\cos' t = -\sin t$ ve $\sin' t = \cos t$ sağlandığından ve sinüs ve kosinüs fonksiyonları sürekli olduklarından, Açıklama 1.6.2 ve Teorem 2.2.10 nedeniyle, $\mathbf{f}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde diferansiyellenebilirdir; aynı zamanda, $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(2\pi)$ eşitliği de gerçeklenir. Ancak,

$$(0,0) = D\mathbf{f}(c) = \mathbf{f}'(c) = (-\sin c, \cos c)$$

eşitliğini sağlayan hiçbir c gerçel sayısı yoktur.

Çok-değişkenli fonksiyonlar için sözü edilen sonucun doğru hâli aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.2 (Ortalama Değer Teoremi)**.** *V kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde açık ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu V üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in V$ ve $L(\mathbf{x};\mathbf{a}) \subseteq V$ ise, her $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ vektörü için bir $\mathbf{c} \in L(\mathbf{x};\mathbf{a})$ noktası,*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) = \mathbf{u} \cdot (D\mathbf{f}(\mathbf{c})(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

eşitliği gerçeklenecek biçimde vardır.

Kanıt. Her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\mathbf{g}(t) := \mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

olarak tanımlanan $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu göz önüne alınsın: Sonuç 2.2.17 nedeniyle, $\mathbf{g}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde diferansiyellenebilirdir ve her $t \in \mathbb{R}$ için $D\mathbf{g}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ sağlanır. $L(\mathbf{x};\mathbf{a})$ doğru parçası açık olan V kümesinin içinde kaldığından, her $t \in I_\delta := (-\delta, 1 + \delta)$ için $\mathbf{g}(t) \in V$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan Zincir Kuralı kullanılarak, her $t \in I_\delta$ için

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(t))(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \tag{2.3.1}$$

olduğu görülür. $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ vektörü sabitlenerek $F : I_\delta \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $t \in I_\delta$ için

$$F(t) := \mathbf{u} \cdot (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(t)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, (2.2.8) eşitliğiyle verilen İç Çarpım Kuralı ve (2.3.1)'den dolayı, F fonksiyonu I_δ aralığı üzerinde diferansiyellenebilirdir ve bu aralıktaki her t değeri için

$$F'(t) = \mathbf{u} \cdot D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(t) = \mathbf{u} \cdot (D\mathbf{f}(\mathbf{g}(t))(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

sağlanır. Bir-boyutlu Ortalama Değer Teoremi'nden, o hâlde, bir $t_0 \in (0, 1)$ için

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) = F(1) - F(0) = F'(t_0) = \mathbf{u} \cdot (D\mathbf{f}(\mathbf{g}(t_0))(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

eşitliğinin sağlandığı elde edilir, ve $\mathbf{c} := \mathbf{g}(t_0)$ alınarak ispat tamamlanır. □

Teorem 2.3.2'nin $m = 1$ için özel hâli, uygulamalarda sıkça karşılaşılan gerçel-değerli fonksiyonlar içindir (ayrıca bkz. Problem 1 & Problem 5).

Sonuç 2.3.3. *V kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde açık ve konveks, ve $f : V \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer f fonksiyonu V üzerinde diferansiyellenebiliyorsa ve $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{a}+\mathbf{h}$ vektörlerinin ikisi de V kümesinin içinde kalıyorsa, bu durumda*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_j = \nabla f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} \tag{2.3.2}$$

eşitliği gerçeklenecek biçimde bir $t \in (0, 1)$ sayısı vardır.

Kanıt. V kümesi konveks olduğundan ve $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{a}+\mathbf{h}$ vektörlerini barındırdığından, $L(\mathbf{a}+\mathbf{h};\mathbf{a}) \subseteq V$ olur; bu ise, Teorem 2.3.2 nedeniyle, sıfırdan farklı her u skaleri için bir $\mathbf{c} \in L(\mathbf{a}+\mathbf{h};\mathbf{a})$ noktasının,

$$u(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})) = u(\nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{h})$$

eşitliği gerçeklenecek biçimde bulunması anlamına gelir. Bu son eşitlik u ile bölünüp $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t\mathbf{h}$ olacak şekilde $t \in (0,1)$ noktası alınarak da, (2.3.2) elde edilir. □

Sonuç 2.3.4. *V kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde açık, H kümesi V kümesinin bir kompakt alt-kümesi, ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olsun. Eğer E kümesi H kümesinin bir konveks alt-kümesi ise, bu durumda (H kümesine ve $\mathbf{f}$ fonksiyonuna bağlı olan, fakat E kümesine bağlı olmayan) bir M sabiti, her $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in E$ için*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leqslant M \,\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

gerçeklenecek biçimde vardır.

Kanıt. $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olmasından dolayı $D\mathbf{f}$ matrisinin girdileri olan kısmî türev fonksiyonları kompakt olan H kümesi üzerinde sürekli olduklarından, Teorem 1.6.9 nedeniyle,

$$M := \sqrt{(mn)} \sup_{\mathbf{c}\in H} \|D\mathbf{f}(\mathbf{c})\|_\infty$$

değeri bir sonlu gerçel sayıdır, ve sadece H kümesine ve $\mathbf{f}$ fonksiyonuna bağlıdır. $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in E$ olsun ve $\mathbf{u} := \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ olarak alınsın. E kümesi konveks olduğundan, $L(\mathbf{x};\mathbf{a}) \subseteq E$ olur; bu ise, Teorem 2.3.2 nedeniyle, bir $\mathbf{c} \in L(\mathbf{x};\mathbf{a})$ için

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|^2 = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) = \mathbf{u}\cdot(D\mathbf{f}(\mathbf{c})(\mathbf{x}-\mathbf{a})) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}))\cdot(D\mathbf{f}(\mathbf{c})(\mathbf{x}-\mathbf{a}))$$

olması anlamına gelir. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği ve Teorem 1.1.12 kullanılarak, o hâlde,

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|^2 \leqslant \sqrt{(mn)}\, \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \, \|D\mathbf{f}(\mathbf{c})\|_\infty \, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

olarak elde edilir. Eğer $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| = 0$ ise, teoremin hükmü doğrudur; aksi durumda, yukarıdaki son eşitsizlik kesin pozitif olan $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|$ sayısıyla bölünerek, istenen

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| \leqslant \sqrt{(mn)}\, \|D\mathbf{f}(\mathbf{c})\|_\infty \, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant M \,\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

sonucuna ulaşılır. □

Sonuç 2.3.5. *V kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde açık ve bağlantılı, ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu V üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer her $\mathbf{c} \in V$ için $D\mathbf{f}(\mathbf{c}) = O_{m\times n}$ ise, $\mathbf{f}$ fonksiyonu V üzerinde bir sabit fonksiyondur.*

Kanıt. Bir $\mathbf{a} \in V$ noktası sabitlenerek, $\mathbf{x} \in V$ olarak alınsın. V kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde açık ve bağlantılı olduğundan, §1.6, Problem 8 (a) nedeniyle, V kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde çokgensel-bağlantılıdır; yani, $j = 1, \ldots, N$ olmak üzere sonlu sayıda $\mathbf{x}_j \in V$ noktaları, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}$, ve $j = 1, \ldots, N$ için $L(\mathbf{x}_{j-1}; \mathbf{x}_j) \subseteq V$ olacak biçimde bulunur. $\mathbf{u} := \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})$ olsun, ve Teorem 2.3.2'nin sonucu $D\mathbf{f}$ matrisinin sıfır matrisi olduğu hipoteziyle birlikte kullanılarak her $j = 1, \ldots, N$ için bir $\mathbf{c}_j \in L(\mathbf{x}_{j-1}; \mathbf{x}_j)$ noktası,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{j-1})) = \mathbf{u} \cdot (D\mathbf{f}(\mathbf{c}_j)(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})) = 0$$

gerçeklenecek biçimde seçilsin. Böylece, işareti farklı terimler sadeleştirilip toplanarak,

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{j-1})) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|^2,$$

yani $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ elde edilir; bu ise, $\mathbf{x}$ noktası keyfî olduğundan, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun V üzerinde bir sabit fonksiyon olması demektir. □

Tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan Taylor Formülü'nü[9] çok-değişkenli ve gerçel-değerli fonksiyonların durumunda elde edebilmek için, klâsik diferansiyel kavramı bu tip fonksiyonlara genişletilmelidir. $p \geqslant 1$ bir doğal sayı, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun $(p-1)$'inci mertebeden kısmî türevleri V kümesi üzerinde varsa ve bu fonksiyonlar $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir oluyorlarsa, bu durumda

$$D^{(p)} f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) := \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(\mathbf{a}) h_{i_1} \ldots h_{i_p}$$

ifadesine, f fonksiyonunun $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{h} := (h_1, \ldots, h_n)$ noktalarındaki p'inci-mertebeden ***tam diferansiyel***i denir. $p = 1$ durumunda−'sıfırıncı-mertebeden' kısmî türevin, tanım olarak, fonksiyonun kendisine eşit olduğu kullanılarak−

$$D^{(1)} f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) h_j = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})$$

[9] Bkz. [17, Theorem 4.41].

olduğunu; $p > 1$ içinse, herhangi mertebeli tam diferansiyellerin iteratif olarak

$$\begin{aligned} D^{(p)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) &= D^{(1)}\left(D^{(p-1)}f\right)(\mathbf{a};\mathbf{h}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{p-1}=1}^{n} \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{p-1}}}(\mathbf{a})h_{i_1}\ldots h_{i_{p-1}}\right)h_j \end{aligned}$$

şeklinde elde edilebileceklerini gözlemlemek kolaydır.

Tam diferansiyel, pratikte, hesaplaması uzun işlemler gerektiren bir nesne olmasına karşın, aşağıdaki örneğin ve Problem 4'ün gösterdiği gibi, iki-değişkenli ve yeterince 'düzgün' fonksiyonlar için binom katsayıları yardımıyla kolayca elde edilebilir.

Örnek 2.3.6. $V \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık küme, $(a,b) \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^2$-sınıfından olsun. Bu durumda, tanım gereğince,

$$D^{(2)}f((a,b);(h,k)) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

olur. Ancak Teorem 2.1.2 nedeniyle $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ olduğundan,

$$D^{(2)}f((a,b);(h,k)) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

olarak elde edilir. Özel olarak bu, örneğin, $f(x,y) := (xy)^2$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$D^{(2)}f((x,y);(h,k)) = 2y^2h^2 + 8xyhk + 2x^2k^2$$

olması demektir.

Teorem 2.3.7 (Taylor Formülü)**.** *$p \in \mathbb{N}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in V$, $f : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, ve f fonksiyonunun $(p-1)$'inci-mertebeden kısmî türevleri V üzerinde var olsun. Eğer f fonksiyonunun $(p-1)$'inci-mertebeden her kısmî türevi V üzerinde diferansiyellenebiliyorsa ve $L(\mathbf{x};\mathbf{a}) \subseteq V$ ise, bu durumda bir $\mathbf{c} \in L(\mathbf{x};\mathbf{a})$ noktası, $\mathbf{h} := \mathbf{x} - \mathbf{a}$ için*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!}\,D^{(k)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) + \frac{1}{p!}\,D^{(p)}f(\mathbf{c};\mathbf{h})$$

eşitliği sağlanacak biçimde vardır.

Kanıt. $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ olsun. Teorem 2.3.2'nin kanıtındakine benzer argümanlar kullanılarak bir $\delta > 0$ sayısı, her $t \in I_\delta := (-\delta, 1+\delta)$ için $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in V$ sağlanacak biçimde seçilsin. Her $t \in I_\delta$ için $F(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ olarak tanımlanan $F : I_\delta \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I_δ üzerinde diferansiyellenebilirdir ve Zincir Kuralı nedeniyle

$$F'(t) = Df(\mathbf{a} + t\mathbf{h})(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_k$$

olur. Buradan, ardışık türevler alınarak, her $j = 1, 2, \ldots, p$ için

$$F^{(j)}(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_j=1}^{n} \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_{i_1} \ldots h_{i_j}$$

olduğu görülür; dolayısıyla, $j = 1, \ldots, p-1$ ve $t \in I_\delta$ için

$$F^{(j)}(0) = D^{(j)} f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) \quad \text{ve} \quad F^{(p)}(t) = D^{(p)} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}; \mathbf{h}) \tag{2.3.3}$$

olarak elde edilir. Böylece, F fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığını içeren I_δ aralığı üzerinde p'inci-mertebeden türevinin var olduğu sonucuna ulaşılır. Bu ise, bir-boyutlu Taylor Formülü ve (2.3.3) kullanıldığında, bir $t \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = F(1) - F(0) &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} F^{(j)}(0) + \frac{1}{p!} F^{(p)}(t) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j!} D^{(j)} f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) + \frac{1}{p!} D^{(p)} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}; \mathbf{h}) \end{aligned}$$

olması anlamına gelir, ve $\mathbf{c} := \mathbf{a} + t\mathbf{h}$ alınarak kanıt tamamlanır. □

Problemler

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ içindeki her $\mathbf{u}$ birim vektörü için $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$ yönlendirilmiş türevi (bkz. §2.2, Problem 3) her $t \in [0, 1]$ için var olsun. Bir $t \in (0, 1)$ için,
$$f(\mathbf{a} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a} + t\mathbf{u})$$
eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

2. r ve α pozitif gerçel sayılar, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks küme, $\mathbf{0}$ noktası E kümesinin bir yığılma noktası, ve $\overline{E} \subseteq B_r(\mathbf{0})$ olsun. Eğer $f : B_r(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E içindeki her $\mathbf{x}$ için $|f(\mathbf{x})| \leqslant \|\mathbf{x}\|^\alpha$ koşulunu sağlıyorsa ve f fonksiyonu $B_r(\mathbf{0})$ üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir ise, bir $M > 0$ sabitinin her $\mathbf{x} \in E$ için $|f(\mathbf{x})| \leqslant M \|\mathbf{x}\|$ gerçeklenecek biçimde var olduğunu kanıtlayınız.

3. (a) $f(x,y) := \sqrt{x} + \sqrt{y}$ fonksiyonu için $\mathbf{a} := (1,4)$ noktasındaki Taylor Formülü'nü $p = 3$ için ifade ediniz.

(b) $f(x,y) := x^2 + xy + y^2$ fonksiyonunu $(x+1)$ ve $(y-1)$ terimlerinin kuvvetleri cinsinden ifade ediniz.

(c) $f(x,y) := e^{xy}$ fonksiyonu için $\mathbf{a} := (0,0)$ noktasındaki Taylor Formülü'nü $p = 4$ için ifade ediniz.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $r > 0$ için $B_r((x_0, y_0))$ üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından olsun. Her $(x,y) \in B_r((x_0,y_0))$ için (x_0,y_0) ve (x,y) noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde bulunan bir (c,d) noktasının,

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(x-x_0)^j(y-y_0)^{k-j}\,\frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(x_0,y_0)\right)$$
$$+\frac{1}{p!}\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}(x-x_0)^j(y-y_0)^{p-j}\,\frac{\partial^p f}{\partial x^j \partial y^{p-j}}(c,d)$$

eşitliği sağlanacak biçimde var olduğunu ispatlayınız.

5. $r > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f : B_r((a,b)) \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir, ve $(x,y) \in B_r((a,b))$ olsun.

(a) $g(t) := f(tx + (1-t)a, y) + f(a, ty + (1-t)b)$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

(b) a ve x ve b ve y noktaları arasında bulunan, sırasıyla, c ve d sayılarının,

$$f(x,y) - f(a,b) = (x-a)f_x(c,y) + (y-b)f_y(a,d)$$

sağlanacak biçimde var olduklarını kanıtlayınız.

6. (Taylor Formülü'nün İntegral Formu). $p \in \mathbb{N}$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından olsun. Eğer $L(\mathbf{x};\mathbf{a}) \subseteq V$ ve $\mathbf{h} := \mathbf{x} - \mathbf{a}$ ise,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} D^{(k)} f(\mathbf{a};\mathbf{h}) + \frac{1}{(p-1)!}\int_0^1 (1-t)^{p-1} D^{(p)} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h};\mathbf{h})\,dt$$

olduğunu gösteriniz.

7. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^2$-sınıfından olsun, ve bir $\mathbf{a} \in V$ ve her $j = 1, \ldots, n$ için $f_{x_j}(\mathbf{a}) = 0$ gerçeklensin. Eğer H kümesi V kümesinin kompakt ve konveks bir alt-kümesi ve $\mathbf{a} \in H$ ise, bir $M > 0$ sabitinin her $\mathbf{x} \in H$ için

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| \leqslant M\,\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2$$

gerçeklenecek biçimde var olduğunu gösteriniz.

8. $V \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık küme, $(a,b) \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^3$-sınıfından olsun.

$$\lim_{r\to 0} \frac{4}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\cos(2\theta)\,d\theta = f_{xx}(a,b) - f_{yy}(a,b)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

9. $V \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık küme, $H := [a,b] \times [0,c] \subseteq V$ bir dikdörtgen, $u : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^2$-sınıfından, ve her $(x_0,t_0) \in \partial H$ için $u(x_0,t_0) \geqslant 0$ olsun.

(a) Her $\varepsilon > 0$ için, $u(x,t) \geqslant -\varepsilon$ eşitsizliği her $(x,t) \in H \setminus K$ için gerçeklenecek biçimde bir kompakt $K \subseteq H^\circ$ kümesinin bulunduğunu gösteriniz.

(b) Bir $(x_1,t_1) \in H^\circ$ için $u(x_1,t_1) := -\ell < 0$ olsun, ve $r > 0$ gerçel sayısı $2rt_1 < \ell$ olacak biçimde seçilsin. (a) kısmında elde edilen sonuç $\varepsilon := \ell/2 - rt_1$ için kullanılıp K kompakt kümesi seçildiğinde,

$$w(x,t) := u(x,t) + r(t - t_1)$$

fonksiyonunun H üzerindeki minimumunun bir $(x_2,t_2) \in K$ noktasında alındığını kanıtlayınız.

(c) Eğer u fonksiyonu V üzerinde, ***ısı denklemi*** olarak adlandırılan $u_{xx} - u_t = 0$ denklemini sağlıyorsa ve her $(x_0,t_0) \in \partial H$ için $u(x_0,t_0) \geqslant 0$ ise, her $(x,t) \in H$ için $u(x,t) \geqslant 0$ olduğunu ispatlayınız.

2.4 Ters Fonksiyon Teoremi

Gerçel sayıların bir I açık aralığı üzerinde bire-bir ve sürekli olan gerçel-değerli bir $g : I \to g(I)$ fonksiyonu için, $x_0 \in I$ noktası $g'(x_0)$ değerinin var ve sıfırdan farklı olduğu bir nokta ise, $g^{-1} : g(I) \to I$ *fonksiyonu* $y_0 := g(x_0)$ noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$(g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)}$$

eşitliği sağlanır. Ters Fonksiyon Teoremi olarak adlandırılan bu önemli sonuç, bu kısımda, aynı boyutlu uzaylar arasında tanımlı ve karşılık gelen koşulları sağlayan bir $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için elde edilecektir. Kanıtının yapısı itibariyle şimdiye dek ispatlanan tüm sonuçlardan daha derin olan ilgili neticeyi elde etmek için gerekli alt-yapıyı kurmaya başlamadan önce, bir kare matrisin tersinir olabilmesi için bu matrisin determinantının sıfırdan farklı olmasının gerekli ve yeterli olduğu hatırlanmalıdır: $[D\mathbf{f}(\mathbf{a})]^{-1}$ matrisinin var olması için gerekli ve yeterli koşul, o hâlde, $\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ Jacobi determinantının sıfır olmamasıdır.

Ters Fonksiyon Teoremi'ni mümkün kılan temel olgular, Jacobi determinantının sıfırdan farklı olmasının getirdiği sonuçlardır. İlk olarak, sıfırdan farklı bir Jacobi determinantına sahip ve bire-bir olan bir fonksiyonun açık kümeleri açık kümelere gönderdiğini göreceğiz: Açıklama 1.6.7'nin gösterdiği gibi, bu özellik sürekli fonksiyonlar için genel olarak doğru değildir.

Lemma 2.4.1. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon, ve $r > 0$ sayısı $\overline{B_r(\mathbf{a})} \subseteq V$ içermesi sağlanacak biçimde olsun. $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\overline{B_r(\mathbf{a})}$ üzerinde sürekli ve bire-bir olduğu, ve bu fonksiyonun birinci-mertebeden* *tüm kısmî türevlerinin* $B_r(\mathbf{a})$ *açık topunun her noktasında var oldukları kabul edilsin. Eğer* $B_r(\mathbf{a})$ *üzerinde* $\Delta_\mathbf{f} \neq 0$ *ise, bu durumda* $B_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \subseteq \mathbf{f}(B_r(\mathbf{a}))$ *gerçeklenecek biçimde bir* $\rho > 0$ *sayısı vardır.*

Kanıt. Her $\mathbf{x} \in \overline{B_r(\mathbf{a})}$ için,

$$g(\mathbf{x}) := \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|$$

olarak tanımlansın: hipotezden dolayı, $g : \overline{B_r(\mathbf{a})} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Diğer taraftan $\mathbf{f}$ fonksiyonunun bire-bir olması, her $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ için $g(\mathbf{x}) > 0$ olmasını gerektirir; bu ise, kapalı ve sınırlı olduğundan dolayı $\partial B_r(\mathbf{a})$ kümesi Heine-Borel Teoremi nedeniyle kompakt olduğundan,

$$m := \inf_{\mathbf{x} \in \partial B_r(\mathbf{a})} g(\mathbf{x}) > 0$$

olması demektir.

$\rho := m/2$ alınsın ve $\mathbf{y} \in B_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a}))$ noktası sabitlensin. $\mathbf{x} \in \overline{B_r(\mathbf{a})}$ için

$$h(\mathbf{x}) := \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$$

olarak tanımlanan gerçel-değerli h fonksiyonu—Heine-Borel Teoremi'nden dolayı—kompakt olan $\overline{B_r(\mathbf{a})}$ kümesi üzerinde sürekli olduğundan, Ekstremum Değer Teoremi nedeniyle, bu küme üzerindeki en küçük değerine ulaşır: yani bir $\mathbf{b} \in \overline{B_r(\mathbf{a})}$ noktası, her $\mathbf{x} \in \overline{B_r(\mathbf{a})}$ için $h(\mathbf{b}) \leqslant h(\mathbf{x})$ sağlanacak biçimde vardır.

Şimdi, $\mathbf{b} \in B_r(\mathbf{a})$ olduğunu görmek için, bir çelişkiye ulaşabilmek amacıyla $\mathbf{b} \notin B_r(\mathbf{a})$ olduğu varsayılsın: Teorem 1.2.14 (iv) nedeniyle, bu, $\mathbf{b} \in \partial B_r(\mathbf{a})$ olması demektir. Diğer taraftan $h(\mathbf{a}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| < \rho$ olduğundan, $h(\mathbf{b})$ minimum değeri için de $h(\mathbf{b}) < \rho$ eşitsizliği doğru olur. $\mathbf{b} \in \partial B_r(\mathbf{a})$ olduğundan, o hâlde, Üçgen Eşitsizliği ve ρ sayısının seçiminden dolayı

$$\rho > h(\mathbf{b}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| - \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| = g(\mathbf{b}) - h(\mathbf{a}) > 2\rho - \rho = \rho$$

çelişkisine ulaşılır: yani, $\mathbf{b} \in B_r(\mathbf{a})$ gerçeklenir.

Kanıtı bitirmek için, $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{b})$ olduğu görülmelidir. $h(\mathbf{b}) \geqslant 0$ olduğundan, $h^2(\mathbf{b})$ değeri h^2 fonksiyonunun $\overline{B_r(\mathbf{a})}$ üzerindeki minimumudur; dolayısıyla, bir-boyutlu teoriden dolayı, her $k = 1, \ldots, n$ için

$$\frac{\partial h^2}{\partial x_k}(\mathbf{b}) = 0$$

gerçeklenir. Bu ise, bileşenleri cinsinden $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_n)$ ve $\mathbf{y} := (y_1, \ldots, y_n)$ olmak üzere, $h^2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} (f_j(\mathbf{x}) - y_j)^2$ gerçeklendiğinden,

$$0 = \frac{\partial h^2}{\partial x_k}(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{n} 2(f_j(\mathbf{b}) - y_j)\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{b}) \tag{2.4.1}$$

olması demektir. (2.4.1) eşitliği, n adet $f_j(\mathbf{b}) - y_j$ bilinmeyeninden ve n tane denklemden oluşan homojen bir lineer sistemi gösterir. Hipotez nedeniyle bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı $2^n \Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{b}) \neq 0$ olduğundan, Cramer Kuralı[10] kullanılarak (2.4.1) sisteminin sadece sıfır çözümünün olduğu elde edilir: yani, her $j = 1, \ldots, n$ için $f_j(\mathbf{b}) - y_j = 0$ gerçeklenir. Dolayısıyla $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{b})$, ve bundan dolayı $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(B_r(\mathbf{a}))$ olur. O hâlde, $\mathbf{y}$ noktası keyfî olduğundan, $B_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \subseteq \mathbf{f}(B_r(\mathbf{a}))$ içermesi sağlanır. □

Şimdi de, $\mathbf{f}$ fonksiyonu sürekli ve bire-bir ve $\Delta_{\mathbf{f}}$ Jacobi determinantı sıfırdan farklı olduğunda, $\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu görelim.

Teorem 2.4.2. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^n$ sürekli olsun. Eğer V üzerinde $\mathbf{f}$ fonksiyonu bire-birse ve $\mathbf{f}$ fonksiyonunun birinci-mertebeden tüm kısmî türevleri V üzerinde varsa, aynı zamanda da V üzerinde $\Delta_{\mathbf{f}} \neq 0$ oluyorsa, o zaman $\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyonu $\mathbf{f}(V)$ üzerinde süreklidir.*

Kanıt. Teorem 1.6.4'den dolayı, V kümesinin $\mathbb{R}^n$ içinde açık olan her W altkümesi için $\mathbf{f}(W)$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ içinde açık olduğu gösterilirse kanıt tamamlanır. $\mathbf{b} \in \mathbf{f}(W)$, yani bir $\mathbf{a} \in W$ için $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ olsun. W kümesi açık olduğundan bir $q > 0$ sayısı, $B_q(\mathbf{a}) \subseteq W$ olacak biçimde vardır: bu, $0 < r < q$ sağlanacak biçimde bir r sayısı seçilirse, $\overline{B_r(\mathbf{a})} \subseteq W$ olması demektir. $\mathbf{f}$ fonksiyonu W kümesini içeren V kümesi üzerinde bire-bir olduğundan, Lemma 2.4.1 nedeniyle bir $\rho > 0$ sayısı,

$$B_\rho(\mathbf{b}) = B_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \subseteq \mathbf{f}(B_r(\mathbf{a}))$$

gerçeklenecek biçimde vardır: bu ise, $\mathbf{f}(B_r(\mathbf{a})) \subseteq \mathbf{f}(W)$ olduğundan, $\mathbf{f}(W)$ kümesinin açık olması demektir. □

Açıklama 2.4.3. Teorem 2.4.2'nin ifadesindeki $\Delta_{\mathbf{f}} \neq 0$ olma koşulu kimi durumlarda kaldırılabilir: her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) := x^3$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve bu fonksiyonun tersi olan $f^{-1}(x) = \sqrt{[3]}x$ fonksiyonlarının ikisi de $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir, ancak $\Delta_f(0) = f'(0) = 0$ olur.

[10]Bkz. [16, Theorem 2.104].

Bu kısıma ismini veren sonucunu kanıtlamadan önce son olarak, sürekli-diferansiyellenebilir bir fonksiyonun Jacobi determinantı bir noktada sıfır değilse, bu noktanın 'yakınında' ilgili fonksiyonun bire-bir olması gerektiğini göreceğiz.

Lemma 2.4.4. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_n) : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olsun. Eğer bir $\mathbf{a} \in V$ için $\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ ise, bu durumda bir $r > 0$ sayısı; $B_r(\mathbf{a}) \subseteq V$, $\mathbf{f}$ fonksiyonu $B_r(\mathbf{a})$ üzerinde bire-bir, her $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})$ için $\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$, ve her $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n \in B_r(\mathbf{a})$ için*

$$\det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c}_i) \right]_{n \times n} \neq 0$$

olacak biçimde vardır.

Kanıt. Her $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{n^2}$ için $h : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) := \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_i) \right]_{n \times n}$$

olarak tanımlansın. Tanımı gereğince bir matrisin determinantı matrisin girdilerinden toplama, çıkarma ve çarpma işlemleriyle elde edildiğinden ve hipotezden dolayı V üzerinde $\mathbf{f}$ fonksiyonu sürekli-diferansiyellenebilir olduğundan, h fonksiyonu $V^n := \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ tane}}$ üzerinde süreklidir. $h(\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{a}) = \Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ olduğundan, o hâlde, bir $r > 0$ sayısı $B_r(\mathbf{a}) \subseteq V$ ve her $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n \in B_r(\mathbf{a})$ için $h(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) \neq 0$ gerçeklenecek biçimde vardır. Özel olarak da, her $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})$ için $\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}) \neq 0$ sağlanır. Son olarak, eğer $\mathbf{f}$ fonksiyonu $B_r(\mathbf{a})$ kümesi üzerinde bire-bir olmasaydı, yani $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ olan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_r(\mathbf{a})$ noktaları için $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ gerçeklenseydi, Örnek 1.4.2 nedeniyle $L(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \subseteq B_r(\mathbf{a})$ olduğundan, Sonuç 2.3.3 kullanılarak,

$$0 = f_i(\mathbf{y}) - f_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{c}_i)(y_k - x_k) \tag{2.4.2}$$

eşitliğinin $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} := (y_1, \ldots, y_n)$, bir $\mathbf{c}_i \in L(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, ve $i = 1, \ldots, n$ için doğru olması gerektiği sonucuna ulaşılırdı. Ancak bu, her $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n \in B_r(\mathbf{a})$ için $h(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) \neq 0$ sağlandığından, n tane $(y_k - x_k)$ bilinmeyenli n adet lineer denklemden oluşan (2.4.2) sisteminin katsayılar matrisinin determinanının sıfırdan farklı olmasını, yani−Cramer Kuralı'ndan dolayı−bu sistemin sadece sıfır çözümünün bulunmasını, dolayısıyla her $k = 1, \ldots, n$ için $y_k - x_k = 0$ eşitliğinin sağlanmasını, ve bu nedenle de varsayımla çelişen $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ olmasını gerektirirdi. $\mathbf{f}$ fonksiyonu, o hâlde, $B_r(\mathbf{a})$ açık topu üzerinde bire-bir olmak zorundadır. □

Artık, bu kısmın temel sonucunu kanıtlayabilecek durumdayız.

Teorem 2.4.5 (Ters Fonksiyon Teoremi)**.** *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{f} : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir, ve $W := \mathbf{f}(V)$ olsun. Eğer bir $\mathbf{a} \in V$ için $\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ ise, bu durumda*

(i) *$\mathbf{a} \in V_0$ ve $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in W_0$;*

(ii) *$\mathbf{f} : V_0 \to W_0$ bire-bir ve örten ve $\mathbf{f}^{-1} : W_0 \to V_0$ bire-bir ve örten;*

(iii) *$\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyonu W_0 üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir; ve*

(iv) *her $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in W_0$ için*

$$D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}$$

olacak şekilde $V_0 \subseteq V$ ve $W_0 \subseteq W$ açık kümeleri vardır.

Kanıt. Bileşenleri cinsinden $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_n)$ olmak üzere, Lemma 2.4.4 nedeniyle $\mathbf{a}$ merkezli bir B açık topu, B üzerinde $\Delta_{\mathbf{f}} \neq 0$ ve her $\mathbf{c}_i \in B$ için

$$\Delta := \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{c}_i) \right]_{n \times n} \neq 0$$

olacak biçimde vardır. Teorem 2.4.2'den, $\mathbf{f}(B)$ üzerinde $\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyonu süreklidir. $\mathbf{a}$ merkezli ve yarıçapı B açık topunun yarıçapından kesin küçük olan bir açık top B_0 olsun. Bu durumda $\overline{B_0} \subseteq B$ gerçeklenir ve Lemma 2.4.1 nedeniyle $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ merkezli bir B_1 açık topu, $B_1 \subseteq \mathbf{f}(B_0)$ sağlanacak biçimde bulunur.

Şimdi, $\mathbf{y}_0 \in B_1$ noktası ve $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ sayıları sabitlensin. $t \in \mathbb{R}$ sayısı $\mathbf{y}_0 + t\mathbf{e}_k \in B_1$ olacak biçimde alınarak,

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_0) \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}_1 := \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_0 + t\mathbf{e}_k)$$

olarak tanımlansın. Sonuç 2.3.3'den dolayı $\mathbf{c}_i \in L(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_1)$ noktaları, $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\nabla f_i(\mathbf{c}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{t} = \frac{f_i(\mathbf{x}_1) - f_i(\mathbf{x}_0)}{t} \tag{2.4.3}$$

eşitliği sağlanacak şekilde vardır. Her $j = 1, \ldots, n$ için, $\mathbf{x}_0$ ve $\mathbf{x}_1$ vektörlerinin j'inci bileşenleri, sırasıyla, $x_0(j)$ ve $x_1(j)$ ile gösterilsin. (2.4.3) eşitlikleri B açık topunun seçimi nedeniyle katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olan

n tane $(x_1(j)-x_0(j))/t$ bilinmeyenli n adet lineer denklemden oluşan bir sistemi gösterdiğinden, Cramer Kuralı nedeniyle (2.4.3) sisteminin çözümlerinin

$$\frac{f_j^{-1}(\mathbf{y}_0+t\mathbf{e}_k)-f_j^{-1}(\mathbf{y}_0)}{t}=\frac{x_1(j)-x_0(j)}{t}=:\mathcal{Q}_j(t) \tag{2.4.4}$$

eşitliklerini sağladığı görülür: burada $\mathcal{Q}_j(t)$ sembolü, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun bileşen fonksiyonlarının ya da bunların birinci-mertebeden kısmî türevlerinin, sırasıyla, $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_0$ ya da $\mathbf{c}_i$ noktalarındaki değerlerini girdileri olarak kabul eden determinantların bir oranını göstermektedir. $t \to 0$ olması $\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_0$, $\mathbf{c}_i \to \mathbf{x}_0$, ve $\mathbf{y}_0+t\mathbf{e}_k \to \mathbf{y}_0$ olmasını gerektirdiğinden, $t \to 0$ için $\mathcal{Q}_j(t)$ fonksiyonu $\mathcal{Q}_j$ fonksiyonuna yakınsar: buradaki $\mathcal{Q}_j$ sembolü ise, $\mathbf{f}$ fonksiyonunun bileşen fonksiyonlarının ya da bunların birinci-mertebeden kısmî türevlerinin $\mathbf{x}_0=\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_0)$ noktasındaki değerlerini girdileri olarak kabul eden determinantların bir oranıdır. $\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyonu $\mathbf{f}(B)$ üzerinde sürekli olduğundan, o hâlde, her $\mathbf{y}_0 \in B_1$ için $\mathcal{Q}_j$ fonksiyonunun sürekli olduğu elde edilmiş olur. Dolayısıyla, (2.4.4) eşitliğinde $t \to 0$ için limite geçilirse, f_j^{-1} fonksiyonunun birinci-mertebeden kısmî türevlerinin $\mathbf{y}_0$ noktasında var ve $\mathcal{Q}_j$ değerine eşit oldukları görülmüş olur: yani, $\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyonu B_1 üzerinde sürekli-diferansiyellenebilirdir.

$\mathbf{f}(\mathbf{a})$ merkezli ve yarıçapı B_1 açık topunun yarıçapından kesin küçük olan bir W_0 açık topu alınarak,

$$V_0 := \mathbf{f}^{-1}(W_0) \cap B_0$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, âşikâr olarak, (i), (ii), ve (iii) gerçeklenir. Bunlara ek olarak, Zincir Kuralı ve Sonuç 2.2.17 kullanıldığında, her $\mathbf{y} \in W_0$ için

$$I_n = DI_n(\mathbf{y}) = D(\mathbf{f}\circ\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{y}) = D\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$$

olduğu görülür; bu ise, matris terslerinin tek türlü belirli olmasından dolayı,

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = [D\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))]^{-1}$$

eşitliğinin sağlanması, yani (iv) özelliğinin de gerçeklenmesi anlamına gelir. □

Açıklama 2.4.6. Teorem 2.4.5'in hipotezindeki $\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ olması koşulu zayıflatılamaz: eğer $\mathbf{f} : B_r(\mathbf{a}) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa, ve $\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyon olarak varsa ve $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ noktasında diferansiyellenebilir ise, bu durumda $\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ olmak zorundadır. Gerçekten, verilen koşullar altında $\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = 0$ olsaydı, Sonuç 2.2.17 ve Zincir Kuralı nedeniyle

$$I_n = D(\mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{f})(\mathbf{a}) = D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(\mathbf{a}))D\mathbf{f}(\mathbf{a})$$

olması gerekirdi; bu ise, determinanta geçildiğinde,

$$1 = \Delta_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\Delta_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = 0$$

çelişkisine ulaştırırdı.

Açıklama 2.4.7. Teorem 2.4.5'in hipotezindeki $\mathbf{f}$ fonksiyonunun V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olması koşulu zayıflatılamaz: her $x \neq 0$ gerçel sayısı için $f(x) := x + 2x^2 \sin(1/x)$ ve $f(0) = 0$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilirdir, ve $f'(0) = 1 \neq 0$ sağlanır; ancak her $k \in \mathbb{N}$ için

$$f\left(\frac{2}{(4k-1)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k-3)\pi}\right)$$

olduğundan, f fonksiyonu sıfır noktasını içeren hiçbir V_0 açık kümesi üzerinde bire-bir olamaz.

Açıklama 2.4.8. Teorem 2.4.5'in ifadesindeki V_0 kümesi, V kümesi bağlantılı bile olsa, genel olarak V kümesinin bir öz alt-kümesidir: $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ve her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\mathbf{f}(x, y) := (x^2 - y^2, xy)$ ise, $(x, y) \in V$ olması durumunda $\Delta_{\mathbf{f}}(x, y) = 2(x^2 + y^2) \neq 0$ olur; ancak her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\mathbf{f}(x, -y) = \mathbf{f}(-x, y)$ olduğundan, $\mathbf{f}$ fonksiyonu V üzerinde bire-bir değildir.

Bu kısmın sonunda, Ters Fonksiyon Teoremi'nin önemli bir uygulaması olarak, bir $\mathbb{R}^p$ uzayından bir $\mathbb{R}^n$ uzayına tanımlı ve $\mathbb{R}^{n+p}$ üzerinde ifade edilmiş birtakım bağıntılar vâsıtasıyla$-$aşağıdaki örnekte verildiği gibi$-$kapalı olarak tanımlanan fonksiyonlar incelenecektir.

Örnek 2.4.9. $x_0 \neq 0$ olmak üzere, $x_0^2 + s_0^2 + t_0^2 = 1$ olsun. Bu durumda bir $r > 0$ sayısı ve $B_r((s_0, t_0))$ açık topu üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olan bir $g(s, t)$ fonksiyonu, $x_0 = g(s_0, t_0)$ ve $(s, t) \in B_r((s_0, t_0))$ olan (s, t) noktaları için $x = g(s, t)$ ve $x^2 + s^2 + t^2 = 1$ sağlanacak biçimde bulunur: Gerçekten, $x^2 + s^2 + t^2 = 1$ bağıntısı

$$x = \pm\sqrt{}(1 - s^2 - t^2)$$

eşitliklerine denk olduğundan, $x_0 > 0$ ise $g(s, t) := \sqrt{}(1 - s^2 - t^2)$ olarak tanımlanırsa, Zincir Kuralı kullanılarak,

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{-s}{\sqrt{}(1 - s^2 - t^2)} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{-t}{\sqrt{}(1 - s^2 - t^2)}$$

olduğu görülür: yani, g fonksiyonu $s^2 + t^2 < 1$ koşulunu sağlayan noktalardan oluşan iki-boyutlu birim topun içindeki her (s,t) noktasında diferansiyellenebilirdir. Diğer taraftan, $x_0^2 + s_0^2 + t_0^2 = 1$ ve $x_0 > 0$ olduğundan, (s_0, t_0, x_0) noktası üç-boyutlu stx-uzayının birim topunun sınırındadır ve st-düzleminin x_0 birim üzerinde yer alır. Özel olarak, $r := 1 - \sqrt{(1 - x_0^2)}$ olarak alınırsa, $(s,t) \in B_r((s_0, t_0))$ ve $s^2 + t^2 < 1$ olur. O hâlde, g fonksiyonu $B_r((s_0, t_0))$ üzerinde sürekli-diferansiyellenebilirdir. $x_0 < 0$ olması durumunda ise, benzer argümanlar $g(s,t) := -\sqrt{(1 - s^2 - t^2)}$ fonksiyonu için işletilerek sonuca ulaşılır.

Kapalı olarak verilen bağıntılar, Örnek 2.4.9'da olduğu gibi, her zaman açık olarak *çözülemez.* Aşağıdaki önemli netice, bu tip çözümlerin yapılabileceği koşulları sabitler. $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{t} := (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$ vektörleri için $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ sembolü, $\mathbb{R}^{n+p}$ uzayına ait $(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_p)$ vektörünü gösterecektir.

Teorem 2.4.10 (Kapalı Fonksiyon Teoremi)**.** *$V \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ bir açık küme olmak üzere, $\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_n) : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olsun. Aynı zamanda, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{R}^p$ olmak üzere, bir $(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0) \in V$ için $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$ sağlansın. Eğer*

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0) \neq 0$$

ise, $\mathbf{t}_0$ noktasını içeren bir açık $W \subseteq \mathbb{R}^p$ kümesi ve tek türlü belirli sürekli-diferansiyellenebilir bir $\mathbf{g} : W \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu, $\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$ ve her $\mathbf{t} \in W$ için $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. Her $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in V$ için,

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) := (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \dots, F_n(\mathbf{x}, \mathbf{t}), t_1, \dots, t_p) \tag{2.4.5}$$

olsun. Bu durumda, girdileri F_j fonksiyonlarının t_k değişkenlerine göre birinci-mertebeden kısmî türevlerinden oluşan $(n \times p)$-boyutlu bir matris B olmak üzere, $\widetilde{\mathbf{F}} : V \to \mathbb{R}^{n+p}$ fonksiyonu için

$$D\widetilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{n \times n} & B \\ O_{p \times n} & I_p \end{bmatrix}_{(n+p) \times (n+p)}$$

olur. En alt satır kullanılıp açılarak $D\widetilde{\mathbf{F}}$ kare matrisinin determinantı hesaplanırsa, hipotez nedeniyle,

$$\Delta_{\widetilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0) = 1 \cdot \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0) \neq 0$$

olduğu görülür. Aynı zamanda $\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0) = (\mathbf{0}, \mathbf{t}_0)$ eşitliği de sağlandığından, Ters Fonksiyon Teoremi kullanılarak $(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)$ ve $(\mathbf{0}, \mathbf{t}_0)$ noktalarını içeren, sırasıyla, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ ve $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ açık kümelerinin; $\widetilde{\mathbf{F}} : \Omega_1 \to \Omega_2$ bire-bir ve örten, $\mathbf{G} := \widetilde{\mathbf{F}}^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ bire-bir ve örten, ve $\mathbf{G}$ fonksiyonu Ω_2 üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olacak şekilde var oldukları görülür.

Bileşen fonksiyonları cinsinden $\mathbf{G} := (G_1, \ldots, G_n, G_{n+1}, \ldots, G_{n+p})$ olmak üzere, $\phi := (G_1, \ldots, G_n)$ olsun. $\mathbf{G} = \widetilde{\mathbf{F}}^{-1}$ fonksiyonu Ω_2 kümesini bire-bir ve örten olarak Ω_1 kümesine gönderdiğinden, (2.4.5) nedeniyle, her $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Omega_1$ için

$$\phi\left(\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{t})\right) = \mathbf{x}, \tag{2.4.6}$$

ve her $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Omega_2$ için

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{t}) = (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \tag{2.4.7}$$

gerçeklenir. Şimdi, $W := \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^p \mid (\mathbf{0}, \mathbf{t}) \in \Omega_2\}$ kümesi üzerinde $\mathbf{g}$ fonksiyonu, $\mathbf{g}(\mathbf{t}) := \phi(\mathbf{0}, \mathbf{t})$ olarak tanımlansın. Ω_2 kümesi $\mathbb{R}^{n+p}$ içinde açık olduğundan, W kümesi $\mathbb{R}^p$ içinde açıktır. $\mathbf{G}$ fonksiyonu Ω_2 üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir ve bu fonksiyonun ilk n tane bileşen fonksiyonu ϕ olduğundan da, $\mathbf{g} : W \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu W üzerinde sürekli-diferansiyellenebilirdir. Diğer taraftan, (2.4.5) ve (2.4.6) nedeniyle,

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \phi(\mathbf{0}, \mathbf{t}_0) = \phi\left(\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{t}_0)\right) = \mathbf{x}_0$$

sağlanır. Son olarak, (2.4.5) ve (2.4.7) özellikleri kullanılarak, her $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \Omega_2$ için $\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{t}) = \mathbf{x}$ olarak elde edilir: bu ise, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ özel durumu göz önüne alındığında, her $\mathbf{t} \in W$ için $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ olması demektir.

Kanıtı tamamlamak için gösterilmesi gereken son olgu, $\mathbf{g}$ fonksiyonunun tek türlü belirli olduğudur. Ancak, eğer bir $\mathbf{h} : W \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için $\mathbf{t} \in W$ olduğunda $\mathbf{F}(\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$, yani $\widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = (\mathbf{0}, \mathbf{t}) = \widetilde{\mathbf{F}}(\mathbf{g}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ sağlanıyorsa, $\widetilde{\mathbf{F}} : \Omega_1 \to \Omega_2$ fonksiyonu bire-bir olduğundan, her $\mathbf{t} \in W$ için $\mathbf{h}(\mathbf{t}) = \mathbf{g}(\mathbf{t})$ olması gerekir. □

Açıklama 2.4.11. Teorem 2.4.10, bir varlık teoremidir: bir $\mathbf{g}$ fonksiyonunun var olduğunu, bu fonksiyonun açık bir formülle nasıl ifade edilebileceği hakkında hiçbir bilgi vermeden garantiler. Böyle bir fonksiyonun var olduğunu bilmekse, uygulamalarda karşılaşılabilecek birçok durumda bile, fonksiyon için açık bir formül bulmaktan daha az önemli değildir.

Örnek 2.4.12. $F(x,s,t) := sx^2 + tx^3 + 2\surd(t+s) + t^2x^4 - x^5\cos t - x^6 - 1$ fonksiyonu için $F_x = 2sx + 3tx^2 + 4t^2x^3 - 5x^4\cos t - 6x^5$ kısmî türevi $(1,1,0)$ noktasında sıfır olmadığından ve $F(1,1,0) = 0$ sağlandığından, $n = 1$, $p = 2$, $x_0 = 1$, ve $(s_0, t_0) = (1,0)$ için Kapalı Fonksiyon Teoremi F fonksiyonuna uygulandığında; bir $B_r((1,0))$ açık topu üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olup $g(1,0) = 1$ koşulunu sağlayan ve her $(s,t) \in B_r((1,0))$ ve $x = g(s,t)$ için

$$sx^2 + tx^3 + 2\surd(t+s) + t^2x^4 - x^5\cos t - x^6 = 1$$

eşitliğini gerçekleyen bir $g(s,t)$ fonksiyonunun var olduğu kanıtlanmış olur. Bu g fonksiyonunu açık bir formülle ifade etmekse, mümkün değildir.

Açıklama 2.4.13. Açık bir formülle ifade edilebilen durumlarda bile, Kapalı Fonksiyon Teoremi'ni uygulamak, genel olarak, bir bağıntıyı bazı değişkenleri için çözmeye çalışmaktan daha kolaydır: Örnek 2.4.9 yeniden göz önüne alınırsa, $F(x,s,t) := 1 - x^2 - s^2 - t^2$ fonksiyonu için $F_x = -2x$ olduğundan, Kapalı Fonksiyon Teoremi'nden dolayı, her $x_0 \neq 0$ için bir sürekli-diferansiyellenebilir $x = g(s,t)$ fonksiyonunun var olduğu hemen görülür. Bu kolaylık, birden çok diferansiyellenebilir fonksiyonun aynı anda var olduklarının gösterilmek istendiği durumlar için de geçerlidir.

Örnek 2.4.14. $(x,y,z,w) = (2,1,-1,-2)$ noktası merkezli bir B açık topunun üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olan, her $(x,y,z,w) \in B$ için

$$u^2 + v^2 + w^2 = 29 \quad \text{ve} \quad \frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} = 17$$

denklemlerini sağlayan, ve $u(2,1,-1,-2) = 4$ ve $v(2,1,-1,-2) = 3$ koşullarını gerçekleyen $u, v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları vardır: Gerçekten, $n = 2$, $p = 4$, ve

$$\mathbf{F}(u,v,x,y,z,w) := (u^2 + v^2 + w^2 - 29, u^2/x^2 + v^2/y^2 + w^2/z^2 - 17)$$

alınırsa, $\mathbf{F}(4,3,2,1,-1,-2) = (0,0)$ olarak elde edilir; diğer taraftan da,

$$F_1(u,v,x,y,z,w) := u^2 + v^2 + w^2 - 29$$

ve

$$F_2(u,v,x,y,z,w) := u^2/x^2 + v^2/y^2 + w^2/z^2 - 17$$

için

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} 2u & 2v \\ 2u/x^2 & 2v/y^2 \end{bmatrix} = 4uv\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$

determinantının $u = 4$, $v = 3$, $x = 2$, ve $y = 1$ için sıfır olmadığı görülür. Böylece, Kapalı Fonksiyon Teoremi'nden, verilen koşulları sağlayan u ve v fonksiyonlarının var oldukları sonucuna ulaşılır.

Problemler

1. Lemma 2.4.1'in hipotezinde verilen $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\overline{B_r(\mathbf{a})}$ üzerinde bire-bir olması gerektiği yolundaki koşulun, her $\mathbf{x} \in \partial B_r(\mathbf{a})$ için $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{a})$ olması gerektiği koşuluyla değiştirilebileceğini gösteriniz.

2. $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}$ ve her $(x, y) \in E$ için $\mathbf{f}(x, y) := (x + y, xy)$ olsun.

(a) $\mathbf{f} : E \to \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 2\sqrt{t},\ t > 0\}$ fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğunu gösteriniz, ve $\mathbf{f}^{-1}(s, t)$ fonksiyonunu belirleyiniz.

(b) Ters Fonksiyon Teoremi'ni kullanarak, $x \neq y$ için $D(\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(x, y))$ tam türevini hesaplayınız.

(c) (a) kısmında elde edilen sonucu kullanarak, $D(\mathbf{f}^{-1})(s, t)$ tam türevini doğrudan hesaplayınız.

3. $u \in \mathbb{R}$, $v > 0$, ve $\mathbf{f}(u, v) := (u^3 - v^2, \sin u - \ln v)$ olsun. $(-1, 0)$ noktası etrafında $\mathbf{f}^{-1}$ fonksiyonunun var ve diferansiyellenebilir olduğunu ispatlayınız, ve $D(\mathbf{f}^{-1})(-1, 0)$ tam türevini hesaplayınız.

4. Bir $r > 0$ için, $\mathbf{f} := (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun birinci-mertebeden kısmî türevleri $B_r((x_0, y_0))$ açık topu üzerinde sürekli olsun. Eğer $\Delta_{\mathbf{f}}(x_0, y_0) \neq 0$ ise,

$$\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x}(\mathbf{f}(x_0, y_0)) = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta_{\mathbf{f}}(x_0, y_0)}, \qquad \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(\mathbf{f}(x_0, y_0)) = \frac{-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta_{\mathbf{f}}(x_0, y_0)},$$

$$\frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x}(\mathbf{f}(x_0, y_0)) = \frac{-\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta_{\mathbf{f}}(x_0, y_0)}, \qquad \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y}(\mathbf{f}(x_0, y_0)) = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta_{\mathbf{f}}(x_0, y_0)}$$

eşitliklerinin sağlandığını gösteriniz.

5. $u(1, 1) = 1$, $v(1, 1) = 1$, $w(1, 1) = -1$ koşullarını, ve $B_r((1, 1))$ üzerinde

$$u^5 + xv^2 - y + w = 0$$
$$v^5 + yu^2 - x + w = 0$$
$$w^4 + y^5 - x^4 = 1$$

denklemlerini sağlayan, sürekli-diferansiyellenebilir $u(x, y)$, $v(x, y)$, ve $w(x, y)$ fonksiyonlarının ve bir $r > 0$ gerçel sayısının var olduğunu ispatlayınız.

6. (x_0, y_0) noktasının 'yakınında' sürekli-diferansiyellenebilir olan ve

$$xu^2 + yv^2 + xy = 9$$
$$xv^2 + yu^2 - xy = 7$$

denklemlerini sağlayan gerçel-değerli $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonlarının bulunabilmesi için, (x_0, y_0, u_0, v_0) noktasının gerçeklemesi gereken koşulları belirleyiniz. Bu koşullar sağlandığında, çözüm fonksiyonlarının $u^2 + v^2 = 16/(x + y)$ eşitliğini sağladıklarını gösteriniz.

7.

$$\begin{aligned} u^2 + sx + ty &= 0 \\ v^2 + tx + sy &= 0 \\ s^2x + t^2y &= 0 \\ s^2x - t^2y &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

denklemlerini sağlayan sıfırdan farklı x_0, y_0, u_0, v_0, s_0, t_0 sayıları verilmiş olsun. (x_0, y_0) noktasını içeren bir B açık topunun ve B üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olan ve (2.4.8) denklemlerini sağlayan $u(x,y)$, $v(x,y)$, $s(x,y)$, $t(x,y)$ fonksiyonlarının, $u(x_0,y_0) = u_0$, $v(x_0,y_0) = v_0$, $s(x_0,y_0) = s_0$, ve $t(x_0,y_0) = t_0$ gerçeklenecek biçimde var olduklarını kanıtlayınız.

8. $\mathbb{R}^3$ içinde, ***grafiği***

$$\mathcal{G} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$$

olarak tanımlanan bir $F(x,y,z)$ bağıntısı göz önüne alınsın. Eğer $F(x,y,z) = 0$ eşitliği değişkenlerinden birisi için diferansiyellenebilir bir şekilde 'çözülebiliyorsa' (örneğin, (b,c) noktasında diferansiyellenebilir olan ve (b,c) noktası merkezli bir açık topa ait her (y,z) noktası için $F(f(y,z),y,z) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $x = f(y,z)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa), $\mathcal{G}$ grafiğinin (a,b,c) noktasında "bir ***teğet düzlemi***ne sahip olduğu," söylenir. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b,c) noktasında sürekli-diferansiyellenebilir ve $\nabla F(a,b,c) \neq \mathbf{0}$ olsun.

(a) $\mathcal{G}$ grafiğinin (a,b,c) noktasında bir teğet düzlemine sahip olduğunu ispatlayınız.

(b) Eğer Π, denklemi $\lambda(x,y,z) := d$ olan, (a,b,c) noktasından geçen, ve $\lambda(x,b,z) = d$ ve $\lambda(a,y,z) = d$ doğrularının, sırasıyla, $x = a$ noktasında $F(x,b,z) = 0$ ve $y = b$ noktasında $F(a,y,z) = 0$ eğrilerine teğet oldukları düzlem ise, Π düzleminin bir normal vektörünün $\nabla F(a,b,c)$ olduğunu gösteriniz.

9. Eğer $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ise ve $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu için V üzerinde $\Delta_\phi \neq 0$ oluyorsa, $\phi(V)$ kümesinin açık olduğunu kanıtlayınız.

2.5 Ekstremum değerler

§2.3 ve §2.4 kısımlarında elde edilen Taylor Formülü ve Kapalı Fonksiyon Teoremi'nin temel uygulama alanlarından birisi—bu kısımda incelenecek olan—, çok-değişkenli ve gerçel-değerli fonksiyonların optimizasyonudur.

Tanım 2.5.1. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(i) Bir $r > 0$ sayısı her $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})$ için $f(\mathbf{a}) \leqslant f(\mathbf{x})$ olacak biçimde varsa, $f(\mathbf{a})$ değeri f fonksiyonunun bir ***lokal minimum*** değeri olarak adlandırılır.

(ii) Bir $r > 0$ sayısı her $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a})$ için $f(\mathbf{a}) \geqslant f(\mathbf{x})$ olacak biçimde varsa, $f(\mathbf{a})$ değeri f fonksiyonunun bir ***lokal maksimum*** değeri olarak adlandırılır.

(iii) Bir lokal minimum ya da bir lokal maksimum değeri olan bir $f(\mathbf{a})$ değerine, f fonksiyonunun bir ***lokal ekstremum*** değeri denir.

Açıklama 2.5.2. Bir fonksiyon bir lokal ekstremum değerine sahip olmak zorunda *değildir*: her $x \in (0,1)$ için $f(x) := x$ olarak tanımlanan $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir lokal ekstremum değeri yoktur.

Tek-değişkenli bir fonksiyon bir lokal ekstremum değerine sahip olduğu bir noktada türevlenebiliyorsa, bu noktadaki türev değeri sıfır olmak zorundadır; çok-değişkenli bir fonksiyonun kısmî türevlerinin ilgili değişkenlere göre bir-boyutlu türevler oldukları hatırlanırsa, bu tip fonksiyonların bir ekstremum değerine sahip olabilmeleri için gerekli olan bir koşulun kolaylıkla elde edilebileceği de hemen görülür.

Lemma 2.5.3. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun birinci-mertebeden tüm kısmî türevleri $\mathbf{a}$ noktasında varsa ve $f(\mathbf{a})$ bu fonksiyonun bir lokal ekstremum değeri ise, bu durumda $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ olur.*

Kanıt. $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n)$ olsun. Hipotezden dolayı, her $j = 1, \ldots, n$ için, tek-değişkenli $g(t) := f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ fonksiyonu $t = a_j$ noktasında bir lokal ekstremum değerine sahiptir; bu ise, bir-boyutlu teoriden dolayı,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = g'(a_j) = 0,$$

yani $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ olması demektir. □

Açıklama 2.5.4. Lemma 2.5.3, $f(\mathbf{a})$ değeri f fonksiyonunun bir lokal ekstremum değeri ise, ya $\nabla f(\mathbf{a})$ gradyantının tanımlı olmadığını−yani, f fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki birinci-mertebeden kısmî türevlerinden en az birisinin var olmadığını−ya da, eğer tanımlıysa, ilgili gradyantın sıfır vektörüne eşit olduğunu gösterir. Diğer taraftan, yine Lemma 2.5.3 nedeniyle $f(\mathbf{a})$ değerinin bir lokal ekstremum değeri olabilmesi için gerekli olan $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ koşulu, aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi, $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından fonksiyonlar söz konusu olduğunda bile aynı sonuca ulaşabilmek için yeterli bir koşul *değildir.*

Örnek 2.5.5. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $f(x, y) := y^2 - x^2$ şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Açıklama 2.2.13 nedeniyle, f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfındandır; aynı zamanda, $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gerçeklenir. Diğer taraftan, her gerçel x değeri için $f(x, 0) = -x^2 \leqslant 0 = f(\mathbf{0})$ ve her gerçel y değeri için $f(0, y) = y^2 \geqslant 0 = f(\mathbf{0})$ olduğundan, $f(\mathbf{0})$ değeri f fonksiyonunun bir lokal ekstremum değeri değildir.

Örnek 2.5.5'de göz önüne alınan fonksiyonun grafiğinin orijindeki davranışı, aşağıdaki tanıma yol açan motivasyonlardan biridir.

Tanım 2.5.6. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbf{a}$ noktasında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ise ve bir $r_0 > 0$ sayısı

$0 < \rho < r_0$ koşulunu sağlayan her ρ gerçel sayısı için $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{y})$ gerçeklenecek biçimde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_\rho(\mathbf{a})$ noktaları var olacak şekilde bulunabiliyorsa, $\mathbf{a}$ noktasına f fonksiyonunun bir ***eyer noktası*** denir.

§2.3 kısmında tanımlanan ikinci-mertebeden tam diferansiyel kullanılarak, tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan İkinci Türev Testi'nin bir benzeri çok-değişkenli fonksiyonlar için elde edilebilir. Bunun için önce, bir yardımcı sonuç kanıtlanacaktır.

Lemma 2.5.7. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer f fonksiyonunun ikinci-mertebeden tüm kısmî türevleri $\mathbf{a}$ noktasında varsa ve her $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ için $D^{(2)}f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) > 0$ ise, bu durumda bir $m > 0$ sayısı, her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için*

$$D^{(2)}f(\mathbf{a}; \mathbf{x}) \geqslant m \,\|\mathbf{x}\|^2 \tag{2.5.1}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bulunur.

Kanıt. $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ olsun, ve her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için

$$g(\mathbf{x}) := D^{(2)}f(\mathbf{a}; \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{a}) x_j x_k$$

olarak tanımlansın. Hipotez nedeniyle, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ kümesi üzerinde−ve bundan dolayı, H üzerinde de−süreklidir ve pozitif değerler alır. Heine-Borel Teoremi'nden dolayı H kompakt olduğundan, bu, Ekstremum Değer Teoremi nedeniyle, g fonksiyonunun H üzerinde bir $m > 0$ minimum değerine sahip olması anlamına gelir.

Âşikâr olarak, (2.5.1) eşitsizliği $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ için sağlanır; $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ içinse $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\| \in H$ olduğundan, g fonksiyonunun ve m değerinin tanımları nedeniyle,

$$D^{(2)}f(\mathbf{a}; \mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \|\mathbf{x}\|^2 = g\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \|\mathbf{x}\|^2 \geqslant m \,\|\mathbf{x}\|^2$$

gerçeklenir: (2.5.1) eşitsizliği, o hâlde, her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için doğrudur. □

Teorem 2.5.8 (İkinci Türev Testi)**.** *V kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayının içinde açık, $\mathbf{a} \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ olsun. Aynı zamanda, f fonksiyonunun ikinci-mertebeden tüm kısmî türevlerinin V üzerinde var ve $\mathbf{a}$ noktasında sürekli oldukları kabul edilsin.*

(i) *Eğer her $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ için $D^{(2)}f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) > 0$ ise, $f(\mathbf{a})$ değeri f fonksiyonunun bir lokal minimum değeridir.*

(ii) *Eğer her* $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ *için* $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) < 0$ *ise,* $f(\mathbf{a})$ *değeri* f *fonksiyonunun bir lokal maksimum değeridir.*

(iii) *Eğer* $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h})$ *tam diferansiyeli* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ *için hem negatif hem de pozitif değerler alıyorsa,* $\mathbf{a}$ *noktası* f *fonksiyonunun bir eyer noktasıdır.*

Kanıt. V kümesinin açık olduğu kullanılarak bir $r > 0$ sayısı, $B_r(\mathbf{a}) \subseteq V$ olacak biçimde alınsın. İlk olarak, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$ olan, ve yeterince küçük $\mathbf{h}$ vektörleri için

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|^2\varepsilon(\mathbf{h}) \tag{2.5.2}$$

eşitliğini gerçekleyen bir $\varepsilon : B_r(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun var olduğu gösterilecektir. $\varepsilon(\mathbf{0}) := 0$, ve $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ olan her $\mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$ için

$$\varepsilon(\mathbf{h}) := \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \frac{1}{2}D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, her $\mathbf{h} \in B_r(\mathbf{0})$ için (2.5.2) eşitliği gerçeklenir. Diğer taraftan, $\mathbf{h} := (h_1, \ldots, h_n) \in B_r(\mathbf{0})$ noktası sabitlenerek hipotez nedeniyle doğru olan $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ koşulu göz önüne alınırsa, Taylor Formülü'nden dolayı, bir $\mathbf{c} \in L(\mathbf{a};\mathbf{a}+\mathbf{h})$ için

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}D^{(2)}f(\mathbf{c};\mathbf{h}),$$

yani

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \frac{1}{2}D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) &= \frac{1}{2}\left(D^{(2)}f(\mathbf{c};\mathbf{h}) - D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h})\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a})\right)h_j h_k \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise, her $k, j \in \{1, \ldots, n\}$ için $|h_j h_k| \leqslant \|\mathbf{h}\|^2$ sağlandığından ve f fonksiyonunun ikinci-mertebeden tüm kısmî türevleri $\mathbf{a}$ noktasında sürekli olduğundan, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için

$$0 \leqslant |\varepsilon(\mathbf{h})| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a})\right|\right) \to 0$$

olması demektir: yani, $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$ özelliği de sağlanır. Böylece, tanımlanan $\varepsilon : B_r(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun istenen özellikleri sağladığı görülmüş olur.

Şimdi, eğer $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ için $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) > 0$ ise, Lemma 2.5.7 ile verilen (2.5.1) eşitsizliği ve (2.5.2) eşitliği nedeniyle, yeterince küçük $\mathbf{h}$ vektörleri için

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \geqslant \left(\frac{m}{2} + \varepsilon(\mathbf{h})\right) \|\mathbf{h}\|^2$$

gerçeklenir; bu ise, $m > 0$ olduğundan ve $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ için $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$ sağlandığından, yeterince küçük $\mathbf{h}$ vektörleri için $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) > 0$ olması anlamına gelir: diğer bir deyişle, $f(\mathbf{a})$ değeri f fonksiyonunun bir lokal minimum değeridir. Benzer argümanlarla, $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ için $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) < 0$ ise, $f(\mathbf{a})$ değerinin f fonksiyonunun bir lokal maksimum değeri olduğu da elde edilir. Böylece, (i) ve (ii) önermeleri kanıtlanmış olur.

Son olarak (iii) ile verilen önermeyi kanıtlamak için, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ sabitlenerek (2.5.2) eşitliğinin her $t \in \mathbb{R}$ için

$$f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = t^2 \left(\frac{1}{2} D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|^2 \varepsilon(t\mathbf{h})\right)$$

olmasını gerektirdiği gözlemlensin: bu, $t \to 0$ için $\varepsilon(t\mathbf{h}) \to 0$ olduğundan, yeterince küçük t sayıları için, $f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ ve $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h})$ değerlerinin aynı işaretli olmaları demektir; diğer bir deyişle, eğer $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h})$ tam diferansiyeli $\mathbf{h}$ vektörü değişirken hem negatif hem de pozitif değerler alıyorsa, $\mathbf{a}$ noktası f fonksiyonunun bir eyer noktasıdır. □

Açıklama 2.5.9. Teorem 2.5.8'deki ikinci-mertebeden tam diferansiyelin gerçeklediği kesin eşitsizlikler zayıflatılamaz. $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h}) \leqslant 0$ koşulunu sağlayan, fakat $f(\mathbf{a})$ değerinin f fonksiyonunun bir lokal minimum değeri ya da $\mathbf{a}$ noktasının f fonksiyonunun bir eyer noktası olduğu fonksiyonlar vardır: örneğin, $f(0,0)$ değeri $f(x,y) := x^4 + y^2$ fonksiyonunun bir lokal minimum değeri, $(0,0)$ noktası $g(x,y) := x^3 + y^2$ fonksiyonunun bir eyer noktasıdır.

Genel olarak, $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h})$ tam diferansiyelinin işaretini belirlemek pratikte kolay değildir. İki-boyutlu Öklidyen uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonlar için, $D^{(2)}f(\mathbf{a};\mathbf{h})$ tam diferansiyeli bir ***kuadratik form***dur: yani, A, B, C gerçel sayılar olmak üzere, $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ yapısındadır. Kuadratik formların işaretleri ise, ***diskriminant***ları olarak adlandırılan $D := B^2 - AC$ değeri yardımıyla, aşağıdaki yardımcı sonucun gösterdiği gibi, tamamen belirlenir.

Lemma 2.5.10. *A, B, C gerçel sayılar, $D := B^2 - AC$, ve*

$$\phi(h,k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

olsun.

(i) *Eğer $D < 0$ ise, A ve $(h,k) \neq (0,0)$ için $\phi(h,k)$ aynı işaretlidir.*

(ii) *Eğer $D > 0$ ise, (h,k) ikilileri $\mathbb{R}^2$ üzerinde değiştiğinde $\phi(h,k)$ hem negatif hem de pozitif değerler alır.*

Kanıt. (i) $D < 0$ olsun. Bu durumda $A \neq 0$ gerçeklenir ve $A\phi(h,k)$ ifadesi,

$$A\phi(h,k) = A^2h^2 + 2ABhk + ACk^2 = (Ah + Bk)^2 + |D|k^2$$

şeklinde iki-kare-toplamı olur. $A \neq 0 \neq D$ olduğundan, o hâlde, bu iki kare sayının en az birisi her $(h,k) \neq (0,0)$ için pozitif olmalıdır: dolayısıyla, A ve $(h,k) \neq (0,0)$ için $\phi(h,k)$ aynı işaretlidir.

(ii) $D > 0$ olsun. Bu durumda ya $A \neq 0$ ya da $B \neq 0$ olmalıdır.

Eğer $A \neq 0$ ise, $A\phi(h,k)$ ifadesi

$$A\phi(h,k) = (Ah + Bk - \sqrt{D}k)(Ah + Bk + \sqrt{D}k)$$

şeklinde iki-kare-farkı olur. $Ah + Bk - \sqrt{D}k = 0$ ve $Ah + Bk + \sqrt{D}k = 0$ doğruları hk-düzlemini dört açık bölgeye ayırdığından ve $A\phi(h,k)$ ifadesi bu bölgelerin ikisinin üzerinde pozitif ve diğer ikisinin üzerinde negatif olduğundan, o hâlde, (h,k) ikilileri $\mathbb{R}^2$ üzerinde değiştiğinde $\phi(h,k)$ ifadesinin hem negatif hem de pozitif değerler alması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Eğer $A = 0$ ve $B \neq 0$ ise, bu durumda

$$\phi(h,k) = 2Bhk + Ck^2 = (2Bh + Ck)k$$

olur. $B \neq 0$ olduğundan, $2Bh + Ck = 0$ ve $k = 0$ doğruları hk-düzlemini dört açık bölgeye ayırır. Bu ise, bir önceki durumda kullanılan argüman nedeniyle, (h,k) ikilileri $\mathbb{R}^2$ üzerinde değiştiğinde $\phi(h,k)$ ifadesinin hem negatif hem de pozitif değerler alması anlamına gelir. $\square$

Lemma 2.5.10 yardımıyla, iki-değişkenli fonksiyonlar için İkinci Türev Testi kolaylıkla kullanılabilir bir şekilde ifade edilebilir.

Sonuç 2.5.11. *$V \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık küme, $(a,b) \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$ olsun. Aynı zamanda, f fonksiyonunun ikinci-mertebeden tüm kısmî türevlerinin V üzerinde var ve (a,b) noktasında sürekli oldukları kabul edilsin.*

$$D := f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$$

alınsın.

(i) *Eğer* $D < 0$ *ve* $f_{xx}(a,b) > 0$ *ise,* $f(a,b)$ *değeri* f *fonksiyonunun bir lokal minimum değeridir.*

(ii) *Eğer* $D < 0$ *ve* $f_{xx}(a,b) < 0$ *ise,* $f(a,b)$ *değeri* f *fonksiyonunun bir lokal maksimum değeridir.*

(iii) *Eğer* $D > 0$ *ise,* (a,b) *noktası* f *fonksiyonunun bir eyer noktasıdır.*

Kanıt. $A := f_{xx}(a,b)$, $B := f_{xy}(a,b)$, ve $C := f_{yy}(a,b)$ alarak Teorem 2.5.8 ve Lemma 2.5.10'u kullanmak yeterlidir. □

Açıklama 2.5.12. Eğer $D = 0$ ise, Sonuç 2.5.11 ilgili nokta hakkında bir bilgi vermez: Açıklama 2.5.9'daki f ve g fonksiyonlarının ikisi için de $(0,0)$ noktasında $D = 0$ olur.

Lokal ekstremum değerler, bir fonksiyonun bir noktanın 'yakınında' aldığı en büyük ve en küçük değerlerdir; bu türden değerler, tanımlı olduğu kümenin tamâmının üzerinde de bir fonksiyon tarafından alınabilir.

Tanım 2.5.13. $\mathbb{R}^n$ uzayının $\mathbf{a}$ noktasını içeren bir alt-kümesi V, ve $f : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(i) Eğer her $\mathbf{x} \in V$ için $f(\mathbf{a}) \leqslant f(\mathbf{x})$ ise, $f(\mathbf{a})$ değeri f fonksiyonunun bir ***mutlak minimum*** değeri olarak adlandırılır.

(ii) Eğer her $\mathbf{x} \in V$ için $f(\mathbf{a}) \geqslant f(\mathbf{x})$ ise, $f(\mathbf{a})$ değeri f fonksiyonunun bir ***mutlak maksimum*** değeri olarak adlandırılır.

(iii) Bir mutlak minimum ya da bir mutlak maksimum değeri olan bir $f(\mathbf{a})$ değerine, f fonksiyonunun bir ***mutlak ekstremum*** değeri denir.

Açıklama 2.5.14. Tanım 2.5.1 ve Tanım 2.5.13 karşılaştırılırsa, bir mutlak ekstremum değerinin bir lokal ekstremum değeri olduğu görülür; bir lokal ekstremum değeri ise, genel olarak, bir mutlak ekstremum değeri olmak zorunda değildir: her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) := 3x - x^3$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f(-1)$ ve $f(1)$ değerleri, sırasıyla, bir lokal minimum ve bir lokal maksimum değeridir; ancak bunlar f fonksiyonunun mutlak ekstremum değerleri değildir.

Ekstremum Değer Teoremi'nden dolayı, Öklidyen bir uzayın boş-olmayan ve kompakt bir H alt-kümesi üzerinde sürekli olan gerçel-değerli bir f fonksiyonunun mutlak ekstremum değerleri *vardır*, ve bu değerler f fonksiyonu tarafından *alınır*: yani,

$$f(\mathbf{a}) = \sup_{\mathbf{x}\in H} f(\mathbf{x}) \qquad \text{ve} \qquad f(\mathbf{b}) = \inf_{\mathbf{x}\in H} f(\mathbf{x})$$

gerçeklenecek biçimde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$ noktaları bulunur. İki-değişkenli fonksiyonlar için bu noktalar, bazı durumlarda, Lemma 2.5.3 ile bir-boyutlu teorinin teknikleri birlikte kullanılarak elde edilebilir.

Örnek 2.5.15. $H := \overline{B_1((0,0))}$ üzerinde, $f(x,y) := x^2 - x + y^2 - 2y$ fonksiyonu göz önüne alınsın. §1.5, Problem 4 nedeniyle f fonksiyonu sürekli ve Heine-Borel Teoremi'nden dolayı H kümesi kompakt olduğundan, Ekstremum Değer Teoremi'nden dolayı f fonksiyonu H üzerindeki mutlak ekstremum değerlerini alır. Lemma 2.5.3'ün verdiği fikir kullanılarak $\nabla f(x,y) = (0,0)$ denklemi çözüldüğünde, $(x,y) = (1/2, 1)$ olarak elde edilir; bu ise, $(1/2,1) \notin H^\circ$ olduğundan, f fonksiyonunun mutlak ekstremum değerlerinin ∂H üzerindeki noktalarda alındıkları anlamına gelir. Şimdi,

$$\partial H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$$

olduğu gözlemlenir ve $[0, 2\pi)$ aralığı üzerinde tanımlı

$$h(\theta) := f(\cos\theta, \sin\theta) = 1 - \cos\theta - 2\sin\theta$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa, $h'(\theta) = 0$ olmasının $\tan\theta = 2$, yani $\theta := \arctan 2$ ya da $\theta := \arctan 2 + \pi$ olmasıyla mümkün olacağı görülür. Bu ise, $h''(\theta)$ değerlerinin işaretleri incelendiğinde ve $h(0) = f(1,0) = 1$ olduğu göz önüne alındığında, $\theta = \arctan 2$ değerine karşılık gelen $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ noktasında alınan $f(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5}$ değerinin f fonksiyonunun H üzerindeki mutlak minimum değeri, $\theta = \arctan 2 + \pi$ değerine karşılık gelen $(-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ noktasında alınan $f(-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}) = 1 + \sqrt{5}$ değerinin ise f fonksiyonunun H üzerindeki mutlak maksimum değeri olması demektir.

Ekstremum Değer Teoremi, Öklidyen bir uzayın kompakt−yani, Heine-Borel teoremi nedeniyle, kapalı *ve* sınırlı−bir alt-kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar için geçerlidir; göz önüne alınan küme kapalı ya da sınırlı değilse, adı geçen teorem böyle bir küme üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun mutlak ekstremum değerlerinin varlığı hakkında bir bilgi *vermez.* Yine de, Ekstremum Değer Teoremi uygun biçimde kullanılarak, pratikte karşılaşılabilecek kompakt olmayan bazı kümeler üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar için geçerli olan bir sonuç elde edilebilir.

Teorem 2.5.16. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı olmayan ve kapalı bir küme, ve $f : V \to \mathbb{R}$ sürekli olsun.*

(i) *Eğer V üzerinden $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ için $f(\mathbf{x}) \to \infty$ ise, f fonksiyonu bir mutlak minimum değerine sahiptir fakat bir mutlak maksimum değerine sahip değildir.*

(ii) *Eğer V üzerinden $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ için $f(\mathbf{x}) \to 0$ ise ve $f(\mathbf{x}_0) > 0$ olacak biçimde bir $\mathbf{x}_0 \in V$ noktası varsa, f fonksiyonu bir mutlak maksimum değerine sahiptir.*

(iii) *Eğer V üzerinden $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ için $f(\mathbf{x}) \to 0$ ise ve $f(\mathbf{x}_0) < 0$ olacak biçimde bir $\mathbf{x}_0 \in V$ noktası varsa, f fonksiyonu bir mutlak minimum değerine sahiptir.*

Kanıt. Eğer V üzerinden $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ için $f(\mathbf{x}) \to \infty$ ise, tanım gereğince, f fonksiyonu bir mutlak maksimum değerine sahip değildir. Diğer taraftan, bir $\mathbf{x}_0 \in V$ noktası sabitlenerek $V_0 := \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)\}$ olarak tanımlanırsa, $(-\infty, f(\mathbf{x}_0)]$ aralığı $\mathbb{R}$ içinde kapalı ve f fonksiyonu V üzerinde sürekli olduğundan, §1.6, Problem 3 nedeniyle, $V_0 = f^{-1}((-\infty, f(\mathbf{x}_0)]) \cap V$ kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde kapalı olur. Aynı zamanda, V üzerinden $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ için $f(\mathbf{x}) \to \infty$ olduğundan, $\|\mathbf{x}\|$ değerleri yeterince büyük iken $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ gerçeklenir: yani, V_0 kümesi sınırlıdır. Kapalı ve sınırlı olan V_0 kümesi Heine-Borel Teoremi'nden dolayı kompakt olduğundan, o hâlde, Ekstremum Değer Teoremi nedeniyle, sürekli olan f fonksiyonunun, $\mathbf{a} \in V_0$ olmak üzere, V_0 kümesi üzerinde bir $f(\mathbf{a})$ mutlak minimum değeri vardır. Bu ise, her $\mathbf{x} \in V \setminus V_0$ için $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0) \geqslant f(\mathbf{a})$ olduğundan, $f(\mathbf{a})$ değerinin f fonksiyonunun V üzerindeki mutlak minimum değeri olması anlamına gelir. Böylece (i) kanıtlanmış olur.

(ii) için $f(\mathbf{x}_0) > 0$ ise $V_0 := \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0)\}$ kümesini göz önüne alarak (i) kısmındakine benzer argümanları işletmek, (iii) içinse $-f$ fonksiyonunu göz önüne alarak (ii)'yi kullanmak yeterlidir. □

Örnek 2.5.17. $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ olmak üzere, V üzerinde

$$f(x,y) := \frac{x}{x^2 + (y-1)^2 + 4}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda V kümesi kapalıdır. Aynı zamanda, her $(x,y) \in V$ için $f(x,y) \geqslant 0$ ve her $y \geqslant 0$ için $f(0,y) = 0$ olduğundan, f fonksiyonu y-ekseninin üzerindeki her noktada mutlak minimum değerine sahiptir. Diğer taraftan, $f(x,y)$ değerleri x^{-1} ve $(y-1)^{-2}$ değerlerinin küçük olanından büyük olmadığından, V üzerinden $\|(x,y)\| \to \infty$ için $f(x,y) \to 0$ olur. Apaçık gerçekler olan her $x > 0$ için $f(x,y) > 0$ eşitsizliğinin sağlanması ve f fonksiyonunun sürekli olması, o hâlde, Teorem 2.5.16 (ii)'nin uygulanabilmesi anlamına gelir: yani, f fonksiyonunun V üzerinde bir mutlak maksimum değeri de vardır, ve bu değer ya V° kümesinin ya da pozitif x-ekseninin üzerinde alınmak zorundadır. Şimdi, Lemma 2.5.3 göz önüne alınarak, $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ denkleminin V° kümesi üzerindeki çözümü $(2,1)$ olarak elde edilir. Öte yandan, pozitif x-ekseni üzerine kısıtlanan tek-değişkenli $f(x,0) = x/(x^2+5)$ fonksiyonu kullanılarak $\frac{d}{dx}f(x,0) = 0$ denkleminin çözümleri olarak $x = \pm\sqrt{5}$ bulunur: bu durumda da V kümesinde kalan $x = \sqrt{5}$ göz önüne alınmalıdır. O hâlde, $f(\sqrt{5},0) = \sqrt{5}/10 < 1/4 = f(2,1)$ olduğundan, f fonksiyonunun V üzerindeki mutlak maksimum değerinin, $(2,1)$ noktasında alınan, $1/4$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Bu kısımda son olarak, fonksiyonların, belirli kısıtlamalar altındaki ekstremum değerleri incelenecektir.

Tanım 2.5.18. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, $f : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, ve her $j = 1,\ldots,m$ için $g_j : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(i) Eğer bir $\rho > 0$ sayısı, $\mathbf{x} \in B_\rho(\mathbf{a})$ ve her $j = 1,\ldots,m$ için $g_j(\mathbf{x}) = 0$ olması $f(\mathbf{a}) \leqslant f(\mathbf{x})$ olmasını gerektirecek biçimde varsa, $f(\mathbf{a})$ değerine, $j = 1,\ldots,m$ için $g_j(\mathbf{a}) = 0$ ***kısıtlamaları altında*** f fonksiyonunun bir ***lokal minimum*** değeri denir.

(ii) Eğer bir $\rho > 0$ sayısı, $\mathbf{x} \in B_\rho(\mathbf{a})$ ve her $j = 1,\ldots,m$ için $g_j(\mathbf{x}) = 0$ olması $f(\mathbf{a}) \geqslant f(\mathbf{x})$ olmasını gerektirecek biçimde varsa, $f(\mathbf{a})$ değerine, $j = 1,\ldots,m$ için $g_j(\mathbf{a}) = 0$ ***kısıtlamaları altında*** f fonksiyonunun bir ***lokal maksimum*** değeri denir.

(iii) $j = 1,\ldots,m$ için $g_j(\mathbf{a}) = 0$ kısıtlamaları altında f fonksiyonunun bir lokal minimum ya da bir lokal maksimum değeri olan bir $f(\mathbf{a})$ değerine, $j = 1,\ldots,m$ için $g_j(\mathbf{a}) = 0$ ***kısıtlamaları altında*** f fonksiyonunun bir ***lokal ekstremum*** değeri denir.

Örnek 2.5.19. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ elipsoidinin üzerindeki, orijine en yakın ve en uzak olan noktaları belirleme problemi göz önüne alınsın. Bu durumda istenen, $g(x,y,z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ kısıtlaması altında, $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ uzaklığının, ya da buna denk olarak $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$ fonksiyonunun, ekstremum değerleridir. g bağıntısıyla verilen elipsoid kapalı ve sınırlı, yani kompakt, ve bir polinom olan f fonksiyonu sürekli olduğundan, Ekstremum Değer Teoremi'nden, aranan ekstremum değerler mutlak olarak vardır. g kullanılarak f fonksiyonunun x değişkeni elenirse, bu fonksiyonun $\phi(y,z) := 1 - y^2 - 2z^2$ formuna indirgendiği görülür. Buradan, Lemma 2.5.3 göz önüne alınıp $\nabla\phi(y,z) = \mathbf{0}$ denklemi çözülerek, $(y,z) = (0,0)$, yani $x^2 = 1$ bulunur; dolayısıyla, x değişkeninin elenmesi sonucunda $(\pm1,0,0)$ noktaları elde edilmiş olur. Benzer biçimde, y değişkeninin elenmesi sonucunda $(0,\pm1/\sqrt{2},0)$ ve z değişkeninin elenmesi sonucunda $(0,0,\pm1/\sqrt{3})$ noktaları elde edilir. Böylece, elde edilen bu noktalar uzaklık formülünde yerine konulup elde edilen değerler karşılaştırılarak, $1/\sqrt{3}$ mesâfesindeki $(0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$ noktalarının orijine en yakın noktalar, 1 mesâfesindeki $(\pm 1, 0, 0)$ noktalarının ise orijine en uzak noktalar oldukları görülür.

Belirli kısıtlamalar altında verilen bir ekstremum değer problemini—Örnek 2.5.19'da olduğu gibi—bazı değişkenleri eleyerek çözme işlemi, ***doğrudan çözüm*** yöntemi olarak adlandırılır. Ancak, verilen kısıtlamalar nispeten basit olmadıkça, doğrudan çözüm yöntemini kullanmak her zaman mümkün değildir. ***Lagrange yöntemi*** adı verilen aşağıdaki önemli sonuç, bu türden problemlerde her durum için geçerli ve çok kullanışlı olan bir geometrik metodu önerir.

Teorem 2.5.20 (Lagrange Çarpanları). *V kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayının içinde açık, $m < n$, $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir, ve her $j = 1, \ldots, m$ için $g_j : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olsun. Aynı zamanda, bir $\mathbf{a} \in V$ için*

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(\mathbf{a}) \neq 0$$

olduğu kabul edilsin. Eğer $f(\mathbf{a})$ değeri, $k = 1, \ldots, m$ için $g_k(\mathbf{a}) = 0$ kısıtlamaları altında f fonksiyonunun bir lokal ekstremum değeri ise, bu durumda

$$\nabla f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{2.5.3}$$

olacak biçimde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ skalerleri vardır.

Kanıt. (2.5.3) eşitliği, m adet $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ bilinmeyeninden ve her $j = 1, \ldots, n$ için

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \tag{2.5.4}$$

eşitliği ile verilen n adet denklemden oluşan bir sistemdir. Sadece $j = 1, \ldots, m$ indisleri göz önüne alındığında, hipotezden dolayı, (2.5.4) lineer sisteminin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmadığı görülür; yani, λ_k değerleri (2.5.4) sisteminin ilk m adet denklemi tarafından tek türlü belirlenir. Gösterilmesi gereken, o hâlde, bu λ_k değerlerinin (2.5.4) sistemini $j = m + 1, \ldots, n$ indisleri için de sağladıklarıdır.

$p := n - m$ olsun. Kapalı Fonksiyon Teoremi'nin kanıtındaki notasyon kullanılarak, $\mathbb{R}^{m+p}$ uzayındaki vektörler

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{t}) = (y_1, \ldots, y_m, t_1, \ldots, t_p)$$

olarak yazılsın. $\mathbf{g} := (g_1, \ldots, g_m)$ olsun, ve $\mathbf{a} = (\mathbf{y}_0, \mathbf{t}_0)$ olacak biçimde $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ ve $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{R}^p$ noktaları seçilsin. Bu durumda, kanıtı tamamlamak için,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t_\ell}(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial t_\ell}(\mathbf{t}_0) \tag{2.5.5}$$

eşitliğinin her $\ell = 1, \ldots, p$ için sağlandığı gösterilmelidir. Hipotezden dolayı, $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0, \mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$ gerçeklenir ve $\mathbf{g}$ fonksiyonunun y_j değişkenlerine göre Jacobi determinantı $(\mathbf{y}_0, \mathbf{t}_0)$ noktasında sıfır olmaz. Dolayısıyla, Kapalı Fonksiyon Teoremi'nden, $\mathbf{t}_0$ noktasını içeren bir açık $W \subseteq \mathbb{R}^p$ kümesi ve W üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olan bir $\mathbf{h} : W \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu, $\mathbf{h}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{y}_0$, ve her $\mathbf{t} \in W$ için

$$\mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \mathbf{0} \tag{2.5.6}$$

olacak biçimde vardır.

Her $\mathbf{t} \in W$ ve $k = 1, \ldots, m$ için,

$$G_k(\mathbf{t}) := g_k(\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \quad \text{ve} \quad F(\mathbf{t}) := f(\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$$

olsun: bu fonksiyonlar, (2.5.5) eşitliğini $\ell = 1, \ldots, p$ için doğrulamak amacıyla kullanılacaktır. Bir $\ell \in \{1, \ldots, p\}$ sabitlensin. (2.5.6) nedeniyle, her G_k fonksiyonu W üzerinde özdeş olarak sıfırdır, ve bundan dolayı aynı yerde türevi de sıfır olur. $\mathbf{t}_0 \in W$ ve $(\mathbf{h}(\mathbf{t}_0), \mathbf{t}_0) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{t}_0) = \mathbf{a}$ olduğundan, Zincir Kuralı kullanılarak,

$$O_{1\times n} = DG_k(\mathbf{t}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial t_1}(\mathbf{t}_0) & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial t_p}(\mathbf{t}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial t_1}(\mathbf{t}_0) & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial t_p}(\mathbf{t}_0) \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $DG_k(\mathbf{t}_0)$ vektörünün ℓ'inci bileşeninin, $k = 1, \ldots, m$ için,

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial h_j}{\partial t_\ell}(\mathbf{t}_0) + \frac{\partial g_k}{\partial t_\ell}(\mathbf{a}) \tag{2.5.7}$$

eşitliğiyle verildiği görülür. (2.5.7) eşitliği λ_k skalerleriyle çarpılıp toplanarak,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{a})\frac{\partial h_j}{\partial t_\ell}(\mathbf{t}_0) + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial t_\ell}(\mathbf{a}) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right)\frac{\partial h_j}{\partial t_\ell}(\mathbf{t}_0) + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial t_\ell}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır; bu ise, (2.5.4) göz önüne alındığında,

$$0 = -\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})\frac{\partial h_j}{\partial t_\ell}(\mathbf{t}_0) + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial t_\ell}(\mathbf{a}) \tag{2.5.8}$$

olması demektir.

Şimdi, $f(\mathbf{a})$ değerinin, $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ kısıtlamaları altında f fonksiyonunun bir lokal maksimum değeri olduğu kabul edilsin ($f(\mathbf{a})$ değerinin aynı kısıtlamalar altında f fonksiyonunun bir lokal minimum değeri olduğu durumun ispatı benzerdir). $E_0 := \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ olarak alınsın, ve $\mathbf{a}$ merkezli ve n-boyutlu bir $B(\mathbf{a})$ açık topu,

$$\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}) \cap E_0 \quad \text{olduğunda} \quad f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{a}) \tag{2.5.9}$$

gerçeklenecek biçimde seçilsin. $\mathbf{h}$ fonksiyonunun sürekli olduğu kullanılarak da, $\mathbf{t} \in B(\mathbf{t}_0)$ olması $(\mathbf{h}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) \in B(\mathbf{a})$ olmasını gerektirecek biçimde $\mathbf{t}_0$ merkezli ve p-boyutlu bir $B(\mathbf{t}_0)$ açık topu göz önüne alınsın. Böylece, (2.5.9) nedeniyle, $F(\mathbf{t}_0)$ değerinin F fonksiyonunun $B(\mathbf{t}_0)$ üzerindeki bir lokal maksimum değeri olduğu görülür; yani, Lemma 2.5.3 sebebiyle, $\nabla F(\mathbf{t}_0) = \mathbf{0}$ olur. Diğer taraftan, Zincir Kuralı (2.5.7) eşitliğinin elde edildiği durumdaki gibi kullanılarak,

$$0 = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})\frac{\partial h_j}{\partial t_\ell}(\mathbf{t}_0) + \frac{\partial f}{\partial t_\ell}(\mathbf{a}) \tag{2.5.10}$$

olarak bulunur. Bu ise, (2.5.10) ve (2.5.8) eşitlikleri toplandığında, istenen

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t_\ell}(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial t_\ell}(\mathbf{a})$$

sonucuna ulaştırır. □

Örnek 2.5.21. $x - y = 1$ ve $y^2 - z^2 = 1$ kısıtlamaları altında, $x^2 + y^2 + z^2$ ifadesinin ekstremum değerlerini bulma problemi göz önüne alınsın. Bu durumda, $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z) := x-y-1$, ve $h(x,y,z) := y^2-z^2-1$ olarak tanımlanırsa, (2.5.3) eşitliği $\nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = \mathbf{0}$ formuna dönüşür, yani

$$(2x, 2y, 2z) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(0, 2y, -2z) = (0, 0, 0)$$

olur; bu ise, $2x + \lambda = 0$, $2y + 2\mu y - \lambda = 0$, ve $2z - 2\mu z = 0$ olması demektir. Bu son denklemden, $\mu = 1$ ya da $z = 0$ olduğu görülür.

Eğer $\mu = 1$ ise, $\lambda = 4y$ olur. $2x + \lambda = 0$ olduğundan, o hâlde, $x = -2y$ olarak elde edilir. Diğer taraftan, $g = 0$ eşitliğinden $-3y = 1$, yani $y = -1/3$ olarak bulunur; bu değer $h = 0$ denkleminde yerine konulduğunda ise, gerçeklenmesi mümkün olmayan, $z^2 = -8/9$ sonucuna ulaşılır.

Eğer $z = 0$ ise, $h = 0$ denkleminden $y = \pm 1$ değerleri elde edilir. Böylece, $g = 0$ olduğundan, $y = 1$ iken $x = 2$ ve $y = -1$ iken $x = 0$ olarak elde edilir. Sonuç olarak, $g = 0 = h$ kısıtlamaları altında f fonksiyonunun lokal ekstremum değerlerinin $f(2,1,0) = 5$ ve $f(0,-1,0) = 1$ *olabilecekleri* sonucuna ulaşılır. Şimdi, $x - y = 1$ düzleminin ve $y^2 - z^2 = 1$ hiperbolik silindirinin arakesit eğrisini gösteren ve sınırlı olmayıp kapalı olan küme üzerinden $\|(x,y,z)\| \to \infty$ için $f(x,y,z) \to \infty$ olduğundan, Teorem 2.5.16 (i) nedeniyle, sürekli olan f fonksiyonu verilen kısıtlamalar altında bir mutlak minimum değerine sahiptir fakat bir maksimum değerine sahip değildir. O hâlde, elde edilen iki lokal minimum değerden $(0,-1,0)$ noktasında alınan 1, verilen kısıtlamalar altında, göz önüne alınan ifadenin mutlak minimum değeridir.

Problemler

1. Aşağıdaki fonksiyonların lokal ekstremum değerlerini bulunuz ve sınıflandırınız; eğer varsa, eyer noktalarını belirleyiniz:

(a) $f(x,y) := x^2 - xy + y^3 - y$;
(b) $f(x,y) := x^2y^2(2 - x - y)$;
(c) $f(x,y) := ax^2 + bxy + cy^2,\ a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0$;
(d) $f(x,y) := \sin x + \cos y$;
(e) $f(x,y) := a/x + b/y + xy,\ a, b \neq 0$;
(f) $f(x,y) := (x-1)(x^2 - y^2)$;
(g) $f(x,y) := (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$;
(h) $f(x,y) := y^3 - 3x^2y$;
(i) $f(x,y,z) := xyz(4 - x - y - z)$;
(j) $f(x,y,z) := e^{x+y}\cos z$.

2. Aşağıdaki f fonksiyonlarının verilen H kümeleri üzerindeki mutlak ekstremum değerlerini bulunuz:

(a) $f(x,y) := x^2 + 2x - y^2$ ve $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}$;
(b) $f(x,y) := x^3 + 3xy - y^3$ ve $H := [-1,1] \times [-1,1]$;
(c) $f(x,y) := x^2 + 2xy + 3y^2$ ve H, köşeleri $(1,0)$, $(1,2)$, ve $(3,0)$ noktaları olan üçgenle sınırlanan bölge.

3. Aşağıdaki her durum için, Lagrange yöntemini kullanarak, verilen kısıtlamalar altında f fonksiyonunun tüm ekstremum değerlerini bulunuz:

(a) $x^2 + y^2 = 4$ kısıtlaması altında, $f(x, y) := x + y^2$;

(b) $x^2 + y^2 = 1$ kısıtlaması altında, $f(x, y) := x^2 - 4xy + 4y^2$;

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ve $x + y + z = 0$ kısıtlamaları altında, $f(x, y, z) := xy$;

(d) $3x^2 + y + 4z^3 = 1$ ve $-x^3 + 3z^4 + w = 0$ kısıtlamaları altında, $f(x, y, z, w) := 3x + y + w$.

4. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ noktasında ve $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbf{b} := \mathbf{f}(\mathbf{a})$ noktasında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $g(\mathbf{b})$ değeri g fonksiyonunun bir lokal ekstremum değeri ise, $\nabla(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ olduğunu gösteriniz.

5. $V \subseteq \mathbb{R}^2$ bir açık küme, $(a, b) \in V$, ve V üzerinde ikinci-mertebeden kısmî türevleri var olan $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ olsun. Eğer f fonksiyonunun ikinci-mertebeden kısmî türevleri (a, b) noktasında sürekli ve $f_{xx}(a, b)$, $f_{xy}(a, b)$, $f_{yy}(a, b)$ değerlerinden herhangi ikisi sıfır ise, (a, b) noktasının f fonksiyonunun bir eyer noktası olması için $f_{xy}(a, b) \neq 0$ olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

6. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $(a, b) \in V$, ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^2$-sınıfından olsun. Eğer $f(\mathbf{a})$ değeri f fonksiyonunun bir lokal minimum değeri ise, her $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ için $D^{(2)} f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) \geqslant 0$ olduğunu ispatlayınız.

7. a, b, c, D, E gerçel sayılar ve $c \neq 0$ olsun.

(a) Eğer $DE > 0$ ise, $z = Dx^2 + Ey^2$ kısıtlaması altında $ax + by + cz$ ifadesinin tüm ekstremum değerlerini belirleyiniz; $cD < 0$ ise bir maksimum değerinin, $cD > 0$ ise bir minimum değerinin var olduğunu kanıtlayınız.

(b) (a) kısmındaki problemi, $DE < 0$ olması durumunda göz önüne alınız.

8. (a) $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları bir $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ noktasında diferansiyellenebilir olsun ve, k bir sabit olmak üzere, $f(a, b, c)$ değerinin $g(x, y, z) = k$ kısıtlaması altında f fonksiyonunun bir lokal ekstremum değeri olduğu varsayılsın. Bu durumda,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c) - \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c) = 0$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c) - \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

(b) (a) kısmını kullanarak, $xyz = 16$ kısıtlaması altında $f(x, y, z) := 4xy + 2xz + 2yz$ fonksiyonunun tüm ekstremum değerlerini belirleyiniz.

9. (a) $p > 1$ olsun. $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ olmak üzere, $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = 1$ kısıtlaması altında $f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^n x_k^2$ fonksiyonunun tüm ekstremum değerlerini bulunuz.

(b) Her $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ve $1 \leqslant p \leqslant 2$ için,

$$\frac{1}{n^{(2-p)/(2p)}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

olduğunu gösteriniz.

(c) Eğer $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gerçel sayılar dizisi için $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < \infty$ ise,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2} < \infty$$

olduğunu ispatlayınız.

10. A matrisi $(n\times n)$-boyutlu bir simetrik matris, ve her $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ için $f(\mathbf{x}) := (A\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}$ olsun. f fonksiyonunun $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ birim küresi üzerindeki mutlak minimum ve mutlak maksimum değerlerinin, A matrisinin, sırasıyla, en küçük ve en büyük özdeğerleri olduklarını ispatlayınız.

Kaynakça

[1] Mustafa A. Akcoglu, Paul F.A. Bartha & Dzung Minh Ha, *Analysis in Vector Spaces*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2009.

[2] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 2nd Edition, Springer, 1997.

[3] R.C. Buck, *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[4] S. Dineen, *Functions of Two Variables*, Chapman & Hall/CRC Mathematics, 2000.

[5] H. Dym, *Linear Algebra in Action*, GSM, Vol. 78, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[6] W. Fleming, *Functions of Several Variables*, 2nd ed., Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), New York, 2004.

[7] Gerald B. Folland, *Advanced Calculus*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2002.

[8] W. Kaplan, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1984.

[9] Witold A.J. Kosmala, *A Friendly Introduction to Analysis*, 2nd Edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[10] T.W. Körner, *A Companion to Analysis. A Second First and First Second Course in Analysis*, GSM, Vol. 62, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[11] S. Lang, *Calculus of Several Variables*, 3rd ed., Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), New York, 1987.

[12] William R. Parzynski & Philip W. Zipse, *Introduction to Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.

[13] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[14] Karl R. Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[15] T. Terzioğlu, *An Introduction to Real Analysis*, Matematik Vakfı, İstanbul, 2000.

[16] E.B. Vinberg, *A Course in Algebra*, GSM, Vol. 56, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[17] William R. Wade, *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

Dizin