Metode Double Counting untuk Pembuktian Identitas Matematika

Mamat Rahmat (13512007)[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]*mamat.rahmat@students.itb.ac.id*

***Abstrak*— Makalah ini akan membahas salah satu metode dalam penyelesaian masalah yaitu metode *double counting*. Metode ini sangat sederhana namun memiliki banyak aplikasi dalam pembuktian berbagai identitas matematika. Artikel ini akan membahas penggunaan metode *double counting* dalam pembuktian beberapa identitas kombinasi.**

***Kata kunci*—*double counting*, kombinasi.**

I. PENDAHULUAN

Seringkali kita menemukan kebuntuan ketika akan membuktikan suatu identitas matematika. Dengan membuktikan secara langsung, mungkin kita akan menemukan persamaan yang rumit sehingga menemukan jalan buntu. Ada suatu metode yang elegan yang mampu membuktikan berbagai identitas matematika. Metode ini bernama metode *double counting* atau seringkali disebut sebagai metode *two-way counting*. Metode ini menggunakan prinsip mencacah kardinalitas suatu himpunan dengan dua cara yang berbeda.

II. DASAR TEORI

A. Double Counting

Double counting adalah teknik pembuktian kombi-natorial untuk membuktikan persamaan dua buah ekspresi dengan menunjukkan bahwa kedua ekspresi adalah dua cara menghitung kardinalitas sebuah himpunan yang sama. Karena himpunan yang dihitung adalah sama, maka pada kedua ekspresi tersebut berlaku kesamaan.

B. Aturan Penjumlahan

Jika beberapa kejadian n_1, n_2, n_3, . . . yang tidak dapat dilakukan secara bersamaan dimana diantara kejadian itu tidak ada yang beririsan (saling lepas), maka total kemungkinan kejadian ada $n_1+n_2+n_3+...$

C. Aturan Perkalian

Jika beberapa kejadian merupakan kejadian yang dikerjakan dengan berurutan. Kejadian pertama dapat diselesaikan dengan n_1 cara, diikuti kejadian kedua dengan n_2 cara, diikuti kejadian ketiga n_3 cara, . . . , dan seterusnya maka keseluruhan kejadian dalam urutan demikian dapat diselesaikan dangan $n_1 * n_2 * n_3 * . . .$ cara.

D. Kombinasi

Kombinasi biasa dilambangkan dengan $C(n,k)$ atau $\binom{n}{k}$ dengan n dan r adalah bilangan bulat nonnegative dan r ≤ n. Kombinasi $C(n,k)$ berarti banyak cara mengambil r objek dari n buah objek tanpa memerhatikan urutannya. Secara matematis, kombinasi dapat ditulis sebagai

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

dengan *n!* menyatakan bilangan faktorial dari n dan kasus khusus 0! = 1.

III. PEMBAHASAN

A. Identitas 1

Buktikanlah identitas berikut

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Perhatikan bahwa banyaknya cara mengambil k buah benda dari n benda berbeda sama dengan banyaknya cara tidak mengambil n-k buah benda dari n benda berbeda. Sehingga berlaku kesamaan.

B. Identitas 2 (Identitas Kombinasi)

Buktikanlah identitas berikut

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Ruas kiri merupakan banyaknya cara mengambil r buah objek dari n buah objek berbeda yaitu $\binom{n}{k}$.

Misalkan ada satu buah objek yang kita kita beri tanda, misal objek A, kita bisa menyertakan A dalam pengambilan, atau kita tidak menyertakan A dalam pengambilan. Dengan menyertakan A, maka banyaknya barang tersedia yang masih bisa diambil ada n-1.

Sedangkan banyaknya barang yang harus diambil tersisa k-1. Sehingga solusinya adalah $\binom{n-1}{k-1}$. Dengan tidak menyertakan A, maka banyaknya barang tersedia yang masih bisa diambil ada n-1. Sedangkan banyaknya barang yang harus diambil tetap k. Sehingga solusinya adalah $\binom{n-1}{k}$. Total solusi adalah $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ yang sama dengan ruas kanan.

Karena kedua ruas tersebut merupakan kardinalitas dari sebuah himpunan, yaitu himpunan cara mengambil k buah objek dari n buah objek berbeda

C. Identitas 3

Buktikanlah identitas berikut

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Himpunan yang akan kita perhatikan adalah himpunan dari himpunan-himpunan bagian suatu himbunan dengan anggota n. Akan dibuktikan bahwa kedua ruas merupakan kardinalitas dari himpunan ini.

Misal A adalah suatu himpunan yang terdiri dari n orang berbeda. Banyaknya cara membentuk kepanitiaan dengan banyak anggota tidak ditentukan adalah 2^n. Karena setiap untuk setiap orang memiliki 2 pilihan, memasukkannya dalam kepanitiaan atau tidak. Berdasarkan aturan perkalian, banyaknya cara adalah 2*2*2*…*2 sebanyak n buah bilangan 2. Sehingga total ada 2^n cara.

Cara lainnya adalah kita tentukan dahulu berapa orang yang akan masuk kepanitiaan. Ini terdiri dari k=0,1,2,3, … n orang. Banyaknya cara memilih k orang dari n orang berbeda adalah $\binom{n}{k}$. Sehingga total cara ada $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Karena kedua ruas merupakan kardinalitas dari sebuah himpunan yang sama, maka berlaku kesamaan.

A. Identitas 4

Buktikanlah identitas berikut

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

Misalkan 3n orang orang dengan n orang dari kelompok A, n orang dari kelompok B dan n orang lainnya dari kelompok C.

Banyaknya cara mengambil 3 orang dari 3n orang tersebut adalah $\binom{3n}{3}$

Cara lainnya adalah dengan membagi kedalam beberapa kasus.

Kasus 1: Ketiganya berasal dari kelompok yang berbeda. Artinya ada 1 orang dari kelompok A, satu orang dari kelompok B dan satu orang lainnya dari kelompok C. Banyaknya cara pemilihan ada $\binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} = n^3$.

Kasus 2: Ketiganya berasal dari kelompok yang sama. Artinya ada 3 kelompok. Untuk suatu kelompok, banyaknya cara memilih ketiga kelompok tersebut adalah $\binom{n}{3}$. Sehingga total cara ada $3\binom{n}{3}$

Kasus 3: Dua orang berasal dari kelompok yang sama, dan 1 lainya dari kelompok lain. Banyaknya cara memilih kelompok dengan 2 anggotanya dipilih ke solusi adalah 3 cara, sedangkan banyaknya cara memilih kelompok yang satu anggotanya dipilih ke solusi ada 2 cara (karena satu kelompok sudah digunakan). Sehingga total ada 6 cara. Total cara untuk kasus ini ada $6\binom{n}{1}\binom{n}{2} = 6n\binom{n}{2}$.

Karena kedua ruas merupakan kardinallitas dari himpunan yang sama, yaitu himpunan banyaknya cara memilih 3 orang dari 3n orang berbeda, maka berlaku kesamaan.

IV. KESIMPULAN

Metode double counting adalah metode yang cukup elegan untuk membuktikan identitas matematika.

REFERENSI

[1] http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2013-2014/Kombinatorial%20(2013).ppt. diakses 16 Desember 2013

[2] Engelke, Nikole, *Counting Two Ways: The Art of Combinatorial Proof.*. Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education

[3] http://2000clicks.com/mathhelp/CountingComboIdentities.aspx. Diakses 16 Desember 2013

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 16 Desember 2013

ttd

Mamat Rahmat
13512007