БИОНИКА ИНТЕЛЛЕКТА. 2010. № 1 (72). С. 50–54 ХНУРЭ

УДК 519.688: 004.896

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЧАСТНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ МНОГОФАКТОРНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ С ПОМОЩЬЮ S-ОБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

В.В. Бескоровайный[1], Е.В. Соболева[2]

[1] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, beskorovainyi@kture.kharkov.ua;

[2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, se_@ukr.net

Предложены модификации S-образных функций полезности частных критериев, используемых в задачах многокритериального оценивания и выбора в рамках кардиналистического подхода. Приведены результаты экспериментальных исследований временной сложности и точности процедур аппроксимации частной полезности на основе модифицированных функций Гаусса и логистической функции.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ, МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ, ФУНКЦИЯ ПОЛЕЗНОСТИ ЧАСТНЫХ КРИТЕРИЕВ, ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МОДЕЛЬ, МЕТОД, АЛГОРИТМ

Введение

Одной из важнейших задач бионики интеллекта является изучение процессов оценивания и выбора решений человеком. Формализация и моделирование этих процессов позволят совершенствовать существующие и создавать новые, более эффективные системы поддержки принятия решений для систем проектирования и управления. Подавляющее большинство задач, возникающих в процессах принятия решений, по своей сути являются многокритериальными. В рамках кардиналистического подхода для выбора наилучшего компромиссного решения используется парадигма максимизации полезности [1]. Лицо, принимающее решение (ЛПР), при выборе вариантов из множества допустимых приписывает им некоторую полезность (ценность), количественные значения которой и определяют его выбор. Для количественной оценки предпочтений ЛПР требуется определение метрики в виде функции обобщенной полезности, позволяющей ранжировать альтернативы.

1. Анализ существующих моделей частной полезности

Функции общей полезности строятся на основе линейных или нелинейных функций полезности частных критериев (ФПЧК) [2-6]. При этом к ФПЧК предъявляется ряд требований [1]: монотонность, безразмерность, диапазон изменения [0, 1], инвариантность к виду экстремума, возможность реализации линейных и характерных нелинейных зависимостей от значения частного критерия. Кроме того, желательно, чтобы функции полезности всех частных критериев имели один и тот же вид и различалис ь только значениями параметров, что позволило бы свести задачи их формирования для всех частных критериев к решению задач выбора наилучших значений их параметров. Наибольшее применение на практике находит ФПЧК вида [1]:

$$\xi(x) = \bar{x}^{\alpha} = \left(\frac{x - x_{нх}}{x_{нл} - x_{нх}} \right)^{\alpha}, \tag{1}$$

где $x, x_{нл}, x_{нх}, \bar{x}$ – соответственно исходное (текущее), наилучшее, наихудшее и нормированное значения частного критерия; α – параметр, определяющий конкретный вид зависимости (линейная выпуклая, вогнутая). Зависимости, отражающие изменение эффективности большинства антропогенных объектов, являются *S*-образными и представляются:

– функцией Гаусса [3]:

$$\xi(x) = e^{-\frac{(\bar{x} - \bar{x}_{нл})^2}{c}}, \tag{2}$$

где $c > 0$ – параметр, определяющий конкретный вид зависимости;

– логистической функцией:

$$\xi(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-(\bar{x} - a)}{b}}}, \tag{3}$$

где a – абсцисса точки перегиба; b – параметр, определяющий вид зависимости;

– функцией Харрингтона [7]:

$$\xi(x) = e^{-e^{-(k \cdot \bar{x} - a)}}, \tag{4}$$

где k – параметр нелинейности, a/k – определяет точку перегиба;

– функцией-склейкой степенных функций (1) [4]:

$$\xi(x) = \begin{cases} a \cdot \left(\dfrac{\bar{x} - \bar{x}_{нх}}{\bar{x}_a - \bar{x}_{нх}} \right)^{\alpha_1}, & \bar{x}_{нх} \le \bar{x} \le \bar{x}_a, \\ a + (1 - a) \cdot \left(\dfrac{\bar{x} - \bar{x}_a}{\bar{x}_{нл} - \bar{x}_a} \right)^{\alpha_2}, & \bar{x}_a \le \bar{x} \le \bar{x}_{нл}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\bar{x}_a, a$ – координаты точки перегиба ($0 \le a \le 1$); α_1, α_2 – коэффициенты нелинейности, определяющие вид зависимости соответственно на начальном и конечном отрезках.

Приведенные ФПЧК (1) – (4) имеют недостатки, снижающие адекватность моделей многокритериального оценивания и выбора. Характер зависимостей ФПЧК (2) – (4) от значений параметров приведен на рис. 1.

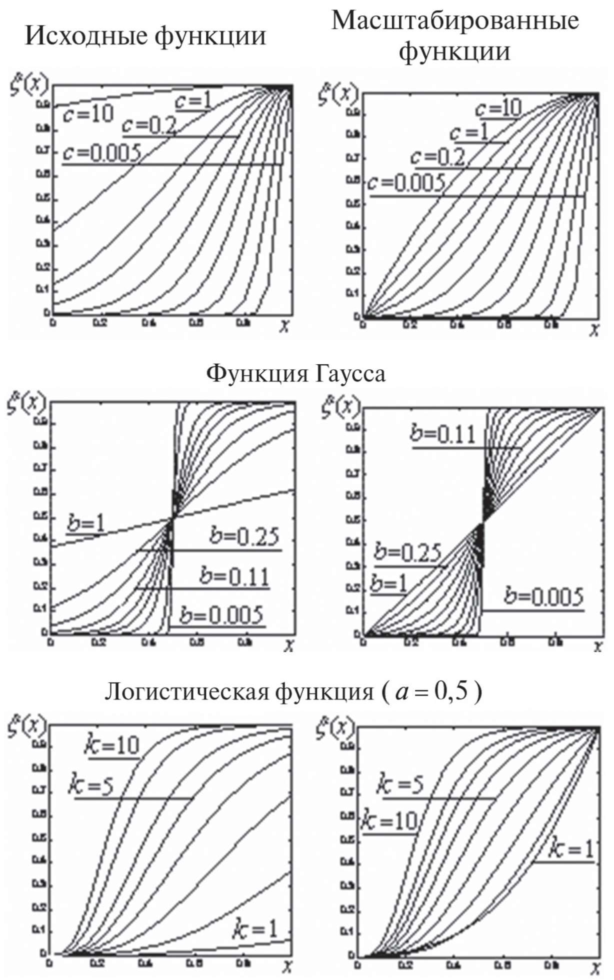


Рис. 1. Базовые *S*-образные ФПЧК

Основной недостаток ФПЧК (2) – (4) – различная степень приближения значений к 0 и 1 при $x \to x_{\text{нх}}$ и $x \to x_{\text{нл}}$, что сокращает их способность к дифференциации полезности различных значений частного критерия. Данный недостаток, при необходимости, преодолевается путем масштабирования ординаты (рис. 1, правая часть):

$$\xi'(x) = \frac{\xi(x) - \xi(x_{\text{нх}})}{\xi(x_{\text{нл}}) - \xi(x_{\text{нх}})}.$$

Изменение параметров функций (2) – (4) существенно не влияет на общий вид представляемых ими зависимостей, изменяя лишь участок, используемый в качестве ФПЧК. Гораздо большее влияние на перемещение точки перегиба и характер зависимостей может оказать введение дополнительных параметров в показатель степени.

Недостатками функции-склейки (5) являются относительно большое количество подлежащих определению параметров и разрыв производной в точке перегиба. Характер зависимостей ФПЧК (5) для различных значений параметров нелинейности приведен на рис. 2.

ФПЧК (2) – (4) имеют большой угол вхождения в одну или обе зоны нечувствительности и, следовательно, если значения частного критерия будут близки к экстремальным, то погрешность в их определении окажет существенное влияние на погрешность вычисления полезности.

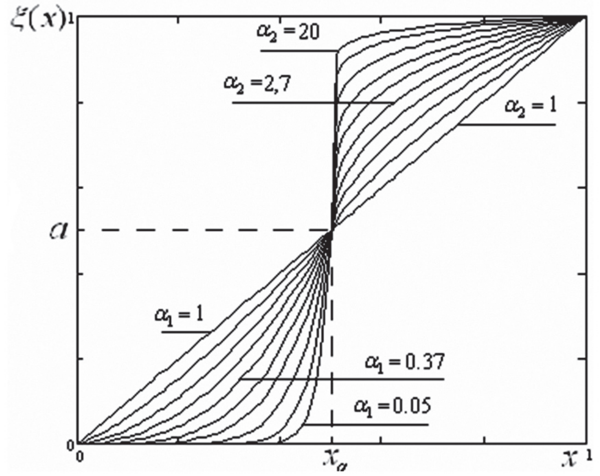


Рис. 2. Семейство ФПЧК (5) при изменении параметров нелинейности

С учетом этого актуальными остаются задачи поиска универсальных ФПЧК, пригодных для оценивания вариантов в различных ситуациях выбора, имеющих минимальное количество параметров, разработки процедур выбора наилучших значений (идентификации) их параметров, имеющих более низкую временную сложность.

Целью статьи является описание синтеза моделей частной полезности многофакторных альтернатив в классе S-образных функций путем решения задачи структурно-параметрической идентификации.

Постановка задачи. Пусть экспертным путем или в результате решения задачи компараторной идентификации [9] определены оценки полезности $(u_i,\ i=\overline{1,n})$, соответствующие значениям частного критерия x_i. Необходимо в соответствии с заданным критерием подобия k определить вид и параметры A наиболее адекватной модели (ФПЧК): $X,U \xrightarrow[k]{} \xi^*(X,A^*)$.

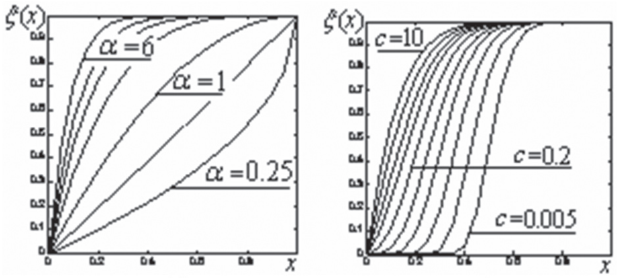
2. Модификация ФПЧК на основе функции Гаусса

С увеличением значения c зависимость (2) становится более пологой, точка изгиба смещается в сторону $x_{\text{нх}}$, функция становится практически выпуклой, однако по достижении некоторого значения увеличение значения параметра c практически не влияет на форму зависимости (рис. 1).

Для преодоления недостатка ФПЧК (2), связанного с ограниченной возможностью формализации выпуклых зависимостей, предлагается ввести в нее дополнительный параметр α (рис. 3):

$$\xi(x) = e^{-\frac{(\bar{x}-\bar{x}_{\text{нл}})^{2\cdot\alpha}}{c}}, \qquad (6)$$

где α – дополнительный параметр, определяющий вид нелинейности.



$c=10$ $\qquad$ $\alpha=4$

Рис. 3. Модифицированная ФПЧК на основе функции Гаусса (6) со степенным параметром

3. Модификация логистической функции [8]

С учетом того, что прообразом функции (3) является функция гиперболического тангенса

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} th(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-2x}},$$

для устранения ее недостатков предлагается ввести в знаменатель параметры $\alpha, \beta \geq 1$:

$$\xi(x,\alpha,\beta) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{\alpha \cdot x} + e^{-\beta \cdot x}}. \qquad (7)$$

Функция (7), масштабированная от точки минимума ($\breve{x}, \xi(\breve{x},\alpha,\beta)$) до точки максимума ($\hat{x}, \xi(\hat{x},\alpha,\beta)$), определяет семейство гладких *S*-образных функций (рис. 4):

$$\xi'(x,\alpha,\beta) = \frac{\xi(p(x),\alpha,\beta) - \xi(\breve{x},\alpha,\beta)}{\xi(\hat{x},\alpha,\beta) - \xi(\breve{x},\alpha,\beta)}, \qquad (8)$$

где $p(x) = (\hat{x} - \breve{x}) \cdot \dfrac{x - x_{\text{нх}}}{x_{\text{нл}} - x_{\text{нх}}} + \breve{x}$.

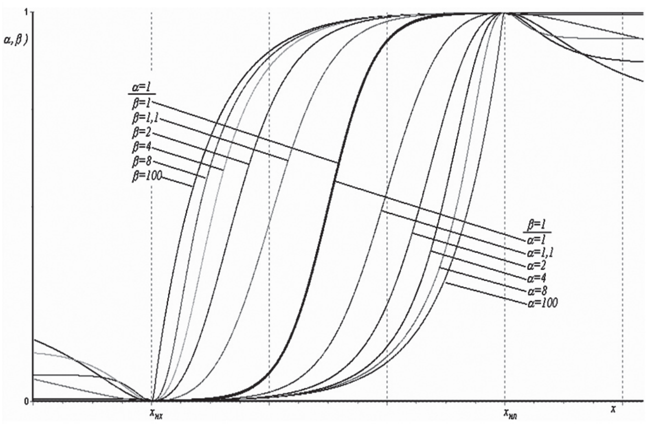


Рис. 4. Семейство масштабированных модифицированных логистических функций (8)

Ввиду сложности аналитического вычисления экстремумов функции (7) (при $z = e^x$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{(1-\alpha)z^{\alpha+\beta+2} + (1+\alpha)z^{\alpha+\beta} + (1+\beta)z^2 + 1 - \beta}{z^{1+\beta} \cdot (z^{\alpha} + z^{-\beta})^2})$$

для нахождения экстремумов и масштабирования предлагается программно реализованная процедура численного решения. Экспериментально установлено, что экстремумы функции (7) ограничены значениями:

$$\breve{x} < \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b-1}{b+1}\right), \;\; \hat{x} > \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right).$$

Предложенная функция (8) отображает все множество действительных чисел на интервал [0, 1]. Ее достоинствами являются гладкость, непрерывность и минимальные углы вхождения в нечувствительные зоны, она имеет всего два параметра α и β (которые могут быть представлены как отношение одного к другому α/β или β/α). При этом для эксперта интерпретация параметров предложенной функции может быть следующей: «Во сколько раз рост критерия вблизи наихудшего значения важнее (полезнее) его роста вблизи наилучшего значения?» – в таком случае указанное экспертом соотношение можно использовать непосредственно для оценки параметров как отношение β/α.

4. Результаты экспериментального исследования процедур аппроксимации локальной полезности вариантов

Использование в процессе идентификации частной полезности процедур масштабирования для некоторых ФПЧК затрудняет применение классических методов аппроксимации. Для сравнительного анализа эффективности рассмотренных ФПЧК было разработано программное обеспечение и проведены серии экспериментов.

Имитируя работу экспертов с использованием генератора случайных чисел, формировались по *n*-2 значения частного критерия и соответствующего ему значения полезности. Полученные значения упорядочивались, и к ним добавлялись пары граничных точек (0,0) и (1,1). С помощью последовательного поиска осуществлялась оптимизация параметров ФЧПК по критерию минимума суммы модулей отклонений: $K^o = \min\limits_j \sum\limits_i \left|\xi\ (x_i, A_j) - u_i\right|$.

Было проведено две серии экспериментов: в каждой серии для каждого значения количества точек *n* = 5, 10, 15 и 20 по 1000 экспериментов. Для модели (8) была также исследована модификация, когда процедура поиска экстремумов заменялась вычислением приближенных оценок:

$$\breve{x}' = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b-1}{b+1}\right); \;\; \hat{x}' = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right). \qquad (9)$$

Анализируемыми показателями качества моделей были: максимальная $\delta K_{\max}$ и средняя $\delta K_{\text{сред}}$ относительные погрешности ($\delta K = \left|K^o - \tilde{K}^o\right| / \tilde{K}^o$, где K^o и $\tilde{K}^o$ – минимальные значение критерия, полученные с помощью данной и наилучшей модели); среднее время решения задачи ($t_{\text{сред}}$); вероятность того, что модель является лучшей (P). Эксперименты проводились на персональной ЭВМ с процессором *Celeron 540* (тактовая частота 1.86 ГГц).

Поиск наилучших значений параметров осуществлялся с одинаковым количеством шагов для каждого из них с осуществлением процедуры поиска экстремумов и с вычислением приближенных оценок экстремумов (9). Наборы значений параметров выбирались таким образом, чтобы множество формируемых кривых равномерно покрывало пространство определения частной полезности. Эксперименты проводились со следующими наборами значений параметров (табл. 1):

– для функции Гаусса (ФГ) (2): $c = [10;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}33;\ 0{,}2;\ 0{,}12;\ 0{,}07;\ 0{,}035;\ 0{,}015;\ 0{,}005]$;

– для модифицированной функции Гаусса (МФГ) (6): $a = 1, 2, ..., 10$;

– для логистической функции (ЛФ) (3): $a = 0{,}0.1,..., 1$; $b = [1;\ 0{,}25;\ 0{,}16;\ 0{,}11;\ 0{,}08;\ 0{,}06;\ 0{,}04;\ 0{,}025;\ 0{,}015;\ 0{,}005]$;

– для функции Харрингтона (ФХ) (4): $a, k = 1,2,..., 10$;

– для функции-склейки (ФС) (5): $x_a, a = 0,\ 0{,}1,..., 1$, $\alpha_1, \alpha_2 = [1;\ 0{,}779;\ 0{,}607;\ 0{,}427;\ 0{,}368;\ 0{,}273;\ 0{,}202;\ 0{,}135;\ 0{,}082;\ 0{,}05]$;

– для модифицированной функции гипертангенса (МФГТ) (8) и его упрощенной версии, использующей вычисление оценок (9) (МФГТУ): $\alpha, \beta = [1{,}01;\ 1{,}025;\ 1{,}05;\ 1{,}1;\ 1{,}25;\ 1{,}5;\ 2;\ 3;\ 5;\ 10;\ 100]$.

Анализ результатов показывает, что функция-склейка дает минимальную погрешность среди всех ФЧПК (в данном случае за счет большого числа вариантов соотношения параметров, то есть большого числа просматриваемых вариантов зависимостей).

Временная сложность параметрической оптимизации рассмотренных ФЧПК с достаточной степенью достоверности аппроксимируется полиномиальными функциями:

– для ФГ (2) – $o(n) = 0{,}0047\,n + 0{,}0156$;

– для МФГ (6) – $o(n) = 0{,}2\,n - 0{,}0078$;

– для ЛФ (3) – $o(n) = -0{,}0672\,n + 0{,}0938$;

– для ФХ (4) – $o(n) = 0{,}0352\,n^2 + 0{,}0039\,n - 0{,}2305$;

– для ФС (5) – $o(n) = 0{,}0078\,n^2 + 21{,}811\,n - 1{,}8594$;

– для МФГТ (8) –

$$o(n) = 0{,}0352\,n^2 - 0{,}1273\,n + 0{,}6758;$$

– для МФГТУ – $o(n) = 0{,}0453\,n + 0{,}0703$.

Таблица 1

Результаты исследования временной сложности процедур аппроксимации частной полезности

n	Модель	$t_{\text{сред}}$, мс	P	$\delta K_{\max}$	$\delta K_{\text{сред}}$
5	ФГ (2)	0,0156	0,002	1,9410	0,3246
	МФГ (6)	0,1563	0,012	0,9496	0,2179
	ЛФ (3)	0,1094	0,028	1,0453	0,2045
	ФХ (4)	0,2813	0,009	1,8424	0,2117
	ФС (5)	19,9844	0,947	0,1335	0,0016
	МФГТ (8)	0,5625	0,004	1,6186	0,2789
	МФГТУ	0,0938	0,000	2,6961	0,7420
10	ФГ (2)	0,0313	0,002	2,1010	0,4736
	МФГ (6)	0,4219	0,004	1,7454	0,4046
	ЛФ (3)	0,3125	0,010	1,4001	0,2947
	ФХ (4)	0,3438	0,003	1,4627	0,3260
	ФС (5)	41,7188	0,980	0,1013	0,0005
	МФГТ (8)	0,6250	0,003	1,7857	0,5179
	МФГТУ	0,1719	0,000	4,4235	1,4519
15	ФГ (2)	0,0313	0,000	1,9348	0,5671
	МФГ (6)	0,6406	0,001	1,9348	0,5327
	ЛФ (3)	0,2813	0,007	1,4074	0,3227
	ФХ (4)	0,5938	0,006	1,6195	0,3821
	ФС (5)	63,7188	0,984	0,0561	0,0003
	МФГТ (8)	0,5469	0,002	2,1848	0,8027
	МФГТУ	0,2500	0,000	6,6009	2,1604
20	ФГ (2)	0,0313	0,003	2,7813	0,6928
	МФГ (6)	0,7500	0,003	2,7813	0,6693
	ЛФ (3)	0,3438	0,012	1,8431	0,3552
	ФХ (4)	0,7969	0,005	1,8664	0,4423
	ФС (5)	85,4844	0,980	0,2508	0,0007
	МФГТ (8)	0,7500	0,000	2,7083	1,1485
	МФГТУ	0,2188	0,000	8,1802	2,9113

5. Применение модифицированной функции гипертангенса в задачах целевой оптимизации

Частным случаем задач оптимального управления является задача минимизации отклонения от заданного целевого значения. При этом могут возникать ситуации, когда в силу дополнительных, сложно формализуемых факторов отклонение в одну сторону не является равнозначным отклонению в другую сторону. Предложенная ФПЧК (8) позволяет формализовать ситуации выбора, когда полезность частного критерия в приближении к заданному целевому значению с разных сторон имеет различающиеся уровни порогов нечувствительности (различную полезность для наихудших значений справа и слева от заданного целевого значения, рис. 5).

Формализация такой ситуации любыми другими способами ведет либо к увеличению числа параметров ФПЧК (возможно, использованию двух различных ФПЧК), либо к увеличению числа частных критериев и, как следствие, – усложнению задачи.

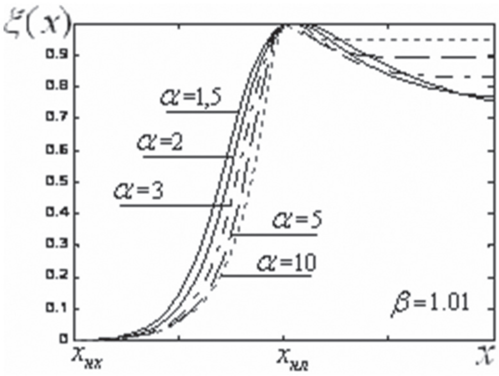


Рис. 5. Функция модифицированного гиперболического тангенса для несимметричной целевой оптимизации (после операции масштабирования)

Выводы

Результаты экспериментальных исследований показали, что все рассмотренные ФПЧК позволяют реализовать требуемые зависимости от значений частных критериев (выпуклую, вогнутую, *S*-образную) и имеют линейную или квадратичную временную сложность. Наименьшую временную сложность имеет функция Гаусса, несколько большую – логистическая функция и упрощенная модификация функции гипертангенса, среднюю сложность имеют модифицированная функция Гаусса, функция Харрингтона и модифицированная функция гипертангенса, а наибольшую – функция-склейка. При этом предложенная модификация функции Гаусса имеет на 14,2% меньшую среднюю относительную погрешность аппроксимации полезности. Введение степенного параметра в функцию Гаусса позволяет расширить возможности формализации с ее помощью выпуклых зависимостей, однако увеличивает в среднем на 15,98% время реализации процедуры параметрической идентификации.

Предложенная ФПЧК на основе модифицированной функции гипертангенса (8) может быть использована для формализации ситуаций многокритериального выбора, когда полезность частного критерия в приближении к заданному целевому значению с разных сторон имеет различающиеся уровни порогов нечувствительности (различную полезность для наихудших значений справа и слева от заданного целевого значения).

Направлениями дальнейших исследований в этой области могут стать исследования эффективности применения предложенных функций в моделях общей полезности и методах ее идентификации на основе компараторной технологии.

Список литературы: **1.** *Овезгельдыев, А.О.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации [Текст] / А.О. Овезгельдыев, Э.Г. Петров, К.Э. Петров. – К.: Наук. думка, 2002. – 164 с. **2.** *Катулев, А.Н.* Математические методы в системах поддержки принятия решений [Текст] / А.Н Катулев, Н.А. Северцев. – М.: Высшая школа, 2005. – 311 с. **3.** *Алтунин, А.Е.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография [Текст] / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. – 352 с. **4.** *Петров, Э.Г.* Формирование функций полезности частных критериев в задачах многокритериального оценивания [Текст] / Э.Г. Петров, В.В. Бескоровайный, В.П. Писклакова // Радиоэлектроника и информатика. – 1997. – №1. – С. 71-73. **5.** *Derringer, G.C.* Simultaneous Optimization of Several Response Variables / G.C. Derringer, R. Suich // Journal of Quality Technology. – 1980. – № 12. – P. 214-219. **6.** *Брахман, Т.Р.* Многокритериальность и выбор альтернативы в технике [Текст] / Т.Р. Брахман. – М.: Радио и связь, 1984. – 287 с. **7.** *Harrington, E.C.* The desirability function / E.C. Harrington // Industrial Quality Control. – 1965. – № 21. – P. 494-498. **8.** *Соболева, Е.В.* S-образная функция полезности частных критериев для многофакторной оценки проектных решений [Текст] / Е.В. Соболева // Материалы XIII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков, 2009. – С. 247. **9.** *Бескоровайный, В.В.* Метод решения общей задачи компараторной идентификации моделей многофакторного оценивания [текст] / В.В. Бескоровайный, Э.Г. Петров, И.В. Трофименко // Бионика интеллекта. – 2006. – № 2 (65). – С. 3-7.

Поступила в редколлегию 05.03.2010 г.

УДК 519.688: 004.896

Ідентифікація часткової корисності багатофакторних альтернатив за допомогою S-подібних функцій / В.В. Бескоровайний, Є.В. Соболєва // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 1 (72). – С. 50–54.

У якості функції корисності часткових критеріїв для задач багатокритеріальної оптимізації пропонується модифікація логістичної функції, яка описує сімейство S-подібних залежностей. Досліджується функція корисності часткових критеріїв, започаткована на функції Гауса з додатковим степеневим параметром. Здійснено порівняльний аналіз запропонованих моделей з відомими моделями (у вигляді функцій Гауса, Харрінгтона, логістичної функції, склейки двох степеневих функцій), наведено результати експериментального дослідження точності та складності процедур їх параметричної ідентифікації.

Табл. 1. Іл. 5. Бібліогр.: 9 найм.

UDK 519.688: 004.896

Identification of multiobjective alternative's single utility by S-shaped desirability functions / V. Beskorovainyi, E. Soboleva // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 1 (72). – P. 50–54.

It's proposed modifications of logistic and Gaussian functions (as S-shaped models of desirability function) for multiobjective optimization. Carried out a comparative analysis of proposed models with known models (Gaussian, Harrington's, logistic and combination of two power functions), are given results of experimental research of accuracy and difficulty of procedures for their parametric identification.

Tabl. 1. Fig. 5. Ref.: 8 items.