BEGRÜNDUNG DER ELEMENTAREN ARITHMETIK

DURCH DIE REKURRIERENDE DENKWEISE OHNE ANWENDUNG SCHEINBARER VERÄNDERLICHEN MIT UNENDLICHEM AUSDEHNUNGSBEREICH

VON

TH. SKOLEM

(VIDENSKAPSSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1923. NO. 6)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD
1923

Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 2. mars 1923.

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

Die logischen Grundbegriffe, die gewöhnlich als nötig für die Begründung der Mathematik angesehen werden (siehe z. B. Principia Mathematica von B. Russell & A. N. Whitehead), sind erstens die folgenden: Die Begriffe „*Aussage*" und „*Aussagenfunktion*" von 1, 2 usw. Veränderlichen, die drei Operationen 1) *Konjunktion* (sprachlich gewöhnlich durch das Wort „und" oder durch die Worte „sowohl — als" ausgedrückt), 2) *Disjunktion* (gewöhnlich durch die Worte „entweder — oder" ausgedrückt) und 3) *Negation* (durch das Wort „nicht" bezeichnet) und endlich die Russell-Whitehead'schen Begriffe „always" und „sometimes". Die zwei letzten Begriffe geben uns die Idee der Gültigkeit einer Aussage in *allen Fällen*, bezw. in *mindestens einem Falle*. Die Gültigkeit einer Aussage in mindestens einem Falle wird als einen Existenzsatz bezeichnet und wird gewöhnlich durch die Worte „es gibt" ausgedrückt. — Ich will in dieser Abhandlung überall große Buchstaben als Symbole für Aussagenfunktionen benutzen, so daß also $A(x)$, $B(x)$ . . . Aussagenfunktionen einer Veränderlichen, $A(x, y)$, $B(x, y)$ . . . solche von zwei Veränderlichen usw. bedeuten. Weiter benutze ich die Schröder'schen[1] Zeichen für Konjunktion, Disjunktion und Negation, so daß, wenn A und B Aussagen sind, AB die Aussage „sowohl A als B", $A + B$ die Aussage „entweder A oder B" und endlich $\bar{A}$ die Verneinung von A bedeuten. — Weiter führen aber Russell & Whitehead auch den Begriff der „deskriptiven Funktion" ein. Eine deskriptive Funktion ist ein Ausdruck, der eine eindeutig bestimmte Bedeutung hat; es ist eine Art funktionaler Eigennamen. Endlich soll es nach Russell & Whitehead nötig sein, allgemein gültige Aussagen als eine Art *Funktionalbehauptungen* (functional assertions) einzuführen. Eine Funktionalbehauptung soll darin bestehen, daß eine Aussage als gültig in einem unbestimmt gelassenen Falle behauptet wird.

Was ich nun in dieser Abhandlung zu zeigen wünsche ist folgendes: *Faßt man die allgemeinen Sätze der Arithmetik als Funktionalbehauptungen auf, und basiert man sich auf der rekurrierenden Denkweise, so läßt sich diese Wissenschaft in folgerichtiger Weise ohne Anwendung der Russell-Whitehead'schen Begriffe „always" und „sometimes" begründen.* Dies kann auch so ausgedrückt werden, daß die logische Begründung der Arithmetik ohne Anwendung scheinbarer logischer Veränderlichen geschehen kann.

[1] E. Schröder: Algebra der Logik.

Vorteilhaft wird es allerdings oft sein, scheinbare Veränderliche einzuführen; man wird aber bloß endliche Ausdehnungsbereiche für die Variation dieser Veränderlichen nötig haben, und mit Hilfe rekurrierender Definitionen wird man die Anwendung solcher Variablen dann immer vermeiden können. Dies alles wird im folgenden klar werden.

Ich will übrigens bemerken, daß ich alle Funktionen eigentlich als deskriptive auffasse; die Aussagenfunktionen sind nur dadurch charakterisiert, daß sie bloß die zwei Werte „wahr" und „falsch" haben können, die natürlich auch mit zu den logischen Grundbegriffen gehören.

Die deskriptiven Funktionen fasse ich als funktionale Eigennamen auf, d. h. Eigennamen, deren Bedeutung von der Wahl einer oder mehrerer Veränderlichen abhängig ist. Z. B. betrachte ich $n + 1$, die auf n folgende Zahl, als den Namen einer Zahl, aber so, daß je nach der Wahl von n verschiedene Zahlen dadurch bezeichnet werden.

Nach Russell und Whitehead sollen die deskriptiven Funktionen wie z. B. „Author of Waverly" eigentlich nichts bedeuten, nämlich bloß unvollständige Symbole sein. Mir scheint diese Auffassung nicht unzweifelhaft zu sein; aber selbst wenn diese Auffassung der deskriptiven Funktionen der gewöhnlichen Sprache richtig sein sollte, so braucht man nicht die deskriptive Funktionen der Arithmetik so aufzufassen.

Russell und Whitehead räsonieren in folgender Weise: „Der Verfasser von Waverly" kann nicht Scott bedeuten; denn dann würde die Aussage „Scott ist der Verfasser von Waverly" bedeuten „Scott ist Scott", und das ist eine ganz nichtssagende Aussage. Andererseits kann „der Verfasser von Waverly" nicht eine andere Person bedeuten; denn dann würde die Aussage „Scott ist der Verfasser von Waverly" falsch sein, was bekanntlich nicht der Fall ist. Folglich bedeutet „der Verfasser von Waverly" nichts; es ist ein unvollständiges Symbol.

Dieser Beweis, der einen sehr philosophischen Charakter hat, scheint mir aber nicht ganz zwingend zu sein. Was soll uns verhindern „der Verfasser von X" — schreiben wir kürzer $V(X)$ — als eine Art variabler Eigennamen aufzufassen? Dann ist gewiß „der Verfasser von Waverly" ein Name derselben Person wie Scott. Die beiden Namen sind aber verschieden, und deshalb kann die Aussage „Scott ist der Verfasser von Waverly" nicht durch die Aussage „Scott ist Scott" ersetzt werden. Die letztere Aussage ist nichtssagend, aber nicht die erstere, und das rührt daher, daß man im voraus schon etwas von der Person, der $V(X)$ genannt wird, weiß, indem ja allgemein festgesetzt ist, daß eine Person dann und nur dann $V(X)$ genannt werden soll, wenn sie und nur sie X geschrieben hat. Die Information ist meines Erachtens von derselben Art wie im folgende Falle: Ein Mann hat zwei Eigennamen, A und B. Einmal hat man etwas von A gehört, z. B. daß er fünf Kinder hat. Ein anderes Mal wird man für Herrn B präsentiert, und es wird erzählt, daß B der Herr A ist. Diese Aussage enthält dann eine Information über B, nämlich daß B fünf Kinder hat, dadurch daß man früher etwas von A wußte. Die Aussage „B ist A" ist also gänzlich verschieden von den Aussagen „A ist A" und „B ist B"; die letzteren sind völlig nichtssagend, aber nicht die erstere, falls schon im voraus etwas von A, aber nicht von B, oder von B, aber nicht von A, bekannt ist.

Die Anwendung des Gleichheitszeichens im folgenden ist immer so aufzufassen, daß zwei Namen oder Ausdrücke dasselbe bedeuten oder bezeichnen. Deshalb sehe ich es auch als selbstverständlich an, daß ich überall gleiches für gleiches setzen kann und mache davon unaufhörlich Gebrauch.

Die Begriffe „natürliche Zahl" und „die auf die Zahl n folgende Zahl $n + 1$" (also die deskriptive Funktion $n + 1$) und die rekurrierende Denkweise werden zu Grunde gelegt.[1]

§ 1.

Die Addition.

Ich will eine deskriptive Funktion zweier Veränderlichen a und b einführen, die ich durch $a + b$ bezeichne und die Summe von a und b nennen will, indem sie für $b = 1$ eben die auf a folgende Zahl $a + 1$ bedeuten soll. Diese Funktion ist also schon für $b = 1$ für beliebige a als definiert anzusehen. Um sie allgemein zu definieren brauche ich sie dann nur für $b + 1$ für beliebige a zu definieren, wenn sie schon für b für beliebige a als definiert angenommen wird. Das geschieht durch folgende Definition:

Df. 1. $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

Hierdurch wird also die Summe von a und $b + 1$ gleich der auf $a + b$ folgenden Zahl gesetzt. Ist also die Addition schon definiert für beliebige Werte von a für eine gewisse Zahl b, so ist durch Df. 1 die Addition für beliebige a für $b + 1$ erklärt und ist somit allgemein definiert. Es ist dies ein typisches Beispiel einer rekurrierenden Definition.

Satz 1. Das assoziative Gesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Beweis: Der Satz gilt für $c = 1$ kraft Df. 1. Ich nehme an, daß er für ein gewisses c für beliebige Werte von a und b gültig ist. Dann muß für beliebige Werte von a und b

$$(\alpha) \qquad a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1),$$

da nämlich nach Df. 1 $b + (c + 1) = (b + c) + 1$. Nach Df. 1 muß aber auch

$$(\beta) \qquad a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1$$

sein. Der Annahme nach soll nun $a + (b + c) = (a + b) + c$ sein, woraus

$$(\gamma) \qquad (a + (b + c)) + 1 = ((a + b) + c) + 1.$$

Nach Df. 1 haben wir endlich auch

$$(\delta) \qquad ((a + b) + c) + 1 = (a + b) + (c + 1).$$

Aus (α), (β), (γ) und (δ) folgt

$$a + (b + (c + 1)) = (a + b) + (c + 1),$$

wodurch der Satz für $c + 1$ für unbestimmt gelassene a und b bewiesen ist. Der Satz gilt also allgemein. Dies ist ein typisches Beispiel eines rekurrierenden Beweises (Beweis durch vollständige Induktion).

[1] Der oft umständliche Formalismus der Aussagenfunktionen im folgenden rührt daher, daß diese Abhandlung in Anschluß an die RUSSELL-WHITEHEAD'schen Arbeiten geschrieben ist.

Hilfssatz: $a + 1 = 1 + a$.

Beweis: Der Satz gilt für $a = 1$. Ich beweise die Gültigkeit für $a + 1$, indem die Gültigkeit für a angenommen wird. Wir erhalten in der Tat

$$(a + 1) + 1 = (1 + a) + 1 = 1 + (a + 1)$$

kraft der gemachten Annahme und der Definition 1. Der Satz gilt also allgemein.

Satz 2. Das kommutative Gesetz: $a + b = b + a$.

Beweis: Dem Hilfssatze zufolge gilt dieser Satz für $b = 1$. Ich nehme an, daß er für beliebiges a für ein gewisses b richtig ist, und beweise dann die Richtigkeit für $b + 1$ für beliebiges a. Dies geschieht so:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 = (b + a) + 1 = b + (a + 1) =$$
$$= b + (1 + a) = (b + 1) + a,$$

wobei sowohl Satz 1 wie der Hilfssatz angewandt worden sind. Die funktionale Behauptung $a + b = b + a$ ist also richtig.

§ 2.

Die Relationen $<$ (kleiner als) und $>$ (grösser als).

Mit der Addition eng verknüpft sind die Kleiner- und die Größerrelation, durch $<$ bezw. $>$ bezeichnet. Da die letztere Relation bloß die Umkehrung der ersteren ist, kommt es nur darauf an, die Relation $<$ zu definieren. Gewöhnlich geschieht diese Definition mit Hilfe einer scheinbaren logischen Veränderlichen, indem man von dem logischen Existenzbegriffe (oder dem RUSSELL-WHITEHEAD'schen „sometimes") Anwendung macht. Die gewöhnliche Definition hat in der Tat das Aussehen:

$$(a < b) = \sum_x (a + x = b),$$

wenn man das SCHRÖDER'sche Zeichen der Gültigkeit in mindestens einem Falle (bei SCHRÖDER Aussagensummation genannt und durch Σ bezeichnet) anwendet. In Worten lautet diese Definition so: „a soll dann und nur dann kleiner als b heißen, *wenn es eine Zahl x gibt* so beschaffen, daß $a + x = b$ ist". Diese Definition setzt also die Anwendung des logischen Existenzbegriffes oder m. a. W. der scheinbaren Veränderlichen voraus. Man kann doch das sehr leicht vermeiden, wenn man nämlich die Kleinerrelation rekurrierend definiert. Dies kann in der Tat so geschehen:

Df. 2. $a < 1$ ist falsch. $(a < b + 1) = (a < b) + (a = b)$.

Es ist leicht zu sehen, daß dies eine völlig legitime rekurrierende Definition ist; denn zuerst wird ja festgesetzt, wann $a < b$ gilt, wenn $b = 1$ ist, nämlich nie; und zweitens wird festgesetzt, wann die Relation $<$

zwischen einem beliebigen a und einem gewissen $b+1$ stattfinden soll, wenn diese Relation schon für b für beliebige a definiert ist. Wie man sieht, *kommt in dieser Definition kein logisches Σ-Zeichen vor.*

Df. 2^1. $(a > b) = (b < a)$.

Satz 3. $\overline{(a < b)(b < c)} + (a < c)$, oder wenn man will: $\overline{(a < b)} + \overline{(b < c)} + (a < c)$. In Worten lautet der Satz: Aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Beweis: Der Satz ist für beliebige a und b gültig, wenn $c = 1$; denn nach Df. 2 ist $b < 1$ falsch, d. h. $\overline{(b < 1)}$ ist wahr. Ich will deshalb die Richtigkeit des Satzes für $c+1$ beweisen, wenn er richtig für c (bei unbestimmten Werten von a und b) ist. Aus $(a < b)(b < c+1)$ folgt nach Df. 2 entweder $(a < b)(b < c)$ oder $(a < b)(b = c)$. Aus $(a < b)(b < c)$ folgt aber der Annahme nach $a < c$, woraus nach Df. 2 $a < c+1$. Aus $(a < b)(b = c)$ folgt natürlich auch $a < c$, woraus wieder $a < c+1$. In jedem Falle folgt also $a < c+1$ aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a < b$ und $b < c+1$, so daß also der Satz auch für beliebige a und b für $c+1$ wahr sein muß. Hierdurch ist Satz 3 bewiesen.

Df. 3. $(a \leqq b) = (a < b) + (a = b)$. Df. 3^1. $(a \geqq b) = (a > b) + (a = b)$.

Diese Definitionen ebenso wie Df. 2^1 bestehen bloß in der Einführung anderer Bezeichnungen; sie sind deshalb theoretisch überflüssig, was nicht mit den rekurrierenden Definitionen der Fall ist.

Hilfssatz 1 (zu Satz 4): $\overline{(a < b)} + (a+1 \leqq b)$.

In Worten: Entweder ist a nicht kleiner als b oder $a+1$ ist kleiner oder gleich b. Es ist aber besser, es so zu sagen: Aus $a < b$ folgt $a+1 \leqq b$.

Beweis: Der Satz ist bei unbestimmtem a gültig für $b = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für beliebiges a für ein gewisses b voraus und beweise dann seine Richtigkeit für beliebiges a für $b+1$. Aus $a < b+1$ folgt (Df. 2) entweder $a < b$, woraus der Annahme zufolge $a+1 \leqq b$, was wieder (Df. 2) $a+1 \leqq b+1$ gibt, oder $a = b$, woraus selbstverständlich $a+1 = b+1$, was (Df. 3) $a+1 \leqq b+1$ gibt. Der Satz gilt also für beliebige Werte von a auch für $b+1$ und ist somit allgemein gültig.

Hilfssatz 2 (zu Satz 4). $1 \leqq a$.

Beweis: Der Satz gilt für $a = 1$. Aus der angenommenen Gültigkeit für a, also $1 \leqq a$, folgt (Df. 2 und 3) $1 < a+1$, was (Df. 3) $1 \leqq a+1$ gibt, d. h. der Satz gilt auch für $a+1$.

Satz 4. $(a < b) + (a = b) + (a > b)$.

Beweis: Der Satz gilt für $b = 1$, weil nach Hilfssatz 2 entweder $a = 1$ oder $a > 1$ sein muß. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für b bei unbestimmtem a voraus und beweise seine Richtigkeit für $b+1$ für beliebiges a. Findet nämlich dann $a < b+1$ nicht statt, so kann (Df. 2) weder $a < b$ noch $a = b$ sein; dann soll aber der Annahme zufolge $a > b$ sein, woraus (Hilfssatz 1) $a \geqq b+1$.

Hilfssatz. $(a < b)(a+1 < b+1) + \overline{(a < b)}\;\overline{(a+1 < b+1)}$.

Dieser Satz kann in Worten so ausgedrückt werden: Aus $a < b$ folgt $a + 1 < b + 1$ und umgekehrt.

Beweis: Aus $a < b$ folgt (Hilfssatz 1 des Satzes 4) $a + 1 \overset{=}{<} b$, woraus (Df. 2) $a + 1 < b + 1$. Aus $a + 1 < b + 1$ folgt (Df. 2) entweder $a + 1 < b$ oder $a + 1 = b$. Hieraus in beiden Fällen $a < b$.

Satz 5. $\overline{a < a}$. D. h. eine beliebige Zahl ist nicht kleiner als sich selbst.

Beweis: Dies ist richtig für $a = 1$ (Df. 2). Ich setze die Richtigkeit für ein gewisses a voraus. Aus $a + 1 < a + 1$ würde nach dem letzten Hilfssatze $a < a$ folgen, was der gemachten Annahme widerstreitet.

Korollar zu den Sätzen 3 und 5: $(a < b)\overline{(a > b)} + \overline{(a < b)}(a > b)$.

In Worten: Ist $a < b$, so ist nicht $a > b$, und umgekehrt.

Denn wäre $a < b$ und zugleich $a > b$, so würde (Satz 3) $a < a$ folgen.

Korollar: $\overline{(a < b)} + (a \neq b)$[1], d. h. wenn $a < b$ ist, so ist a verschieden von b. Denn aus $(a < b)(a = b)$ würde ja $a < a$ folgen.

Die 3 Relationen $a < b$, $a = b$, $a > b$ schließen einander also aus, während andererseits nach Satz 4 eine von ihnen in jedem Falle erfüllt sein muß.

Satz 6. $(a < b)(a + c < b + c) + \overline{(a < b)}\,\overline{(a + c < b + c)}$.

Beweis: Nach dem Hilfssatze zu Satz 5 ist dies jedenfalls richtig, wenn $c = 1$. Wir machen die Annahme, daß die Richtigkeit für beliebige a und b für ein gewisses c schon bewiesen ist. Aus $a < b$ folgt alsdann $a + c < b + c$, woraus kraft Satz 1 und desselben Hilfssatzes $a + (c + 1) < b + (c + 1)$. Umgekehrt folgt aus $a + (c + 1) < b + (c + 1)$ kraft Satz 1 und dieses Hilfssatzes $a + c < b + c$, woraus der Annahme nach $a < b$.

Satz 7. $\overline{(a < b)(c < d)} + (a + c < b + d)$.

D. h.: Aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a < b$ und $c < d$ folgt $a + c < b + d$.

Beweis: Aus $a < b$ folgt (Satz 6) $a + c < b + c$. Aus $c < d$ folgt (Satz 2 und Satz 6) $b + c < b + d$. Aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a + c < b + c$ und $b + c < b + d$ folgt (Satz 3) $a + c < b + d$.

Dies ist ein typisches Beispiel eines nicht rekurrenten Beweises, der also bloß in einer endlichen Kombination früherer Sätze besteht, während ein Beweis durch vollständige Induktion einen unendlichen Prozeß darstellt. Wir haben übrigens schon einige andere Beispiele nicht rekurrenter Beweise gehabt. (Der Hilfssatz des Satzes 5 und die Korollaren der Sätze 3 und 5).

Satz 8. $(a + c \neq b + c) + (a = b)$.

D. h.: Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$. Daß auch die Umkehrung wahr ist, ist selbstverständlich.

Beweis: Ist $a \neq b$, so muß (Satz 4) entweder $a < b$ oder $a > b$ sein. Aus $a < b$ folgt aber (Satz 6) $a + c < b + c$ und aus $a > b$ in derselben

[1] Ich schreibe, wie man gewöhnlich tut, $a \neq b$ um auszudrücken, daß a nicht gleich b ist, also statt $\overline{(a = b)}$.

Weise $a + c > b + c$, und beides läuft der Gleichung $a + c = b + c$ zuwider (Korollar des Satzes 5).

Der Spezialfall $c = 1$ dieses Satzes sagt aus, daß es nur eine Zahl geben kann, die eine bestimmte nachfolgende hat, oder m. a. W. jede Zahl kann nur *eine* vorhergehende haben.

Satz 9. $a < a + b$.

Beweis: Richtig für $b = 1$ für unbestimmtes a (Df. 2). Die Richtigkeit für beliebige a für ein gewisses b können wir dann voraussetzen. Aus $a < a + b$ erhalten wir aber weiter (Df. 2) $a < (a + b) + 1$, d. h. $a < a + (b + 1)$ (Df. 1).

§ 3.

Die Multiplikation.

Df. 4. $a \cdot 1 = a$. $a(b + 1) = ab + a$.

Dies ist eine rekurrierende Definition einer deskriptiven Funktion ab zweier Variablen a und b, die das *Produkt* von a und b genannt wird.

Satz 10. Erstes distributives Gesetz: $a(b + c) = ab + ac$.

Beweis: Der Satz gilt für $c = 1$ (Df. 4). Wir nehmen also an, daß er für beliebiges a und b für ein gewisses c gültig ist. Wir erhalten dann

$$a(b + (c + 1)) = a((b + c) + 1) = a(b + c) + a = (ab + ac) + a =$$
$$= ab + (ac + a) = ab + a(c + 1),$$

wobei von Satz 1, Df. 4 und der gemachten Annahme Gebrauch gemacht ist.

Satz 11. Das assoziative Gesetz: $a(bc) = (ab)c$.

Beweis: Der Satz gilt, wenn $c = 1$ (Df. 4). Wir setzen deshalb voraus, daß er für beliebige a und b für ein gewisses c richtig ist. Dann bekommen wir

$$a(b(c + 1)) = a(bc + b) = a(bc) + ab = (ab)c + ab = (ab)(c + 1)$$

unter Anwendung von Df. 4, Satz 10 und der gemachten Annahme.

Satz 12. Zweites distributives Gesetz: $(a + b)c = ac + bc$.

Beweis: Wenn $c = 1$, ist der Satz richtig (Df. 4). Wir nehmen an, daß er richtig ist für beliebige a und b für ein gewisses c. Dann erhalten wir unter Anwendung von Df. 4 und den Sätzen 1, 2:

$$(a + b)(c + 1) = (a + b)c + (a + b) = (ac + bc) + (a + b) = ((ac + bc) + a) + b =$$
$$= (ac + (bc + a)) + b = (ac + (a + bc)) + b = ((ac + a) + bc) + b =$$
$$= (a(c + 1) + bc) + b = a(c + 1) + (bc + b) = a(c + 1) + b(c + 1).$$

Hilfssatz. $1 \cdot a = a$.

Beweis: Richtig für $a = 1$ (Df. 4). Ist er für a richtig, so folgt $1 \cdot (a + 1) = 1 \cdot a + 1 = a + 1$, d. h. er ist auch für $a + 1$ richtig.

Satz 13. Das kommutative Gesetz: $ab = ba$.

Beweis: Dieser Satz gilt für beliebige a, wenn b gleich 1 ist. (Der Hilfssatz). Aus der angenommenen Richtigkeit für b für beliebiges a folgt (Satz 12 und der Hilfssatz)

$$a(b+1) = ab + a = ba + a = (b+1)a.$$

Satz 14. $(a < b)(ac < bc) + \overline{(a < b)}\,\overline{(ac < bc)}$.

In Worten: Aus $a < b$ folgt $ac < bc$ und umgekehrt.

Beweis: Der Satz ist selbstverständlich richtig für beliebige a und b, wenn $c = 1$ ist. Wir können deshalb annehmen, daß er für beliebige a und b für ein gewisses c gültig ist. Aus $a < b$ folgt dann $ac < bc$, woraus (Satz 7) $ac + a < bc + b$, d. h. (Df. 4) $a(c+1) < b(c+1)$. Die Umkehrung muß auch richtig sein; denn aus $a = b$ würde ja $ac = bc$ und aus $a > b$ nach dem bewiesenen $ac > bc$ folgen.

Korollar: $(ac \neq bc) + (a = b)$, d. h. aus $ac = bc$ folgt $a = b$.

Satz 15. $a \leqq ab$.

Beweis: Richtig für $b = 1$. (Df. 4). Aus der Richtigkeit für b folgt, da (Satz 9) $ab < ab + a$ ist, nach dem Satze 3 $a < a(b+1)$, d. h. der Satz ist auch für $b+1$ richtig.

Korollar: Aus $ab \leqq c$ folgt $a \leqq c$ oder m. a. W.: $(ab > c) + (a \leqq c)$.

§ 4.

Die Teilbarkeitsrelation.

Mit der Multiplikation eng verknüpft ist der Begriff der Teilbarkeit. Dieser wird immer mit Hilfe einer scheinbaren Veränderlichen definiert. Man sagt ja, daß a durch b teilbar ist, wenn es eine Zahl x gibt, so daß $a = bx$ ist. Mit Hilfe Schröder'scher Symbole nimmt diese Definition das folgende Aussehen an, wenn $D(a, b)$ die Aussagenfunktion „a ist teilbar durch b" bedeutet:

$$D(a, b) = \sum_x (a = bx).$$

Eine solche Definition bezieht sich auf eine unendliche — und das heißt ja undurchführbare — Arbeit, weil das Kriterium der Teilbarkeit darin besteht, ob man durch *Probieren die ganze Zahlenreihe hindurch* eine Zahl x finden kann, so beschaffen, daß $a = bx$ wird.

Es ist jedoch hier leicht, sich von der Unendlichkeit frei zu machen, die bei dieser Definition klebt. Es ist nämlich klar, daß eine Zahl x der verlangten Beschaffenheit, falls eine solche überhaupt vorkommt, unter den Zahlen $1, 2, \ldots, a$ auftreten muß; denn aus $bx = a$ folgt nach Satz 15

$x \overline{\gtrless} a$. Deshalb kann die Teilbarkeitsrelation genau ebenso gut wie folgt definiert werden:

$$D(a, b) = \sum_{1}^{a}{}_x (a = bx) = ((a = b) + (a = 2b) + (a = 3b) + \ldots + (a = ba)).$$

Hier kommt allerdings noch eine scheinbare Veränderliche x vor; *ihr Variationsbereich ist aber hier nur ein endlicher*, nämlich bloß die Werte von 1 bis a. Deshalb gibt uns diese Definition ein endliches Kriterium der Teilbarkeit; man kann in jedem Falle die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Aussage $D(a, b)$ mit Hilfe einer endlichen Arbeit — endlich vieler Operationen — konstatieren. Da nun die SCHRÖDER'sche Aussagensumme in dieser Definition eine endliche ist, kann sie selbst wieder durch Rekursion definiert werden, und dadurch läßt sich zuletzt die Anwendung einer scheinbaren Veränderlichen ganz vermeiden. Um dies zu erreichen, brauchen wir nur zuerst eine ternäre Relation $\lrcorner(a, b, c)$ zu definieren, die bedeuten soll, daß a gleich b multipliziert mit einer Zahl zwischen 1 und c (beide inklusive) ist. Die genaue Definition von $\lrcorner(a, b, c)$ geschieht so:

Df. 5. $\lrcorner(a, b, 1) = (a = b)$. $\lrcorner(a, b, c + 1) = \lrcorner(a, b, c) + (a = b(c + 1))$.

Mit Hilfe dieser Aussagenfunktion $\lrcorner$ wird die Teilbarkeit D so definiert:

Df. 6. $D(a, b) = \lrcorner(a, b, a)$.

Es ist sehr leicht zu sehen, daß die Aussagenäquivalenz

$$\lrcorner(a, b, c) = \sum_{1}^{c}{}_x (a = bx)$$

besteht, so daß Df. 6 mit der oben erwähnten endlichen Definition der Teilbarkeit völlig übereinstimmt. In der Tat gilt ja diese Äquivalenz für $c = 1$, weil die Aussagensumme rechts sich dann auf das eine Glied $a = b$ reduziert, und aus der Richtigkeit für c folgt die Richtigkeit für $c + 1$; denn $\sum_{1}^{c+1}{}_x (a = bx)$ bedeutet ja dasselbe wie $\sum_{1}^{c}{}_x (a = bx) + (a = b(c + 1))$.

Satz 16. $(a \neq bc) + \lrcorner(a, b, c)$; d. h. aus $a = bc$ folgt $\lrcorner(a, b, c)$.

Folgt unmittelbar aus Df. 5.

Satz 17. $\overline{\lrcorner(a, b, c)} + (c > c') + \lrcorner(a, b, c')$.

Dies kann auch so ausgedrückt werden: Aus $\lrcorner(a, b, c)(c \leqq c')$ folgt $\lrcorner(a, b, c')$.

Beweis: Selbstverständlich richtig, wenn $c' = 1$. Wir nehmen an, daß der Satz richtig ist für ein gewisses c' für beliebige Werte von a, b und c. Aus $c \leqq c' + 1$ folgt entweder $c \leqq c'$, das mit $\lrcorner(a, b, c)$ der Annahme nach $\lrcorner(a, b, c')$ und dadurch auch (Df. 5) $\lrcorner(a, b, c' + 1)$ gibt, oder $c = c' + 1$, das mit $\lrcorner(a, b, c)$ natürlich $\lrcorner(a, b, c' + 1)$ gibt. Der Satz ist also auch richtig für $c' + 1$ für beliebige Werte von a, b und c und gilt also völlig allgemein.

Satz 18. $\overline{\Delta(a, b, c)} + D(a, b)$. D. h. aus $\Delta(a, b, c)$ folgt $D(a, b)$.

Beweis: Aus $\Delta(a, b, 1)$, d. h. $a = b$, folgt, da $1 \leqq a$ (Hilfssatz 2 des Satzes 4), nach Satz 17 $\Delta(a, b, a)$, d. h. $D(a, b)$. Nehmen wir jetzt an, daß der Satz für c gültig ist. Aus $\Delta(a, b, c + 1)$ folgt (Df. 5) entweder $\Delta(a, b, c)$, woraus der Annahme zufolge $D(a, b)$, oder $a = b(c + 1)$, woraus (Satz 15) $c + 1 \leqq a$; aber aus $\Delta(a, b, c + 1)(c + 1 \leqq a)$ folgt (Satz 17) $\Delta(a, b, a)$, d. h. $D(a, b)$.

Korollar zu den Sätzen 16 und 18: $(a \neq bc) + D(a, b)$; d. h. aus $a = bc$ folgt $D(a, b)$.

Satz 19. $(a \neq bd) + \overline{\Delta(b, c, e)} + \Delta(a, c, de)$; d. h. aus $(a = bd)\Delta(b, c, e)$ folgt $\Delta(a, c, de)$.

Beweis: Ist $e = 1$, so ist $\Delta(b, c, e) = (b = c)$; aus $(a = bd)\Delta(b, c, 1)$ folgt also $a = cd$, woraus (Satz 16) $\Delta(a, c, d)$. Wir setzen deshalb die Richtigkeit des Satzes für e (bei beliebigen a, b, c, d) voraus. Aus $(a = bd)\Delta(b, c, e + 1)$ erhalten wir (Df. 5) entweder $(a = bd)\Delta(b, c, e)$, woraus also $\Delta(a, c, de)$, woraus wieder, da $de < d(e + 1)$ ist ($de < de + d$ nach Satz 9), nach dem Satze 17 $\Delta(a, c, d(e + 1))$, oder $(a = bd)(b = c(e + 1))$, woraus $a = cd(e + 1)$, was wieder (Satz 16) $\Delta(a, c, d(e + 1))$ gibt.

Korollar zu den Sätzen 18 und 19: $(a \neq bd) + \overline{D(b, c)} + D(a, c)$; d. h. aus $(a = bd) D(b, c)$ folgt $D(a, c)$. Denn aus $(a = bd)\Delta(b, c, b)$ folgt (Satz 19) $\Delta(a, c, bd)$, woraus (Satz 18) $D(a, c)$.

Satz 20. $\overline{\Delta(a, b, d)} + \overline{D(b, c)} + D(a, c)$.

Beweis: Aus $\Delta(a, b, 1)\, D(b, c)$ folgt natürlich $D(a, c)$, da $\Delta(a, b, 1) = (a = b)$ ist. Wir setzen die Richtigkeit des Satzes für beliebige a, b und c für ein gewisses d voraus. Aus $\Delta(a, b, d + 1)\, D(b, c)$ erhalten wir (Df. 5) entweder $\Delta(a, b, d)\, D(b, c)$, woraus der Annahme zufolge $D(a, c)$, oder $(a = b(d + 1))\, D(b, c)$, woraus nach dem Korollar zu den Sätzen 18 und 19 $D(a, c)$ folgt. Hierdurch ist die Richtigkeit für $c + 1$ bewiesen.

Korollar: $\overline{D(a, b)\, D(b, c)} + D(a, c)$; d. h. aus $D(a, b)\, D(b, c)$ folgt $D(a, c)$.

Dies ist in der Tat bloß der Spezialfall des Satzes 20, der entsteht, wenn man $d = a$ setzt.

Dieser letzte Satz, daß $D(a, c)$ aus $D(a, b)\, D(b, c)$ folgt, ist mit dem Satze nahe verwandt, der sagt, daß $(a = cde)$ aus $(a = bd)(b = ce)$ folgt, hat aber einen ganz anderen Sinn. Auch nach der gewöhnlichen Auffassungsweise mit Anwendung scheinbarer Variablen mit unendlichem Variationsbereich sind die beiden Sätze ihrem Inhalte nach ganz verschieden, was sofort offenbar wird, wenn beide genau formuliert werden. Der eine Satz ist in Schröder'schen Symbolen:

$$(\alpha) \qquad \prod_a \prod_b \prod_c \left(\overline{\sum_x (a = bx)} + \overline{\sum_y (b = cy)} + \sum_z (a = cz)\right).$$

Der andere Satz ist:

$$(\beta) \qquad \prod_a \prod_b \prod_c \prod_d \prod_e \left((a \neq bd) + (b \neq ce) + (a = cde)\right).$$

Wenn man indessen gewöhnlich die Richtigkeit des Satzes $\overline{D(a,b)} + \overline{D(b,c)} + D(a,c)$ oder (α) dadurch beweist, daß man den Satz (β) beweist, so beruht das auf gewisse logische Schemata, die den Gebrauch der Π- und Σ-Zeichen betreffen; diese werden aber im gewöhnlichen mathematischen Denken stillschweigend vorbeigegangen.

Satz 21. $\overline{\Delta(a,c,d)} + (b \neq ce) + \Delta(a+b,c,d+e)$.

Beweis: Aus $\Delta(a,c,1)(b = ce)$ oder m. a. W. $(a = c)(b = ce)$ folgt $a + b = c(1+e)$, und daraus (Satz 16) $\Delta(a+b,c,1+e)$. Der Satz ist also richtig, wenn $d = 1$. Wir setzen die Richtigkeit für ein gewisses d voraus und beweisen wie folgt die Richtigkeit für $d+1$. Aus $\Delta(a,c,d+1)$ $(b = ce)$ folgt entweder $\Delta(a,c,d)(b = ce)$, woraus der Annahme zufolge $\Delta(a+b,c,d+e)$, was wieder $\Delta(a+b,c,(d+1)+e)$ zur Folge hat (Sätze 1, 2 und Df. 5), oder $(a = c(d+1))(b = ce)$, woraus $a + b = c((d+1)+e)$, was wieder (Satz 16) $\Delta(a+b,c,(d+1)+e)$ zur Folge hat.

Korollar: $\overline{\Delta(a,c,d)} + \overline{\Delta(b,c,1)} + \Delta(a+b,c,d+1)$.

Satz 22. $\overline{\Delta(a,c,d)} + \overline{\Delta(b,c,e)} + \Delta(a+b,c,d+e)$.

Beweis: Nach dem Korollar des Satzes 21 gilt dies für $e = 1$. Wir setzen deshalb die Richtigkeit des Satzes für ein gewisses e voraus und beweisen die Richtigkeit für $e+1$ wie folgt. Aus $\Delta(a,c,d)\,\Delta(b,c,e+1)$ erhalten wir entweder $\Delta(a,c,d)\,\Delta(b,c,e)$ und daraus der Annahme zufolge $\Delta(a+b,c,d+e)$, was wieder $\Delta(a+b,c,d+(e+1))$ zur Folge hat, oder $\Delta(a,c,d)(b = c(e+1))$, woraus (Satz 21) $\Delta(a+b,c,d+(e+1))$.

Korollar: $\overline{D(a,c)\,D(b,c)} + D(a+b,c)$.

In Worten: Wenn sowohl a wie b durch c teilbar sind, so ist auch $a+b$ durch c teilbar.

Denn aus $\Delta(a,c,a)\,\Delta(b,c,b)$ erhalten wir nach Satz 22 $\Delta(a+b,c,a+b)$.

Hilfssatz. $\overline{\Delta(a+b,b,c+1)} + \Delta(a,b,c)$.

Beweis: Aus $\Delta(a+b,b,2)$ folgt (Df. 5) entweder $a + b = b$, was aber unmöglich ist, da (Satz 9) $a + b > b$ sein muß, und die Relationen $>$ und $=$ einander ausschließen (Satz 5), oder $a + b = b \cdot 2$, woraus $b = a$ (da nämlich aus $a + b = b + b$ nach Satz 8 $a = b$ folgen muß). Unser Hilfssatz ist also richtig für $c = 1$. Wir setzen seine Gültigkeit für c voraus und beweisen sie dann für $c+1$. Aus $\Delta(a+b,b,c+2)$ folgt in der Tat entweder $\Delta(a+b,b,c+1)$, woraus der Annahme zufolge $\Delta(a,b,c)$ und also auch $\Delta(a,b,c+1)$ folgt, oder $a + b = b(c+2)$, woraus (Satz 8) $a = b(c+1)$, was wieder $\Delta(a,b,c+1)$ zur Folge hat.

Indem wir von der Subtraktion vorgreifend Gebrauch machen (siehe § 5), kann man diesem Satze auch folgende Form geben: Aus $\Delta(a+b,b,c)(c>1)$ folgt $\Delta(a,b,c-1)$. Dies ist ja richtig, wenn $c = 1$ ist, weil die Hypothesis dann falsch ist. Gilt der Satz für c, so gilt er auch für $c+1$; denn aus $\Delta(a+b,b,c+1)$ erhalten wir ja nach dem eben bewiesenen $\Delta(a,b,c)$, und es ist $c = (c+1) - 1$. (Siehe Df. 7).

Satz 23. $\overline{\Delta(a+bd,b,c+d)} + \Delta(a,b,c)$.

Beweis: Im Falle $d = 1$ kommen wir zum Hilfssatze zurück. Wir setzen deshalb die Richtigkeit des Satzes für d voraus und beweisen sie für $d + 1$. Aus $\Delta(a + bd + b, b, c + d + 1)$ folgt (Df. 5) entweder $a + bd + b = b(c + d + 1)$ oder $\Delta(a + bd + b, b, c + d)$. Im ersten Falle erhalten wir, da (Satz 10) $b(c + d + 1) = bc + b(d + 1)$ ist, $a = bc$ (Satz 8), woraus $\Delta(a, b, c)$ (Satz 16). Im zweiten Falle erhalten wir, da $c + d > 1$ sein muß (Hilfssatz 2 zu Satz 4 und Satz 9), nach dem Hilfssatze $\Delta(a + bd, b, c + d - 1)$, woraus $\Delta(a + bd, b, c + d)$, was der Annahme nach $\Delta(a, b, c)$ zur Folge hat.

Satz 24. $\overline{\Delta(a + b, c, d + e)} + \overline{\Delta(b, c, e)} + \Delta(a, c, d + e)$.

Beweis: Dies ist wahr für $e = 1$; denn aus $\Delta(a + b, c, d + 1)(b = c)$ erhalten wir nach dem Hilfssatze des Satzes 23 $\Delta(a, c, d)$ und also auch $\Delta(a, c, d + 1)$. Wir können deshalb die Wahrheit des Satzes für e (bei beliebigen a, b, c, d) annehmen und beweisen sie dann für $e + 1$ (für beliebige Werte von a, b, c und d). Aus $\Delta(a + b, c, d + (e + 1))\,\Delta(b, c, e + 1)$ erhalten wir entweder $\Delta(a + b, c, (d + 1) + e)\,\Delta(b, c, e)$, was nach der Voraussetzung $\Delta(a, c, (d + 1) + e)$ oder m. a. W. $\Delta(a, c, d + (e + 1))$ zur Folge hat, oder $\Delta(a + b, c, d + (e + 1))\,(b = c(e + 1))$, woraus (Satz 23) $\Delta(a, c, d)$, was wieder (Satz 17) $\Delta(a, c, d + e + 1)$ zur Folge hat.

Korollar. $\overline{D(a + b, c)\,D(a, c)} + D(b, c)$.

Denn erstens muß (Satz 24) $\Delta(b, c, a + b)$ aus $\Delta(a + b, c, a + b)\,\Delta(a, c, a)$ folgen, und zweitens ist (Satz 18) $D(b, c)$ eine Folge von $\Delta(b, c, a + b)$.

Nach der Einführung der Subtraktion wird man diesen Satz auch so schreiben können: $\overline{(a > b)} + \overline{D(a, c)} + \overline{D(b, c)} + D(a - b, c)$.

D. h. wenn a und b beide durch c teilbar sind, und a größer als b ist (damit eine Differenz $a - b$ existieren soll), so ist $a - b$ durch c teilbar.

Satz 25. $\overline{\Delta(a, b, c)} + (a \geqq b)$.

Beweis: Der Satz gilt selbstverständlich für $c = 1$. Wird seine Gültigkeit für c vorausgesetzt, so erhalten wir aus $\Delta(a, b, c + 1)$ entweder $\Delta(a, b, c)$, was also $a \geqq b$ gibt, oder $a = b(c + 1)$, woraus auch $a \geqq b$ folgt (Satz 15).

Korollar 1. $\overline{D(a, b)} + (a \geqq b)$.

Korollar 2. $\overline{D(a, b)} + \overline{D(b, a)} + (a = b)$.

Denn aus $(a \geqq b)(b \geqq a)$ muß (Satz 5) ja $a = b$ folgen.

Satz 26. $\Delta(a, b, d)\,\Delta(ac, bc, d) + \overline{\Delta(a, b, d)}\;\overline{\Delta(ac, bc, d)}$.

In Worten: Aus $\Delta(a, b, d)$ folgt $\Delta(ac, bc, d)$ und umgekehrt.

Beweis: Der Satz ist wahr, wenn $d = 1$ ist; denn aus $ac = bc$ folgt ja nach dem Korollar des Satzes 14 $a = b$, und umgekehrt folgt aus $a = b$ natürlich $ac = bc$. Wir setzen die Richtigkeit für d voraus und beweisen die Richtigkeit für $d + 1$. Aus $\Delta(a, b, d + 1)$ erhalten wir entweder $\Delta(a, b, d)$, was der Annahme nach $\Delta(ac, bc, d)$ und also auch $\Delta(ac, bc, d + 1)$ zur Folge hat, oder $a = b(d + 1)$, woraus $ac = (b(d + 1))\,c = b((d + 1)c) = b(c(d + 1)) = (bc)(d + 1)$ (Sätze 11, 13), und aus $ac = bc(d + 1)$ folgt wieder (Satz 16) $\Delta(ac, bc, d + 1)$. Ebenso erhalten wir aus $\Delta(ac, bc, d + 1)$ entweder $\Delta(ac, bc, d)$, woraus also $\Delta(a, b, d)$ und also auch $\Delta(a, b, d + 1)$, oder $ac = bc(d+1) = b(d+1)c$, woraus zufolge dem Korollar des Satzes 14 $a = b(d+1)$, woraus (Satz 16) $\Delta(a, b, d+1)$.

Korollar: $D(a, b)\, D(ac, bc) + \overline{D(a, b)}\;\overline{D(ac, bc)}$.

Satz 27. $(a \neq bd) + \overline{\Delta(d, c, e)} + \Delta(a, bc, e)$.

Beweis: Richtig für $e = 1$. Wir setzen deshalb die Richtigkeit für e voraus und beweisen sie für $e+1$. Aus $\Delta(d, c, e+1)$ erhalten wir entweder $\Delta(d, c, e)$, das mit $a = bd$ der Annahme nach $\Delta(a, bc, e)$ und also auch $\Delta(a, bc, e+1)$ gibt, oder $d = c(e+1)$, das mit $a = bd$ uns $a = (bc)(e+1)$ (Satz 11) gibt, woraus $\Delta(a, bc, e+1)$ (Satz 16).

§ 5.

Subtraktion und Division. Deskriptive Funktionen mit eingeschränktem Existenzbereich.

Die Subtraktion kann bekanntlich in folgender Weise definiert werden:
Df. 7. $(c - b = a) = (c = a + b)$.

Daß hierdurch eine deskriptive Funktion $c - b$, die Differenz genannt, definiert wird, ist klar; denn durch die Gleichung $a + b = c$ ist a eindeutig bestimmt durch b und c. Es wird aber dies eine deskriptive Funktion mit eingeschränktem Existenzbereich; denn wenn $c \leqq b$ ist, kann eine Gleichung der Form $c = a + b$ nicht bestehen, und nach Df. 7 besteht dann für jede Zahl a die Ungleichheit $c - b \neq a$, d. h. $c - b$ ist nicht gleich einer Zahl. Andererseits läßt sich beweisen, daß $c - b$ sicher einen Wert hat, wenn $c > b$ ist. Diesen Satz wird man geneigt sein, so zu formulieren:

$$\overline{(c > b)} + \sum_x (x + b = c),$$

wo die Aussagensummation in bezug auf x über „alle" Zahlen von 1 bis ∞ zu erstrecken wäre. Allein es ist auch hier nicht nötig, eine solche aktuale Unendlichkeit heranzuziehen; wir können in der Tat den folgenden Satz beweisen:

$$\overline{(c > b)} + \sum_{x\,1}^{c} (x + b = c),$$

der ja noch eher hinreicht, um die Existenz eines Wertes von $c - b$ zu sichern. Die Aussagenfunktion der drei Variablen x, y, z

$$\sum_{u\,1}^{z} (u + y = x) = L(x, y, z)$$

läßt sich aber wieder rekurrierend definieren, so daß wir die scheinbare Variable u ganz vermeiden können. Der Satz, der bewiesen werden soll, ist dann augenscheinlich:

Satz 28: $\overline{c > b} + L(c, b, c)$.

In Worten lautet dieser Satz in der Tat so: Ist $c > b$, so gibt es unter den Zahlen von 1 bis c eine Zahl x so beschaffen, daß $x + b = c$ oder m. a. W. $x = c - b$ ist.

Wir brauchen die rekurrierende Definition der Funktion L und ein Paar einfache Sätze über sie.

Df. 8. $L(x, y, 1) = (x = 1 + y)$, $L(x, y, z + 1) = L(x, y, z) + + (x = (z + 1) + y)$.

Satz 29. $\overline{L(x, y, z)(z \leqq z')} + L(x, y, z')$.

Beweis: Richtig, wenn $z' = 1$. Ich setze die Richtigkeit für z' voraus und beweise dadurch die Richtigkeit für $z' + 1$. Aus $z \leqq z' + 1$ folgt in der Tat entweder $z \leqq z'$, das mit $L(x, y, z)$ der Annahme nach $L(x, y, z')$ und also (Df. 8) auch $L(x, y, z' + 1)$ gibt, oder $z = z' + 1$, das mit $L(x, y, z)$ selbstverständlich $L(x, y, z' + 1)$ gibt.

Satz 30. $\overline{L(x, y, z)} + L(x + 1, y, z + 1)$.

Beweis: Richtig, wenn $z = 1$; denn aus $x = 1 + y$ folgt ja $x + 1 = (1 + y) + 1 = 1 + (y + 1) = 1 + (1 + y) = (1 + 1) + y$ (Sätze 1 und 2). Ich setze die Richtigkeit für z voraus und beweise sie für $z + 1$. Aus $L(x, y, z + 1)$ folgt (Df. 8) entweder $L(x, y, z)$, woraus nach der gemachten Voraussetzung $L(x + 1, y, z + 1)$ und also weiter auch $L(x + 1, y, z + 2)$ folgt, oder $x = (z + 1) + y$, woraus $x + 1 = ((z + 1) + y) + 1 = (z + 1) + (y + 1) = (z + 1) + (1 + y) = (z + 2) + y$ (Satz 1 und 2), woraus (Df. 8) $L(x + 1, y, z + 2)$.

Jetzt kann der Beweis des Satzes 28 geführt werden:

Satz 28 ist jedenfalls richtig, wenn $c = 1$; denn $\overline{1 > b}$ ist ja schon wahr. Ich setze deshalb die Richtigkeit für c voraus und beweise die Richtigkeit für $c + 1$. Aus $c + 1 > b$ erhalten wir (siehe Hilfssatz 1 des Satzes 4, Hilfssatz des Satzes 5 und Satz 8) entweder $c > b$, was nach der gemachten Voraussetzung uns $L(c, b, c)$ gibt, woraus wieder (Satz 30) $L(c + 1, b, c + 1)$ folgt, oder $c = b$, woraus $c + 1 = b + 1 = 1 + b$ (Satz 2) und daraus (Df. 8) $L(c + 1, b, 1)$ und daraus wieder (Satz 29) $L(c + 1, b, c + 1)$.

In analoger Weise wie die Subtraktion wird die Division eingeführt.

Df. 9. $\left(\frac{c}{b} = a\right) = (c = ab)$.

Dieser sogenannte Quotient $\frac{c}{b}$ ist augenscheinlich wieder eine Funktion mit begrenzter Existenz; denn aus $c = ab$ folgt ja (Korollar der Sätze 16 und 18) $D(c, b)$, so daß $\frac{c}{b}$ nur dann einen Wert hat, wenn $D(c, b)$ wahr ist. Umgekehrt ist dies auch hinreichend; denn die Aussage $D(c, b)$ oder m. a. W. $\Delta(c, b, c)$ (siehe Df. 6) ist ja mit der Aussagensumme

$$\sum_{1}^{c}{}_{x}(c = bx)$$

gleichbedeutend (siehe S. 11), und $(c = bx) = (c = xb)$, so daß diese Aussagensumme in Worten so lauten kann:

Es gibt unter den Zahlen von 1 bis c eine Zahl x, so daß $c = xb$ oder m. a. W. $\frac{c}{b} = x$ ist.

Die Aussagenfunktion $D(c, b)$ ist deshalb mit der Behauptung der Existenz eines Wertes von $\frac{c}{b}$ (zwischen 1 und c) völlig gleichbedeutend.

Ich stelle hier einige einfache Sätze über die Differenzen und Quotienten auf. Die trivialen Beweise brauche ich wohl nicht aufzustellen; diese Sätze sind ja bloße Umformungen der einfachsten Sätze über Summen und Produkte.

Satz $31_{\dot{-}}$. $(a - b) + b = c$.

" $32_{\dot{-}}$. $(a - b) + c = (a + c) - b$.

" $33_{\dot{-}}$. $(a - b) - c = a - (b + c)$.

" $34_{\dot{-}}$. $a - (b - c) = (a - b) + c$.

" 35. $(a - b)c = ac - bc$.

" 36a. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$.

Satz $31_{\times}$. $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

" $32_{\times}$. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$.

" $33_{\times}$. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc}$.

" $34_{\times}$. $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{b} \cdot c$.

" 36b. $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$.

§ 6.

Grösster gemeinschaftlicher Divisor und kleinstes gemeinschaftliches Multiplum.

Bei der gewöhnlichen Definition des größten gemeinschaftlichen Teilers und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier Zahlen werden scheinbare Veränderlichen mit unendlichem Variationsbereich angewandt. In SCHRÖDER'schen Symbolen haben diese Definitionen in der Tat folgendes Aussehen:

$$(c \text{ größter gem. Teiler von } a \text{ und } b) = \\ = D(a, c)\, D(b, c) \prod_{x} \left(\overline{D(a, x)} + \overline{D(b, x)} + D(c, x)\right).$$

(c kleinstes gem. Vielfaches von a und b) $=$

$$= D(c, a)\, D(c, b) \prod_x \left(\overline{D(x, a)} + \overline{D(x, b)} + D(x, c)\right).$$

Da indessen $x \leqq a$ aus $D(a, x)$ folgt (Korollar 1 des Satzes 25), so läßt sich der unendliche Variationsbereich in der Definition des größten gemeinschaftlichen Teilers sofort auf einen endlichen einschränken, indem wir ebenso gut schreiben können:

(c größter gemeinschaftlicher Teiler von a und b) $=$

$$= D(a, c)\, D(b, c) \prod_{x\,1}^{a} \left(\overline{D(a, x)} + \overline{D(b, x)} + D(c, x)\right).$$

Es ist allerdings hier ein Nachteil, daß die Definition unsymmetrisch in bezug auf a und b wird. Dies läßt sich aber auch leicht vermeiden, indem man statt der oberen Grenze a beim Π-Zeichen natürlich auch $a + b$ schreiben kann oder noch besser Min (a, b), wenn Min (a, b) die kleinere der Zahlen a und b bedeutet. Für die Definition des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen ist eine solche Reduktion zu einem endlichen Variationsbereich nicht ganz so einfach durchführbar. — Ich werde im folgenden diese Begriffe in einer anderen Weise einführen, wobei scheinbare Veränderliche ganz vermieden werden. Ich muß dabei allerdings das rekurrierende Definitionsverfahren in einer (wie ich bald zeigen soll, aber bloß scheinbar) anderen Weise als früher anwenden. Bisher ist immer die rekurrente Definition streng in der Weise geschehen, daß wir einen Begriff für die Zahl 1 definierten und dann für $n + 1$, indem die Definition für eine beliebig gegebene Zahl n schon als fertig angenommen wurde. Weiter kommt auch ein formal logisches Prinzip hier zur Anwendung, nämlich, daß wir für Fälle, die einander gegenseitig ausschließen, besondere Definitionen aufstellen können. Ich führe zwei deskriptive Funktionen, $a \wedge b$ und $a \vee b$, zweier Veränderlichen a und b ein, deren Identität mit dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamenVielfachen nachher gezeigt wird.

Df. 10. $\left((a \neq b) + (a \wedge b = a)\right)\left(\overline{(a > b)} + (a \wedge b = (a - b) \wedge b)\right)$ $\left(\overline{(a < b)} + (a \wedge b = a \wedge (b - a))\right)$.

Dies ist eine vollkommen legitime rekurrierende Definition der deskriptiven Funktion $a \wedge b$; denn setzt man voraus, daß sie schon für solche Werte von a und b, für welche $a + b < n$ ist, definiert ist, so wird sie durch Df. 10 für $a + b = n$ definiert. Denn sind a und b zwei solche Zahlen, daß $a + b = n$ ist, so ist entweder $a = b$ oder $a > b$ oder $a < b$, und diese drei Fälle schließen einander aus, während Df. 10 in jedem Falle bestimmt, was $a \wedge b$ bedeuten soll. Außerdem gibt uns Df. 10 den Wert von $a \wedge b$ in dem Falle $a + b = 2$, wobei $a = b = 1$ sein muß.

In den Beweisen einiger der folgenden Sätze werde ich auch die vollständige Induktion in einer (allerdings wie ich bald zeigen will bloß scheinbar) anderen Weise als früher anwenden. Bisher ist immer dieser Induktionsschluß so geschehen: Wir beweisen einen Satz für die Zahl 1 und dann für $n + 1$, indem die Gültigkeit für n vorausgesetzt war. Jetzt werde ich auch so induktiv beweisen: Ich beweise für 1 und dann für n, indem die Gültigkeit für eine beliebige Zahl $< n$ vorausgesetzt wird.

Hilfssatz: $a \wedge 1 = 1$.

Beweis: Richtig für $a = 1$ zufolge Df. 10. Wird die Richtigkeit für a vorausgesetzt, erhalten wir nach Df. 10, da $a + 1 > 1$ ist (Satz 9), daß $(a + 1) \wedge 1 = a \wedge 1$ ist, und also ist auch $(a + 1) \wedge 1 = 1$.

Ebenso läßt sich beweisen, daß $1 \wedge a = 1$ ist. Überhaupt ist natürlich $a \wedge b = b \wedge a$.

Satz 37. $D(a, a \wedge b)\, D(b, a \wedge b)$.

Beweis. Dieser Satz ist richtig für beliebige b für $a = 1$ und für beliebige a für $b = 1$; denn nach dem Hilfssatz ist $a \wedge 1 = 1 \wedge b = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für $a + b < n$ voraus und beweise dann die Richtigkeit für $a + b = n$. Ist nämlich erstens $a = b$, so ist nach Df. 10 $a \wedge b = a$, und folglich gilt der Satz. Ist zweitens $a > b$, so ist $(a - b) + b < n$, und der Annahme zufolge gilt dann $D(a - b, (a - b) \wedge b)\, D(b, (a - b) \wedge b)$. Nach Df. 10 ist aber $(a - b) \wedge b = a \wedge b$, und wir erhalten also $D(a - b, a \wedge b)\, D(b, a \wedge b)$, woraus nach dem Korollar des Satzes 22 und dem Satze 31 auch $D(a, a \wedge b)$ folgt. Der Satz ist also auch in diesem Falle richtig. Ist drittens $a < b$, kann man genau analog verfahren.

Satz 38. $D(a, c)\, D(b, c) + D(a \wedge b, c)$.

Beweis: Der Satz gilt, wenn $a = 1$, für beliebige b und für beliebige a für $1 = b$; denn dann folgt aus $D(a, c)$ bezw. $D(b, c)$, daß $c = 1$ ist. Ich setze die Gültigkeit des Satzes für solche a und b, daß $a + b < n$ ist, voraus und beweise daraus die Gültigkeit für solche a und b, daß $a + b = n$ ist. Es seien also a und b solche Zahlen, daß $a + b = n$ ist. Erstens kann dann $a = b$ sein; nach Df. 10 ist in diesem Falle $a \wedge b = a$, und der Satz ist also richtig. Zweitens kann $a > b$ sein. Da $(a - b) + b < n$ wird, soll der Annahme nach $D((a - b) \wedge b, c)$ aus $D(a - b, c)\, D(b, c)$ folgen; es ist aber wieder $D(a - b, c)$ eine Folge von $D(a, c)\, D(b, c)$ (Korollar des Satzes 24) und endlich ist (Df. 10) in diesem Falle $(a - b) \wedge b = a \wedge b$. Also folgt $D(a \wedge b, c)$ aus $D(a, c)\, D(b, c)$. Im dritten Falle, $a < b$, geht es genau ebenso.

Die Sätze 37 und 38 drücken zusammen die charakteristischen Eigenschaften des größten gemeinschaftlichen Teilers aus.

Satz 39. $D(a, b) + (a \wedge b = b)$.

Beweis: Dem Satze 37 zufolge haben wir $D(b, a \wedge b)$. Andererseits folgt $D(a \wedge b, b)$ aus $D(a, b)\, D(b, b)$ (Satz 38). Aus $D(b, a \wedge b)\, D(a \wedge b, b)$ folgt aber $a \wedge b = b$ (Korollar 2, Satz 25).

Korollar: $ab \wedge a = a$.

Satz 40. $ac \wedge bc = (a \wedge b)c$.

Beweis: Der Satz ist richtig für beliebige a für $b = 1$ und für beliebige b für $a = 1$, wie aus dem Hilfssatze des Satzes 37 und dem Korollar des Satzes 39 sofort folgt. Wir nehmen deshalb die Gültigkeit des Satzes für $a + b < n$ schon als bewiesen an und beweisen auf dieser Grundlage die Gültigkeit für solche a und b, daß $a + b = n$ ist. Erstens kann $a = b$ sein. Dann ist auch $ac = bc$, und nach Df. 10 haben wir $ac \wedge bc = ac$ und $a \wedge b = a$, wodurch $ac \wedge bc = (a \wedge b)\,c$ wird. Der zweite Fall ist $a > b$. Da $(a - b) + b < n$ wird, so ist nach der gemachten Voraussetzung $(a - b)\,c \wedge bc = ((a - b) \wedge b)\,c$. Außerdem ist aber $a \wedge b = (a - b) \wedge b$, und da auch $ac > bc$ wird (Satz 14), muß nach Df. 10 $(ac - bc) \wedge bc = ac \wedge bc$ sein. Endlich ist $(a - b)\,c = ac - bc$ (Satz 35). Also gilt die Gleichung $ac \wedge bc = (a \wedge b)\,c$. Im dritten Falle, $a < b$, geht es natürlich ebenso.

Definition: Wir sagen, daß zwei Zahlen a und b *relativ prim* sind, wenn $a \wedge b = 1$ ist. Ich führe kein besonderes Symbol dafür ein, da wir ja immer die kurze Gleichung $a \wedge b = 1$ als Ausdruck dafür anwenden können.

Satz 41. $\overline{D\,(ac, b)\,(a \wedge b = 1)} + D\,(c, b)$.

Dies ist der bekannte Satz, daß eine Zahl b, die in einem Produkt ac aufgeht, während sie zum Faktor a relativ prim ist, in dem anderen Faktor c aufgehen muß.

Beweis: Aus $D\,(ac, b)\,D\,(bc, b)$ folgt (Satz 38) $D\,(ac \wedge bc, b)$. Aus $a \wedge b = 1$ folgt aber (Satz 40) $ac \wedge bc = c$, so daß also $D\,(c, b)$ wahr werden muß.

Satz 42. $\overline{(a \wedge b = 1)\,D\,(a, a')} + (a' \wedge b = 1)$.

Beweis: Dem Satze 37 zufolge gilt $D\,(a', a' \wedge b)\,D\,(b, a' \wedge b)$; aus $D\,(a, a')\,D\,(a', a' \wedge b)$ folgt aber (Korollar des Satzes 20) $D\,(a, a' \wedge b)$, das mit $D\,(b, a' \wedge b)$ (Satz 38) $D\,(a \wedge b, a' \wedge b)$ gibt. Dann muß also aus $(a \wedge b = 1)\,D\,(a, a')$ sicher $a' \wedge b = 1$ folgen; denn aus $D\,(1, a)$ folgt $a = 1$ (Korollar 1, Satz 25).

Satz 43. $(a \wedge b \neq 1) + (a \wedge c \neq 1) + (a \wedge bc = 1)$.

Beweis: Geht eine Zahl d sowohl in a als in bc auf, muß (Satz 42) sowohl $d \wedge b = 1$ wie $d \wedge c = 1$ sein, falls $(a \wedge b = 1)\,(a \wedge c = 1)$ besteht. Weiter muß aus $D\,(bc, d)\,(c \wedge d = 1)$ nach Satz 41 $D\,(b, d)$ folgen. Aus $D\,(b, d)$ folgt aber $b \wedge d = d$ (Satz 39); andererseits war $b \wedge d = 1$; also $d = 1$. Nun geht aber (Satz 37) $a \wedge bc$ sowohl in a als in bc auf; also ist $a \wedge bc = 1$.

Satz 44 (Verallgemeinerung des Satzes 41). $\overline{D\,(ac, b)} + D\left(c, \dfrac{b}{a \wedge b}\right)$.

Beweis: Erstens ist klar, daß $\dfrac{a}{a \wedge b} \wedge \dfrac{b}{a \wedge b} = 1$ sein muß; denn nach dem Satze 40 haben wir $\left(\dfrac{a}{a \wedge b} \wedge \dfrac{b}{a \wedge b}\right)(a \wedge b) = (a \wedge b)$. Aus $D\,(ac, b)$ folgt (Satz 26, Korollar) $D\left(\dfrac{ac}{a \wedge b}, \dfrac{b}{a \wedge b}\right)$, woraus nach Satz 41, da $\dfrac{a}{a \wedge b}$ und $\dfrac{b}{a \wedge b}$ relativ prim sind, $D\left(c, \dfrac{b}{a \wedge b}\right)$.

Df. 11. $a \vee b = \dfrac{ab}{a \wedge b}$.

Satz 45. $\overline{A(a, b, d)\, D(a, c)} + A(a, b \vee c, d)$.

Beweis: Richtig, wenn $d = 1$; denn aus $(a = b)\, D(a, c)$ folgt $D(b, c)$, woraus (Satz 39) $b \wedge c = c$ und folglich nach Df. 11 $b \vee c = b$. Ich setze die Richtigkeit für d voraus und beweise sie für $d + 1$. Aus $A(a, b, d + 1)$ folgt entweder $A(a, b, d)$, das mit $D(a, c)$ der Annahme nach $A(a, b \vee c, d)$ und also auch $A(a, b \vee c, d + 1)$ gibt, oder $a = b(d + 1)$, das mit $D(a, c)$ (Satz 44) $D\left(d + 1, \dfrac{c}{b \wedge c}\right)$ gibt. Mit Hilfe des Satzes 27 erhalten wir aber aus $(a = b(d + 1))\, D\left(d + 1, \dfrac{c}{b \wedge c}\right)$ wieder $A(a, b \vee c, d + 1)$.

Satz 46. $D(a \vee b, a)\, D(a \vee b, b)$.

Nach dem Satze 37 gilt $D(a, a \wedge b)$, woraus (Satz 26, Korollar) $D\left(\dfrac{ab}{a \wedge b}, b\right)$, d. h. $D(a \vee b, b)$. Ebenso erhält man aus $D(b, a \wedge b)$ die Wahrheit von $D(a \vee b, a)$.

Satz 47. $\overline{D(c, a)\, D(c, b)} + D(c, a \vee b)$.

Dies ist bloß ein Spezialfall des Satzes 45, der durch Gleichsetzen von d und a entsteht.

Die Sätze 46 und 47 drücken zusammen die charakteristischen Eigenschaften des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier Zahlen a und b aus. Es bedeutet also $a \vee b$ das kleinste gemeinsame Multiplum von a und b.

Ein wichtiger Spezialfall von Satz 47 ist der, da $a \wedge b = 1$ ist. Aus $D(c, a)\, D(c, b)\, (a \wedge b = 1)$ folgt $D(c, ab)$.

Dem Satze 39 entsprechend haben wir:

Satz 48. $\overline{D(a, b)} + (a \vee b = a)$.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt sofort aus dem Satze 39 und der Definition 11.

Dem Satze 40 entsprechend haben wir:

Satz 49. $ac \vee bc = (a \vee b)\, c$.

Beweis: $ac \vee bc = \dfrac{ac \cdot bc}{ac \wedge bc} = \dfrac{ac \cdot bc}{(a \wedge b)\, c} = \dfrac{ab \cdot c}{a \wedge b} = (a \vee b)\, c$,

wobei von den Sätzen 11, 13, 32 und 40 Anwendung gemacht ist.

Ich will diesen Paragraphen damit schließen einen Beweis dafür zu geben, daß die oben angewandten weitläufigeren Arten der rekurrierenden Definition und des rekurrierenden Beweises sich bloß formal, nicht real, von dem gewöhnlichen einfachen Rekursionsverfahren von n auf $n + 1$ unterscheiden. Die normale Form der rekurrenten Definition besteht ja darin, daß eine Aussagenfunktion $U(x)$ zuerst für $x = 1$ definiert wird und dann für $x = n + 1$, wenn $U(n)$ schon definiert ist. Oben haben wir aber auch so rekurrierend definiert: Zuerst $U(1)$ und dann $U(n)$, wenn $U(m)$

für beliebige $m < n$ als definiert angenommen war. Es ist klar, daß der Wert der Aussagenfunktion $U(y)(y \leqq x)$ für beliebig gewählte x und y bekannt sein wird, falls $U(y)$ für die betreffenden y definiert ist; aber umgekehrt wird auch bekannt sein, ob $U(y)$ wahr oder falsch ist für ein $y \leqq x$, wenn $U(y)(y \leqq x)$ für die betreffenden x und y definiert ist. Um $U(x)$ zu definieren, wird es also hinreichen $U(y)(y \leqq x)$ für beliebige x und y zu definieren, wobei aber bemerkt werden kann, daß für jedes Wertepaar (x, y), für welches $y > x$ ist, $U(y)(y \leqq x)$ notwendig falsch sein muß. Um den Wert von $U(y)(y \leqq x)$ allgemein zu bestimmen, können wir nun das normale rekurrierende Verfahren anwenden. Für $x = 1$ ist $U(y)(y \leqq x)$ notwendig falsch nach der Definition der Kleinerrelation, wenn $y > 1$ ist; wir haben also bloß $U(1)$ zu bestimmen, um den Wert von $U(y)(y \leqq 1)$ für beliebige y zu haben. Weiter bestimmen wir den Wert von $U(y)(y \leqq x)$ für $x + 1$ für beliebige y, falls er für x für beliebige y schon bestimmt ist. Ist $y > x + 1$, ist $U(y)(y \leqq x + 1)$ falsch. Ist $y \leqq x$, kennen wir schon den Wert der Aussagenfunktion, d. h. wir haben bloß $U(x + 1)$ zu bestimmen. Also: *Die Bestimmung des Wertes von $U(x + 1)$, wenn diese Funktion für beliebige $y < x + 1$ als bekannt angesehen wird, ist nichts anderes als die Bestimmung des Wertes der Aussagenfunktion $U(x)(y \leqq x)$ für $x = n + 1$ für beliebige y, wenn sie für $x = n$ für beliebige y schon bekannt ist.* Hierdurch ist also die scheinbar abweichende Art der rekurrierenden Definition auf die normale Form derselben zurückgeführt.

Ebenso ist es leicht zu sehen, daß die weitläufigere Form des Induktionsschlusses, darin bestehend, daß man für n beweist, wenn die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes für beliebige $m < n$ angenommen wird, sich bloß formal und nicht real von der Normalform des Induktionsschlusses, dem Schlusse von n auf $n + 1$, unterscheidet. Daß $U(y)$ bewiesen ist für beliebige $y < x$ ist ja damit gleichbedeutend, daß $(y \geqq x) + U(y)$ für dieses x für beliebige y bewiesen ist, und es ist dann nicht schwer zu sehen, *daß der Beweis von $U(x)$, wenn $U(y)$ für beliebige $y < x$ als richtig angenommen wird, damit gleichbedeutend ist $(y \geqq x + 1) + U(y)$ für beliebige y zu beweisen, wenn $(y \geqq x) + U(y)$ für beliebiges y schon bewiesen ist.*

§ 7.

Der Begriff der Primzahl.

Df. 12. $P(x, 1)$ wahr. $P(x, y + 1) = P(x, y)\,((x = y + 1) +$
$+ \overline{D(x, y + 1)})$.

Df. 13. $P(x) = P(x, x)(x \neq 1)$.

Die Aussagenfunktion $P(x)$ bedeutet: „x ist eine Primzahl".

Df. 14. $De(x, 1)$ falsch. $De(x, y + 1) = De(x, y) +$
$+ D(x, y + 1)(y + 1 < x)$.

Df. 15. $Dp(x, 1)$ falsch. $Dp(x, y+1) = Dp(x, y) + D(x, y+1)\,P(y+1)$.

Df. 16. $T(1)$ wahr. $T(x+1) = T(x)\,Dp(x+1, x+1)$.

Bei der gewöhnlichen Definition des Primzahlbegriffes wird eine scheinbare Veränderliche benutzt. Wird die Teilbarkeitsrelation schon als definiert angesehen, so geschieht die Primzahldefinition wie folgt:

$$P(x) = (x \neq 1)\,\prod_{y}\left(\overline{D(x, y)} + (y = 1) + (y = x)\right)$$

Es kommt hier ein unendliches Aussagenprodukt (oder m. a. W. das RUSSELL-WHITEHEAD'sche „always") vor. In den obigen Definitionen 12 und 13 kommt aber keine scheinbare Veränderliche vor. Die Möglichkeit dafür, das unendliche Aussagenprodukt zu vermeiden, steckt darin, daß dies sofort durch ein endliches ersetzt werden kann. Nach dem Korollar des Satzes 25 muß ja $y \leqq x$ sein, falls $D(x, y)$ wahr ist, und daraus folgt, daß in dem unendlichen Produkte alle Faktoren, wo $y > x$ ist, wirkungslos werden. Deshalb können wir $P(x)$ ebenso gut so definieren:

$$P(x) = (x \neq 1)\,\prod_{y=1}^{x}\left(\overline{D(x, y)} + (y = 1) + (y = x)\right).$$

Das hier vorkommende endliche Aussagenprodukt ist gar nicht anderes als der Faktor $P(x, x)$ rechts in Df. 13, wobei $P(x, y)$ durch Df 12 rekurrent definiert ist und mit dem Produkte

$$\prod_{z=1}^{y}\left(\overline{D(x, z)} + (z = x)\right)$$

gleichbedeutend ist. Eben weil diese Aussagenprodukte endlich sind, können sie rekurrierend definiert werden, wodurch die scheinbaren Veränderlichen völlig vermieden werden.

Die übrigen oben eingeführten Aussagenfunktionen Dc, Dp und T haben, wie leicht einzusehen ist, in Worten folgende Bedeutungen:

$Dc(x, y)$ bedeutet: ‚x ist durch eine Zahl teilbar, die > 1, $\leqq y$ und $< x$ ist'.

$Dp(x, y)$ bedeutet: ‚x ist durch eine Primzahl, die $\leqq y$ ist, teilbar'.

$T(x)$ bedeutet, daß alle Zahlen von 2 bis x durch mindestens eine Primzahl $\leqq x$ teilbar sind.

Satz 50. $\overline{P(x, y)\,D(x, z)\,(z \leqq y)} + (z = 1) + (z = x)$.

Beweis: Wenn $y = 1$ ist, so ist der Satz selbstverständlich richtig. Ich beweise den Satz für $y + 1$ unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für y. Aus $z \leqq y + 1$ folgt entweder $z \leqq y$ oder $z = y + 1$. Aus $z \leqq y$ in Verbindung mit $P(x, y)$, das ja aus $P(x, y + 1)$ folgt, und $D(x, z)$ erhalten wir der Annahme nach entweder $z = 1$ oder $z = x$. Aus $z = y + 1$ in Verbindung mit $(x = y + 1) + \overline{D(x, y + 1)}$, das ja auch aus $P(x, y + 1)$ folgt, und $D(x, z)$ erhalten wir $z = x$.

Korollar: $\overline{P(x)\,D(x,y)} + (y = 1) + (y = x)$.

Denn aus $P(x,x)(x \neq 1)\,D(x,y)$ folgt ja (Satz 25) $P(x,x)\,D(x,y)$ $(y \leqq x)$, woraus nach dem eben bewiesenen Satze $(y = 1) + (y = x)$.

Satz 51. $\overline{P(y)} + D(x,y) + (x \wedge y = 1)$.

Beweis: Da $D(y, x \wedge y)$ wahr ist (Satz 37), muß, wenn $P(y)$ gilt, nach dem Korollar des Satzes 50 entweder $x \wedge y = 1$ oder $x \wedge y = y$ sein; aber aus $x \wedge y = y$ folgt $D(x,y)$ (Satz 37).

Satz 52. $\overline{D(xy, z)\,P(z)} + D(x,z) + D(y,z)$.

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satze gilt, wenn $P(z)$ wahr ist, entweder $D(x,z)$ oder $x \wedge z = 1$. Aus $D(xy,z)\,P(z)$ muß also entweder $D(x,z)$ oder $D(xy,z)(x \wedge z = 1)$ folgen; aber aus $D\,(xy,z)(x \wedge z = 1)$ folgt wieder (Satz 41) $D(y,z)$.

Satz 53. $P(x,y) + De(x,y)$.

Beweis: Richtig für $y = 1$, weil schon $P(x, 1)$ wahr ist (Df. 12). Ich setze die Richtigkeit dieses Satzes für y voraus und beweise auf dieser Grundlage die Richtigkeit für $y + 1$. Aus $\overline{P(x, y+1)}$ folgt (Df. 12) entweder $\overline{P(x,y)}$, woraus also $De(x,y)$ und folglich auch $De(x, y+1)$ (Df. 14), oder $x \neq y + 1)\,D(x, y+1)$, woraus (Korollar 1, Satz 25) $D(x, y+1)\,(y + 1 < x)$, was kraft Df. 14 $De(x, y+1)$ gibt.

Satz 54. $\overline{(y \leqq y')\,Dp(x,y)} + Dp(x,y')$.

Beweis: Selbstverständlich richtig, wenn $y' = 1$. Ich setze die Richtigkeit für y' voraus und beweise den Satz dann für $y' + 1$. Aus $y \leqq y' + 1$ folgt entweder $y \leqq y'$, was mit $Dp(x,y)$ der Annahme nach $Dp(x,y')$ und also (Df. 15) auch $Dp(x, y' + 1)$ zur Folge hat, oder $y = y' + 1$, das mit $Dp(x,y)$ natürlich $Dp(x, y' + 1)$ nach sich zieht.

Satz 55. $\overline{D(x,y)\,Dp(y,z)} + Dp(x,z)$.

Beweis: Für $z = 1$ ist dieser Satz richtig, da $Dp(y, 1)$ falsch ist (Df 15). Ich setze also die Gültigkeit des Satzes für z voraus und beweise sie dann für $z + 1$. Aus $Dp(y, z + 1)$ erhalten wir (Df. 15) entweder $Dp(y,z)$, das mit $D(x,y)$ also $Dp(x,z)$ und folglich auch $Dp(x, z+1)$ zur Folge hat, oder $D(y, z+1)\,P(z+1)$, das mit $D(x,y)$ nach dem Korollar des Satzes 20 die Wahrheit von $D(x, z+1)$ bewirkt, woraus nach Df. 15 $Dp(x, z+1)$.

Satz 56. $Dp(x,y) + Dp(x,x)$.

Beweis: Nach Definition 15 muß dies für $y = 1$ richtig sein. Ich setze die Richtigkeit für y voraus und beweise sie für $y + 1$. Aus $Dp(x, y+1)$ folgt entweder $Dp(x,y)$, woraus also $Dp(x,x)$, oder $D(x, y+1)\,P(y+1)$, woraus nach dem Korollar 1 des Satzes 25 $y + 1 \leqq x$; aber aus $Dp(x, y+1)$ $(y + 1 \leqq x)$ folgt (Satz 54) $Dp(x,x)$.

Satz 57. $De(x,y)\,T(y) + Dp(x,x)$.

Beweis: Der Satz gilt für $y = 1$; denn $De(x, 1)$ ist falsch. Ich setze die Gültigkeit des Satzes für y voraus und beweise den Satz für $y + 1$.

Aus $De(x, y+1)\, T(y+1)$ folgt entweder $De(x, y)\, T(y+1)$, woraus (Df. 16) $De(x, y)\, T(y)$, woraus der Annahme zufolge $Dp(x, x)$, oder $D(x, y+1)$ $(y+1 < x)\, T(y+1)$, woraus (Df. 16) $D(x, y+1)(y+1 < x)\, Dp(y+1, y+1)$, woraus wieder nach dem Satze 55 $Dp(x, y+1)(y+1 < x)$, was (Satz 54) die Gültigkeit von $Dp(x, x)$ bewirkt.

Satz 58. $T(x)$.

Beweis: Richtig für $x = 1$ (Df. 16). Ich beweise die Gültigkeit von $T(x+1)$ unter Voraussetzung der Gültigkeit von $T(x)$. Nach Df. 16 brauche ich zu dem Ende nur $Dp(x+1, x+1)$ zu beweisen. Nach Df. 13 haben wir entweder $P(x+1)$ oder $\overline{P(x+1, x+1)}$. Aus $P(x+1)\, D(x+1, x+1)$ folgt nach Df. 15 $Dp(x+1, x+1)$. Aus $\overline{P(x+1, x+1)}$ folgt nach dem Satze 53 $De(x+1, x+1)$, was $De(x+1, x)$ (siehe Df. 14) zur Folge haben muß; aus $De(x+1, x)\, T(x)$ folgt aber nach dem Satze 57 $Dp(x+1, x+1)$.

Korollar: $Dp(x+1, x+1)$.

Denn aus $T(x+1)$ folgt ja (Df. 16) $Dp(x+1, x+1)$.

Dies ist der Satz, daß jede Zahl > 1 durch mindestens eine Primzahl teilbar ist. Eigentlich bedeutet ja $Dp(x+1, x+1)$, daß $x+1$ durch mindestens eine Primzahl $\leqq x+1$ teilbar ist.

Um nun den Satz, daß jede Zahl > 1 ein Produkt von Primzahlen ist, formulieren und beweisen zu können, führe ich eine ternäre Relation $P(x, y, z)$ ein, die bedeuten soll: ‚x ist das Produkt von y Primzahlen, die alle $\leqq z$ sind'.

Df. 17. $P(x, y, z) = P(x, y, z-1) + P\left(\frac{x}{z}, y-1, z\right) P(z)\, D(x, z)$.

$P(x, 1, z) = (x \leqq z)\, P(x)$. $\quad P(x, y, 1)$ falsch.

Es ist dies eine doppelt rekurrierende Definition, nämlich rekurrierend sowohl in bezug auf y wie auf z. Es wird $P(x, 1, z)$ für beliebige z (und x) definiert, und wird dann angenommen, daß $P(x, y-1, z)$ für beliebige z (und x) schon definiert ist, so haben wir mit Hilfe der ersten Gleichung der Definition 17 und der Festsetzung, daß $P(x, y, 1)$ falsch sein soll, eine rekurrierende Definition der Aussagenfunktion $P(x, y, z)$, nämlich rekurrierend in bezug auf z. Durch die letzte Festsetzung der Df. 17 wird ja $P(x, y, 1)$ bestimmt und durch die erste Gleichung wird $P(x, y, z)$ auf Grund der Voraussetzung, daß $P(x, y-1, z)$ schon bekannt ist, bestimmt.

Ich will noch drei andere Aussagenfunktionen einführen:

Df. 18. $P'(x, 1, z) = P(x, 1, z) \quad P'(x, y+1, z) = P'(x, y, z) + {}$ ${} + P(x, y+1, z)$.

Df. 19. $\Pi(x) = P'(x, x, x)$.

Df. 20. $\Pi'(1)$ wahr. $\Pi'(x+1) = \Pi'(x)\, \Pi(x+1)$.

Die Aussage $P'(x, y, z)$ bedeutet augenscheinlich, daß x ein Produkt von höchstens y Primzahlen, jede $\leqq z$, ist. Die Aussage $\Pi(x)$ bedeutet, daß x ein Produkt von höchstens x Primzahlen, jede $\leqq x$, ist. $\Pi'(x)$ bedeutet, daß alle Zahlen y von 1 bis x entweder gleich 1 oder ein Produkt von höchstens y Primzahlen $\leqq y$ sind, oder m. a. W., daß alle Zahlen y von 2 bis x ein Produkt von höchstens y Primzahlen $\leqq y$ sind. Das eigentliche Ziel der folgenden Entwicklungen ist die Allgemeingültigkeit von $\Pi(x+1)$ zu beweisen.

Satz 59. $\overline{P(x, y, z)(z \leqq z')} + P(x, y, z')$.

Beweis: Dieser Satz ist selbstverständlich richtig, wenn $z' = 1$ ist. Ich beweise den Satz für $z'+1$ unter Voraussetzung der Gültigkeit für z'. Aus $z \leqq z'+1$ folgt entweder $z \leqq z'$, das mit $P(x, y, z)$ also $P(x, y, z')$ und folglich auch (Df. 17) $P(x, y, z'+1)$ zur Folge hat, oder $z = z'+1$, und aus $(z = z'+1)\,P(x, y, z)$ folgt selbstverständlich wieder $P(x, y, z'+1)$.

Hilfssatz 1 des Satzes 60: $\overline{P(x_1, 1, z)\,P(x_2, 1, z)} + P(x_1x_2, 2, z)$.

Beweis: Richtig für $z = 1$; denn schon $P(x_1, 1, 1)$ ist falsch (Df. 17 und 13). Ich beweise den Satz für $z+1$ unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für z. Aus $P(x_1, 1, z+1)\,P(x_2, 1, z+1)$ folgt nach Df. 17 entweder $P(x_1, 1, z)\,P(x_2, 1, z)$, woraus also $P(x_1x_2, 2, z)$, das wieder $P(x_1x_2, 2, z+1)$ zur Folge hat, oder $(x_1 = z+1)\,P(x_1)\,P(x_2, 1, z+1)$ oder $(x_2 = z+1)$ $P(x_2)\,P(x_1, 1, z+1)$. Aus $P(z+1)\,P\left(\frac{x_1x_2}{z+1}, 1, z+1\right)$ folgt aber (Df. 17) $P(x_1x_2, 2, z+1)$, und analog geht es im dritten Falle.

Hilfssatz 2 des Satzes 60. $\overline{P(x_1, y, z)\,P(x_2, 1, z)} + P(x_1x_2, y+1, z)$.

Beweis: Nach dem ersten Hilfssatze ist dies richtig für $y = 1$. Ich beweise die Richtigkeit des Satzes für $y+1$ unter Voraussetzung der Gültigkeit für y. Aus $P(x_1, y+1, z)\,P(x_2, 1, z)$ erhalten wir nun sicher $P(x_1x_2, y+2, z)$ falls $z = 1$ ist; denn $P(x_2, 1, 1)$ ist falsch. Ich setze deshalb die Gültigkeit dieses Schlusses für $y+1$ für z voraus und beweise dann die Gültigkeit für $z+1$. Aus $P(x_1, y+1, z+1)\,P(x_2, 1, z+1)$ erhalten wir (Df. 17) drei Alternative: 1) Schon $P(x_1, y+1, z)\,P(x_2, 1, z)$ ist gültig; dann haben wir der Annahme nach $P(x_1x_2, y+2, z)$, woraus (Df. 17) $P(x_1x_2, y+2, z+1)$. 2) Wir haben $P\left(\frac{x_1}{z+1}, y, z+1\right)P(z+1)\,P(x_2, 1, z+1)$. Aus $P\left(\frac{x_1}{z+1}, y, z+1\right)P(x_2, 1, z+1)$ folgt aber, da unser Satz für y für beliebige z als richtig vorausgesetzt war, $P\left(\frac{x_1x_2}{z+1}, y+1, z+1\right)$, das mit $P(z+1)$ kraft Df. 17 $P(x_1x_2, y+2, z+1)$ zur Folge hat. 3) Wir haben $P(x_1, y+1, z+1)\,(x_2 = z+1)\,P(x_2)$; daraus erhalten wir aber (Df. 17) $P(x_1x_2, y+2, z+1)$.

Satz 60. $\overline{P(x_1, y_1, z)\,P(x_2, y_2, u)\,(u \leqq z)} + P(x_1x_2, y_1+y_2, z)$.

Beweis: Dieser Satz ist jedenfalls richtig, wenn $y_1 = 1$ oder $y_2 = 1$ für beliebige Werte der übrigen Variablen kraft Hilfssatz 2. Er gilt also sicher für den kleinsten möglichen Wert der Summe $y_1 + y_2 + z + u$, nämlich 4, wobei $y_1 = y_2 = z = u = 1$ sein muß. Ich beweise wie folgt die Richtigkeit des Satzes für solche Werte von y_1, y_2, z und u, daß

$y_1 + y_2 + z + u = n$ ist, wenn die Richtigkeit für die Fälle, da $y_1 + y_2 + z + u = n - 1$ ist, vorausgesetzt wird. $P(x_1, y_1, z)$ ist damit gleichbedeutend, daß entweder $P(x_1, y_1, z - 1)$ oder $P\left(\frac{x_1}{z}, y_1 - 1, z\right) P(z) D(x, z)$ stattfindet. Außerdem haben wir entweder $u \leqq z - 1$ oder $u = z$. Die erste Alternative ist deshalb $P(x_1, y_1, z - 1) P(x_2, y_2, u)(u \leqq z - 1)$. Da aber $y_1 + y_2 + (z - 1) + u = n - 1$ wird, so folgt nach der gemachten Voraussetzung $P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z - 1)$, und daraus wieder (Df. 17) $P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$. Die zweite Alternative wird $P(x_1, y_1, z - 1) P(x_2, y_2, z)$. Da aber auch hier $y_1 + y_2 + z - 1 + z = n - 1$ sein muß, so folgt $P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$. Die dritte Alternative ist $P\left(\frac{x_1}{z}, y_1 - 1, z\right) P(z) P(x_2, y_2, u)(u \leqq z)$. Daraus folgt aber, da $y_1 - 1 + y_2 + z + u = n - 1$ wird, $P\left(\frac{x_1 x_2}{z}, y_1 + y_2 - 1, z\right) P(z)$, und daraus wieder (Df. 17) $P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$.

Korollar: $\overline{P(x_1, y_1, z) P(x_2, y_2, z)} + P(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$.

Hilfssatz: $\overline{P'(x_1, y_1, z) P(x_2, y_2, z)} + P'(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$.

Beweis: Richtig für $y_1 = 1$ (Df. 18 und Hilfssatz 2, Satz 60). Ich beweise die Richtigkeit für $y_1 + 1$ unter Voraussetzung der Gültigkeit für y_1. Aus $P'(x_1, y_1 + 1, z)$ folgt entweder $P'(x_1, y_1, z)$, das mit $P(x_2, y_2, z)$ nach der Voraussetzung $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$ und also auch $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2 + 1, z)$ zur Folge hat, oder $P(x_1, y_1 + 1, z)$, woraus in Verbindung mit $P(x_2, y_2, z)$ nach dem Korollar des Satzes 60 $P(x_1 x_2, y_1 + 1 + y_2, z)$ folgt, woraus wieder (Df. 18) $P'(x_1 x_2, y_1 + 1 + y_2, z)$.

Satz 61. $\overline{P'(x_1, y_1, z) P'(x_2, y_2, z)} + P'(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$.

Beweis: Nach dem Hilfssatze ist dies richtig für $y_2 = 1$. Ich beweise die Richtigkeit des Satzes für $y_2 + 1$ unter Voraussetzung seiner Richtigkeit für y_2. Aus $P'(x_2, y_2 + 1, z)$ folgt (Df. 18) entweder $P'(x_2, y_2, z)$, und daraus dann mit $P'(x_1, y_1, z)$ der gemachten Voraussetzung zufolge $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2, z)$ und also auch $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2 + 1, z)$, oder $P(x_2, y_2 + 1, z)$, das mit $P'(x_1, y_1, z)$ nach dem Hilfssatze $P'(x_1 x_2, y_1 + y_2 + 1, z)$ zur Folge hat.

Hilfssatz: $\overline{P'(x, y, z)} + P'(x, y, z + 1)$.

Beweis: Richtig für $y = 1$ kraft der Definitionen 17 und 18. Ich beweise diesen Satz für $y + 1$ unter Voraussetzung seiner Gültigkeit für y. Aus $P'(x, y + 1, z)$ folgt entweder $P'(x, y, z)$, woraus also $P'(x, y, z + 1)$ und daraus wieder (Df. 18) $P'(x, y + 1, z + 1)$, oder $P(x, y + 1, z)$, woraus (Df. 17) $P(x, y + 1, z + 1)$ und daraus (Df. 18) $P'(x, y + 1, z + 1)$.

Satz 62. $\overline{P'(x, y, z)(z \leqq z')} + P'(x, y, z')$.

Beweis: Selbstverständlich richtig, wenn $z' = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für z' voraus und beweise dann den Satz für $z' + 1$. Aus $z \leqq z' + 1$ folgt entweder $z \leqq z'$, und aus $P'(x, y, z)(z \leqq z')$ folgt nach der gemachten Annahme $P'(x, y, z')$ und daraus nach dem Hilfssatze $P'(x, y, z' + 1)$, oder $z = z' + 1$, und daraus in Verbindung mit $P'(x, y, z)$ folgt selbstverständlich $P'(x, y, z' + 1)$.

Satz 63. $\overline{P'(x, y, z)(y \leqq y')} + P'(x, y', z)$.

Beweis: Selbstverständlich richtig, wenn $y' = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für y' voraus. Aus $y \leqq y' + 1$ folgt entweder $y \leqq y'$ oder $y = y' + 1$. Aus $P'(x, y, z)(y \leqq y')$ folgt nun der Annahme nach $P'(x, y', z)$ und also (Df. 18) auch $P'(x, y' + 1, z)$. Aus $P'(x, y, z)(y = y' + 1)$ folgt natürlich $P'(x, y' + 1, z)$. Der Satz gilt also auch für $y' + 1$.

Satz 64. $(x = 1) + (y = 1) + \overline{\Pi(x)} + \overline{\Pi(y)} + \Pi(xy)$.

Beweis: Da nach dem Satze 15 $x \leqq xy$ und ebenso $y \leqq xy$ sein muß, folgt aus $P'(x, x, x) P'(y, y, y)$, d. h. $\Pi(x) \Pi(y)$, nach dem Satze 62 $P'(x, x, xy) P'(y, y, xy)$. Nach dem Satze 61 folgt aber aus $P'(x, x, xy)$ $P'(y, y, xy)$ wieder $P'(xy, x + y, xy)$. Ist nun außerdem $(x > 1)(y > 1)$, so ist $x + y \leqq xy$, so daß wir durch Anwendung des Satzes 63 $P'(xy, xy, xy)$, d. h. $\Pi(xy)$, erhalten. Aus $(x > 1)(y > 1) \Pi(x) \Pi(y)$ folgt also $\Pi(xy)$, was zu beweisen war.

Hilfssatz 1 (zum Satze 65). $\overline{\Pi'(x)(y \leqq x)} + \Pi'(y)$.

Beweis: Selbstverständlich richtig für $x = 1$. Ich setze die Richtigkeit des Satzes für x voraus. Aus $y \leqq x + 1$ folgt entweder $y \leqq x$ oder $y = x + 1$. Aus $\Pi'(x + 1)$ folgt (Df. 20) $\Pi'(x)$, und also folgt aus $\Pi'(x + 1)$ $(y \leqq x)$ erstens $\Pi'(x)(y \leqq x)$ und daraus weiter $\Pi'(y)$. Aus $\Pi'(x + 1)$ $(y = x + 1)$ folgt natürlich $\Pi'(y)$.

Hilfssatz 2 (zu Satz 65). $\overline{\Delta(x, y, z) \Pi(y) \Pi'(z)(y > 1)} + \Pi(x)$.

Dies ist richtig, wenn $z = 1$. Ich setze die Wahrheit des Satzes für z voraus. Aus $\Delta(x, y, z + 1)$ folgt (Df. 5) entweder $\Delta(x, y, z)$ oder $x = y(z + 1)$. Aus $\Delta(x, y, z) \Pi(y) \Pi'(z + 1)(y > 1)$ erhalten wir nach der Definition 20 $\Delta(x, y, z) \Pi(y) \Pi'(z)(y > 1)$ und daraus nach der gemachten Annahme $\Pi(x)$. Aus $(x = y(z + 1)) \Pi(y) \Pi'(z + 1)(y > 1)$ folgt (Df. 20) $(x = y(z + 1))$ $\Pi(y) \Pi(z + 1)(y > 1)$ und daraus nach dem Satze 64 $\Pi(x)$. Der Satz gilt also auch für $z + 1$.

Hilfssatz 3 (zu Satz 65). $\overline{De(x, y) \Pi'(x - 1)} + \Pi(x)$.

Beweis: Dies gilt für $y = 1$, wie aus Df. 14 zu sehen ist. Ich setze die Gültigkeit des Satzes für y voraus. Aus $De(x, y + 1)$ folgt (Df. 14) entweder $De(x, y)$ oder $D(x, y + 1)(y + 1 < x)$. Aus $De(x, y) \Pi'(x - 1)$ soll nach der Annahme $\Pi(x)$ folgen. Nach der Definition 2 muß $D(x, y + 1)$ $(y + 1 < x)$ mit $D(x, y + 1)(y + 1 \leqq x - 1)$ gleichbedeutend sein; aus $\Pi'(x - 1)(y + 1 \leqq x - 1)$ folgt aber (Hilfssatz 1) $\Pi'(y + 1)$, woraus $\Pi(y + 1)$ (Df. 20), und da außerdem, wie leicht zu sehen, $D(x, y + 1) = \Delta(x, y + 1, x - 1)$ sein muß (siehe die Definitionen 5 und 6), so folgt aus $D(x, y + 1) \Pi(y + 1) \Pi'(x - 1)$ nach dem Hilfssatz 2 $\Pi(x)$.

Satz 65. $\Pi'(x)$.

Beweis: Richtig für $x = 1$ (Definition 20). Ich setze die Wahrheit von $\Pi'(x - 1)$ voraus und beweise dann $\Pi(x)$, wodurch auch $\Pi'(x)$ bewiesen wird (Df. 20). Entweder gilt $P(x)$ oder $\overline{P(x)}$. Aus $P(x)$ folgt (Df. 17) $P(x, 1, x)$, d. h. (Df. 18) $P'(x, 1, x)$, woraus nach Satz 63 $P'(x, x, x)$, d. h. $\Pi(x)$. Aus $\overline{P(x)}\,(x > 1)$ folgt $\overline{P(x, x)}$ (Df. 13), woraus (Satz 53) $De(x, x)$. $De(x, x)\,\Pi'(x - 1)$ hat aber nach dem dritten Hilfssatze $\Pi(x)$ zur Folge.

Korollar: $\Pi(x + 1)$.

Denn nach Df. 20 folgt $\Pi(x + 1)$ aus $\Pi\ (x + 1)$. Dies ist aber der wichtige Satz, daß jede Zahl > 1 ein Produkt von Primzahlen ist.

§ 8.

Einige explizite Anwendungen endlicher logischer Summen und Produkte.

Gilt es nur, die Anwendung unendlich ausgedehnter logischer Veränderlichen zu vermeiden, so kann man doch natürlich von *endlich* ausgedehnten Veränderlichen freien Gebrauch machen, und dies auch ohne sich darum zu kümmern, wie diese mit Hilfe rekurrierender Definitionen vermieden werden könnten, noch darum, wie die Schlüsse, welche mit deren Hilfe gemacht werden, mittels vollständiger Induktion auf Grund derjenigen Schlüsse bewiesen werden könnten, welche für solche Aussagen gelten, in denen keine scheinbaren Veränderlichen auftreten.

Geht man so vor, so läßt sich z. B. die Theorie der Zerlegung in Primzahlfaktoren einfacher darstellen, wie ich im folgenden zeige. — Ich benutze die Primzahldefinition Seite 23:

$$\text{Df.}\quad P(x) = (x \neq 1) \prod_{y=1}^{x} \left(\overline{D(x, y)} + (y = 1) + (y = x)\right).$$

$$\text{Satz 66:}\quad \sum_{p=1}^{n} D(n, p)\, P(p) + (n = 1).$$

Beweis: Gilt für $n = 1$. Der Satz sei gültig für alle $\nu < n$, wobei $n > 1$. Dann gilt entweder die Aussage $\sum\limits_{\nu=1}^{n} D(n, \nu)(\nu < n)(\nu > 1)$ oder ihre Verneinung $\prod\limits_{\nu=1}^{n} \{\overline{D(n, \nu)} + (\nu = n) + (\nu = 1)\}$, (da ja $\nu \geqq n$ hier mit $\nu = n$ und $\nu \leqq 1$ mit $\nu = 1$ gleichbedeutend ist). In letzteren Falle hat man $D(n, n)\, P(n)$. Im ersteren Falle gilt nach der Annahme $\sum\limits_{p=1}^{\nu} D(\nu, p)\, P(p)$; folglich $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \sum\limits_{p=1}^{\nu} D(n, \nu)\, D(\nu, p)\, P(p)$, woraus $\sum\limits_{p=1}^{n} D(n, p)\, P(p)$.

Da $D(n, p)$ mit der Aussagensumme $\sum\limits_{\nu=1}^{n} (n = \nu p)$ gleichbedeutend ist, hat man das Korollar:

Korollar: $(n = 1) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (n = \nu p) P(p)$.

Jetzt definiere ich rekurrierend eine Aussagenfunktion, welche in Worten lautet: „n ist gleich einem Produkte von μ Primzahlfaktoren, welche alle $\leqq n$ sind".

Df. 21: $P(n, 1) = P(n)$; $P(n, \mu + 1) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (n = \nu p) P(\nu, \mu) P(p)$.

Der Satz von der Zerlegung jeder Zahl > 1 in ein Produkt von Primzahlen läßt sich dann so formulieren:

Satz 67: $(n = 1) + \sum_{\mu=1}^{n} P(n, \mu)$.

Beweis: Gilt für $n = 1$. Die Gültigkeit für $\nu < n, n > 1$, sei vorausgesetzt. Dann gilt nach dem Korollar des Satzes 66: $\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} (n = \nu p) P(p)$. Aus $(n = \nu p) P(p)$ folgt indessen $\nu < n$ (Satz 15) und also der Annahme zufolge $\sum_{\mu=1}^{\nu} P(\nu, \mu)$. Hieraus $\sum_{\mu=1}^{n-1} P(\nu, \mu)$ und weiter $\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n-1} (n = \nu p)$ $P(\nu, \mu) P(p) = \sum_{\mu=1}^{n-1} P(n, \mu + 1)$, woraus $\sum_{\mu=1}^{n} P(n, \mu)$.

Weiter will ich den Satz von der Existenz unendlich vieler Primzahlen beweisen. Zuerst definiere ich die Funktion $n!$:

Df. 22. $1! = 1$; $(n + 1)! = n!(n + 1)$.

Hilfssatz: $(m > n) + D(n!, m)$.

Beweis: Selbstverständlich richtig für $n = 1$. Die Richtigkeit für ein gewisses n sei vorausgesetzt. Ist nicht $m > n + 1$, so ist entweder $m = n + 1$ oder $m < n + 1$, d. h. $m \leqq n$. Nach Df. 22 und Satz 18 hat man $D((n + 1)!, n + 1)$. Ist $m \leqq n$, hat man nach der Annahme $D(n!, m)$ und da auch $D((n + 1)!, n!)$ gilt (Sätze 16, 18), bekommt man $D((n + 1)!, m)$ (Korollar des Satzes 20).

Satz 68. $\sum_{p=1}^{n!+1} P(p)(p > n)$. (In Worten: Für beliebiges n gibt es eine Primzahl $p > n$ und $\leqq n! + 1$).

Beweis: Nach Satz 66 gilt die Aussage $\sum_{p=1}^{n!+1} D(n! + 1, p) P(p)$. Aus $D(n! + 1, p) P(p)$ folgt aber $p > n$. Denn wäre $p \leqq n$, so folgte nach dem Hilfssatz $D(n!, p)$, und dies in Verbindung mit $D(n! + 1, p)$ würde $D(1, p)$ (Satz 24, Korollar) und also $p = 1$ zur Folge haben, was wegen $P(p)$ ausgeschlossen ist.

Um die Eindeutigkeit der Zerlegung einer Zahl in Produkte von Primzahlfaktoren zu beweisen, muß ich zuerst einige Betrachtungen über Summen und Produkte beliebig vieler Glieder sowie eine Funktion $I(a, b; m, n)$ definieren.

Es sei $f(r)$ eine beliebige deskriptive Funktion. Ich definiere die Ausdrücke $\sum\limits_{r=1}^{n} f(r)$ und $\prod\limits_{r=1}^{n} f(r)$ rekurrierend wie folgt:

Df. 23: $\sum\limits_{r=1}^{1} f(r) = f(1)$; $\sum\limits_{r=1}^{n+1} f(r) = \sum\limits_{r=1}^{n} f(r) + f(n+1)$.

$\prod\limits_{r=1}^{1} f(r) = f(1)$; $\prod\limits_{r=1}^{n+1} f(r) = \prod\limits_{r=1}^{n} f(r) \cdot f(n+1)$.

Statt $f(r)$ schreibt man oft a_r, b_r usw. Ich definiere für eine beliebige deskriptive Funktion a_r:

Df. 24: $a_r^{(\nu)} = a_r$, wenn $r < \nu$, und $a_r^{(\nu)} = a_{r+1}$, wenn $r \geqq \nu$ ist.

Satz 69: $(n = 1) + (\nu > n) +$

$$+ \left\{ \sum_{r=1}^{n} a_r = a_\nu + \sum_{r=1}^{n-1} a_r^{(\nu)} \right\} \left\{ \prod_{r=1}^{n} a_r = a_\nu \cdot \prod_{r=1}^{n-1} a_r^{(\nu)} \right\}.$$

Beweis: Ich brauche nur die Summe zu betrachten. Der Satz gilt, wenn $n = 1$ ist. Er sei gültig für n.

Um zu zeigen, daß er dann auch für $n + 1$ gilt, sei zuerst $\nu \leqq n$. Dann ist

$$\sum_{r=1}^{n+1} a_r = \sum_{r=1}^{n} a_r + a_{n+1} = a_\nu + \sum_{r=1}^{n-1} a_r^{(\nu)} + a_{n+1} \text{ und außerdem } a_n^{(\nu)} = a_{n+1}.$$

Folglich $\sum\limits_{r=1}^{n-1} a_r^{(\nu)} + a_{n+1} = \sum\limits_{r=1}^{n-1} a_r^{(\nu)} + a_n^{(\nu)} = \sum\limits_{r=1}^{n} a_r^{(\nu)}$ (nach Df. 24), und daraus

$$\sum_{r=1}^{n+1} a_r = a_\nu + \sum_{r=1}^{n} a_r^{(\nu)}.$$

Sei dagegen $\nu = n + 1$. Dann ist $a_r^{(\nu)} = a_r$ für $r \leqq n$. Folglich

$$\sum_{r=1}^{n+1} a_r = \sum_{r=1}^{n} a_r + a_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{r=1}^{n} a_r^{(\nu)}.$$

Man benutzt oft die Schlußweise, daß eine solche Summe (oder Produkt) ungeändert bleiben muß, wenn die Glieder a durch Zahlen b ersetzt werden, wenn diese in irgendeiner Reihenfolge mit den a identisch sind. Um dies bequem formulieren zu können, führe ich eine Aussagenfunktion $I(a, b; m, n)$ ein, worin a und b Zeichen zweier beliebigen deskriptiven Funktionen sind.

Df. 25. $\begin{cases} I(a, b; 1, 1) = (a_1 = b_1). \quad I(a, b; 1, n)(n > 1) \text{ falsch.} \\ \quad I(a, b; m, 1)(m > 1) \text{ falsch.} \\ I(a, b; m+1, n) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} (a_{m+1} = b_\nu)\, I(a, b^{(\nu)}; m, n-1). \\ \quad (b^{(\nu)} \text{ definiert in Df. 24}). \end{cases}$

$I(a, b; m, n)$ bedeutet dann in Worten: ‚Die Zahlen $a_1 \dots a_m$ sind in irgendeiner Ordnung mit den Zahlen $b_1 \dots b_n$ identisch‘.

Satz 70: $\overline{I(a, b; m, n)} + (m = n)$.

Beweis: Richtig wenn $m = 1$ ist nach Df. 25. Die Richtigkeit für m sei vorausgesetzt. Aus $I(a, b; m+1, n)$ folgt $\sum_{r=1}^{n} (a_{m+1} = b_r)\, I(a, b^{(r)}; m, n-1)$. $I(a, b^{(r)}; m, n-1)$ hat aber $m = n - 1$ zur Folge. Also $m + 1 = n$.

Satz 71. $\overline{I(a, b; m, n)} + \left(\sum_{r=1}^{m} a_r = \sum_{r=1}^{n} b_r\right)\left(\prod_{r=1}^{m} a_r = \prod_{r=1}^{n} b_r\right)$.

Beweis: Ich betrachte bloß die Summe. Zuerst folgt $m = n$, und der Satz gilt offenbar, wenn $n = 1$ ist. Er gelte für $n - 1$. Aus $I(a, b; n, n)$ folgt $\sum_{\varrho=1}^{n} (a_n = b_\varrho)\, I(a, b^{(\varrho)}; n-1, n-1)$. $I(a, b^{(\varrho)}; n-1, n-1)$ bewirkt aber nach der Annahme $\sum_{r=1}^{n-1} a_r = \sum_{r=1}^{n-1} b_r^{(\varrho)}$, und außerdem ist $b_\varrho + \sum_{r=1}^{n-1} b_r^{(\varrho)} = \sum_{r=1}^{n} b_r$ (Satz 69). Aus $a_n = b_\varrho$ und $\sum_{r=1}^{n-1} a_r = \sum_{r=1}^{n-1} b_r^{(\varrho)}$ folgt also $\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} b_r$.

Satz 72. $\overline{D\left(\prod_{r=1}^{n} a_r, p\right) P(p)} + \sum_{r=1}^{n} D(a_r, p)$.

Beweis: Der Satz gilt für $n = 1$; er sei für ein gewisses n gültig. Aus $D\left(a_{n+1} \cdot \prod_{r=1}^{n} a_r, p\right) P(p)$ folgt (Satz 52) $D(a_{n+1}, p) + D\left(\prod_{r=1}^{n} a_r, p\right) P(p)$. Aus $D\left(\prod_{r=1}^{n} a_r, p\right) P(p)$ folgt nach der Annahme $\sum_{r=1}^{n} D(a_r, p)$. Also gilt in jedem Falle $D(a_{n+1}, p) + \sum_{r=1}^{n} D(a_r, p) = \sum_{r=1}^{n+1} D(a_r, p)$.

Satz 73. $\overline{D\left(\prod_{r=1}^{n} p_r, q\right) \prod_{r=1}^{n} P(p_r)\, P(q)} + \sum_{r=1}^{n} (p_r = q)$.

Beweis: Nach Satz 72 bekommt man aus $D\left(\prod_{r=1}^{n} p_r, q\right)$ die Folgerung $\sum_{r=1}^{n} D(p_r, q)$. Aus $D(p_r, q)\, P(p_r)\, P(q)$ folgt indessen $((p_r = q) + (q = 1))\, P(q)$, also $p_r = q$. Also $\sum_{r=1}^{n} (p_r = q)$.

Der Satz von der Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren lautet jetzt:

Satz 74. $\left(\prod_{r=1}^{u} p_r \neq \prod_{s=1}^{v} q_s\right) + \sum_{r=1}^{u} \overline{P(p_r)} + \sum_{s=1}^{v} \overline{P(q_s)} + I(p, q; u, v)$.

Beweis: Zuerst beweise ich den Satz für $u = 1$. Ist $\left(p_1 = \prod_{s=1}^{v} q_s\right) P(p_1) \prod_{s=1}^{v} P(q_s)$, so folgt nach Satz 73 $\sum_{\sigma=1}^{v} (p_1 = q_\sigma)$. Weiter folgt aus $p_1 = q_\sigma$ und $p_1 = p_\sigma \prod_{s=1}^{v-1} q_s^{(\sigma)}$ die Gleichung $1 = \prod_{r=1}^{v-1} q_s^{(\sigma)}$, was unmöglich ist, wenn $v > 1$ ist.

Der Satz sei wahr für ein gewisses u. Dann folgt aus der Aussage

$$\left(\prod_{r=1}^{u+1} p_r = \prod_{s=1}^{v} q_s\right) \prod_{r=1}^{u+1} P(p_r) \prod_{s=1}^{v} P(q_s), D\left(\prod_{s=1}^{v} q_s, p_{u+1}\right) \prod_{s=1}^{v} P(q_s) P(p_{u+1}),$$

woraus wieder nach Satz 73 $\sum_{\varrho=1}^{v} (p_{u+1} = q_\varrho)$. Weiter ist $\prod_{s=1}^{v} q_s = q_\varrho \prod_{1}^{v-1} q_s^{(\varrho)}$, und man erhält deshalb $\sum_{\varrho=1}^{v} \left(\prod_{r=1}^{u} p_r = \prod_{s=1}^{v-1} p_s^{(\varrho)}\right)$, woraus nach der Annahme

$$\sum_{\varrho=1}^{v} I(p, q^{(\varrho)}; u, v-1)(p_{u+1} = q_\varrho) + I(p, q; u+1, v).$$

Ich will zuletzt einige Betrachtungen allgemeinerer Art anstellen. Man hat folgenden Satz, wobei U eine beliebige Aussagenfunktion bedeutet:

Satz 75a: $\overline{U(n)} + \sum_{r=1}^{n} \prod_{u=1}^{r} U(r)\left(\overline{U(u)} + (u = r)\right)$.[1]

In Worten: Kennt man eine Zahl n, für welche die Aussage U wahr ist, so gibt es eine kleinste Zahl, für welche U wahr ist. Dabei muß bemerkt werden, daß die Aussagen, mit denen wir hier zu tun haben, immer ohne unendlich ausgedehnte scheinbare Veränderlichen gegeben gedacht werden, so daß immer im Endlichen entscheidbar ist, ob $U(x)$ wahr ist oder nicht bei beliebigem x.

Beweis: Für $n = 1$ ist der Satz offenbar richtig. Die Richtigkeit für alle $x \leqq$ einem gewissen n sei vorausgesetzt. Ist dann $U(n+1)$ wahr, so ist außerdem entweder $\prod_{x=1}^{n} \overline{U(x)}$ wahr oder $\sum_{x=1}^{n} U(x)$. Im ersteren Falle gilt also $U(n+1) \prod_{r=1}^{n+1} \left(\overline{U(r)} + (r = n+1)\right)$. Im letzteren Falle folgt aus

[1] Man kann natürlich auch z. B.

$$\overline{U(n)} + \sum_{r=1}^{n} \prod_{u=1}^{n} U(r)\left(\overline{U(u)} + (u \geqq r)\right)$$

schreiben.

$U(x)(x \leqq n)$ nach der Annahme $\sum_{y=1}^{x} \prod_{z=1}^{y} U(x)\left(\overline{U(y)} + (y = x)\right)$ und also à fortiori $\sum_{\nu=1}^{n+1} \prod_{\mu=1}^{\nu} U(\nu)\left(\overline{U(\mu)} + (\mu = \nu)\right)$.

Satz 75b. Aus $U(a) \prod_{x=1}^{a} \left(\overline{U(x)} + (x = a)\right) U(b) \prod_{y=1}^{b} \left(\overline{U(y)} + (y = b)\right)$ folgt $a = b$.

Dieser Satz drückt die Eindeutigkeit dieser kleinsten Zahl aus.

Beweis: Wäre $a \neq b$, so hätte man $(a < b) + (a > b)$. Aus $a < b$ folgt aber sofort $\overline{U(a)}$ und aus $b < a$ ebenso $\overline{U(b)}$.

Wegen dieser Eindeutigkeit kann man eine sehr wichtige deskriptive Funktion der allgemeinen Aussagenfunktion U einführen, welche die kleinste Zahl bedeutet, für die U wahr ist. Allerdings hat diese deskriptive Funktion insofern einen eingeschränkten Existenzbereich, als sie keinen Wert hat, wenn die Aussage U für keine Zahl wahr ist. Dabei muß aber hier betont werden, daß wir nur mit den natürlichen Zahlen bis zu einer gewissen oberen Grenze, die allerdings beliebig hoch gewählt werden kann, zu tun haben. Die deskriptive Funktion kann deshalb hier so bezeichnet werden:

$$\text{Min}\,(U, n).$$

Dies bedeutet die kleinste Zahl unter den Zahlen 1 bis n, für welche U wahr ist, und hat keinen Sinn, wenn U falsch ist für alle diesen Zahlen. Wir haben also nichts mit einer Funktion Min U oder Min (U, ∞) zu tun, welche die kleinste die Aussage U befriedigende Zahl bedeuten sollte und keinen Sinn haben, falls U für jede Zahl überhaupt falsch sein sollte; denn dies alles würde das „Aktual-unendliche" fordern — also die Anwendung scheinbarer logischer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. Die hier nötige Einschränkung der Bedeutung dieser Minimumsfunktion bewirkt aber keinen praktischen Schaden; denn bei jeder Anwendung des Satzes von der Existenz einer kleinsten Zahl einer Klasse ganzer positiver Zahlen muß jedenfalls zuerst eine Zahl n dieser Klasse bekannt geworden sein, und dann kann man sich eben mit der Funktion Min (U, n) begnügen.

Endlich will ich einige Bemerkungen zum *Anzahlbegriffe* machen. Wenn gewisse Dinge (Zahlen, Zahlenpaare, Zahlentripel usw., deskr. Funktionen) eindeutig sämtlichen Zahlen $\leqq$ einer gewissen Zahl n zugeordnet werden, sage ich, daß *sie in der Anzahl n vorhanden sind.*

Um zu zeigen, daß diese Zahl n eine Invariante relativ zu den verschiedenen Zuordnungen ist, muß man den folgenden Satz beweisen:

Satz 76: Aus $\prod_{x=1}^{m}\prod_{y=1}^{m}\left\{(x=y)+(f(x)\neq f(y))\right\}\prod_{x=1}^{m}(f(x)\leqq n)$ $\prod_{y=1}^{n}\sum_{z=1}^{m}(y=f(z))$ folgt $m=n$. f beliebige deskr. Funktion.

In Worten: Es seien die Zahlen, die $\leqq m$ sind, sämtlichen Zahlen $\leqq n$ eineindeutig zugeordnet. Dann ist $m=n$.

Beweis: Zuerst nehme ich den Fall $m=1$. Aus $\prod_{y=1}^{n}\sum_{z=1}^{1}(y=f(z)) =$ $= \prod_{y=1}^{n}(y=f(1))$ folgt wegen der Eindeutigkeit von $f(1)$, daß $n=1$ sein muß.

Es sei der Satz für ein gewisses m gültig. Nehme ich dann den Wert $m+1$, so muß jedenfalls $n>1$ sein. Sonst bekäme man aus $\prod_{x=1}^{m+1}(f(x)\leqq 1)$ sowohl $f(1)=1$ wie $f(2)=1$, während $f(1)\neq f(2)$ sein sollte. Folglich können wir $n+1$ statt n schreiben, und es ist $m=n$ zu beweisen.

Erstens sei $f(m+1)=n+1$. Dann ist $\prod_{x=1}^{m}(f(x)\neq f(m+1))$ oder $\prod_{x=1}^{m}(f(x)\neq n+1)$. Da außerdem $\prod_{x=1}^{m}(f(x)\leqq n+1)$, folgt $\prod_{x=1}^{m}(f(x)\leqq n)$. — Aus $\prod_{y=1}^{n+1}\sum_{z=1}^{m+1}(y=f(z))$ folgt $\prod_{y=1}^{n}\sum_{z=1}^{m+1}(y=f(z))(y\leqq n)$, das heißt $\prod_{y=1}^{n}\sum_{z=1}^{m}\left\{(y=f(z))+(y=f(m+1))(y<f(m+1))\right\}=\prod_{y=1}^{n}\sum_{z=1}^{m}(y=f(z))$. — Kraft der gemachten Annahme muß also $m=n$ sein.

Zweitens sei $f(m+1)=r<n+1$. Nach der Voraussetzung $\prod_{y=1}^{n+1}\sum_{z=1}^{m+1}(y=f(z))$ hat man $\sum_{z=1}^{m+1}(n+1=f(z))$ oder $\sum_{\mu=1}^{m}(n+1=f(\mu))+$ $+(n+1=f(m+1))$, d. h. $\sum_{\mu=1}^{m}(n+1=f(\mu))$. Die Zahl μ ist hier eindeutig bestimmt. Dann führe ich eine neue deskr. Funktion f' ein, die so definiert ist:

$f'(x)=f(x)$ wenn $x\neq\mu$ und $\leqq m$ ist. Weiter $f'(\mu)=f(m+1)=r$; $f'(m+1)=f(\mu)=n+1$. Man braucht dann nur zu zeigen, daß f' denselben Bedingungen wie f genügt.

Aus $(f(x)\leqq n+1)(x\neq\mu)(x\leqq m)$ folgt $f'(x)\leqq n+1$, da in diesem Falle $f'(x)=f(x)$. Außerdem sind offenbar $f'(\mu)$ und $f'(m)$ beide $\leqq n+1$. Also $\prod_{x=1}^{m+1}(f'(x)\leqq n+1)$.

Aus $\sum\limits_{y=1}^{m+1}(x=f(y))$ folgt $\sum\limits_{y=1}^{m+1}(x=f(y))(y\neq\mu)(y\leqq m)+\sum\limits_{y=1}^{m+1}(x=f(y))$ $((y=\mu)+(y=m+1))$, woraus $\sum\limits_{y=1}^{m+1}(x=f'(y))+(x=f'(m+1))+$ $+(x=f'(\mu))=\sum\limits_{y=1}^{m+1}(x=f'(y))$. Also folgt aus $\prod\limits_{x=1}^{n+1}\sum\limits_{y=1}^{m+1}(x=f(y))$ auch $\prod\limits_{x=1}^{n+1}\sum\limits_{y=1}^{m+1}(x=f'(y))$.

Nach der Voraussetzung gilt $\prod\limits_{x=1}^{m+1}\sum\limits_{y=1}^{m+1}\big((x=y)+(f(x)\neq f(y))\big)$. Hat man $(f(x)\neq f(y))(x\neq\mu)(x\leqq m)(y\neq\mu)(y\leqq m)$, so folgt sofort $f'(x)\neq f'(y)$. Hat man $(f(x)\neq f(y))((x=\mu)+(x=m+1))(y\neq\mu)(y\leqq m)$, so gilt $\{(f(x)=f(\mu))+(f(x)=f(m+1))\}\cdot(f(y)=f'(y))(f(y)\neq f(\mu))(f(y)\neq f(m+1))$ und folglich $f'(x)\neq f'(y)$. Ebenso wenn $(f(x)\neq f(y))(x=\mu)\cdot(x\leqq m)$ $((y=\mu)+(y=m))$. Zuletzt gibt $(f(x)\neq f(y))((x=\mu)+(x=m+1))$ $((y=\mu)+(y=m+1))$ die Folgerung $(x=\mu)(y=m+1)+(x=m+1)$ $(y=\mu)$ und also auch $(f'(x)=f(m+1))(f'(y)=f(\mu))+(f'(x)=f(\mu))$ $(f'(y)=f(m+1))$ und folglich $f'(x)\neq f'(y)$. Die Aussage $\prod\limits_{x=1}^{n+1}\prod\limits_{y=1}^{m+1}\big((x=y)+$ $+(f'(x)\neq f'(y))\big)$ ist also richtig.

Anmerkung: Wenn eine Klasse gewisser Objekte gegeben ist, wird man versucht sein zu sagen: Daß diese Dinge in der endlichen Zahl n vorkommen, bedeutet, daß eineindeutige Zuordnung dieser Dinge und der n ersten Zahlen *existiert*. In dieser Definition kommt aber eine scheinbare logische Veränderliche vor (die Zuordnung), und es ist à priori keine Einschränkung des Variationsbereichs dieser Veränderlichen auf das Endliche gegeben, wenn man nicht schon im voraus einen Satz hat, der aussagt, *daß die Anzahl der möglichen Zuordnungen eine endliche ist.* Auf dem hier gegebenen streng finitistischen Standpunkte muß also ein solcher Satz zuerst bewiesen sein, damit man den Anzahlbegriff für die betreffenden Dinge definieren kann. Dies scheint ein circulus vitiosus zu sein; es ist aber nicht so. Man braucht nämlich nicht die obige allgemeine Definition des Anzahlbegriffs, um einen speziellen Satz aufzustellen, der aussagt, daß gewisse Objekte in der Anzahl n vorkommen; denn ein solcher Satz läßt sich eben dadurch aufstellen, daß man eine Zuordnung *wirklich angibt;* hierdurch wird die Zuordnung als logische Veränderliche vermieden. Man kann also auch in den erwähnten Fällen zuerst einen speziellen Satz über die Endlichkeit der Anzahl der überhaupt möglichen Zuordnungen und nachher die allgemeine Definition des Anzahlbegriffs für die Klassen der Dinge aufstellen.

Die Anzahl der ganzen positiven Zahlen, welche $\leqq n$ und einer gegebenen Klasse angehören, läßt sich allgemein durch eine in folgender Weise definierbare Funktion angeben.

Es sei U eine beliebige Aussagenfunktion; ich setze:

Df. 26. $(N\,U(1) = 1)\,U(1) + (N\,U(1) = 0$[1]$)\,\overline{U(1)}$ und $(N\,U(n+1) =$
$= N\,U(n) + 1)\,U(n+1) + (N\,U(n+1) = N\,U(n))\,\overline{U(n+1)}$.

In Worten: Die deskriptive Funktion $N\,U(x)$ soll für $x = 1$ den Wert 1 oder 0 haben, je nachdem $U(1)$ wahr ist oder nicht. Weiter soll $N\,U(n+1) = N\,U(n) + 1$ oder $= N\,U(n)$ sein, je nachdem $U(n+1)$ wahr ist oder nicht.

Es ist leicht zu zeigen, daß $N\,U(n)$ dann in der Tat die Anzahl der Zahlen $x \leqq n$ angibt, für die $U(x)$ wahr ist. Ich gehe hier nicht näher darauf ein.

Es wird oft vorkommen, daß gewisse Dinge mit ganzen Zahlen numeriert sind, aber so, daß jedem Dinge mehrere Zahlen als Indizes zugeordnet sind. Die Anzahl der *verschiedenen* unter ihnen läßt sich dann mit Hilfe einer Funktion $T(x)$ angeben, die ich hier definiere.

Die Dinge seien $a_1 \ldots a_n$; es werde gesetzt:

$$\text{Df. 27.}\quad T(1) = 1;\ \left(T(r+1) = T(r)\right)\left(\sum_{s=1}^{r} (a_{r+1} = a_s)\right) +$$

$$+ \left(T(r+1) = T(r) + 1\right) \prod_{s=1}^{r} (a_{r+1} \neq a_s).$$

Weiter läßt sich mit Hilfe der Seite 34 definierten Funktion $\mathrm{Min}(U, n)$ eine eindeutig bestimmte Auswahl eines vollständigen Repräsentantensystems verschiedener Dinge a angeben. Außerdem können die zugehörigen Häufigkeitszahlen, die angeben, wie oft jedes verschiedene Ding in der Reihe $a_1 \ldots a_n$ auftritt, definiert werden usw. Ich will dies hier nicht näher ausführen.

Schlussbemerkung.

Diese Arbeit ist während des Herbstes 1919 geschrieben, nachdem ich die Arbeiten von Russell & Whitehead studiert hatte. Es fiel mir ein, daß schon die Anwendung der von ihnen genannten „wirklichen" logischen Veränderlichen hinreichend sein müßte, um jedenfalls große Teile der Mathematik zu begründen. (Dabei muß also bemerkt werden, daß scheinbare Veränderliche mit endlicher Ausdehnung mittels rekurrierender Definitionen weggeschafft werden können). Die Berechtigung der Einführung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Variationsbereich erscheint des-

[1] Streng genommen ist die Zahl 0 hier nicht eingeführt worden; man kann aber vereinbaren, daß die Anzahl 0 bedeuten soll, daß keine „Dinge" vorhanden sind.

halb sehr problematisch; d. h. man kann an der Berechtigung des Aktualunendlichen oder Transfiniten zweifeln.

Andererseits bin ich selbst nicht mehr damit zufrieden, daß ich hier noch die logischen Entwicklungen nach dem Vorbilde RUSSELL & WHITEHEAD's in rein formaler Hinsicht zu umständlich gemacht habe. Es kommt doch auch bei der Begründung der Mathematik auf die Sache und nicht auf die Bezeichnung an. Ich werde bald eine andere Arbeit über die logische Begründung der Mathematik publizieren, welche von dieser formalen Umständlichkeit frei ist. Auch diese Arbeit ist aber eine konsequent finitistische; sie ist auf dem Prinzip KRONECKERS gebaut, daß eine mathematische Bestimmung dann und nur dann eine wirkliche Bestimmung ist, wenn sie mit Hilfe *endlich* vieler Versuche zum Ziele führt.

Gedruckt 25. Oktober 1923.