

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Д. В. Александров
А. Ю. Зубарев
Л. Ю. Искакова

ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКУ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлениям подготовки
010800 «Механика и математическое моделирование»,
010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки»,
230700 «Прикладная информатика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2012

УДК 532(075.8)
А465

Рецензенты:

отдел механики машин и технологий Института машиноведения
УрО РАН (заведующий отделом доктор технических наук,
член-корреспондент РАН В. Л. Колмогоров);
О. Э. Соловьева, доктор физико-математических наук
(Институт иммунологии и физиологии УрО РАН)

Александров, Д. В.
А465 Введение в гидродинамику: [учеб. пособие] / Д. В. Александров,
А. Ю. Зубарев, Л. Ю. Исакова. — Екатеринбург : Изд-во Урал.
ун-та, 2012. — 112 с.

ISBN 978-5-7996-0785-2

Излагаются классические основы гидродинамики идеальной и вязкой жидкости, а также основы теории вязкоупругих жидкостей. Рассматриваются ламинарные и турбулентные течения несжимаемой жидкости, основы теории линейной акустики.

Для студентов и аспирантов, изучающих гидродинамику и основы механики сплошных сред.

УДК 532(075.8)

ISBN 978-5-7996-0785-2

© Уральский федеральный университет, 2012
© Александров Д. В., Зубарев А. Ю.,
Исакова Л. Ю., 2012

ОТ АВТОРОВ

Гидродинамика — наука о течении газов и низкомолекулярных жидкостей, механические свойства которых подобны свойствам воды. Огромное число природных явлений и процессов современных технологий подчиняются законам гидродинамики. Среди них — движения воздушных и океанических масс, определяющих климат на Земле; сложнейшие движения плазмы в недрах звезд, и, в частности, в Солнце (эти движения определяют светимость звезд, излучаемую ими энергию, а значит, в случае Солнца — жизнь и климат на Земле); циркуляция крови в кровеносных сосудах людей и животных; аэро- и гидродинамические течения вблизи летательных аппаратов и судов; течения расплавленных металлов, химических реагентов, грунтовых вод, жидкостей в недрах Земли и т. д. Список гидродинамических явлений, играющих важную, часто определяюще важную роль в нашей жизни, можно было бы продолжать очень долго.

В пособии излагаются основы гидродинамики идеальной, вязкой и вязкоупругой жидкостей. При отборе материала мы старались уделить основное внимание обсуждению физической основы гидродинамических явлений. Математический аппарат гидродинамики иллюстрируется на основе сравнительно простых задач и примеров, не требующих знаний, выходящих за пределы стандартных курсов математического анализа и уравнений математической физики. Однако рассмотренные примеры являются основой для исследования и описания более сложных проблем гидродинамики. По сравнению со стандартными курсами в предлагаемом пособии рассматриваются основы гидромеханики суспензий, а также реологии вязкоупругих сред. Эти разделы современной гидродинамики приобретают все большее значение в связи со все более активным развитием науки о течении коллоидов, суспензий, полимерных растворов и других вязкоупругих жидкостей.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

С точки зрения механики, как науки о различных формах движения, гидродинамика относится к механике сплошных сред. Это значит, что в рамках гидродинамики мы забываем о молекулярной структуре вещества и считаем, что описываемое вещество сохраняет все свои свойства вплоть до его деления на мельчайшие объемы. Такое приближение оправдано, если в мельчайшем (элементарном) объеме, который мы еще можем воспринимать при помощи наших органов чувств или приборов, содержится очень много молекул. Объемы, содержащие очень много молекул и «представляющие» все свойства вещества, называются представительными. Следовательно, условием применения гидродинамического приближения является возможность выделения в веществе элементарного представительного объема.

Опыт показывает, что при постоянной температуре среды для описания ее гидродинамического течения достаточно указать значения скорости v , плотности ρ среды и давления p в ней как функций координат и времени. Нашей ближайшей задачей является вывод уравнений, позволяющих определить эти функции. В соответствии с опытом мы будем заранее предполагать, что v , p и ρ — непрерывные функции координат и времени.

§ 1. Уравнение неразрывности в гидродинамике

Первое из уравнений гидродинамики, с которым мы познакомимся, называется уравнением неразрывности. Оно имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1)$$

Для доказательства этого уравнения рассмотрим некоторый объем V с постоянной формой и размерами. Этот объем схематически показан на рис. 1.

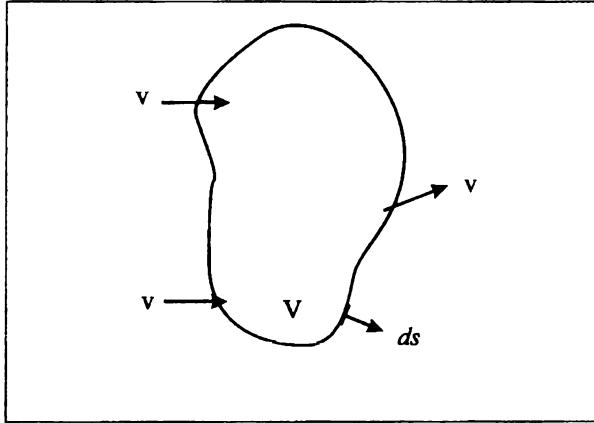


Рис. 1

Изменение массы M вещества в этом объеме за малое время dt есть

$$dM = M(t + dt) - M(t) = \frac{\partial M}{\partial t} dt = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{r}. \quad (2)$$

Здесь учтено, что по определению $M = \int_V \rho d\mathbf{r}$ и при постоянных границах объема операции интегрирования по объему и дифференцирования по времени можно менять местами.

Масса вещества в объеме V может меняться за счет двух механизмов. Первый — вещество появляется или исчезает из этого объема вследствие каких-либо физико-химических реакций. Второй — за счет его нескомпенсированного потока через границы объема. Мы не будем рассматривать первый механизм, так как он крайне не типичен для гидродинамических явлений.

Для анализа второго механизма выделим на поверхности нашего объема маленькую (элементарную) площадку с площадью ds . Выберем размеры этой площадки настолько маленькими, чтобы, во-первых, считать ее локально плоской и, во-вторых, чтобы на ее размерах можно было пренебречь изменением скорости потока и плотности среды. Обозначим \mathbf{v} вектор единичной нормали к этой площадке, направленный наружу из объема V . Обозначим $v_{\perp} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ проекцию вектора скорости \mathbf{v} на нормаль \mathbf{v} . Несложно показать, что за время dt через эту площадку из объема V наружу переходит масса вещества, равная

$$\rho v_{\perp} ds dt = \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) ds dt. \quad (3)$$

Круглые скобки в (3) и далее снова означают скалярное произведение векторов.

Чтобы получить полную массу вещества, пересекающую изнутри наружу всю границу S объема V , нужно проинтегрировать (3) по поверхности S рассматриваемого объема. Этот интеграл равен массе вещества, покидающего объем V за время dt , следовательно, он равен dM . Учитывая (2), получаем

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{r} = - \int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) ds. \quad (4)$$

По теореме Остроградского — Гаусса

$$\int_S \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) ds = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\mathbf{r}. \quad (5)$$

Используя (5) в (4), приходим к равенству

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{r} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) d\mathbf{r}. \quad (6)$$

При выводе равенства (6) мы не делали никаких оговорок относительно формы или размера объема V , по которому проводится интегрирование. Следовательно, это равенство выполняется для любого объема интегрирования, что возможно, только если подынтегральные функции в (6) тождественно равны. Учитывая это, приходим к уравнению (1). Заметим также, что при выводе

этого уравнения мы не использовали никаких предположений о физических свойствах среды, кроме непрерывности изменения ее скорости и плотности. Поэтому уравнение (1) в приближении сплошной среды описывает связь скорости и плотности в любом веществе независимо от его физической природы.

Уравнение неразрывности (1) может быть упрощено в важном частном случае, когда движущуюся среду можно считать несжимаемой, т. е. пренебречь изменением ее плотности при гидродинамическом течении. Опыт показывает, что реальные жидкости обладают очень малой сжимаемостью — нужно приложить очень большое усилие, чтобы заметно изменить плотность жидкости. Поэтому, как правило, при решении задач гидродинамики жидкости рассматриваются как несжимаемые среды. Полагая в (1) плотность ρ постоянной величиной, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

Соотношение (7) называется уравнением несжимаемости. Уравнения неразрывности недостаточно, чтобы найти две скалярные величины — плотность жидкости и давление в ней, а также три компоненты скорости течения. Уравнения, необходимые для замыкания задачи, обсуждаются в следующих главах.

Глава 2

ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

В этой главе мы рассмотрим простейшую, но, тем не менее, описывающую очень широкий класс гидродинамических явлений модель идеальной жидкости. В рамках этой модели пренебрегаются эффектами вязкости и другими процессами, вызывающими диссипацию энергии движения жидкости.

§ 2. Уравнение Эйлера

Уравнения неразрывности (1) недостаточно для определения пяти функций, описывающих движущуюся среду, — плотности ρ , давления p и трех компонент скорости v . В этом разделе мы выведем уравнение движения жидкой среды, являющееся вторым законом Ньютона, записанным в форме, удобной для решения гидродинамических задач. Все последующие рассуждения одинаково применимы как для жидкостей, так и для газов. Поэтому, если не будет оговорено особо, под словом «жидкость» мы будем понимать как собственно жидкость, так и газ.

Выделим в жидкости малый параллелепипед со сторонами dx , dy , dz , движущийся вместе с жидкостью. Этот параллелепипед показан на рис. 2.

Учитывая, что объем параллелепипеда $dV = dx dy dz$, второй закон Ньютона для него можно записать так:

$$\rho \frac{dv}{dt} dx dy dz = dF, \quad (8)$$

где dF — сила, действующая на этот параллелепипед. Эта сила состоит из следующих компонент.

1. Сила давления dF_p . Давление жидкости с одной стороны параллелепипеда (скажем, слева) может отличаться от давления

с другой стороны (справа). Это порождает силу нескомпенсированного давления, действующую на параллелепипед. Учитывая, что сила, действующая по нормали к грани параллелепипеда, равна произведению давления на площадь этой грани, y -компоненту этой силы мы можем рассчитать так:

$$dF_{py} = p(y)dx dz - p(y + dy)dx dz = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz.$$

Аналогично

$$dF_{px} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz, \quad dF_{pz} = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz.$$

Полученные выражения для компонент силы $d\mathbf{F}_p$ могут быть объединены в одно векторное равенство

$$d\mathbf{F}_p = -\text{grad } p \equiv -\nabla p. \quad (9)$$

Здесь, следуя традиции, мы использовали векторный оператор

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты, направленные вдоль осей x , y , z соответственно.

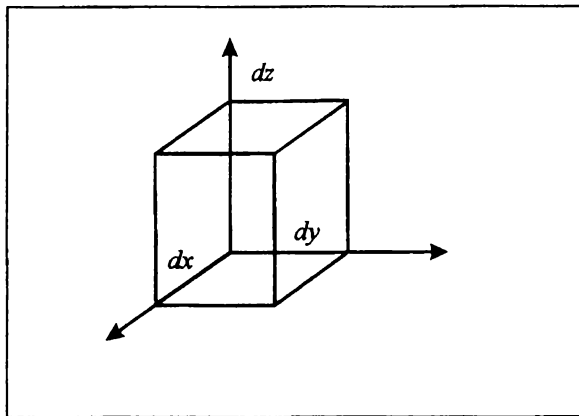


Рис. 2

2. Объемная (массовая сила) \mathbf{F}_g . Сила давления действует на наш параллелепипед через его поверхность. В отличие от этого на жидкость в каждой ее точке, т. е. в каждой точке внутри параллелепипеда, могут действовать силы, называемые **о б ъ е м н ы м и** или **м а с с о в ы м и**. Примерами таких сил могут быть силы гравитации, электрические, магнитные и др. Так как в задачах гидродинамики чаще всего объемными являются силы гравитации, для обозначения этих сил мы используем индекс g . Введем плотность \mathbf{f}_g объемных сил по правилу

$$d\mathbf{F}_g = \mathbf{f}_g dV. \quad (10)$$

В случае гравитационных сил $\mathbf{f}_g = \rho \mathbf{g}$, где \mathbf{g} — ускорение свободного падения. В случае действия других объемных сил плотность силы определяется исходя из физической природы этой силы. Соотношение (10) мы будем использовать в уравнении (8), предполагая, что плотность объемной силы нам известна.

3. Третьим типом сил, действующих на выделенный объем жидкости, являются силы трения этого объема с окружающими слоями жидкости. Эти силы, как и силы давления, действуют через поверхность параллелепипеда. Внутреннее трение между различными частями жидкости называется **в я з к о с т ь ю**. Вязкие силы, как и силы трения между различными телами, приводят к диссипации механической энергии движения среды в тепловую энергию.

Моделью **и д е а л ь н о й ж и д к о с т и** называется приближение, в котором пренебрегается действием всех диссипативных сил и процессов в жидкости. К таким процессам, помимо вязкости, относятся теплопроводность, электрическое сопротивление и ряд других. Мы начнем знакомство с гидродинамикой с приближения идеальной жидкости. Это приближение не только простейшее, но и вполне работоспособное. В следующих главах мы увидим, что очень многие гидродинамические явления могут быть успешно описаны в приближении идеальной жидкости, а также установим критерии, когда это приближение является успешным.

В рамках приближения идеальной жидкости мы пренебрегаем вязкими силами, поэтому в (8) $d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_p + d\mathbf{F}_g$. Учитывая соотношения (9) и (10), а также то, что $dV = dx dy dz$, получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{f}_g. \quad (11)$$

Учтем теперь, что каждая компонента скорости \mathbf{v} является функцией от трех пространственных координат x, y, z параллелепипеда и времени t . Поэтому для i -й компоненты скорости получаем

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial z}.$$

Учитывая, что x, y, z — координаты параллелепипеда, движущегося вместе с жидкостью, имеем

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Поэтому последнее соотношение может быть переписано так:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v_i.$$

Здесь мы учли определение оператора ∇ .

Подставляя последний результат в закон Ньютона (11), приходим к векторному уравнению

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}_g. \quad (12)$$

Соотношение (12) называется уравнением Эйлера.

Скалярное уравнение неразрывности (1) и векторное уравнение Эйлера (12) образуют систему из четырех уравнений, в то время как нам нужно определить пять неизвестных функций $\rho, p, v_x, v_y,$ и v_z . Уравнения (1) и (12) никак не отражают внутреннюю молекулярную структуру движущейся среды. Пятое уравнение, замыкающее задачу, является уравнением состояния вещества,

которое связывает между собой концентрацию молекул в веществе, давление и температуру. Такое уравнение может быть получено или методами молекулярной физики, или же, если проблема вывода этого уравнения оказывается слишком сложной для теории, — эмпирическими методами, на основе результатов экспериментов. Из курса молекулярной физики известны уравнения состояния идеального газа и газа Ван-дер-Ваальса, которые позволяют записать давление в виде функции плотности вещества $p = p(\rho)$. Используя явный вид этой функции, соответствующий веществу, движение которого нам нужно описать, мы приходим к замкнутой системе пяти уравнений, состоящей из уравнений (1), (12) и уравнения состояния $p = p(\rho)$, из которой можно определить три компоненты скорости, а также давление и плотность вещества.

В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) нам необходимо найти четыре функции — p , v_x , v_y и v_z . Для этого достаточно четырех уравнений — уравнения несжимаемости (7) и трех уравнений в векторном уравнении Эйлера (12).

Итак, полная система уравнений гидродинамики идеальной жидкости состоит из уравнения неразрывности (1), уравнения Эйлера (12) и соответствующего уравнения состояния. Если жидкость может рассматриваться как несжимаемая, замкнутую систему образуют уравнения несжимаемости (7) и Эйлера (12).

§ 3. Гидростатика

Целью гидростатики является определение распределения плотности и давления, а также формы свободной поверхности для неподвижной жидкости. Рассмотрим несколько типичных задач гидростатики.

Барометрическая формула Больцмана. Эта формула определяет зависимость давления изотермического идеального газа от высоты в поле силы тяжести.

Рассмотрим идеальный газ в однородном поле тяжести. Предполагаем, что интересующие нас расстояния от поверхности Земли много меньше ее радиуса, поэтому кривизной поверхности можно

пренебречь. Кроме того, пренебрежем зависимостью температуры от высоты.

Для неподвижного газа уравнение Эйлера (12) имеет вид

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (13)$$

Введем декартову систему координат так, как показано на рис. 3.

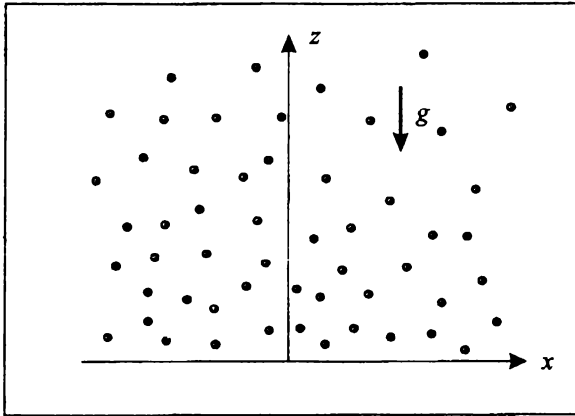


Рис. 3

В этой системе координат с учетом направления ускорения свободного падения уравнение (13) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (14)$$

Известное из курса молекулярной физики уравнение состояния идеального газа удобно записать так:

$$p = \frac{\rho}{m} kT, \quad (15)$$

где m — масса молекулы газа; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура. Подставляя (15) в (14), приходим к уравнению

$$\frac{dp}{dz} = -p \frac{mg}{T},$$

решение которого

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgz}{T}\right)$$

называется барометрической формулой Больцмана.

Гидростатическое давление в несжимаемой жидкости. Рассмотрим несжимаемую жидкость, находящуюся в однородном поле тяжести. Над плоской поверхностью жидкости находится атмосфера с постоянным давлением p_a . Требуется найти зависимость давления в жидкости от глубины, т. е. от расстояния до ее поверхности.

Используем систему координат, показанную на рис. 4. Аналогично предыдущему случаю уравнение Эйлера сейчас снова имеет вид (14). Учитывая, что плотность ρ сейчас постоянна, получаем решение этого уравнения:

$$p = \text{const} - \rho gz.$$

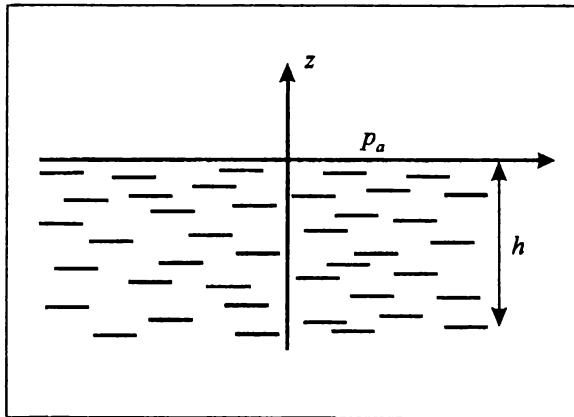


Рис. 4

Постоянную интегрирования определяем из граничного условия $p = p_a$ при $z = 0$. Вводя глубину жидкости $h = -z$, окончательно получаем $p = p_a + \rho gh$.

Свободная поверхность вращающейся жидкости. Рассмотрим вертикальный очень длинный цилиндрический сосуд, в котором находится несжимаемая жидкость. Верхняя часть цилиндра открыта и сообщается с атмосферой. Сосуд вместе с жидкостью вращается вокруг своей оси с угловой скоростью Ω . Требуется определить форму свободной поверхности жидкости. Задача проиллюстрирована на рис. 5, где горизонтальная штриховая линия отмечает уровень жидкости в покоящемся цилиндре.

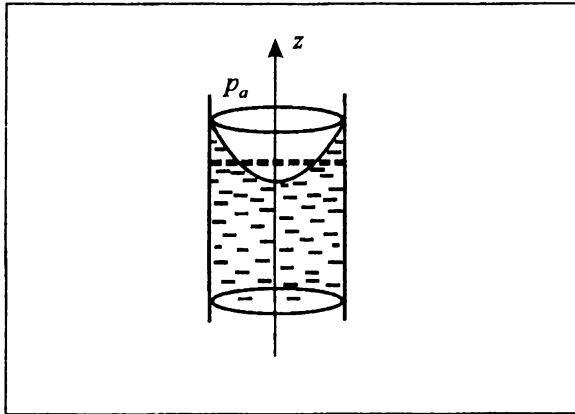


Рис. 5

Перейдем в систему координат, вращающуюся вместе с цилиндром. С учетом действия центробежной силы, а также того, что в этой системе координат движение жидкости отсутствует, уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \Omega^2 \mathbf{r} = 0.$$

Расписывая это векторное уравнение по компонентам, получаем

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \Omega^2 r = 0;$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$p = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \rho + C_1(z);$$

$$p = -\rho g z + C_2(r),$$

где C_1 и C_2 — функции только от z и r соответственно. Поскольку давление в этих выражениях одно и то же, имеем

$$p = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \rho - \rho g z + \text{const.}$$

Обозначим z -координату свободной поверхности как $\xi(r)$. При $z = \xi(r)$ давление жидкости должно быть равно атмосферному давлению, т. е. $p(\xi(r)) = p_a$. Отсюда и из последнего уравнения получаем

$$\xi(r) = \frac{1}{\rho g} \left(\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \rho - p_a + \text{const} \right).$$

Свободная поверхность жидкости во вращающемся цилиндре имеет форму параболоида. Постоянная интегрирования здесь может быть определена из условия равенства объема жидкости над ее невозмущенным уровнем объему освободившегося пространства под этим уровнем.

§ 4. Теорема Бернулли

Уравнение Эйлера является нелинейным уравнением в частных производных. Как правило, решение таких уравнений представляет большие трудности. Вспомним, что в механике частиц

второй закон Ньютона также представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение. Во многих случаях решение задачи о движении частиц сильно упрощается, если воспользоваться законами сохранения. В механике известно три таких закона — законы сохранения механической энергии, импульса и момента импульса. В гидродинамике идеальной жидкости существуют аналоги этих законов. Их использование часто позволяет свести решение дифференциального уравнения Эйлера к решению простейших алгебраических уравнений.

Аналогом закона сохранения энергии в гидродинамике является теорема Бернулли. Эта теорема справедлива для стационарного течения жидкости. Чтобы ее получить, запишем стационарное уравнение Эйлера:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\mathbf{f}_g. \quad (16)$$

Теорема Бернулли формулируется и может быть доказана как для сжимаемых, так и для несжимаемых сред. Мы выведем ее для простейшего случая несжимаемой жидкости. Общее доказательство этой теоремы можно найти в стандартных учебниках гидродинамики, например, в [2].

Допустим, что массовая сила \mathbf{f}_g потенциальна, т. е. $\mathbf{f}_g = -\rho\nabla u$, где u — потенциальная энергия единицы массы жидкости.

Учтем теперь общее векторное равенство

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathbf{v}\text{rot}\mathbf{v}],$$

справедливое независимо от физической природы вектора \mathbf{v} . Квадратные скобки здесь, как обычно, означают векторное произведение. Используя это равенство в уравнении (16) и занося постоянную плотность ρ под знак градиента ∇ , получаем

$$\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + u\right) = [\mathbf{v}\text{rot}\mathbf{v}]. \quad (17)$$

Назовем линией тока линию, касательная к которой в каждой точке совпадает со скоростью жидкости \mathbf{v} . Для стационарных течений линия тока совпадает с траекторией движения жидкой частицы в среде. Другими словами, если мы внесем в стационарный поток жидкости маленькую частицу (капельку несмешивающейся жидкости), то траектория движения этой частицы совпадет с линией тока основной жидкости. Такой прием используется в экспериментах для визуализации линий тока (скорости) жидкости. Для нестационарных течений, когда скорость меняется со временем, линия тока меняет свое направление и «уходит» от траектории уже прошедшей частицы.

Выберем произвольную линию тока и обозначим l — единичный вектор, направленный вдоль этой линии. Умножим обе части уравнения (17) слева скалярно на l . По свойству оператора градиента левая часть этого уравнения станет равной

$$\partial \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u \right) / \partial l,$$

где $\partial / \partial l$ означает производную по направлению линии тока. Правая же часть (17) после умножения на l станет равной нулю, так как векторы l и \mathbf{v} параллельны, а правая часть (17) в силу свойств векторного произведения перпендикулярна \mathbf{v} .

В результате

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + u \right) = 0. \quad (18)$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + u = \text{const}_l. \quad (19)$$

Здесь const_l означает величину, постоянную на данной линии тока. Для разных линий тока она может быть различной.

Соотношение (19) является теоремой Бернулли. Мы доказали ее для несжимаемых жидкостей, но, как уже отмечалось, она может быть доказана и в общем случае при учете сжимаемости среды.

Обратим внимание на то, что в (19) член $v^2 / 2$ является кинетической энергией единицы массы жидкости, а u — ее потенциальной энергией в поле внешних сил. Можно показать (см., например, [2]), что p / ρ соответствует работе сил давления по переносу единичной массы жидкости вдоль линии тока. Следовательно, соотношение (19) является законом сохранения механической энергии для жидкой частицы при ее движении вдоль линии тока. Эта энергия для каждой частицы может быть своя, что отражает зависимость постоянной в правой части (19) от линии тока, но для каждой частицы она сохраняется. Уже отсюда ясно, что теорема Бернулли может выполняться только в приближении идеальной жидкости, так как эффекты вязкого трения, как и любого трения, приводят к диссипации механической энергии в тепловую.

Формулировка теоремы Бернулли упрощается для случая, когда равенство $\text{rot } v = 0$ тождественно выполняется во всем объеме жидкости. Поскольку операция $\text{rot } v$ отражает вихревую структуру вектора v , течения, для которых $\text{rot } v = 0$, называют безвихревыми и х-ревыми. Для безвихревых течений правая часть уравнения (17) тождественно равна нулю и вместо (19) мы имеем

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + u = \text{const}, \quad (20)$$

где в правой части находится величина, одинаковая для всей области течения. Это значительно упрощает применение теоремы Бернулли для решения задач о безвихревом течении потенциальной жидкости.

§ 5. Теорема Томсона (Кельвина)

Как мы только что видели, теорема Бернулли является законом сохранения энергии в гидродинамике идеальной жидкости. Сейчас мы докажем теорему, которая в гидродинамике играет роль закона сохранения момента импульса. Эта теорема называется теоремой Томсона (он же — лорд Кельвин).

Рассмотрим некоторый замкнутый контур L , движущийся вместе с жидкостью. Назовем интеграл вдоль этого контура

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} d\mathbf{r}$$

циркуляцией скорости вдоль этого контура. Теорема Томсона утверждает, что циркуляция Γ с течением времени не меняется.

Для доказательства этой теоремы возьмем полную производную от Γ по времени. Учитывая, что контур L движется вместе с жидкостью, а значит, расположение его точек в пространстве меняется, получаем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} + \mathbf{v} d\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) \right]. \quad (21)$$

Так как движение точек контура повторяет движение жидкости, то $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$. Кроме того, по правилам дифференцирования $\mathbf{v}d\mathbf{v} = d\mathbf{v}^2/2$. Поэтому интеграл от второго слагаемого в подынтегральной функции (21) является интегралом по замкнутому контуру от полного дифференциала. Как известно, такие интегралы тождественно равны нулю. В первом слагаемом для несжимаемой жидкости из уравнения Эйлера следует

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + u \right),$$

где u — снова потенциальная энергия единицы массы жидкости в поле внешних сил. Для сжимаемых сред также можно показать, что полная производная от скорости по времени равна градиенту некоторой функции [2]. Поэтому интеграл от первого слагаемого в (21) преобразуется в интеграл по замкнутому контуру от градиента скалярной функции. Такие интегралы также равны нулю. Итак, интегралы от обоих слагаемых в правой части (21) равны нулю, что и доказывает теорему Томсона.

Воспользовавшись теоремой Стокса

$$\oint_L \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{F}) ds,$$

где S — площадка, охватываемая контуром L ; \mathbf{v} — нормаль к этой площадке; \mathbf{F} — произвольный вектор, мы можем переписать определение циркуляции так:

$$\Gamma = \oint_S (\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}) ds.$$

Допустим, что в какой-то момент времени течение жидкости было безвихревым, т. е. во всем потоке выполнялось $\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0$. Из последнего равенства и условия постоянства Γ вдоль любого контура следует, что во все последующие моменты времени будет выполняться равенство $\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0$. Это означает, что в идеальной жидкости вихревое движение самопроизвольно возникать не может. С другой стороны, представим себе, что в начальный момент времени в какой-то точке пространства $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$. Тогда циркуляция по любому сколь угодно малому контуру, охватывающему эту точку, тоже имеет ненулевое значение. В силу сохранения циркуляции она будет иметь ненулевое значение по этому жидкому контуру во все последующие моменты времени. Следовательно, для жидкой капли, находящейся первоначально в точке с ненулевым ротором и движущейся вместе с потоком, ротор скорости будет сохранять ненулевое значение. Таким образом, вихревое движение идеальной жидкости не может ни самопроизвольно возникать, ни исчезать.

Как и теорема Бернулли, теорема Томсона справедлива только для идеальной жидкости, подобно тому, как закон сохранения момента количества движения в механике выполняется при вращательном движении только в отсутствие трения. В том, что вихревое движение может самопроизвольно возникать и исчезать, легко убедиться, если сделать в воде сильный гребок ладонью или любым другим предметом. За ладонью появится дорожка воронок, которые через некоторое время исчезнут. Появление вихревой дорожки, как и ее исчезновение, объясняется эффектами вязкости, которые мы будем обсуждать в следующих параграфах.

§ 6. Применение теорем Бернулли и Томсона в гидродинамике идеальной жидкости

В этом параграфе рассмотрим два примера использования теорем Бернулли и Томсона для решения задач гидродинамики идеальной жидкости.

Трубка Вентури. Представим себе, что по некоторой трубе течет жидкость, которая с хорошим приближением может рассматриваться как идеальная. Критерии, когда возможно использование такого приближения, мы обсудим позже, при изучении течений реальных вязких жидкостей. Допустим, что нам нужно измерить скорость течения жидкости в трубе. Устройство, позволяющее это сделать, схематично показано на рис. 6. Оно называется т р у б к о й В е н т у р и. Широкая часть соответствует основной части трубы, узкая — врезка, служащая для определения скорости в широкой, основной части течения. Все величины, относящиеся к широкой части трубы, мы будем отмечать индексом 1, к узкой — 2.

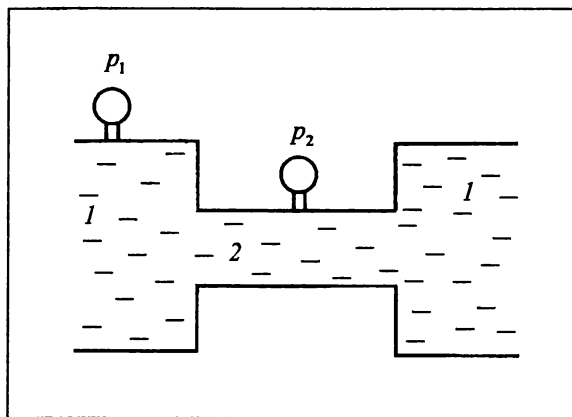


Рис. 6

При использовании трубки Вентури предполагается, что мы можем измерить разность давлений $p_1 - p_2$ в обеих частях канала. На рис. 6 эта возможность проиллюстрирована двумя манометрами.

Предположим, что в основной части потока слева от узкой врезки течение безвихревое. Тогда по теореме Томсона оно будет безвихревым и во врезке, а также правее ее. Пренебрегая изменением потенциальной энергии жидкости при переходе от узкой части канала к широкой, из теоремы Бернулли (20) имеем

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_2^2. \quad (22)$$

Для несжимаемой жидкости уравнение (22) может быть дополнено уравнением

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (23)$$

где $S_{1,2}$ — площади сечения соответствующих участков трубы. При известной разности $p_1 - p_2$ соотношения (21), (22) можно рассматривать как систему из двух уравнений относительно скоростей v_1, v_2 . Решая ее, легко находим

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2/S_2^2 - 1)}}.$$

Задача об истечении жидкости из сосуда. Рассмотрим открытый цилиндрический сосуд с площадью сечения S , в котором находится жидкость. Внизу сосуда просверлено отверстие площадью $s \ll S$. Нам нужно определить скорость v истечения жидкости из сосуда и скорость v_0 , с которой опускается уровень жидкости.

Обозначим h высоту уровня свободной поверхности жидкости над отверстием. Учитывая разность потенциальных энергий жидкости на высоте свободной поверхности и на уровне отверстия, а также то, что на свободной поверхности и в выходном отверстии давление жидкости равно атмосферному давлению, запишем уравнение Бернулли в виде

$$\frac{1}{2}v_0^2 + gh = \frac{1}{2}v^2. \quad (24)$$

Аналогично (23) запишем уравнение неразрывности:

$$v_0 S = vs. \quad (25)$$

Поскольку $s \ll S$, скорость v_0 движения уровня свободной поверхности много меньше скорости v истечения жидкости из сосуда, поэтому в уравнении (24) можно пренебречь v_0 . В результате

$$v = \sqrt{2gz}.$$

Обратим внимание на то, что точно такой же результат получился бы для скорости тела, падающего с высоты h , а уравнение (24) в точности совпадает с законом сохранения энергии для падающего тела. Скорость v_0 движения поверхности жидкости легко определяется из (25).

§ 7. Потенциальное течение идеальной жидкости.

Парадокс Даламбера — Эйлера

В силу теоремы Томсона в идеальной жидкости вихревое движение самопроизвольно не возникает и не исчезает. Поэтому, если в начальный момент времени всюду в жидкости выполняется условие $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$, то оно будет выполняться и в дальнейшем. Как уже говорилось, течение, для которого $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$, называется безвихревым. Вместе с тем из курса математики известно, что произвольный вектор \mathbf{A} , для которого выполняется условие $\text{rot } \mathbf{A} \equiv 0$, может быть представлен в виде $\mathbf{A} = \text{grad } \Phi$, где Φ — некоторая скалярная функция, называемая потенциалом вектора \mathbf{A} . Поэтому безвихревое течение называют еще потенциальным. Мы будем использовать эти два понятия как синонимы.

Рассмотрим безвихревое течение несжимаемой идеальной жидкости и представим ее скорость в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi. \quad (26)$$

Использование этой формы для скорости оказывается очень удобным для решения многих задач. В самом деле, подставляя ее в уравнение несжимаемости $\text{div } \mathbf{v} = 0$ и учитывая известное

математическое соотношение $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi$, где ∇ — оператор Лапласа, приходим к уравнению Лапласа для потенциала скорости:

$$\Delta \Phi = 0. \quad (27)$$

В отличие от уравнения Эйлера (12) уравнение Лапласа — линейное, поэтому с математической точки зрения оно намного проще для решения. Решив его и найдя затем скорость v , мы можем найти давление p , воспользовавшись алгебраическим уравнением Бернулли (20), после чего задача о течении идеальной жидкости будет полностью решена.

В качестве примера использования метода потенциала скорости рассмотрим задачу об обтекании однородным потоком идеальной несжимаемой жидкости неподвижной твердой сферы и найдем силу взаимодействия между потоком и этой частицей.

Пусть неподвижная твердая сфера радиуса R находится в потоке идеальной жидкости, скорость которой на бесконечном расстоянии от сферы однородна и равна v_0 (рис. 7).

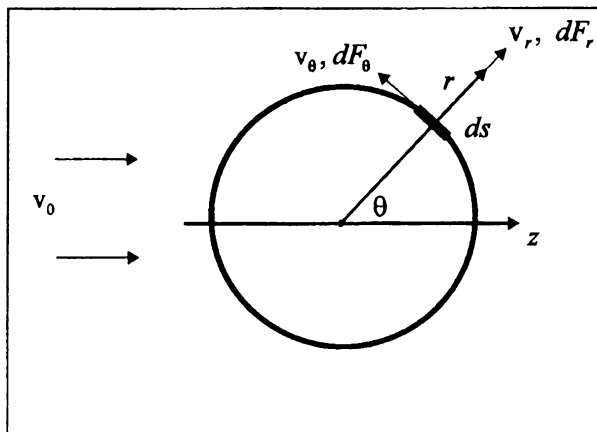


Рис. 7

Очевидно, поскольку скорость натекающего потока однородна, на бесконечном расстоянии от сферы течение жидкости безвихревое ($\operatorname{rot} v = 0$). Следовательно, по теореме Томсона оно будет

безвихревым и во всем своем объеме, в том числе вблизи сферы. Поэтому мы можем представить скорость течения в виде (26), получив для потенциала Φ уравнение Лапласа (27).

При решении подобных задач очень важно выбрать наиболее удобную систему координат. Мы будем решать уравнение (27) в сферической системе координат с началом в центре сферической частицы и полярной осью, направленной вдоль скорости v_0 . В этой системе координат радиус-вектор произвольной точки имеет координаты $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$, где r — расстояние от этой точки до начала координат (т. е. до центра шара); θ — угол между радиусом-вектором и полярной осью Oz , которая в нашем случае направлена вдоль скорости v_0 ; φ — азимутальный угол, не показанный на рис. 7, задающий отклонение радиуса-вектора \mathbf{r} от плоскости рисунка. Скорость течения в этой системе координат имеет компоненты $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi)$. Радиальная компонента v_r соответствует движению жидкости вдоль оси r от центра частицы. Компонента v_θ описывает движение по касательной к окружности радиуса r в сторону увеличения угла θ , компонента v_φ — в сторону увеличения угла φ .

Хорошо известно, что дифференциальное уравнение в частных производных (в нашем случае — уравнение Лапласа (27)) может быть решено только в случае, если для него сформулированы граничные условия. Эти условия должны соответствовать физической стороне решаемой задачи. В нашем случае граничные условия к уравнению (27) имеют вид

$$\Phi \rightarrow v_0 z = v_0 r \cos \theta, \quad r \rightarrow \infty; \quad (28)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad r = R.$$

Первое из этих условий означает, что при удалении от частицы в декартовой системе координат с осью Oz , направленной вдоль скорости v_0 натекающего потока, выполняется следующее условие: $\text{grad } \Phi \rightarrow (0, 0, v_0)$. При этом учитывается очевидное соотношение между декартовыми и сферическими координатами радиуса-вектора $z = r \cos \theta$. Второе из соотношений (28) означает,

что радиальная компонента скорости $v_r = \partial\Phi / \partial r$ на поверхности частицы должна быть равна нулю, что означает непроницаемость частицы для жидкости, а также ее недеформируемость.

В сферической системе координат уравнение Лапласа (27) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (29)$$

Из соображений симметрии следует, что потенциал Φ не может зависеть от угла φ — все значения этого угла равноправны. Это позволяет упростить уравнение (29), переписав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (30)$$

Существуют общие методы решения уравнения Лапласа, как в сферической, так и в других ортогональных системах координат. Однако они несколько громоздки. Здесь, чтобы решить поставленную задачу, мы используем наводящие интуитивные соображения, позволяющие существенно упростить вычисления.

Представим искомый потенциал в виде $\Phi = \Phi_0 + \Phi'$, где $\Phi_0 = v_0 r \cos \theta$ — невозмущенный потенциал натекающего потока, а Φ' соответствует возмущению, вносимому частицей в течение жидкости. В силу второго граничного условия (28) на поверхности частицы потенциал Φ' должен зависеть от угла θ как $\cos \theta$. Поэтому будем искать потенциал Φ' в виде $\Phi' = f(r) \cos \theta$, где $f(r)$ — функция, которую предстоит найти. Заметим, что уравнение Лапласа для невозмущенного потенциала Φ_0 выполняется тождественно. Поэтому должно быть справедливо уравнение $\Delta \Phi' = 0$. Подставляя $\Phi' = f(r) \cos \theta$ в уравнение (30) вместо Φ , после простых вычислений получаем

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) - 2f = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) является однородным уравнением Эйлера. Его решение:

$$f = Ar + Br^{-2}, \quad (32)$$

где A и B — постоянные интегрирования. По смыслу задачи $\Phi' \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому $A = 0$.

Второе уравнение (28) может быть записано в виде

$$\frac{df}{dr} + v_0 = 0, \quad r = R.$$

Подставляя сюда соотношение (32) и учитывая $A = 0$, получаем $B = \frac{v_0 R^3}{2}$. Окончательно

$$\Phi = v_0 \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta. \quad (33)$$

Используя известные формулы для компонент вектора градиента в сферической системе координат, приходим к следующим выражениям для компонент скорости жидкости:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta; \quad (34)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -v_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta.$$

Давление $p(\mathbf{r})$ найдем, воспользовавшись уравнением Бернулли (20). Обозначив p_0 давление на бесконечном расстоянии от частицы, имеем

$$\frac{1}{2} v_0^2 + \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2) + \frac{p}{\rho}.$$

В частности, на поверхности частицы, т. е. при $r = R$,

$$p(R) = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (35)$$

Найдем теперь силу, действующую со стороны потока на частицу. Для этого на поверхности частицы выделим элементарную площадку с площадью dS . Сила, действующая со стороны жидкости на площадку, имеет единственную радиальную компоненту

$$dF_r = -p(R)dS.$$

Знак «минус» возникает потому, что нормальная компонента силы давления направлена из жидкости внутрь частиц, в то время как положительная радиальная компонента любого вектора в сферической системе координат направлена по радиусу-вектору \mathbf{r} , т. е. изнутри наружу частицы.

Чтобы найти полную силу, действующую на частицу, нужно проинтегрировать силу, действующую на элементарную площадку по поверхности частицы. Однако при этом нужно иметь в виду, что при перемещении вдоль поверхности частицы направление радиальной компоненты силы меняется вместе с направлением радиуса-вектора \mathbf{r} . Корректно складывать проекции силы на оси, направление которых при интегрировании вдоль поверхности не меняется. Такими осями являются оси в декартовой системе координат. Так, компонента элементарной силы на направление скорости натекающего потока равна:

$$dF_z = dF_r \cos\theta = -p(R)\cos(\theta)dS.$$

Элементарная площадка в сферической системе координат $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, причем $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Учитывая, что давление p не зависит от угла φ , получаем

$$F_z = -2\pi R^2 \int_0^\pi p(R)\cos\theta \sin\theta d\theta. \quad (36)$$

Подставляя сюда $p(R)$ в виде (35), получаем $F_z = 0$. Из соображений симметрии следует, что компоненты $F_{x,y}$ полной силы в направлении, перпендикулярном \mathbf{v}_0 , заведомо равны нулю.

Таким образом, приходим к выводу, что однородный стационарный поток не оказывает воздействия на частицу. Очевидно, это означает также, что частица, движущаяся с постоянной скоростью в идеальной жидкости, не испытывает со стороны жидкости

никакого сопротивления. Полученный результат находится в вопиющем противоречии с жизненным опытом и называется парадоксом Даламбера — Эйлера. Мы пришли к этому парадоксу, рассматривая простейший случай сферической частицы, однако можно показать, что он справедлив для частицы любой формы [5]. Объяснение этого парадокса состоит в том, что взаимодействие частицы с обтекающим ее однородным потоком жидкости определяется вязкими силами, которыми в модели идеальной жидкости пренебрегается. В следующих разделах мы рассмотрим задачи о взаимодействии твердых частиц с вязкими жидкостями. Забегая вперед отметим, что, хотя приближение идеальной жидкости и не позволяет рассчитать силу взаимодействия между частицей и потоком реальной вязкой жидкости, оно позволяет рассчитать скорость и давление в этом потоке вблизи частицы. А это решение часто является необходимым для расчета силы взаимодействия.

§ 8. Нестационарное течение идеальной жидкости. Интеграл Коши — Лагранжа

Рассмотрим теперь нестационарное безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости. В этом случае мы можем снова использовать формулу (26), которая приводит к уравнению Лапласа (27). Как и при выводе уравнения Бернулли (20), мы будем предполагать, что массовая сила, действующая на жидкость, потенциальна, т. е. ее плотность может быть записана в виде $f_g = -\rho \nabla u$, где u — потенциальная энергия единицы массы жидкости. Нестационарное уравнение Эйлера сейчас может быть записано так:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla u. \quad (37)$$

Подставляя сюда скорость \mathbf{v} в виде (26), учитывая векторное соотношение

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{v}]$$

и полагая $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$, переписываем уравнение (35) следующим образом:

$$\bar{\nabla} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u \right) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u = F(t), \quad (38)$$

где $F(t)$ — произвольная функция, зависящая только от времени. Соотношение (38) называется интеграл Коши — Лагранжа. В стационарном случае этот интеграл совпадает с законом Бернулли (20).

Для решения многих задач уравнение (38) удобно переписать в несколько более простом виде. С этой целью введем новый потенциал скорости по правилу $\Phi' = \Phi + \int F(t) dt$. Заметим, что $\text{grad} \Phi' = \text{grad} \Phi = \mathbf{v}$. Поэтому оба потенциала Φ и Φ' имеют одинаковый физический смысл. Для Φ' из (38) получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u = 0. \quad (39)$$

Штрих у потенциала Φ для простоты записи здесь опущен.

§ 9. Ускоренное движение частицы в идеальной жидкости. Закон присоединенной массы

Ранее мы показали, что частица, движущаяся в идеальной жидкости с постоянной скоростью, не испытывает никакого сопротивления. Однако в случае движения с ускорением со стороны жидкости возникает сила сопротивления. Природа этой силы следующая. Когда частица, находящаяся в жидкости, движется с ускорением, она, как поршень, толкает перед собой слои жидкости, заставляя их также двигаться ускоренно. Пусть ускоренное движение частицы возникает под действием некоторой силы \mathbf{F} . По второму

закону Ньютона $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$, где \mathbf{a} — ускорение; M — полная ускоренная масса. Эта масса состоит из массы m частицы и массы m' жидкости, вовлеченной в ускоренное движение. Такая масса жидкости называется присоединенной массой. Переписав второй закон Ньютона в виде $m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m'\mathbf{a}$, мы приходим к уравнению движения частицы, на которую действуют ускоряющая сила \mathbf{F} и тормозящая сила $-m'\mathbf{a}$, которая называется силой присоединенной массы.

Найдем присоединенную массу в простейшем случае движения твердой сферической частицы. Перейдем в систему координат, связанную с центром этой частицы. В этой системе координат мы имеем дело с неподвижной частицей, на которую натекает однородный, но нестационарный поток идеальной жидкости. Однако в § 7 мы уже решали задачу об обтекании шара однородным потоком идеальной жидкости. Мы снова можем представить скорость течения среды в виде (26) и получить уравнение (27) для потенциала Φ . Обозначим \mathbf{v}_0 скорость движения частицы относительно жидкости. Тогда жидкость натекает на частицу со скоростью $-\mathbf{v}_0$. Поэтому в системе координат, связанной с частицей, решение задачи о скорости жидкости вблизи нее будет совпадать с (34) с заменой \mathbf{v}_0 на $-\mathbf{v}_0$, т. е.

$$\begin{aligned} v_r &= -v_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos\theta; \\ v_\theta &= v_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin\theta. \end{aligned} \tag{40}$$

Для дальнейшего удобно переписать (40) в векторном виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\mathbf{v}_0 - \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \mathbf{v}_0 + \frac{3}{2} \frac{R^3}{r^3} \frac{(\mathbf{v}_0 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2}. \tag{41}$$

Переход к лабораторной системе координат осуществляется прибавлением к (41) скорости \mathbf{v}_0 . В результате в лабораторной системе координат

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \mathbf{v}_0 + \frac{3}{2} \frac{R^3}{r^3} \frac{(\mathbf{v}_0 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2}. \quad (42)$$

Соответствующий потенциал течения

$$\Phi = -\frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} (\mathbf{v}_0 \mathbf{r}). \quad (43)$$

Скорость движения жидкости в лабораторной системе координат имеет вид

$$v_r = v_0 \frac{R^3}{r^3} \cos \theta, \quad v_\theta = v_0 \frac{R^3}{2r^3} \sin \theta; \quad (44)$$

$$v^2 = v_0^2 \frac{R^6}{r^6} \frac{1+3 \cos^2 \theta}{4}.$$

Для простоты допустим, что скорость частицы линейно увеличивается со временем, т. е. $v_0 = at$. На бесконечном расстоянии от частицы $v = 0$, $\Phi = 0$, $p = p_0$. Учитывая это и используя интеграл Коши — Лагранжа, получаем следующее выражение для давления на поверхности частицы:

$$p(R) = p_0 - \frac{1}{8} \rho a^2 t^2 (1+3 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} a R \cos \theta.$$

Силу F_z , действующую на частицу со стороны потока, снова определяем по формуле (36). После вычислений получаем

$$F_z = -\frac{2}{3} \pi R^3 \rho a = \frac{1}{2} V \rho a. \quad (45)$$

Здесь V — объем частицы. Таким образом, присоединенная масса твердой сферы $m' = \frac{1}{2} V \rho$. Учет эффекта присоединенной массы в уравнении движения частицы не очень существенен, если плотность вещества частицы гораздо больше плотности жидкости. В противоположном случае, например, при движении газового

пузырька в жидкой среде, учет присоединенной массы может быть принципиально важным. Необходимо отметить, что полученное выражение для присоединенной массы справедливо только для твердых сферических частиц. В общем случае это выражение зависит от формы частицы и ее ориентации относительно направления ее ускорения.

§ 10. Гравитационные волны в идеальной жидкости

В обычных земных условиях равновесная поверхность жидкости, как правило, имеет плоскую форму. Если под влиянием каких-либо воздействий произошло деформирование поверхности, то эта деформация может распространяться в виде волны. Если такие волны обусловлены действием сил тяжести, они называются гравитационными.

Общая теория волнового движения в жидкости очень сложна. Мы рассмотрим случай волн малой амплитуды, предполагая, что амплитуда волны a много меньше ее длины λ (рис. 8).

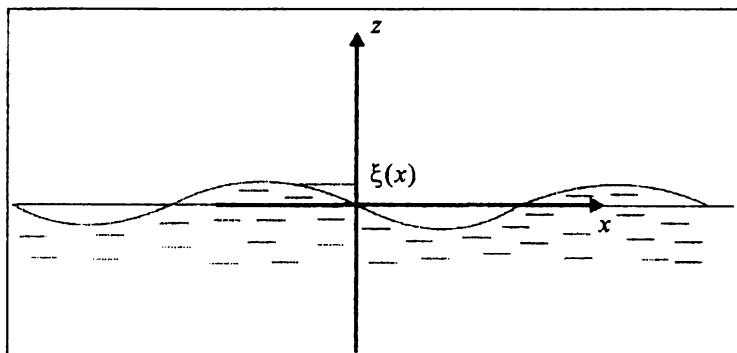


Рис. 8

Покажем, что для волн малой амплитуды выполняется сильное неравенство $\partial v / \partial t \gg (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$, а потому нелинейным членом в уравнении Эйлера можно пренебречь. Действительно, пусть τ — период волны. Тогда по порядку величины $\partial v / \partial t \sim v / \tau$, $v \sim a\tau$,

следовательно, $\partial v / \partial t \sim a / \tau^2$. В направлении распространения волны скорость v заметно меняется на расстояниях порядка λ . Поэтому $\nabla v \sim v / \lambda$ и $v \nabla v \sim v^2 / \lambda$. Таким образом, по порядку величины

$$\frac{v \nabla v}{\partial v / \partial t} \sim v \frac{\tau}{\lambda} \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1.$$

Пренебрегая нелинейным членом в уравнении Эйлера (20) и предполагая, что плотность внешних сил обладает свойством потенциальности (что выполняется для гравитационных сил), мы можем переписать это уравнение в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + u \right).$$

Здесь u — потенциал единицы массы жидкости в поле внешних сил. Для гравитационных сил $u = -(\mathbf{g} \mathbf{r})$, где \mathbf{g} — ускорение свободного падения.

Применяя операцию ротора к последнему уравнению, получаем $\partial \text{rot } \mathbf{v} / \partial t = 0$, т. е. ротор скорости не зависит от времени. Однако при волновом движении скорость \mathbf{v} и, следовательно, $\text{rot } \mathbf{v}$ должны колебательным образом меняться со временем, при этом средние по времени значения этих величин должны быть равны нулю. Поскольку $\text{rot } \mathbf{v}$ от времени не зависит, его среднее значение равно ему самому. Отсюда $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, следовательно, движение жидкости в волне малой амплитуды потенциально. Таким образом, мы можем представить скорость в виде $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ и воспользоваться уравнением Коши — Лагранжа (39), в котором пренебрежем нелинейным членом с v^2 . В результате получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0. \quad (46)$$

Здесь z — вертикальная координата, отсчитываемая от уровня невозмущенной жидкости (см. рис. 8). Обозначим $\xi(x)$ вертикальную координату поверхности жидкости. На поверхности давление

жидкости совпадает с атмосферным давлением p_0 . Учитывая это и используя уравнение (46), для точек на поверхности имеем

$$p_0 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - g\xi(x) = 0. \quad (47)$$

Вводя новый потенциал $\Phi' = \Phi + \frac{p_0}{\rho}t$, перепишем уравнение (47) в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\xi(x) = 0. \quad (48)$$

Штрих у потенциала Φ ради краткости опускаем.

Строго говоря, уравнение (48) относится к точкам, расположенным на возмущенной поверхности жидкости, т. е. при $z = \xi(x)$. Однако форма этой поверхности, т. е. функция $\xi(x)$, нам заранее не известна. Необходимость одновременно искать скорость и давление в жидкости, а также определять форму свободной поверхности, на которой задается граничное условие (48), сильно усложняет задачу. Чтобы ее упростить, учтем, что при малых амплитудах a деформированная поверхность лишь немного отклоняется от равновесной, для которой $\xi = 0$. Поэтому мы можем сместить граничное условие (48) на недеформированную поверхность и считать, что оно выполняется при $z = 0$. Продифференцировав обе части (48) по времени и учитывая, что $\partial \xi / \partial t$ по определению является вертикальной скоростью $v_z = \partial \Phi / \partial z$ поверхностных частиц, мы можем переписать (48) в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (49)$$

Внутри жидкости для потенциала Φ справедливо уравнение Лапласа $\Delta \Phi = 0$. Будем искать решение этого уравнения в виде волны, бегущей в направлении оси Ox , представив

$$\Phi = f(z) \cos(kx - \omega t), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (50)$$

Подставив (50) в уравнение Лапласа, приходим к уравнению относительно f :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид $f = f_0 \exp(kz) + f_1 \exp(-kz)$, где $f_{0,1}$ — постоянные интегрирования. В случае бесконечно глубокого бассейна мы должны положить $f_1 = 0$, иначе на больших глубинах, где $z \rightarrow -\infty$, скорость v будет бесконечно большой, что не физично. Таким образом, учитывая (50), получаем

$$\Phi = f_0 \exp(kz) \cos(kx - \omega t), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (51)$$

Подставляя это соотношение в граничное условие (49), находим следующую связь между волновым числом k и циклической частотой ω :

$$\omega^2 = kg. \quad (52)$$

Найдем теперь компоненты скорости жидкости. Из соотношения $v = \text{grad } \Phi$ получаем

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -f_0 k \exp(kz) \sin(kx - \omega t); \quad (53)$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = f_0 k \exp(kz) \cos(kx - \omega t).$$

Соотношения (52) описывают движение по окружности с амплитудой $f_0 \exp(kz)$, затухающей по мере погружения внутрь жидкости. Амплитуда f_0 определяется из начальных условий задачи, задаваемых при $t = 0$, которые определяют конкретные условия возникновения волны и не могут быть записаны в общем виде.

Итак, наш анализ показал, что при малых гравитационных волнах частицы жидкости движутся по окружностям, радиусы которых экспоненциально уменьшаются по направлению в глубь жидкости.

Глава 3 ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 11. Тензор вязких напряжений

Вернемся теперь к общему уравнению (8) движения элементарного жидкого объема. Введем плотность силы, действующей внутри жидкости по правилу $d\mathbf{F} = \mathbf{f}dV$, где $dV = dx dy dz$ — объем элементарного параллелепипеда, показанного на рис. 2.

Как уже отмечалось, сила $d\mathbf{F}$, действующая на этот объем, а значит, и плотность силы \mathbf{f} складывается из силы давления с плотностью $\mathbf{f}_p = -\nabla p$, массовой силы с плотностью \mathbf{f}_g и вязкой силы $d\mathbf{F}_\eta$, плотность которой обозначим \mathbf{F}_η . Наша задача сейчас состоит в том, чтобы в уравнении движения (8) учесть силы вязкого трения между участками движущейся жидкости. Стоит заметить, что физическая природа возникновения вязких сил состоит в притяжении друг к другу молекул близких слоев жидкости — в отсутствие такого притяжения жидкость испарилась бы. Поэтому движение слоев жидкости относительно друг друга сопровождается разрывом и возникновением связей между молекулами этих слоев. Часть энергии относительного движения при этом диссипирует в тепло, движение тормозится. Повышение температуры жидкости облегчает разрыв межмолекулярных связей, поэтому вязкость жидкости падает при увеличении температуры.

Мы будем основываться на опытном законе Ньютона, по которому *вязкая сила, действующая на элементарную площадку, пропорциональна ее площади δS* . Физический смысл этого результата вполне прозрачен — сила вязкого трения, действующая на некоторую поверхность, аддитивно складывается из сил, действующих на различные участки этой поверхности. Обозначив δF_η вязкую силу, действующую на площадку δS , в соответствии с законом Ньютона имеем $\delta F_\eta = \sigma \delta S$. Коэффициент пропорциональности σ называется

вязким напряжением. Его физический смысл — вязкая сила, действующая в потоке на единичную площадку.

Необходимо, однако, учесть, что сила — векторная величина. Очевидно, в потоке с заданным направлением сила, действующая на одну и ту же площадку в разных направлениях, будет различна, т. е. коэффициент пропорциональности σ должен зависеть от направления действия вязкой силы. Кроме того, площадка может быть по-разному ориентирована относительно потока. С другой стороны, вязкая сила, действующая в потоке на площадки одинаковых размеров, но по-разному ориентированных относительно потока, также будет различна.

Введем вектор площадки по правилу $d\mathbf{S} = \mathbf{v}dS$, где \mathbf{v} — вектор единичной нормали к площадке. В векторном виде закон Ньютона может быть записан так:

$$\delta F_{\eta_i} = \sigma_{ij} \delta S_j,$$

где $i, j = x, y, z$ — декартовы координаты. Таким образом, коэффициент пропорциональности между компонентами силы, действующей на площадку, и компонентами вектора этой площадки является матрицей σ_{ij} . Физический объект, в соответствие которому ставится матрица, называется тензором. Напомним, что вектором называется объект, которому в некоторой системе координат в соответствие ставится строка или столбец. Как известно, вектором является не каждая строка (столбец) чисел — компоненты вектора должны обладать определенными трансформационными свойствами при изменении системы координат. Компоненты матрицы также должны обладать своими трансформационными свойствами, чтобы эта матрица соответствовала тензору. Более подробно трансформационные свойства компонент векторов и тензоров обсуждаются в стандартных курсах векторного и тензорного анализа. Известно, что необходимыми свойствами обладают компоненты матрицы, являющейся, подобно σ_{ij} , коэффициентом пропорциональности между двумя векторами. Поэтому говорят, что σ_{ij} является тензором вязких напряжений. Физический смысл компоненты σ_{ij} этого тензора — вязкая сила, действующая

в направлении оси i на единичную площадку, нормаль к которой направлена вдоль j .

Определим теперь плотность вязких сил f_η . С этой целью снова рассмотрим элементарный параллелепипед, показанный на рис. 2. Представим себе, что скорость потока направлена вдоль оси y и нарастает снизу вверх вдоль оси z . Если перейти в систему координат, движущуюся вместе с параллелепипедом, то слои жидкости ниже его будут двигаться вдоль этой оси в отрицательную сторону, а слои выше параллелепипеда — в положительную. Следовательно, на нижнюю грань в направлении оси y будет действовать сила вязкого трения, направленная влево, т. е. с отрицательной y -компонентой, на верхнюю грань — сила с положительной компонентой. Баланс этих сил дает результирующую силу:

$$\delta F_\eta(z+dz) - \delta F_\eta(z) = (\sigma_{yz}(z+dz) - \sigma_{yz}(z)) dx dy = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dx dy dz.$$

Совершенно аналогично в случае изменения скорости также вдоль осей x и y результирующие силы, действующие в направлении оси y на ближнюю и дальнюю грани, а также на левую и правую, оказываются равными $\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx dy dz$ и $\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dx dy dz$ соответственно. Складывая силы, действующие на все грани элементарного параллелепипеда, приходим к такому выражению для результирующей вязкой силы, действующей на параллелепипед в направлении оси y :

$$dF_{\eta y} = \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Отсюда плотность этой силы

$$f_{\eta y} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}. \quad (54)$$

Аналогично (54) получаем выражение и для других компонент f_η . В общем случае

$$f_{\eta i} = \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z}, \quad i = x, y, z. \quad (55)$$

Соотношение (55) можно переписать в векторном виде, учитывая свойства оператора ∇ :

$$\mathbf{f}_{\eta} = \nabla \sigma. \quad (56)$$

Теперь, чтобы учесть вязкие силы, мы должны прибавить f_{η} к правой части уравнения (12). Используя (56), получаем общее уравнение движения вязкой среды:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \mathbf{y} + \mathbf{f}_g. \quad (57)$$

Уравнение (57) не замкнуто, так как тензор напряжений σ в нем не выражен через скорость течения \mathbf{v} . Важно отметить, что это уравнение имеет общий характер и применимо ко всем средам независимо от их механических свойств, так как является вторым законом Ньютона, записанным в форме механики сплошных сред. Для определения связи между σ и \mathbf{v} необходимо использовать информацию о физических свойствах исследуемого вещества — является ли оно газом, жидкостью, полимерной средой и т. д.

§ 12. Уравнение Навье — Стокса

Прежде всего заметим, что силы внутреннего трения (вязкости) не могут возникать в жидкости, если она движется как целое с одинаковой всюду скоростью \mathbf{v} . Внутреннее трение возникает только тогда, когда существует движение слоев жидкости относительно друг друга. Поэтому тензор σ должен зависеть не от скорости \mathbf{v} , а от ее пространственных производных. Детальный молекулярно-кинетический анализ показывает, что если скорость среды пренебрежимо мало меняется на расстояниях порядка среднего расстояния между молекулами, вклад в σ производных от \mathbf{v} второго и более высоких порядков также пренебрежимо мал. Известно, что среднее расстояние между молекулами газа (при комнатной

температуре и атмосферном давлении) составляет порядка одного микрона. Трудно себе представить, чтобы скорость течения газа ощутимо менялась на таких маленьких расстояниях — тогда на расстояниях порядка нескольких сантиметров ее изменение было бы просто чудовищным. Исключения возникают при течении очень разреженных газов. Однако в этих случаях основное допущение механики сплошных сред — возможность выделения элементарного представительного объема с очень большим числом молекул — не выполняется и гидродинамические методы, строго говоря, неприменимы. Мы такие ситуации рассматривать не будем. В жидкостях расстояния между молекулами порядка размеров самих молекул. Практически во всех реалистических ситуациях изменение скорости течения жидкости на таких расстояниях ничтожно мало.

Итак, мы можем представить тензор вязких напряжений σ в виде функции от производных $\partial v_i / \partial x_j$. Эта функция, вообще говоря, неизвестна и для разных веществ ее вид различен. Однако молекулярная теория показывает, что если внутренняя молекулярная структура среды при ее течении очень мало отличается от равновесной структуры, то с хорошим приближением можно воспользоваться линейным приближением разложения σ_{kl} в ряд Тейлора по степеням $\partial v_i / \partial x_j$. Тогда $\sigma_{kl} = \sum_{i,j} C_{kij} \partial v_i / \partial x_j$. В этом приближении величины C_{kij} не зависят от скорости и ее производных и их можно рассматривать как некоторые эмпирические постоянные.

Набор величин C_{kij} представляет собой матрицу 3×4 и включает в себя 81 компоненту. Использовать при работе такой большой набор эмпирических параметров, конечно, чрезвычайно неудобно. К счастью, для большинства практически интересных ситуаций количество различающихся компонент в этой матрице значительно меньше.

Можно показать, что условие отсутствия сил трения при вращении жидкости как целого (твердотельного вращения) приводит к симметричности матрицы C по компонентам i, j и k, l . Если в среде направления x и $-x$ физически равноправны, то компоненты матрицы, содержащие нечетное число x , обращаются

в ноль. То же относится к координатам y и z . Если жидкость изотропна, т. е. все направления в ней физически равноправны, то компоненты S не меняются при замене x на y , x на z и y на z . Учет этих обстоятельств для несжимаемых жидкостей приводит к следующему соотношению:

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (58)$$

Набор производных $\partial v_i / \partial x_j$ образует тензор, называемый тензором градиента скорости. Используются также термины тензор скоростей деформаций и тензор скоростей сдвига. В правой части (58) фигурирует удвоенная симметричная часть этого тензора. Параметр η называется сдвиговой вязкостью среды. Подчеркнем, что соотношение (58) получено для несжимаемых сред, к которым с хорошим приближением относятся все известные жидкости. Для сжимаемых сред (газов) правая часть (58) дополняется членами, соответствующими вязким напряжениям при всестороннем сжатии (разрежении) среды. Далее мы будем рассматривать течения только несжимаемых жидкостей, поэтому ограничимся приближением (58).

Жидкости, для которых справедливо приближение (58), называются ньютоновскими, так как Ньютоном экспериментально было установлено, что вязкие силы не только линейно зависят от величины площадки, на которую они действуют, но и от градиента скорости течения. Среды, для которых по каким-либо причинам (58) не выполняется, называются неньютоновскими.

Соотношение (58) не выполняется, например, для неизотропных (анизотропных) жидкостей, для которых различные направления в пространстве физически неравноправны. Примерами анизотропных сред являются жидкие кристаллы, которые характеризуются не одним, а пятью и более коэффициентами вязкости. Нарушение (58) происходит при нелинейной связи между компонентами тензоров напряжения и градиента скорости течения. Такие ситуации типичны для полимерных, коллоидных сред,

а также для многих биологических жидкостей. Отметим также, что в соотношении (58) предполагается, что изменение тензора скоростей сдвига мгновенно приводит к изменению тензора напряжений и наоборот. В реальности это условие выполняется не всегда. Вообще говоря, после изменения градиента скорости напряжение подстраивается к новому его значению за какое-то конечное время, называемое временем релаксации; при изменении напряжения происходит подстройка тензора скоростей за конечное время ретардации. Для жидкостей типа воды, растворов на ее основе, низкомолекулярных органических жидкостей времена релаксации и ретардации, как правило, намного меньше секунды, и ими обычно пренебрегают. Для полимерных, коллоидных и биологических сред такие времена могут быть существенны, и их необходимо учитывать. В этом разделе мы будем заниматься гидродинамикой ньютоновских жидкостей, типичным представителем которых является вода.

Подставляя (58) в (57) и предполагая вязкость η однородной во всей среде, получаем следующее уравнение течения несжимаемых ньютоновских жидкостей:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}_g. \quad (59)$$

Уравнение (59) называется уравнением Навье — Стокса.

§ 13. Граничные условия к уравнению Навье — Стокса

Уравнение Навье — Стокса является дифференциальным уравнением в частных производных. Как уже отмечалось в § 7, такие уравнения могут быть решены, только если заданы их граничные условия, отражающие физические условия на границах области решения задачи. Ниже рассмотрим три типичных случая граничных условий в задачах гидродинамики.

Жидкость — твердое тело. Представим себе, что вязкая жидкость течет вблизи плоской твердой стенки. Введем декартову

систему координат с началом на твердой поверхности и осью z , направленной перпендикулярно этой поверхности. Если твердая стенка непроницаема для жидкости, то перпендикулярная к ней составляющая скорости v жидкости должна быть равна нулю. Что касается тангенциальной составляющей v , то, как показывает опыт, непосредственно на поверхности стенки она также обращается в ноль. Это условие называется принципом прилипания. Физической причиной эффекта прилипания является то, что практически любая поверхность реального твердого тела содержит микрошероховатости, щели, каверны. При течении жидкость сильно тормозится этими неоднородностями, застаивается в них. Из-за эффектов вязкого трения на высотах, немного превышающих размеры неоднородностей, жидкость не может обладать значительной скоростью. Поскольку вертикальные по отношению к поверхности размеры неоднородностей, как правило, гораздо меньше остальных размеров области течения и меньше тех, которые могут непосредственно восприниматься нашими органами чувств, их высотой пренебрегают, а эффекты застоя жидкости в них интерпретируют как прилипание жидкости к гладкой поверхности.

Таким образом, граничные условия при течении жидкости вдоль твердой поверхности выглядят так:

$$z = 0, \quad v_z = 0, \quad v_{x,y} = 0. \quad (60)$$

Жидкость — жидкость. Рассмотрим две несмешивающиеся жидкости 1 и 2 с плоской границей раздела между ними. Как и в предыдущем случае, используем систему координат с началом на граничной поверхности и осью z , направленной перпендикулярно этой поверхности.

Предположим, что на границе жидкостей не образуются разрывы и нет проскальзывания между ними. То обстоятельство, что жидкости не смешиваются, а значит, не проникают друг в друга, а также то, что между ними не образуются разрывы, означает, что z -компоненты скоростей первой и второй жидкостей на границе

равны. Отсутствие проскальзывания означает равенство тангенциальных компонент скоростей. Следовательно,

$$z = 0, \quad v_{z1} = v_{z2}, \quad v_{x,y1} = v_{x,y2}. \quad (61)$$

В силу третьего закона Ньютона вертикальная компонента силы, с которой первая жидкость действует на вторую, равна силе, с которой вторая действует на первую. Учитывая противоположное направление сил давления и вязкого трения по отношению к нормали единичной площадки граничной поверхности, получаем

$$z = 0, \quad -p_1 + \sigma_{z1} = -p_2 + \sigma_{z2}. \quad (62)$$

Аналогично, третий закон Ньютона требует равенства тангенциальных сил, действующих на единичную площадку этой поверхности. Следовательно,

$$z = 0, \quad \sigma_{xz1} = \sigma_{xz2}, \quad \sigma_{yz1} = \sigma_{yz2}. \quad (63)$$

Соотношения (61)–(63) образуют систему граничных условий на поверхности раздела несмешивающихся жидкостей.

Жидкость — газ. Рассмотрим случай, когда движущаяся жидкость контактирует с газом, например, с атмосферным воздухом. Снова рассматриваем случай плоской границы, ось z направляем перпендикулярно к ней.

Будем учитывать, что газ является средой, очень разреженной по сравнению с жидкостью. Его вязкость намного меньше вязкости жидкости. Поэтому, несмотря на контакт с движущейся жидкостью, он остается практически неподвижным, и давление в нем равно равновесному давлению, которое мы обозначим p_a . В силу малой вязкости газа по сравнению с вязкостью жидкости вязкими напряжениями в нем можно пренебречь. Следовательно, третий закон Ньютона на границе жидкость — газ выплывает так:

$$z = 0, \quad -p + \sigma_z = -p_a, \quad \sigma_z = \sigma_{yz} = 0. \quad (64)$$

Здесь p и σ относятся к движущейся жидкости. Соотношение (64) рассматривается как граничное условие на поверхности

раздела газ — жидкость; если интерес представляет движение только жидкости, движение газа может быть проигнорировано.

В следующих параграфах мы рассмотрим несколько типичных примеров течения вязких жидкостей, в которых используются полученные граничные условия.

§ 14. Плоское течение Куэтта

Рассмотрим щель, образованную двумя параллельными плоскими твердыми стенками (рис. 9). Будем считать, что размеры стенок бесконечны. Щель заполнена вязкой жидкостью; стенки щели для нее непроницаемы, ширина щели равна h .

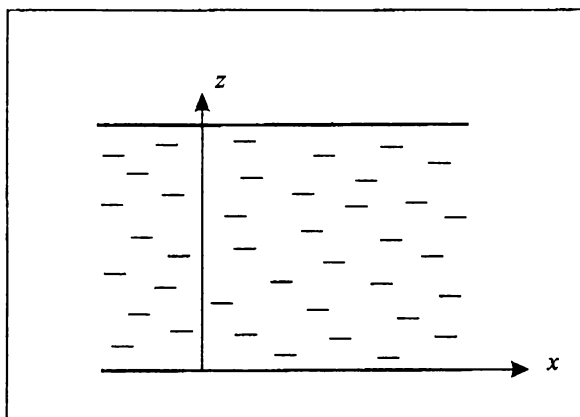


Рис. 9

Предположим, что нижняя стенка неподвижна, а верхняя перемещается в своей плоскости с постоянной скоростью U . Требуется найти стационарное распределение скорости внутри щели.

Введем декартову систему координат с началом на нижней плоскости, осью x , направленной вдоль скорости движения верхней плоскости, и осью z , направленной вертикально вверх. Из соображений симметрии задачи следует, что y -компонента скорости v равна нулю, так как оба направления движения вдоль этой оси равноправны и система не может выбрать ни одно из них.

Из этих же соображений следует, что от координаты y оставшиеся компоненты скорости и давление зависеть не могут. Таким образом, задача из трехмерной становится двумерной.

В этой постановке стационарное уравнение Навье — Стокса (59) выглядит так:

$$\rho \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x; \quad (65)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z.$$

Уравнение несжимаемости (7) сейчас имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (66)$$

Учтем теперь, что все точки в направлении оси x физически равноправны, а выбор начала координат в нижней плоскости совершенно произволен. Физические результаты не могут зависеть от произвола при выборе начала координат, поэтому от координаты x ни компоненты скорости v , ни давление p зависеть не могут. Следовательно, вместо (66) мы имеем $\partial v_z / \partial z = 0$, откуда $v_z = \text{const}$. Но на стенках щели в силу их непроницаемости $v_z = 0$, следовательно, эта компонента скорости всюду в щели равна нулю. К выводу о равенстве нулю компоненты v_z можно прийти и из чисто физических соображений. Действительно, допустим, что $v_z \neq 0$ и направлена, скажем, вверх. Поскольку v_z , как и остальные компоненты скорости, не зависит от координаты x , это означает, что вся жидкость движется к верхней границе щели. Ясно, что в этом случае вблизи верхней границы будет создаваться уплотнение, вблизи нижней границы — разрежение жидкости. Но это противоречит условию ее несжимаемости.

С учетом равенства нулю v_z и производных по x уравнения (65) сводятся к уравнению

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0, \quad (67)$$

решение которого

$$v_x = Ax + B, \quad (68)$$

где A и B — постоянные интегрирования. Обратим внимание на то, что исходная задача о течении жидкости представляет собой систему четырех нелинейных уравнений с частными производными. Решать такие уравнения очень тяжело. Однако с помощью соображений симметрии мы свели эту чрезвычайно тяжелую для общего решения задачу к элементарному уравнению (67).

Из условия прилипания на нижней границе щели следует, что $v_x = 0$ при $z = 0$. Следовательно, $B = 0$. На верхней границе в силу этого же условия скорость жидкости равна скорости верхней стенки, т. е. $v_x = U$ при $z = h$. Поэтому $A = U/h$. Таким образом,

$$v_x = U \frac{z}{h}. \quad (69)$$

Сила вязкого трения, действующая со стороны жидкости на единицу площади верхней пластины, по определению равна $\sigma_{xz} = \eta \partial v_x / \partial z$. Используя (69), получаем $\sigma_{xz} = \eta U/h$.

§ 15. Плоское течение Пуазейля

Снова рассмотрим плоскую щель, изображенную на рис. 9. В отличие от предыдущего случая обе стенки щели будем считать неподвижными. Жидкость приводится в движение перепадом давления между концами щели в направлении оси x . Считая, что в направлении осей x и y размеры щели много больше ее ширины h , по-прежнему будем использовать приближение бесконечных плоских стенок.

Те же соображения симметрии, что и в предыдущем параграфе, дают $v_y = 0$, $\partial v_i / \partial x = 0$, $\partial v_i / \partial y = 0$, где $i = x, y, z$. Условие неразрывности снова дает $v_z = 0$. Учитывая это, из уравнений (59) и (65) получаем

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (70)$$

Последнее уравнение означает, что давление p не зависит от координаты z . Покажем, что $\partial p / \partial x = \text{const}$. Для этого продифференцируем обе части первого уравнения (70) по x . В силу независимости v_x от x правая часть обратится в ноль. Следовательно, $\partial^2 p / \partial x^2 = 0$, что означает независимость $\partial p / \partial x$ от x .

Обозначим L_x длину щели в направлении x и δp — разность давлений между левым и правым краями щели. Тогда, очевидно, $\partial p / \partial x = -\delta p / L_x$. Используя последнее соотношение в (70), после интегрирования этого уравнения получаем

$$v_x = -\frac{1}{2} \frac{\delta p}{L_x} z^2 + Az + B.$$

Постоянные интегрирования снова определяются из условий прилипания на нижней и верхней границах: $v_x = 0$ при $z = 0$ и $z = h$. Окончательно

$$v_x = \frac{1}{2} \frac{\delta p}{L_x} (zh - z^2). \quad (71)$$

Часто практический интерес представляет расход жидкости, т. е. ее объем, пересекающий поперечное сечение канала течения за единицу времени. Обозначив величину расхода Q , имеем

$$Q = L_y \int_0^h v_x dz = \frac{1}{6} \frac{L_y}{L_x} h^3 \delta p,$$

где L_y — ширина щели в y -направлении.

§ 16. Течение жидкости по наклонной плоскости

Рассмотрим бесконечную плоскость, наклоненную к горизонту под углом α (рис. 10). По плоскости под действием силы

тяжести течет слой жидкости толщиной h , над которой находится атмосферный газ с давлением p_a . Найти скорость течения жидкости.

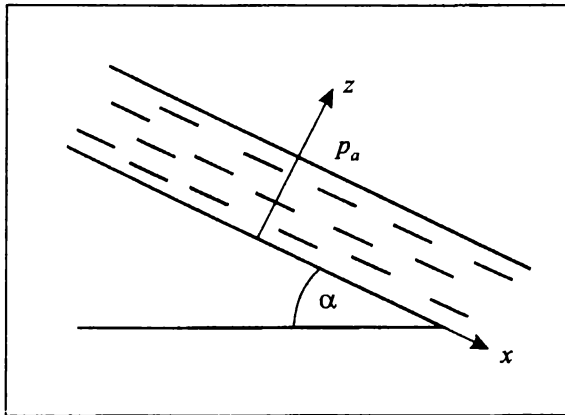


Рис. 10

Введем декартову систему координат, как показано на рис. 10. С учетом соображений симметрии и несжимаемости жидкости, использованных в предыдущих параграфах, получаем $v_z = v_y = 0$ и из уравнения Навье — Стокса (59) приходим к двум уравнениям:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \rho g \sin \alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \cos \alpha = 0. \quad (72)$$

Проинтегрировав второе уравнение (72) по z , получаем $p = -\rho g z + C(x)$, где $C(x)$ — некоторая функция, зависящая только от x . Воспользуемся граничным условием $-p + \sigma_{zz} = -p_a$ при $z = h$, а также тем, что $\sigma_{zz} = \eta \partial v_z / \partial z = 0$. Отсюда следует, что при $z = h$ выполняется равенство $p = p_a$, значит, $C = p_a + \rho g h$, и $p = \rho g (h - z) + p_a$. Используя этот результат в первом уравнении (72), после интегрирования получаем

$$v_x = -\frac{1}{2} z^2 \rho g \sin \alpha + Az + B.$$

Из граничного условия $v_x = 0$ при $z = 0$ находим $B = 0$. Параметр A определяется из условия $\sigma_{xz} = \eta \partial v_x / \partial z = 0$ при $z = h$. Окончательно

$$v_x = \frac{1}{2} (hz - z^2) \rho g \in \alpha.$$

§ 17. Течение Пуазейля в цилиндрической трубе

В предыдущих параграфах мы рассмотрели несколько примеров решения уравнений Навье — Стокса в системах с плоской симметрией, когда эти уравнения удобнее всего решать в декартовой системе координат. Во многих случаях уравнения гидродинамики проще решать, используя другие системы координат. В этом и следующем параграфе даны примеры течения вязкой жидкости в системах с цилиндрической симметрией.

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в цилиндрической трубе, длина L которой много больше ее радиуса R (рис. 11). Считаем, что жидкость движется благодаря перепаду давления $p_1 - p_2$ между концами трубы.

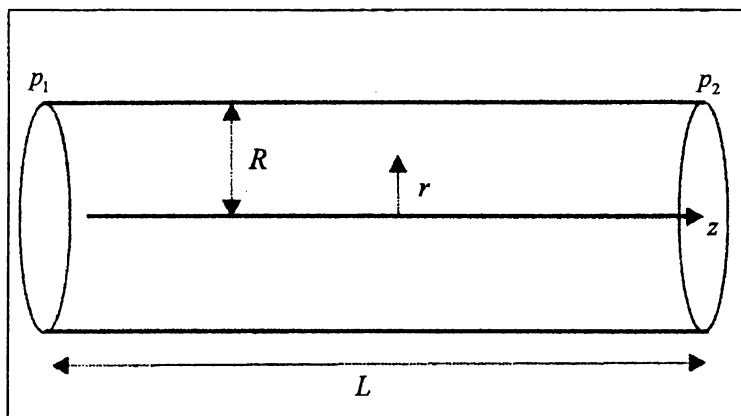


Рис. 11

Удобнее всего решать эту задачу в цилиндрической системе координат с осью Oz , направленной вдоль оси цилиндра, осью r , перпендикулярной этой оси, и полярным углом φ . Уравнения Навье — Стокса и несжимаемости в цилиндрической системе координат даны в Приложении. Из соображений симметрии следует, что компоненты скорости жидкости v не могут зависеть от полярного угла φ , следовательно, все производные по этому углу должны быть равны нулю. Поскольку $L \gg R$, в первом приближении трубу можно считать бесконечно длинной. Тогда все значения координаты z физически равноправны. Это значит, что компоненты скорости не могут зависеть от z и все производные по z от этих компонент обращаются в ноль. Поскольку компоненты скорости не зависят от координаты z , радиальная компонента скорости v_r обязана быть равной нулю. В самом деле, представим себе, что эта компонента больше нуля, что соответствует течению жидкости от оси цилиндра к его стенкам. Очевидно, это будет означать уменьшение плотности жидкости вблизи оси и ее увеличение вблизи стенок трубы, что невозможно в силу несжимаемости жидкости. Аналогично невозможен случай отрицательных компонент скорости v_r . Очевидно также, что полярная компонента скорости v_φ , описывающая циркуляционное движение жидкости вокруг оси цилиндра, должна быть равна нулю, так как течение жидкости по часовой стрелке вокруг этой оси физически равноправно течению в противоположном направлении. Таким образом, мы приходим к выводу, что единственной ненулевой компонентой скорости может быть только осевая компонента v_z , причем зависеть она может только от координаты r . Учитывая это, записываем уравнение Навье — Стокса в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz}. \quad (73)$$

Здесь для краткости принято обозначение $v = v_z$. Продифференцировав обе части (73) по координате z и учитывая, что v от z не зависит, получаем $d^2 p / dz^2 = 0$, т. е. градиент давления dp / dz не зависит от z . Легко видеть, что в этом случае $dp / dz = -(p_1 - p_2) / L$.

Решение уравнения (73) имеет вид

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2 + C_1 \ln r + C_2,$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Поскольку при $r = 0$ скорость v не может обращаться в бесконечность, коэффициент C_1 должен быть равен нулю. Постоянную C_2 определяем из условия прилипания $v = 0$ при $r = R$. Окончательно получаем

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2). \quad (74)$$

Расход жидкости, т. е. ее объем, прошедший через сечение трубы за единицу времени, равен

$$Q = \int_S v ds = 2\pi \int_0^R v r dr = \pi \frac{P_1 - P_2}{8\eta L} R^4.$$

§ 18. Течение Куэтта между вращающимися цилиндрами

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечно длинными соосными цилиндрами, вращающимися вокруг общей оси с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 (рис. 12).

Выберем цилиндрическую систему координат с осями z , r , φ . Поскольку все значения координаты z физически равноправны, то компоненты скорости не могут зависеть от z . Равноправие направлений «вверх» и «вниз» по оси z означает, что осевая компонента скорости v_z равна нулю. Условие несжимаемости жидкости означает, что радиальная компонента скорости v_r также равна нулю. Следовательно, из всех компонент скорости не равна нулю только полярная компонента v_φ , которую для краткости мы будем обозначать v . Эта компонента может зависеть только от расстояния r до оси цилиндров.

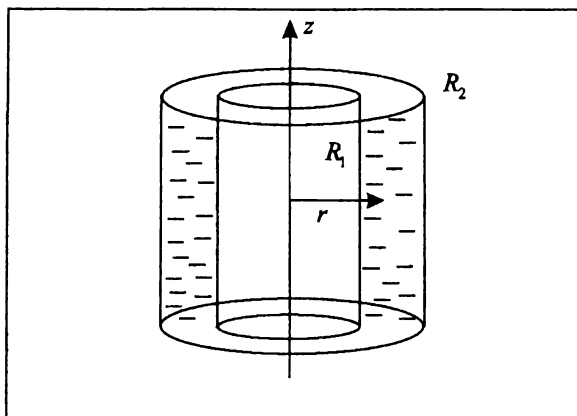


Рис. 12

Уравнение Навье — Стокса в цилиндрических координатах в рассматриваемом случае дает два уравнения:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}; \tag{75}$$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0.$$

Второе из этих уравнений является однородным уравнением Эйлера. Его решение:

$$v = C_1 r + C_2 r^{-1}.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из граничных условий прилипания на внутреннем и внешнем цилиндрах, т. е. при $r = R_{1,2}$ выполняется $v = \Omega_{1,2} R_{1,2}$ соответственно. В результате

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \tag{76}$$

Рассмотрим несколько важных частных случаев.

1. $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. Отсюда $v = \Omega r$, т. е. жидкость вращается как целое вместе с цилиндрами.

2. Внутреннего цилиндра нет ($R_1 = 0$). В этом случае $v = \Omega_2 r$, т. е. жидкость вращается как целое вместе с внешним цилиндром.

3. Нет внешнего цилиндра ($\Omega_2 = 0, R_2 = \infty$). Из уравнения (76) получаем $v = \Omega_1 R_1^2 / r$.

§ 19. Колебательные движения в вязкой жидкости

До сих пор мы рассматривали стационарные течения вязкой жидкости. В качестве примера нестационарного движения рассмотрим неограниченный объем вязкой жидкости, в котором находится твердая пластина, совершающая колебательные движения в своей плоскости (рис. 13).

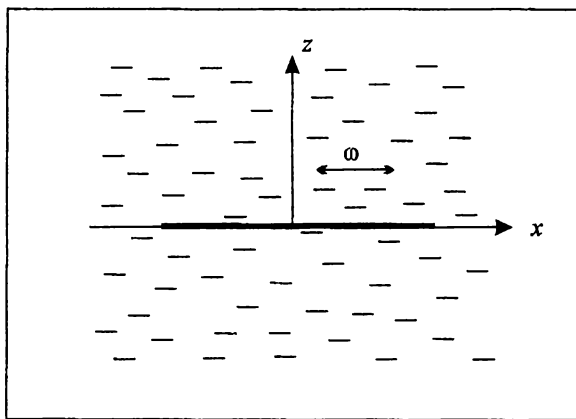


Рис. 13

Пусть скорость u колебаний пластины имеет вид

$$u(t) = u_0 \cos \omega t. \quad (77)$$

Для дальнейшего удобно представить эту скорость в комплексном виде

$$u(t) = u_0 \exp(-i\omega t). \quad (78)$$

Как обычно, чтобы получить физически правильные результаты, в окончательных выражениях мы будем учитывать только вещественные части комплексных переменных.

Из соображений симметрии следует, что все координаты x равноправны, следовательно, компоненты скорости и давления в жидкости не могут зависеть от x . Очевидно, они также не могут зависеть от координаты y , кроме того, в силу равноправия положительных и отрицательных направлений вдоль оси Oy компонента v_y должна быть равна нулю.

Поскольку скорость не зависит от координаты x , в уравнении несжимаемости $\operatorname{div} v = \partial v_x / \partial x + \partial v_z / \partial z = 0$ первая из производных равна нулю. Следовательно, и $\partial v_z / \partial z = 0$, т. е. компонента скорости v_z не зависит от координаты z . Поскольку на пластине, т. е. при $z = 0$, в силу ее непротекания выполняется равенство $v_z = 0$, то и во всем пространстве эта компонента скорости равна нулю. Таким образом, ненулевой оказывается только компонента скорости v_x , которая может зависеть только от координаты z .

Учитывая сказанное, приходим к следующей форме уравнения Навье — Стокса:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (79)$$

Здесь $\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость жидкости; для краткости мы обозначили v_x как v .

Решение уравнения (79) ищем в виде

$$v = u_0 \exp(i(kz - \omega t)), \quad (80)$$

совпадающем с (78) при $z = 0$. Подставляя (80) в (79), получаем

$$k = \frac{1 \pm i}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}.$$

В верхней полуплоскости мы должны здесь выбрать знак «плюс», чтобы не допустить стремления скорости в бесконечность

при удалении от пластины, т. е. при $z \rightarrow \infty$. Таким образом, приходим к следующему выражению для скорости жидкости:

$$v = u_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\right), \quad z > 0.$$

Выделяя реальную часть, получаем

$$v = u_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right). \quad (81)$$

Жидкость распространяется вдоль оси z в виде бегущей волны с экспоненциально затухающей амплитудой скорости. Величина δ является характерной глубиной проникновения колебаний в глубь жидкости — если $z \gg \delta$, то амплитуда скорости жидкости много меньше амплитуды u_0 колебаний пластины.

Используя (81), вычисляем напряжение на пластине:

$$\sigma_x = \eta \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = -u_0 \sqrt{\omega \eta \rho} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

§ 20. Число Рейнольдса

Вернемся теперь к общему уравнению Навье — Стокса (59). Сложность решения этого уравнения состоит в том, что оно одновременно нелинейно и второго порядка по пространственным производным. Мы видели, что, с одной стороны, пренебрежение вязкими членами преобразует уравнение Навье — Стокса в уравнение Эйлера, которое является уравнением первого порядка. Часто вместо решения дифференциального уравнения Эйлера мы можем использовать алгебраическое соотношение Бернулли, что решительно упрощает математическую сторону задачи. Даже если по каким-то причинам уравнение Бернулли не позволяет получить необходимое решение задачи, решать дифференциальное уравнение первого порядка значительно проще, чем второго.

С другой стороны, в задачах, рассмотренных в предыдущих параграфах, соображения симметрии позволили свести нелинейное уравнение Навье — Стокса к линейным уравнениям, имеющим очень простое решение. Однако задачи, обладающие столь высокой степенью симметрии, на практике встречаются редко. Тем не менее ясно, что если каким-либо образом нелинейное уравнение Навье — Стокса удастся свести к линейному уравнению, математическая сторона задачи решительно упрощается, так как решать линейные уравнения значительно проще, чем нелинейные. Оказывается, что существует критерий, который позволяет до решения общего уравнения Навье — Стокса определить, в каком из относительно простых вариантов — в приближении идеальной жидкости или в линейном приближении по скорости — мы можем решать задачу. Сейчас мы с этим критерием познакомимся.

Любое течение происходит в области с какими-то характерными размерами. Этими размерами могут быть ширина канала течения, размер обтекаемого тела и т. д. Обозначим L характерный размер области течения. В большинстве практических задач указать точное значение размера течения в принципе невозможно. Например, невозможно точно указать ширину русла реки, так как форма береговой линии сильно изрезана. Невозможно указать точно размер тела, имеющего неправильную форму. Однако почти всегда этот размер можно оценить по порядку величины. Так, ширина реки может составлять несколько метров или несколько десятков метров; размер обтекаемого ею камня — около метра, а камня, лежащего на дне, — несколько сантиметров или несколько десятков сантиметров. Сейчас нас будут интересовать именно такие оценки, характеризующие величину масштаба течения.

Вместе с тем часто можно указать некоторую характерную скорость задачи, определяющую значения скорости во всей области течения. Например, может быть известна скорость потока на большом расстоянии от обтекаемого тела, скорость течения посередине русла реки, скорость, с которой жидкость втекает в канал течения и т. д. Обозначим эту скорость U . Очень часто точное значение этой скорости указать невозможно, но можно оценить ее по

порядку величины — равна ли она миллиметрам в час или метрам в секунду. Будем считать, что эта масштабная оценка скорости нам известна.

Сравним теперь абсолютные значения нелинейного $\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ и вязкого $\eta\Delta\mathbf{v}$ членов в уравнении Навье — Стокса. В силу определения пространственной производной по порядку величины она равна отношению существенного изменения скорости к расстоянию, на котором это изменение происходит. Но существенное изменение характерной скорости течения означает изменение на величину, сопоставимую с ней, одного с ней порядка. Поскольку именно величина L — пространственный масштаб задачи, то заметное изменение скорости должно происходить на расстояниях порядка L . Например, если река обтекает камень размером около метра, то заметное изменение скорости течения по сравнению со скоростью натекающего потока будет происходить на расстояниях нескольких метров от камня; на расстояниях же сотен метров и километров влияние камня на поток будет практически несущественно. При течении жидкости в канале с шириной около метра изменение скорости на расстояниях порядка миллиметра будет весьма слабым, заметным оно будет на расстояниях, сопоставимых с метром. Следовательно, по порядку величины первая пространственная производная скорости равна U/L , вторая — U/L^2 . Учитывая это, получаем

$$\frac{|\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}|}{|\eta\Delta\mathbf{v}|} \sim \frac{\rho UL}{\eta}.$$

Безразмерная величина $Re = \rho UL/\eta$ называется числом Рейнольдса. Если $Re \gg 1$, вязкий член в уравнении Навье — Стокса мал по сравнению с нелинейным, и им можно пренебречь. В результате приходим к приближению идеальной жидкости. Если же $Re \ll 1$, вязкий член намного больше нелинейного, мы можем пренебречь членом $\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ и использовать линейное приближение уравнения Навье — Стокса, называемое приближением Стокса.

Оценим характерные размеры L течения, при которых выполняется линейное приближение или приближение идеальной жидкости. Допустим, что жидкость — вода, а ее характерная скорость U порядка $0,1$ м/с. Известно, что плотность воды $\rho \approx 10^3$ кг/м³, вязкость $\eta \approx 10^{-3}$ Па · с. Тогда число Рейнольдса $Re \sim 10^5 L$, где L измеряется в метрах. Линейное приближение Стокса оправдано, если $L \ll 10^{-5}$ м, т. е. характерный размер задачи не превосходит нескольких микрон. Следовательно, при течениях жидкостей с вязкостью, сопоставимой с вязкостью воды, приближение Стокса применимо для описания течений жидкости только в очень тонких каналах (капиллярах) или движений мелких, микронных и менее, частиц. К таким частицам относятся частицы суспензий и коллоидных взвесей, капли микроэмульсий, полимерные макромолекулы и их клубки, биологические клетки и одноклеточные организмы и т. д. Область гидродинамики, занимающуюся течением на таких малых масштабах, часто называют микрогидродинамикой. В последнее время она приобретает все большее значение в связи с быстрым развитием теории и практики полимерных материалов, задачами биофизики, фильтрации и очистки жидкости в микропористых материалах и т. д.

При течении воды на масштабах больших, чем сантиметр, практически для всех разумных скоростей ее движения число Re больше единицы, а значит, может быть использовано приближение идеальной жидкости.

Ниже мы обсудим несколько классических результатов, полученных в гидродинамике малых и больших чисел Рейнольдса.

§ 21. Приближение малых чисел Рейнольдса.

Задача Стокса

В этой задаче рассматривается неподвижная твердая сферическая частица радиуса R , обтекаемая потоком вязкой жидкости со скоростью v_0 . Предполагается, что выполняется сильное неравенство $Re = \rho v_0 R / \eta \ll 1$. Требуется найти скорость жидкости вблизи

частицы и силу взаимодействия между потоком вязкой жидкости и частицей.

В приближении Стокса стационарное уравнение (59) имеет вид

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} = 0. \quad (82)$$

Задачу будем решать в сферической системе координат с началом в центре частицы и полярной осью Oz , направленной вдоль скорости \mathbf{v}_0 натекающего потока. Эта система координат показана на рис. 7.

В используемой системе координат задача имеет следующие граничные условия:

$$v_r \rightarrow v_0 \cos \theta, \quad v_\theta \rightarrow -v_0 \sin \theta, \quad v_\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (83)$$

и

$$v_r = v_\theta = v_\varphi = 0, \quad r = R. \quad (84)$$

Первое из этих условий означает, что на бесконечном расстоянии от частицы скорость \mathbf{v} жидкости совпадает со скоростью \mathbf{v}_0 натекающего потока. Второе отражает условия непротекания и прилипания на поверхности частицы.

Уравнения Навье — Стокса и несжимаемости в сферической системе координат приведены в Приложении. Из соображений симметрии следует, что $v_\varphi \equiv 0$. Кроме того, от угла φ никакие физические величины зависеть не могут, поэтому в уравнениях движения должно выполняться условие $\partial / \partial \varphi = 0$. Учитывая это, уравнение Навье — Стокса в сферической системе координат можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - 2 \frac{v_r}{r^2} - 2 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} v_\theta \right); \quad (85)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (86)$$

Уравнение несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ имеет вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0. \quad (87)$$

Граничные условия на бесконечности подсказывают, что решение уравнений (85)–(87) можно искать в виде

$$v_r = f(r) \cos \theta, \quad v_\theta = g(r) \sin \theta, \quad p = \eta \psi(r) \cos \theta.$$

Подставляя эти соотношения в (85)–(87), после преобразований приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4}{r^2} (f + g) &= \frac{d\psi}{dr}; \\ \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{2}{r^2} (f + g) &= -\frac{\psi}{r}; \end{aligned} \quad (88)$$

$$\frac{df}{dr} + \frac{2}{r} (f + g) = 0.$$

Исключая из этих уравнений g и ψ , приходим к следующему уравнению:

$$r^3 \frac{d^4 f}{dr^4} + 8r^2 \frac{d^3 f}{dr^3} + 8r \frac{d^2 f}{dr^2} - 8 \frac{df}{dr} = 0. \quad (89)$$

Соотношение (89) является однородным уравнением Эйлера. Как известно, решение таких уравнений имеет вид $f \sim r^n$. Подставляя его в (88), приходим к уравнению относительно n , которое имеет решения $n = 0, 2, -1, -3$. Таким образом, общее решение (89)

$$f = \frac{b_1}{r^3} + \frac{b_2}{r^2} + b_3 + ar^2. \quad (90)$$

Из граничного условия (83) получаем $a = 0$, $b_3 = v_0$.

Учитывая это, из уравнения (87) получаем

$$g = \frac{b_1}{2r^3} - \frac{b_2}{2r^2} - v_0, \quad \psi = \frac{b_2}{r^2}. \quad (91)$$

Таким образом, компоненты скорости и давление имеют вид

$$\begin{aligned} v_r &= \left(\frac{b_1}{r^3} + \frac{b_2}{r^2} + v_0 \right) \cos \theta; \\ v_\theta &= \left(\frac{b_1}{2r^3} - \frac{b_2}{2r^2} - v_0 \right) \sin \theta; \\ p &= \eta \frac{b_2}{r^2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (92)$$

Постоянные интегрирования b_1, b_2 могут быть определены из граничных условий (84), которые дают

$$\frac{b_1}{R^3} + \frac{b_2}{R^2} + v_0 = 0; \quad (93)$$

$$\frac{b_1}{2R^3} - \frac{b_2}{2R^2} - v_0 = 0.$$

Последняя система уравнений может быть решена элементарно.

На поверхности частицы обозначим элементарную площадку ds . Действующая на нее со стороны жидкости сила в сферической системе координат имеет компоненты

$$dF_r = (-p + \sigma_{rr}) ds, \quad dF_\theta = \sigma_{r\theta} ds.$$

Компоненты тензора напряжений в сферической системе координат даны в Приложении. Компонента этой силы в направлении Oz :

$$dF_z = dF_r \cos \theta - dF_\theta \sin \theta = \left[(-p + \sigma_{rr}) \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta \right] ds.$$

Полная сила, действующая на частицу в направлении оси Oz , равна

$$F_z = \iint [(-p + \sigma_{rr}) \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta] ds.$$

Определив b_1 и b_2 из уравнений (93), используя выражения (92) в формулах для компонент тензора σ , после несложных вычислений получаем

$$F_z = 6\pi\eta Rv_0$$

или в векторном виде

$$\mathbf{F} = 6\pi\eta R\mathbf{v}_0. \quad (94)$$

Соотношение (94) называется формулой Стокса.

Формула Стокса может быть использована и для вычисления силы, действующей на частицу, движущуюся со скоростью \mathbf{v}_0 относительно жидкости. Действительно, перейдя в систему координат, связанную с движущейся частицей, мы возвращаемся к задаче об ее обтекании потоком, скорость которого теперь $-\mathbf{v}_0$. Поэтому на движущуюся частицу действует сила $\mathbf{F} = -6\pi\eta a\mathbf{v}_0$.

Пусть частица массы m движется в вязкой жидкости под действием силы \mathbf{f} . Учитывая эффект присоединенной массы, уравнение движения этой частицы можно записать так:

$$(m + m') \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -6\pi\eta R\mathbf{u} + \mathbf{f}.$$

Скорость частицы мы сейчас обозначаем \mathbf{u} .

В случае постоянной силы \mathbf{f} решение этого уравнения имеет вид

$$\mathbf{u} = \frac{1}{6\pi\eta R} \mathbf{f} + \left(\mathbf{u}_0 - \frac{1}{6\pi\eta R} \mathbf{f} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Здесь \mathbf{u}_0 — начальная скорость частицы; $\tau = (m + m') / (6\pi\eta R)$. Величина τ имеет размерность времени. Ее смысл таков: если

время t много меньше τ , то частица движется со скоростью, близкой к начальной скорости u_0 . Если $t \gg \tau$, она движется практически со стационарной скоростью $f / (6\pi\eta R)$. Следовательно, по порядку величины τ равно интервалу времени, в течение которого происходит изменение скорости частицы от начального значения до стационарного. Оценим величину этого интервала.

Допустим, что несущая жидкость — вода, плотность частицы по порядку величины совпадает с плотностью воды, радиус R частицы около одного микрона. Тогда, учитывая приведенное выше значение вязкости и плотности воды, получаем $\tau \sim 10^{-6}$ с. Это очень маленькое время. Значит, в микрогидродинамике частицы практически всегда движутся со скоростью $u = f / (6\pi\eta R)$, а инерционным членом, пропорциональным ускорению du / dt , в уравнении движения мелкой частицы можно пренебречь. Это очень важное замечание, так как оно позволяет сильно упростить анализ движения микрочастиц в вязких жидкостях.

Аналогично формуле Стокса может быть выведена формула Адамара — Рыбчинского для силы, испытываемой со стороны окружающей жидкости вязкой микрокапелькой. Эта формула имеет вид [4]

$$\mathbf{F} = -2\pi\eta R \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'} \mathbf{u}, \quad (95)$$

где η' — вязкость жидкости капли. Важно отметить, что формула (95) получена в предположении, что силы поверхностного натяжения не дают капле деформироваться при ее движении и она сохраняет сферическую форму. Это значит, что соотношение (95) справедливо только для очень маленьких капелек.

Если $\eta' \gg \eta$, формула Адамара — Рыбчинского переходит в формулу Стокса. Если $\eta' \ll \eta$, формула Адамара — Рыбчинского дает

$$\mathbf{F} = -4\pi\eta a \mathbf{u}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой Стокса (94), видим, что сила сопротивления, действующая на капельку маловязкой жидкости

или пузырек с газом, в полтора раза меньше, чем сила, действующая на твердую частицу, движущуюся с той же скоростью.

§ 22. Эффективная вязкость суспензии

Рассмотрим суспензию, состоящую из жидкости с вязкостью η , в которой взвешены твердые частички. Допустим, что жидкость вовлечена в сдвиговое течение со скоростью, меняющейся по закону $v_z = \dot{\gamma}z$, где $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига. В отсутствие частиц жидкость движется параллельными слоями, направленными вдоль оси x . Трение между этими слоями вызывает эффекты вязкости. Присутствие твердых непроницаемых частиц искажает линии тока жидкости, заставляя их огибать каждую частицу. Легко понять, что это увеличивает общую силу трения, действующую внутри жидкости.

Обозначим $\langle \sigma \rangle$ среднее значение гидродинамического напряжения в среде. Его можно определить или усреднив точное значение $\sigma(\mathbf{r})$ по всему объему суспензии, или же усредняя напряжение в произвольной точке по всем возможным расположениям частиц. В силу эргодической гипотезы оба усреднения должны привести к одному и тому же результату.

Эффективная вязкость η_{ef} суспензии определяется соотношением

$$\langle \sigma \rangle = \eta_{ef} \dot{\gamma}.$$

Оно полностью аналогично соотношению, определяющему вязкость чистой жидкости с заменой истинного напряжения $\sigma(\mathbf{r})$ на среднее $\langle \sigma \rangle$. Таким образом, эффективная вязкость суспензии играет роль истинной вязкости в приближении, когда суспензия рассматривается как обычная однородная жидкость. Это приближение оправдано, когда в любом элементарном объеме суспензии, который еще воспринимается нашими органами чувств или приборами, содержится очень много частиц.

Пусть n — числовая концентрация частиц, т. е. число частиц в единице объема; V — объем частицы. По определению

объемной концентрацией частиц называется величина $\phi = nV$, равная отношению суммарного объема частиц к объему всей суспензии. Поскольку отличие эффективной вязкости η_{ef} от вязкости η чистой жидкости порождается возмущениями, вносимыми частицами в сдвиговый поток жидкости, эффективная вязкость должна зависеть от объемной концентрации ϕ .

Для суспензии твердых сферических частиц с концентрацией ϕ настолько малой, что гидродинамическими и другими взаимодействиями частиц можно пренебречь, эффективная вязкость была строго вычислена А. Эйнштейном в 1906 г. Формула Эйнштейна имеет вид

$$\eta_{ef} = \eta(1 + 2.5\phi). \quad (96)$$

Эта формула получена с помощью решения уравнения Стокса (82) вблизи твердой сферической частицы при условии, что на бесконечности от нее x -компонента скорости жидкости стремится к $\dot{\gamma}z$, остальные компоненты — к нулю. Решение этой задачи, подробности которого можно найти, например, в [5], [6], позволяет найти и затем усреднить компоненты тензора $\sigma(\vec{r})$. Соотношение (96) хорошо согласуется с экспериментами, когда ϕ не превышает двух-трех процентов. При больших концентрациях η_{ef} растет с ϕ быстрее, чем линейно.

Суспензиями являются очень многие реальные жидкости, в том числе те, которые входят в состав живых организмов. Во многих из них концентрация ϕ заметно превосходит три процента. Поэтому теория и практика применения суспензий требует обобщения формулы Эйнштейна с целью расширения области ее применимости по концентрациям. Такая задача была решена Дж. Бэтчелором только в 1972 г. в предположении, что концентрация ϕ не велика и существенным может быть взаимодействие только пары частиц, т. е. вероятность приближения к ним третьей частицы на расстояния, достаточные для взаимодействия, пренебрежимо мала. Оказывается, что в этом случае эффективная вязкость η_{ef} зависит не только от концентрации частиц, но и от скорости сдвигового течения суспензии.

Результаты Бэтчелора имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_{ef} &= \eta(1 + 2.5\varphi + 6.2\varphi^2); \quad \dot{\gamma}a^2 \ll D; \\ \eta_{ef} &= \eta(1 + 2.5\varphi + 5.2\varphi^2), \quad \dot{\gamma}a^2 \gg D, \end{aligned} \quad (97)$$

где D — коэффициент диффузии частицы.

Таким образом, теория Бэтчелора предсказывает уменьшение вязкости суспензии при увеличении скорости ее сдвига. Это предсказание подтверждается многочисленными экспериментами.

Решение Бэтчелора задачи Стокса (82) в предположении о парном гидродинамическом взаимодействии частиц получено математически строго. Однако за математическую строгость приходится платить тем, что формулы (97) находятся в удовлетворительном согласии с экспериментами, только когда концентрация частиц не превышает пяти-десяти процентов. Кроме того, математически теория Бэтчелора намного более сложна, чем теория Эйнштейна. Результаты сравнения формул Эйнштейна и Бэтчелора с результатами экспериментов приведены на рис. 14, где точки отмечают экспериментальные данные, сплошная линия — расчет по формуле Бэтчелора для случая $\dot{\gamma}a^2 \ll D$, прерывистая линия — расчет по формуле Эйнштейна.

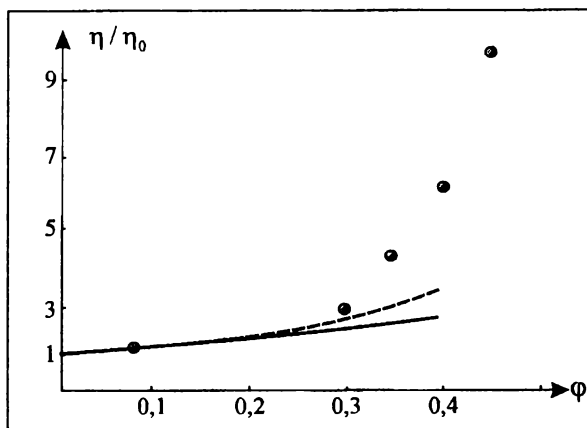


Рис. 14

Продвинуться в область более чем парного взаимодействия частиц при помощи строгих методов гидродинамики не удастся. Поэтому для описания суспензий с концентрацией частиц более чем десять процентов обычно используют различные полуэмпирические и эвристические подходы. Описание некоторых из них можно найти в [6].

§ 23. Большие числа Рейнольдса. Пограничный слой

Как уже отмечалось, при больших числах Рейнольдса вязкий член $\eta \Delta v$ в уравнении Навье — Стокса намного меньше нелинейного инерционного члена $\rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$, при решении гидродинамических задач вязкостью можно пренебречь и использовать приближение идеальной жидкости. Однако действовать в этом случае нужно очень аккуратно.

В гидродинамике идеальной жидкости известен результат, называемый парадоксом Даламбера — Эйлера, в соответствии с которым сила, действующая со стороны однородного стационарного потока на обтекаемое тело, равна нулю. Противоречие этого результата повседневному опыту очевидно. Физическая причина этого противоречия заключается в том, что течение реальной жидкости вблизи твердого тела в силу принципа прилипания сильно тормозится. Поэтому, хотя основное число Рейнольдса, построенное на скорости натекающего потока и размера тела, много больше единицы, вблизи поверхности тела число Рейнольдса, построенное на локальной скорости, может быть порядка единицы или даже меньше. Следовательно, вдали от этого тела приближение идеальной жидкости оправдано, вблизи — нет. Очевидно, чем больше основное число Рейнольдса, тем слабее будут действовать эффекты вязкого торможения и тем ближе к поверхности тела будет находиться граница области, где применимо приближение идеальной жидкости. Таким образом, при больших числах Рейнольдса вблизи тела выделяется достаточно тонкий вязкий пограничный слой, где существенны вязкие

силы, вне этого слоя жидкость течет как идеальная. Именно внутри пограничного слоя формируются силы взаимодействия жидкости и обтекаемого твердого тела. Конечно, толщина пограничного слоя имеет условный характер, скорее можно говорить об области перехода от вязкого течения к идеальному. Поскольку течения при больших числах Рейнольдса чрезвычайно широко распространены в природе и в технологических процессах, концепция пограничного слоя очень важна при решении многих задач гидродинамики.

Чтобы познакомиться с основными идеями метода пограничного слоя, рассмотрим полубесконечную плоскую пластину, обтекаемую параллельным ей потоком жидкости (рис. 15). Обозначим u скорость течения на бесконечном расстоянии от пластины, где течение можно рассматривать как идеальное. Направим ось x вдоль пластины, ось z — перпендикулярно к ней. Оценим толщину $h(x)$ вязкого пограничного слоя.

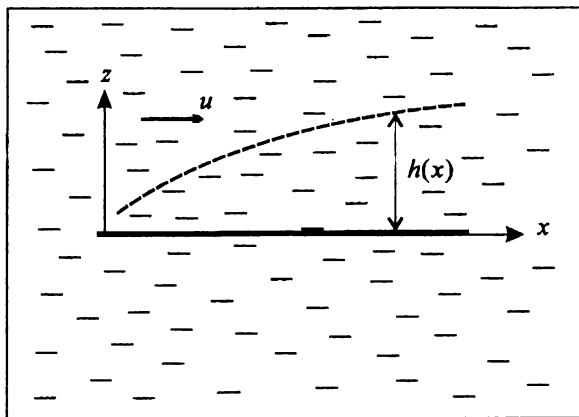


Рис. 15

По определению, глубоко внутри пограничного слоя вязкий член в уравнении Навье — Стокса много больше инерционного члена, высоко над ним — много меньше. Поэтому в качестве границы пограничного слоя можно выбрать такое расстояние $z = h(x)$, где $\eta \Delta v \sim \rho v \nabla v$. Заранее предполагаем, что пограничный слой тонкий, это означает, что его толщина много меньше остальных

размеров и расстояний, характеризующих задачу. В рассматриваемом случае единственной величиной, имеющей размерность расстояния, является координата x . Поэтому предполагаем, что выполняется сильное неравенство $h(x) \ll x$. Чуть позже мы обсудим условия применимости этого приближения.

Из тех же соображений, что были использованы при определении числа Рейнольдса, получаем следующие порядковые оценки:

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial z^2} \sim \frac{v}{x^2} + \frac{v}{h^2} \approx \frac{v}{h^2}.$$

Далее, из уравнения несжимаемости следует, что по порядку величины $v_x/x \sim v_z/h$. Поэтому $(\nabla \cdot \mathbf{v}) \sim v_x/x + v_z/h \sim v_x/x \sim u/x$. Следовательно, по порядку величины инерционный член $(\nabla \cdot \mathbf{v})v \sim uv/x$. На границе вязкого слоя $v \sim u$ и $\eta v/h^2 \sim \rho uv/x$. Отсюда

$$h \sim \sqrt{x \frac{\eta}{\rho u}}.$$

По порядку величины $h/x \sim 1/\sqrt{Re_x}$, где $Re_x = \rho u x / \eta$, а индекс x у Re_x означает, что это число Рейнольдса построено на координате x . Отсюда следует, что толщина пограничного слоя много меньше координаты x , когда $Re_x \gg 1$, т. е. когда координата x достаточно велика. Вблизи края пластины, где значения x малы, происходит формирование пограничного слоя, поэтому основное приближение тонкости этого слоя здесь не выполняется.

Оценим теперь вязкое напряжение на поверхности пластины. Имеем

$$\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \sim \frac{\eta u}{h} \sim \rho \sqrt{\frac{\eta u^3}{x}}. \quad (98)$$

Обратим внимание на то, что сила взаимодействия твердой поверхности с потоком в случае больших чисел Рейнольдса

пропорциональна $u^{3/2}$, в то время как для стоксовских течений при малых числах Рейнольдса эта сила пропорциональна u .

Перейдем теперь к более математически последовательному анализу течения жидкости в пограничном слое. Для этого снова рассмотрим простейший случай задачи о плоской полубесконечной пластине, на которую параллельно ей натекает поток жидкости (рис. 15).

Стационарное уравнение Навье — Стокса и уравнение неразрывности вблизи пластины могут быть записаны в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x; \quad (99)$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z;$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (100)$$

Здесь снова $\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость жидкости.

В направлении оси x единственной величиной, характеризующей расстояние, на котором заметно меняются компоненты скорости и давления, является координата x . В направлении оси z такой величиной является толщина пограничного слоя $h(x)$. Поэтому по порядку величины пространственные производные в (99)–(100) могут быть оценены так:

$$\partial / \partial x \sim 1/x, \quad \partial / \partial z \sim 1/h.$$

Из предыдущего анализа мы знаем, что в развитом пограничном слое его толщина h много меньше координаты x . Поэтому из уравнения неразрывности (100) получаем оценку

$$v_z \sim v_x \frac{h}{x} \ll 1.$$

Во втором уравнении (99) производные по x малы, малой величиной является и скорость v_x . Пренебрегая всеми членами, содержащими производные по x и v_x , получаем $\partial p / \partial z \approx 0$. Это значит, что в первом приближении давление p не зависит от координаты z . Поэтому внутри пограничного слоя давление $p(x)$ можно считать равным давлению $P(x)$ в основной части потока (над пограничным слоем), где течение жидкости может считаться идеальным. В этой части потока из уравнения Бернулли получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -u \frac{du}{dx}.$$

Используя это соотношение в первом уравнении (99) и пренебрегая в нем величиной $\partial^2 v_x / \partial x^2$, приходим к уравнению

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + u \frac{du}{dx}. \quad (101)$$

Это уравнение называется уравнением Прандтля.

Граничные условия к (101) имеют вид

$$v_x = v_z = 0, \quad z = 0; \quad v_x \rightarrow u, \quad v_z \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (102)$$

Пусть пластина обтекается однородным потоком с $u = \text{const}$ (задача Блазиуса). Будем искать решение уравнения Прандтля (101) в виде

$$v_x = \frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial x}, \quad (103)$$

где Ψ — функция, которую предстоит найти. Легко видеть, что при выборе компонент скорости в виде (103) уравнение несжимаемости (100) выполняется автоматически.

Представим

$$\Psi(x, z) = \Psi_1(x) \Psi_2(z).$$

Функция Ψ_2 не может зависеть от размерной координаты z , так как решение задачи не может зависеть от выбора единиц

измерения расстояния. Поскольку в направлении оси z изменение скорости определяется толщиной пограничного слоя h , естественно ожидать, что функция Ψ_2 зависит от отношения z/h . Что касается функции Ψ_1 , учтем, что из (103) следует оценка $\Psi \sim uh(x)$. Будем искать Ψ_1 в виде $\Psi_1 = uh(x) = \sqrt{x\nu v}$. Используемые наводящие соображения позволяют искать Ψ в виде

$$\Psi = \sqrt{x\nu v} f(\xi), \text{ где } \xi = z/h(x).$$

Подставляя это соотношение в уравнение Прандтля (101), приходим к уравнению относительно функции f :

$$f \frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2 \frac{d^3 f}{d\xi^3} = 0. \quad (104)$$

Из граничных условий (102) получаем $f(0) = f'(0) = 0$; $f'(\infty) = 1$, где штрих означает производную по ξ . Уравнение (104) без труда может быть решено численно. Его асимптотическое решение при $\xi \rightarrow 0$ имеет вид $f \approx 0.5\alpha\xi^2$, $\alpha = f''(0) \approx 0.332$.

Сила трения, действующая на единицу площади твердой поверхности:

$$\sigma_{xz} = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z=0} = \alpha \eta \left(\frac{u^3}{x\nu} \right)^{1/2}. \quad (105)$$

Таким образом, полученная ранее оценка (98) по порядку величины действительно совпадает с точным решением, полученным в приближении тонкого пограничного слоя. Значение безразмерного множителя α в рамках простых качественных оценок типа (98), конечно, не может быть получено, поэтому они не могут претендовать на большую точность. Однако они позволяют очень быстро получать грубые «прикидочные» приближения и устанавливать взаимосвязь между различными величинами, характеризующими течение жидкости. С аналогичными подходами мы встретимся в следующей главе, посвященной турбулентным течениям.

Глава 4

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Все течения, которые мы ранее рассматривали, при всем их разнообразии имеют одну общую черту — жидкость в них движется слоями, один слой относительно другого. Такие течения называют ламинарными, т. е. слоистыми. Опыт показывает, что при не очень больших значениях числа Рейнольдса течение жидкости всегда ламинарно. Однако при достаточно больших числах Рейнольдса (как правило, при $Re > 10^3 - 10^4$) происходит срыв в крайне запутанное течение, в котором возникают и исчезают вихри самых разных размеров. Вихри возникают и исчезают без всякой видимой закономерности. Если в такой поток ввести частицу, чтобы, следя за ее движением, отследить потоки в жидкости, то окажется, что движение этой частицы не подчиняется никакой закономерности. Частица случайным, непредвиденным образом движется то в одном направлении, то в другом, причем с разными скоростями. Конечно, при этом она движется вниз по потоку с какой-то средней скоростью, но в остальном ее движение хаотично. Подобные течения, состоящие из случайным, непредсказуемым образом возникающих и разрушающихся вихрей различных масштабов, называются турбулентными. Наглядное представление о турбулентных потоках дает струя, под сильным напором вырывающаяся из шланга, стремительное течение воды в каналах и многие другие быстрые течения. На рис. 16 проиллюстрировано различие между ламинарными (слева) и турбулентными (справа) потоками.

Турбулентные течения часто, чаще, чем ламинарные, встречаются в природе и в технологических процессах. Вместе с тем оказалось, что исследования турбулентных течений встречаются с непреодолимыми математическими сложностями. Строго решить уравнение Навье — Стокса для турбулентного режима не удается.

В этой главе мы познакомимся с некоторыми качественными подходами, которые оказались очень конструктивными при анализе основных закономерностей турбулентных потоков.

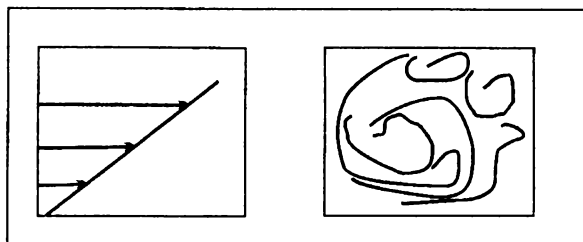


Рис. 16

§ 24. Изотропная однородная турбулентность. Теория Колмогорова — Обухова

Скорость турбулентного потока v можно рассматривать как сумму достаточно плавно меняющейся в пространстве и во времени средней скорости $\langle v \rangle$ и быстро меняющейся скорости пульсаций δv . Под линейным масштабом этих пульсаций мы будем понимать расстояния, на которых δv заметным образом меняется. Опыт показывает, что турбулентный поток состоит из пульсаций различных масштабов. Самые крупные из них будем называть основными.

Обозначим L характерный масштаб задачи, которым может быть ширина канала, размер обтекаемого тела и т. д. Пусть Δv — характерное изменение средней скорости на масштабе L . Например, при течении в канале Δv — скорость в середине канала относительно его стенок. Опыт показывает, что турбулентность возникает, когда число Рейнольдса $Re = L\Delta v / \nu$ очень велико ($\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость). Тот факт, что $Re \gg 1$, означает, что на масштабах L вязкость жидкости не играет существенной роли. Оценим по порядку величины масштаб самых крупных пульсаций. Он должен быть равен величине, имеющей размерность расстояния, построенной из характерных величин задачи, т. е. величин,

входящих в ее условие. Таковыми являются L , ρ , Δv , η . По указанной причине основной масштаб не может зависеть от вязкости η . Из оставшихся величин можно построить только одну величину, имеющую размерность расстояния, — это сам масштаб задачи L . Следовательно, основные пульсации турбулентного потока по порядку величины имеют те же размеры, что и ширина канала течения, размер обтекаемого тела и т. д. Аналогично можно показать, что характерная скорость самых больших пульсаций должна иметь порядок величины Δv .

Чтобы поддерживать любые, в том числе турбулентные течения жидкости, в поток нужно «закачивать» энергию. Иначе движение из-за вязкого трения прекратится. Подкачка энергии может осуществляться за счет работы сил тяжести (например, в водонапорных башнях), за счет работы насосов и других устройств. Обозначим энергию, сообщаемую в единицу времени единице массы жидкости, как ϵ . Эта энергия, прежде всего, идет на возбуждение самых крупномасштабных пульсаций. Но поскольку на масштабах этих пульсаций число Рейнольдса очень большое, вязкость при их движении не играет никакой заметной роли, значит, энергия на самых крупных пульсациях не диссипирует. Эта энергия идет на возбуждение следующих по размерам пульсаций. Если число Рейнольдса, построенное на вторичных пульсациях, также намного больше единицы, закачиваемая энергия передается пульсациям следующего, третьего уровня и т. д. вплоть до самых мелких турбулентных пульсаций, внутри которых, как мы увидим, и происходит вязкая диссипация закачиваемой энергии. Таким образом, приходим к картине передачи энергии без потерь от самых крупных пульсаций к мелким.

Оценим теперь энергию ϵ , которую необходимо закачивать в жидкость, чтобы поддерживать основные течения со скоростью Δv на масштабах L . Величина этой энергии должна иметь размерность Дж/(с · кг) и определяться набором величин, характеризующих эти пульсации. Таковыми являются L , ρ , Δv . Единственной величиной, удовлетворяющей этим условиям, является

$$\varepsilon \sim (\Delta v)^3 / L.$$

Из величин L , ρ , Δv , характеризующих турбулентный поток, можно составить комбинацию $\eta^T = \rho L \Delta v$, имеющую размерность вязкости. Она называется турбулентной вязкостью и, подобно обычной вязкости η , характеризует диссипацию энергии течения, но только не за счет молекулярного трения между слоями жидкости, а за счет возбуждаемых пульсационных течений. Заметим, что $\eta^T = \eta Re$. Поскольку турбулентность возникает, когда $Re \gg 1$, турбулентная вязкость намного больше обычной.

Перейдем теперь к изучению свойств турбулентности на масштабах малых по сравнению с основным масштабом L . Рассмотрим некоторый участок потока, находящийся далеко от стенок канала, размеры которого малы по сравнению с L , но намного больше размера наименьшего турбулентного вихря. Перейдем в систему координат, движущуюся со средней скоростью этого участка. Тогда в этом участке относительно нас жидкость в среднем будет неподвижна, мы будем наблюдать только турбулентные пульсации в нем. Поскольку стенки канала очень далеки от нас, а средняя скорость потока равна нулю, внутри участка для нас нет физически выделенного направления. Таким образом, мы приходим к представлению об изотропной турбулентности. В силу большого расстояния до стенок канала все точки внутри рассматриваемого участка физически равноправны. Поэтому турбулентность внутри него будет однородной.

Рассмотрим турбулентный вихрь с масштабом $\lambda \ll L$ и определим характерную пульсацию скорости δv_λ этого вихря. Для этого из всех величин, характеризующих наш вихрь, построим величину, имеющую размерность скорости. В нашем распоряжении сейчас энергия λ , передаваемая этому вихрю от основного вихря (через промежуточные вихри), масштаб λ и плотность жидкости ρ . Из них можно построить только одну величину размерности скорости

$$\delta v_\lambda \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3} \sim \Delta v (\lambda / L)^{1/3}.$$

Мы можем также оценить изменение δv_τ скорости в данной точке за время τ . Для этого заметим, что благодаря общему движению жидкости со средней скоростью $\langle v \rangle$ в эту точку за время τ перемещается участок жидкости, находящийся выше по течению на расстоянии $l = \langle v \rangle \tau$, и приносит в рассматриваемую точку свою скорость. Соображения размерности дают

$$\delta v_\tau \sim (\varepsilon l)^{1/3} \sim (\varepsilon \langle v \rangle \tau)^{1/3}.$$

Число Рейнольдса на пульсации масштаба λ

$$Re_\lambda = \frac{\delta v_\lambda \lambda}{\nu} \sim Re \left(\frac{\lambda}{L} \right),$$

где $Re = \Delta v L / \nu$ — основное число Рейнольдса. Турбулентное течение сохраняется на масштабах λ , на которых $Re_\lambda \gg 1$. Эта область масштабов называется инерционной областью. Масштаб λ_c , на котором $Re_\lambda \sim 1$, по порядку величины $\lambda_c \sim L \cdot Re^{-4/3}$. На масштабах $\lambda < \lambda_c$ течение почти ламинарное. Именно в таких вихрях происходит вязкая диссипация энергии, закачиваемой в поток. Следовательно, λ_c по порядку величины равен масштабу наименьших турбулентных пульсаций. Он называется колмогоровским масштабом. Видно, что при увеличении основного числа Рейнольдса Re колмогоровский масштаб потока уменьшается.

Пусть в турбулентном потоке на расстоянии λ таком, что $\lambda_c \ll \lambda \ll L$, находятся две частицы. Из-за вовлеченности в хаотические турбулентные пульсации эти частицы будут расходиться подобно тому, как расходятся две броуновские частицы, вовлеченные в тепловое диффузионное движение. Оценим скорость расхождения частиц в турбулентном потоке. Из соображений размерности следует, что по порядку величины

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\varepsilon \lambda)^{1/3}.$$

Заметим, что скорость расхождения частиц растет с расстоянием λ между ними. Такие процессы называются самоускоряющимися.

Интегрируя последнее соотношение, получаем $\lambda \sim \varepsilon^{1/2} t^{3/2}$. Интересно отметить, что в случае броуновских частиц расстояние между ними растет по закону $\lambda \sim t^{1/2}$. Таким образом, из-за турбулентных пульсаций расстояние между частицами растет гораздо быстрее, чем вследствие их броуновского движения.

Итак, простые соображения размерности позволяют получить порядковые оценки важных характеристик однородного турбулентного потока и установить функциональную связь между ними, не прибегая к заранее безнадежным попыткам строгого решения уравнения Навье — Стокса. Этим приемом мы воспользуемся дальше при анализе неоднородного потока, когда нас будут интересовать зависимости средних характеристик течения от координаты.

§ 25. Турбулентное течение вдоль твердой стенки. Логарифмический профиль скорости

Рассмотрим турбулентный поток жидкости вдоль неограниченной твердой поверхности (рис. 17). Средняя скорость потока $\langle v \rangle$ направлена вдоль этой поверхности.

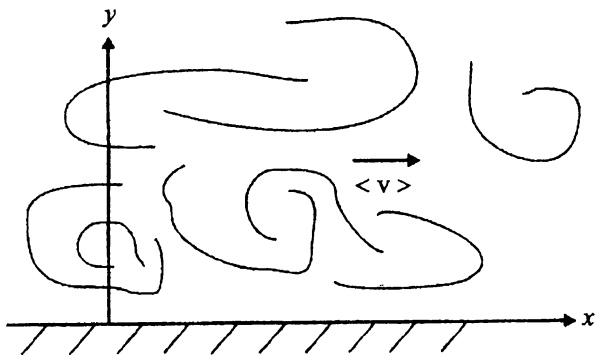


Рис. 17

Обозначим σ силу трения, действующую на единицу площади стенки со стороны потока. Очевидно, эта сила определяется градиентом средней скорости $d \langle v \rangle / dy$ аналогично тому, как вязкое напряжение в ламинарном потоке определяется градиентом скорости этого потока.

Можно поставить вопрос по-другому: каким должен быть профиль скорости, чтобы обеспечить заданное напряжение σ на стенке? Для ответа на этот вопрос попытаемся из величин, характеризующих поток, сконструировать величину, имеющую размерность $d \langle v \rangle / dy$. В нашем распоряжении сейчас следующие величины: плотность ρ , напряжение σ и расстояние y от пластины (напомним, что в силу условия $Re \gg 1$ вязкость жидкости не влияет на структуру турбулентной области). Из перечисленных величин можно составить только одну комбинацию $(\sigma / \rho)^{1/2} / y$ требуемой размерности. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{d \langle v \rangle}{dy} = \frac{v_*}{\kappa y}, \quad v_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

Здесь κ — эмпирическая постоянная Кармана. Из экспериментов $\kappa \approx 0.4$.

Интегрируя последнее соотношение, получаем

$$\langle v \rangle = \frac{v_*}{\kappa} (\ln y + \text{const}). \quad (106)$$

Для определения постоянной интегрирования сейчас нельзя воспользоваться обычным краевым условием $v \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$. Дело в том, что уравнение (105) получено для области развитого турбулентного потока. Между тем вблизи стенки в силу условия прилипания течение сильно тормозится. Локальные значения числа Рейнольдса вблизи стенки могут быть маленькими, поэтому на маленьких расстояниях от нее турбулентное течение должно переходить в ламинарное, к которому соотношение (106) не имеет отношения.

Обозначим y_0 расстояние от стенки, на котором вязкость начинает играть существенную роль и турбулентность начинает исчезать. Составим локальное число Рейнольдса $Re_* = v_* y / \nu$ (в нашем распоряжении сейчас нет другой величины, кроме v_* , имеющей размерность скорости, и, кроме y – величины, имеющей размерность длины). Вязкость начинает заметно проявляться тогда, когда $Re_* \sim 1$. Это позволяет нам получить оценку $y_0 \sim \nu / v_*$.

На расстояниях от стенки $y \ll y_0$ справедливо сильное неравенство $Re \ll 1$ и течение практически ламинарное. Поэтому в этой области выполняется обычное соотношение

$$\sigma = \eta \frac{d \langle v \rangle}{dy} = \rho \nu \frac{d \langle v \rangle}{dy}.$$

Отсюда на малых расстояниях от стенки

$$\langle v \rangle = \frac{v_*^2}{\rho \nu} y. \quad (107)$$

Область, где выполняется это соотношение, называется вязким подслоем. Скорость вязкого подслоя при $y \sim y_0$ должна непрерывно переходить в скорость турбулентного потока. Приравнявая при $y = y_0$ соотношения (106) и (107), получаем $\text{const} = \kappa - \ln y_0$.

Таким образом, в турбулентной области

$$\langle v \rangle = \frac{v_*}{\kappa} \left(\ln \frac{y}{y_0} + \kappa \right).$$

В ядре турбулентного потока, где $y \gg y_0$, это соотношение упрощается:

$$\langle v \rangle = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}. \quad (108)$$

Область течения, где справедливо соотношение (107), называется логарифмическим слоем.

§ 26. Турбулентный пограничный слой

При выводе формулы (108) мы рассматривали течение вдоль бесконечной пластины. При обтекании же реальных тел с конечными размерами логарифмический профиль скорости реализуется лишь на относительно небольшом расстоянии от тела, называемом турбулентным пограничным слоем. Вне этого слоя течение ламинарно и, как и в случае вязкого пограничного слоя, может рассматриваться как идеальное.

Пусть вдоль полубесконечной пластины течет поток со скоростью u (рис. 18). Оценим закон изменения толщины турбулентного пограничного слоя вблизи этой пластины.

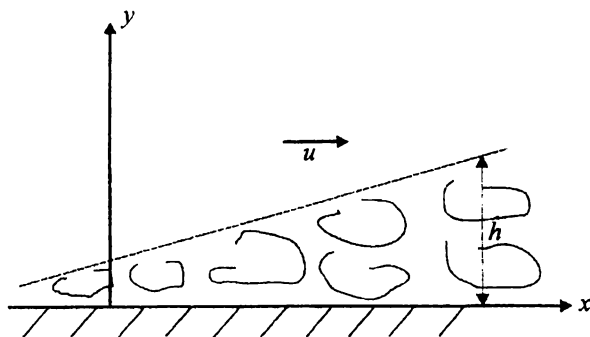


Рис. 18

На границе турбулентного пограничного слоя средняя скорость $\langle v \rangle$ турбулентного потока непрерывно переходит в скорость u . Обозначив h толщину пограничного слоя и учитывая уравнение (108), имеем

$$u \sim \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_* h}{\nu}. \quad (109)$$

Характерная скорость v_* турбулентных пульсаций, вообще говоря, меняется с расстоянием x . Поэтому толщина h пограничного слоя также должна зависеть от x . Для того чтобы определить эту зависимость, оценим производную dh/dx . Для этого учтем, что

при $y = h$ скорость турбулентного течения направлена примерно вдоль поверхности пограничного слоя — это и определяет положение граничной поверхности. Следовательно, на этой границе производная dh/dx должна быть равна тангенсу наклона скорости турбулентного течения. На поверхности пограничного слоя горизонтальная составляющая скорости турбулентного потока по порядку величины должна быть равна скорости u основного потока. Вертикальная же компонента должна быть равна скорости v , пульсаций. Действительно, другой величины, имеющей размерность скорости, для определения вертикальной компоненты скорости в нашем распоряжении сейчас нет. Поэтому по порядку величины $dh/dx \sim v_* / u$, следовательно, $h \sim v_* x / u$. Используя это соотношение в уравнении (108), получаем

$$u \sim \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_*^2 x}{uv}. \quad (110)$$

Уравнение (110) неявно определяет зависимость v_* от x и, следовательно, функцию $h(x)$. Получим теперь явную приближенную оценку этой зависимости. Для этого перепишем (110) в следующем виде:

$$\ln(\kappa Re) \sim \ln Re_* + \ln \left(\ln Re_* \frac{v_*}{u} \right);$$

$$Re = \frac{ux}{\nu}, \quad Re_* = \frac{v_* x}{\nu}.$$

При турбулентных течениях $Re, Re_* \gg 1$, значит, логарифмы от этих чисел Рейнольдса также велики. Поскольку большое число намного больше своего логарифма, вторым членом в правой части последнего соотношения можно пренебречь. Следовательно, в первом приближении $\ln Re_* \sim \ln(\kappa Re)$. Используя это приближение для оценки логарифма в правой части (110), получаем

$$u \sim \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{ux}{\nu}.$$

Отсюда

$$v_* \sim \frac{\kappa u}{\ln(\kappa x / \nu)}. \quad (111)$$

Поскольку логарифм — медленно меняющаяся функция, v_* слабо зависит от x . Возвращаясь к соотношению $h \sim v_* x / u$, приходим к выводу, что толщина турбулентного пограничного слоя почти линейно (чуть медленнее) возрастает с x . Интересно напомнить, что толщина пограничного слоя при ламинарном течении изменяется по закону $h \sim x^{1/2}$.

§ 27. Турбулентное течение в трубах

Рассмотрим турбулентное течение в цилиндрической трубе. Обозначим l длину трубы, a — ее радиус и предположим, что $l \gg a$. Будем считать, что движение поддерживается разностью давлений δp между концами трубы. Поскольку труба очень длинная, турбулентный пограничный слой, расширяясь по мере удаления от входа в трубу, в конце концов сомкнется, и на некотором расстоянии от входа, сопоставимом с радиусом a , турбулентный поток будет заполнять всю трубу. Мы рассмотрим именно эту область. В силу сильного неравенства $l \gg a$ область полностью турбулентного потока будет занимать подавляюще большую часть трубы.

На расстояниях от стенки трубы, много меньших a , поверхность трубы можно считать плоской и для средней скорости течения применять формулу (108) логарфмического турбулентного слоя. Логарифм — очень медленно меняющаяся функция. Это позволяет надеяться на то, что формулу (108) можно «протянуть» вплоть до оси трубы. Эксперименты подтверждают такую возможность. Средняя по сечению трубы скорость турбулентного течения по порядку величины равна скорости U на оси трубы. Эти соображения позволяют при помощи формулы (108) получить оценку

$$U \sim \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{av_*}{\nu}. \quad (112)$$

Здесь мы учли, что $y_0 \sim v/v_*$. Найдем теперь связь между U и средним градиентом давления $\delta p/l$. Для этого заметим, что сила давления, действующая на все сечение потока, равна $\pi a^2 \delta p$. Эта сила идет на преодоление трения жидкости о стенки трубы. Отнесенная к единице площади, эта сила есть напряжение $\sigma = \rho v_*^2$. Поэтому полная сила трения равна $\sigma 2\pi a l = \rho v_*^2 2\pi a l$. Приравнявая оба выражения для силы, действующей на трубу, получаем $\delta p/l \sim 2\rho v_*^2$. Учитывая формулу (112), приходим к системе уравнений

$$U \sim \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{av_*}{v}; \quad (113)$$

$$\delta p/l \sim 2\rho v_*^2$$

относительно U и v_* . Исключая v_* , получаем

$$U \sim \sqrt{\frac{a\delta p}{2\kappa^2\rho l}} \ln \left(\frac{a}{v} \sqrt{\frac{a\delta p}{2\rho l}} \right). \quad (114)$$

Учитывая, что логарифм — очень медленно меняющаяся функция, в первом приближении можно считать, что U зависит от $\delta p/l$ по закону $U \sim \sqrt{\delta p/l}$. Для сравнения напомним, что для ламинарного течения формула Пуазейля дает $U \sim \delta p/l$.

Глава 5 ЗВУК

§ 28. Уравнения линейной акустики

До сих пор мы рассматривали течения жидкостей, пренебрегая их объемной сжимаемостью. Однако существуют явления, в которых эффекты сжимаемости не только важны, но и играют принципиально важную роль. К таким явлениям относится распространение звука. Звук (акустические колебания) — это волны сжатия — разрежения среды, в которой звук распространяется. В ближайших параграфах мы рассмотрим простейшие, но важные с принципиальной точки зрения задачи о распространении звука.

Наша задача сейчас будет состоять в выводе уравнений, описывающих распространение акустических волн. Мы пренебрежем эффектами вязкости и запишем полную систему уравнений гидродинамики идеальной жидкости (см. § 1, 2). Пренебрегая также для простоты внешними силами, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \nabla) \rho - \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}); \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p; \\ p &= p(\rho).\end{aligned}\tag{115}$$

Первое уравнение здесь — уравнение непрерывности, второе — уравнение Эйлера, третье — уравнение состояния среды. Предположим, что скорость \mathbf{v} течения среды в некотором смысле мала (далее уточним, что это значит). Запишем $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$. Здесь ρ_0 и p_0 — плотность и давление в равновесной неподвижной среде, штрихами обозначены добавки, возникающие при

распространении звука. Поскольку скорость среды \mathbf{v} в звуковых волнах предполагается малой, вызванные звуком изменения плотности и давления также должны быть малы, т. е. мы предполагаем, что выполняются сильные неравенства $\rho_0, p_0 \gg |\rho', p'|$.

В линейном приближении по \mathbf{v}, ρ', p' уравнения (115) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= -\rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}); \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'; \end{aligned} \quad (116)$$

$$p = p_0 + c^2 \rho', \quad p_0 = p(\rho_0), \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}.$$

Несколько позже мы покажем, что c – скорость распространения звука.

Перепишем соотношения (116) в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0;$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = 0.$$

Эти уравнения легко могут быть преобразованы к следующим:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p; \quad (117)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{v}. \quad (118)$$

Здесь Δ означает оператор Лапласа, штрих у давления здесь и ниже для простоты опущен. Уравнения (117) – (118) называются волновыми уравнениями и относятся к классу гиперболических

дифференциальных уравнений. Подробно они рассматриваются в стандартных курсах уравнений математической физики. Известно, что такие уравнения описывают распространение волн со скоростью c .

§ 29. Плоские акустические волны

Рассмотрим скалярное уравнение (117). Важным частным случаем решений таких уравнений являются плоские волны, подчиняющиеся закону

$$p(\mathbf{r}, t) = P \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)). \quad (119)$$

Здесь P — амплитуда волны; \mathbf{r} и t — радиус-вектор точки в пространстве, в которой определяется давление, и время его определения; \mathbf{k} — волновой вектор; ω — циклическая частота волновых колебаний, которую мы далее будем называть просто частотой. Из общей теории волновых уравнений известно, что направление вектора \mathbf{k} совпадает с направлением распространения волны, а его абсолютная величина $k = 2\pi / \lambda$, где λ — пространственный период волны, или длина волны. Циклическая частота ω связана с временным периодом T волны аналогичным образом: $\omega = 2\pi / T$.

Выберем декартову систему координат с осью Ox , направленной вдоль вектора \mathbf{k} , т. е. вдоль направления распространения волны. Тогда в экспоненте (119) $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx$. Поскольку давление сейчас не зависит от координат y и z , плоскость, образованная этими осями, является плоскостью одинаковых значений давления p . Таким образом, давление в пространстве изменяется от плоскости к плоскости. Именно поэтому волны, описываемые законом (119), называются плоскими.

Подставляя (119) в (117), после простых преобразований получаем $\omega = ck$. Таким образом, частота волны обратно пропорциональна ее длине.

Из уравнений (116) следует, что если давление подчиняется закону (119), то скорость среды должна описываться аналогичным законом

$$v(\mathbf{r}, t) = V \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) \quad (120)$$

с амплитудой V .

Подставляя (119) и (120) в любое из уравнений (116), приходим к следующему соотношению:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\omega \rho_0} \mathbf{k} p. \quad (121)$$

Таким образом, направление распространения звуковой волны совпадает с направлением колебательных движений частиц в волне. Подобные волны называются продольными. Другой класс волн — поперечные, в которых колебания происходят в направлении, перпендикулярном распространению волны. Примерами поперечных волн являются колебания струны, мембраны, волны на поверхности воды, а также электромагнитные волны.

Известно, что, используя преобразования Фурье, любое решение волновых уравнений можно представить в виде линейной суперпозиции плоских волн. Поэтому основные свойства акустических волн, которые мы нашли в результате анализа плоских волн (связь между волновым вектором и частотой, продольность этих волн), присущи любым, не только плоским, акустическим волнам.

§ 30. Распространение звуковых волн через границу двух сред

Пусть звуковая волна распространяется через плоскую границу двух сред. Частично эта волна отразится от поверхности раздела, частично пройдет через нее и будет распространяться во второй среде. Найдем связь между характеристиками падающей, отраженной и прошедшей волны.

Введем декартову систему координат так, как показано на рис. 19. Ось Oz перпендикулярна межфазной поверхности, ось Ox направлена вдоль границы в плоскости, образованной вектором \mathbf{k} и осью Oz . В этой системе координат давление в падающей волне может быть записано в виде

$$p_0 = P_0 \exp(i(k_{x0}x + k_{z0}z - \omega_0 t)). \quad (122)$$

В аналогичном виде могут быть записаны давления в отраженной и прошедшей волнах.

Индекс 0 в (122) обозначает величины, относящиеся к падающей волне, индексами 1 и 2 мы будем отмечать все, что относится к отраженной и прошедшей волнам, индексами I и II — то, что относится к первой и второй среде соответственно. Падающая, отраженная и прошедшая волны проиллюстрированы на рис. 19.

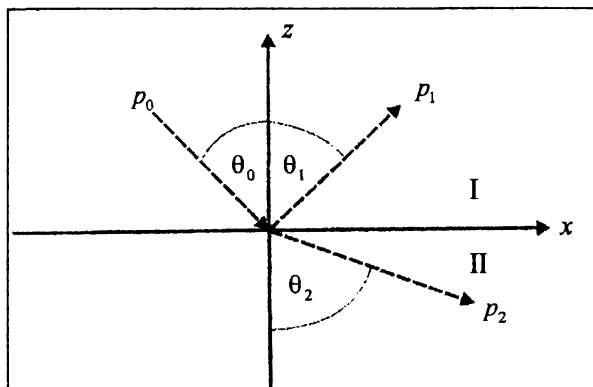


Рис. 19

В силу общих условий гидродинамики (см. § 13) на межфазной поверхности должны выполняться следующие граничные условия:

$$p_0 = p_1 + p_2; \quad (123)$$

$$v_{z0} = v_{z1} + v_{z2}.$$

Напомним, что мы используем приближение идеальной жидкости, к которой условия на непрерывность тангенциальной компоненты скорости не имеют отношения. Вязкие же напряжения в идеальной жидкости по определению равны нулю. Соотношения (123) должны выполняться во все моменты времени. Это означает, что частоты ω во всех трех волнах должны совпадать.

Аналогично, так как граничные условия (123) должны выполняться на всей межфазной поверхности, компоненты k_x , k_y в этих волнах также должны быть одинаковы. Поэтому у величин ω , k_x , k_y индексов, отмечающих их принадлежность к различным волнам, мы писать не будем. Поскольку падающая волна распространяется в плоскости xOz , для нее компонента k_y равна нулю. Следовательно, эта компонента равна нулю и для отраженной и прошедшей волн. Это означает, что последние две волны распространяются в той же плоскости xOz , что и падающая волна. К этому же выводу можно было бы прийти сразу из соображений симметрии задачи.

Поскольку падающая и отраженная волны распространяются в плоскости I, для обеих волн справедливо соотношение

$$k_{0,1}^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора $k_{0,1}^2 = k_x^2 + k_{0,1z}^2$. Учитывая, что вертикальные направления распространения этих волн взаимно противоположны (см. рис. 19), получаем $k_{0z} = -k_{1z}$.

Из рис. 19 очевидно следующее соотношение:

$$\sin \theta_{0,1} = \frac{k_x}{k_1}.$$

Поскольку в падающей и отраженной волнах как k_x , так и k_1 одинаковы, приходим к выводу, что угол падения волны равен углу ее отражения.

Установим теперь связь между углом падения и прохождения (преломления) звуковой волны. Из геометрических соображений легко получаем $k_x = k_1 \sin \theta_0 = k_n \sin \theta_2$. Поскольку $k_{1,н} = \omega / c_{1,н}$, приходим к следующему соотношению:

$$\sin \theta_2 = \frac{c_n}{c_1} \sin \theta_0.$$

Интересная ситуация возникает, когда $c_n > c_1$. В таком случае говорят, что вторая среда акустически более плотная, чем первая.

В этой ситуации существует критический угол падения, такой, что $\sin\theta_c = c_1 / c_2$. Если $\theta_0 > \theta_c$, из уравнения для $\sin\theta_2$ получаем $\sin\theta_2 > 1$, чего не может быть. Это означает, что при $\theta_0 > \theta_c$ звук во вторую среду не попадает. Угол θ_c называется углом полного отражения.

Найдем теперь соотношения между амплитудами падающей P_0 , отраженной P_1 и преломленной P_2 волн. Запишем эти волны в виде

$$\begin{aligned} p_0 &= P_0 \exp(i(k_x x + k_{z_0} z - \omega t)); \\ p_1 &= AP_0 \exp(i(k_x x + k_{z_1} z - \omega t)); \\ p_2 &= BP_0 \exp(i(k_x x + k_{z_2} z - \omega t)). \end{aligned} \quad (124)$$

Коэффициенты A и B называются коэффициентами отражения и прозрачности. Для того, чтобы их найти, подставим (124) в граничные условия (123), учтем, что $k_{1z} = -k_{0z}$, а также соотношения (121) для каждой из трех волн. После несложных преобразований приходим к системе линейных уравнений относительно A и B , решения которой имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{m \cos\theta_0 - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}}{m \cos\theta_0 + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}}; \\ B &= \frac{2m \cos\theta_0}{m \cos\theta_0 + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_0}}; \end{aligned} \quad (125)$$

$$m = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad n = \frac{c_1}{c_2}.$$

Соотношения (124) называются формулами Френеля.

При $\sin^2\theta_0 > n^2$ эти формулы не имеют физического смысла. Мы уже видели, что в этом случае прошедшая волна отсутствует.

Пусть $m \cos \theta_0 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} = 0$. В этом случае отсутствует отраженная волна. Угол θ_0 , удовлетворяющий последнему уравнению, называется углом полной прозрачности.

§ 31. Формулы Доплера

Распространение звука в движущихся средах обладает рядом интересных особенностей. Мы рассмотрим простейшее, но очень распространенное явление, называемое эффектом Доплера.

Рассмотрим однородный поток некоторой среды (жидкости, газа и т. д.), движущейся со скоростью u . Введем две декартовы системы координат — лабораторную (x, y, z) , относительно которой поток движется, и сопутствующую (x', y', z') , движущуюся вместе с потоком (рис. 20).

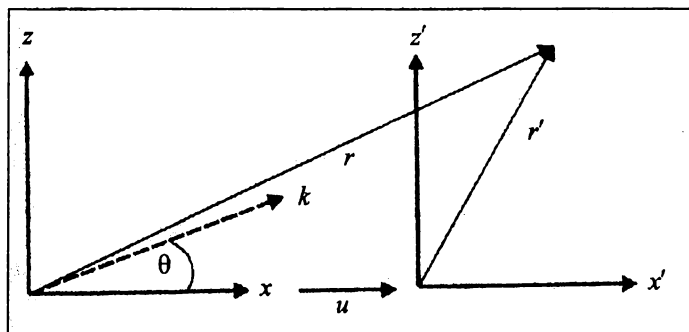


Рис. 20

В сопутствующей системе координат среда неподвижна, и звуковая волна в ней имеет обычный вид

$$p(\mathbf{r}, t) = P \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - kct)). \quad (126)$$

Радиус-вектор \mathbf{r} некоторой точки, определенный в лабораторной системе координат, связан с ее же радиусом-вектором \mathbf{r}' в сопутствующей системе координат так:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t.$$

Учитывая это, перепишем (126) в следующем виде:

$$p(\mathbf{r}, t) = P \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - (kc + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})t)). \quad (127)$$

Но в выражении для волны коэффициент при t по свойству комплексной экспоненты есть частота ω . Значит, в лабораторной системе координат

$$\omega = kc + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}. \quad (128)$$

Рассмотрим два следствия этой формулы. Предположим вначале, что источник звука неподвижен относительно среды, а наблюдатель, воспринимающий звук, движется в ней со скоростью \mathbf{u} . Обозначим ω_0 частоту звука относительно источника. Поскольку источник неподвижен относительно среды, выполняется стандартное условие $\omega_0 = kc$. Поскольку в системе координат, связанной с наблюдателем, среда движется со скоростью $-\mathbf{u}$, для частоты звука ω , которую он воспринимает, из уравнения (128) получаем

$$\omega = kc - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{\omega_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \right) = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right), \quad (129)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{u} . В частности, если наблюдатель движется вдоль луча ($\theta = 0$), то $\omega = \omega_0 (1 - u/c)$.

Если он движется навстречу лучу ($\theta = \pi$), то $\omega = \omega_0 (1 + u/c)$.

В первом случае наблюдатель будет воспринимать звук в более низкой относительно излучателя тональности, во втором — в более высокой.

Пусть теперь наблюдатель неподвижен относительно среды, а источник движется. Снова обозначим частоту звука относительно источника ω_0 , относительно наблюдателя — ω . Поскольку сейчас наблюдатель неподвижен относительно среды, в которой распространяется звук, то $\omega = kc$. В системе координат, связанной с источником, среда движется со скоростью $-\mathbf{u}$. Поэтому сейчас

$$\omega_0 = kc - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \omega \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right).$$

Отсюда

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}. \quad (130)$$

Если источник звука движется к наблюдателю ($\theta = 0$), то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c}},$$

и последний воспринимает звук в более высокой тональности, чем он излучается. Если источник удаляется от наблюдателя, то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{u}{c}}$$

и звук воспринимается наблюдателем как более низкий, чем излучается источником.

Глава 6

ВЯЗКОУПРУГОСТЬ

В § 11 мы отмечали, что уравнение (57) является общим для всех движущихся сред. Природа конкретного вещества проявляется в связи между тензором напряжений σ и скоростью его деформационного движения. Соотношение (58) является простейшим вариантом такой связи, справедливым для ситуаций, когда изменение скорости деформации вызывает мгновенное изменение напряжения и наоборот. Мы уже отмечали, что на самом деле реакция вещества на изменение скорости течения или напряжения происходит не мгновенно, а в течение какого-то конечного времени. Если это время пренебрежимо мало, реакцию можно считать мгновенной. Если нет — необходимо учитывать эффекты запаздывания. Вещества, для которых существенны эти эффекты запаздывания, называются вязкоупругими. Вязкоупругими средами являются многие полимеры, особенно — биополимеры, коллоидные среды, микроэмульсии и многие другие вещества. В этой главе на простейших примерах мы обсудим типичные свойства вязкоупругих сред.

Будем рассматривать изотропную среду, движущуюся в направлении оси x по закону $v_x(t) = \dot{\gamma}(t)z$. По-прежнему будем предполагать, что связь между напряжением σ и скоростью деформации $\dot{\gamma}$ линейна. Для ньютоновских жидкостей имеем $\sigma(t) = \eta\dot{\gamma}(t)$. В случае, если связь между изменениями σ и $\dot{\gamma}$ не мгновенна, общее линейное соотношение между этими величинами может быть записано так:

$$\int_{-\infty}^t G_\sigma(t-t')\sigma(t')dt' = \int_{-\infty}^t G_\gamma(t-t')\dot{\gamma}(t')dt. \quad (131)$$

Явный вид интегральных операторов G_σ и G_γ определяется молекулярной структурой вещества. Он может быть определен

из экспериментов или теоретически, методами статистической физики. Здесь мы будем полагать, что этот вид известен.

Применим к (131) экспоненциальные преобразования Фурье по времени. Используя известную теорему о свертке, получаем

$$G_{\sigma}(\omega)\sigma_{\omega} = G_{\gamma}(\omega)\dot{\gamma}_{\omega}. \quad (132)$$

Здесь ω — фурье-частота. Опыт показывает, что для многих веществ $G_{\sigma}(\omega)$ и $G_{\gamma}(\omega)$ с хорошей точностью могут быть представлены в виде $G_{\sigma,\gamma}(\omega) = G_{\sigma,\gamma}^0 (1 + i\omega\tau_{\sigma,\gamma})$, где i — мнимая единица; $G_{\sigma,\lambda}^0 = \text{const}$, а $\tau_{\sigma,\gamma}$ — некоторые величины, имеющие размерность времени. Их содержательный смысл мы обсудим несколько позже. Используя эти соотношения для $G_{\sigma,\gamma}(\omega)$, уравнение (132) можно записать в виде

$$(1 + i\omega\tau_{\sigma})\sigma_{\omega} = \eta(1 + i\omega\tau_{\gamma})\dot{\gamma}_{\omega},$$

где $\eta = G_{\gamma}^0 / G_{\sigma}^0$.

Применяя к последнему соотношению обратные преобразования Фурье, получаем

$$\left(1 + \tau_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma = \eta \left(1 + \tau_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}\right)\dot{\gamma}. \quad (133)$$

Уравнение (133) называется уравнением Олдройда. В частном случае, когда $\tau_{\gamma} = 0$, оно называется уравнением Максвелла. В случае $\tau_{\sigma} = 0$ — уравнением Фойгхта.

Рассмотрим подробнее уравнение Максвелла

$$\left(1 + \tau_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma = \eta\dot{\gamma}. \quad (134)$$

Предположим, что до некоторого начального момента времени среда покоилась, следовательно, выполнялось условие $\sigma, \dot{\gamma} = 0$. Пусть в момент времени $t = 0$ скорость сдвига скачком возрастает от нуля до постоянного значения $\dot{\gamma}$. Интегрируя (134), получаем

$$\sigma(t) = \eta \dot{\gamma} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_{\sigma}} \right) \right). \quad (135)$$

Если $t \ll \tau_{\sigma}$, напряжение линейно возрастает со временем. Если $t \gg \tau_{\sigma}$, напряжение практически равно стационарному значению $\eta \dot{\gamma}$, характерному для ньютоновских жидкостей.

Линейное изменение напряжения со временем при постоянной скорости деформации присуще упругим средам. Действительно, рассмотрим, например, кусок упругой резины или обычную пружинку. Для них выполняется закон Гука $f = k \delta l$, где δl — относительное удлинение; f — сила упругости; k — коэффициент упругости вещества. Допустим, что резинка (пружинка) удлиняется с постоянной скоростью v , т. е. $\delta l = vt$. Тогда из закона Гука $f = kvt$. Поскольку по определению напряжение является силой, действующей на единичную площадку внутри вещества, получаем, что напряжение σ пропорционально времени t . Аналогично деформации растяжения линейная зависимость напряжения от времени выполняется и при сдвиговой деформации.

Таким образом, τ_{σ} является временем, в течение которого происходит переход от упругого к жидкому поведению среды. Это время называется временем релаксации напряжения. Вещества, описываемые уравнением Максвелла (134), на малых после деформации временах ведут себя как упругие среды, на больших — как вязкие, что и оправдывает их название — вязкоупругие среды.

Аналогично соотношению (135) уравнение Фойгхта

$$\sigma = \eta \left(1 + \tau_{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\gamma} \quad (136)$$

при ступенчатом изменении напряжения σ приводит к следующей зависимости скорости деформации от времени:

$$\dot{\gamma} = \frac{\sigma}{\eta} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_{\gamma}} \right) \right).$$

Отсюда видно, что τ_γ является временем, в течение которого происходит изменение скорости деформации от нуля до стационарного значения σ/η , характерного для ньютоновских жидкостей. Это время называется в р е м е н е м р е т а р д а ц и и.

Вернемся теперь к уравнению Олдройда (133). Предположим, что в начальный момент времени жидкость покоилась, затем в течение короткого отрезка времени, т. е. почти ступенчато, напряжение возрастает от нуля до постоянного значения σ . В течение этого промежутка времени производная $\partial\sigma/\partial t$ имеет большое значение. Если время релаксации τ_σ не слишком мало, то левая и, следовательно, правая части (133) должны быть большими. Большое значение правой части не может сразу достигаться за счет скорости сдвига $\dot{\gamma}$, так как в начальный момент времени эта скорость была равна нулю, а бесконечные ускорения невозможны. Поэтому большая величина правой части (133) должна обеспечиваться большим значением комплекса $\tau_\gamma \partial\dot{\gamma}/\partial t$. При не очень больших временах ретардации τ_γ большой должна быть производная $\partial\dot{\gamma}/\partial t$. Поэтому за короткий отрезок времени скорость сдвига может сильно возрасти и стать больше, чем стационарное ньютоновское значение σ/η . После достижения напряжением стационарного значения σ производная $\partial\sigma/\partial t$ становится равной нулю и скорость сдвига $\dot{\gamma}$ релаксирует к своему стационарному значению, но уже не снизу, как это предсказывается моделью Фойгхта, а сверху. Таким образом, при соответствующих соотношениях между временами релаксации и ретардации скорость сдвига жидкости Олдройда, в отличие от жидкости Фойгхта, с течением времени меняется немонотонно с весьма острым максимумом. Это явление в английской литературе получило название *overshoot*. Некоторые результаты расчетов динамики изменения $\dot{\gamma}(t)$ при различных соотношениях между τ_σ и τ_γ показаны на рис. 21.

Аналогичный вид, но при обратных соотношениях между временами τ_σ и τ_γ , имеет динамика изменения напряжения жидкости Олдройда при ступенчатом изменении скорости ее сдвига.

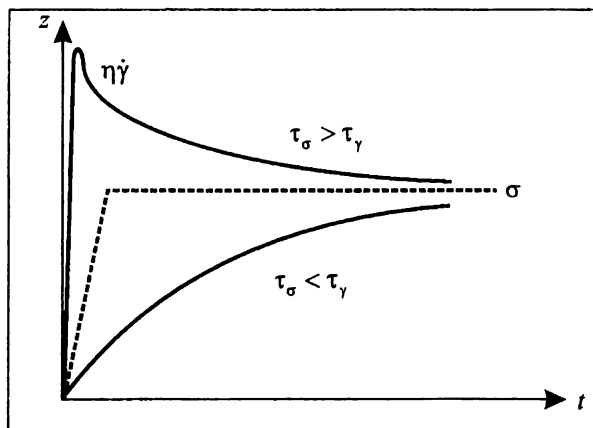


Рис. 21

Обсудим теперь физическую природу вязкоупругости. Для простоты допустим, что градиент скорости течения среды $\dot{\gamma}$ в начальный момент времени меняется от нуля до какого-то конечного значения. Сформировавшееся вязкое напряжение σ определяется молекулярной структурой вещества, соответствующей этому конечному значению τ_σ . Ясно, что структура взаимного расположения молекул в состоянии покоя и при деформационном течении различна. Для перестройки молекулярной структуры требуется какое-то время. Именно это время и определяет время релаксации τ_σ напряжения к своему стационарному значению. В случае простых жидкостей типа воды это время, как правило, очень маленькое, для большинства ситуаций практически неощутимое, поэтому можно считать, что после изменения $\dot{\gamma}$ напряжение меняется практически мгновенно. Однако для полимерных сред и других сложных жидкостей время перестройки внутренней структуры может быть весьма существенным. Поэтому такие среды обладают выраженными вязкоупругими свойствами.

Аналогично требуется некоторое время, чтобы сформировалась структура молекул, отвечающая скорости их течения под действием заданного механического напряжения. Это время

определяет время ретардации τ_γ . Снова для низкомолекулярных жидкостей это время, как правило, очень мало, и им можно пренебречь. Для жидкостей же со сложной молекулярной и надмолекулярной структурой (полимеры, суспензии, коллоиды, мицеллярные растворы и т. д.) время перестройки их внутренней структуры может быть весьма существенным.

В рамках феноменологической теории вязкоупругости характерные времена τ_σ и τ_γ , как и стационарная вязкость η , считаются известными из экспериментов. Теоретическое определение этих величин является задачей статистической физики.

Список использованной литературы

1. *Зубарев А. Ю., Исакова Л. Ю.* Физические основы математической биологии. Екатеринбург, 2008.
2. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред. М., 1982.
3. *Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С.* Введение в синергетику. М., 1990.
4. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., 1959.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М., 1986.
6. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., 1976.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения течения ньютоновской несжимаемой жидкости в криволинейных координатах

Цилиндрическая система координат r, φ, z

Компоненты тензора вязких напряжений имеют вид:

$$\sigma_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial t}, \quad \sigma_{r\varphi} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right);$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), \quad \sigma_{\varphi z} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right);$$

$$\sigma_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \sigma_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right).$$

Три компоненты уравнения Навье — Стокса:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right);$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right);$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z;$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Операторы $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ и Δ определяются следующим образом:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) f = v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Уравнение несжимаемости:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Сферическая система координат r, φ, θ

Компоненты тензора вязких напряжений имеют вид:

$$\sigma_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r};$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right);$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right);$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right);$$

$$\sigma_{\varphi r} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right).$$

Уравнения Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ & + v \left[\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]; \\ & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\theta - \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ & + v \left[\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]; \\ & \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\varphi + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ & + v \left[\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} \right]. \end{aligned}$$

Операторы $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ и Δ имеют вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) f &= v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}; \\ \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Уравнение несжимаемости:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ	3
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ	4
§ 1. Уравнение неразрывности в гидродинамике	4
Глава 2. ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ	8
§ 2. Уравнение Эйлера.....	8
§ 3. Гидростатика.....	12
§ 4. Теорема Бернулли.....	16
§ 5. Теорема Томсона (Кельвина).....	19
§ 6. Применение теорем Бернулли и Томсона в гидродинамике идеальной жидкости.....	22
§ 7. Потенциальное течение идеальной жидкости. Парадокс Даламбера — Эйлера.....	24
§ 8. Нестационарное течение идеальной жидкости. Интеграл Коши — Лагранжа.....	30
§ 9. Ускоренное движение частицы в идеальной жидкости. Закон присоединенной массы	31
§ 10. Гравитационные волны в идеальной жидкости.....	34
Глава 3. ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ	38
§ 11. Тензор вязких напряжений	38
§ 12. Уравнение Навье — Стокса	41
§ 13. Граничные условия к уравнению Навье — Стокса	44
§ 14. Плоское течение Куэтта	47
§ 15. Плоское течение Пуазейля.....	49
§ 16. Течение жидкости по наклонной плоскости.....	50
§ 17. Течение Пуазейля в цилиндрической трубе.....	52
§ 18. Течение Куэтта между вращающимися цилиндрами.....	54
§ 19. Колебательные движения в вязкой жидкости	56
§ 20. Число Рейнольдса.....	58
§ 21. Приближение малых чисел Рейнольдса. Задача Стокса.....	61
§ 22. Эффективная вязкость суспензии	67
§ 23. Большие числа Рейнольдса. Пограничный слой	70

Глава 4. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ	76
§ 24. Изотропная однородная турбулентность. Теория Колмогорова — Обухова	77
§ 25. Турбулентное течение вдоль твердой стенки. Логарифмический профиль скорости	81
§ 26. Турбулентный пограничный слой	84
§ 27. Турбулентное течение в трубах	86
Глава 5. ЗВУК	88
§ 28. Уравнения линейной акустики	88
§ 29. Плоские акустические волны	90
§ 30. Распространение звуковых волн через границу двух сред	91
§ 31. Формулы Доплера	95
Глава 6. ВЯЗКОУПРУГОСТЬ	98
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	104
ПРИЛОЖЕНИЕ	105

Учебное издание

Александров Дмитрий Валерьевич
Зубарев Андрей Юрьевич
Искакова Лариса Юрьевна

ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКУ

Учебное пособие

Зав. редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *С. Г. Галинова*
Корректор *С. Г. Галинова*
Компьютерная верстка *Н. Ю. Михайлов*

План выпуска 2012 г. Подписано в печать 20.12.2012.
Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 5,6. Усл. печ. л. 6,51. Тираж 200 экз. Заказ № 2397.

Издательство Уральского университета
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ.
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13.
Факс: +7 (343) 358-93-06.
E-mail: press.info@usu.ru

Для заметок
