Διακριτά Μαθηματικά

Λογική, Αποδείξεις, Σύνολα, Συναρτήσεις

Διακριτά Μαθηματικά: πυλώνες

Image source: http://www.patrasevents.gr

Διακριτά Μαθηματικά: λογική

Διακριτά Μαθηματικά: αποδείξεις

Διακριτά Μαθηματικά: σύνολα

Διακριτά Μαθηματικά: συναρτήσεις

Λογική

δήλωση → σημασία

κανόνες λογικής:
διαχωρίζουν τα επιχειρήματα
σε έγκυρα και άκυρα

Η λογική έχει καθοριστική σημασία στην κατανόηση της (μαθηματικής) σκέψης

Πρόταση

- Μια φράση που δηλώνει κάτι
  - Μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής αλλά όχι και τα δύο μαζί
- Αποτελεί βασικό κατασκευαστικό στοιχείο της λογικής

Πρόταση

- Μια φράση που δηλώνει κάτι
  - Μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής αλλά όχι και τα δύο μαζί
- Αποτελεί βασικό κατασκευαστικό στοιχείο της λογικής

Η Αθήνα είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας ΑΛΗΘΗΣ (TRUE – T)
Η Πάτρα είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας ΨΕΥΔΗΣ (FALSE – F)
1+1=2 ΑΛΗΘΗΣ (TRUE – T)
2+2=3 ΨΕΥΔΗΣ (FALSE – F)

Πρόταση

- Μια φράση που δηλώνει κάτι
  - Μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής αλλά όχι και τα δύο μαζί
- Αποτελεί βασικό κατασκευαστικό στοιχείο της λογικής

Η Αθήνα είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας ΑΛΗΘΗΣ (TRUE – T)
Η Πάτρα είναι πρωτεύουσα της Ελλάδας ΨΕΥΔΗΣ (FALSE – F)
1+1=2 ΑΛΗΘΗΣ (TRUE – T)
2+2=3 ΨΕΥΔΗΣ (FALSE – F)

Τι ώρα είναι;
Διάβασέ το με προσοχή.
x+1=2
x+y=z

Οι φράσεις αυτές ΔΕΝ είναι προτάσεις γιατί είτε δεν δηλώνουν κάτι είτε αυτό που δηλώνουν δεν είναι αληθές ή ψευδές

Προτασιακή λογική
Προτασιακός λογισμός

- Τομέας της λογικής που ασχολείται με προτάσεις
- Αναπτύχθηκε συστηματικά από τον Αριστοτέλη
- Μαθηματικές φράσεις ή σύνθετες προτάσεις κατασκευάζονται από συνδυασμό μιας ή περισσότερων προτάσεων με χρήση λογικών τελεστών
  - George Boole [1854]: *Οι νόμοι της σκέψης*

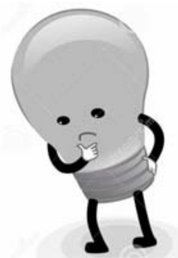
Image source: http://fineartamerica.com

Λογικοί τελεστές: άρνηση

- Έστω p πρόταση
- Άρνηση της p: η δήλωση «Δεν πρόκειται για την περίπτωση ότι η p»
  - Συμβολίζεται $\neg$p: όχι p
  - Π.χ.,
    - p: Σήμερα είναι Παρασκευή
    - $\neg$p: Σήμερα ΔΕΝ είναι Παρασκευή

Πίνακας αλήθειας για την άρνηση πρότασης	
p	$\neg$p
T	F
F	T

Λογικοί τελεστές: άρνηση

¬  = 

¬  = 

Λογικοί τελεστές: σύζευξη

- Έστω p και q προτάσεις
- Σύζευξη των p και q: πρόταση που είναι αληθής όταν και η p και η q είναι αληθείς, διαφορετικά είναι ψευδής
  - Συμβολίζεται p Λ q: p και q
  - Π.χ.,
    - p: Σήμερα είναι Παρασκευή
    - q: Σήμερα βρέχει
    - p Λ q: Σήμερα είναι Παρασκευή ΚΑΙ σήμερα βρέχει

Πίνακας αλήθειας για την σύζευξη δύο προτάσεων		
p	q	p Λ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Λογικοί τελεστές: σύζευξη

 ∧  = 

 ∧  =  ∧  = 

 ∧  = 

Λογικοί τελεστές: διάζευξη

- Έστω p και q προτάσεις
- Διάζευξη των p και q: πρόταση που είναι ψευδής όταν και η p και η q είναι ψευδείς, διαφορετικά είναι αληθής
  - Συμβολίζεται p V q: p ή q
  - Π.χ.,
    - p: Όσοι δήλωσαν μαθηματικά μπορούν να παρακολουθήσουν το μάθημα
    - q: Όσοι δήλωσαν επιστήμη των υπολογιστών μπορούν να παρακολουθήσουν το μάθημα
    - p V q:
      - Όσοι δήλωσαν μαθηματικά (p)
      - Ή
      - επιστήμη των υπολογιστών (q)
      - μπορούν να παρακολουθούν το μάθημα

Πίνακας αλήθειας για την διάζευξη δύο προτάσεων		
p	q	p V q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Λογικοί τελεστές: διάζευξη

 V  = 

 V  =  V  = 

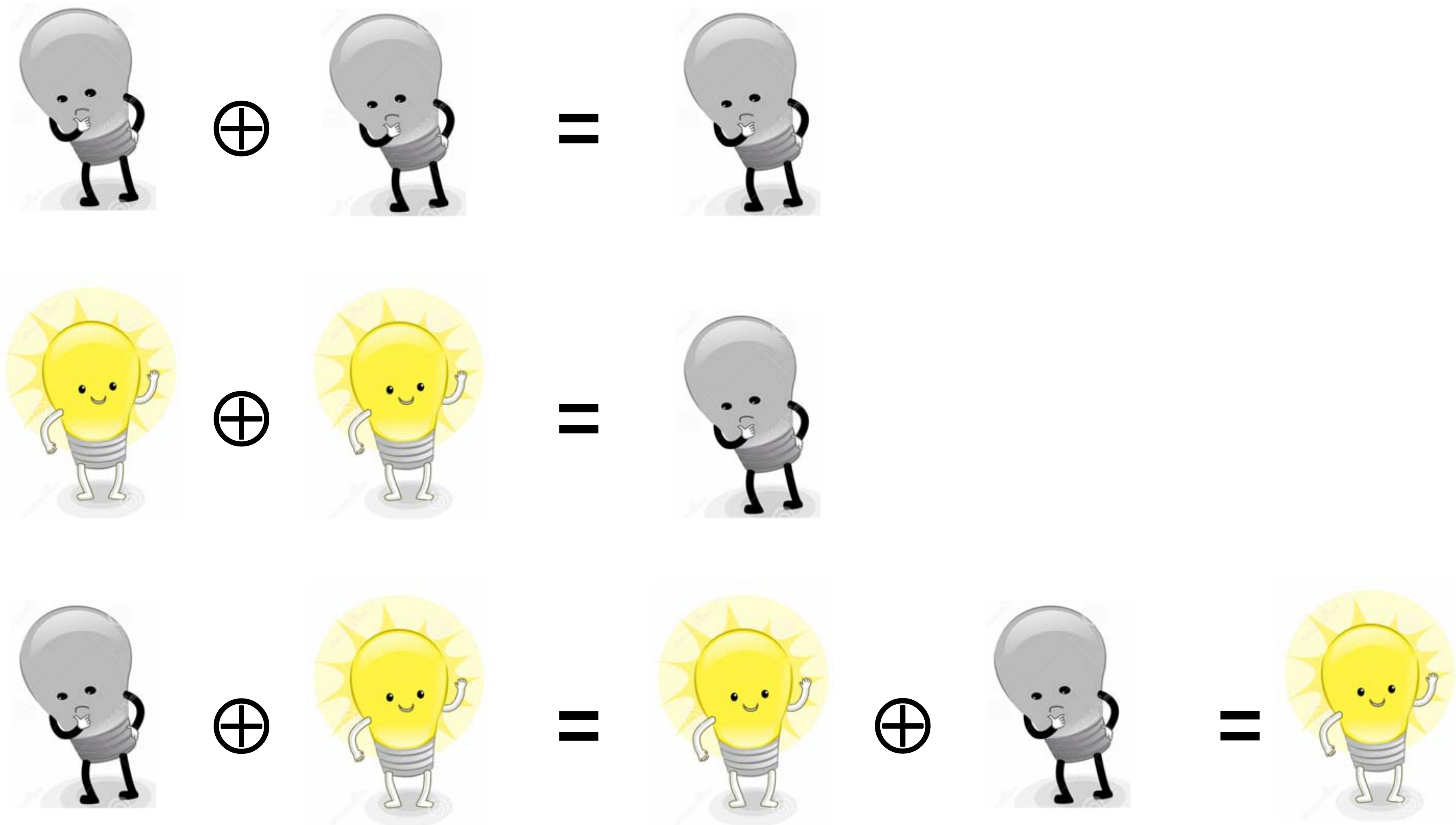
 V  = 

Λογικοί τελεστές: αποκλειστική διάζευξη

- Έστω p και q προτάσεις
- Αποκλειστική Διάζευξη ή αποκλειστικό Ή των p και q: πρόταση που είναι αληθής όταν μόνο μία από τις p και q είναι αληθής, διαφορετικά είναι ψευδής
  - Συμβολίζεται $p \oplus q$: είτε p είτε q
  - Π.χ.,
    - p: Όσοι δήλωσαν μαθηματικά μπορούν να παρακολουθήσουν το μάθημα
    - q: Όσοι δήλωσαν επιστήμη των υπολογιστών μπορούν να παρακολουθήσουν το μάθημα
    - $p \oplus q$:
      - Όσοι δήλωσαν
      - ΕΙΤΕ μαθηματικά
      - ΕΙΤΕ επιστήμη των υπολογιστών
      - (ΑΛΛΑ ΟΧΙ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ)
      - μπορούν να παρακολουθούν το μάθημα

Πίνακας αλήθειας για το αποκλειστικό Η δύο προτάσεων		
p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Λογικοί τελεστές: αποκλειστική διάζευξη



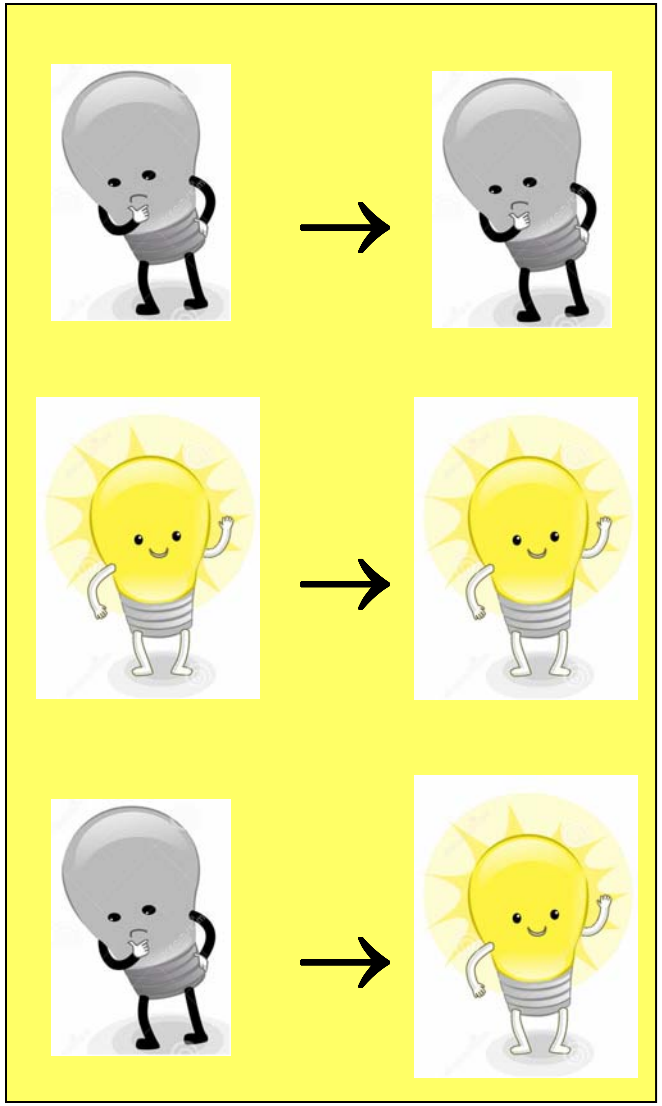
Συνεπαγωγές

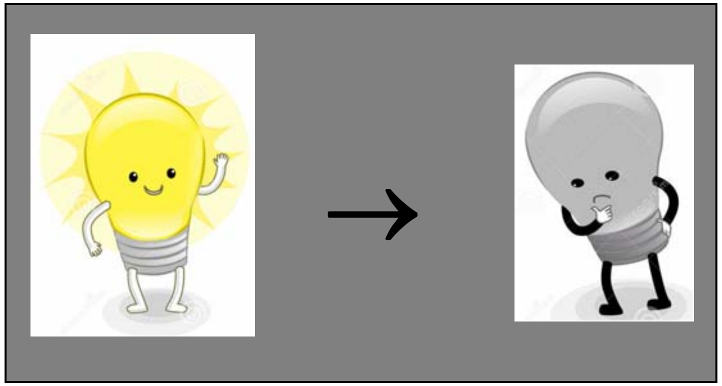
- Έστω p και q προτάσεις
- Συνεπαγωγή p→q: πρόταση που είναι ψευδής όταν η p είναι αληθής και η q ψευδής, διαφορετικά είναι αληθής
  - p: υπόθεση ή προϋπόθεση
  - q: συμπέρασμα ή συνέπεια
- Δισυποθετική p↔q: πρόταση που είναι αληθής όταν η p και η q έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας, διαφορετικά είναι ψευδής

Πίνακας αλήθειας για τη συνεπαγωγή $p \to q$		
p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

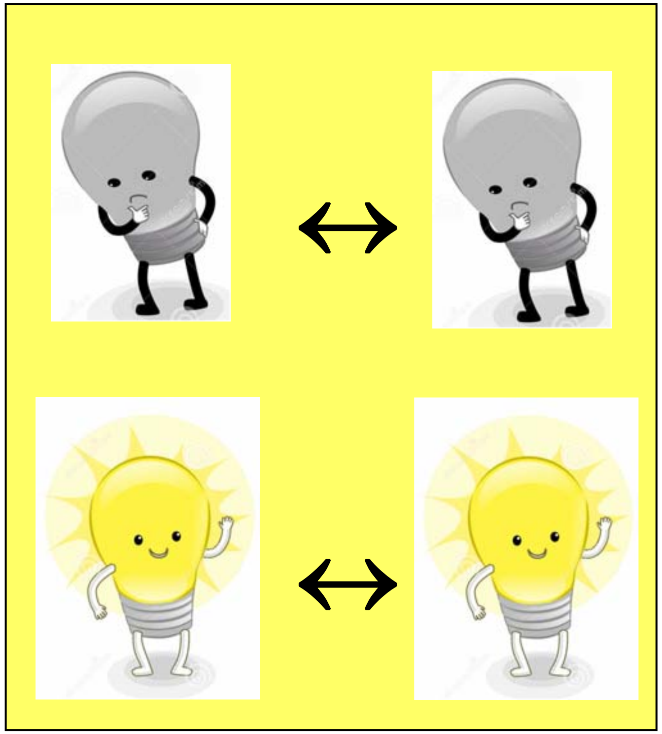
Πίνακας αλήθειας της δισυποθετικής $p \leftrightarrow q$		
p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

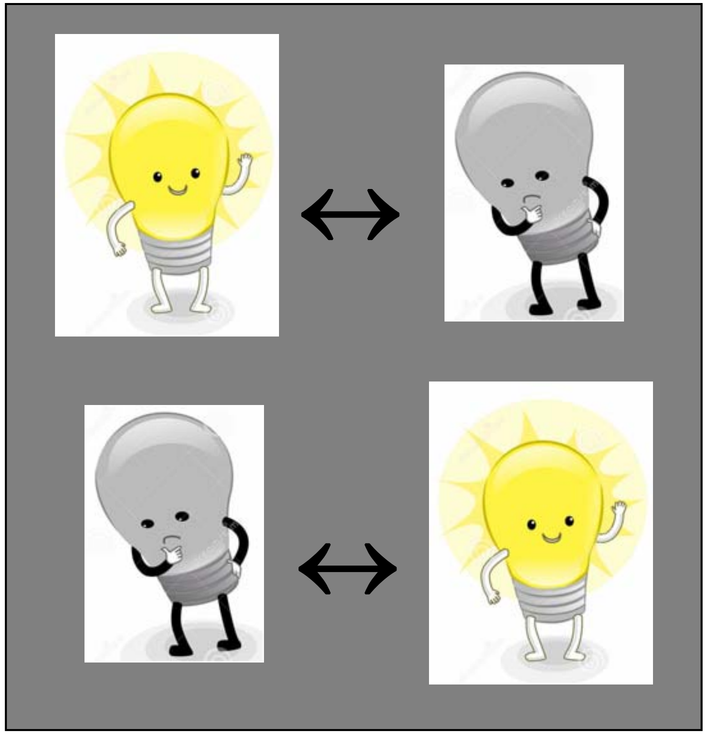
Συνεπαγωγή p→q





Δισυποθετική p↔q





Συνεπαγωγές: παραδείγματα

- $p \to q$
  - Αν p τότε q
  - Αν εκλεγώ θα μειώσω τους φόρους
  - Αν σήμερα είναι Παρασκευή, τότε 2+3=5
  - Η τοπική ομάδα κερδίζει όταν βρέχει ή αλλιώς Αν βρέχει τότε η τοπική ομάδα κερδίζει
    - Αντιθετοαντίστροφη
      - Αν ΔΕΝ κερδίζει η τοπική ομάδα τότε ΔΕΝ βρέχει
    - Αντίστροφη
      - Αν η τοπική ομάδα κερδίζει τότε βρέχει
    - Αντιθετική
      - Αν ΔΕΝ βρέχει τότε η τοπική ομάδα ΔΕΝ κερδίζει
- $p \leftrightarrow q$
  - Μπορείς να μπεις στο αεροπλάνο αν και μόνον αν αγοράσεις εισιτήριο

Προτεραιότητα λογικών τελεστών

Προτεραιότητα λογικών τελεστών	
Τελεστής	**Προτεραιότητα**
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Μετάφραση φράσεων ομιλίας

- Μπορούμε να έχουμε πρόσβαση στο Internet από πανεπιστημιακό χώρο μόνον αν είμαστε διπλωματούχοι Η/Υ ή όχι πρωτοετείς

- Πρόταση p = Μπορούμε να έχουμε πρόσβαση στο Internet από πανεπιστημιακό χώρο
- Πρόταση q = είμαστε διπλωματούχοι Η/Υ
- Πρόταση r = (είμαστε) πρωτοετείς
- $p \rightarrow (q \vee \neg r)$

Μετάφραση φράσεων ομιλίας

- Δεν μπορούμε να ανεβούμε στο τραινάκι του λούνα παρκ με τις καμπύλες τροχιές αν έχουμε ύψος μικρότερο από 1,30 εκτός και αν είμαστε μεγαλύτεροι από 16 χρονών

- Πρόταση p = Μπορούμε να ανέβουμε στο τραινάκι του λούνα παρκ με τις καμπύλες τροχιές
- Πρόταση q = έχουμε ύψος μικρότερο από 1,30
- Πρόταση r = είμαστε μεγαλύτεροι από 16 χρονών
- $(q \land \neg r) \rightarrow \neg p$

Μετάφραση φράσεων φυσικής γλώσσας σε λογικές εκφράσεις

- Δεν μπορεί να σταλεί η αυτόματη απάντηση όταν το σύστημα αρχείων είναι πλήρες

- Πρόταση p = Μπορεί να σταλεί η αυτόματη απάντηση
- Πρόταση q = το σύστημα αρχείων είναι πλήρες
- $q \rightarrow \neg p$

Σύμφωνες (ή συνεπείς) προτασιακές εκφράσεις

- Υπάρχει ανάθεση τιμών στις μεταβλητές των προτασιακών εκφράσεων που τις κάνει όλες ΑΛΗΘΕΙΣ

- Το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη ή επαναμεταδίδεται = P1
- Το διαγνωστικό μήνυμα δεν αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη = P2
- Αν το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη τότε επαναμεταδίδεται = P3

- Πρόταση p = Το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη
- Πρόταση q = Το διαγνωστικό μήνυμα επαναμεταδίδεται
- P1: $p \vee q$
- P2: $\neg p$
- P3: $p \rightarrow q$
- Η ανάθεση p=0, q=1 δίνει
  - P1: $p \vee q = 0 \vee 1 = 1$
  - P2: $\neg p = \neg 0 = 1$
  - P3: $p \rightarrow q = 0 \rightarrow 1 = 1$
- Οι προτασιακές εκφράσεις είναι συνεπείς

Σύμφωνες (ή συνεπείς) προτασιακές εκφράσεις

- Υπάρχει ανάθεση τιμών στις μεταβλητές των προτασιακών εκφράσεων που τις κάνει όλες ΑΛΗΘΕΙΣ

- Το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη ή επαναμεταδίδεται = P1
- Το διαγνωστικό μήνυμα δεν αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη = P2
- Αν το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη τότε επαναμεταδίδεται = P3
- Το διαγνωστικό μήνυμα δεν επαναμεταδίδεται = P4

- Πρόταση p = Το διαγνωστικό μήνυμα αποθηκεύεται στην προσωρινή μνήμη
- Πρόταση q = Το διαγνωστικό μήνυμα επαναμεταδίδεται
- P1: $p \vee q$
- P2: $\neg p$
- P3: $p \rightarrow q$
- P4: $\neg q$
- Δεν υπάρχει ανάθεση τιμών στις p, q που να κάνει τις P1, P2, P3 ταυτόχρονα αληθείς
- Οι προτασιακές εκφράσεις δεν είναι συνεπείς

Προτασιακή λογική και αναζητήσεις στο Internet

- Με χρήση των AND ($\wedge$), OR ($\vee$), NOT ($\neg$) κάνουμε σύνθετη αναζήτηση στο Internet

- Ιστοσελίδες για πανεπιστήμια στο New Mexico
  - NEW AND MEXICO AND UNIVERSITIES
- Ιστοσελίδες για πανεπιστήμια στο New Mexico ή στην Arizona
  - (NEW AND MEXICO OR ARIZONA) AND UNIVERSITIES
- Ιστοσελίδες για πανεπιστήμια στο Mexico
  - (MEXICO AND UNIVERSITIES) NOT NEW

Λογικοί γρίφοι

- Γρίφοι που μπορούν να λυθούν με χρήση λογικών συλλογισμών
- Αποτελούν εξαιρετικό τρόπο εξάσκησης με τους κανόνες της λογικής
  - Χρησιμοποιούνται για την επίδειξη δυνατοτήτων προγραμμάτων υπολογιστών που είναι σχεδιασμένα για να εκτελούν λογικούς συλλογισμούς
- Γρίφοι Smullyan (Σμάλιεν) & Γρίφος των λασπωμένων παιδιών

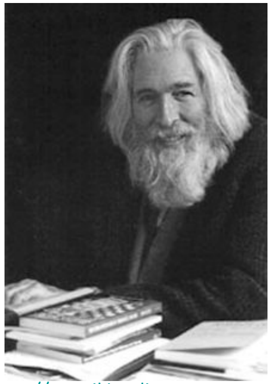


Image source: https://en.wikipedia.org

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (Ι)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 2 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
- Συναντάμε 2 ανθρώπους, τον Α και τον Β
- Τι είναι ο Α και τι ο Β αν
  - Ο Α λέει: ο Β είναι αφέντης
  - Ο Β λέει: οι δυο μας είμαστε διαφορετικοί

- Αν Α αφέντης $\Rightarrow$ Α λέει αλήθεια $\Rightarrow$ Β αφέντης $\Rightarrow$ Β λέει αλήθεια $\Rightarrow$ Α και Β είναι διαφορετικοί: άτοπο
- Αν Α υπηρέτης $\Rightarrow$ Α λέει ψέματα $\Rightarrow$ Β είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Β λέει ψέματα $\Rightarrow$ Α και Β είναι ίδιοι: αληθές

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Α υπηρέτης και Β υπηρέτης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (ΙΙ)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 2 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
- Συναντάμε 2 ανθρώπους, τον Α και τον Β
- Τι είναι ο Α και τι ο Β αν
  - Ο Α λέει: τουλάχιστον ένας από εμάς είναι υπηρέτης
  - Ο Β λέει: τίποτα

- Αν Α είναι αφέντης $\Rightarrow$ Α λέει αλήθεια $\Rightarrow$ τουλάχιστον ένας από Α και Β είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Β είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Β λέει ψέματα: αληθές
- Αν Α είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Α λέει ψέματα $\Rightarrow$ και οι δύο ΔΕΝ είναι υπηρέτες: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ο Α είναι αφέντης και ο Β είναι υπηρέτης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (ΙΙΙ)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 2 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
- Συναντάμε 2 ανθρώπους, τον Α και τον Β
- Τι είναι ο Α και τι ο Β αν
  - Ο Α λέει: και οι δύο είμαστε αφέντες
  - Ο Β λέει: ο Α είναι υπηρέτης

- Αν ο Α είναι αφέντης $\Rightarrow$ Α λέει αλήθεια $\Rightarrow$ Α και Β είναι αφέντες $\Rightarrow$ Β είναι αφέντης $\Rightarrow$ Β λέει αλήθεια $\Rightarrow$ ο Α είναι υπηρέτης: άτοπο
- Αν ο Α είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Α λέει ψέματα $\Rightarrow$ τουλάχιστον ένας από τους δύο ΔΕΝ είναι αφέντης $\Rightarrow$ Β μπορεί να είναι είτε αφέντης είτε υπηρέτης
  - Αν ο Β είναι αφέντης $\Rightarrow$ Β λέει αλήθεια $\Rightarrow$ Α είναι υπηρέτης: αληθές
  - Αν ο Β είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Β λέει ψέματα $\Rightarrow$ Α δεν είναι υπηρέτης: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ο Α είναι υπηρέτης και ο Β είναι αφέντης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (IV)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 2 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
- Συναντάμε 2 ανθρώπους, τον Α και τον Β
- Τι είναι ο Α και τι ο Β αν
  - Ο Α λέει: είμαι υπηρέτης ή ο Β είναι αφέντης
  - Ο Β λέει: τίποτα

- Αν ο Α είναι αφέντης $\Rightarrow$ Α λέει αλήθεια $\Rightarrow$ Β είναι αφέντης $\Rightarrow$ Β λέει αλήθεια: αληθές
- Αν ο Α είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Α λέει ψέματα $\Rightarrow$ ούτε Α υπηρέτης ούτε Β αφέντης: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ο Α είναι αφέντης και ο Β είναι αφέντης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (V)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 2 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
- Συναντάμε 2 ανθρώπους, τον Α και τον Β
- Τι είναι ο Α και τι ο Β αν
  - Ο Α λέει: είμαι αφέντης
  - Ο Β λέει: είμαι αφέντης

- Αν ο Α αφέντης $\Rightarrow$ Α λέει αλήθεια: αληθές
- Αν ο Α υπηρέτης $\Rightarrow$ Α λέει ψέματα: αληθές
- Αν ο Β είναι αφέντης $\Rightarrow$ Β λέει αλήθεια: αληθές
- Αν ο Β είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Β λέει ψέματα: αληθές

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: και ο Α και ο Β μπορεί να είναι είτε αφέντης είτε υπηρέτης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (VI)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 2 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
- Συναντάμε 2 ανθρώπους, τον Α και τον Β
- Τι είναι ο Α και τι ο Β αν
  - Ο Α λέει: είμαστε και οι δύο υπηρέτες
  - Ο Β λέει: τίποτα

- Αν ο Α είναι αφέντης $\Rightarrow$ Α λέει αλήθεια $\Rightarrow$ Είναι και οι δύο υπηρέτες: άτοπο
- Αν ο Α είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Α λέει ψέματα $\Rightarrow$ τουλάχιστον ένας από τους δύο ΔΕΝ είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Β είναι αφέντης: αληθές

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ο Α είναι υπηρέτης και ο Β είναι αφέντης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (VII)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 3 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
  - Οι κατάσκοποι που μπορεί να λένε αλήθεια ή ψέματα
- Συναντάμε 3 ανθρώπους, τον A, τον B και τον C
- Ξέρουμε ότι από αυτούς ένας είναι αφέντης, ένας υπηρέτης και ένας κατάσκοπος
- Το κάθε άτομο ξέρει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν τα άλλα δύο άτομα
- Τι είναι οι A, B,C αν
  - Ο A λέει: ο C είναι υπηρέτης
  - Ο B λέει: ο A είναι αφέντης
  - Ο C λέει: εγώ είμαι ο κατάσκοπος

- Αν ο A είναι αφέντης $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια $\Rightarrow$ C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ C λέει ψέματα: αληθές
  - Ο B είναι ο κατάσκοπος: αληθές
- Αν ο A είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ A λέει ψέματα $\Rightarrow$ C ΔΕΝ είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ C είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ A είναι αφέντης: άτοπο
- Αν ο A είναι κατάσκοπος
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ A είναι αφέντης: άτοπο
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα $\Rightarrow$ A δεν είναι αφέντης $\Rightarrow$ Ο C είναι αφέντης $\Rightarrow$ ο C λέει αλήθεια $\Rightarrow$ ο C είναι κατάσκοπος: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ο A είναι αφέντης, ο B είναι κατάσκοπος και ο C υπηρέτης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (VIII)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 3 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
  - Οι κατάσκοποι που μπορεί να λένε αλήθεια ή ψέματα
- Συναντάμε 3 ανθρώπους, τον A, τον B και τον C
- Ξέρουμε ότι από αυτούς ένας είναι αφέντης, ένας υπηρέτης και ένας κατάσκοπος
- Το κάθε άτομο ξέρει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν τα άλλα δύο άτομα
- Τι είναι οι A, B,C αν
  - O A λέει: είμαι ο αφέντης
  - O B λέει: είμαι ο υπηρέτης
  - O C λέει: ο B είναι ο αφέντης

- Αν ο A είναι αφέντης $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια: αληθές
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα: άτοπο
  - Αν ο B είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ C λέει ψέματα $\Rightarrow$ B δεν είναι αφέντης: αληθές
- Αν ο A είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ A λέει ψέματα: αληθές
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ B είναι υπηρέτης: άτοπο
  - Αν ο B είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ C είναι αφέντης $\Rightarrow$ C λέει αλήθεια $\Rightarrow$ B είναι αφέντης: άτοπο
- Αν ο A είναι κατάσκοπος
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ B είναι υπηρέτης: άτοπο
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ο A είναι αφέντης, ο B είναι κατάσκοπος και ο C υπηρέτης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (IX)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 3 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
  - Οι κατάσκοποι που μπορεί να λένε αλήθεια ή ψέματα
- Συναντάμε 3 ανθρώπους, τον A, τον B και τον C
- Ξέρουμε ότι από αυτούς ένας είναι αφέντης, ένας υπηρέτης και ένας κατάσκοπος
- Το κάθε άτομο ξέρει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν τα άλλα δύο άτομα
- Τι είναι οι A, B,C αν
  - Ο A λέει: είμαι ο αφέντης
  - Ο B λέει: ο A λέει αλήθεια
  - Ο C λέει: είμαι ο κατάσκοπος

- Αν ο A είναι αφέντης $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια: αληθές
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα $\Rightarrow$ A λέει ψέματα: άτοπο
  - Αν ο B είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ Ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ ο C λέει ψέματα: αληθές
- Αν ο A είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ A λέει ψέματα: αληθές
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια: άτοπο (αφού A υπηρέτης)
- Αν ο A είναι κατάσκοπος
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια: άτοπο (μπορεί να λέει αλήθεια ή ψέματα)
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα $\Rightarrow$ A λέει ψέματα: άτοπο (μπορεί να λέει αλήθεια ή ψέματα)

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ο A είναι αφέντης, ο B είναι κατάσκοπος και ο C υπηρέτης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (X)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 3 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
  - Οι κατάσκοποι που μπορεί να λένε αλήθεια ή ψέματα
- Συναντάμε 3 ανθρώπους, τον A, τον B και τον C
- Ξέρουμε ότι από αυτούς ένας είναι αφέντης, ένας υπηρέτης και ένας κατάσκοπος
- Το κάθε άτομο ξέρει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν τα άλλα δύο άτομα
- Τι είναι οι A, B,C αν
  - Ο A λέει: είμαι ο αφέντης
  - Ο B λέει: ο A δεν είναι ο υπηρέτης
  - Ο C λέει: ο B δεν είναι ο υπηρέτης

- Αν ο A είναι αφέντης $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα $\Rightarrow$ A είναι υπηρέτης: άτοπο
  - Αν ο B είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ ο C λέει ψέματα $\Rightarrow$ ο B είναι υπηρέτης: άτοπο
- Αν ο A είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ A λέει ψέματα
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ A δεν είναι υπηρέτης: άτοπο
  - Αν ο B είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ ο C είναι αφέντης $\Rightarrow$ ο C λέει αλήθεια: αληθές
- Αν ο A είναι κατάσκοπος
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια: αληθές $\Rightarrow$ ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ C λέει ψέματα: άτοπο
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα $\Rightarrow$ A είναι υπηρέτης: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ο A είναι υπηρέτης, ο B είναι κατάσκοπος και ο C αφέντης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (XI)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 3 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
  - Οι κατάσκοποι που μπορεί να λένε αλήθεια ή ψέματα
- Συναντάμε 3 ανθρώπους, τον Α, τον Β και τον C
- Ξέρουμε ότι από αυτούς ένας είναι αφέντης, ένας υπηρέτης και ένας κατάσκοπος
- Το κάθε άτομο ξέρει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν τα άλλα δύο άτομα
- Τι είναι οι Α, Β,C αν
  - Ο Α λέει: είμαι ο αφέντης
  - Ο Β λέει: είμαι ο αφέντης
  - Ο C λέει: είμαι ο αφέντης

- Αν ο Α είναι αφέντης $\Rightarrow$ Α λέει αλήθεια: αληθές
  - Αν ο Β είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Β λέει ψέματα $\Rightarrow$ Β δεν είναι αφέντης $\Rightarrow$ ο C είναι κατάσκοπος: αληθές
  - Αν ο Β είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ ο C λέει ψέματα: αληθές
- Αν ο Α είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Α λέει ψέματα: αληθές
  - Αν ο Β είναι αφέντης $\Rightarrow$ Β λέει αλήθεια $\Rightarrow$ C είναι κατάσκοπος: αληθές
  - Αν ο Β είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ ο C είναι αφέντης $\Rightarrow$ C λέει αλήθεια: αληθές
- Αν ο Α είναι κατάσκοπος
  - Αν ο Β είναι αφέντης: $\Rightarrow$ Β λέει αλήθεια $\Rightarrow$ ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ C λέει ψέματα: αληθές
  - Αν ο Β είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ Β λέει ψέματα $\Rightarrow$ ο C είναι αφέντης $\Rightarrow$ C λέει αλήθεια: αληθές

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: οποιοσδήποτε από τους Α, Β, C μπορεί να είναι ο υπηρέτης, ο κατάσκοπος και ο αφέντης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (XII)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 3 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
  - Οι κατάσκοποι που μπορεί να λένε αλήθεια ή ψέματα
- Συναντάμε 3 ανθρώπους, τον A, τον B και τον C
- Ξέρουμε ότι από αυτούς ένας είναι αφέντης, ένας υπηρέτης και ένας κατάσκοπος
- Το κάθε άτομο ξέρει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν τα άλλα δύο άτομα
- Τι είναι οι A, B,C αν
  - O A λέει: δεν είμαι ο κατάσκοπος
  - O B λέει: δεν είμαι ο κατάσκοπος
  - O C λέει: ο A είναι ο κατάσκοπος

- Αν ο A είναι αφέντης $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα: άτοπο
  - Αν ο B είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ ο C λέει ψέματα $\Rightarrow$ A δεν είναι κατάσκοπος: αληθές
- Αν ο A είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ A λέει ψέματα $\Rightarrow$ A είναι κατάσκοπος: άτοπο
- Αν ο A είναι κατάσκοπος
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ C λέει ψέματα $\Rightarrow$ A δεν είναι κατάσκοπος: άτοπο
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα $\Rightarrow$ B είναι κατάσκοπος: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ο A είναι ο αφέντης, ο B ο κατάσκοπος και ο C ο υπηρέτης**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (XIII)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 3 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
  - Οι κατάσκοποι που μπορεί να λένε αλήθεια ή ψέματα
- Συναντάμε 3 ανθρώπους, τον A, τον B και τον C
- Ξέρουμε ότι από αυτούς ένας είναι αφέντης, ένας υπηρέτης και ένας κατάσκοπος
- Το κάθε άτομο ξέρει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν τα άλλα δύο άτομα
- Τι είναι οι A, B,C αν
  - O A λέει: δεν είμαι ο κατάσκοπος
  - O B λέει: δεν είμαι ο κατάσκοπος
  - O C λέει: δεν είμαι ο κατάσκοπος

- Αν ο A είναι αφέντης $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα: άτοπο
  - Αν ο B είναι κατάσκοπος $\Rightarrow$ ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ ο C λέει ψέματα $\Rightarrow$ ο C είναι ο κατάσκοπος: άτοπο
- Αν ο A είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ ο A λέει ψέματα: άτοπο
- Αν ο A είναι κατάσκοπος
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ ο C είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ C λέει ψέματα: άτοπο
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: δεν υπάρχει ανάθεση**

Λογικοί γρίφοι: παραδείγματα (XIV)

- [Smullyan 1978]
- Σε ένα νησί υπάρχουν 3 είδη κατοίκων:
  - Οι αφέντες που λένε πάντα αλήθεια
  - Οι υπηρέτες που λένε πάντα ψέματα
  - Οι κατάσκοποι που μπορεί να λένε αλήθεια ή ψέματα
- Συναντάμε 3 ανθρώπους, τον A, τον B και τον C
- Ξέρουμε ότι από αυτούς ένας είναι αφέντης, ένας υπηρέτης και ένας κατάσκοπος
- Το κάθε άτομο ξέρει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν τα άλλα δύο άτομα
- Τι είναι οι A, B,C αν
  - O A λέει: είμαι ο υπηρέτης
  - O B λέει: είμαι ο υπηρέτης
  - O C λέει: ο B είναι ο υπηρέτης

- Αν ο A είναι αφέντης $\Rightarrow$ A λέει αλήθεια $\Rightarrow$ A είναι υπηρέτης: άτοπο
- Αν ο A είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ A λέει ψέματα $\Rightarrow$ A ΔΕΝ είναι υπηρέτης: άτοπο
- Αν ο A είναι κατάσκοπος
  - Αν ο B είναι αφέντης $\Rightarrow$ B λέει αλήθεια $\Rightarrow$ B είναι υπηρέτης: άτοπο
  - Αν ο B είναι υπηρέτης $\Rightarrow$ B λέει ψέματα: άτοπο

- **ΑΠΑΝΤΗΣΗ: δεν υπάρχει ανάθεση**

Γρίφος των λασπωμένων παιδιών

- Ένας πατέρας λέει στα παιδιά του – ένα κορίτσι κι ένα αγόρι - να παίξουν χωρίς να λερωθούν
- Τα παιδιά τελικά λερώνονται και τα δύο με λάσπες στο μέτωπο και όταν σταματούν να παίζουν ο πατέρας λέει: «Τουλάχιστον ένα από τα παιδιά έχει λασπωμένο μέτωπο» και ζητά και από τα δύο παιδιά να απαντήσουν με Ναι ή Όχι στην ερώτηση: «Μήπως γνωρίζεις αν το μέτωπό σου αν είναι λασπωμένο»
- Τι θα απαντήσουν τα παιδιά δεδομένου ότι:
  - Μπορούν να δουν το μέτωπο του άλλου αλλά όχι το δικό τους
  - Και τα δύο παιδιά είναι έντιμα και απαντούν ταυτόχρονα
  - Ο πατέρας κάνει την ερώτηση 2 φορές

Γρίφος των λασπωμένων παιδιών: ανάλυση

- s = το αγόρι έχει λερωμένο μέτωπο
- d = το κορίτσι έχει λερωμένο μέτωπο
- Πατέρας: «τουλάχιστον ένας από τους 2 έχει λερωμένο μέτωπο» σημαίνει ότι η πρόταση $s \vee d$ πρέπει να είναι αληθής
- Και τα δύο παιδιά απαντούν ΟΧΙ στην ερώτηση του πατέρα «Γνωρίζεις αν το μέτωπό σου είναι λερωμένο;» αφού βλέπουν το μέτωπο του άλλου παιδιού λερωμένο, δηλ.
  - Το αγόρι γνωρίζει ότι η d είναι αληθής αλλά δεν γνωρίζει τι είναι η s
  - Το κορίτσι γνωρίζει ότι η s είναι αληθής αλλά δεν γνωρίζει τι είναι η d
  - Μετά την απάντηση ΟΧΙ του αγοριού, το κορίτσι μπορεί να καταλάβει ότι η d είναι αληθής αφού διαφορετικά το αγόρι θα είχε απαντήσει ΝΑΙ
  - Όμοια, μετά την απάντηση ΟΧΙ του κοριτσιού, το κορίτσι μπορεί να καταλάβει ότι η s είναι αληθής αφού διαφορετικά το κορίτσι θα είχε απαντήσει ΝΑΙ
  - Επομένως, τη δεύτερη φορά που θα γίνει η ερώτηση, απαντάνε και οι δύο ΝΑΙ

Ταυτολογία, Αντιλογία, Ενδεχόμενο

- Ταυτολογία: σύνθετη πρόταση που είναι πάντα αληθής ανεξάρτητα από τις τιμές αλήθειας των προτάσεων που υπάρχουν σε αυτήν
- Αντιλογία ή Αντίφαση: σύνθετη πρόταση που είναι πάντα ψευδής
- Ενδεχόμενο: πρόταση που δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση

Παράδειγμα ταυτολογίας και αντιλογίας:

p	¬p	p ∨ ¬p	p ∧ ¬p
T	F	T	F
F	T	T	F

Λογικά ισοδύναμες προτάσεις

- Οι προτάσεις p και q είναι λογικά ισοδύναμες αν η $p \leftrightarrow q$ είναι ταυτολογία
- Συμβολίζουμε $p \equiv q$

Πίνακες αλήθειας για την $\neg (p \vee q)$ και για την $(\neg p \wedge \neg q)$					
p	q	$\neg (p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Λογικά ισοδύναμες προτάσεις

- Οι προτάσεις p και q είναι λογικά ισοδύναμες αν η $p \leftrightarrow q$ είναι ταυτολογία
- Συμβολίζουμε $p \equiv q$

Πίνακες αλήθειας για την $\neg p \vee q$ και για την $p \rightarrow q$				
p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Λογικά ισοδύναμες προτάσεις

- Οι προτάσεις p και q είναι λογικά ισοδύναμες αν η $p \leftrightarrow q$ είναι ταυτολογία
- Συμβολίζουμε $p \equiv q$

Οι προτάσεις p ∨ (q ∧ r) και (p ∨ q) ∧ (p ∨ r) είναι λογικά ισοδύναμες							
p	q	r	q ∧ r	p ∨ (q ∧ r)	p ∨ q	p ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Κατηγορήματα

- Π1: Το x είναι μεγαλύτερο από 3
  - Το x είναι το υποκείμενο της πρότασης Π1
  - «μεγαλύτερο του 3»: κατηγόρημα
  - Συμβολίζουμε την πρόταση Π1 ως P(x), όπου P είναι το κατηγόρημα

- Ποιες είναι οι τιμές αλήθειας των P(4) (*αληθής*) και P(2) (*ψευδής*) ;

Κατηγορήματα

- Π2: Q(x,y): x=y+3
  - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της Q(1,2);
    - *ψευδής*
  - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της Q(3,0);
    - *αληθής*
- Π3: R(x,y,z): x+y=z
  - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της R(1,2,3);
    - *αληθής*
  - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της R(0,0,1);
    - *ψευδής*

Ποσοτικοποιήσεις

- Καθολική ποσοτικοποίηση της P(x) είναι η πρόταση: Η P(x) είναι αληθής για όλες τις τιμές του x στο πεδίο ορισμού
  - $\forall$: καθολικός ποσοδείκτης
  - $\forall xP(x)$: για κάθε x P(x)
- Υπαρξιακή ποσοτικοποίηση της P(x) είναι η πρόταση: Υπάρχει στοιχείο x στο πεδίο ορισμού έτσι ώστε η P(x) να είναι αληθής
  - $\exists$: υπαρξιακός ποσοδείκτης
  - $\exists\, xP(x)$: υπάρχει τουλάχιστον ένα x έτσι ώστε η P(x) ή για κάποιο x P(x)

Ποσοτικοποιήσεις: καθολικός ποσοδείκτης

- Καθολικός ποσοδείκτης, $\forall$: «για κάθε» - $\forall$ x P(x)
  - P(x): $x+1>x$
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης $\forall$ x P(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί; (*αληθής*)
  - Q(x): $x<2$
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης $\forall$ x Q(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί; (*ψευδής*)
  - R(x): $x^2<10$
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης $\forall$ x R(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι οι θετικοί ακέραιοι που δεν υπερβαίνουν το 4; (*ψευδής*)
  - T(x): ο x έχει 2 γονείς
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης $\forall$ x T(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι οι όλοι οι άνθρωποι; (*αληθής*)
  - K(x): $x^2\geq x$
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης $\forall$ x K(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι
      - Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί; (*ψευδής*)
      - Όλοι οι ακέραιοι; (*αληθής*)
  - L(x): $x^2>0$
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης $\forall$ x L(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι όλοι οι ακέραιοι; (*ψευδής*)

Ποσοτικοποιήσεις: αντιπαράδειγμα

- Καθολικός ποσοδείκτης, ∀: «για κάθε» - ∀ x P(x)
  - P(x): x+1>x
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης ∀ x P(x) ύ είναι οι πραγματικοί αριθμοί; (*αληθής*)
  - Q(x): x<2
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοπο ορισμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί; (*ψευδής*)
  - R(x): x^2<10
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας τ όταν το πεδίο ορισμού είναι οι θετικοί ακέραιοι που δε
  - T(x): ο x έχει 2 γονείς
    - Ποια είναι η τι σης ∀ x T(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι οι όλοι οι άνθρωπ
  - K(x): x^2≥x
    - ποσοτικοποίησης ∀ x K(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι θμοί; (*ψευδής*)
    - (*αληθής*)
  - L(
    - τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης ∀ x L(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι όλοι οι οι; (*ψευδής*)

Για να δείξουμε ότι μια δήλωση που έχει την μορφή $\forall x P(x)$ είναι ψευδής, όπου $P(x)$ είναι προτασιακή συνάρτηση, χρειάζεται να βρούμε μόνο μια τιμή στο πεδίο ορισμού για την οποία η $P(x)$ είναι ψευδής. Η τιμή αυτή ονομάζεται **αντιπαράδειγμα** της δήλωσης $\forall x P(x)$.

Ποσοτικοποιήσεις: υπαρξιακός ποσοδείκτης

- Υπαρξιακός ποσοδείκτης, ∃: «υπάρχει» - ∃ x P(x)
  - P(x): x>3
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης ∃ x P(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί; (*αληθής*)
  - Q(x): x=x+1
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης ∃ x Q(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί; (*ψευδής*)
  - R(x): x^2>10
    - Ποια είναι η τιμή αλήθειας της ποσοτικοποίησης ∃ x R(x) όταν το πεδίο ορισμού είναι οι θετικοί ακέραιοι που δεν υπερβαίνουν το 4; (*αληθής*)

Καθολικός και υπαρξιακός ποσοδείκτης

Άρνηση	Ισοδύναμη δήλωση	Πότε ή Άρνηση είναι αληθής;	Πότε η Άρνηση είναι ψευδής;
$\neg\exists\, x P(x)$	$\forall\, x\, \neg P(x)$	Για κάθε x, η P(x) είναι αληθής.	Υπάρχει ένα x για το οποίο η P(x) είναι αληθής.
$\neg\forall\, x P(x)$	$\exists\, x\, \neg P(x)$	Υπάρχει ένα x για το οποίο η P(x) είναι αληθής.	Η P(x) είναι αληθής για κάθε x.

Άρνηση ποσοτικοποιήσεων

Άρνηση	Ισοδύναμη δήλωση	Πότε ή Άρνηση είναι αληθής;	Πότε η Άρνηση είναι ψευδής;
$\neg\exists xP(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Για κάθε x, η P(x) είναι αληθής.	Υπάρχει ένα x για το οποίο η P(x) είναι αληθής.
$\neg\forall xP(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Υπάρχει ένα x για το οποίο η P(x) είναι αληθής.	Η P(x) είναι αληθής για κάθε x.

Υπάρχει φοιτητής στην τάξη που έχει διδαχθεί μαθηματικά
Q(x): Ο φοιτητής x έχει διδαχθεί μαθηματικά, $\exists xQ(x)$

Άρνηση: Κάθε φοιτητής στην τάξη δεν έχει διδαχθεί μαθηματικά, $\forall x\neg Q(x)$

Κάθε φοιτητής στην τάξη έχει διδαχθεί μαθηματικά
P(x): Ο φοιτητής x έχει διδαχθεί μαθηματικά, $\forall xP(x)$

Άρνηση: Υπάρχει φοιτητής που δεν έχει διδαχθεί μαθηματικά, $\exists x\neg P(x)$

Άρνηση ποσοτικοποιήσεων: παραδείγματα

- Ποιες είναι οι αρνήσεις των δηλώσεων
  - Υπάρχει έντιμος πολιτικός
    - *Όλοι οι πολιτικοί είναι ανέντιμοι*
  - Όλοι οι Έλληνες τρώνε σάντουιτς
    - *Υπάρχει Έλληνας που δεν τρώει σάντουιτς*
  - $\forall x \, (x^2 > x)$
    - $\exists x \, (x^2 \leq x)$
  - $\exists x \, (x^2 = 2)$
    - $\forall x \, (x^2 \neq 2)$

Από την καθομιλούμενη γλώσσα σε λογικές εκφράσεις

- Κάθε φοιτητής στην τάξη αυτή έχει μελετήσει ανώτερα μαθηματικά
  - φοιτητής: x
  - C(x):έχει μελετήσει ανώτερα μαθηματικά
  - $\forall x\ C(x)$
- Κάποιοι φοιτητές στην τάξη αυτή έχουν επισκεφθεί το Μεξικό
  - $\exists x\ M(x)$
- Κάθε φοιτητής στην τάξη αυτή έχει επισκεφθεί είτε τον Καναδά είτε το Μεξικό
  - $\forall x\ (K(x) \vee M(x))$

Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων & Λογική;;;

- Lewis Caroll – Charles Lutwidge Dodgson [1832-1898]
- Συγγραφέας της «Αλίκης στη χώρα των θαυμάτων»
- Συμβολική Λογική, Το παιχνίδι της Λογικής
  - Παραδείγματα λογικών συμβολισμών με χρήση ποσοτικοποιητών

Σύνολα: χρησιμότητα

- Χρησιμοποιούνται για να ομαδοποιούν μεταξύ τους αντικείμενα
- Τα αντικείμενα σε ένα σύνολο έχουν παρόμοιες ιδιότητες
- Αποτελούν μέσο μελέτης παρόμοιων συλλογών με οργανωμένο τρόπο

Σύνολα: ορισμός

- Σύνολο: μη διαταγμένη συλλογή αντικειμένων (π.χ., A)
- αντικείμενα ενός συνόλου: στοιχεία ή μέλη του συνόλου (π.χ., A= {a,b,c,d})
  - Συμβολίζουμε b $\in$A για να δηλώσουμε ότι το b είναι στοιχείο του συνόλου A
  - Συμβολίζουμε f $\notin$A για να δηλώσουμε ότι το f ΔΕΝ είναι στοιχείο του συνόλου A

Σύνολα: περιγραφή

- Τα σύνολα περιγράφονται
  - Με καταγραφή των στοιχείων τους
    - {a,b,c,d}
    - Σύνολο φωνηέντων αγγλικού αλφαβήτου: V={a,e,i,o,u}
    - Σύνολο περιττών θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι του 10: O={1,3,5,7,9}
    - Σύνολα μπορεί να περιέχουν και φαινομενικά μη συσχετιζόμενα στοιχεία: {α,2,Evi,Patras}
    - Σύνολο θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι από 100: {1,2,3,…,99} – δεν καταγράφουμε όλα τα στοιχεία όταν είναι φανερή η γενική μορφή τους
      - N={0,1,2,3,…}: σύνολο φυσικών αριθμών
      - Z={…-2,-1,0,1,2,…}: σύνολο ακεραίων αριθμών
      - Z^+={0,1,2,…}: σύνολο θετικών ακεραίων αριθμών
      - $Q=\{p/q \mid p\in Z, q\in Z, q\neq 0\}$: σύνολο ρητών αριθμών
      - R: σύνολο πραγματικών αριθμών
  - Με συμβολισμό κατασκευής συνόλου, δηλ., με αναφορά κάποιας κοινής ιδιότητας των στοιχείων
    - O={x| ο x είναι περιττός θετικός ακέραιος μικρότερος του 10}
    - R={x| ο x είναι πραγματικός αριθμός}

Σύνολα: ιδιότητες

- Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνον αν έχουν τα ίδια στοιχεία
  - Τα σύνολα {1,3,5} και {3,5,1} είναι ίσα
    - Δεν έχει σημασία η σειρά καταγραφής των στοιχείων ενός συνόλου
- Κενό: σύνολο χωρίς στοιχεία, {}, $\emptyset$
- Μοναδιαίο: σύνολο με ένα στοιχείο, π.χ., {α}, {$\emptyset$}
- Σύνολο A είναι υποσύνολο ενός συνόλου B (συμβολίζουμε $A \subseteq B$) αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B
  - Κάθε σύνολο έχει δύο (τετριμμένα) υποσύνολα: τον εαυτό του και το κενό σύνολο ($\emptyset$)
- Σύνολο A είναι γνήσιο υποσύνολο ενός συνόλου B (συμβολίζουμε $A \subset B$) όταν το A είναι υποσύνολο του B και – επιπλέον – $A \neq B$

Σύνολα: πληθάριθμος

- Σ: σύνολο
- Το Σ περιέχει n ξεχωριστά στοιχεία
- n: μη αρνητικός ακέραιος
- $\Rightarrow$ το σύνολο Σ είναι πεπερασμένο και ο αριθμός n είναι ο πληθικός αριθμός ή πληθάριθμος – συμβολίζεται με |Σ| - του συνόλου Σ
  - |Σ|: πλήθος στοιχείων του Σ
    - A: σύνολο περιττών θετικών ακέραιων που είναι μικρότεροι του 10 $\Rightarrow$ |A|=5
    - Σ: σύνολο γραμμάτων ελληνικού αλφαβήτου $\Rightarrow$ |Σ|=24
    - S: σύνολο γραμμάτων αγγλικού αλφαβήτου $\Rightarrow$ |S|=26
    - $|\varnothing|=0$
- Ένα σύνολο είναι άπειρο αν ΔΕΝ είναι πεπερασμένο

Δυναμοσύνολο

- Δυναμοσύνολο συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A και συμβολίζεται με P(A) (P από Powerset = Δυναμοσύνολο)
  - $B=\{0,1,2\} \Rightarrow P(B)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$
  - $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$
  - $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
- Αν $|A|=n \Rightarrow |P(A)|=2^n$
  - Γιατί; Κάθε ένα από τα n στοιχεία του A μπορεί είτε να μετέχει είτε να μη μετέχει σε κάποιο υποσύνολο…

Καρτεσιανά γινόμενα

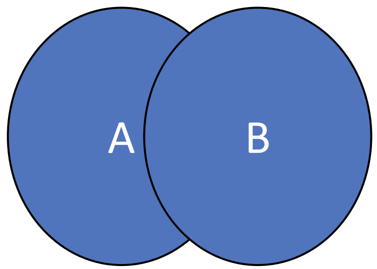
- Όταν μας ενδιαφέρει η σειρά των n στοιχείων σε μια συλλογή τότε έχουμε μια διατεταγμένη ομάδα n στοιχείων $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$
- Δύο διατεταγμένες ομάδες n στοιχείων είναι ίσες αν και μόνον αν κάθε αντίστοιχο ζευγάρι στοιχείων τους είναι ίσο
  - $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ αν και μόνον αν $\alpha_i=b_i$ για $i=1,2,\ldots,n$
- Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B, AxB είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (α,b) με $\alpha \in A$ και $b \in B$
  - $AXB=\{(\alpha,b) \mid \alpha \in A \wedge b \in B\}$
    - A το σύνολο των φοιτητών του Τμήματος
    - B το σύνολο των μαθημάτων που προσφέρονται στο Τμήμα
    - Το καρτεσιανό γινόμενο AxB περιέχει όλα τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής (α,b) όπου α είναι κάποιο άτομο που φοιτά στο Τμήμα και b κάποιο προσφερόμενο μάθημα

    - A={1,2}
    - B={a,b,c}
    - AxB={(1,a),(1,b), (1,c),(2,a), (2,b),(2,c),}
  - $AxB \neq BxA$ εκτός αν $A=\varnothing$ ή $B=\varnothing$ ή A=B
  - Ένα υποσύνολο R του AxB ονομάζεται σχέση από το σύνολο A στο σύνολο B
    - R={(α,0),(α,1),(b,1),(c,0),(c,3)} είναι σχέση από το σύνολο {α,b,c} στο σύνολο {0,1,2,3}

Πράξεις με σύνολα: Ένωση

Έστω ότι τα A και B είναι σύνολα.
Η ένωση των συνόλων A και B συμβολίζεται με $A \cup B$ και είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο A ή στο B ή και στα δύο.

Ένα στοιχείο x ανήκει στην ένωση των A και B αν και μόνον αν $x \in A$ ή $x \in B$.
Δηλαδή: $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$.



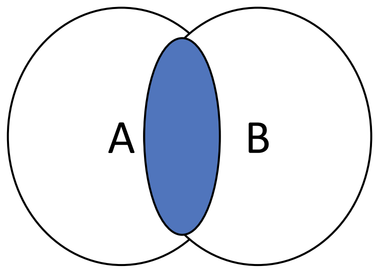
Είναι σκιασμένη η $A \cup B$

Η ένωση των συνόλων {1,3,5} και {1,2,3} είναι το σύνολο {1,3} δηλ.
$\{1,3,5\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,5\}$.

Πράξεις με σύνολα: Τομή

Έστω ότι τα Α και Β είναι σύνολα.
Η τομή των συνόλων Α και Β συμβολίζεται με $A \cap B$ και είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που ανήκουν και στο Α και στο Β.

Ένα στοιχείο x ανήκει στην τομή των Α και Β αν και μόνον αν $x \in A$ και $x \in B$.
Δηλαδή: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.



Είναι σκιασμένη η $A \cap B$

Η τομή των συνόλων {1,3,5} και {1,2,3} είναι το σύνολο {1,3} δηλ. $\{1,3,5\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}$.

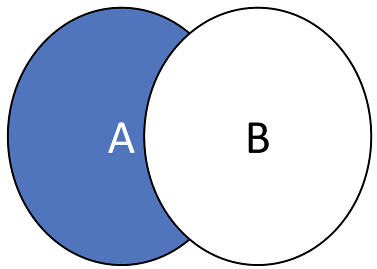
Πράξεις με σύνολα: Τομή

- Δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους όταν η τομή τους είναι το κενό σύνολο
  - Δηλ., όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία
    - A={1,3,5,7,9} και B={2,4,6,8,10} $\Rightarrow$ $A\cap B=\varnothing$ άρα A και B ξένα μεταξύ τους
- $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$
  - Η γενίκευση σε ενώσεις αυθαίρετου πλήθους συνόλων ονομάζεται αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Πράξεις με σύνολα: Διαφορά

Έστω ότι τα Α και Β είναι σύνολα.
Η διαφορά των συνόλων Α και Β συμβολίζεται με Α-Β και είναι το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία που βρίσκονται στο Α αλλά όχι στο Β.
Η διαφορά των Α και Β ονομάζεται και συμπλήρωμα του Β ως προς το Α.

Ένα στοιχείο x ανήκει στη διαφορά των Α και Β αν και μόνον αν $x \in A$ και $x \notin B$.
Δηλαδή: $A\text{-}B=\{x \mid x \in A \land x \notin B\}$.



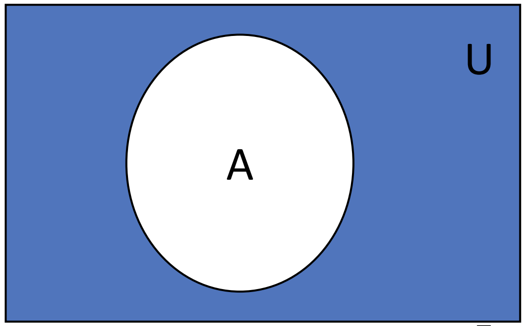
Είναι σκιασμένη η Α-Β

Η διαφορά των {1,3,5} και {1,2,3} είναι το σύνολο {5} δηλ. {1,3,5}-{1,2,3}={5}.
Αυτή είναι διαφορετική από τη διαφορά των {1,2,3} και {1,3,5} που είναι το σύνολο {2}

Πράξεις με σύνολα: Συμπλήρωμα

Έστω ότι U είναι το γενικό σύνολο.
Το συμπλήρωμα του συνόλου A συμβολίζεται με $\bar{A}$ και είναι το συμπλήρωμα του A ως προς το σύνολο U.
Δηλ., το συμπλήρωμα του συνόλου A είναι η διαφορά U-A.

Ένα στοιχείο x ανήκει στο $\bar{A}$ αν και μόνον αν $x \notin A$.
Δηλαδή: $\bar{A}=\{x \mid x \notin A\}$.



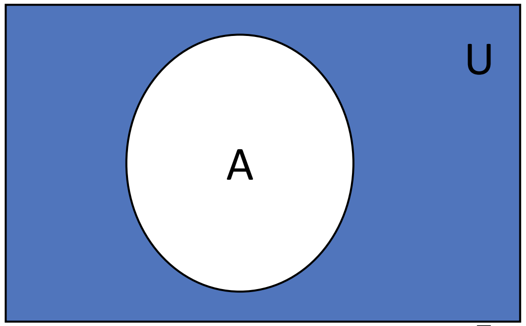
Είναι σκιασμένο το $\bar{A}$

Έστω A={a,e,i,o,u} και το γενικό σύνολο είναι το σύνολο των γραμμάτων του αγγλικού Αλφαβήτου. Τότε $\bar{A}$={b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z}.

Πράξεις με σύνολα: Συμπλήρωμα

Έστω ότι U είναι το γενικό σύνολο.
Το συμπλήρωμα του συνόλου A συμβολίζεται με $\bar{A}$ και είναι το συμπλήρωμα του A ως προς το σύνολο U.
Δηλ., το συμπλήρωμα του συνόλου A είναι η διαφορά U-A.

Ένα στοιχείο x ανήκει στο $\bar{A}$ αν και μόνον αν $x \notin A$.
Δηλαδή: $\bar{A}=\{x \mid x \notin A\}$.



Είναι σκιασμένο το $\bar{A}$

Έστω A το σύνολο των θετικών ακεραίων που είναι μεγαλύτεροι του 10 και το γενικό σύνολο είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων. Τότε $\bar{A}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Ασκήσεις

3. Εστω $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $B = \{0, 3, 6\}$. Να βρεθούν τα

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$

3. a) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **b)** $\{3\}$

4. Εστω $A = \{a, b, c, d, e\}$ και $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Να βρεθούν τα

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$

9. Εστω ότι τα A και B είναι σύνολα. Να δειχτεί ότι $A \cap (A \cup B) = A$.

11. Να δειχτεί ότι αν τα A και B είναι σύνολα, τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

a) με το να δείξουμε ότι κάθε πλευρά είναι υποσύνολο της άλλης πλευράς.

b) με χρήση πίνακα μελών.

21. Τι μπορούμε να πούμε για τα σύνολα A και B αν γνωρίζουμε ότι

a) $A \cup B = A$; **b)** $A \cap B = A$;

21. a) $B \subseteq A$ **b)** $A \subseteq B$

$A \cap (A \cup B) = A$

- Αν $x \in A \cap (A \cup B)$
  - $\Rightarrow$ (από τον ορισμό της τομής) $x \in A$ και $x \in (A \cup B)$
- Αν $x \in A$
  - $\Rightarrow$(από τον ορισμό της ένωσης) $x \in (A \cup B) \Rightarrow$
  - $\Rightarrow$ (από τον ορισμό της τομής) $x \in A \cap (A \cup B)$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

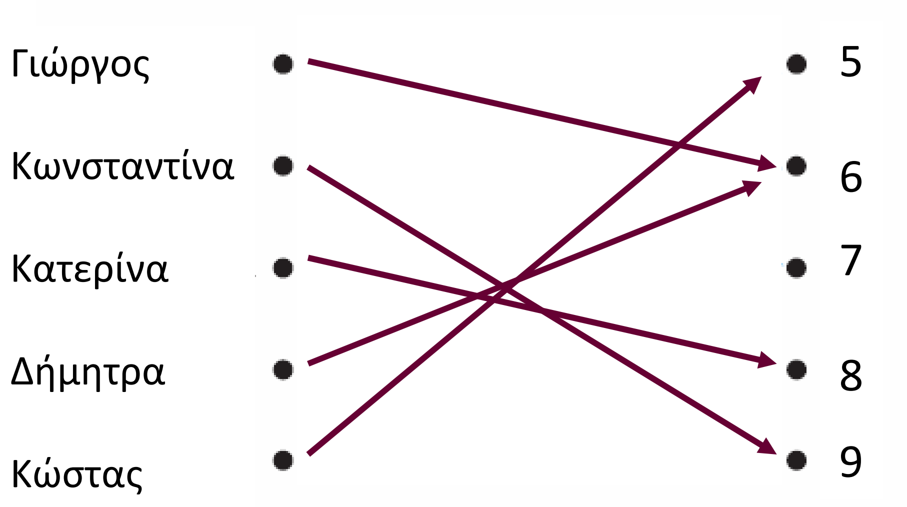
11. **a)** $x \in \overline{(A \cup B)} \equiv x \notin (A \cup B) \equiv \neg(x \in A \vee x \in B) \equiv \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \equiv x \notin A \wedge x \notin B \equiv x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \equiv x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

b)

A	B	$A \cup B$	$\overline{(A \cup B)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Συναρτήσεις: ιδέα

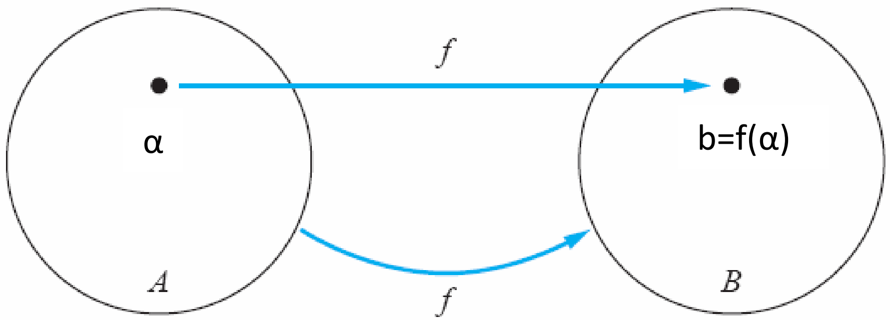
- Σε κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αναθέτουμε ένα συγκεκριμένο στοιχείο ενός συνόλου B (μπορεί να είναι A=B)
- Π.χ., ανάθεση βαθμών σε φοιτητές



- Η ανάθεση αυτή αποτελεί παράδειγμα συνάρτησης

Συναρτήσεις: ορισμός

Έστω ότι τα A και B είναι σύνολα
Συνάρτηση f από το A στο B είναι ανάθεση ενός μόνο στοιχείου του B σε κάθε στοιχείο του A
Γράφουμε f(α)=b αν b είναι το μοναδικό στοιχείο του B που έχει ανατεθεί από τη συνάρτηση f στο στοιχείο α του A
Αν η f είναι συνάρτηση από το A στο B γράφουμε $f: A \rightarrow B$



Η συνάρτηση f απεικονίζει το σύνολο A στο σύνολο B

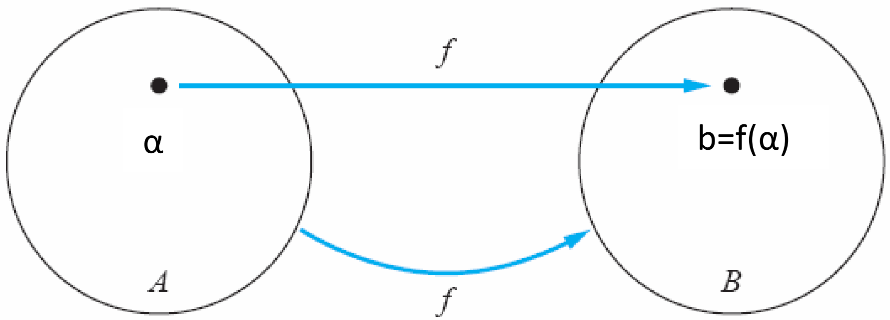
Συναρτήσεις: ορισμός

Αν η f είναι συνάρτηση από το Α στο Β λέμε ότι το Α είναι το πεδίο ορισμού της f και το Β είναι το σύνολο τιμών της f

Αν f(α)=b λέμε ότι το b είναι εικόνα του α και το α είναι πρότυπο του b

Το πεδίο τιμών της f είναι το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του Α

Αν η f είναι συνάρτηση από το Α στο Β λέμε ότι η f απεικονίζει το Α στο Β



Η συνάρτηση f απεικονίζει το σύνολο Α στο σύνολο Β

Παράδειγμα

Έστω ότι f είναι η συνάρτηση που αναθέτει τα τελευταία 2 bits μιας Συμβολοσειράς bit μήκους 2 ή παραπάνω στη συμβολοσειρά αυτή

Τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών bit μήκους 2 ή παραπάνω και το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο {00,01,10,11}

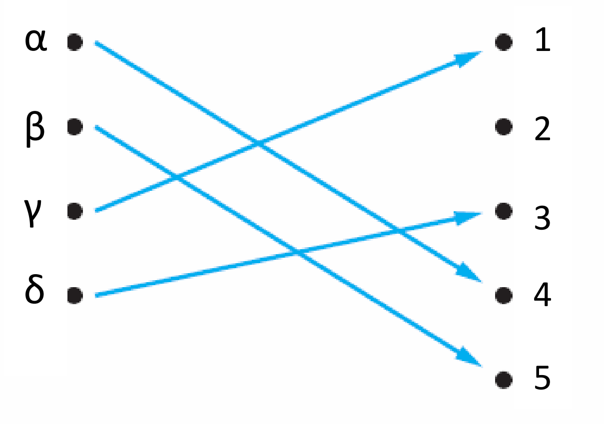
Συναρτήσεις: εικόνα συνόλου

Έστω f συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B και έστω S υποσύνολο του A
Η εικόνα του S είναι το υποσύνολο του B που αποτελείται από τις εικόνες των στοιχείων του S
Συμβολίζουμε την εικόνα του S με f(S) έτσι ώστε: $f(S)=\{f(s) | s \in S\}$

Έστω $A =\{a,b,c,d,e\}$ και $B=\{1,2,3,4\}$ με $f(a)=2$, $f(b)=1$, $f(c)=4$, $f(d)=1$ και $f(e)=1$
Η εικόνα του υποσυνόλου $S=\{b,c,d\}$ είναι το σύνολο $f(S)=\{1,4\}$

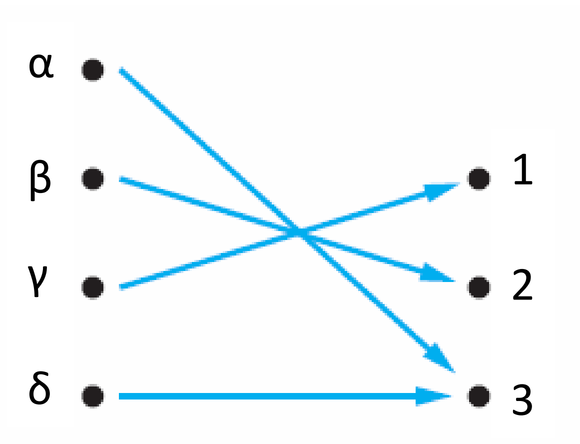
Συναρτήσεις ένα-προς-ένα

- Διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού έχουν διαφορετικές εικόνες
- Μια συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα αν και μόνον αν $f(x) \neq f(y)$ αν $x \neq y$
  - Η συνάρτηση $f(x)=x+1$ είναι ένα-προς-ένα αφού $f(x+1) \neq f(y+1)$ όταν $x \neq y$
  - Η παρακάτω συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα



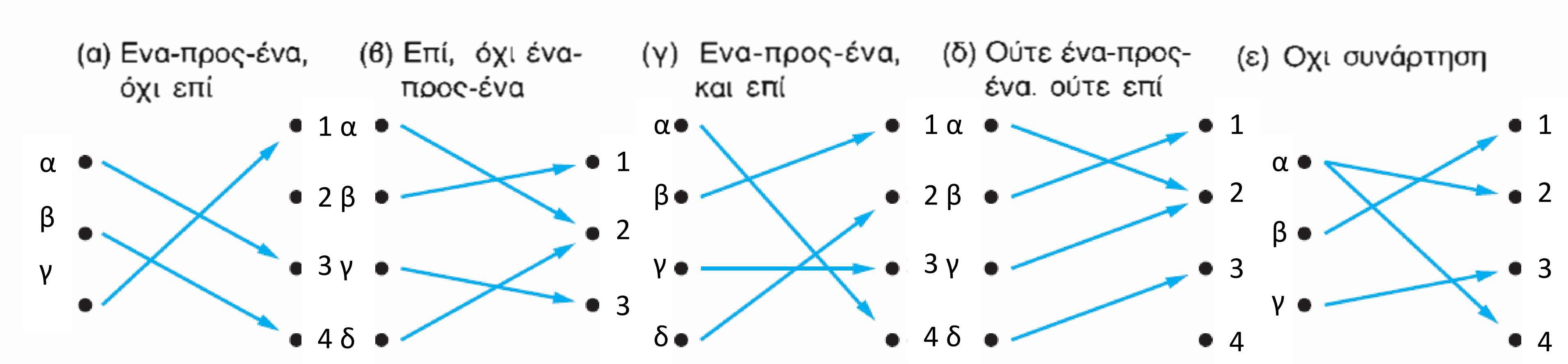
Συναρτήσεις επί

- Χρησιμοποιείται όλο το σύνολο τιμών τους
- Μια συνάρτηση f από το σύνολο A στο σύνολο B είναι επί αν και μόνον αν για κάθε στοιχείο $b \in B$ υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ με $f(\alpha)=b$



Αντιστοιχίες

- Μια συνάρτηση f αντιστοιχία αν είναι και ένα-προς-ένα και επί



Ασκήσεις (Ι)

5. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

a) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε συμβολοσειρά bit την διαφορά μεταξύ του πλήθους των 1 και του πλήθους των 0. ΠΤ=Το σύνολο των ακεραίων

b) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε συμβολοσειρά bit δύο φορές το πλήθος των 0 στην συμβολοσειρά αυτή. ΠΤ=Το σύνολο των μη αρνητικών άρτιων ακεραίων

c) της συνάρτησης που αναθέτει το πλήθος των bit που απομένουν όταν συμβολοσειρά bit χωρίζεται σε byte (που είναι ομάδες των 8 bit). ΠΤ={0,1,2,3,4,5,6,7}

d) της συνάρτησης που αναθέτει σε κάθε θετικό ακέραιο το μεγαλύτερο τέλειο τετράγωνο που δεν ξεπερνά αυτόν τον ακέραιο. ΠΤ={0,1,4,9,16,25,36,49,64,…}

10. Να προσδιοριστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις από το $\{a, b, c, d\}$ προς τον εαυτό του είναι ένα-προς-ένα.

a) $f(a)=b\,,\ f(b)=a\,,\ f(c)=c\,,\ f(d)=d$

b) $f(a)=b\,,\ f(b)=b\,,\ f(c)=d\,,\ f(d)=c$

c) $f(a)=d\,,\ f(b)=b\,,\ f(c)=c\,,\ f(d)=d$

11. Ποιές συναρτήσεις στην Ασκηση 10 είναι συναρτήσεις επί; Μόνο η (a)

Ασκήσεις (ΙΙ)

9. (Προσαρμογή από το [Sm78]) Εστω ότι σ' ένα νησί υπάρχουν τρία είδη ανθρώπων, αφέντες, υπηρέτες, και κανονικοί. Οι αφέντες λένε πάντοτε την αλήθεια, οι υπηρέτες λένε πάντοτε ψέμματα, και οι κανονικοί πότε λένε την αλήθεια και πότε λένε ψέμματα. Οι αστυνομικοί ανέκριναν τρεις κατοίκους του νησιού –την Amy, την Brenda, και την Claire– σαν τμήμα έρευνας για ένα έγκλημα. Οι αστυνομικοί γνώριζαν ότι μια από τις τρεις έκανε το έγκλημα, αλλά δεν γνώριζαν ποιά από τις τρεις. Γνώριζαν, ακόμη, ότι ο εγκληματίας ήταν αφέντης, ενώ οι άλλοι δύο δεν ήταν αφέντες. Επιπλέον, οι αστυνομικοί κατέγραψαν τις παρακάτω δηλώσεις: Amy: "Είμαι αθώα." Brenda: "Οτι λέει η Amy είναι αλήθεια." Claire: "Η Brenda δεν είναι κανονικός άνθρωπος." Μετά την ανάλυση των πληροφοριών, οι αστυνομικοί αναγνώρισαν θετικά τον ένοχο. Ποιός ήταν;

Ασκήσεις (ΙΙΙ)

- Αν Amy ένοχη ⇒ αφέντης ⇒ Amy λέει αλήθεια ⇒ Amy είναι αθώα: άτοπο
- Αν Brenda ένοχη ⇒ αφέντης ⇒ Brenda λέει αλήθεια ⇒ Amy λέει αλήθεια ⇒ Amy αφέντης ή κανονική
  - Amy δεν μπορεί να είναι αφέντης ⇒ Amy κανονική
  - Claire κανονική ή υπηρέτης
    - Αν Claire κανονική ⇒ λέει αλήθεια ή ψέματα: OK
    - Αν Claire υπηρέτης ⇒ λέει ψέματα ⇒ Brenda κανονική: άτοπο
- Αν Claire ένοχη ⇒ αφέντης ⇒ Claire λέει αλήθεια ⇒ Brenda δεν είναι κανονική ⇒ Brenda υπηρέτης ⇒ Brenda λέει ψέματα ⇒ Amy λέει ψέματα ⇒ Amy δεν είναι αθώα ⇒ Amy είναι ένοχη ⇒ Amy είναι αφέντης: άτοπο

Ασκήσεις (IV)

18. Να βρεθούν οι αρνήσεις των παρακάτω δηλώσεων.

a) Αν χιονίσει σήμερα, θα κάνω σκι αύριο.

b) Ο καθένας μέσα στην τάξη αυτή καταλαβαίνει την μαθηματική επαγωγή.

c) Σε κάποιους μαθητές στην τάξη αυτή δεν αρέσουν τα διακριτά μαθηματικά.

d) Σε κάθε τάξη μαθηματικών υπάρχει κάποιος μαθητής που κοιμάται στο μάθημα.

21. Εστω ότι A είναι το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν το γράμμα x, και έστω B το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν το γράμμα q. Να εκφραστούν τα παρακάτω σύνολα σαν συνδυασμός των A και B.

a) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που δεν περιέχουν το γράμμα x.

b) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν και το γράμμα x και το γράμμα q.

c) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν το γράμμα x αλλά όχι το γράμμα q.

d) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που δεν περιέχουν ούτε το γράμμα x ούτε το γράμμα q.

e) Το σύνολο των Αγγλικών λέξεων που περιέχουν το γράμμα x ή το γράμμα q, αλλά όχι και τα δύο γράμματα.

21. a) $\overline{A}$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A - B$ **d)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **e)** $A \oplus B$

Λογικά παράδοξα

- Το παράδοξο του Επιμενίδη από την Κρήτη
  - Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται (οι Κρήτες είναι πάντα ψεύτες)
  - Λύση: φαίνεται να εννοούσε όλους τους άλλους Κρήτες εκτός από τον εαυτό του
- Το παράδοξο της κάρτας του Jourdain
  - Σε μια καρτ-ποστάλ υπάρχουν οι εξής δηλώσεις:
    - **Μπροστά μέρος:** Η πρόταση στο άλλο μέρος είναι ΑΛΗΘΗΣ
      - Ό, τι λέει η μητέρα σου είναι σωστό
    - **Πίσω μέρος:** Η πρόταση στο άλλο μέρος είναι ΨΕΥΔΗΣ
      - Ό, τι λέει ο πατέρας σου είναι λάθος
  - Λύση: καμμία πρόταση δεν είναι αληθής ή ψευδής
- Το παράδοξο του κουρέα (Bertrand Russell)
  - Σε ένα χωριό, ο κουρέας ξυρίζει μόνον όποιον δεν ξυρίζεται μόνος του
  - Ποιος ξυρίζει τον κουρέα;
  - Λύση: δεν υπάρχει τέτοιος κουρέας
    - Αν κάποιο άλλο άτομο y ξυρίζει τον κουρέα $\Rightarrow$ ο κουρέας ΔΕΝ ξυρίζεται μόνος του $\Rightarrow$ ΌΧΙ κουρέας
    - Αν ο κουρέας ξυρίζεται μόνος του $\Rightarrow$ ΔΕΝ μπορεί να είναι ο κουρέας