# Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Von A. Einstein.

Während die allgemeine Relativitätstheorie bei den meisten theoretischen Physikern und Mathematikern Zustimmung gefunden hat, erheben doch fast alle Fachgenossen gegen meine Formulierung des Impuls-Energiesatzes Einspruch[1]. Da ich der Überzeugung bin, mit dieser Formulierung das Richtige getroffen zu haben, will ich im folgenden meinen Standpunkt in dieser Frage mit der erforderlichen Ausführlichkeit vertreten[2].

## § 1. Formulierung des Satzes und gegen dieselbe erhobene Einwände.

Nach dem Energiesatze gibt es eine in bestimmter Weise definierte, über die Teile eines jeden (isolierten) Systems erstreckte Summe, die Energie, welche ihren Wert im Laufe der Zeit nicht ändert, welcher Art auch die Prozesse sein mögen, welche das System durchmacht. Der Satz ist also ursprünglich, ebenso wie der aus drei ähnlichen Erhaltungsgleichungen gebildete Impulssatz, ein Integralgesetz. Die spezielle Relativitätstheorie hat die vier Erhaltungssätze zu einem einheitlichen Differentialgesetze verschmolzen, welches das Verschwinden der Divergenz des »Energietensors« ausdrückt. Dies Differentialgesetz ist jenen aus der Erfahrung abstrahierten Integralsätzen gleichwertig; hierin allein liegt seine Bedeutung.

Die vom formalen Standpunkte aus sinngemäße Übertragung dieses Gesetzes auf die allgemeine Relativitätstheorie ist die Gleichung

[1] Vgl. z. B. E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. 19, 1918, 4—7; H. Bauer, Phys. Zeitschr. 19, 1918, S. 163. Dagegen teilt G. Nordström meine Auffassung des Energiesatzes; vgl. dessen jüngst erschienene Abhandlung »Jets over de massa van een stoffelijkstelsel ....« Amsterdamer Akademie-Ber. Deel XXVI, 1917, S. 1093—1108.

[2] Um nicht Bekanntes wiederholen zu müssen, stütze ich mich auf die Ergebnisse meiner Darstellung der Grundlagen der Theorie, wie ich sie in der Arbeit »Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie« (diese Berichte, XLII, 1916, S. 1111—1116) gegeben habe: Gleichungen jener Arbeit sind hier mit »l. c.« bezeichnet.

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0,$$

deren linke Seite eine Divergenz im Sinne des absoluten Differentialkalküls ist. $\frac{1}{\sqrt{-g}} \mathfrak{T}_\sigma^\nu$ ist ein Tensor, der Energietensor der »Materie«. Vom physikalischen Standpunkt aus kann diese Gleichung nicht als vollwertiges Äquivalent für die Erhaltungssätze des Impulses und der Energie angesehen werden, weil ihr nicht Integralgleichungen entsprechen, die als Erhaltungssätze des Impulses und der Energie gedeutet werden können. Auf das Planetensystem angewendet, kann beispielsweise aus diesen Gleichungen niemals geschlossen werden, daß die Planeten sich nicht unbegrenzt von der Sonne entfernen können, und daß der Schwerpunkt des ganzen Systems relativ zu den Fixsternen in Ruhe (bzw. gleichförmiger Translationsbewegung) verharren müsse. Die Erfahrung nötigt uns offenbar, ein Differentialgesetz zu suchen, das Integralgesetzen der Erhaltung des Impulses und der Energie äquivalent ist. Dies leistet, wie im nachfolgenden ausführlicher gezeigt werden wird, die von mir bewiesene Gleichung (21 l. c.)

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} = 0, \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ aus der HAMILTONschen Gesamtfunktion gemäß der Formel (19 und 20 l. c.)

$$\mathfrak{U}_\sigma^\nu = \mathfrak{T}_\sigma^\nu + \mathfrak{t}_\sigma^\nu = -\left( \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g_\alpha^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathfrak{H}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \right) \tag{2}$$

zu berechnen ist.

Diese Formulierung stößt bei den Fachgenossen deshalb auf Widerstand, weil $(\mathfrak{U}_\sigma^\nu)$ und $(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)$ keine Tensoren sind, während sie erwarten, daß alle für die Physik bedeutsamen Größen sich als Skalare und Tensorkomponenten auffassen lassen müssen. Sie betonen ferner[1], daß man es in der Hand hat, die $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ in gewissen Fällen durch geeignete Koordinatenwahl sämtlich zum Verschwinden zu bringen oder ihnen von null verschiedene Werte zu erteilen. Es wird daher an der Bedeutung der Gleichung (1) ziemlich allgemein gezweifelt.

Demgegenüber will ich im folgenden dartun, daß durch Gleichung (1) der Begriff der Energie und des Impulses ebenso straff festgelegt wird, wie wir es von der klassischen Mechanik her zu fordern gewohnt sind. Energie und Impuls eines abgeschlossenen Systems sind, unabhängig von der Koordinatenwahl, vollkommen bestimmt, wenn nur der Be-

[1] Vgl. die oben zitierte Arbeit von H. BAUER.

wegungszustand des Systems (als Ganzes betrachtet) relativ zum Koordinatensystem gegeben ist; es ist also beispielsweise die »Ruheenergie« eines beliebigen abgeschlossenen Systems von der Koordinatenwahl unabhängig. Der im folgenden gegebene Beweis beruht im wesentlichen nur darauf, daß die Gleichung (1) für jede beliebige Wahl der Koordinaten gilt.

## § 2. Inwiefern sind Energie und Impuls von der Wahl der Koordinaten unabhängig?

Wir wählen im folgenden das Koordinatensystem so, daß alle Linienelemente $(0, 0, 0, dx_4)$ zeitartig, alle Linienelemente $(dx_1, dx_2, dx_3, 0)$ raumartig sind; dann können wir die vierte Koordinate in gewissem Sinne als »die Zeit« bezeichnen.

Damit wir von der Energie bzw. dem Impuls eines Systems reden können, muß außerhalb eines gewissen Bereiches $B$ die Dichte der Energie und des Impulses verschwinden. Dies wird im allgemeinen nur dann der Fall sein, wenn außerhalb $B$ die $g_{\mu\nu}$ konstant sind, d. h. wenn das betrachtete System in einen »Galileischen Raum« eingebettet ist, und wir zur Beschreibung der Umgebung des Systems uns »Galileischer Koordinaten« bedienen. Der Bereich $B$ ist in der Zeitrichtung unendlich ausgedehnt, d. h. er schneidet jede Hyperfläche $x_4 =$ konst. Seine Schnittfigur mit einer Hyperfläche $x_4 =$ konst. ist stets allseitig begrenzt. Innerhalb des Bereiches $B$ gibt es kein »Galileisches Koordinatensystem«; die Wahl der Koordinaten innerhalb $B$ unterliegt vielmehr der einzigen Beschränkung; daß sich letztere stetig an die Koordinaten außerhalb $B$ anschließen müssen. Wir werden im folgenden mehrere derartige Koordinatensysteme betrachten, die alle außerhalb $B$ miteinander übereinstimmen.

Die Integralsätze der Erhaltung des Impulses und der Energie ergeben sich aus (1) durch Integration dieser Gleichung nach $x_1, x_2, x_3$ über den Bereich $B$. Da an den Grenzen dieses Bereiches alle $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ verschwinden, erhält man

$$\frac{d}{dx_4}\left[\int \mathfrak{U}_\sigma^4 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3\right] = 0 . \tag{3}$$

Diese 4 Gleichungen drücken nach meiner Ansicht den Impulssatz ($\sigma = 1$ bis 3) und den Energiesatz ($\sigma = 4$) aus. Wir wollen das in (3) auftretende Integral mit $J_\sigma$ bezeichnen. Ich behaupte nun, daß die $J_\sigma$ unabhängig sind von der Koordinatenwahl für alle Koordinatensysteme, welche außerhalb $B$ mit einem und demselben galileischen System übereinstimmen.

Durch Integration von (3) zwischen $x_4 = t_1$ und $x_4 = t_2$ erhält man zunächst für ein Koordinatensystem $K$:

$$(J_\sigma)_1 = (J_\sigma)_2 . \tag{4}$$

Führen wir außerdem ein zweites (gestrichenes) Koordinatensystem $K'$ ein, das außerhalb $B$ mit $K$ übereinstimmt, so haben wir ebenso für die Schnitte $x_4' = t_1'$ und $x_4' = t_2'$

$$(J_\sigma')_1 = (J_\sigma')_2 .$$

Wir konstruieren nun ein drittes Koordinatensystem $K''$ von der betrachteten Art, welches ohne Verletzung der Stetigkeit in der Umgebung des Schnittes $x_4 = t_1$ mit $K$ und in der Umgebung des Schnittes $x_4' = t_2'$ mit $K'$ zusammenfällt. Die Integration von (3) zwischen diesen Schnitten liefert dann

$$(J_\sigma)_1 = (J_\sigma')_2 . \tag{5}$$

Aus den drei Beziehungen folgt, daß $J_\sigma$ von der Koordinatenwahl innerhalb $B$ unabhängig ist. Die $J_\sigma$ ändern sich also lediglich mit der Wahl des Galileischen Koordinatensystems außerhalb $B$. Wir erschöpfen also alle Möglichkeiten, wenn wir so vorgehen: wir setzen zunächst ein Koordinatensystem fest, welches außerhalb $B$ galileisch, innerhalb $B$ willkürlich gewählt ist, und bedienen uns dann nur aller derjenigen Koordinatensysteme, welche mit diesem durch Lorentz-Transformationen verknüpft sind. Bezüglich dieser Gruppe haben die $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ Tensorcharakter, und es läßt sich nach den Methoden der speziellen Relativitätstheorie dartun, daß $(J_\sigma)$ ein Viervektor ist. Wie in der speziellen Relativitätstheorie läßt sich also setzen

$$J_\sigma = E_0 \frac{dx_\sigma}{ds} , \tag{6}$$

wobei $E_0$ die »Ruheenergie«, $\frac{dx_\sigma}{ds}$ die Geschwindigkeit (Vierervektor) des Systems (als Ganzes) bezeichnet. $E_0$ ist gleich der Komponente $J_4$ bei solcher Koordinatenwahl, das $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ ist.

Trotz der freien Koordinatenwahl innerhalb $B$ ist also die Ruheenergie bzw. die Masse des Systems eine scharf definierte Größe, die von der Koordinatenwahl nicht abhängt. Dies ist um so bemerkenswerter, als wegen des mangelnden Tensorcharakters von $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ den Komponenten der Energiedichte keinerlei invariante Interpretation gegeben werden kann.

Denkt man sich beispielsweise das Innere von $B$ ebenfalls leer, so hat das so definierte System zwar eine verschwindende Gesamtenergie; aber man hat es durch Wahl der Koordinaten im Innern von $B$ in der Hand, die verschiedensten Energieverteilungen herbeizuführen, die allerdings alle das Integral o liefern. So kommen wir entgegen unseren heutigen Denkgewohnheiten dazu, einem Integral mehr Realitätswert zuzumessen als seinen Differentialen.

## § 3. Der Integralsatz für die geschlossene Welt.

Um überhaupt von einem isolierten System reden zu können, mußten wir im Vorigen annehmen, daß sich das metrische Kontinuum in hinreichender Entfernung vom System galileisch verhalte, eine Voraussetzung, die für Gebiete von der Größenordnung des Planetensystems sicherlich mit großer Annäherung erfüllt ist. In einer voriges Jahr publizierten Arbeit[1] konnte ich aber zeigen, daß der Auffassung, daß die Welt sich im Großen annähernd galileisch (bzw. euklidisch) verhalte, vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie erhebliche Bedenken entgegenstehen; die Welt müßte nämlich in diesem Falle wesentlich leer sein, d. h. je größere Bereiche man ins Auge faßt, desto weniger könnte die mittlere Dichte der darin befindlichen ponderabeln Materie von Null abweichen. Es erweist sich als wahrscheinlich, daß die Welt in räumlicher Beziehung im Großen quasisphärisch (bzw. quasi-elliptisch) ist. Diese Auffassung verlangt die Zufügung eines Gliedes (des »$\lambda$-Gliedes«) in den Feldgleichungen der Gravitation. Nach den so ergänzten Gleichungen kann ein materiefreier Teil der Welt sich nicht »galileisch« verhalten. Es wird also dann nicht möglich sein, die Koordinaten so zu wählen, wie es der § 2 verlangt, und zwar um so weniger, je ausgedehnter das ins Auge gefaßte System ist[2].

In diesem Falle einer endlichen Welt ergibt sich aber dafür die interessante Frage, ob die Erhaltungssätze für die Welt als Ganzes zutreffen, die doch unbedingt als »isoliertes System« zu betrachten ist. Wir können uns dabei auf die Auffassung der Welt als einer quasi-sphärischen beschränken, da aus ihr die quasi-elliptische durch Hinzufügung einer Symmetriebedingung hervorgeht.

In der quasi-sphärischen Welt gilt ebenfalls der Erhaltungssatz (1), (2). Aber es gibt kein Koordinatensystem, das sich überall regulär verhält. In einer exakt sphärischen Welt hat das Quadrat des invarianten Sinnenelements bei Benutzung von Polarkoordinaten den Wert

$$ds^2 = dt^2 - R^2 [d\vartheta_1^2 + \sin^2\vartheta_1 \, d\vartheta_2^2 + \sin^2\vartheta_1 \sin^2\vartheta_2 \, d\vartheta_3^2]. \qquad (7)$$

[1] Diese Berichte 1917 VI, S. 142.

[2] Für die in der Astronomie sich darbietenden Räume dürfte die im § 2 vertretene Auffassung ausreichen, so daß das Folgende nur von rein spekulativem Interesse ist.

Dabei läuft

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \vartheta_1 \text{ zwischen } 0 \text{ und } \pi \\ x_2 = \vartheta_2 \text{ zwischen } 0 \text{ und } \pi \\ x_3 = \vartheta_3 \text{ zwischen } 0 \text{ und } 2\pi \\ x_4 = t \text{ zwischen } -\infty \text{ und } +\infty \end{array}\right\} . \tag{8}$$

An den Grenzen für $\vartheta_1$ und für $\vartheta_2$ verhält sich das Koordinatensystem singulär; denn es schneiden sich in derartigen Punkten mehr als 4 ($\infty$ viele) Koordinatenlinien, und es verschwindet dort die Determinante $|g_{\mu\nu}|$. Eine analoge Koordinatenwahl wird (bei entsprechend abgeändertem Ausdruck für $ds^2$) auch im Falle der quasi-sphärischen Welt möglich sein; auch hier werden wir auf die genannten singulären Orte des Koordinatensystems zu achten haben. In allen Punkten außerhalb der singulären Stellen des Koordinatensystems werden die Gleichungen (1) gelten. Es wird auch ein Übergang zu den Integralgesetzen (3) möglich sein, wenn das Integral über $\frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^3}{\partial x_3}$ verschwindet (»Randbedingung«). Dies wäre z. B. der Fall, wenn

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{U}_1^1, \mathfrak{U}_2^1, \mathfrak{U}_3^1, \mathfrak{U}_4^1 \text{ für } \vartheta_1 = 0 \text{ und } \vartheta_1 = \pi \\ \mathfrak{U}_1^2, \mathfrak{U}_2^2, \mathfrak{U}_3^2, \mathfrak{U}_4^2 \text{ für } \vartheta_2 = 0 \text{ und } \vartheta_2 = \pi \end{array}\right\} \tag{9}$$

verschwinden[1]. Denn es verschwinden bei der Integration von (1) über $x_1$, $x_2$, $x_3$ über den ganzen geschlossenen Raum in diesem Falle alle Anteile der linken Seite, außer denjenigen, welche von dem Gliede $\frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^4}{\partial x_4}$ herkommen.

Wie oben, läßt sich auch hier beweisen, daß die $J_\sigma$ für alle Koordinatensysteme den gleichen Wert haben, welche durch stetige Deformation aus dem zuerst benutzten zu gewinnen sind. Der Beweis ist dem oben geführten analog, nur daß die Bedingung für die Koordinatenwahl außerhalb $B$ hier kein Analogon hat. Für eine geschlossene Welt vom sphärischen Zusammenhangstypus sind die $J_\sigma$ unabhängig von der besonderen Koordinatenwahl, wenn nur die »Randbedingung« gewahrt bleibt[2].

Es läßt sich dann beweisen, daß die »Impuls-Komponenten« $J_1$, $J_2$, $J_3$ für eine derartige geschlossene Welt notwendig verschwinden.

---

[1] Näheres hierüber folgt in § 4.

[2] Exakt liefert hier die Überlegung des § 2 folgendes Ergebnis. Sind $K$ und $K'$ zwei Koordinatensysteme, $x_4 =$ konst. und $x_4' =$ konst. zwei zu diesen gehörige räumliche Schnitte, $J_\sigma$ und $J_\sigma'$ die zu diesen gehörigen Werte von $J_\sigma$, so sind $J_\sigma$ und $J_\sigma'$ stets einander gleich, wenn es zwischen $K$ und $K'$ einen die »Randbedingung« wahrenden stetigen Übergang gibt.

Wir führen den Beweis zunächst für $J_1$ und $J_2$. Unten ist bewiesen, daß man durch stetige Änderung vom Koordinatensystem $K$ aus zu einem neuen $K'$ gelangen kann, das mit $K$ durch die Substitution verbunden ist

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1' &= \pi - \vartheta_1 \\ \vartheta_2' &= \pi - \vartheta_2 \\ \vartheta_3' &= \vartheta_3 \\ t' &= t \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Dies ist eine lineare Transformation. Da die $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ für lineare Substitutionen Tensorcharakter haben, so folgt aus (10), daß überall gilt

$$\mathfrak{U}_1^{4\prime} = -\mathfrak{U}_1^4,$$
$$\mathfrak{U}_2^{4\prime} = -\mathfrak{U}_2^4.$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß auch

$$\left.\begin{aligned} J_1' &= -J_1 \\ J_2' &= -J_2 \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Anderseits muß aber, weil $K$ in $K'$ durch stetige Änderung übergeführt werden kann, auf Grund unseres allgemeinen Invarianzsatzes für die $J_\sigma$ gelten

$$\left.\begin{aligned} J_1' &= J_1 \\ J_2' &= J_2 \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt das Verschwinden von $J_1$ und $J_2$.

Analog läßt sich das Verschwinden von $J_1$ und $J_3$ daraus beweisen, daß durch stetige Änderung der Koordinaten ein System $K'$ eingeführt werden kann, welches mit $K$ durch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1' &= \pi - \vartheta_1 \\ \vartheta_2' &= \vartheta_2 \\ \vartheta_3' &= 2\pi - \vartheta_3 \\ t' &= t \end{aligned}\right\}. \tag{10a}$$

verbunden ist.

Wir haben nun nur noch den Beweis dafür zu erbringen, daß die Substitutionen (10) und (10a) durch stetige Änderung des Koordinatensystems erzeugt werden können. Dabei können wir uns auf die Betrachtung der dreidimensionalen Sphäre beschränken, die $t$-Koordinate beiseite lassend.

In einem vierdimensionalen euklidischen Raume der $u_\nu$ genüge die betrachtete Sphäre der Gleichung

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = R^2.$$

Mit diesen kartesischen Koordinaten im vierdimensionalen euklidischen Raume verknüpfen wir sphärische Koordinaten nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R\cos\vartheta_1 \\ u_2 &= R\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 \\ u_3 &= R\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3 \\ u_4 &= R\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\vartheta_3 \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Drehen wir das $u_\nu$-System um den Mittelpunkt der Sphäre, so dreht sich das $\vartheta_\nu$-System mit, und es gelten die Beziehungen (13) auch für die Systeme in der gedrehten Lage.

Es lassen sich in einem euklidischen Raume stets Drehungen des kartesischen Koordinatensystems ausführen, bei welchen sich nur zwei der Achsen bewegen, die übrigen aber fest bleiben. Unter diesen Drehungen sind solche um den Winkel $\pi$ ausgezeichnet, welchen Substitutionen vom Typus

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= -u_1 \\ u_2' &= -u_2 \\ u_3' &= \phantom{-}u_3 \\ u_4' &= \phantom{-}u_4 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

entsprechen. Eine solche ist auch die Substitution

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= -u_1 \\ u_2' &= \phantom{-}u_2 \\ u_3' &= \phantom{-}u_3 \\ u_4' &= -u_4 \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

(14) bzw. (15) liefern mit Rücksicht auf (13) und die entsprechenden Gleichungen für das gestrichene System unmittelbar die Substitutionen (10) bzw. (10a), welche demnach durch stetige Änderungen des $\vartheta_\nu$-Systems erzeugt werden können.

Damit ist der verlangte Beweis geleistet (abgesehen vom Nachweis für die Erfüllung der »Randbedingung«). Für die geschlossene Welt als Ganzes verschwindet der Impuls; der Wert der Gesamtenergie ist von der Zeit und von der Koordinatenwahl unabhängig.

## § 4. Die Energie der sphärischen Welt.

Wir wollen nun die $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ für eine sphärische Welt mit gleichförmig verteilter, inkohärenter Materie berechnen, hauptsächlich um zu prüfen, ob wenigstens in diesem einfachsten Falle die Bedingung (9) erfüllt ist, an welche die Ergebnisse des vorigen Paragraphen geknüpft sind. Wir haben zu setzen

$$\mathfrak{U}_\sigma^\nu = \mathfrak{T}_\sigma^\nu + (\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_1 + (\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_2, \tag{16}$$

wobei die $(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_1$ dem $\lambda$-Gliede entsprechen, die $(\mathfrak{t}_\sigma^\nu)_2$ Funktionen der $g_\sigma^{\mu\nu}$ sind. Die Formel

$$\mathfrak{T}_\sigma^\nu = \sqrt{-g}\, g_{\sigma\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \rho_0$$

liefert in unserem Falle für die $\mathfrak{T}_\sigma^\nu$ die Komponenten

$$(\mathfrak{T}_\sigma^\nu =) \left. \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_0\sqrt{-g} \end{matrix} \right\}. \qquad (17)$$

Aus den Feldgleichungen der Gravitation mit Berücksichtigung des $\lambda$-Gliedes erhält man ferner ohne Schwierigkeit für die $(t_{\sigma\nu})_1$

$$\varkappa (t_\sigma^\nu)_1 = \left. \begin{matrix} \lambda\sqrt{-g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\sqrt{-g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\sqrt{-g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\sqrt{-g} \end{matrix} \right\}. \qquad (18)$$

Beträchtlich mühsamer ist die Berechnung der $(t_\sigma^\nu)_2$. Sie stützt sich am besten auf Gleichung (20 l. c.). Es erweist sich aber als praktisch, statt der $g^{\mu\nu}$ und $g_\sigma^{\mu\nu}$ die Größen $g^{\mu\nu}\sqrt{-g} = \mathfrak{g}^{\mu\nu}$ und $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = \mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}$ einzuführen, wie dies H. A. Lorentz gelegentlich getan hat. Es gelten dann die Beziehungen

$$t_\sigma^\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^* \delta_\sigma^\alpha - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}} \mathfrak{g}_\sigma^{\mu\nu}\right) \qquad (19)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial \mathfrak{g}_\alpha^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\varkappa}\left(\begin{Bmatrix} \mu\beta \\ \beta \end{Bmatrix} \delta_\nu^\alpha + \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \beta \end{Bmatrix} \delta_\mu^\alpha\right) - \frac{1}{\varkappa}\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix}, \qquad (19a)$$

deren letzte sich leicht aus einer Rechnung folgern läßt, die H. Weyl im § 28 seines demnächst bei J. Springer erscheinenden Buches »Raum. Zeit. Materie« gegeben hat. Aus (18), (18a) und (7) folgen die Ausdrücke für $(t_\sigma^\nu)_2$

$$\frac{\varkappa}{R}(t_\sigma^\nu)_2 =$$

$$\left. \begin{matrix} \cos^2\vartheta_1 \sin\vartheta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 & -\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos^2\vartheta_1\sin\vartheta_2 \end{matrix} \right\}, \qquad (20)$$

wobei jede Kolonne zu einem Wert von $\nu$, jede Zeile zu einem Wert von $\sigma$ gehört. Aus (17), (18) und (20) folgen mit Rücksicht auf (16) die Energiekomponenten $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$.

Die Bedingungen (9) sind für alle Komponenten außer für die Komponente $\mathfrak{U}_1^1$ erfüllt; diese Ausnahme liegt darin, daß $(\mathfrak{t}_1^1)_2$ für $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_1 = \pi$ nicht verschwindet. Trotzdem verschwindet, wie man sieht, das Integral

$$\int_{\vartheta_1=0}^{\vartheta_1=\pi} \frac{\partial \mathfrak{U}_1^1}{\partial \vartheta_1} d\vartheta_1,$$

weil $\cos^2\vartheta_1 \sin\vartheta_2$ für $\vartheta_1 = 0$ und $\vartheta_1 = \pi$ denselben Wert hat. In dem von uns betrachteten speziellen Falle verschwindet also in der Tat die Integrale

$$\int \left( \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^3}{\partial x_3} \right) dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

wie wir es im vorigen Paragraphen vorausgesetzt haben. Daß dies bei jeder geschlossenen Welt vom Zusammenhangstypus der sphärischen bei Verwendung von Polarkoordinaten der hier benutzten Art der Fall sei, ist wohl wahrscheinlich, bedürfte aber noch eines besonderen Beweises.

Die Gesamtenergie $J_4$ der von uns betrachteten statischen Welt ist

$$J_4 = \int \left( \rho_0 \sqrt{-g} + \frac{\lambda}{\varkappa} \sqrt{-g} - \frac{R}{\varkappa} \cos^2\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \right) d\vartheta_1\, d\vartheta_2\, d\vartheta_3.$$

Dabei ist

$$\sqrt{-g} = R^3 \sin^2\vartheta_1 \sin\vartheta_2$$

$$\text{und}^1 \ \frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{\rho_0}{2} = \frac{1}{R^2\varkappa}.$$

Ist $V = 2\pi^2 R^3$ das Volumen der sphärischen Welt, so ergibt sich also

$$J_4 = \rho_0 V. \tag{21}$$

Die Gravitation liefert also in diesem Falle zu der Gesamtenergie keinen Beitrag.

## § 5. Die schwere Masse eines abgeschlossenen Systems.

Wir wenden uns nun noch einmal der Betrachtung des Falles zu, daß ein System in einen »galileischen Raum« eingebettet ist, vernachlässigen also das »$\lambda$-Glied« in den Feldgleichungen wieder. Wir haben in § 3 bewiesen, daß das Integral $J_\sigma$ eines in einem Galileischen Raum frei schwebenden Systems sich wie ein Vierervektor transformiert. Dies bedeutet, daß die von uns als Energie gedeutete Größe auch die Rolle der trägen Masse spielt, in Übereinstimmung mit der speziellen Relativitätstheorie.

[1] Vgl. A. EINSTEIN, Diese Sitzungsber. 1917, VI, S. 142—152. Gleichung (14).

Wir wollen aber nun auch zeigen, daß die schwere Masse des betrachteten Gesamtsystems mit derjenigen Größe übereinstimmt, die wir als die Energie des Systems aufgefaßt haben. In der Umgebung des Koordinatenursprungs befinde sich ein beliebiges physikalisches System, welches, als Ganzes betrachtet, relativ zum Koordinatensystem in Ruhe sei. Dieses System erzeugt dann ein Gravitationsfeld, welches im Räumlich-Unendlichen mit beliebiger Genauigkeit durch das eines Massenpunktes ersetzt werden kann. Man hat also im Unendlichen

$$g_{44} = 1 - \frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r}, \tag{22}$$

wobei $M$ eine Konstante ist, die wir als die schwere Masse des Systems zu bezeichnen haben werden; diese Konstante haben wir zu bestimmen.

Im ganzen Raume gilt exakt die Feldgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu 4}_\alpha} g^{\mu 4}\right) = -\mathfrak{U}^4_4. \tag{23}$$

Bezeichnen wir die Klammergröße auf der linken Seite mit $\mathfrak{J}_\alpha$, und integrieren wir über das Innere einer im Räumlich-Unendlichen gelegenen das System einschließenden Fläche $S$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int(\mathfrak{J}_1 \cos nx_1 + \mathfrak{J}_2 \cos nx_2 + \mathfrak{J}_3 \cos nx_3)\,dS + \frac{d}{dx_4}\int \mathfrak{J}_4\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \\ = -\int \mathfrak{U}^4_4\,dx_1\,dx_2\,dx_3\end{aligned} \tag{24}$$

Da das erste Integral der linken Seite sowie die die negative Energie des Gesamtsystems ausdrückende rechte Seite sich mit der Zeit nicht ändern, muß dies auch beim zweiten Gliede der linken Seite der Fall sein; es muß also verschwinden, da das Integral sich nicht beständig in dem gleichen Sinne ändern kann. Die Ausrechnung des Flächenintegrals auf der linken Seite bietet keine Schwierigkeit, weil man sich im Räumlich-Unendlichen auf die erste Näherung beschränken darf; sie liefert mit Rücksicht auf (22) den Wert $-M$. Es ist also

$$M = \int \mathfrak{U}^4_4\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = J_4 = E_0. \tag{25}$$

Dies Ergebnis bedeutet deshalb eine Stütze für unsere Auffassung des Energiesatzes, weil die oben gegebene Definition von $M$ von unserer Energiedefinition unabhängig ist. Die schwere Masse eines Systems ist gleich der Größe, welche wir oben als seine Energie bezeichnet haben.

Nachtrag zur Korrektur. Weitere Überlegungen über den Gegenstand haben mich zu der Auffassung geführt, daß für die Formulierung des Impuls-Energiesatzes einer quasi-sphärischen (aber nicht einer quasi-elliptischen) Welt, Koordinaten vorzuziehen sind, welche man durch stereographische Projektion der Sphäre auf eine (dreidimensionale) Hyperebene erhält. Im Falle der gleichmäßigen Verteilung der Materie ist dann

$$ds^2 = dx_4^2 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\left[1 + \frac{1}{4R^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right]^2}.$$

Die scheinbare, der Koordinatenwahl zuzuschreibende Singularität ist dann ins Räumlich-Unendliche verlegt[1]. Die Formulierung erscheint natürlicher wegen der Symmetrie in den drei räumlichen Koordinaten. Der Beweis für das Verschwinden des Gesamtimpulses ist noch einfacher als der im Text gegebene, da man unmittelbar sieht, daß die räumlichen Substitutionen

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 & \qquad x_1' &= x_1 \\ x_2' &= -x_2 & \quad \text{und} \quad x_2' &= -x_2 \\ x_3' &= x_3 & \qquad x_3' &= -x_3 \end{aligned}$$

durch stetige Koordinatenänderung (Drehung des Koordinatensystems) zu erzielen sind, woraus wie im Texte die Gleichungen

$$\begin{aligned} J_1' &= -J_1 \\ J_2' &= -J_2 \\ J_3' &= -J_3 \end{aligned}$$

folgen.

Durch Ausrechnung der $\mathfrak{U}_\sigma^\nu$ habe ich mich überzeugt, daß das Flächenintegral über eine den Koordinatenursprung einschließende »unendlich ferne« Kugel[2], welches bei der räumlichen Integration der ersten drei Glieder des Ausdruckes

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^3}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathfrak{U}_\sigma^4}{\partial x_4}$$

auftritt, verschwindet (wenigstens in dem Spezialfall gleichmäßig verteilter Materie). Auch bei dieser Koordinatenwahl trägt das Gravitationsfeld in diesem Falle nichts zur Energie der Welt bei.

[1] Der Fall der quasi-sphärischen Welt, d. h. ungleichmäßig verteilter, irgendwie bewegter Materie wird insofern eine analoge Koordinatenwahl zulassen, als die der Koordinatenwahl entsprechende scheinbare Singularität des Feldes nach $x_1 = x_2 = x_3 = \pm\infty$ verlegt und von dem gleichen Charakter wird wie im Falle gleichmäßig verteilter ruhender Materie.

[2] D. h. über eine Fläche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ mit unendlich großem $R$.

Ausgegeben am 30. Mai.