Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odjel

Mladen Vuković

# MATEMATIČKA LOGIKA 1

## skripta

Četvrto, izmijenjeno i dopunjeno izdanje

Zagreb, svibanj 2007.

doc.dr. sc. Mladen Vuković: Matematička logika 1

Recenzenti:
$\boxed{\text{dr. sc. Vladimir G. Kirin}}$, redovni profesor, PMF-MO
dr. sc. Zvonimir Šikić, redovni profesor, FSB

Izdavač: PMF-Matematički odjel,
Sveučilište u Zagrebu,
Zagreb, Bijenička c. 30

Za tisak pripremio:
Mladen Vuković



CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

UDK 510.6(075.8)
164(075.8)

VUKOVIĆ, Mladen
Matematička logika 1: skripta / Mladen Vuković -
Zagreb: PMF-Matematički odjel, 2007. - IV, **248** str.; 24cm

Bibliografija: str. **241** - Indeks

ISBN 953-6076-67-5
990326022

ISBN 953-6076-67-5

# Sadržaj

**Uvod** **1**

**1 Logika sudova** **9**
1.1 Uvod . . . . . 9
1.2 Jezik logike sudova . . . . . 11
1.3 Interpretacije . . . . . 14
1.4 Normalne forme . . . . . 22
1.4.1 Propozicionalni veznici . . . . . 30
1.5 Testovi valjanosti . . . . . 38
1.6 Račun sudova (Frege–Łukasiewiczev sistem) . . . . . 43
1.6.1 Sistem $RS$ . . . . . 43
1.6.2 Konzistentnost . . . . . 54
1.6.3 Potpuni skupovi formula . . . . . 59
1.6.4 Teorem potpunosti . . . . . 62
1.6.5 Teorem kompaktnosti . . . . . 62
1.7 Prirodna dedukcija . . . . . 77
1.8 Alternativne aksiomatizacije logike sudova . . . . . 102
1.9 Neke neklasične logike sudova . . . . . 108
1.9.1 Intuicionistička logika . . . . . 108
1.9.2 Modalna logika . . . . . 112

**2 Logika prvog reda** **121**
2.1 Uvod . . . . . 121
2.2 Jezik teorija prvog reda . . . . . 124
2.3 Interpretacije i modeli . . . . . 130
2.4 Preneksna normalna forma . . . . . 146
2.5 Glavni test . . . . . 154
2.6 Račun teorija prvog reda . . . . . 172
2.6.1 Osnovne definicije . . . . . 172
2.6.2 Metateoremi o teorijama prvog reda . . . . . 176

2.6.3 Sistem prirodne dedukcije za logiku prvog reda . . . . . . 185
2.7 Teorem potpunosti i posljedice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188
2.7.1 Konzistentnost . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188
2.7.2 Generalizirani teorem potpunosti . . . . . . . . . . . . . . . 193
2.7.3 Posljedice generaliziranog teorema potpunosti . . . . . . . 198
2.7.4 Ograničenja logike prvog reda . . . . . . . . . . . . . . . . . 206
2.7.5 Kategoričnost teorija . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 208
2.8 Primjeri teorija prvog reda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 211
2.8.1 Teorije s jednakošću . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 211
2.8.2 Peanova aritmetika . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 221
2.8.3 Zermelo–Fraenkelova teorija skupova . . . . . . . . . . . . . 226
2.9 Ultraprodukti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230

**Bibliografija** **241**

**Indeks** **244**

# Predgovor

Ova skripta iz matematičke logike nastala je na osnovu zabilješki iz kolegija *Matematička logika* koji već niz godina predajem na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu. Skripta je prije svega namijenjena studentima koji slušaju kolegije *Matematička logika 1* i *Matematička logika*. U ovoj skripti nije obuhvaćen dio o izračunljivosti koji se predaje u ljetnom semestru u kolegiju *Matematička logika*. Nadamo se da će knjiga zanimati i sve one koji žele dublje proniknuti u osnove matematike, ili žele svoje prije stečeno znanje osvježiti današnjim pristupom matematičkoj logici.

Osnovna tema skripte je klasična logika sudova i predikata. Dane su osnovne definicije i rezultati o intucionističkoj i modalnoj propozicionalnoj logici. Neklasične logike kao što su npr. viševaljana, fuzzy, linearna, beskonačne logike i logike višeg reda, ovdje se zasebno ne proučavaju.

Jedino predznanje, koje se podrazumijeva za čitanje skripte, je nešto malo o naivnoj teoriji skupova. Npr. pojmovi kao što su: prebrojiv skup, kardinalni broj i uređeni skup se koriste u knjizi, ali se posebno ne definiraju.

Na kraju svake točke sakupljeni su zadaci koji imaju za cilj upotpuniti gradivo. Zbog toga su rutinski zadaci (kao što je npr. ispitivanje valjanosti formule; određivanje normalnih formi, ... ) svedeni na najmanju moguću mjeru.

Zahvaljujem se svim prijateljima i kolegama koji su svojim savjetima i sugestijama doprinijeli da ova skripta što prije izađe, te da bude kvalitetnija. Svakako se želim posebno zahvaliti profesorima Vladimiru G. Kirinu, Zvonimiru Šikiću i Deanu Rosenzweigu od kojih sam učio matematičku logiku.

Svaki ispravak, ili pak sugestije, koje bi mogle doprinijeti poboljšanju ovog teksta, rado ću prihvatiti.

U Zagrebu, svibanj 2007. Autor

# Uvod

*Logika* je grčka riječ koja označava učenje o govoru, riječi, umu, razumu, razlogu, mišljenju, ... Kao primarno značenje obično se uzima *govor*.

Što je matematička logika? Je li matematička logika zapravo primjena matematike prilikom logičkih zaključivanja, ili pak neka "stroža" primjena logike prilikom matematičkih dokaza? Je li logika grana matematike, ili obrnuto, ne slažu se ni svi logičari u odgovoru. Intuicionisti smatraju da su matematičke konstrukcije osnova, a logičko rasuđivanje je sekundarno. Logicisti pak smatraju da se matematika zasniva na logici, tj. matematika je grana logike. O svemu tome ćemo nešto detaljnije reći kasnije. Jedno je sigurno: matematička logika je jedna od matematičkih teorija. Neki njeni veliki dijelovi su: teorija skupova, teorija modela, teorija dokaza, teorija rekurzije, ...

Sada ćemo navođenjem najvažnijih činjenica iz povijesti zapadno-europske matematičke logike pokušati opisati njezin nastanak. Na razvitak europske matematike i mišljenja uopće gotovo je jedino utjecala grčka matematika i filozofija. Povijest logike se može grubo podijeliti na razdoblja stvaranja i razdoblja zastoja. Stvarni stvaralački periodi logike su 4. i 3. st. pr.Kr., zatim od 12. do 15. st., te od sredine 19. st. do naših dana. Dakle, podjela povijesti zapadne logike slijedi pet velikih razdoblja: tri razdoblja stvaranja i dva razdoblja stagnacije. Opisat ćemo kratko redom svako razdoblje. No, uz razvoj matematičke logike svakako je blisko povezan i razvoj aksiomatske metode u matematici. Za bolje razumijevanje povijesti matematičke logike ujedno ćemo i opisivati razvoj aksiomatske metode.

Početak grčke logike pada u četvrto stoljeće pr.Kr. Prvim većim logičarima smatraju se Parmenid, Zenon, Sokrat, Platon i Euklid iz Megare. Taj period razvoja dostiže vrhunac genijalnim stvaranjem Aristotela[1] Njemu je prvom uspjelo sistematizirati metode rasuđivanja koje su do tada bile poznate, te je proučavanjem silogizama[2] pokušao sustavno opisati sva logička zaključivanja.

[1] Aristotel, 384.–322. pr.Kr.

[2] Aristotelova silogistika ima veliku povijesnu vrijednost, jer je bila prvi primjer stroge izgradnje jednog formalno-logičkog sustava. Tijekom dvaju tisućljeća (do pojave matematičke

Glavna Aristotelova teza bila je da se svako korektno rasuđivanje može svesti na sistematsku primjenu nevelikog broja određenih pravila, koja ne zavise od prirode objekata na koji se odnosi rasuđivanje. U okvirima do danas razvijenih dijelova matematičke logike Aristotelova je silogistika samo mali i prilično elementaran dio koji pripada logici jednomjesnih predikata. U istom stoljeću je Euklid u svojim radovima *Elementi* prvi pokušao aksiomatski zasnovati geometriju.

Poznogrčki i rimski period u razvitku logike odlikuju se uglavnom poboljšavanjem i sistematiziranjem onoga što je već ranije napravljeno. Taj period završava se oko 6. stoljeća naše ere. Sljedećih šest stoljeća za logiku u Europi znače potpuni mir. Od 12. do 15. stoljeća nastupa period skolastičke logike. Novi period, period tzv. klasične logike, je u znaku vraćanja Aristotelu kao jedinom autoritetu.

Matematička simbolika uvedena u 16. stoljeću od strane Vieta[5] i Descartesa[6] je inspirirala mnoge pokušaje simboličkih zapisa logičkih rasuđivanja i matematičkih dokaza. Do Leibniza[7] su svi ti pokušaji vrlo površni i bez velikog značaja. Leibnizova osnovna filozofska ideja bila je stvaranje jednog općeg simboličkog jezika, uz pomoć kojeg bi se svi procesi rasuđivanja i zaključivanja mogli zapisati simbolima i formulama. Radio je na algebraizaciji Aristotelove logike i tako se približio onom što danas zovemo Boolova algebra.

Za osnivača suvremene simboličke formalne logike može se smatrati Boole[8]. Boolov krajnji cilj bio je stvaranje odgovarajuće simbolike i oblikovanje zakona za manipuliranje simbolima po uzoru na aritmetiku. Neinterpretirane jednadžbe u dokazima smetale su čistom logičkom razumijevanju osnovnih zakona, pa je počelo "čišćenje" od aritmetike.

Dedekind[9] je dao aksiomatizaciju prirodnih brojeva. Treba spomenuti da se ta aksiomatizacija prirodnih brojeva obično naziva Peanovi aksiomi. Peano[10] je sveo čitavu aritmetiku na tri primitivna pojma: "broj", "nula" i "sljedbenik", i pet aksioma. Ti aksiomi preuzeti su iz Dedekindovog rada *Was sind und was sollen die Zahlen?* iz 1888. godine. Međutim, Dedekind ih u svom radu ne korisiti kao aksiome.

---

logike) ona je zapravo bila jedina formalna logika. Još je krajem 18. stoljeća njemački filozof Kant[3] smatrao da je Aristotel rekao sve što se uopće može reći o zakonima formalne logike, i da je zbog toga formalna logika u nekom smislu mrtva nauka koja se ne može više uopće razvijati. No, logička istraživanja Aristotela i njegovih sljedbenika nisu se završila samo na silogistici. Aristotel i njegov učenik Teofrast[4] dali su temelje modalnoj logici. Burni razvoj matematičke logike, koji je počeo sredinom prošlog stoljeća, opovrgnuo je Kantov pesimizam.

[5] F. Viet, 1540.–1603.

[6] R. Descartes, 1596.–1650.

[7] G. W. Leibniz, 1646.–1716.

[8] G. Boole, 1815.–1864.

[9] W. Dedekind, 1831.–1916.

[10] G. Peano, 1858.–1932.

Frege[11] je odgovarajući na pitanje što je logika formulirao predikatni račun kao formalnu teoriju. U radu *Begriffschrift eine der aritmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens* iz 1879. Frege je formalizirao matematičko argumentiranje u peanovskom smislu, ali u potpunosti kakvu Peano nikad nije postigao. Redukciju matematike na logiku, koja predstavlja veliku ambiciju logicizma, opisao je i obranio Frege u svom radu *Die Grundlagen der Arithmetik* iz 1884., a to je realizirao sistematski u radu *Grundgesetze der Arithmetik*. Prije završetka drugog toma svog djela *Grundgesetze der Arithmetik* Frege je primio pismo od Russella[12] u kojem je opisan paradoks[13] skupa svih skupova koji nisu elementi sebe samih. Frege je taj Russellov paradoks tumačio kao sasvim poražavajući za sistem koji je konstruirao. Fregeovi radovi naišli su na potpuno nerazumijevanje suvremenika. Frege je postao opće priznat tek pedesetak godina nakon objavljivanja svojih radova.

Frege je prvi uspio objediniti aksiomatiku i logiku, te dati formalni sistem za potpuni opis logike prvog reda. Sljedećom skicom prikazujemo do sada opisani paralelni razvoj aksiomatske metode i logike.

| **AKSIOMATIKA** | | **LOGIKA** |
|---|---|---|
| *Euklid* (4. *st. pr.Kr.*) | | *Aristotel* (4. *st. pr.Kr.*) |
| ∘ | | ∘ |
| ∘ | | ∘ |
| ∘ | | ∘ |
| *Dedekind* (1888.) | | *Boole* (1847.) |
| | *G.Frege* (1879.) | |

U svrhu zasnivanja osnova matematike Cantor[14] je razvio novu teoriju - naivnu teoriju skupova. U vrlo kratkom vremenu dobiveno je puno važnih rezultata. Činilo se da je teorija skupova upravo traženi temelj matematike. No, nažalost dogodilo se upravo suprotno, tj. ne samo da nova teorija nije mogla biti temelj matematike, već se u okviru nje pojavilo nešto što matematičari nikako nisu mogli dopustiti. U Cantorovoj teoriji skupova otkriveni su paradoksi (prije

[11] G. Frege, 1848.–1925.

[12] B. Russell, 1872.–1970.

[13] Russellov paradoks: Označimo sa $A$ kolekciju skupova $\{x : x \notin x\}$. Dakle, $A$ sadrži sve skupove koji ne sadrže sebe sama. Ako prihvatimo da je $A$ skup, tada je smisleno pitanje pripada li $A$ skupu $A$. No, ako je $A$ element od $A$ tada skup $A$ ima dano svojstvo, tj. $A \notin A$. Na isti način iz pretpostavke $A \notin A$ slijedi $A \in A$, što sve zajedno vodi na kontradikciju. U prvi tren moglo bi se reći da $A$ nije skup, pa zapravo ni nema paradoksa. No, onda se postavlja pitanje koji će biti kriterij prilikom definicije skupa. Kako ćemo znati slijedi li kontradikcija iz pretpostavke o egzistenciji nekog skupa?

[14] G. Cantor, 1845.–1918.

smo već istaknuli Russellov paradoks), štoviše čitavo mnoštvo[15]. Činilo se da je matematika u velikoj krizi. No, to je bio snažan poticaj za istraživanje osnova matematike.

Russell je od 1910. do 1913. u suradnji s Whiteheadom[16] izdao tri toma knjige *Principia mathematica* gdje primjenjuju veoma precizan logički jezik, koji je inspiriran Peanovom simbolikom, te ostvaruju tako većinu Fregeovih ideja: paradoksi, koje sadrži Fregeov sistem, izbjegnuti su uvođenjem teorije tipova.

Hilbert[17], za razliku od Fregeovog i Russellovog logicizma, zalagao se za koncepciju da simboli i operacije na simbolima čine centralno osnovno mjesto matematike. Takva filozofija matematike se naziva formalizam. Hilbert je smatrao da je centralni problem za svaku granu matematike dokazati da dokazni postupci neće nikada rezultirati s nekom izjavom i istovremeno negacijom iste izjave. Za ostvarenje ovog programa (nazvanog Hilbertov program) Hilbert zasniva novu granu matematičke logike koja se naziva teorija dokaza. Uz nekoliko izuzetaka, Russellovo djelo *Principia Mathematica* nije imalo većih neposrednih sljedbenika, a to znači ni logicizam. Formalizam[18] je postao dominatna težnja u matematici.

Kao neposredno suprostavljenu koncepciju formalizmu treba svakako navesti intuicionizam. Začetnik te filozofije matematike je Brouwer[19]. Za intuicioniste je egzistencija nekog matematičkog objekta ekvivalentna s poznavanjem metode kojom se taj objekt može konstruirati. Oni ne priznaju indirektni dokaz u općem slučaju. Heyting[20] je dao aksiomatizaciju intuicionističke logike koja se razlikuje od klasične logike po tomu što su ispušteni zakoni isključenja trećeg ($P \vee \neg P$) i dvostruke negacije ($\neg\neg P \rightarrow P$).

Gödel[21] je 1930. dokazao potpunost logike prvog reda. Njegov rad *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme* iz 1931. srušio je sve nade u ostvarenje Hilbertovog programa u prvobitnom obliku. U tom radu Gödel je dokazao da je svaki formalni sistem, koji sadrži barem elementarnu aritmetiku, nužno nepotpun, tj. da postoji tvrdnja koja se ne može dokazati ni opovrgnuti u tom formalnom sistemu. Taj rezultat se naziva prvi Gödelov teorem nepotpunosti. Drugi Gödelov teorem tvrdi da se konzistentnost nijednog formalnog sistema ne može dokazati u njemu samom, tj. mora se

[15]Uz već spominjani Russelov paradoks među najpoznatije paradokse ubrajaju se Cantorov paradoks skupa svih skupova i Burali–Fortijev paradoks (C. Burali–Forti, 1861.–1931.)

[16]A. N. Whitehead, 1861.–1947.

[17]D. Hilbert, 1862.–1943.

[18]U Burbakijevim Elementima matematike, koji na neki način predstavljaju kraj i kulminaciju formalizma, osnove matematike su predstavljene kao simbolička logika i aksiomatska teorija skupova.

[19]L. E. J. Brouwer, 1881.–1966.

[20]A. Heyting, 1898.–1980.

[21]K. Gödel, 1906.–1978.

posegnuti za jačim sredstvima od onih kojima raspolaže sam sistem.

Rezultate drugih logičara nakon Gödela ovdje ne navodimo jer smatramo da više nisu u tako bliskoj vezi sa sadržajem ove skripte, tj. s klasičnom logikom sudova i predikata.

Može se reći da je matematička logika na početku imala za cilj istražiti pravilna logička zaključivanja, a zatim je osnovna preokupacija bila ispitati osnove matematike (npr. Hilbertov program). Danas matematička logika predstavlja i teorijsku osnovu računarstva. Zapravo, može se reći da određena formalna teorija opisuje "stanje stroja", odnosno formalni dokaz se može promatrati kao program za računalo.

Skripta je podijeljena na dva poglavlja. U prvom poglavlju proučavamo klasičnu logiku sudova. Prvo definiramo jezik i semantiku teorije. U četvrtoj točki definiramo pojam normalne forme i dokazujemo teorem o egzistenciji normalnih formi, te promatramo baze propozicionalnih veznika. Peta točka je posvećena teoremu kompaktnosti za logiku sudova. Dokazujemo ga u ovom poglavlju kako bi isti teorem bio jasniji za logiku prvog reda. U šestoj točki razmatramo neke testove valjanosti za logiku sudova (rezolucija i glavni test). Ostale točke prvog poglavlja posvećene su formalnom dokazu. U sedmoj točki definiramo jedan hilbertovski sistem za logiku sudova. Dokazujemo adekvatnost i potpunost sistema u odnosu na prije definiranu semantiku. Pojmu konzistentnosti posvećena je osma točka. Zatim razmatramo sistem prirodne dedukcije za logiku sudova, te dokazujemo teoreme dedukcije, adekvatnosti i potpunosti. U posljednjoj točki prvog poglavlja navodimo neke alternativne aksiomatizacije logike sudova.

Drugo poglavlje knjige posvećeno je klasičnoj logici predikata. Kao i kod logike sudova, u početnim točkama definiramo jezik i semantiku. U četvrtoj točki dokazujemo teorem o egzistenciji preneksne normalne forme za proizvoljnu formulu. Peta točka je posvećena glavnom testu za ispitivanje valjanosti formula prvog reda. U šestoj točki definiran je račun logike prvog reda, te pomoću toga pojam proizvoljne teorije prvog reda. U sedmoj točki dokazan je generalizirani teorem potpunosti za proizvoljnu teoriju prvog reda, te su navedene razne posljedice (Gödelov teorem potpunosti, teorem kompaktnosti, Löwenheim-Skolemov teorem, ...) U posljednjoj točki dani su neki primjeri teorija prvog reda.

Na kraju ovog uvoda dajemo popis literature koja može pomoći za prevladavanje nejasnoća koje se mogu javiti prilikom čitanja ove skripte. Osnovna pravila prilikom sastavljanja popisa bila su da je knjiga dostupna u biblioteci PMF-MO-a ili je pak izdana u Hrvatskoj.

**E. Mendelson** - *Introduction to Math. Logic*, Chapman&Hall, 1997.

Ovo je svakako knjiga na koju se najviše oslanja ova skripta. No, ta knjiga je daleko obimnija. Prvo izdanje knjige je bilo još 1964. godine.

**C. C. Chang, H. J. Keisler** - *Model theory*, North-Holland, 1997.

Ovo je dugo godina bila najsveobuhvatnija monografija iz teorije modela. Po našem skromnom mišljenju u Mendelsonovoj knjizi nedostaje baš malo više teorije modela.

**J. R. Shoenfield** - *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1967.

Prekrasna knjiga iz matematičke logike. No, smatramo da je preteška za prvi susret s matematičkom logikom.

**A. G. Hamilton** - *Logic for Mathematicians*, Cambridge University Press, 1995.

Prvo izdanje ove knjige bilo je 1943. godine. Knjiga je zanimljiva, jer iako je posvećena matematičkoj logici, ima malo formalnih dokaza – za razliku od npr. Mendelsonove knjige.

**V. Devidé** - *Matematička logika: klasična logika sudova*, Beograd, 1972.

Detaljno je obrađena logika sudova. Šteta što profesor Devidé nije napisao drugi dio posvećen logici prvog reda.

**Z. Šikić** - *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Drugo poglavlje ove knjige ima naslov *Kako je stvorena teorija skupova*, a u trećem poglavlju je opisano nastajanje matematičke logike. Posebno su detaljno opisani doprinosi Boolea, Fregea i Gödela.

**Z. Šikić** - *Filozofija matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

U ovoj knjizi možete čitati detaljnije o smjerovima u logici kao što su logicizam, formalizam i intuicionizam.

**B. Ćirović** - *Uvod u matematičku logiku i teoriju rekurzivnih funkcija*, Filozofsko-teološki institut Družbe Isusove, Zagreb, 1996.

Knjiga je na hrvatskom jeziku i relativno nova tako da je svakako morala biti na ovom popisu. Iako nije namijenjena matematičarima treba je pogledati.

**L. A. Kalužnin** - *Što je matematička logika*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

Ovo je knjiga iz poznate serije *Moderna matematika*, koju je objavljivala Školska knjiga. Pisana je popularno, no vrijedi je pročitati.

**I. A. Lavrov, L. L. Maksimova** - *Zbornik zadač po teorii množestv, mat. logiki i teorii algoritmov*, (rus.) Nauka, Moskva, 1984.

Zbirka zadataka na ruskom jeziku s puno dobrih (i teških!) zadataka. Na sreću, na kraju zbirke su dana rješenja.

**J. Nolt, D. Rohatyn** - *Logic,* Schaum's Outline series, McGraw-Hill, 1988.

Zbirka zadataka iz popularne Schaum's serije. Ima puno zadataka o sistemu prirodne dedukcije i glavnom testu.

# Poglavlje 1

# Logika sudova

## 1.1 Uvod

Jedan od osnovnih problema u matematičkoj logici je ispitati istinitost neke rečenice, bolje reći logičke forme, promatrajući samo oblik rečenice, a ne i sadržaj. Logika sudova je jedna od najjednostavnijih formalnih teorija. U njoj rečenice promatramo kao forme koje su sastavljene od "atomarnih" dijelova koji su povezani veznicima: *ne, i, ili, ako ... onda* i *ekvivalentno*. Dakle, u logici sudova ne vršimo daljnju razgradnju rečenice (npr. u odnosu na kvantifikatore). Intuitivno, sud je svaka suvisla izjavna rečenica koja je istinita ili lažna, ali ne oboje. No, to svakako ne može biti definicija suda, jer tada se postavlja pitanje npr. što je rečenica, ili pak što je istinita rečenica. Pokušat ćemo objasniti pojam suda pomoću nekoliko primjera.

(1) Rečenica "*Dva plus dva je jednako četiri.*" jeste sud i to istinit.

(2) Rečenica "*Dva plus dva je jednako pet.*" jeste sud i to lažan.

(3) Rečnica "*$x$ plus dva je jednako osam.*" nije sud, jer za ovu rečenicu ne možemo reći je li istinita ili lažna, dok nismo rekli koliko je $x$.

(4) Rečenica "*Ja sada lažem.*" nije sud, jer pretpostavimo li da je istinita, onda sam zaista lagao, pa je ono što sam rekao lažno. Obrnuto, pretpostavimo li da je ta rečenica lažna onda nisam lagao, pa je ono što sam rekao istina. Dakle, za ovu rečenicu ne možemo reći ni da je istinita, a ni da je lažna.

(5) Rečenica "*Koliko je sati?*" nije sud, jer nije izjavna rečenica.

Sudovi (1) i (2) su jednostavnog oblika. Pomoću veznika *i, ili, ako ... onda* i *nije* možemo iz jednostavnijih sudova graditi složene. Na primjer rečenica "*Ako*

*Vanja uči, onda Ivona gleda crtane filmove."* je primjer složenog suda, jer je nastala pomoću veznika *ako ... onda* iz jednostavnih sudova.

U logici sudova, osim što se ispituje istinitost rečenica, proučavaju se i logička zaključivanja, te se određuje koja su korektna, a koja nisu. Promotrimo dva primjera. Zaključivanje:

$$\begin{array}{l} \text{Ako si nabavio ulaznice tada idemo na utakmicu.} \\ \text{Nabavio sam ulaznice.} \\ \hline \text{Idemo na utakmicu.} \end{array}$$

je naravno primjer korektnog zaključivanje. Formalno zapisano ono je oblika

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Nadamo se da se slažete da zaključivanje:

$$\begin{array}{l} \text{U subotu ću dugo spavati.} \\ \text{Danas nije subota.} \\ \hline \text{Danas sam rano ustao.} \end{array}$$

nije korektno. Formalno ga možemo zapisati u obliku:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg A \\ \hline \neg B \end{array}$$

U ovom poglavlju ćemo definirati što je logička posljedica, tj. koje zaključivanje smatramo korektnim. Kao što smo već u Uvodu spomenuli još je Aristotel pokušao pomoću nevelikog broja pravila opisati svako logičko zaključivanje. Time se i mi bavimo u ovom poglavlju za logiku sudova.

Pošto ćemo definirati nekoliko formalnih teorija, sada ćemo kratko objasniti u nekoliko rečenica što znači zadati neku teoriju. Na početku se polazi od nekog broja pojmova koji se ne definiraju, a nazivaju se *osnovni pojmovi*. (Npr. prilikom aksiomatizacije geometrije Hilbert ne definira točku, pravac i ravninu; za razliku od Euklida). To zapravo znači da smo zadali jezik teorije. Zatim se popišu osnovne tvrdnje o danim osnovnim pojmovima koje se smatraju istinitima. Te tvrdnje čiju istinitost ne dokazujemo nazivamo *aksiomi*. Svaki novi pojam uvodimo definicijom pomoću osnovnih pojmova. Svaku novu tvrdnju dokazujemo logičkim zaključivanjem na osnovu aksioma, definicija i tvrdnji koje smo već ranije dokazali. Obično se želi da izabrani aksiomi zadovoljavaju sljedeća tri principa:

a) **konzistentnost**, tj. iz sistema aksioma se ne smije moći dokazati istovremeno neka tvrdnja i njena negacija;

b) **potpunost**, tj. svaka tvrdnja, ili njena negacija, je dokaziva u danom sistemu aksioma;

c) **nezavisnost**, tj. niti jedan aksiom se ne može dobiti kao posljedica ostalih.

## 1.2 Jezik logike sudova

U ovoj točki definiramo što su osnovni znakovi teorije koju proučavamo, tj. logike sudova, te kako gradimo nama zanimljive nizove znakova - formule. Kada je to zadano smatramo da je zadan **jezik** teorije. Prije definicije formula moramo uvesti još neke pojmove. **Alfabet** je proizvoljan neprazan skup. Svaki element alfabeta nazivamo **simbol** ili **znak.** **Riječ** alfabeta je svaki konačan niz danog alfabeta. **Duljina riječi** je broj simbola koji dolaze u riječi. Ako je sa $A$ označen neki alfabet tada se skup svih riječi obično označava sa $A^*$. Po dogovoru smatramo da skup svih riječi proizvoljnog alfabeta sadrži **praznu riječ**, tj. prazan niz simbola. Najvažnija operacija na skupu riječi je **konkatenacija.** Konkatenacija je binarna operacija na $A^*$, koja je definirana na sljedeći način: ako su $a$ i $b$ riječi (bolje reći oznake za riječi!) tada kažemo da je riječ $ab$ nastala konkatenacijom riječi $a$ i $b$. Kažemo da je $b$ **podriječ** riječi $a$ ako postoje riječi $c$ i $d$ tako da je riječ $a$ nastala konkatenacijom riječi $c$, $b$ i $d$, tj. $a$ je jednaka $cbd$.

Navodimo neke primjere alfabeta. Neka je $A_1 = \{\alpha, \beta\}$. Neke riječi tog alfabeta su npr. $\alpha\alpha\alpha$, $\alpha\beta\alpha\beta\beta\beta$, $\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta$. Iz riječi $\alpha\alpha\beta\beta$ i $\beta\beta\alpha\beta$ konkatenacijom dobivamo riječ $\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\alpha\beta$.

Neka je, zatim, $A_2 = \{+,\ \cdot,\ s,\ 0,\ =\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tada su riječi alfabeta $A_2$ npr. $x_1 + x_2 = x_2$, $x_1 \cdot x_4 + 0 = x_5$, ali i $+ + \cdot x_4 ===$ .

U sljedećoj propoziciji ističemo činjenicu koju ćemo kasnije često koristiti. Ne dokazujemo je jer smatramo da je poznata (npr. vidi [31]).

**Propozicija 1.1.** *Skup svih riječi konačnog ili prebrojivog alfabeta je prebrojiv.*

Mi se nećemo baviti proizvoljnim alfabetima, ili pak problemom prepoznavanja riječi. Definirat ćemo jedan konkretan alfabet nad kojim ćemo dalje graditi formalnu teoriju - logiku sudova. Naravno, logika prvog reda će imati drugačiji alfabet.

**Definicija 1.2. Alfabet logike sudova** *je unija skupova* $A_1,\ A_2$ *i* $A_3$, *pri čemu je:*

$A_1 = \{P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots\}$ *prebrojiv skup čije elemente nazivamo* **propozicionalne varijable**;
$A_2 = \{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow\}$ *skup* **logičkih veznika**;
$A_3 = \{(,\ )\}$ *skup pomoćnih simbola (zagrade).*

Uočite da smo u definiciji naveli da alfabet logike sudova sadrži znakove koje nazivamo propozicionalne varijable. Možete zamišljati da se propozicionalne varijable interpretiraju sudovima, ali to ne mora nužno biti tako. Jedna interpretacija logike sudova su i npr. elektronički logički sklopovi. U sljedećoj točki ćemo formalno definirati interpretacije propozicionalnih varijabli.

Logičke veznike redom nazivamo: $\neg$ **negacija**, $\wedge$ **konjunkcija**, $\vee$ **disjunkcija**, $\rightarrow$ **kondicional** i $\leftrightarrow$ **bikondicional**. Ponekad se definira da alfabet sadrži i znakove $\top$ i $\bot$, koji se nazivaju **logičke konstante** *istina* i *laž*. Mi ovdje smatramo da ih alfabet ne sadrži. Naravno, ne zanimaju nas sve riječi alfabeta. Npr. svakako nećemo promatrati riječ $\neg\wedge)P_2()$. Sada definiramo najvažnije riječi alfabeta logike sudova, a to su formule.

**Definicija 1.3. Atomarna formula** *je svaka propozicionalna varijabla. Pojam* **formule** *definiramo induktivno:*

*a) svaka atomarna formula je formula;*

*b) ako su* $A$ *i* $B$ *formule tada su i riječi* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ *i* $(A \leftrightarrow B)$ *također formule;*

*c) riječ alfabeta logike sudova je formula ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka uvjeta* a) *i* b).

**Napomena 1.4.** *Primijetimo da u prethodnoj definiciji* $A$ *i* $B$ *nisu formule već oznake za formule, tj. to nisu simboli jezika već su meta-simboli. Po dogovoru ćemo s velikim slovima (npr.* $A,\ B,\ C,\ F,\ G,\ F_1,\ F_2,\ \ldots$*) označavati formule. Za propozicionalne varijable upotrebljavat ćemo oznake* $P,\ Q,\ R,\ S,\ \ldots$

*Način zapisivanja formula obzirom na zagrade, kako smo prethodno definirali, naziva se sistem vanjskih zagrada. Zapis formula se može definirati i u sistemu unutarnjih zagrada ili pak u poljskoj notaciji, tj. bez zagrada. Ako su* $A$ *i* $B$ *formule, u sistemu unutarnjih zagrada definirali bi da su tada* $\neg(A)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, *i* $(A) \leftrightarrow (B)$ *formule. U daljnjem tekstu nećemo se strogo držati zapisivanja formula pomoću zagrada, već ćemo uvesti* *prioritet logičkih veznika. Najveći prioritet ima negacija, zatim veznici* $\wedge$ *i* $\vee$*, a najmanji prioritet (ali isti) imaju veznici* $\rightarrow$ *i* $\leftrightarrow$ *. No, to ne znači da ćemo se potpuno odreći zagrada prilikom zapisivanja formula. U nekim situacijama ćemo pisati zagrade kako bi istaknuli prioritet nekog veznika. Tako bi zapis formule* $(((\neg P) \wedge Q) \rightarrow R)$ *u sistemu unutarnjih zagrada izgledao* $((\neg(P)) \wedge (Q)) \rightarrow (R)$*, dok ćemo je mi obično zapisivati kao* $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$*.*

Kažemo da je formula $B$ **potformula** formule $A$ ako je riječ $B$ podriječ od $A$. Promotrimo nekoliko primjera formula i potformula. Najjednostavniji primjer formule je $P_k$, tj. po definiciji svaka propozicionalna varijabla je formula. Formula $P \vee Q$ je potformula formule $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg Q \wedge P)$. Ako alfabet logike sudova sadrži i logičke konstante tada su po definiciji i $\top$, odnosno $\perp$, također atomarne formule. Tada **zatvorenom formulom** nazivamo svaku formulu koja ne sadrži propozicionalne varijable. Npr. $(\top \wedge \perp) \rightarrow (\perp \vee (\top \wedge (\perp \rightarrow \top)))$ je jedna zatvorena formula.

**Složenost formule** je broj veznika koji nastupaju u toj formuli. Ako je $A$ formula tada ćemo sa $k(A)$ označavati složenost od $A$. Složenost svake atomarne formule je nula. Dok je na primjer složenost formule $(\neg P \wedge Q) \rightarrow (\neg\neg R \leftrightarrow Q)$ jednaka šest.

Ako su $A$ i $B$ oznake za istu formulu tada pišemo $A \equiv B$, i govorimo da su formule $A$ i $B$ jednake. Znak $\equiv$ nije znak alfabeta logike sudova već je pomoćni, tj. meta-simbol. Za jednakost formula ne upotrebljavamo znak $=$ jer ćemo ga kod logike predikata koristiti kao osnovni znak alfabeta.

Neka je $A$ formula te neka je $\{P_1, \ldots, P_n\}$ skup svih propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u $A$. To kratko označavamo sa $A(P_1, \ldots, P_n)$. Ponekad ćemo skup svih varijabli koje se javljaju u formuli $A$ označavati sa $Var(A)$.

Neka je, zatim, $B$ neka formula. Formulu dobivenu zamjenom neke varijable $P_i$ sa $B$ u formuli $A$ označavamo sa $A(B/P_i)$. Ako pak su $B_1, \ldots, B_n$ proizvoljne formule tada simultanu zamjenu varijabli $P_i$ s formulama $B_i$ označavamo sa $A(B_1/P_1, \ldots, B_n/P_n)$, ili pak kratko $A(B_1, \ldots, B_n)$.

## 1.3 Interpretacije

U prethodnoj točki definirali smo sintaksu logike sudova. U ovoj točki ćemo definirati semantiku, tj. definirati što znači da je neka formula istinita, odnosno neistinita.

**Definicija 1.5.** *Svako preslikavanje sa skupa svih propozicionalnih varijabli u skup* $\{0,1\}$, *tj.* $I : \{P_0, P_1, \ldots\} \to \{0,1\}$, *nazivamo* **totalna interpretacija** *ili kratko* **interpretacija**. *Ako je preslikavanje definirano na podskupu skupa propozicionalnih varijabli tada kažemo da je to* **parcijalna interpretacija.** *Kažemo da je parcijalna interpretacija* $I$ **adekvatna** *za formulu* $A(P_1, \ldots, P_n)$ *ako je funkcija* $I$ *definirana na* $P_i$ *za sve* $i = 1, \ldots, n$.

Sada indukcijom po složenosti formule definiramo vrijednost interpretacije na proizvoljnoj formuli, tj. istinitost, odnosno neistinitost, formule za danu interpretaciju.

**Definicija 1.6.** *Neka je* $I$ *interpretacija (totalna ili parcijalna). Ako se radi o parcijalnoj interpretaciji* $I$ *smatramo da je* $I$ *adekvatna za formule na kojima se definira njena vrijednost. Tada vrijednost interpretacije* $I$ *na proizvoljnoj formuli definiramo induktivno:*

$$\begin{array}{rll} I(\neg A) = 1 & \textit{ako i samo ako} & I(A) = 0; \\ I(A \wedge B) = 1 & \textit{ako i samo ako} & I(A) = 1 \textit{ i } I(B) = 1; \\ I(A \vee B) = 1 & \textit{ako i samo ako} & I(A) = 1 \textit{ ili } I(B) = 1; \\ I(A \to B) = 1 & \textit{ako i samo ako} & I(A) = 0 \textit{ ili } I(B) = 1; \\ I(A \leftrightarrow B) = 1 & \textit{ako i samo ako} & I(A) = I(B). \end{array}$$

Ako alfabet sadrži i konstante $\top$ i $\bot$ tada za svaku interpretaciju $I$ definiramo $I(\top) = 1$ i $I(\bot) = 0$.

Istaknimo da veznik *ili* shvaćamo inkluzivno, tj. da "$I(A) = 1$ ili $I(B) = 1$" znači da je ili $I(A) = 1$, ili $I(B) = 1$ ili oboje.[1]

Preglednije je vrijednost interpretacije na formulama definirati pomoću tablica koje se nazivaju **semantičke tablice.** Tada se vrijednosti interpretacije za složenije formule mogu definirati i ovako:

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \to Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

[1] U prirodnom jeziku se veznik *ili* obično promatra ekskluzivno. Tako na primjer rečenica "*Danas ću ići u kino ili ću doma gledati televiziju.*" znači da ću ili ići u kino, ili pak ću gledati televiziju, ali ne i oboje.

Ovdje smo zbog preglednosti upotrijebili semantičku tablicu. No, smatramo da semantičke tablice stvaraju prebrzo kod čitatelja dojam da je razumio što u njima piše, te da se veći dio matematičke logike svodi na sematičke tablice. Iz tog razloga su semantičke tablice u ovoj knjizi korištene samo radi preglednijeg zapisa.

Ako je vrijednost interpretacije $I$ na formuli jednaka 1, tj. $I(F) = 1$, tada kažemo da je formula $F$ **istinita za interpretaciju** $I$. Ako je $I(F) = 0$ tada kažemo da je formula $F$ **neistinita za interpretaciju** $I$. Ako je $S$ skup formula i $I$ neka interpretacija, sa $I(S) = 1$ ćemo kratko označavati činjenicu da je $I(F) = 1$, za sve $F \in S$. Analogno sa $I(S) = 0$ označavamo činjenicu da je svaka formula iz skupa $S$ neistinita za interpretaciju $I$.

**Napomena 1.7.** *Smatramo da je semantička interpretacija veznika $\neg$, $\wedge$, $\vee$ i $\leftrightarrow$ prirodna i jasna. Možda je u prvi mah pomalo čudna definicija interpretacije veznika $\rightarrow$, posebno uvjet da iz $I(P) = 0$ i $I(Q) = 1$ slijedi $I(P \rightarrow Q) = 1$. Upravo ovaj uvjet bio je izložen mnogim kritikama. To je rezultiralo proučavanjem logika sa "strogom implikacijom", odnosno modalnim logikama (vidi 112). Zašto je upravo ovako definirana interpretacija veznika $\rightarrow$ objasnit ćemo nakon definicije relacije logičke posljedice.*[2]

Neka je zadana parcijalna interpretacija $I$ sa $I(P) = I(Q) = 1$ i $I(R) = 0$. Odredimo radi primjera vrijednost interpretacije $I$ na formuli $F \equiv (\neg P \vee Q) \rightarrow \neg(R \leftrightarrow (Q \vee \neg R))$. Određivanje vrijednosti ćemo provesti pomoću semantičke tablice. Radi kraćeg i jasnijeg zapisa uvodimo pokrate $F_1 \equiv (\neg P \vee Q)$ i $F_2 \equiv (R \leftrightarrow (Q \vee \neg R))$.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\neg P$ | $F_1$ | $\neg R$ | $Q \vee \neg R$ | $F_2$ | $\neg F_2$ | $F_1 \rightarrow \neg F_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Očito je $F \equiv F_1 \rightarrow \neg F_2$. Dakle, iz tablice čitamo da je $I(F) = 1$, tj. formula $F$ je istinita za danu interpretaciju $I$.

[2] Do ovakova poimanja kondicionala došao je starogrčki logičar Filon iz Megare (4. st. pr.Kr.). Učenje o ovoj logičkoj operaciji, koja je dobila naziv materijalna implikacija, razvijalo se u staroj Grčki u megaro-stoičkoj školi u 4. i 3. st. pr.Kr., u logici skolastika, te u radovima drugih logičara sve do naših dana.

Sada ćemo za istu formulu $F$ odrediti sve moguće vrijednosti istine obzirom na vrijednost interpretacije na varijablama $P$, $Q$ i $R$.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\neg P$ | $F_1$ | $\neg R$ | $Q \vee \neg R$ | $F_2$ | $\neg F_2$ | $F_1 \to \neg F_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Uočimo da smo prethodnom semantičkom tablicom formuli $F$ pridružili funkciju sa skupa $\{0,1\}^3$ u skup $\{0,1\}$. Općenito bismo formuli sa $n$ ($n \in \mathbb{N}$) različitih propozicionalnih varijabli pridružili funkciju sa skupa $\{0,1\}^n$ u skup $\{0,1\}$. Takve funkcije se nazivaju istinosne funkcije. Zbog toga se ponekad logika sudova naziva logika istinosno propozicionalnih funkcija.

**Definicija 1.8.** *Neka je $S$ skup formula, a $F$ neka formula. Kažemo da formula $F$* **logički slijedi** *iz skupa $S$, u oznaci $S \models F$, ako za svaku interpretaciju $I$, za koju je $I(S) = 1$, vrijedi $I(F) = 1$. Relaciju $\models$ nazivamo* **relacija logičke posljedice**. *Ako je $S$ jednočlan skup, tj. $S = \{A\}$, tada činjenicu $\{A\} \models B$ zapisujemo i kao $A \Rightarrow B$.*

Lako je provjeriti da vrijedi $\{P \to Q,\ Q \to P\} \models P \leftrightarrow Q$, $P \wedge Q \Rightarrow P$ i $P \Rightarrow P \vee Q$. No, formula $P$ ne slijedi iz skupa $\{P \vee Q\}$. To ćemo kratko označavati sa $\{P \vee Q\} \not\models P$.

Sada ćemo pokušati opravdati prije definiranu semantičku interpretaciju veznika $\to$. Neka su $A$ i $B$ proizvoljne formule. Odredimo logički veznik $\circ$, odnosno dvomjesnu istinosnu funkciju, koja za svaku interpretaciju $I$ ima sljedeće svojstvo:

$$I(A \circ B) = 1 \qquad \text{ako i samo ako} \qquad I(A) = 1 \ \text{ povlači } \ I(B) = 1.$$

Lako je vidjeti da za veznik $\circ$ vrijedi

| $A$ | $B$ | $A \circ B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

No, to je upravo semantička tablica za veznik $\to$.

**Definicija 1.9.** *Kažemo da su formule $A$ i $B$* **logički ekvivalentne***, i označavamo $A \Leftrightarrow B$, ako za svaku interpretaciju $I$ vrijedi $I(A) = I(B)$.*

Napišimo nekoliko parova logički ekvivalentnih formula:

$$
\begin{array}{l}
A \;\Leftrightarrow\; A; \\
(A \wedge (B \vee C)) \;\Leftrightarrow\; ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)); \\
(A \wedge (B \vee A)) \;\Leftrightarrow\; A; \\
(A \to B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \vee B); \\
(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg A \vee \neg B); \\
(A \leftrightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg B)).
\end{array}
$$

**Definicija 1.10.** *Za formulu $F$ kažemo da je* **ispunjiva***, odnosno* **oboriva***, ako postoji interpretacija $I$ tako da vrijedi $I(F) = 1$, odnosno $I(F) = 0$.*

*Za formulu $F$ kažemo da je* **valjana** *(***tautologija** *ili* **identički istinita***) ako je istinita za svaku interpretaciju.*

*Za formulu $F$ kažemo da je* **antitautologija** *ili* **identički neistinita** *ako je neistinita za svaku interpretaciju.*

Na primjer, formule $\neg(P \to \neg P)$ i $(P \to Q) \to (Q \to P)$ su ispunjive i oborive. U sljedećoj listi navodimo neke valjane formule i njihove nazive.

| | |
|---|---|
| $\neg\neg P \leftrightarrow P$ | princip dvojne negacije; |
| $P \to P$ | princip refleksivnosti za kondicional; |
| $P \vee \neg P$ | princip isključenja trećeg; |
| $\neg(P \wedge \neg P)$ | princip neproturječnosti; |
| $((P \to Q) \to P) \to P$ | Peiercov princip; |
| $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ | princip kontrapozicije; |
| $\neg P \to (P \to Q)$ | princip negacije premise; |
| $P \vee P \leftrightarrow P$ | princip idempotentnosti za disjunkciju; |
| $P \wedge P \leftrightarrow P$ | princip idempotentnosti za konjunkciju; |
| $(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ | princip asocijativnosti za disjunkciju; |
| $(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ | princip asocijativnosti za konjunkciju; |
| $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ | De Morganov princip; |
| $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ | De Morganov princip. |

Uočimo da su valjane formule upravo forme koje su istinite bez obzira na istinitost svojih atomarnih dijelova. No, valjane formule su važne i zbog drugog razloga. Nije teško vidjeti da za proizvoljne formule $A$ i $B$ vrijedi:

$$A \Rightarrow B \quad \text{ako i samo ako} \quad A \to B \text{ je valjana formula.}$$

(Vidi zadatak 3). To znači da je za ispitivanje vrijedi li $A \Rightarrow B$ dovoljno vidjeti je li formula $A \to B$ valjana.

**Zadaci:**

1. Odredite barem jednu formulu $A$ tako da formula:

   a) $((A \wedge Q) \to \neg P) \to ((P \to \neg Q) \to A)$ bude valjana;

   b) $((P \to (Q \to (A \wedge R))) \to (A \to (A \vee R))) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$ bude valjana.

2. Za proizvoljnu interpretaciju $I$ sa $S_I$ označimo skup $\{F : F$ je formula i $I(F) = 1\}$. Neka su $I$ i $J$ interpretacije takve da je $S_I \subseteq S_J$. Dokažite da je tada $S_I = S_J$.

3. Neka su $F_1, \ldots, F_n$ i $A$ formule logike sudova. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

   a) $\{F_1, \ldots, F_n\} \models A$;

   b) formula $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg A$ je antitautologija;

   c) formula $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \to A$ je valjana;

   d) formula $F_1 \to (F_2 \to (\ldots (F_n \to A) \ldots)$ je valjana.

4. Za formulu kažemo da je **pozitivna** ako je propozicionalna varijabla ili pak u njoj nastupaju samo veznici $\wedge$ i $\vee$. Dokažite da niti jedna pozitivna formula nije valjana, a ni antitautologija.
   Rješenje: Označimo s $I$ interpretaciju definiranu s $I(P) = 1$, za sve propozicionalne varijable $P$. Analogno, s $J$ označimo interpretaciju definiranu s $J(P) = 0$. Indukcijom po složenosti pozitivne formule $F$ lako je dokazati da vrijedi $I(F) = 1$, te $J(F) = 0$. Dakle, svaka pozitivna formula je ispunjiva i oboriva.

5. Neka je sa $F(A)$ označena neka formula logike sudova u kojoj je $A$ možda potformula. Neka je, zatim, $B$ proizvoljna formula tako da vrijedi $A \Leftrightarrow B$. Označimo sa $F(B)$ formulu koja je dobivena zamjenom nekih, a možda i svih, nastupa potformule $A$ u formuli $F(A)$ sa $B$. Dokažite da tada vrijedi $F(A) \Leftrightarrow F(B)$. (Ova činjenica se naziva **teorem o zamjeni** za logiku sudova).
   Rješenje: Dokaz tvrdnje provodimo indukcijom po složenosti formule $F(A)$. Ako je $k(F(A)) = 0$, tj. ako je $F(A)$ propozicionalna varijabla, tada je potformula $A$ jednaka $F$, te je $F(B)$ jednaka formuli $A$ ili $B$. Tada iz $A \Leftrightarrow B$ trivijalno slijedi $F(A) \Leftrightarrow F(B)$. Pretpostavimo sada da za sve formule $G(A)$, čija je složenost strogo manja od $n$ ($n \geq 1$), tvrdnja zadatka vrijedi. Neka je $F(A)$ proizvoljna formula čija je složenost jednaka točno $n$. Uočimo prvo da za proizvoljne formule $C_1$, $C_2$, $D_1$, $D_2$ vrijedi: ako je $C_1 \Leftrightarrow D_1$ i $C_2 \Leftrightarrow D_2$ tada je $\neg C_1 \Leftrightarrow \neg D_1$ i $(C_1 \circ C_2) \Leftrightarrow (D_1 \circ D_2)$, za sve

$\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Sada promatramo slučajeve obzirom na oblik formule $F(A)$. Formula $F(A)$ može biti oblika $\neg G(A)$ ili pak $G_1(A) \circ G_2(A)$, gdje je $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Primjenom pretpostavke indukcije na formule $G(A)$, $G_1(A)$ i $G_2(A)$, te prethodno navedenih ekvivalencija, slijedi tražena tvrdnja.

6. Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ formula i $I$ proizvoljna interpretacija. Zatim, neka su $B_1, \ldots, B_n$ formule tako da vrijedi $I(P_i) = I(B_i)$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Dokažite da je tada
$$I(A(P_1, \ldots, P_n)) = I(A(B_1, \ldots, B_n)).$$

7. Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ formula, te $I$ i $J$ proizvoljne interpretacije. Zatim, neka su $A_1, \ldots, A_n$ formule tako da vrijedi $J(P_i) = I(A_i)$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Ako vrijedi $J(A(P_1, \ldots, P_n)) = 1$ dokažite da je tada $I(A(A_1, \ldots, A_n)) = 1$.

8. Za konačan niz formula $A_1, \ldots, A_n$ kažemo da je **nepadajući** ako je formula $A_i \rightarrow A_{i+1}$ valjana za sve $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ formula i $A_1, \ldots, A_n$ nepadajući niz formula. Ako je formula $A(P_1, P_1 \vee P_2, P_1 \vee P_2 \vee P_3, \ldots, P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n)$ valjana dokažite da je tada i formula $A(A_1, \ldots, A_n)$ valjana.
Rješenje: Neka je $I$ proizvoljna interpretacija. Pošto je niz $A_1, \ldots, A_n$ nepadajući tada postoji $k \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $I(A_1) = \ldots = I(A_k) = 0$ i $I(A_{k+1}) = \ldots = I(A_n) = 1$. Definiramo parcijalnu interpretaciju $J : \{P_1, \ldots, P_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ sa $J(P_1) = \ldots = J(P_k) = 0$ i $J(P_{k+1}) = \ldots = J(P_n) = 1$. Uočite da vrijedi $J(P_i) = J(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_i)$, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Po pretpostavci zadatka vrijedi $J(A(P_1, \ldots, P_1 \vee \ldots \vee P_n)) = 1$, a tada po zadatku 6 imamo $J(A(P_1, \ldots, P_n)) = 1$. Po prethodnom zadatku 7 tada slijedi da je $I(A(A_1, \ldots, A_n)) = 1$.

9. Neka je formula $A(P_1, \ldots, P_n)$ valjana, te neka su $B_1, \ldots, B_n$ proizvoljne formule. Dokažite da je tada i formula $A(B_1, \ldots, B_n)$ valjana.

10. Neka su $F$, $G$ i $A$ formule logike sudova, pri čemu vrijedi $F \Leftrightarrow G$. Označimo sa $F(A/P)$ formulu dobivenu zamjenom svih nastupa varijable $P$ s formulom $A$ ako formula $F$ sadrži varijablu $P$. Inače, neka je $F(A/P) \equiv F$. Analogno upotrebljavamo oznaku $G(A/P)$. Dokažite da tada vrijedi $F(A/P) \Leftrightarrow G(A/P)$. (Ova činjenica se naziva **teorem o supstituciji** za logiku sudova).
Rješenje: Lako je provjeriti da iz činjenice $F \Leftrightarrow G$ slijedi da je formula $F \leftrightarrow G$ valjana. Po prethodnom zadatku 9 slijedi da je i formula $F(A/P) \leftrightarrow G(A/P)$ valjana. Iz toga lako slijedi da su formule $F(A/P)$ i $G(A/P)$ logički ekvivalentne.

11. Neka je $A$ formula logike sudova koja ne sadrži drugih veznika osim $\leftrightarrow$ . Dokažite: formula $A$ je valjana ako i samo ako svaka propozicionalna varijabla, koja nastupa u formuli $A$, dolazi paran broj puta.
Rješenje: Lako je provjeriti da za sve formule $F$, $G$ i $H$ vrijedi:

$$\begin{array}{ll} a) & (F \leftrightarrow F) \Leftrightarrow (G \leftrightarrow G); \\ b) & (F \leftrightarrow (G \leftrightarrow H)) \Leftrightarrow ((F \leftrightarrow G) \leftrightarrow H); \\ c) & (F \leftrightarrow G) \Leftrightarrow (G \leftrightarrow F). \end{array}$$

Ako je $\{P_1, \ldots, P_n\}$ skup svih varijabli koje nastupaju u formuli $A$ tada primjenom ekvivalencija b) i c) slijedi da je formula $A$ logički ekvivalenta sa

$$P_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_n \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_n.$$

Pretpostavimo prvo da je $A$ valjana, te da se neka varijabla $P_i$ pojavljuje neparan broj puta. Definirajmo interpretaciju $I$ sa $I(P_i) = 0$ i $I(P_j) = 1$, za sve $j \neq i$. Tada primjenom gornje ekvivalencije odmah slijedi da je $I(A) = 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $A$ valjana formula.
Pretpostavimo sada da se svaka varijabla u $A$ javlja točno paran broj puta. Primjenom ekvivalencija a), b) i c) slijedi da je $A$ logički ekvivalentna s formulom $P_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_1$, gdje se varijabla $P_1$ pojavljuje paran broj puta. Lako je provjeriti da je posljednja formula valjana.

12. Neka je $A$ formula logike sudova koja ne sadrži drugih veznika osim $\leftrightarrow$ i $\neg$. Dokažite: formula $A$ je valjana ako i samo ako svaka propozicionalna varijabla i znak negacije dolaze paran broj puta u $A$.

13. Kažemo da je formula $A(P)$ **nepadajuća**, odnosno **nerastuća**, obzirom na varijablu $P$ ako za sve formule $F$ i $G$ vrijedi da pretpostavka $F \Rightarrow G$ povlači $A(F/P) \Rightarrow A(G/P)$, odnosno $A(G/P) \Rightarrow A(F/P)$. Dokažite da je formula $P \rightarrow Q$ nerastuća obzirom na varijablu $P$, a nepadajuća obzirom na varijablu $Q$.

14. Neka je $S$ skup formula logike sudova (konačan ili beskonačan), te $F$ neka formula. Označimo sa $Var(S)$ skup svih propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u formulama iz $S$. Zatim neka vrijedi $S \models F$ i $Var(S) \subseteq Var(F)$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{F_1, \ \ldots, \ F_n\}$ od $S$ tako da je formula $F_1 \wedge \ \ldots \ \wedge F_n \ \wedge \neg F$ antitautologija.
Rješenje: Ako je formula $F$ valjana tada tvrdnja odmah slijedi. Neka je $F$ oboriva formula. Tada postoji konačno mnogo parcijalnih interpretacija $I$ definiranih na $Var(F)$ tako da vrijedi $I(\neg F) = 1$. Označimo te interpretacije sa $I_1, \ldots, \ I_n$. Pošto po pretpostavci zadatka vrijedi $Var(S) \subseteq Var(F)$, tada je za sve $k \in \{1, \ldots, \ n\}$ interpretacija $I_k$ adekvatna za sve formule iz skupa $S$. Uočimo da za sve $k \in \{1, \ldots, \ n\}$ postoji $F_k \in S$

tako da vrijedi $I_k(F_k) = 0$ (jer bi inače vrijedilo $I_k(S) = 1$, pa iz pretpostavke $S \models F$ slijedi $I_k(F) = 1$, što nije). Lako je provjeriti da je formula $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg F$ antitautologija.

(Iz činjenice da je formula $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg F$ antitautologija, iz zadatka 3 slijedi $\{F_1 \wedge \ldots \wedge F_n\} \models F$. Tvrdnja gornjeg zadatka, ali bez pretpostavke da je $Var(S) \subseteq Var(F)$, naziva se teorem kompaktnosti. Taj teorem ćemo dokazati u točki 1.6).

15. Neka je $F$ formula logike sudova izgrađena samo pomoću veznika $\vee$ , $\wedge$ i $\neg$ . Označimo sa $F^*$ formulu dobivenu iz $F$ međusobnom zamjenom znakova $\vee$ i $\wedge$. Za proizvoljnu interpretaciju $I$ sa $\overline{I}$ označimo interpretaciju definiranu sa: $\overline{I}(P) = 1$ ako i samo ako $I(P) = 0$. Dokažite da tada za sve formule $A$ i $B$, koje su izgrađene samo pomoću veznika $\vee$ , $\wedge$ i $\neg$ , i sve interpretacije $I$, vrijedi:

   a) $A(P_1, \ldots, P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(\neg P_1, \ldots, \neg P_n)$;
   b) $I(A) = 1$ ako i samo ako $\overline{I}(A^*) = 0$;
   c) ako je $A \Leftrightarrow B$ tada je i $A^* \Leftrightarrow B^*$;
   d) formula $A$ je valjana ako i samo ako je $\neg A^*$ valjana;
   e) formula $A \to B$ je valjana ako i samo ako je $B^* \to A^*$ valjana;
   f) formula $A \leftrightarrow B$ je valjana ako i samo ako je $A^* \leftrightarrow B^*$ valjana.

## 1.4 Normalne forme

Sada želimo dokazati da za svaku formulu logike sudova postoje njoj logički ekvivalentne dvije formule u zadanim formama - konjunktivnoj normalnoj formi i disjunktivnoj normalnoj formi. Za razna proučavanja određene formule može biti korisno odrediti njoj logički ekvivalentnu formulu koja je u jednostavnijem obliku.

**Definicija 1.11.** *Atomarnu formulu i njezinu negaciju nazivamo* **literal**. *Formulu oblika $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ nazivamo konjunkcija ($A_i$ su proizvoljne formule). Formulu oblika $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ nazivamo disjunkcija.* **Elementarna konjunkcija** *je konjunkcija literala, a* **elementarna disjunkcija** *je disjunkcija literala.* **Konjunktivna normalna forma** *je konjunkcija elementarnih disjunkcija.* **Disjunktivna normalna forma** *je disjunkcija elementarnih konjunkcija.*

Promotrimo neke primjere formula koje su normalne forme. Formula $(P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4) \wedge (P_7 \vee \neg P_8) \wedge (P_2 \vee P_3 \vee \neg P_3)$ je jedna konjunktivna normalna forma, a formula $(P_3 \wedge \neg P_7 \wedge P_9) \vee (\neg P_3 \wedge P_7 \wedge P_9) \vee (P_3 \wedge P_7 \wedge P_9)$ je disjunktivna normalna forma.

Neka je $A$ neka formula, te $B$ konjunktivna normalna forma i $C$ disjunktivna normalna forma. Kažemo da je $B$ **konjunktivna normalna forma za** $A$ ako vrijedi $A \Leftrightarrow B$. Kažemo da je $C$ **disjunktivna normalna forma za** $A$ ako vrijedi $A \Leftrightarrow C$.

Lako je vidjeti da ako za neku formulu postoji konjunktivna normalna (ili disjunktivna), tada za nju postoji beskonačno konjunktivnih normalnih formi. Dakle, normalne forme, ako postoje, nisu jedinstvene.

Kako bi lakše razumjeli dokaz teorema o egzistenciji normalnih formi dajemo sljedeći primjer.

**Primjer 1.12.** *Neka je $F \equiv ((P \to Q) \to (R \to \neg P)) \to (\neg Q \to \neg R)$. Kako bismo odredili sve parcijalne interpretacije za koje je formula $F$ neistinita, napišimo prvo semantičku tablicu za formulu $F$.*

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \to Q$ | $R \to \neg P$ | $(P \to Q) \to (R \to \neg P)$ | $\neg Q \to \neg R$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

*Da bismo odredili jednu konjunktivnu normalnu formu za formulu $F$ promotrimo redove u tablici, tj. interpretacije, gdje je vrijednost formule $F$ jednaka* 0. *To su drugi i šesti redak tablice. U drugom retku pripadna interpretacija $I$ je definirana sa $I(P) = I(Q) = 0 \;\; i \;\; I(R) = 1$. Ta interpretacija određuje elementarnu disjunkciju $P \vee Q \vee \neg R$ u konjunktivnoj normalnoj formi. Analogno, promatrajući šesti redak tablice, tj. interpretaciju $I(P) = I(R) = 1 \;\; i \;\; I(Q) = 0$, dobivamo elementarnu disjunkciju $\neg P \vee Q \vee \neg R$. S dobivene dvije elementarne disjunkcije definiramo sljedeću konjunktivnu normalnu formu*

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R).$$

*Lako je vidjeti da je dobivena konjunktivna normalna forma logički ekvivalentna početnoj formuli $F$.*

*Možemo kratko reći da smo konjunktivnu normalnu formu za formulu $F$ dobili promatrajući u njenoj sematičkoj tablici "nule, a zatim smo negirali propozicionalne varijable koje su jedan". Analogno bismo disjunktivnu normalnu formu za $F$ dobili promatrajući u njenoj sematičkoj tablici "jedinice, a zatim bismo negirali propozicionalne varijable koje su nule". Primjenom tog postupka dobivamo sljedeću disjunktivnu normalnu formu za $F$ :*

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee$$

$$\vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R).$$

Sada dokazujemo teorem o egzistenciji normalnih formi za proizvoljnu formulu.

**Teorem 1.13.** *Za svaku formulu logike sudova postoji konjunktivna i disjunktivna normalna forma.*

*Dokaz.* Dokazat ćemo da za proizvoljnu formulu postoji konjunktivna normalna forma. Dokaz egzistencije disjunktivne normalne forme je sličan. Ako je $A$ valjana formula tada je npr. formula $(P \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg P)$ konjunktivna normalna forma za $A$. Promotrimo sada slučaj kada je formula $A(P_1, \ldots, P_n)$ oboriva. Neka su $I_1, \ldots, I_m$ sve parcijalne interpretacije, čija je domena $\{P_1, \ldots, P_n\}$, i za koje vrijedi $I_1(A) = \ldots = I_m(A) = 0$. Za sve $i \in \{1, \ldots m\}$ i sve $j \in \{1, \ldots n\}$ definiramo literale $P_{ij}$ ovako:

$$P_{ij} \;\equiv\; \begin{cases} \neg P_j, & \text{ako je } \; I_i(P_j) = 1; \\ \\ P_j, & \text{ako je } \; I_i(P_j) = 0. \end{cases}$$

Uočite da vrijedi $I_i(P_{ij}) = 0$. Neka je sada formula $B$ definirana kao

$$(P_{11} \vee \ldots \vee P_{1n}) \ \wedge \ \ldots \ \wedge (P_{m1} \vee \ldots \vee P_{mn}),$$

što ćemo obično kratko zapisivati s

$$B \ \equiv \ \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} P_{ij}.$$

Očito je $B$ konjunktivna normalna forma. Preostalo je još dokazati da vrijedi $A \Leftrightarrow B$. Za ilustraciju ćemo dokazati da vrijedi $A \Rightarrow B$. Obrat ćemo prepustiti čitaocu. Neka je $I$ interpretacija takva da $I(B) = 0$. Pošto je $B$ konjunkcija tada postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ tako da vrijedi $I(P_{i1} \vee \ldots \vee P_{in}) = 0$. Tada dalje imamo $I(P_{ij}) = 0$, za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$. No, tada je $I/\{P_1, \ldots, P_n\} = I_i$. To znači da je $I(A) = I_i(A) = 0$. □

Već smo spomenuli da normalne forme za danu formulu nisu jedinstvene. Štoviše, za svaku formulu postoji beskonačno mnogo konjunktivnih i disjunktivnih formi. Da bismo imali barem jedinstvenost u nekom smislu malo ćemo modificirati definiciju normalnih formi.

**Definicija 1.14.** *Neka je $A(P_1, \ \ldots \ , P_n)$ konjunktivna normalna forma. Kažemo da je to* **savršena konjunktivna normalna forma** *ako u svakoj njezinoj elementarnoj disjunkciji svaka propozicionalna varijabla $P_i$ nastupa točno jednom (s ili bez negacije), te su sve elementarne disjunkcije međusobno logički neekvivalentne.*

*Neka je $A(P_1, \ \ldots \ , P_n)$ disjunktivna normalna forma. Kažemo da je to* **savršena disjunktivna normalna forma** *ako u svakoj njezinoj elementarnoj konjunkciji svaka propozicionalna varijabla $P_i$ nastupa točno jednom (s ili bez negacije), te su sve elementarne konjunkcije međusobno logički neekvivalentne.*

Pažljivim čitanjem dokaza teorema 1.13. može se vidjeti da je dokazan sljedeći korolar.

**Korolar 1.15.** *Za svaku oborivu formulu postoji savršena konjunktivna normalna forma. Za svaku ispunjivu formulu postoji savršena disjunktivna normalna forma. Savršene forme su jedinstvene do na permutaciju varijabli u elementarnim disjunkcijama, odnosno konjunkcijama, te do na permutaciju elementarnih konjunkcija, odnosno disjunkcija.*

Tvrdnje iz prethodnog korolara ćemo koristiti u dokazu sljedećeg teorema. Napominjemo da je Craigova interpolaciona lema jako značajna[3] za razne logičke formalne teorije.

[3] L. L. Maksimova je 80.–tih godina prošlog stoljeća dala klasifikaciju određenih modalnih logika primjenom interpolacionog svojstva.

**Teorem 1.16.** *(Craigova interpolaciona lema)*
*Neka je $A$ ispunjiva, i $B$ oboriva formula logike sudova, te neka vrijedi $A \Rightarrow B$. Tada postoji formula $C$ tako da je $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$, i vrijedi $A \Rightarrow C$ i $C \Rightarrow B$.*

*Dokaz.* Pošto je po pretpostavci formula $A$ ispunjiva tada iz prethodnog korolara 1.15. slijedi da postoji savršena disjunktivna normalna forma za $A$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A$ savršena disjunktivna normalna forma, tj. $A \equiv A_1 \vee \ldots \vee A_s$, gdje su $A_i$ elementarne konjunkcije. Analogno, neka je formula $B$ savršena konjunktivna normalna forma (to je moguće jer je po pretpostavci formula $B$ oboriva). Dakle, $B \equiv B_1 \wedge \ldots \wedge B_t$, gdje su $B_j$ elementarne disjunkcije.

Neka je $i \in \{1, \ldots, s\}$ proizvoljan. Zatim, neka je $I$ interpretacija takva da je $I(A_i) = 1$. No, onda je $I(A) = 1$. Iz pretpostavke $A \Rightarrow B$ slijedi $I(B) = 1$. Pošto je formula $B$ konjunkcija, tada je $I(B_j) = 1$, za sve $j \in \{1, \ldots, t\}$. Time smo dokazali da za sve $i \in \{1, \ldots, s\}$ i $j \in \{1, \ldots, t\}$ vrijedi $A_i \Rightarrow B_j$.

Sada tvrdimo da za sve $i, j$ u $A_i$ postoji literal, označimo ga s $C_{ij}$, koji nastupa kao disjunktivni član u formuli $B_j$. U svrhu dokaza te pomoćne tvrdnje označimo $A \equiv A(P_1, \ldots, P_n)$ i $B \equiv B(Q_1, \ldots, Q_m)$, te $A_i \equiv \overline{P_1} \wedge \ldots \wedge \overline{P_n}$, gdje je $\overline{P_k} \equiv P_k$ ili $\overline{P_k} \equiv \neg P_k$. Zatim, neka je $B_j \equiv \overline{Q_1} \vee \ldots \vee \overline{Q_m}$. Pretpostavimo da su literali $\overline{P_k}$ i $\overline{Q_l}$ različiti za sve $k$ i $l$. Definirajmo interpretaciju

$$I \ : \ \{P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_m\} \to \{0, 1\}$$

tako da je $I(P_k)$ zadano tako da vrijedi $I(\overline{P_k}) = 1$, a $I(Q_l)$ je zadano tako da je ispunjeno $I(\overline{Q_l}) = 0$. (Definicija interpretacije $I$ je dobra, bez obzira što je moguće $\{P_1, \ldots, P_n\} \cap \{Q_1, \ldots, Q_m\} \neq \emptyset$, jer smo pretpostavili da su literali $\overline{P_k}$ i $\overline{Q_l}$ različiti za sve $k$ i $l$). Za tako definiranu interpretaciju $I$ vrijedi $I(A_i) = 1$ i $I(B_j) = 0$. No, to je u kontradikciji s prije dokazanom činjenicom $A_i \Rightarrow B_j$. Time je dokazana pomoćna tvrdnja.

Sada definiramo traženu formulu $C$ kao

$$C \ \equiv \ \bigvee_i \bigwedge_j C_{ij}.$$

Očito formula $C$ sadrži samo varijable koje nastupaju istovremeno u formulama $A$ i $B$. Preostalo je dokazati $A \Rightarrow C$ i $C \Rightarrow B$.

Neka je $I$ interpretacija tako da vrijedi $I(A) = 1$. Pošto je $A$ disjunkcija, tada postoji $i \in \{1, \ldots, s\}$ tako da je $I(A_i) = 1$. No, $A_i$ je konjunkcija, pa je $I(C_{ij}) = 1$ za sve $j \in \{1, \ldots, t\}$. Iz toga odmah slijedi $I(C) = 1$.

Na sličan način dobivamo $C \Rightarrow B$. □

**Zadaci:**

1. Odredite normalne forme za formulu $(\neg P \wedge (Q \vee R)) \vee (P \wedge \neg(Q \rightarrow R))$.

2. Svaka formula sa $n$ različitih propozicionalnih varijabli definira $n$-mjesnu funkciju $f$, tj. $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$. Dokažite obrat, tj. za proizvoljnu funkciju $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ definirajte formulu $F$ koja "definira" zadanu funkciju. Je li formula s tim svojstvom jedinstvena?

3. Neka je $A$ valjana formula, odnosno antitautologija. Odredite normalne forme za $A$.

4. Odredite bar dvije formule $A$ tako da vrijedi

$$\begin{array}{ll} (P \rightarrow A) \Leftrightarrow (R \rightarrow (\neg P \vee Q)) & \text{i} \\ ((Q \rightarrow R) \rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg P \rightarrow \neg A). & \end{array}$$

5. Neka je $A$ konjunktivna normalna forma, koja je valjana formula. Dokažite da u svakoj elementarnoj disjunkciji postoji neka propozicionalna varijabla $P$ tako da literali $P$ i $\neg P$ dolaze u toj disjunkciji.
   Rješenje: Neka je $B$ proizvoljna elementarna disjunkcija, te $P_1, \ldots, P_n$ sve varijable koje dolaze u $B$ bez negacije, a $Q_1, \ldots, Q_m$ sve varijable koje dolaze s negacijom. Pretpostavimo da vrijedi $\{P_1, \ldots, P_n\} \cap \{Q_1, \ldots, Q_m\} = \emptyset$. Tada je dobro definirana parcijalna interpretacija $I$ sa $I(P_i) = 0$ i $I(Q_j) = 1$. Lako je vidjeti da vrijedi $I(B) = 0$, a onda i $I(A) = 0$. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je $A$ valjana. Dakle, pretpostavka $\{P_1, \ldots, P_n\} \cap \{Q_1, \ldots, Q_m\} = \emptyset$ vodi na kontradikciju.

6. Neka je $A$ disjunktivna normalna forma, koja je antitautologija. Dokažite da tada u svakoj elementarnoj konjunkciji postoji propozicionalna varijabla $P$ tako da literali $P$ i $\neg P$ dolaze u toj konjunkciji.

7. Dokažite da niti za jednu valjanu formulu ne postoji savršena disjunktivna normalna forma, te da niti za jednu antitautologiju ne postoji savršena konjunktivna normalna forma.

8. Neka je $A$ formula koja sadrži $n$ različitih propozicionalnih varijabli. Dokažite da je formula $A$ valjana ako i samo ako svaka savršena disjunktivna normalna forma za $A$ sadrži $2^n$ međusobno logički neekvivalentnih elementarnih konjunkcija.

9. Dokažite da je formula $A(P_1, \ldots, P_n)$ logički ekvivalenta s nekom formulom $F$, koja od veznika sadrži samo $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ ako i samo ako savršena konjunktivna normalna forma za $A$ ne sadrži elementarnu disjunkciju $\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \ldots \vee \neg P_n$.

10. Postoji li $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, tako da za svaku formulu $F$ logike sudova postoji konjunktivna normalna forma čija svaka elementarna disjunkcija sadrži točno $n$ različitih literala?
    Rješenje: Ne. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Promotrimo formulu $F \equiv P_1 \vee \ldots \vee P_{n+1}$. Neka je $G$ konjunktivna normalna forma koja u svakoj elementarnoj disjunkciji sadrži točno $n$ literala. Dokazujemo da tada ne može vrijediti $F \Leftrightarrow G$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da u svakoj elementarnoj disjunkciji od $G$ nastupaju samo različite propozicionalne varijable (jer je općenito $(A \vee A) \Leftrightarrow A$, te je formula $F$ oboriva). Ako formula $G$ ne sadrži niti jednu od varijabli $P_1, \ldots, P_{n+1}$ tada očito $F \not\Leftrightarrow G$. Neka je $Q_{i_1} \vee Q_{i_2} \vee \ldots \vee Q_{i_n}$ elementarna disjunkcija od $G$ u kojoj je barem jedan literal oblika $P_k$ ili $\neg P_k$, za neki $k \in \{1, \ldots, n+1\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se varijabla $P_{n+1}$ ne pojavljuje u toj disjunkciji. Definiramo interpretaciju $I$ tako da vrijedi $I(Q_{i_1}) = \ldots = I(Q_{i_n}) = 0$ i $I(P_{n+1}) = 1$, a na ostalim varijablama proizvoljno. Tada očito vrijedi $I(G) = 0$ i $I(F) = 1$.

11. Neka je $F(P_1, \ldots, P_n)$ proizvoljna formula logike sudova. Dokažite da postoji konjunktivna normalna forma $F'(P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_m)$ $(m \geq 0)$ tako da svaka elementarna disjunkcija sadrži točno tri literala, te za sve parcijalne interpretacije $I : \{P_1, \ldots, P_n\} \to \{0, 1\}$ vrijedi:

    $$I(F) = 1 \text{ ako i samo ako postoji proširenje } I' \text{ od } I \text{ tako da } I'(F') = 1.$$

    Rješenje: Prvo ćemo dokazati tvrdnju zadatka za jedan specijalan slučaj, tj. za formulu koja je elementarna disjunkcija. Neka je $C$ proizvoljna elementarna disjunkcija. Tvrdimo da postoji konjunktivna normalna forma $C'$ koja ima sljedeća svojstva:

    (i) svaka elementarna disjunkcija od $C'$ sadrži točno tri literala;

    (ii) za sve parcijalne interpretacije $I : Var(C) \to \{0, 1\}$ vrijedi: $I(C) = 1$ ako i samo ako postoji proširenje $I'$ od $I$ tako da vrijedi $I'(C') = 1$.

    Varijable koje dolaze u formuli $C$ označimo sa $P_1,\ P_2,\ \ldots$, a novo uvedene varijable u $C'$ ćemo označavati sa $Q_1,\ Q_2,\ \ldots$ Neka je $C \equiv A_1 \vee \ldots \vee A_l$, gdje su $A_i$ literali. Promatramo slučajeve obzirom na broj $l$.

    (a) $l = 1$, tj. $C \equiv A_1$.
    Tada definiramo da je formula $C'$ jednaka

    $$(A_1 \vee Q_1 \vee Q_2) \wedge (A_1 \vee \neg Q_1 \vee Q_2) \wedge (A_1 \vee Q_1 \vee \neg Q_2) \wedge (A_1 \vee \neg Q_1 \vee \neg Q_2).$$

(b) $l = 2$, tj. $C \equiv A_1 \vee A_2$.
Tada definiramo

$$C' \equiv (A_1 \vee A_2 \vee Q_1) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \neg Q_1).$$

(c) $l = 3$
Tada neka je jednostavno $C'$ upravo formula $C$.

(d) $l > 3$
Neka je

$$C' \equiv (A_1 \vee A_2 \vee Q_1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l-4} (\neg Q_i \vee A_{i+2} \vee Q_{i+1}) \wedge (\neg Q_{l-3} \vee A_{l-1} \vee A_l).$$

(Ako je $l = 4$ tada u $C'$ imamo "praznu" konjunkciju, tj. konjunkciju oblika $\bigwedge_{i=1}^{0}$. Po definiciji smatramo da je takva konjunkcija jednaka tautologiji $Q_1 \vee \neg Q_1$. Odnosno, za slučaj $l = 4$ definiramo da je $C' \equiv (A_1 \vee A_2 \vee Q_1) \wedge (\neg Q_1 \vee A_3 \vee A_4)$. )

Preostalo je dokazati tvrdnju $(ii)$. U slučaju c) to je trivijalno. Lako je vidjeti da za slučajeve a) i b) možemo uzeti proizvoljna proširenja $I'$.

Preostalo je jedino razmotriti slučaj d). Pretpostavimo prvo da vrijedi $I(C) = 1$. Tada postoji literal $A_p$ tako da je $I(A_p) = 1$. Proširenje $I'$ od $I$ definiramo po slučajevima obzirom na $p$.

$(d_1)$ ako je $p = 1$ ili $p = 2$ tada definiramo $I'(Q_1) = \ldots = I'(Q_{l-3}) = 0$.

$(d_2)$ ako je $p = l-1$ ili $p = l$ tada definiramo $I'(Q_1) = \ldots = I'(Q_{l-3}) = 1$.

$(d_3)$ Za broj $p$, za koji vrijedi $3 \leq p \leq l-2$, definiramo

$$I'(Q_1) = \ldots = I'(Q_{p-2}) = 1, \qquad I'(Q_{p-1}) = \ldots = I'(Q_{l-3}) = 0.$$

Lako je provjeriti da u svim slučajevima vrijedi $I'(C') = 1$.

Obrat tvrdnje dokazujemo obratom po kontrapoziciji. Neka je $I$ interpretacija za koju vrijedi $I(C) = 0$, tj. $I(A_1) = \ldots = I(A_l) = 0$. Ako je $I'$ proširenje od $I$ tako da je $I'(C') = 1$ tada mora biti $I'(Q_1) = \ldots = I'(Q_{l-3}) = 1$. No, tada je i $I'(\neg Q_{l-3} \vee A_{l-1} \vee A_l) = 0$, što povlači $I'(C') = 0$.

Time je tvrdnja zadatka potpuno dokazana za slučaj kada je $F$ elementarna disjunkcija. Promotrimo sada općenit slučaj, tj. kada je $F$ proizvoljna formula. Označimo sa $F_1$ konjunktivnu normalnu formu za $F$, tj. neka je $F_1 \equiv C_1 \wedge \ldots \wedge C_s$, gdje su $C_i$ elementarne disjunkcije. Konstruiramo formule $C_i'$ kao prije. (Konstrukcije možemo provesti tako da su skupovi novo uvedenih varijabli međusobno disjunktni). Tada definiramo $F' \equiv C_1' \wedge \ldots \wedge C_s'$. Lako je provjeriti da formula $F'$ ima tražena svojstva.

12. Neka su $A$ i $B$ formule logike sudova, pri čemu je $A$ ispunjiva, $B$ oboriva formula i $A \to B$ valjana. Dokažite da tada postoji barem jedna propozicionalna varijabla koja dolazi istovremeno u formulama $A$ i $B$.
    Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $Var(A) \cap Var(B) = \emptyset$. Pošto je po pretpostavci formula $A$ ispunjiva tada postoji barem jedna interpretacija $I_1 : Var(A) \to \{0,1\}$ takva da je $I_1(A) = 1$. Zatim, neka je $I_2 : Var(B) \to \{0,1\}$ interpretacija takva da je $I_2(B) = 0$. Definirajmo interpretaciju $J : Var(A) \cup Var(B) \to \{0,1\}$ s $J/Var(A) \equiv I_1$ i $J/Var(B) \equiv I_2$ (uočite da je zbog pretpostavke $Var(A) \cap Var(B) = \emptyset$ definicija interpretacije $J$ dobra). Očito vrijedi $J(A \to B) = 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom zadatka da je $A \to B$ valjana formula.

13. Neka je $A$ antitautologija, a $B$ ispunjiva formula logike sudova. Dokažite da postoji formula $C$ tako da su formule $A \to C$ i $C \to B$ valjane, a $C \to A$ i $B \to C$ su oborive.
    Rješenje: Neka je $Q$ propozicionalna varijabla koja ne nastupa u formuli $B$. Neka je tada $C \equiv B \wedge Q$. Očito su tada formule $A \to C$ i $C \to B$ valjane. Iz pretpostavke da je $B$ ispunjiva slijedi da postoji interpretacija $I : Var(B) \to \{0,1\}$ takva da je $I(B) = 1$. Neka je $J$ totalna interpretacija koja ima svojstvo $J/Var(B) \equiv I$ i $J(Q) = 1$. Tada je $J(C) = 1$ i $J(A) = 0$, tj. $J(C \to A) = 0$. To znači da je formula $C \to A$ oboriva. Neka je, zatim, $K$ totalna interpretacija koja ima svojstvo $K/Var(B) \equiv I$ i $K(Q) = 0$. Tada je $K(B) = 1$ i $K(C) = 0$, tj. $K(B \to C) = 0$. To znači da je formula $B \to C$ oboriva.

14. Neka je $A$ ispunjiva i oboriva formula, a $B$ valjana. Dokažite da postoji formula $C$ tako da su $A \to C$ i $C \to B$ valjane formule, a $C \to A$ i $B \to C$ su oborive.

15. Neka alfabet logike sudova sadrži logičke konstante $\perp$ i $\top$. Neka su $A$ i $B$ formule takve da vrijedi $A \Rightarrow B$. Dokažite da postoji formula $C$ tako da je $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$, te vrijedi $A \Rightarrow C$ i $C \Rightarrow B$.

16. Neka je sa $A(P)$ označena formula u kojoj nastupa varijabla $P$. Zatim, neka skup $Var(A(P))$ sadrži barem dva elementa i vrijedi $Q \notin Var(A(P))$. Označimo sa $A(Q)$ formulu dobivenu zamjenom svih nastupa varijable $P$ sa $Q$. Ako je $(A(P) \wedge A(Q)) \to (P \to Q)$ valjana formula dokažite da tada postoji formula $F$ takva da je $Var(F) \subseteq Var(A(P)) \setminus \{P\}$ i formula $A(P) \to (P \leftrightarrow F)$ je valjana.
    Rješenje: Pošto je po pretpostavci formula $(A(P) \wedge A(Q)) \to (P \to Q)$ valjana, tada je i formula $(A(P) \wedge P) \to (A(Q) \wedge Q)$ valjana. Po pretpostavci skup $Var(A(P))$ ima barem dva elementa, pa je $Var(A(P) \wedge P)$ $\cap Var(A(Q) \wedge Q) \neq \emptyset$. Tada po interpolacionoj lemi slijedi da postoji

formula $F$ tako da je $Var(F) \subseteq Var(A(P) \wedge P) \cap Var(A(Q) \wedge Q)$, tj. vrijedi $Var(F) \subseteq Var(A(P)) \setminus \{P\}$, te su formule $(A(P) \wedge P) \to F$ i $F \to (A(Q) \wedge Q)$ valjane.

Pokažimo još da je formula $A(P) \to (P \leftrightarrow F)$ valjana. Iz činjenice da je formula $(A(P) \wedge P) \to F$ valjana slijedi da je i formula $A(P) \to (P \to F)$ valjana. Iz činjenice da je $F \to (A(Q) \wedge Q)$ valjana formula slijedi da je formula $A(Q) \to (F \to Q)$ valjana. Tada je po teoremu o zamjeni i formula $A(P/Q) \to (F(P/Q) \to P)$, tj. $A(P) \to (F \to P)$ valjana.

17. Neka je $A \equiv ((P \to \neg Q) \wedge (Q \to P))$ i $B \equiv (\neg R \to (Q \leftrightarrow R))$. Postoji li formula $C$ tako da vrijedi $A \Rightarrow C$ i $C \Rightarrow B$? Ako postoji odredite barem jednu takvu.

18. Neka je $A \equiv (\neg(P \wedge Q) \wedge (P \leftrightarrow R))$ i $B \equiv ((R \to Q) \wedge \neg(S \wedge R))$. Postoji li formula $C$ tako da vrijedi $A \Rightarrow C$ i $C \Rightarrow B$? Ako postoji odredite barem jednu takvu.

### 1.4.1 Propozicionalni veznici

U točki 1.2 smo definirali da alfabet logike sudova sadrži veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ i $\leftrightarrow$ . U ovoj točki ćemo vidjeti da se osnovni skup veznika može i drugačije izabrati, a da se izražajnost jezika logike sudova ne promijeni.

Za $n \in \mathbb{N}$ svaku $n$-mjesnu funkciju $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ćemo nazivati **propozicionalni veznik**, odnosno kratko **veznik**. Oznaku $f$ ćemo koristiti u dva smisla:[4] kao znak alfabeta i kao funkciju. U ovoj točki smatramo da za svaki propozicionalni veznik $f$ postoji simbol u alfabetu za njega, i taj se isto označava s $f$. Naravno, to znači da smatramo i da je definicija pojma formule promijenjena u sljedećem smislu: ako je $f$ $n$-mjesni veznik, i $A_1, \ldots, A_n$ formule, tada je i $f(A_1, \ldots, A_n)$ također formula logike sudova. Smatramo da je jasna interpretacija takve formule.

U prvi tren čini se da ovakvim proširenjem alfabeta sa svim propozicionalnim veznicima jezik logike sudova dobiva na većoj izražajnosti. No, vidjet ćemo da to nije tako.

Smatramo da alfabet ne sadrži logičke konstante $\top$ i $\bot$, osim ako drugačije ne navedemo. Ako navedemo da alfabet sadrži logičke konstante tada znak $\top$ semantički interpretiramo sa 1, a znak $\bot$ sa 0. Točnije, $\top$ je nul-mjesna funkcija sa skupa $\{0,1\}$ definirana sa $\top \equiv 1$, a $\bot$ je definirana sa $\bot \equiv 0$.

**Definicija 1.17.** *Kažemo da je $n$-mjesni veznik $f$* **izraziv** *pomoću nekog skupa veznika $V$ ako postoji $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq V$ i formula $F$, u kojoj se pojavljuju samo veznici $f_1, \ldots, f_m$, tako da vrijedi $f(P_1, \ldots, P_n) \Leftrightarrow F$.*

[4] Znakove $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ i $\leftrightarrow$ smo već koristili u dva smisla. Npr. $\wedge$ je znak alfabeta, ali i funkcija sa skupa $\{0,1\}^2$ u $\{0,1\}$.

Veznik $\to$ je moguće izraziti pomoću skupa veznika $\{\neg, \vee\}$ jer vrijedi $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. Primjenom teorema o normalnoj formi (vidi teorem 1.13.) znamo da je svaki propozicionalni veznik moguće izraziti pomoću skupa veznika $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

**Definicija 1.18.** *Kažemo da je skup veznika $V$* **nezavisan** *ako ne postoji niti jedan veznik $v \in V$ kojeg je moguće izraziti pomoću skupa $V \setminus \{v\}$. Inače kažemo da je skup veznika* **zavisan**.

Skup veznika $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ je zavisan jer je npr. veznik $\to$ moguće izraziti pomoću $\{\neg, \vee\}$. Kasnije ćemo navesti primjere nezavisnih skupova veznika.

**Definicija 1.19.** *Neka je $W$ neki skup propozicionalnih veznika. Za skup veznika $V$ kažemo da je* **potpun** *za $W$ ako se svaki $w \in W$ može izraziti pomoću skupa $V$. Za skup veznika $V$ kažemo da je* **baza** *za $W$ ako je potpun za $W$ i nezavisan.*

**Propozicija 1.20.** *Neka je $W = \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. Svaka baza za $W$ koja je podskup od $W$ mora sadržavati veznik $\neg$.*

*Dokaz.* Označimo sa $\mathcal{F}$ skup svih formula u kojima se mogu pojavljivati samo veznici iz skupa $W \setminus \{\neg\}$. Zatim, s $I$ označimo interpretaciju koja je na svim propozicionalnim varijablama 1. Indukcijom po složenosti lako je dokazati da za sve $F \in \mathcal{F}$ vrijedi $I(F) = 1$. No, to upravo znači da ne postoji formula $F \in \mathcal{F}$ za koju bi vrijedilo $F \Leftrightarrow \neg P$, tj. veznik $\neg$ je nemoguće izraziti pomoću skupa $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. $\square$

Sljedeći korolar odmah slijedi iz dokaza prethodne propozicije.

**Korolar 1.21.** *Svaka antitautologija, u kojoj se mogu pojavljivati samo veznici $\neg, \wedge, \vee, \to$ i $\leftrightarrow$, mora sadržavati veznik $\neg$.*

Za daljnja izlaganja su nam značajna sljedeća dva veznika: **Shefferova**[5] **operacija** $\uparrow$ i **Łukasiewiczeva operacija**[6] $\downarrow$. Sljedećom tablicom zadajemo interpretaciju te dvije operacije, te definiramo interpretaciju veznika $\underline{\vee}$ kojeg nazivamo **ekskluzivna disjunkcija.**

| $P$ | $Q$ | $P \uparrow Q$ | $P \downarrow Q$ | $P \underline{\vee} Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

[5] H. M. Sheffer, 1882.–1964.
[6] J. Łukasiewicz, 1878.–1956.

Lako je vidjeti da za Shefferovu operaciju $\uparrow$ vrijedi $(P \uparrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$, a za Łukasiewiczevu operaciju $\downarrow$ vrijedi $(P \downarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$.

Postoji $2^2$ unarnih, odnosno $2^4$ binarnih, propozicionalnih veznika. Za još neke binarne veznike kasnije ćemo navesti uobičajne nazive.

**Primjer 1.22.** *Pomoću Shefferove operacije, odnosno Łukasiewiczeve operacije, izrazimo svaki od veznika* $\neg$, $\wedge$ *i* $\vee$. *Lako je provjeriti da vrijedi:*

$$\begin{aligned} \neg P &\Leftrightarrow (P \uparrow P); \\ (P \vee Q) &\Leftrightarrow (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q); \\ (P \wedge Q) &\Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg P &\Leftrightarrow (P \downarrow P); \\ (P \vee Q) &\Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q); \\ (P \wedge Q) &\Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q). \end{aligned}$$

*Primjenom teorema o normalnim formama (vidi teorem 1.13.) zaključujemo da se svaki propozicionalni veznik može izraziti pomoću Shefferove, odnosno Łukasiewiczeve operacije. Dakle, skupovi* $\{\uparrow\}$ *i* $\{\downarrow\}$ *su baze za skup svih veznika. U sljedećoj propoziciji dokazujemo da su oni jedini binarni veznici koji imaju to svojstvo.*

**Propozicija 1.23.** *Ako je* $\circ$ *binarni propozicionalni veznik koji ima svojstvo da je* $\{\circ\}$ *baza za skup svih propozicionalnih veznika, tada je* $\circ$ *Shefferova operacija* $\uparrow$ *ili Łukasiewiczeva operacija* $\downarrow$ .

*Dokaz.* Tijekom ovog dokaza za proizvoljne $x, y \in \{0,1\}$ radi kratkoće pišemo $x \circ y$ umjesto $\circ(x, y)$,

Primijetimo da mora vrijediti $1 \circ 1 = 0$. Inače bi za interpretaciju $I \equiv 1$ i za svaku formulu $F$, u kojoj je $\circ$ jedini veznik, vrijedilo $I(F) = 1$. No, to znači da se npr. veznik $\neg$ ne bi mogao izraziti pomoću veznika $\circ$. Slično, mora vrijediti $0 \circ 0 = 1$. Promotrimo sada sve slučajeve obzirom na vrijednost veznika na parovima $(1,0)$ i $(0,1)$. Imamo sljedeća četiri slučaja:

a) $1 \circ 0 = 1$, $0 \circ 1 = 1$;

b) $1 \circ 0 = 1$, $0 \circ 1 = 0$;

c) $1 \circ 0 = 0$, $0 \circ 1 = 1$;

d) $1 \circ 0 = 0$, $0 \circ 1 = 0$.

Uzevši u obzir da je $1 \circ 1 = 0$ i $0 \circ 0 = 1$ tada slučaj a) odgovara Shefferovoj operaciji, a slučaj d) Łukasiewiczevoj. Promotrimo preostala dva slučaj, tj. b) i c). Lako je vidjeti da za slučaj b) vrijedi $(P \circ Q) \Leftrightarrow \neg Q$, a za slučaj c) imamo $(P \circ Q) \Leftrightarrow \neg P$. No, iz toga odmah slijedi da niti u jednom od ta dva slučaja skup $\{\circ\}$ ne može biti baza.

Time smo dokazali da veznik $\circ$ mora biti $\uparrow$ ili pak $\downarrow$. $\square$

Sada dajemo definicije nekih značajnih skupova propozicionalnih veznika.

Sa $Vez$ ćemo označavati skup svih propozicionalnih veznika.

Sa $\mathbf{T_0}$ označavamo skup svih veznika $f$ za koje vrijedi $f(0, \ldots, 0) = 0$.

Sa $\mathbf{T_1}$ označavamo skup svih veznika $f$ za koje vrijedi $f(1, \ldots, 1) = 1$.

Označimo sa $+$ binarni veznik koji je definiran kao zbrajanje modulo 2 na skupu $\{0, 1\}$.[7] Za veznik $f$ kažemo da je **linearan** ako vrijedi $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n + c$, gdje je $c \in \{0, 1\}$. Sa $\mathbf{L}$ označavamo skup svih linearnih veznika.

Sa $\vec{x}$ označavamo uređenu $n$-torku $(x_1, \ldots, x_n)$, analogno upotrebljavamo oznaku $\vec{y}$. Za veznik $f$ kažemo da je **monoton** ako za sve $\vec{x}, \vec{y} \in \{0, 1\}^n$ vrijedi da pretpostavke $x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n$ povlače $f(\vec{x}) \leq f(\vec{y})$. Neka je sa $\mathbf{M}$ označen skup svih **monotonih** veznika.

Za veznik $f$ kažemo da je **samodualan** ako vrijedi $f(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$, za sve $x_i \in \{0, 1\}$. Skup svih samodualnih veznika označavamo sa $\mathbf{D}$.

Kažemo da je neki skup propozicionalnih veznika $V$ **zatvoren** ako $V$ sadrži sve veznike koji se mogu izraziti pomoću elemenata od $V$. Skup veznika $V = \{\neg, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ nije zatvoren jer je npr. veznik $\wedge$ izraziv pomoću $V$, a veznik $\wedge$ ne pripada skupu $V$. U zadatku 7 su definirani primejri zatvorenih skupova veznika.

Za skup $V$ veznika kažemo da je **pretpun** ako je zatvoren i nije sadržen ni u kojem zatvorenom skupu različitom od $Vez$.

Bez dokaza navodimo dvije važne činjenice vezane uz upravo definirane skupove veznika. Dokaze sljedećih dvaju teorema možete pogledati u [23].

**Teorem 1.24.** *(Postov[8] teorem)*
*Ne postoje drugi pretpuni skupovi osim $T_0$, $T_1$, $L$, $M$ i $D$.*

[7] Uočite da je + zapravo ekskluzivna disjunkcija. No, u ovom kontekstu uobičajno je govoriti o zbrajanju modulo dva.

[8] E. Post, 1897.–1954.

**Teorem 1.25.** *Skup veznika $V$ je potpun za skup $Vez$ ako i samo ako $V$ nije sadržan ni u jednom pretpunom skupu veznika.*

Problem određivanja i klasificiranja svih baza je težak i njegovo rješenje prelazi okvire osnovnog kursa matematičke logike.[9]

Grubo govoreći, problem minimizacije sastoji se od određivanja ekvivalentne formule sa što manje veznika za proizvoljnu zadanu formulu. Ovaj problem je vrlo važan. Njegovo rješavanje prelazi okvire ove skripte. Više o problemu minimizacije možete čitati u [18] i [28].

Na kraju ove točke želimo još naglasiti da ćemo u točki pod naslovom *Račun sudova* smatrati da alfabet sadrži samo veznike $\neg$ i $\rightarrow$ . No, nadamo se da nakon izlaganja u ovoj točki to neće stvarati zabunu, pošto znamo da je $\{\neg, \rightarrow\}$ baza skupa svih propozicionalnih veznika.

**Zadaci:**

1. Dokažite da vrijedi:

   a) veznici $\wedge$ i $\vee$ su izrazivi pomoću skupa $\{\rightarrow, \neg\}$;
   b) veznik $\vee$ je izraziv pomoću $\{\rightarrow\}$;
   c) veznik $\rightarrow$ nije moguće izraziti pomoću skupa $\{\wedge, \vee\}$;
   d) veznik $\wedge$ nije moguće izraziti pomoću skupa $\{\vee, \rightarrow\}$;
   e) veznik $\neg$ je izraziv pomoću $\{\rightarrow, \perp\}$;
   f) veznik $\neg$ je izraziv pomoću veznika iz $\{+, \top\}$.

   Rješenje b): Lako je provjeriti da vrijedi $(P \vee Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$.

2. Dokažite potpunost sljedećih skupova propozicionalnih veznika za skup $Vez$ :

   a) $\{\wedge, \vee, \neg\}$;
   b) $\{\vee, \neg\}$;
   c) $\{\rightarrow, \neg\}$;
   d) $\{+, \vee, \perp\}$;
   e) $\{\rightarrow, \perp\}$.

[9] U [9] određene su sve baze za skup svih propozicionalnih veznika koje sadrže samo binarne i unarne veznike. Dokazano je da postoje točno dvije jednočlane baze (Shefferova i Łukasiewiczeva operacija), 34 dvočlane baze i 10 tročlanih baza. Zatim, pokazano je da ne postoji baza s unarnim i binarnim veznicima koja bi sadržavala više od tri elementa.

3. Dokažite da sljedeći skupovi veznika nisu potpuni za skup $Vez$ :

   a) $\{\neg, \leftrightarrow\}$;

   b) $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;

   c) $\{\wedge, \vee, \underline{\vee}\}$.

4. Dokažite da su sljedeći skupovi veznika nezavisni:

   a) $\{\neg, \leftrightarrow\}$;

   b) $\{\neg, +\}$;

   c) $\{\leftrightarrow, +\}$;

   d) $\{\vee, \leftrightarrow\}$.

   Uputa za a): Primijetite da vrijedi $\leftrightarrow \in T_1$ i $\neg \notin T_1$. Pošto je skup $T_1$ zatvoren, tada slijedi da veznik $\neg$ nije moguće izraziti pomoću veznika $\leftrightarrow$ . Lako je vidjeti da je svaka formula $F(P)$ u kojoj se pojavljuje samo veznik $\neg$ (ta formula može sadržavati samo jednu jedinu varijablu!) logički ekvivalentna sa $P$ ili pak sa $\neg P$. No, formula $P \leftrightarrow Q$ nije ekvivalentna ni sa $P$, ni sa $\neg P$.

5. Odredite barem jedan tromjesni veznik $f$ tako da je $\{f\}$ baza za skup svih propozicionalnih veznika.
   Rješenje: Neka je $f$ veznik takav da vrijedi $f(P, P, P) \Leftrightarrow \neg P$, te vrijedi $f(P, Q, Q) \Leftrightarrow P \vee Q$. Dokažite da je tada $\{f\}$ baza za $Vez$.

6. Dokažite da su sljedeći skupovi veznika baze za skup $Vez$ :

   a) $\{\neg, \not\leftrightarrow\}$ , gdje je veznik $\not\leftrightarrow$ definiran tako da vrijedi $(P \not\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg(Q \rightarrow P))$;

   b) $\{f\}$, gdje je $f$ tromjesni veznik definiran tako da vrijedi $f(P, Q, R) \Leftrightarrow ((Q \wedge P) \vee(\neg Q \wedge R))$, a alfabet sadrži logičke konstante $\top$ i $\bot$.

7. Dokažite da su $T_0$, $T_1$, $L$, $M$ i $D$ u parovima različiti zatvoreni skupovi veznika, te je svaki od navedenih skupova različit od $Vez$.
   Uputa: Neka je sa $S$ označen bilo koji od navedenih skupova. Reći ćemo da je veznik $f \in Vez$ $n$-izraziv u $S$ ako postoji formula $F$ koja sadrži točno $n$ veznika (ne nužno različitih) koji svi pripadaju skupu $S$, te vrijedi $f \Leftrightarrow F$. Indukcijom po $n$ dokažite da svaki $n$-izraziv veznik u $S$ pripada skupu $S$.

8. Dokažite da je skup $\{\wedge, +\}$ baza za skup $T_0$.
Uputa: Prvo dokažite sljedeću pomoćnu tvrdnju:
za sve $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ vrijedi

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n,\ k \geq 0} \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k},$$

gdje su $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k} \in \{0,1\}$. Tada odmah slijedi da neki veznik pripada skupu $T_0$ ako i samo ako je slobodni član u gornjoj sumi jednak 0. No, tada odmah imamo da je skup $\{\wedge, +\}$ potpun za $T_0$.

Pošto je $\wedge \in T_1 \setminus L$ i $+ \in L \setminus T_1$ tada slijedi da je $\{\wedge, +\}$ nezavisan skup veznika.

9. Neka je $f$ $n$-mjesni veznik koji je izraziv pomoću $\{\vee, \to\}$. Dokažite da tada postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je za sve $\vec{x}$ ispunjeno $f(\vec{x}) \geq x_i$.
Rješenje: Za $f$ ćemo reći da je $m$-izraziv pomoću $\vee$ i $\to$ ako postoji veznik $g$, u kojem se pojavljuju samo veznici $\vee$ i $\to$ točno $m$ puta, tako da je $f \equiv g$. Indukcijom po $m$ dokažite da za svaki $m$-izraziv veznik $f$ postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $f(\vec{x}) \geq x_i$. (Uočite da vrijedi $x_1 \to x_2 \geq x_2$ i $x_1 \vee x_2 \geq x_1$).

10. Dokažite da je skup $\{\wedge, \to\}$ baza za skup $T_1$.
Rješenje: Neka je $f \in T_1$ proizvoljan veznik. Pošto je $f(1, \ldots, 1) = 1$ tada savršena konjunktivna normalna forma za $f$ ne sadrži elementarnu disjunkciju oblika $\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n$. Iz zadatka 9 sa strane 26 slijedi da se veznik $f$ može izraziti pomoću skupa veznika $\{\vee, \wedge, \to\}$. No, tada iz zadatka 1 sa strane 34 slijedi da je $\{\wedge, \to\}$ potpun skup veznika za $T_1$.

Dokažimo još nezavisnost skupa $\{\wedge, \to\}$. Ako je $f$ veznik, koji je izraziv pomoću $\wedge$, tada je očito $f \in T_0$. No, $\to \notin T_0$. Primijetimo da nije $x_1 \wedge x_2 \geq x_1$, a ni $x_1 \wedge x_2 \geq x_2$. Iz prethodnog zadatka 9 tada slijedi da veznik $\wedge$ nije moguće izraziti pomoću veznika $\to$ .

11. Neka alfabet sadrži i konstante $\top$ i $\bot$. Dokažite da je tada skup $\{\vee, \wedge, \bot, \top\}$ baza za skup $M$ svih monotonih veznika.
Rješenje: Neka je $f$ $n$-mjesni monotoni veznik. Definiramo veznike $h$ i $g$ sa:

$$h(x_2, \ldots, x_n) = f(\top, x_2, \ldots, x_n);$$
$$g(x_2, \ldots, x_n) = f(\bot, x_2, \ldots, x_n).$$

Lako je provjeriti da su $h$ i $g$ monotoni veznici. Po slučajevima lako je provjeriti da vrijedi

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \wedge h(x_2, \ldots, x_n)) \ \vee \ (\neg x_1 \wedge g(x_2, \ldots, x_n)).$$

Iz monotonosti veznika $f$ slijedi $h(x_2, \ldots, x_n) \geq g(x_2, \ldots, x_n)$, za sve $x_i \in \{0, 1\}$. Posebno iz toga slijedi $h(x_2, \ldots, x_n) = h(x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_2, \ldots, x_n)$. Tada je

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1 \wedge (h(x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_2, \ldots, x_n)) \\
&\quad \vee (\neg x_1 \wedge g(x_2, \ldots, x_n)) \\
&= (x_1 \wedge h(x_2, \ldots, x_n)) \vee (x_1 \wedge g(x_2, \ldots, x_n)) \vee \\
&\quad (\neg x_1 \wedge g(x_2, \ldots, x_n)) \\
&= (x_1 \wedge h(x_2, \ldots, x_n)) \vee g(x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Analogno dalje.

12. Neka alfabet sadrži i konstante $\top$ i $\bot$. Dokažite da je $\{\leftrightarrow, \bot\}$ baza za skup $L$ svih linearnih veznika.
Rješenje: Uočimo da vrijedi $\neg x \Leftrightarrow (x \leftrightarrow \bot)$, $(x + y) \Leftrightarrow \neg(x \leftrightarrow y)$ i $\top \Leftrightarrow (x \leftrightarrow x)$. Iz toga lako slijedi da je svaku linearnu funkciju moguće izraziti pomoću veznika $\bot$ i $\leftrightarrow$ . Nezavisnost skupa veznika $\{\bot, \leftrightarrow\}$ slijedi iz činjenica $\bot \in T_0 \backslash T_1$ i $\leftrightarrow \in T_1 \backslash T_0$.

13. Sa $f$ označimo tromjesni veznik za kojeg vrijedi $f(P, Q, R) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) + (Q \wedge R) + (R \wedge P))$. Dokažite da je $\{\neg, f\}$ baza za skup $D$ svih autodualnih veznika.

## 1.5 Testovi valjanosti

U točki 1.3 uveli smo nekoliko semantičkih pojmova. To su: implikacija, logička ekvivalencija, ispunjivost, oborivost, valjanost i antitautologija. Lako je vidjeti da su svi ti pojmovi međusobno definabilni. Pogledajmo kako se svi navedeni pojmovi svode na valjanost. Očito vrijedi:

| | | |
|---|---|---|
| $A \Rightarrow B$ | ako i samo ako | $A \rightarrow B$ je valjana formula; |
| $A \Leftrightarrow B$ | ako i samo ako | $A \leftrightarrow B$ je valjana formula; |
| $A$ je ispunjiva | ako i samo ako | $\neg A$ nije valjana formula; |
| $A$ je oboriva | ako i samo ako | $A$ nije valjana formula; |
| $A$ je antitautologija | ako i samo ako | $\neg A$ je valjana formula. |

Ako treba npr. ispitati ispunjivost neke formule $A$ dovoljno je vidjeti da formula $\neg A$ nije valjana. Ovdje ćemo govoriti o načinima ispitivanja valjanosti, tj. o **testovima valjanosti**.[10] Jedan od tih testova već smo upoznali u točkama 1.3 i 1.4. To su semantičke tablice. No, nedostatak je tablica da ispituje vrijednost formule za svaku adekvatnu interpretaciju. Ako formula sadrži $n$ različitih propozicionalnih varijabli tada semantička tablica sadrži $2^n$ redaka. To je vrlo nepraktično za malo veće $n$-ove.

Zapravo najveći nedostatak semantičkih tablica je da je to jedna "bruteforca" metode. Iz semantičkih tablica mi ne možemo zaključiti koji su uzroci da je neka formula ispunjiva, oboriva, valjana ili antitautologija.

Važno je uočiti da se prilikom ispitivanja valjanosti formula sematičkom tablicom ispituju vrijednosti istine za svaku adekvatnu parcijalnu interpretaciju. Testovi kod kojih se ne određuje vrijednost istine za svaku interpretaciju, već se samo traži jedna interpretacija koja bi imala određeno svojstvo, nazivaju se **ciljani testovi**.

Ako želimo odrediti je li neka formula ispunjiva tada nas zanima postoji li neka interpretacija za koju je dana formula istinita. Ako pak želimo npr. ispitati slijedi li neka formula $F$ logički iz nekog danog konačnog skupa $S$ tada moramo ispitati postoji li interpretacija $I$ za koju vrijedi $I(S) = 1$ i $I(F) = 0$.

Sada dajemo jedan primjer ciljanog testa. Nazivamo ga **glavni test.**[11] Opišimo kratko glavni test na primjeru kada za neku formulu $F$ treba ispitati je

[10] Problem ispunjivosti formule logike sudova, tj. SAT (eng. satisfaction), je jedan od NP-problema. To znači da postoji algoritam koji za proizvoljnu formulu $F$ i nedeterministički odabranu interpretaciju $I$ u polinomijalnom vremenu ispita vrijedi li $I(F) = 1$. Štoviše, SAT je jedan od NP-potpunih problema, tj. svaki drugi NP-problem se može svesti na SAT. Semantičke tablice su npr. jedan algoritam za ispitivanje ispunjivosti formule. No, znamo ako formula sadrži $n$ različitih propozicionalnih varijabli, tada semantička tablica sadrži $2^n$ redaka. To znači da semantičke tablice nisu polinomijalni algoritam, već eksponencijalni.

[11] U literaturi se glavni test naziva i semantičko stablo, odnosno semantički tableaux (vidi [36] ili [37]).

li valjana. Na sličan način se ispituje ispunjivost, oborivost, antitautologičnost, implikacija i logička ekvivalencija formula. Prilikom ispitivanja valjanosti formule $F$ polazimo od pitanja postoji li interpretacija propozicionalnih varijabli za koje je dana formula neistinita. Iz tog razloga test počinje s retkom oblika: $F$ $\bot$. Tada primjenom određenih pravila (obzirom na "glavni" veznik) razgrađujemo danu formulu. Ovdje znak $\bot$ koristimo kao oznaku za "formula je neistinita". Analogno upotrebljavamo znak $\top$. Sada navodimo pravila koja koristimo prilikom glavnog testa.

$$(\neg) \qquad \begin{array}{c} \neg B \;\; \top \\ B \;\; \bot \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg B \;\; \bot \\ B \;\; \top \end{array}$$

$$(\wedge) \qquad \begin{array}{c} B \wedge C \;\; \top \\ B \;\; \top \\ C \;\; \top \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{B \wedge C \;\; \bot} \\ / & \backslash \\ B \;\; \bot & C \;\; \bot \end{array}$$

$$(\vee) \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{B \vee C \;\; \top} \\ / & \backslash \\ B \;\; \top & C \;\; \top \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} B \vee C \;\; \bot \\ B \;\; \bot \\ C \;\; \bot \end{array}$$

$$(\rightarrow) \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{B \rightarrow C \;\; \top} \\ / & \backslash \\ B \;\; \bot & C \;\; \top \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} B \rightarrow C \;\; \bot \\ B \;\; \top \\ C \;\; \bot \end{array}$$

$$(\leftrightarrow) \qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{B \leftrightarrow C \;\; \top} \\ / & \backslash \\ B \;\; \top & B \;\; \bot \\ C \;\; \top & C \;\; \bot \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{B \leftrightarrow C \;\; \bot} \\ / & \backslash \\ B \;\; \top & B \;\; \bot \\ C \;\; \bot & C \;\; \top \end{array}$$

Zaokruživanje konstante (npr. $\top$ ) znači da se dani zahtjev svodi na nove zahtjeve koji ga slijede. Za ilustraciju promotrimo sljedeće pravilo:

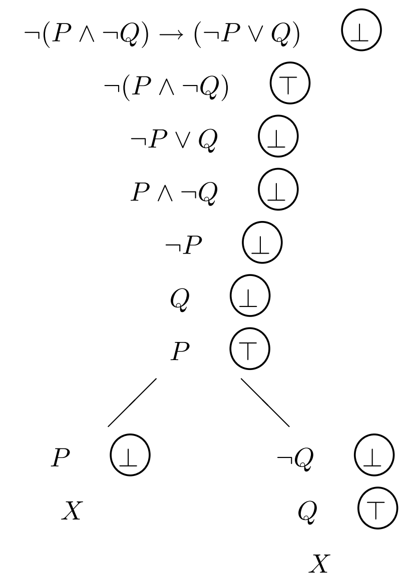
$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{B \vee C \;\; \top} \\ / & \backslash \\ B \;\; \top & C \;\; \top \end{array}$$

Iz njega čitamo da je formula $B \vee C$ istinita ako je istinita formula $B$ ili $C$, tj. istinitost formule $B \vee C$ se svodi na istinitost formule $B$ ili formule $C$.

Ako se prilikom ispitivanja na nekoj grani pojave reci oblika $A$ $\top$ i $A$ $\bot$ tada na toj grani prekidamo ispitivanje, te na kraj grane stavljamo oznaku $X$. Time smo označili da su uvjeti na egzistenciju interpretacije kontradiktorni na toj grani. Ako sve grane završe sa $X$ tada zaključujemo da tražena interpretacija ne postoji. Inače s grane koja nije završila sa $X$ očitavamo traženu interpretaciju.

**Primjer 1.26.** *Ispitajmo pomoću glavnog testa je li dana formula valjana:*

$$\neg(P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$$




*Pošto su sve grane završile sa $X$ zaključujemo da ne postoji interpretacija za koju bi dana formula bila neistinita. To znači da je početna formula valjana.*

U [36] i [37] je dokazano da je glavni test korektan i potpun test.

Glavni test uvijek završava u konačno mnogo koraka. Tada možemo vidjeti je li npr. formula valjana, ili pak možemo pročitati interpretaciju za koju je formula neistinita. To znači da za svaku formulu logike sudova možemo u konačno mnogo koraka odlučiti je li valjana. Zbog toga kažemo da je logika sudova **odlučiva teorija.**[12] To je jedna od najvećih razlika s logikom prvog reda koja nije odlučiva teorija.

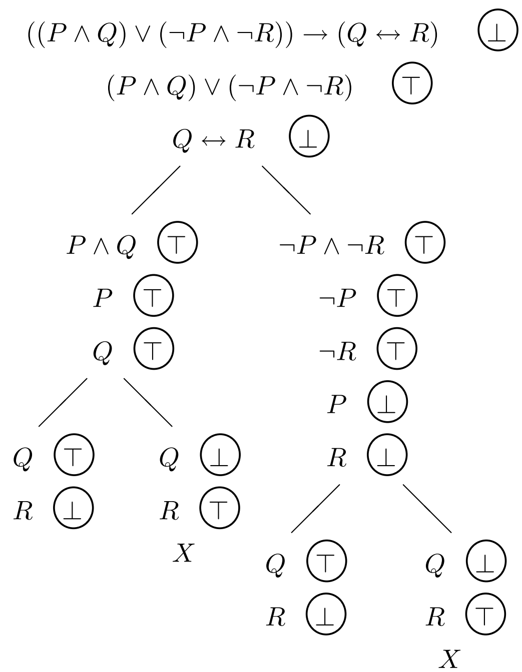
[12]Pojam odlučive teorije ne možemo ovdje strogo definirati. Trebali bismo prije definirati pojam algoritma. (vidi npr. [7] ili [1]).

**Zadaci:**

1. Pomoću glavnog testa ispitajte valjanost formule

$$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)) \rightarrow (Q \leftrightarrow R).$$

Rješenje:



Pošto postoje grane koje nisu završile kontradikcijom tada zaključujemo da dana formula nije valjana. Možemo očitati dvije interpretacije za koje je dana formula neistinita. Jedna je definirana sa $I(P) = I(Q) = 1$ i $I(R) = 0$. Druga je definirana sa $J(P) = J(R) = 0$ i $J(Q) = 1$.

2. Primjenom glavnog testa ispitajte je li:

   a) formula $(P_1 \rightarrow (P_1 \rightarrow P_2)) \rightarrow (P_1 \rightarrow P_2)$ valjana;

   b) formula $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (\neg P \wedge R)$ ispunjiva;

   c) formula $\neg(\neg Q \vee P) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \rightarrow R)$ oboriva.

3. Ispitajte vrijedi li $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (\neg P \leftrightarrow Q)$.

4. U nekoj gostionici skupili su se mladići i djevojke na pokladnu zabavu. Gazdarica gostionice je rekla mladićima: "Svatko tko ispuni sljedeća tri uvjeta dobit će bocu šampanjca. Uvjeti glase:

   (1) Ako netko pleše s crnkom ili pleše sa mnom (inkluzivno "ili"!) onda mora plesati s konobaricom i ne smije plesati s plavušom.

   (2) Ako netko ne pleše s konobaricom ili ako pleše s crnkom, onda ne smije plesati sa mnom, ali mora plesati s plavušom.

   (3) Mora plesati sa mnom, ali ne smije s konobaricom, osim ako pleše s crnkom, ali ne s plavušom."

   Što mora učiniti mladić da besplatno dobije bocu šampanjca?[13]
   Rješenje: Uvodimo sljedeće oznake za tvrdnje:

   - $P$ – "mladić je plesao s plavušom";
   - $C$ – "mladić je plesao s crnkom";
   - $K$ – "mladić je plesao s konobaricom";
   - $G$ – "mladić je plesao s gazdaricom".

   Ako simbole $P$, $C$, $K$ i $G$ shvatimo kao propozicionalne varijable tada se dani zadatak svodi na ispitivanje je li formula

$$\Big((C \vee G) \to (K \wedge \neg P)\Big) \wedge \Big((\neg K \vee C) \to (\neg G \wedge P)\Big) \wedge \Big(\neg(C \wedge \neg P) \to (G \wedge \neg K)\Big)$$

   ispunjiva. Primjenom glavnog testa to učinite (formula je antitautologija, a to znači da niti jedan mladić ne može ispuniti gazdaričine uvjete).

5. Neki mladoženja poslije vjenčanja reće svojoj ženi: "Draga moja, dobro ćemo se slagati ako s obzirom na ručkove ispuniš ova tri uvjeta:

   1. Ako ne daš kruh na stol tada moraš dati sladoled.
   2. Ako daš kruh i sladoled, ne smiješ dati krastavce.
   3. Ako daš krastavce ili (inkluzivno 'ili'!) ne daš kruh, onda ne smiješ dati sladoled."

   Jesu li ovi uvjeti zajedno ispunjivi, i ako jesu, kako ih je moguće postići?

[13] Zadaci 4 i 5 su dani u knjizi D. Blanuša, Viša matematika II-1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1965, na stranama 347–350. O rješenju tih zadataka pomoću Booleovih algebri možete čitati i u članku Ž. Hanjš, D. Žubrinić, Danilo Blanuša i njegov problem mladoženje, Matematičko–fizički list, 214 (2003), 82–90

## 1.6 Račun sudova (Frege–Łukasiewiczev sistem)

Glavnim testom može se utvrditi je li neki zaključak ispravan, ali nije uvijek očito kako konkluzije slijede iz premisa. Sustavan način na koji možemo ispitati logički slijed je odgovarajući sustav koji na nedvosmisleni i precizan način definira pojam dokaza, tako da je moguće dokazati samo one konkluzije koje slijede iz premisa. Takvi sustavi nazivaju se **deduktivni sustavi**. Postoji nekoliko vrsta deduktivnih sustava. Mi ćemo proučavati jedan hilbertovski sustav (nekoliko aksioma i jedno pravilo izvoda) i jedan sustav prirodne dedukcije (nema aksioma).

### 1.6.1 Sistem $RS$

U ovoj točki prvo dajemo definiciju Frege–Łukasiewiczevog sistema, kojeg ovdje označavamo s $RS$ (račun sudova). Nakon toga definiramo pojmove dokaza, teorema i izvoda. Prvo dokazujemo teorem adekvatnosti za sistem $RS$, kojim je iskazana korektnost sistema obzirom na semantiku definiranu u prethodnim točkama. Zatim, nizom lema i teoremom dedukcije dajemo osnovna svojstva izvoda, odnosno dokaza. Ujedno nam te činjenice služe za dokaz glavnog teorema ove točke - teorema potpunosti.

Važno je naglasiti da u ovoj točki ne promatramo isti alfabet kao prije, već samo sljedeći skup osnovnih znakova:

$$\{\neg, \to, \ (, \ )\} \ \cup \ \{P_0, P_1, \ldots\}.$$

To smanjenje nije nikakvo bitno smanjenje izražajnosti jezika logike sudova, jer se svi ispušteni veznici (tj. $\wedge$, $\vee$ i $\leftrightarrow$) mogu definirati pomoću veznika $\neg$ i $\to$. No, to će nam bitno skratiti dokaze koji se provode indukcijom po složenosti formule. Zbog promjene alfabeta mijenja se i definicija pojma formule. Ovdje nećemo navoditi tu izmijenjenu definiciju, već samo ističemo da sada u induktivnom koraku definicije imamo samo dva slučaja, i to obzirom na veznike $\neg$ i $\to$.

Veznike $\wedge$, $\vee$ i $\leftrightarrow$, koji nisu elementi alfabeta, shvaćamo kao pokrate, i to redom ovako:

$$\begin{array}{ll} A \wedge B & \text{označava} \ \ \neg(A \to \neg B); \\ A \vee B & \text{označava} \ \ \neg A \to B; \\ A \leftrightarrow B & \text{označava} \ \ \neg((A \to B) \to \neg(B \to A)). \end{array}$$

Prije same definicije sistema $RS$ objasnimo pojam aksioma i pravila izvoda. Aksiom sistema $RS$ je izabrana formula. Zapravo, aksiome $RS$ definiramo pomoću shema formula.

Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ formula. **Shema formule** $A$ je skup svih formula oblika $A(B_1, \ldots, B_n)$, gdje su $B_1, \ldots, B_n$ oznake za proizvoljne formule. Shemu formule označavamo isto kao i formulu. Za danu shemu formule svaki njen element nazivamo **instanca**. Npr. ako je sa $(P_3 \wedge P_4) \to (P_4 \leftrightarrow P_1)$ zadana shema formule, tada je $(P_7 \wedge (\neg\neg P_2 \vee P_8)) \to ((\neg\neg P_2 \vee P_8) \leftrightarrow P_1)$ jedna njena instanca. Ponekad se shema formule zadaje pomoću meta–varijabli za formule. Npr. ako kažemo da je $A \to ((B \wedge C) \leftrightarrow \neg A)$ shema formule, tada mislimo na skup svih formula tog oblika, gdje su umjesto meta–varijabli $A, B$ i $C$ uvrštene proizvoljne formule. Obično ćemo sheme formula koristiti prilikom zadavanja aksioma, pa ćemo govoriti o **shemama aksioma**.

**Pravilo izvoda** je zadana transformacija kojom iz skupa formula dobivamo novu formulu. Obično se pravilo izvoda shematski zapisuje u obliku

$$\frac{A_1 \ \dots \ A_n}{B}$$

a čitamo ga kao "iz skupa formula $\{A_1, \ \dots, \ A_n\}$ slijedi formula $B$". Formule $A_i$ se nazivaju **premise**, a formula $B$ se naziva **konkluzija**. Obično se želi da zadano pravilo izvoda **čuva istinitost**, tj. da vrijedi

$$\{A_1, \ \dots, \ A_n\} \models B.$$

Navest ćemo nekoliko primjera pravila izvoda. Tzv. pravilo $\wedge$ eliminacije je zadano s

$$\frac{A \wedge B}{A.}$$

Npr. formula $P \to Q$ je dobivena iz formule $(P \to Q) \wedge (R \vee (\neg P \leftrightarrow R))$ pomoću gornjeg pravila $\wedge$ eliminacije. Dok je formula $(\neg P \vee R) \to \neg R$ dobivena iz premisa $(\neg P \vee R) \to ((R \wedge Q) \leftrightarrow \neg P)$ i $((R \wedge Q) \leftrightarrow \neg P) \to \neg R$ pomoću tzv. pravila **hipotetički silogizam**, tj.

$$\frac{A \to B \qquad\qquad B \to C}{A \to C}.$$

Prilikom zadavanja nekog sistema za logiku sudova osnovni zahtjev je da svaku valjanu formulu možemo dobiti kao rezultat konačno mnogo transformacija (tj. primjenom zadanih pravila izvoda) na danom skupu aksioma.

**Definicija 1.27.** *Sistem RS zadan je svojim shemama aksioma i jednim pravilom izvoda. Sheme aksioma sistema RS su:*

*(A1)* $A \to (B \to A)$;

*(A2)* $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

*(A3)* $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

*Jedino pravilo izvoda je* **modus ponens** *ili kratko* **mod pon** *tj.*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}.$$

*Svaku instancu neke od shema* (A1) – (A3) *nazivamo* **aksiom**.

**Definicija 1.28.** *Kažemo da je niz formula $F_1, \ldots, F_n$* **dokaz** *za formulu $F$ u sistemu RS ako vrijedi:*

*a) formula $F_n$ je upravo $F$, tj. vrijedi $F_n \equiv F$;*

*b) za sve $k \in \{1, \ldots, n\}$ formula $F_k$ je ili aksiom ili je nastala primjenom pravila modus ponens na neke formule $F_i$ i $F_j$, gdje su $i, j < k$.*

*Kažemo da je formula $F$* **teorem** *sistema RS, u oznaci $\vdash_{RS} F$ (odnosno, kratko $\vdash F$), ako u RS postoji dokaz za $F$.*

Primijetite da pojam teorema (a i dokaza) ovdje upotrebljavamo u dva smisla - teorem sistema $RS$ i teorem koji nešto govori o sistemu $RS$. Ponekad se u literaturi za ovaj drugi smisao pojma teorema može naći izraz "metateorem". Mi ovdje nećemo činiti razliku, nadajući se da će značenje riječi "teorem" slijediti iz danog konteksta.

**Teorem 1.29.** *(teorem adekvatnosti za sistem RS)*
*Svaki teorem sistema RS je valjana formula.*

*Dokaz.* Lako je dokazati da je svaki aksiom sistema $RS$ valjana formula. Zatim, pravilo izvoda modus ponens čuva istinitost. Odnosno, ako je $I$ interpretacija propozicionalnih varijabli takva da vrijedi $I(A) = 1$ i $I(A \to B) = 1$, tada očito mora vrijediti $I(B) = 1$.

Reći ćemo da je formula $F$ $n-$dokaziva ($n \in \mathbb{N}$) ako postoji barem jedan dokaz duljine $n$ u sistemu $RS$ za formulu $F$. Indukcijom po $n$ dokazujemo da je svaka $n$-dokaziva formula valjana. Ako je $F$ 1-dokaziva tada dokaz za $F$ izgleda: $F$ (aksiom). Na početku dokaza smo naveli da je svaki aksiom valjana formula.

Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, za sve $k < n$ svaka $k$-dokaziva formula valjana. Neka je $F$ neka $n-$dokaziva formula, te neka je $F_1, \ldots, F_n$

neki dokaz za $F$ duljine $n$. Po definiciji dokaza vrijedi $F_n \equiv F$, te je $F_n$ aksiom ili pak je formula $F_n$ nastala primjenom pravila modus ponens iz formula $F_i$ i $F_j$ gdje su $i, j < n$. Ako je $F_n$ aksiom tada znamo da je to valjana formula. Ako je formula $F_n$ nastala pomoću pravila modus ponens tada su po pretpostavci indukcije formule $F_i$ i $F_j$ valjane. No, na početku smo bili primijetili da pravilo modus ponens čuva istinitost, pa je i formula $F_n$ valjana. □

Sada nam je glavni cilj dokazati obrat gornjeg teorema, tj. teorem potpunosti. U tu svrhu prvo dokazujemo niz lema i propozicija.

**Lema 1.30.** *Vrijedi* $\vdash A \to A$, *tj. za sve formule* $A$ *logike sudova formula* $A \to A$ *je teorem sistema* $RS$.

*Dokaz.* Sljedećim nizom formula dajemo jedan dokaz u sistemu $RS$ za formulu $A \to A$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(A \to ((A \to A) \to A)) \to$ $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ | (aksiom $(A2)$) |
| 2. | $A \to ((A \to A) \to A)$ | (aksiom $(A1)$) |
| 3. | $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ | (mod pon: 1. i 2.) |
| 4. | $A \to (A \to A)$ | (aksiom $(A1)$) |
| 5. | $A \to A$ | (mod pon: 3. i 4.) |

□

Jednom dokazani teorem od $RS$ možemo upotrebljavati u novim dokazima. (Mogli bismo čitav dokaz teorema prepisati u novi traženi dokaz). To ćemo ilustrirati prilikom dokaza sljedećeg teorema sistema $RS$. Tvrdimo da za sve formule $A$ vrijedi $\vdash \neg A \to (A \to A)$. Sljedećim nizom formula dajemo dokaz za $\neg A \to (A \to A)$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(A \to A) \to (\neg A \to (A \to A))$ | (aksiom $(A1)$) |
| 2. | $A \to A$ | (po prethodnoj lemi 1.30.) |
| 3. | $\neg A \to (A \to A)$ | (mod pon: 1. i 2.) |

Sada dajemo definiciju izvoda. U izvodima, za razliku od dokaza, osim aksioma imamo i posebno dozvoljene formule koje nazivamo pretpostavke.

**Definicija 1.31.** *Neka je* $S$ *proizvoljan skup formula logike sudova i* $F$ *neka formula. Kažemo da je niz formula* $F_1, \dots, F_n$ **izvod** *iz skupa* $S$ *formule* $F$ *u sistemu* $RS$, *u oznaci* $S \vdash F$, *ako vrijedi:*

*a) formula* $F_n$ *je upravo formula* $F$, *tj. imamo* $F_n \equiv F$;

*b) za sve* $k \in \{1, \dots, n\}$ *vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

$b_1$) *$F_k$ je aksiom sistema $RS$;*

$b_2$) *$F_k \in S$ (tada formulu $F_k$ nazivamo* **pretpostavka***);*

$b_3$) *formula $F_k$ je nastala iz nekih $F_i$, $F_j$ $(i, j < k)$ pomoću pravila modus ponens.*

Dokaz sljedeće propozicije je sasvim analogan dokazu teorema adekvatnosti za sistem $RS$ pa ga nećemo ovdje navoditi.

**Propozicija 1.32.** *Neka je $S$ skup formula i $F$ neka formula tako da vrijedi $S \vdash F$. Tada vrijedi $S \models F$.*

Sada nećemo odmah dati primjer nekog izvoda već ćemo prvo dokazati teorem dedukcije. Taj teorem nam bitno olakšava pronalaženje izvoda.

**Teorem 1.33.** *(teorem dedukcije)*
*Neka je $S$ skup formula, te $A$ i $B$ formule logike sudova. Ako vrijedi $S \cup \{A\} \vdash B$, tada vrijedi i $S \vdash A \to B$.*

*Dokaz.* Za proizvoljnu formulu $F$ reći ćemo da je $n$-izvodljiva iz skupa formula $S \cup \{A\}$ ako postoji izvod formule $F$ iz tog skupa koji je duljine $n$. Indukcijom po $n$ dokazujemo da za svaku $n$-izvodljivu formulu $F$ iz skupa $S \cup \{A\}$ vrijedi $S \vdash A \to F$. Očito tada slijedi tvrdnja teorema. Prije dokaza indukcijom promotrimo neke specijalne slučajeve koje ćemo kasnije koristiti u bazi i koraku indukcije.

a) Neka je formula $F$ aksiom sistema $RS$. Tada izvod $\Gamma \vdash A \to F$ izgleda ovako:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $F \to (A \to F)$ | (aksiom $(A1)$) |
| 2. | $F$ | (aksiom od $RS$) |
| 3. | $A \to F$ | (mod pon: 1. i 2.) |

b) Neka formula $F$ pripada skupu $\Gamma$. Tada izvod $\Gamma \vdash A \to F$ izgleda ovako:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $F \to (A \to F)$ | (aksiom $(A1)$) |
| 2. | $F$ | (iz skupa $S$) |
| 3. | $A \to F$ | (mod pon: 1. i 2.) |

c) Neka je formula $F$ upravo $A$. Tada tvrdnja $\Gamma \vdash A \to F$, tj. $\Gamma \vdash A \to A$ slijedi iz leme 1.30..

Sada indukcijom dokazujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $n$–izvodljive formule F iz $S \cup \{A\}$ vrijedi $S \vdash A \to F$.

Neka je $F$ proizvoljna 1–izvodljiva formula iz skupa $S \cup \{A\}$. To znači da postoji izvod koji sadrži samo formulu $F$. Iz definicije izvoda zaključujemo da je formula $F$ tada aksiom ili je iz skupa $S \cup \{A\}$. No, tada su sve tri moguće situacije opisane na početku promatranim specijalnim slučajevima a), b) i c).

Pretpostavimo sada da neki $n \in \mathbb{N}$ ima svojstvo da za sve $k < n$ i sve $k$–izvodljive formule $F$ iz skupa $S \cup \{A\}$ vrijedi $S \vdash A \to F$. Neka je $G$ proizvoljna $n$–izvodljiva formula iz skupa $S \cup \{A\}$. Neka je $F_1, \ldots, F_n$ neki izvod za $G$. Iz definicije izvoda slijedi $G \equiv F_n$. Obzirom na način nastupa formule $G$ u izvodu promatramo četiri slučaja (vidi definiciju izvoda). No, slučaj kada je $G$ aksiom sistema $RS$, odnosno $G \in S$, ili je pak $G \equiv A$, opisali smo u prije promatranim specijalnim situacijama a), b) i c). Preostalo je još promotriti slučaj kada je formula $G$ nastala pomoću pravila izvoda modus ponens iz nekih formula $F_i$ i $F_j$ gdje su $i, j < n$. Tada je npr. $F_i \equiv F_j \to G$. Uočimo da je formula $F_i$ tada $i$-izvodljiva, a formula $F_j$ je $j$–izvodljiva iz skupa $S \cup \{A\}$. Iz pretpostavke indukcije tada imamo $S \vdash A \to F_j$ i $S \vdash A \to (F_j \to G)$. Jedan izvod formule $A \to G$ iz skupa $S$ dan je sljedećim nizom formula:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(A \to (F_j \to G)) \to ((A \to F_j) \to (A \to G))$ | (aksiom $(A2)$) |
| 2. | $A \to (F_j \to G)$ | (pretpostavka indukcije) |
| 3. | $(A \to F_j) \to (A \to G)$ | (mod pon: 1. i 2.) |
| 4. | $A \to F_j$ | (pretpostavka indukcije) |
| 5. | $A \to G$ | (mod pon: 3. i 4.) |

$\square$

Primijetimo da teorem dedukcije vrijedi u svakom sistemu koji ima kao sheme aksioma $(A1)$ i $(A2)$, tj. u dokazu teorema dedukcije nismo upotrebljavali shemu aksioma $(A3)$. No, važno je i primijetiti da sistem ne smije kao pravilo izvoda imati neko drugo pravilo osim modus ponens, ako se želimo pozvati na prethodni dokaz teorema dedukcije.

Teorem dedukcije bitno olakšava neke izvode. To ćemo ilustrirati sljedećim primjerom.

**Primjer 1.34.** *Neka su $A$, $B$ i $C$ proizvoljne formule logike sudova. Vrijedi:*

*a)* $\{A \to B,\ B \to C\} \vdash A \to C$;

*b)* $\{A \to (B \to C),\ B\} \vdash A \to C$.

*Za dokaz tvrdnje a) dovoljno je po teoremu dedukcije naći izvod formule $C$ iz skupa $\{A \to B,\ B \to C,\ A\}$. Sljedećim nizom formula dajemo taj izvod.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A$ | *(pretpostavka)* |
| 2. | $A \to B$ | *(pretpostavka)* |
| 3. | $B$ | *(mod pon: 1. i 2.)* |
| 4. | $B \to C$ | *(pretpostavka)* |
| 5. | $C$ | *(mod pon: 3. i 4.)* |

*Dokaz tvrdnje b) je analogan.*

Za pravilo izvoda

$$\frac{A_1 \;\ldots\; A_n}{B}$$

kažemo da je **dopustivo** u sistemu $RS$ ako za sve formule $A_1, \ldots, A_n$ i $B$ vrijedi da pretpostavke $\vdash A_1, \ldots, \vdash A_n$ povlače $\vdash B$. Očito dopustiva pravila možemo upotrebljavati u dokazima i izvodima u sistemu $RS$. Ona nam olakšavaju i skraćuju dokaze i izvode.

Uočite da iz prethodnog primjera slijedi da je hipotetički silogizam dopustivo pravilo izvoda u sistemu $RS$. To znači da ga možemo upotrebljavati u izvodima i dokazima.

**Zadaci:**

1. Neka je $S$ skup formula logike sudova. Sa $S'$ označimo skup svih formula koje su izvedive iz skupa $S$. Dokažite da vrijedi:

   a) $S \subseteq S'$;

   b) ako su $S_1$ i $S_2$ skupovi formula i $S_1 \subseteq S_2$ tada je i $S_1' \subseteq S_2'$;

   c) $S'' = S'$.

2. Neka je $S$ skup formula logike sudova i $F$ proizvoljna formula. Dokažite: ako formula $F$ nije izvediva ni iz jednog konačnog podskupa od $S$, tada $F$ nije izvediva ni iz $S$.

3. Sa $\mathcal{F}$ označimo skup svih formula logike sudova. Na skupu $\mathcal{F}$ definiramo relaciju $\sim$ na ovaj način:

   $$A \sim B \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \vdash A \leftrightarrow B.$$

   Lako je provjeriti da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{F}$. Za $A \in \mathcal{F}$ sa $\mid A \mid$ označavamo klasu ekvivalencije od $A$, a sa $\mathcal{F}/\sim$ pripadni kvocijentni skup. Na $\mathcal{F}/\sim$ definiramo relaciju $\leq$ na ovaj način:

   $$\mid A \mid \leq \mid B \mid \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \vdash A \rightarrow B.$$

   Dokažite da je relacija $\leq$ dobro definirana, tj. da ne ovisi o izboru predstavnika klase ekvivalencije. Zatim, dokažite da je to parcijalan uređaj, tj. da je relacija $\leq$ refleksivna i tranzitivna. Je li to potpun i gust uređaj?

4. Dokažite da su sljedeće formule teoremi sistema $RS$ :

   a) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$;

   b) $((A \to B) \to A) \to A$;

   c) $A \to (B \to (A \land B))$.

5. Dokažite da za proizvoljne formule $A$ i $B$ vrijedi:

$$\begin{array}{lrcl} a) & \{A\ , B\} & \vdash & A \to B; \\ b) & \{A\ ,\ \neg B\} & \vdash & \neg(A \to B); \\ c) & \{\neg A\ ,\ B\} & \vdash & A \to B; \\ d) & \{\neg A\ ,\ \neg B\} & \vdash & A \to B. \end{array}$$

6. Odredite formule $A$ i $B$ tako da iz pretpostavke $\vdash A$ slijedi $\vdash B$, ali vrijedi i $\{A\} \not\vdash B$.
   Rješenje: Neka je $A \equiv P$ i $B \equiv Q$. Pošto je formula $P$ oboriva tada iz teorema adekvatnosti slijedi $\not\vdash P$. No, iz pretpostavke $\vdash A$ slijedi $\vdash B$, jer ako bi $F_1, \ldots F_n$ bio dokaz za formulu $P$ u sistemu $RS$ tada je očito $F_1(Q/P), \ldots, F_n(Q/P)$ dokaz za $Q$ u $RS$. U drugu ruku iz teorema 1.48. slijedi $\{P\} \not\vdash Q$.

7. Neka je $S$ skup formula, a $A$ i $B$ proizvoljne formule za koje vrijedi $S \cup \{B\} \vdash A$ i $S \cup \{B\} \vdash \neg A$. Dokažite da tada vrijedi $S \vdash \neg B$.

8. Neka je $R$ neki račun sudova u kojem su za proizvoljne formule $A$ i $B$ sljedeće formule teoremi:

$$\begin{array}{l} A \to A, \\ A \to (B \to A), \\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)). \end{array}$$

   Jedino pravilo izvoda računa $R$ je modus ponens. Dokažite da za račun $R$ vrijedi teorem dedukcije.

9. Sa $\mathcal{F}$ označimo skup formula logike sudova. Neka je $s : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ proizvoljno preslikavanje koje komutira sa svim veznicima (npr. $s(A \land B) \equiv s(A) \land s(B)$). Dokažite da za sve formule $A$ vrijedi: ako $\vdash A$ tada $\vdash s(A)$. Vrijedi li obrat?
   Rješenje: Uočite da je za sve formule $A(P_1, \ldots, P_n)$ vrijedi $s(A(P_1, \ldots, P_n)) \equiv A(s(P_1), \ldots, s(P_n))$. Iz toga lako slijedi: ako je formula $A$ valjana tada je i formula $s(A)$ valjana. Primjenom teorema adekvatnosti i potpunosti slijedi tvrdnja zadatka.

10. Neka je $R$ neki račun sudova za kojeg važi teorem potpunosti, te neka je $A$ valjana, $B$ antitautologija i $C$ proizvoljna formula. Dokažite da vrijedi:

$$\begin{array}{ll} a) & \vdash (A \wedge C) \leftrightarrow C; \\ b) & \vdash (A \vee C) \leftrightarrow A; \\ c) & \vdash (B \wedge C) \leftrightarrow B; \\ d) & \vdash (B \vee C) \leftrightarrow C. \end{array}$$

11. Dokažite da su sljedeća pravila izvoda dopustiva u sistemu $RS$ :

a) $\wedge$–introdukcija

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B};$$

b) $\wedge$–eliminacija

$$\frac{A \wedge B}{A};$$

c) $\wedge$–eliminacija

$$\frac{A \wedge B}{B};$$

d) $\vee$–introdukcija

$$\frac{A}{A \vee B};$$

e) $\vee$–introdukcija

$$\frac{B}{A \vee B};$$

f) $\leftrightarrow$–eliminacija

$$\frac{A \qquad A \leftrightarrow B}{B};$$

g) $\neg$–eliminacija

$$\frac{A \qquad \neg A}{B};$$

h) dvojna negacija

$$\frac{\neg\neg A}{A}.$$

Uputa: a) Pretpostavimo da su formule $A$ i $B$ teoremi od $RS$. Lako je provjeriti da je formula $A \to (B \to (A \wedge B))$ valjana. Iz teorema potpunosti slijedi da je ta ista formula teorem od $RS$. Primijenimo li dva puta pravilo modus ponens dobivamo $\vdash A \wedge B$.

12. Vrijede li za sve formule $A$ i $B$ sljedeće tvrdnje:

a) $\vdash_{RS} A \wedge B$ ako i samo ako $\vdash_{RS} A$ i $\vdash_{RS} B$;
b) $\vdash_{RS} A \vee B$ ako i samo ako $\vdash_{RS} A$ ili $\vdash_{RS} B$;
c) $\vdash_{RS} A \to B$ ako i samo ako $\vdash_{RS} \neg A$ ili $\vdash_{RS} B$;
d) $\vdash_{RS} \neg A$ ako i samo ako $\nvdash_{RS} A$.

13. Dokažite nezavisnost aksioma sistema $RS$.
Rješenje: Dokažimo prvo nezavisnost sheme aksioma (A1) od ostalih, tj. dokazujemo da niti jednu instancu sheme aksioma (A1) nije moguće dokazati u sistemu čije su jedine sheme aksioma (A2) i (A3), a jedino pravilo izvoda je modus ponens. U tu svrhu definiramo nove interpretacije veznika $\neg$ i $\to$ (mi zapravo promatramo jednu trovaljanu interpretaciju logike sudova). Interpretacije veznika zadajemo sljedećim tablicama.

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 2 |
| 1 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 0 |

Neka je $A$ neka formula logika sudove (sastavljena samo od veznika $\neg$ i $\to$ !). Ako za svaku interpretaciju $I : \{P_0, P_1, \ldots\} \to \{0, 1, 2\}$ vrijedi $I(A) = 0$ tada formulu $A$ nazivamo 1–antitautologija.

Lako je provjeriti da pravilo izvoda modus ponens čuva 1–antitautologičnost, tj. ako su formule $A$ i $A \to B$ 1–antitautologije tada je i formula $B$ 1–antitautologija. Zatim, lako je (ali vrlo dugotrajno!) provjeriti da je svaka instanca sheme aksioma (A2) i (A3) 1–antitautologija. Indukcijom po duljini dokaza sada je lako dokazati da je svaka formula koja je dokaziva samo korištenjem shema aksioma (A2) i (A3), te pomoću pravila modus ponens, nužno 1–antitautologija. No, formula (A1) nije antitautologija (npr. za interpretaciju $I(P) = 0$ i $I(Q) = 1$ imamo $I(Q \to P) = 2$, a onda $I(P \to (Q \to P)) = 2$ ).

Dokaz nezavisnosti sheme aksioma (A2) u odnosu na (A1) i (A3) je sasvim analogan, pri čemu se na sljedeći način tablicama definira interpretacija veznika:

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 0 |

Dokažimo nezavisnost sheme aksioma (A3) u odnosu na aksiome (A1) i (A2). U tu svrhu označimo s $g$ funkciju koja "briše negacije" u formulama. Točnije, funkcija $g$ je induktivno definirana sa:

$$\begin{aligned} g(P) &= P, \text{ gdje je } P \text{ proizvoljna propozicionalna varijabla;} \\ g(\neg A) &= g(A), \\ g(A \to B) &= g(A) \to g(B), \end{aligned}$$

gdje su $A$ i $B$ proizvoljne formule.

Ako je $F \equiv A \to (B \to A)$ neka instanca sheme aksioma (A1) tada je $g(F) \equiv g(A) \to (g(B) \to g(A))$. Očito je $g(F)$ valjana formula. Na isti način bi vidjeli da je za svaku instancu $G$ sheme aksioma (A2) formula $g(G)$ valjana. Zatim, ako su $A$ i $B$ proizvoljne formule, te su $g(A)$ i $g(A \to B)$ valjane, tada je i formula $g(B)$ valjana. Indukcijom po duljini dokaza sada je lako dokazati da za svaku formulu $A$ koja je izvediva samo korištenjem shema aksioma (A1) i (A2), te primjenom pravila modus ponens, imamo da je formula $g(A)$ valjana. Promotrimo instancu $B \equiv (\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$ sheme aksioma (A3). Pošto je $g(B) \equiv (Q \to P) \to (P \to Q)$, što očito nije valjana formula, imamo da za svaku instancu $B$ sheme aksioma (A3) formula $g(B)$ nije valjana.

### 1.6.2 Konzistentnost

Sada nam je cilj dokazati generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova koji daje vezu između semantičkog svojstva skupa formula – ispunjivosti, i novog sintaktičkog svojsta – konzistentnosti, koji ćemo sada definirati. Kao jednostavnu posljedicu generaliziranog teorema potpunosti dobit ćemo teorem potpunosti za logiku sudova, tj. da je svaka valjana formula nužno teorem sistema $RS$. Zatim, posljedica generaliziranog teorema potpunosti bit će i jaki teorem potpunosti koji govori da se semanička relacija logičke posljedice i sintaktička relacija izvodljivosti poklapaju.

Bili smo definirali pojam izvoda formule iz skupa formula. Prirodno se postavlja pitanje koliko se formula može izvesti iz nekog zadanog skupa. Svakako nam nisu zanimljivi skupovi formula iz kojih se može izvesti svaka formula.

**Definicija 1.35.** *Za skup formula $S$ kažemo da je* **konzistentan** *ako ne postoji formula $F$ tako da vrijedi $S \vdash F$ i $S \vdash \neg F$. Ako skup formula nije konzistentan tada kažemo da je* **inkonzistentan***.*

Uočite da je pojam konzistentnosti zavisan od sistema u kojem se promatra, tj. u kojem je definiran izvod.

**Primjer 1.36.** *Neka je $S = \{\neg A \to A,\ \neg A\}$. Pošto formula $\neg A$ pripada skupu $S$, tada očito vrijedi $S \vdash \neg A$. No, iz $S \vdash \neg A$ i $S \vdash \neg A \to A$ primjenom pravila modus ponens slijedi $S \vdash A$. To znači da je skup formula $S$ inkonzistentan. Ovim primjerom želimo naglasiti da prilikom definicije konzistentnosti nismo posebno istaknuli da formula $F$ ne mora pripadati skupu $S$. Upravo u ovom primjeru imamo situaciju da formula $F \equiv A$ ne pripada skupu $S$, a u drugu ruku vrijedi da su formule $F$ i $\neg F$ izvedive iz $S$.*

Iz definicija konzistentnosti i izvoda lako slijedi tvrdnja sljedeće propozicije.

**Propozicija 1.37.** *Svaki podskup konzistentnog skupa je konzistentan. Svaki nadskup inkonzistentnog skupa je inkonzistentan.*

Kako bi smo mogli navesti neki primjer konzistentnog skupa formula prvo definiramo sljedeći važan pojam.

**Definicija 1.38.** *Za skup formula $S$ kažemo da je* **ispunjiv** *ako postoji interpretacija $I$ tako da za sve formule $F \in S$ vrijedi $I(F) = 1$ (to kratko označavamo sa $I(S) = 1$).*

Skup svih propozicionalnih varijabli je primjer jednog ispunjivog skupa formula. Skup formula $\{\neg P, P \wedge Q\}$ je primjer jednog skupa koji nije ispunjiv. Očito je svaki podskup ispunjivog skupa i sam ispunjiv. Naravno, nadskup skupa koji nije ispunjiv ne može biti ispunjiv. Svaki skup formula koji sadrži samo tautologije je ispunjiv. Ako pak skup formula sadrži barem jednu antitautologiju tada očito taj skup nije ispunjiv.

**Propozicija 1.39.** *Svaki ispunjiv skup formula $S$ je konzistentan. Posebno je konzistentan skup svih teorema sistema RS.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $S$ inkonzistentan skup formula. Tada postoji formula $F$ tako da vrijedi $S \vdash F$ i $S \vdash \neg F$. Iz propozicije 1.32. slijedi $S \models F$ i $S \models \neg F$. No, tada očito skup $S$ ne može biti ispunjiv. □

Sada nam je cilj dokazati obrat prethodne propozicije. O tome govori generalizirani teorem potpunosti. No, prije moramo dokazati još neka svojstva konzistentnih skupova formula.

**Propozicija 1.40.** *Skup formula je konzistentan ako i samo ako je svaki njegov konačan podskup konzistentan.*

*Dokaz.* Ako je skup $S$ konzistentan tada iz propozicije 1.37. slijedi da je svaki podskup od $S$ konzistentan, a onda je posebno konzistentan i svaki konačan podskup.

Pretpostavimo sada da je skup $S$ inkonzistentan. Tada postoji formula $F$ tako da vrijedi $S \vdash F$ i $S \vdash \neg F$. Neka je $A_1, \ldots, A_n$ neki izvod za $F$ iz skupa $S$, odnosno neka je $B_1, \ldots, B_m$ neki izvod za $\neg F$. Definiramo skupove $S_1$ i $S_2$ ovako: $S_1 = S \cap \{A_1, \ldots, A_n\}$ i $S_2 = S \cap \{B_1, \ldots, B_m\}$. Očito je $S_1 \cup S_2$ konačan podskup od $S$. Lako je vidjeti da vrijedi $S_1 \cup S_2 \vdash F$ i $S_1 \cup S_2 \vdash \neg F$. To znači da smo našli konačan podskup od $S$ koji je inkonzistentan. □

**Lema 1.41.** *Za sve formule $F$ i $G$ logike sudova vrijedi* $\vdash \neg F \to (F \to G)$.

*Dokaz.* Iz teorema dedukcije, tj. teorema 1.33., slijedi da je dovoljno dokazati da vrijedi $\{\neg F\} \vdash F \to G$. Dajemo jedan izvod za to.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg F$ | (pretpostavka) |
| 2. | $\neg F \to (\neg G \to \neg F)$ | (aksiom (A1)) |
| 3. | $\neg G \to \neg F$ | (mod pon: 1. i 2.) |
| 4. | $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$ | (aksiom (A3)) |
| 5. | $F \to G$ | (mod pon: 3. i 4.) |

□

**Propozicija 1.42.** *Skup formula $S$ je konzistentan ako i samo ako iz $S$ nije izvediva barem jedna formula.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je skup formula $S$ konzistentan. Očito vrijedi $S \vdash P \to (P \to P)$, jer je formula $P \to (P \to P)$ jedna instanca aksioma (A1). Iz konzistentnosti skupa $S$ slijedi $S \nvdash \neg(P \to (P \to P))$.

Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da je $S$ inkonzistentan skup formula. Iz definicije slijedi da postoji formula $F$ tako da vrijedi $S \vdash F$ i $S \vdash \neg F$. Neka je $G$ proizvoljna formula logike sudova. Iz prethodne leme 1.41. slijedi $\vdash \neg F \to (F \to G)$. Sada iz $S \vdash F$ i $S \vdash \neg F$ dva puta primjenom pravila modus ponens slijedi $S \vdash G$. □

**Propozicija 1.43.** *Neka je $S$ skup formula i $F$ proizvoljna formula. Tada imamo:*

*a) ako vrijedi $S \nvdash F$ tada je skup $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan;*

*b) ako je $S$ konzistentan skup formula i $S \vdash F$ tada je i skup formula $S \cup \{F\}$ konzistentan.*

*Dokaz.* Dokažimo prvo tvrdnju a). Pretpostavimo da je skup $S \cup \{\neg F\}$ inkonzistentan. Iz prethodne propozicije 1.42. slijedi da je tada iz tog skupa izvediva svaka formula. Posebno imamo:

$$S \cup \{\neg F\} \vdash \neg(\neg F \to F) \qquad \text{i} \qquad S \cup \{\neg F\} \vdash F.$$

Primjenom teorema dedukcije slijedi da vrijedi:

$$S \vdash \neg F \to \neg(\neg F \to F) \quad (*)$$

$$S \vdash \neg F \to F \quad (**)$$

Sada dajemo jedan izvod za formulu $F$ iz skupa $S$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg F \to \neg(\neg F \to F)$ | $(*)$ |
| 2. | $(\neg F \to \neg(\neg F \to F)) \to ((\neg F \to F) \to F)$ | (aksiom (A3)) |
| 3. | $(\neg F \to F) \to F$ | (mod pon: 1. i 2.) |
| 4. | $\neg F \to F$ | $(**)$ |
| 5. | $F$ | (mod pon: 3. i 4.) |

Dokažimo sada tvrdnju b). Pretpostavimo da je skup $S \cup \{F\}$ inkonzistentan. Tada postoji neka formula $G$ tako da vrijedi $S \cup \{F\} \vdash G$ i $S \cup \{F\} \vdash \neg G$. Iz teorema dedukcije slijedi $S \vdash F \to G$ i $S \vdash F \to \neg G$. Sada iz toga, te $S \vdash F$, primjenom pravila modus ponens dobivamo $S \vdash G$ i $S \vdash \neg G$, tj. da je skup $S$ inkonzistentan. □

**Zadaci:**

1. Neka alfabet logike sudova sadrži i logičke konstante $\perp$ i $\top$. Tada su atomarne formule propozicionalne varijable i logičke konstante. Pojam formule se definira na isti način kao za alfabet bez konstanti. Proizvoljnu interpretaciju $I$ propozicionalnih varijabli proširujemo na skup $\{\top, \perp\}$ definirajući da je $I(\top) = 1$ i $I(\perp) = 0$. Definirajte račune sudova, tj. njihove sisteme aksioma i pravila izvoda, za koje će vrijediti:

   a) sistem je konzistentan, ali svaki teorem sistema nije valjana formula;
   b) postoji formula koja nije teorem sistema, ali sistem nije konzistentan.

   Uputa: Promotrite sistem čiji je jedini aksiom formula $\perp$, i ne sadrži niti jedno pravilo izvoda. Odnosno, za tvrdnju b) promotrite sistem čiji su aksiomi $\top$ i $\neg\top$.

2. Neka je $\mathcal{A}$ račun sudova zadan na sljedeći način: aksiomi su mu sve antitautologije, a jedino pravilo izvoda je

$$\frac{\neg(B \to A) \qquad\qquad A}{B} \ .$$

   Ispitajte vrijedi li:

   a) račun $\mathcal{A}$ je konzistentan;
   b) svaki teorem računa $\mathcal{A}$ je valjana formula;
   c) postoji formula koja nije teorem računa $\mathcal{A}$.

   Rješenje: Lako je provjeriti da dano pravilo izvoda čuva "antitautologičnost", tj. ako su formule $\neg(B \to A)$ i $A$ antitautologije tada je i formula $B$ antitautologija. Pomoću te činjenice indukcijom po duljini dokaza lako je dokazati da je svaki teorem sistema $\mathcal{A}$ antitautologija. Iz toga odmah slijedi da je sistem $\mathcal{A}$ konzistentan, jer ako $\mathcal{A} \vdash F$ tada je formula $\neg F$ valjana, pa $\mathcal{A} \nvdash \neg F$.

3. Dokažite da je konačan skup formula $S_1 = \{F_1, \ldots, F_n\}$ konzistentan ako i samo ako je skup $S_2 = \{F_1 \wedge \ldots \wedge F_n\}$ konzistentan.
   Rješenje: Pretpostavimo prvo da je skup $S_1$ inkonzistentan, tj. da postoji formula $F$ tako da vrijedi $S_1 \vdash F$ i $S_1 \vdash \neg F$. Neka se u izvodu za $F$ iz $S_1$ javlja sljedeći redak:

$$k. \qquad F_i \qquad (F_i \in S_1).$$

Da bismo dobili izvod formule $F$ iz skupa $S_2$ taj $k$-ti redak mijenjamo sa sljedećim recima:

| | | |
|---|---|---|
| $k.$ | $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \to F_i$ | (tautologija, pa teorem od $RS$) |
| $(k+1).$ | $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ | (iz $S_2$) |
| $(k+2).$ | $F_i$ | (mod pon: k. i k+1) |

To učinimo sa svim recima oblika $k.\ F_i$ u izvodima za formulu $F$ i $\neg F$ iz skupa $S_1$. (Naravno, i prenumeriramo izvode.) Na taj način dobivamo izvode iz skupa $S_2$, tj. imamo $S_2 \vdash F$ i $S_2 \vdash \neg F$. Dakle, ako je skup $S_1$ inkonzistentan tada je i skup $S_2$ inkonzistentan. Analogno se dokazuje obrat.

4. Neka je $S$ konzistentan skup formula i $F$ formula za koju vrijedi $S \vdash F$. Dokažite da je tada i skup $S \cup \{F\}$ konzistentan.
Rješenje: Pretpostavimo da je skup $S \cup \{F\}$ inkonzistentan, tj. da postoji formula $A$ tako da vrijedi: $S \cup \{F\} \vdash A$ i $S \cup \{F\} \vdash \neg A$. Neka je $A_1, \ldots, A_n$ neki izvod formule $F$ iz skupa $S$. Zatim neka je $B_1, \ldots, B_m$ neki izvod formule $A$ iz skupa $S \cup \{F\}$, a $C_1, \ldots, C_k$, neki izvod formule $\neg A$ iz skupa $S \cup \{F\}$. Definirajmo nove izvode na ovaj način: ako iza formule $B_i$ piše komentar "pretpostavka $F$" tada formulu $B_i$ izbacujemo iz niza i dodajemo na njeno mjesto čitav niz $A_1, \ldots A_n$. Analogno postupimo s nizom formula $C_i$. Na taj način smo dobili izvode za formulu $A$ iz $S$, odnosno $\neg A$ iz skupa $S$. To znači da je skup $S$ inkonzistentan, što je suprotno pretpostavci zadatka.

5. Neka je $S$ konzistentan skup formula i $F$ proizvoljna formula. Dokažite da je barem jedan od skupova $S \cup \{F\}$ i $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan. Mogu li oba skupa istovremeno biti konzistentna?
Rješenje: Pretpostavimo da je skup $S \cup \{F\}$ inkonzistentan. Po prethodnom zadatku tada imamo $S \not\vdash F$. Iz propozicije 1.43. tada slijedi da je skup $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan.
Moguća je situacija da su oba skupa konzistentna. Npr. neka je $S$ skup svih valjanih formula, a $F$ propozicionalna varijabla. Tada su skupovi $S \cup \{F\}$ i $S \cup \{\neg F\}$ ispunjivi, a onda iz generaliziranog teorema potpunosti slijedi da su konzistentni.

6. Neka je $R$ račun sudova u kojem su dopustiva sljedeća pravila izvoda
$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \qquad \frac{A \wedge \neg A}{B}.$$
Dokažite da je sistem $R$ konzistentan ako i samo ako postoji formula koja nije teorem sistema $R$.

7. Neka je $A$ oboriva formula logike sudova. Neka je sa $RS^+$ označena teorija dobivena iz $RS$ dodavanjem formule $A$ kao nove sheme aksioma. Dokažite da je teorija $RS^+$ inkonzistentna.
   Rješenje: Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$. Neka je $I$ interpretacija za koju vrijedi $I(A) = 0$. Za $i = 1, \ldots, n$ definiramo formule $B_i$ sa
   $$B_i \equiv \begin{cases} P_i \vee \neg P_i, & \text{ako je } \; I(P_i) = 1; \\ P_i \wedge \neg P_i, & \text{ako je } \; I(P_i) = 0. \end{cases}$$
   Označimo sa $A'$ formulu $A(B_1/P_1, \ldots, B_n/P_n)$. Očito je formula $A'$ antitautologija. Dakle, sistem $RS^+$ kao aksiom sadrži i antitautologiju. Posebno tada vrijedi $\vdash_{RS^+} A'$. Pošto je $\neg A'$ valjana formula tada po teoremu potpunosti za $RS$ imamo $\vdash_{RS} \neg A'$. No, $RS^+$ je proširenje od $RS$ pa vrijedi i $\vdash_{RS^+} \neg A'$.

8. Neka je $\mathcal{S}$ račun sudova koji sadrži shemu $A \to (\neg A \to B)$ kao shemu aksioma i modus ponens kao pravilo izvoda. Neka je $F$ formula tako da vrijedi $\nvdash_{\mathcal{S}} F$. Dokažite da je tada sistem $\mathcal{S}$ konzistentan.
   Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji formula $A$ tako da vrijedi $\vdash_{\mathcal{S}} A$ i $\vdash_{\mathcal{S}} \neg A$. Neka je $B$ proizvoljna formula. Po pretpostavci zadatka vrijedi $\vdash_{\mathcal{S}} A \to (\neg A \to B)$. Sada primjenom dva puta pravila modus ponens na prethodnu formulu i prethodne pretpostavke, dobivamo $\vdash_{\mathcal{S}} B$. Dakle, u sistemu $\mathcal{S}$ je dokaziva svaka formula, što je suprotno početnoj pretpostavci.

### 1.6.3 Potpuni skupovi formula

Kako bi dokazali generalizirani teorem potpunosti, tj. da je svaki konzistentan skup formula ispunjiv sada uvodimo pojam potpunog skupa formula.

**Definicija 1.44.** *Za skup formula $S$ kažemo da je* **potpun** *ako za svaku formulu $F$ vrijedi $S \vdash F$ ili $S \vdash \neg F$.*

Iz propozicije 1.42. slijedi da je svaki inkonzistentan skup formula potpun. No, u ovom trenu još ne znamo niti jedan primjer potpunog i konzistentnog skupa formula. U tome će nam pomoći sljedeća lema koja jednostavno govori da se svaki konzistentan skup formula može proširiti do konzistentnog i potpunog skupa formula.

**Lema 1.45.** *(Lindenbaumova lema)*[14] *Neka je $S$ konzistentan skup formula. Tada postoji konzistentan i potpun skup formula $S'$ takav da vrijedi $S \subseteq S'$.*

*Dokaz.* Skup svih formula logike sudova je prebrojiv. Neka je $F_1,\ F_2,\ \dots$ niz koji sadrži sve formule logike sudova. Rekurzivno definiramo niz skupova formula $(S_n)$ na sljedeći način:

$$S_0 = S$$

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{\neg F_n\}, & \text{ako } \ S_n \not\vdash F_n \\ S_n \cup \{F_n\}, & \text{inače} \end{cases}$$

Dokažimo indukcijom da je svaki skup formula $S_n$ konzistentan. Skup $S_0$ je konzistentan po pretpostavci leme. Pretpostavimo da je $S_n$ konzistentan skup formula. Ako $S_n \not\vdash F_n$ tada je zbog propozicije 1.43. a) skup $S_{n+1}$ konzistentan. Ako $S_n \vdash F_n$ tada konzistentnost skupa $S_{n+1}$ slijedi iz propozicije 1.43. b).

Neka je $S' = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$. Očito vrijedi $S \subseteq S'$. Dokažimo da je skup $S'$ konzistentan i potpun. Neka je $S''$ proizvoljan konačan podskup od $S'$. Pošto za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S_n \subseteq S_{n+1}$ tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $S'' \subseteq S_{n_0}$. Pošto je $S_{n_0}$ konzistentan skup formula tada iz propozicije 1.37. slijedi da je i skup $S''$ konzistentan. Time smo dokazali da je proizvoljan konačan podskup skupa $S'$ konzistentan, a onda iz propozicije 1.40. slijedi da je i skup $S'$ konzistentan.

Preostalo je dokazati da je skup $S'$ potpun. Neka je $F$ proizvoljna formula logike sudova. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $F_n \equiv F$. Pretpostavimo da $S' \not\vdash F$. Iz definicije skupa $S_{n+1}$ slijedi $S_{n+1} \vdash \neg F_n$. □

Iz prethodne leme odmah bi trebalo biti jasno da nam za dokaz generaliziranog teorema potpunosti treba još samo sljedeća lema.

**Lema 1.46.** *Ako je $S$ konzistentan i potpun skup formula tada je $S$ ispunjiv skup formula.*

*Dokaz.* Definiramo totalnu interpretaciju $I$ sa:

$$I(P) = 1 \qquad \text{ako i samo ako} \qquad S \vdash P.$$

Indukcijom po složenosti formule $F$ dokazujemo da vrijedi:

$$I(F) = 1 \qquad \text{ako i samo ako} \qquad S \vdash F.$$

Baza indukcije je ispunjena po definiciji interepretacije $I$. Pretpostavimo sada da za neki $n \in \mathbb{N}$ i za sve formule $G$ čija je složenost strogo manja od $n$ vrijedi tvrdnja. Neka je $F$ proizvoljna formula čija je složenost $n$. Promatramo slučajeve obzirom na oblik formule $F$.

[14] A. Lindenbaum, 1905. – 1942.

a) $F \equiv \neg G$.
Ako je $I(F) = 1$ tada je $I(G) = 0$, a onda iz pretpostavke indukcije slijedi $S \not\vdash G$. Iz pretpostavke da je skup $S$ potpun slijedi $S \vdash \neg G$. Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da vrijedi $S \vdash \neg G$. Tada iz pretpostavke da je $S$ konzistentan skup formula slijedi $S \not\vdash G$. Sada iz pretpostavke indukcije slijedi $I(G) = 0$.

b) $F \equiv G \to H$
Pretpostavimo prvo da vrijedi $I(F) = 0$. Tada je $I(G) = 1$ i $I(H) = 0$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $S \vdash G$ i $S \not\vdash H$. Iz potpunosti skupa $S$ slijedi $S \vdash \neg H$. Ako bi vrijedilo $S \vdash G \to H$ tada bi primjenom pravila modus ponens na to i $S \vdash G$ dobili $S \vdash H$. Time smo dobili da je skup $S$ inkonzistentan, što je u suprotnosti s pretpostavkom leme. Znači da mora vrijediti $S \not\vdash G \to H$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $I(G \to H) = 1$. Tada je $I(G) = 0$ ili $I(H) = 1$. Promotrimo svaki slučaj posebno. Ako vrijedi $I(G) = 0$ tada iz pretpostavke indukcije slijedi $S \not\vdash G$. Iz potpunosti skupa $S$ slijedi $S \vdash \neg G$. Tada jedan izvod za formulu $G \to H$ izgleda ovako:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg G$ | $(S \vdash \neg G)$ |
| 2. | $\neg G \to (\neg H \to \neg G)$ | (aksiom (A1)) |
| 3. | $\neg H \to \neg G$ | (mod pon: 1. i 2.) |
| 4. | $(\neg H \to \neg G) \to (G \to H)$ | (aksiom (A3)) |
| 5. | $G \to H$ | (mod pon: 3. i 4.) |

Promotrimo sada slučaj kada je $I(H) = 1$. Tada iz pretpostavke indukcije slijedi $S \vdash H$. Tada jedan izvod za formulu $G \to H$ iz skupa $S$ izgleda ovako:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $H$ | $(S \vdash H)$ |
| 2. | $H \to (G \to H)$ | (aksiom (A1)) |
| 3. | $G \to H$ | (mod pon: 1. i 2.) |

$\square$

### 1.6.4 Teorem potpunosti

Sada prvo dokazujemo generalizirani teorem potpunosti, a nakon toga kao jednostavnu posljedicu dobivamo teorem potpunosti.

**Teorem 1.47.** *(generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova)*
*Skup formula je konzistentan ako i samo ako je ispunjiv.*

*Dokaz.* Ako je skup formula ispunjiv tada iz propozicije 1.39. slijedi da je i konzistentan. Pretpostavimo sada da je skup formula $S$ logike sudova konzistentan u odnosu na sistem $RS$. Iz Lindenbaumove leme, tj. leme 1.45., slijedi da postoji konzistentan i potpun skup formula $S'$ takav da vrijedi $S \subseteq S'$. Iz leme 1.46. slijedi da je skup $S'$ ispunjiv. Tada je očito i skup $S$ ispunjiv. □

**Teorem 1.48.** *(jaki teorem potpunosti za sistem $RS$)*
*Neka je $S$ skup formula i $F$ neka formula. Tada vrijedi: $S \models F$ ako i samo ako $S \vdash F$.*

*Dokaz.* Ako vrijedi $S \vdash F$ tada iz propozicije 1.32. slijedi $S \models F$. Dokažimo obrat. Pretpostavimo da $S \nvdash F$. Iz propozicije 1.43. a) slijedi da je skup formula $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan. Iz generaliziranog teorema potpunosti slijedi da je taj skup i ispunjiv. To znači da postoji interpretacija $I$ tako da vrijedi $I(S) = 1$ i $I(F) = 0$. No, tada $S \not\models F$. □

**Teorem 1.49.** *(teorem potpunosti za sistem $RS$)*
*Formula $F$ je valjana ako i samo ako formula $F$ je teorem sistema $RS$.*

*Dokaz.* Tvrdnja odmah slijedi iz prethodnog teorema ako uzmemo $S = \emptyset$. □

### 1.6.5 Teorem kompaktnosti

Sada ćemo primjenom generaliziranog teorema potpunosti dokazati teorem kompaktnosti za logiku sudova. Zatim navodimo jedan primjer kojim želimo ilustrirati važnost teorema kompaktnosti. U sljedećem poglavlju dokazat ćemo teorem kompaktnosti za logiku prvog reda, te ćemo istaknuti njegovu iznimnu važnost za teoriju modela.

**Teorem 1.50.** *(teorem kompaktnosti)*
*Skup formula $S$ je ispunjiv ako i samo ako je svaki konačan podskup od $S$ ispunjiv.*

*Dokaz.* Ako je $S$ ispunjiv skup formula tada je očito svaki njegov konačan podskup također ispunjiv. Pretpostavimo da je svaki konačan podskup od $S$ ispunjiv. Tada iz propozicije 1.39. slijedi da je svaki konačan podskup od $S$

konzistentan. Iz propozicije 1.40. slijedi da je skup $S$ konzistentan. Iz generaliziranog teorema potpunosti slijedi da je $S$ ispunjiv skup formula. $\square$

U sljedećem poglavlju nakon dokaza teorema kompaktnosti za logiku prvog reda objasnit ćemo zašto se prethodni teorem naziva teorem kompaktnosti, tj. kakva je veza s topologijom.

Istaknimo jednu jednostavnu vezu relacije logičke posljedice i ispunjivosti. Ta činjenica će nam trebati u dokazu sljedeće propozicije.

**Lema 1.51.** *Neka je $S$ skup formula i $F$ neka formula. Skup $S \cup \{-F\}$ je ispunjiv ako i samo ako $S \not\models F$.*

Ponekad se u literaturi teorem kompaktnosti izriće u formi koju navodimo u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 1.52.** *Teorem kompaktnosti ekvivalentan je sa sljedećom tvrdnjom:*

> *ako $S \models F$ tada postoji konačan podskup $S' \subseteq S$ tako da vrijedi $S' \models F$.*

*Dokaz.* Dokažimo prvo da iz teorema kompaktnosti slijedi dana tvrdnja. Pretpostavimo da ne postoji konačan $S' \subseteq S$ tako da vrijedi $S' \models F$. To znači da za svaki konačan podskup $S'$ postoji interpretacija $I$ tako da vrijedi $I(S') = 1$ i $I(F) = 0$. Dakle, za sve konačne $S' \subseteq S$ skupovi $S' \cup \{\neg F\}$ su ispunjivi. Po teoremu kompaktnosti slijedi da je skup $S \cup \{\neg F\}$ ispunjiv skup. Iz prethodne leme 1.51. slijedi $S \not\models F$.

Dokažimo sada obrat, tj. neka vrijedi tvrdnja iz iskaza propozicije i neka je $S$ konačno ispunjiv skup. Pretpostavimo da $S$ nije ispunjiv skup. Očito da tada za svaku formulu $F$ vrijedi $S \models F$. Posebno, imamo $S \models P \wedge \neg P$. Po pretpostavci postoji konačan $S' \subseteq S$ tako da $S' \models P \wedge \neg P$. No, pošto je po pretpostavci skup $S$ konačno ispunjiv, tada je $S'$ ispunjiv. Iz $S' \models P \wedge \neg P$ slijedi da je i formula $P \wedge \neg P$ ispunjiva, što je nemoguće. $\square$

U sljedećem primjeru želimo ilustrirati jednu primjenu teorema kompaktnosti.

**Primjer 1.53.** *Neka je $(G, \circ)$ grupa. Kažemo da je $G$ uređena grupa ako postoji potpun uređaj (irefleksivna, tranzitivna i potpuna binarna relacija) $<$ na $G$ tako da za sve $a, b, c \in G$ iz pretpostavke $a < b$ slijedi $a \circ c < b \circ c$ i $c \circ a < c \circ b$. Dokažimo da je prebrojivu grupu $(G, \circ)$ moguće urediti ako i samo ako je moguće urediti svaku njenu konačnu generiranu podgrupu*[15].

[15] Za $G' \subseteq G$ označimo s $\langle G' \rangle$ najmanju podgrupu od $G$ koja sadrži $G'$. Kažemo da je podgrupa $H$ *konačno generirana* ako postoji konačan podskup $G'$ od $G$ tako da je $H = \langle G' \rangle$. Primjer primjene teorema kompaktnosti na uređivanje grupa je dao Łos (J. Łos, 1920.–1998.) 1954. godine.

*Ako je grupu $G$ moguće urediti očito je moguće urediti i svaku njenu konačnu generiranu podgrupu.*

*Dokažimo obrat. Pretpostavimo da je moguće urediti svaku konačnu generiranu podgrupu grupe $(G, \circ)$. Neka je skup propozicionalnih varijabli jednak $G \times G$. Označimo sa $S$ skup koji sadrži sljedeće formule:*

*(1)* $\neg(a, a)$, *za sve* $a \in G$;

*(2)* $(a, b) \wedge (b, c) \rightarrow (a, c)$, *za sve* $a, b, c \in G$;

*(3)* $(a, b) \vee (b, a)$, *za sve* $a, b \in G$ *takve da je* $a \neq b$;

*(4)* $(a, b) \rightarrow (a \circ c, b \circ c) \wedge (c \circ a, c \circ b)$, *za sve* $a, b, c \in G$.

*Neka je $S'$ neki konačan podskup od $S$. Označimo s $G'$ skup svih $a \in G$ koji nastupaju u nekoj formuli iz skupa $S'$. Očito je skup $G'$ konačan. Po pretpostavci je podgrupu $\langle G' \rangle$ moguće urediti. Označimo sa $\prec$ jedan uređaj na $\langle G' \rangle$. Zatim, sa $J$ označimo parcijalnu interpretaciju na $\langle G' \rangle \times \langle G' \rangle$ definiranu sa*

$$J(a, b) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } a \prec b; \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

*Lako je provjeriti da vrijedi $J(S') = 1$. Iz toga slijedi da je svaki konačan podskup od $S$ ispunjiv. Tada iz teorema kompaktnosti slijedi da je i skup formula $S$ ispunjiv. Neka je $I$ neka interpretacija za koju vrijedi $I(S) = 1$. Traženi uređaj na $G$ definiramo sa: $a < b$ ako i samo ako $I(a, b) = 1$. Lako je provjeriti da je tada $(G, \circ, <)$ uređena grupa.*

**Zadaci:**

1. Neka je $S$ skup formula i $F$ neka formula. Dokažite da je skup $S \cup \{\neg F\}$ je ispunjiv ako i samo ako imamo $S \not\models F$.

2. Kažemo da je skup $S$ formula logike sudova maksimalno konačno ispunjiv ako je svaki njegov konačan podskup ispunjiv i za sve formule $F$ logike sudova vrijedi $F \in S$ ili $\neg F \in S$. Neka je $S$ maksimalno konačno ispunjiv skup formula. Dokažite da za sve formule $A$ i $B$ vrijede sljedeće tvrdnje:

   a) $A \in S$ ako i samo ako $\neg A \notin S$;
   
   b) $(A \wedge B) \in S$ ako i samo ako $A \in S$ i $B \in S$;
   
   c) $(A \vee B) \in S$ ako i samo ako $A \in S$ ili $B \in S$;
   
   d) $(A \rightarrow B) \in S$ ako i samo ako $A \notin S$ ili $B \in S$;

e) $(A \leftrightarrow B) \in S$ ako i samo ako $A \in S$ je ekvivalentno s $B \in S$.

Rješenje: a) Neka je $A \in S$. Ako je i $\neg A \in S$ tada je $\{A, \neg A\}$ konačan podskup od $S$ koji nije ispunjiv. To znači da skup konaqv can podskup od $S$ nije ispunjiv, što je suprotno početnoj pretpostavci. Pretpostavimo sada da formula $A$ ne pripada skupu $S$. No, tada iz definicije maksimalno konačno ispunjivog skupa formula slijedi $\neg A \in S$.

b) Neka je $(A \wedge B) \in S$. Ako $A \notin S$ tada iz upravo dokazane tvrdnje a) slijedi $\neg A \in S$. Tada je $\{A \wedge B, \neg A\}$ konačan podskup od $S$ koji nije ispunjiv.

Neka su sada formule $A$ i $B$ elementi skupa $S$. Ako $(A \wedge B) \notin S$ tada opet iz dokazane tvrdnje a) slijedi $\neg(A \wedge B) \in S$. No, konačni podskup $\{A, B, \neg(A \wedge B)\}$ od $S$ nije ispunjiv.

Tvrdnje c), d) i e) dokazuju se analogno.

3. Neka je $S$ proizvoljan skup formula logike sudova koji ima svojstvo da je svaki konačan podskup od $S$ ispunjiv. Bez primjene teorema kompaktnosti dokažite da za $S$ postoji maksimalno konačno ispunjiv nadskup.

4. Bez primjene teorema kompaktnosti dokažite da je svaki maksimalno konačno ispunjiv skup ujedno i ispunjiv.

5. Za skup $S$ kažemo da je **konačno oboriv** ako za svaki konačan $S' \subseteq S$ postoji interpretacija $I$ tako da vrijedi $I(S') = 0$. Za skup $S$ kažemo da je **oboriv** ako postoji interpretacija $I$ tako da vrijedi $I(S) = 0$. Vrijedi li: skup je oboriv ako i samo ako je konačno oboriv?
Rješenje: Da. Ako je oboriv očito je i konačno oboriv. Pretpostavimo da je $S$ konačno oboriv. Označimo sa $T$ skup $\{\neg F : F \in S\}$. Lako je provjeriti da je skup $T$ konačno ispunjiv. Iz teorema kompaktnosti slijedi da je skup $T$ ispunjiv. Tada je očito skup $S$ oboriv.

6. Neka je $S$ skup formula. Vrijede li sljedeće tvrdnje:

   a) ako je $S$ konačno ispunjiv tada je $S$ oboriv?

   b) ako je $S$ konačno oboriv tada je $S$ ispunjiv?

7. Neka je $S$ skup formula koji ima svojstvo da za svaku interpretaciju $I$ postoji formula $F$ iz $S$ tako da vrijedi $I(F) = 1$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{B_1, \ldots, B_m\}$ od $S$ tako da je formula $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ valjana.
Rješenje: Pretpostavimo da takav konačan podskup od $S$ ne postoji. Iz

toga slijedi da je skup $S$ konačno oboriv. Po zadatku 1 slijedi da je tada skup $S$ oboriv. To je kontradikcija s pretpostavkom ovog zadatka.

8. Neka je $S$ skup formula koji ima svojstvo da za svaku interpretaciju $I$ postoji formula $F$ iz $S$ tako da vrijedi $I(F) = 0$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{B_1, \ldots, B_m\}$ od $S$ tako da je formula $B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$ antitautologija.

9. Neka je $S$ skup formula logike sudova (konačan ili beskonačan), te $F$ neka formula. Zatim, neka vrijedi $S \models F$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{F_1\ , \ \ldots\ ,\ F_n\}$ od $S$ tako da je formula $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg F$ antitautologija.

10. Neka su $S_1$ i $S_2$ skupovi formula. Dokažite: skup $S_1 \cup S_2$ je ispunjiv ako i samo ako ne postoji formula $F$ tako da vrijedi $S_1 \models F$ i $S_2 \models \neg F$.
Rješenje: Pretpostavimo da $S_1 \cup S_2$ nije ispunjiv skup. Iz teorema kompaktnosti slijedi tada da postoji konačan $S_0 \subseteq S_1 \cup S_2$ koji nije ispunjiv. Ako je $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ tada skup $S_2$ nije ispunjiv. Tada npr. za formulu $F \equiv P \to P$ vrijedi $S_2 \models \neg F$ i $S_1 \models F$. Analogno bismo definirali traženu formulu $F$ ako je $S_0 \cap S_2 = \emptyset$. Dakle, neka je $S_0 = \{F_1, \ldots, F_n, G_1, \ldots, G_m\}$, gdje su $F_i \in S_1$ i $G_j \in S_2$. Neka je $A \equiv F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ i $B \equiv \neg(G_1 \wedge \ldots \wedge G_m)$. Lako je provjeriti da vrijedi $A \Rightarrow B$. Očito $S_1 \models A$, a onda i $S_1 \models B$. No, očito i $S_2 \models \neg B$.

11. Neka je $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz ispunjivih skupova formula logike sudova za koje vrijedi $S_n \subseteq S_{n+1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je tada i skup $\cup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ ispunjiv.

12. Opravdajte riječ "maksimalno" u nazivu maksimalno konačno ispunjivog skupa, tj. dokažite sljedeću tvrdnju: ako je $S$ konačno ispunjiv skup formula tada vrijedi

    skup formula $S$ je maksimalno konačno ispunjiv ako i samo ako ne postoji konačno ispunjiv skup $T$ koji je pravi nadskup od $S$.

13. Neka je $\{I_j\ :\ j \in J\}$ proizvoljna familija totalnih interpretacija. **Presjek interpretacija,** u oznaci $\bigcap\limits_{j\in J} I_j$, je totalna interpretacija definirana sa:

$$(\bigcap_{j\in J} I_j)(P) = 1 \quad \text{ako i samo ako} \quad I_j(P) = 1, \quad \text{za sve} \ \ j \in J.$$

Kažemo da je skup formula $S$ **zatvoren na proizvoljne presjeke** ako za proizvoljnu familiju totalnih interpretacija $\{I_j\ :\ j \in J\}$, takvih da je $I_j(S) = 1$ za sve $j \in J$, vrijedi $(\bigcap\limits_{j\in J} I_j)(S) = 1$. Kažemo da je skup formula $S$ **zatvoren na konačne presjeke** ako je zatvoren na proizvoljne parove totalnih interpretacija. Odredite primjere skupova formula koji su zatvoreni, odnosno nisu zatvoreni, na konačne presjeke.

14. Dokažite da je skup formula $S$ zatvoren na konačne presjeke ako i samo ako za svaki konačan skup totalnih interpretacija $\{I_1, \ldots, I_n\}$, za koji je $I_j(S) = 1$ za sve $j = 1, \ldots, n$, vrijedi $(\bigcap\limits_{j=1}^{n} I_j)(S) = 1$.

15. Dokažite da je skup formula zatvoren na konačne presjeke ako i samo ako je zatvoren na proizvoljne presjeke. (Iz tog razloga u daljnjim zadacima govorimo jednostavno da je skup zatvoren na presjeke).
Rješenje: Pretpostavimo da je skup formula $S$ zatvoren na konačne presjeke, te neka je $\{I_j \ : \ j \in J\}$ familija interpretacija koja ima svojstvo $I_j(S) = 1$, za sve $j \in J$. Radi kratkoće zapisa označimo $I = \bigcap\limits_{j\in J} I_j$.

    Neka je

$$\Sigma = \{P : \ P \text{ je propozicionalna varijabla i } \ I(P) = 1\} \bigcup$$
$$\{\neg Q : \ Q \text{ je propozicionalna varijabla i } \ I(\neg Q) = 1\}.$$

    Tvrdimo da je skup $S \cup \Sigma$ ispunjiv. Iz teorema kompaktnosti slijedi da je dovoljno dokazati da je dani skup konačno ispunjiv. U tu svrhu uzmimo proizvoljan konačan podskup od $S \cup \Sigma$. Označimo ga sa $S_0 \cup \Sigma_0$, gdje je $S_0 \subseteq S$ i $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$. Promotrimo prvo skup $\Sigma_0$. Neka su $\neg P_1, \ \ldots, \ \neg P_n$ sve "negativne" formule iz $\Sigma_0$. Promotrimo dva slučaja obzirom na broj $n$ : $n = 0$ i $n > 0$.

    Ako je $n = 0$ tada su sve formule u $\Sigma_0$ "pozitivne". Pošto je $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, tada je $I_j(\Sigma_0) = 1$, za sve $j \in J$. Pošto je $S_0 \subseteq S$ i $I_j(S) = 1$, tada za sve $j \in J$ vrijedi $I_j(S_0) = 1$. Dakle, za sve $j \in J$ vrijedi $I_j(\Sigma_0 \cup S_0) = 1$, tj. skup $S_0 \cup \Sigma_0$ je ispunjiv.

    Neka je sada $n > 0$. Tada je očito $I(P_i) = 0$ za sve $i = 1, \ldots, n$. Iz definicije presjeka interpretacija slijedi da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoji $j_i \in J$ tako da vrijedi $I_{j_i}(P_i) = 0$. Tada je očito $(I_{j_1} \cap \ldots \cap I_{j_n})(\neg P_i) = 1$. Ako je $P \in \Sigma_0$ "pozitivna" formula, tada iz definicije skupa $\Sigma$ slijedi $I(P) = 1$, a onda vrijedi i $(I_{j_1} \cap \ \ldots \ \cap I_{j_n})(P) = 1$. Iz svega ovog slijedi da imamo $(I_{j_1} \cap \ \ldots \ \cap I_{j_n})(\Sigma_0) = 1$. Po pretpostavci skup $S$ je zatvoren na konačne presjeke, tj. $S$ je zatvoren na proizvoljne parove totalnih interpretacija, a onda po prethodnom zadatku slijedi da je skup $S$ zatvoren na proizvoljne

$n$-člane skupove totalnih interpretacija. Posebno tada imamo $(I_{j_1} \cap \ldots \cap I_{j_n})(S) = 1$. Naravno, tada vrijedi i $(I_{j_1} \cap \ldots \cap I_{j_n})(S_0) = 1$. Dakle, dokazali smo da je i u ovom slučaju skup $S_0 \cup \Sigma_0$ ispunjiv.

Iz teorema kompaktnosti slijedi da je skup $\Sigma \cup S$ ispunjiv. No, očito je $I$ jedina interpretacija za koju su istinite sve formule iz $\Sigma$. To znači da mora vrijediti i $I(S) = 1$.

16. Neka je $G$ proizvoljan konačan ili prebrojiv skup, te $R$ irefleksivna i simetrična relacija na $G$. Tada uređeni par $(G, R)$ nazivamo *graf*. Elemente grafa nazivamo *čvorovi*. Ako je $G' \subseteq G$ i $R' = R \cap (G' \times G')$ tada $(G', R')$ nazivamo *podgraf* od $(G, R)$ generiran sa $G'$.

    Kažemo da je graf $(G, R)$ *$k$–obojiv* ($k \in \mathbb{N}$) ako postoji particija $B_1, \ldots, B_k$ (dopuštamo da su neki skupovi $B_i$ prazni) skupa $G$ tako da ne postoje $a, b \in G$ i $j \in \{1, \ldots, k\}$ za koje vrijedi $(a, b) \in G$ i $a, b \in B_j$. Dokažite da je graf $(G, R)$ $k$–obojiv ako i samo ako je svaki konačan podgraf od $(G, R)$ $k$–obojiv. [16]

    Za graf kažemo da je *planaran* ako se grafički može predočiti tako da se svi njegovi bridovi sijeku samo u vrhovima. Poznati problem *četiri boje* tvrdi da je svaki planarni graf 4-obojiv. Problem četiri boja je pozitivno riješen 1976. uz veliku pomoć računala.[17]

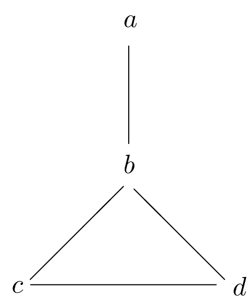
    Prije rješavanja zadatka promotrimo jedan primjer 3–obojivog grafa.

    Neka je $G = \{a, b, c, d\}$ i $R = \{(a, b),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, b),\ (b, d),\ (d, b),\ (c, d),\ (d, c)\}$. To prikazujemo na sljedećoj slici.

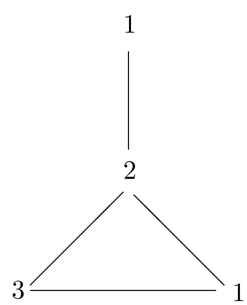
---

[16] Danu tvrdnju su dokazali de Bruijn i P. Erdös 1951. godine. Korištenje teorema kompaktnosti zamjenjuje dosta složenu primjenu teorema Tychonoffa ili Königove leme. Teorem Tychonoffa govori da je produkt proizvoljne familije kompaktnih topoloških prostora ponovo kompaktan topološki prostor. O dokazu tog teorema možete čitati npr. u J. L. Kelly, General Topology, Springer–Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1991. O Königovoj lemi možete čitati u [25] i [1].

[17] O problemu četiri boje možete čitati npr. u knjizi D. Veljan, Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989.




Particija $B_1 = \{a, d\}$, $B_2 = \{b\}$, $B_3 = \{c\}$ pokazuje da je dani graf 3-obojiv. To ilustriramo sljedećom slikom.




Kao primjer podgrafa generiranog skupom istaknimo npr. da za $G' = \{a, b, d\}$ dobivamo $R' = \{(a, b),\ (b, a),\ (b, d),\ (d, b)\}$.

Rješenje: Ako je graf $(G, R)$ $k$–obojiv tada je očito i svaki konačan podgraf od $(G, R)$ $k$–obojiv.

Dokažimo obrat. Pretpostvimo da je svaki konačan podgraf od $(G, R)$ $k$–obojiv. Promotrimo logiku sudova čiji je skup propozicionalnih varijabli jednak $\{1, \dots, k\} \times G$. Uočite da je to konačan ili prebrojiv skup, jer je po pretpostavci skup $G$ konačan ili prebrojiv. Označimo sa $S$ skup koji sadrži sljedeće formule:

(1) $(i, a) \to \neg(j, a)$, za sve $i \neq j$ i sve $a \in G$
(uočite da ova formula izražava uvjet da je svaki čvor grafa obojen najviše jednom bojom);

(2) $(1, a) \vee (2, a) \vee \ldots \vee (k, a)$, za sve $a \in G$
(ova formula izražava uvjet da je svaki čvor grafa obojen barem s jednom bojom);

(3) $(i, a) \to \neg(i, b)$, za sve $i \leq k$ i sve $(a, b) \in G$
(ovom formulom je izrečeno da povezani čvorovi ne mogu biti obojeni istom bojom).

Pošto je po pretpostavci svaki konačan podgraf od $(G, R)$ $k$-obojiv tada je svaki konačan podskup od $S$ ispunjiv. Tada iz teorema kompaktnosti slijedi da je i skup formula $S$ ispunjiv. Neka je $I$ interpretacija takva da je $I(S) = 1$. Sada definiramo traženu particiju $B_1, \ldots, B_k$ skupa $G$ sa: $a \in B_i$ ako i samo ako $I(i, a) = 1$.
(Preporučamo da svakako pročitate članak *V. Kovač,* Kromatski broj ravnine – neriješeni problem o bojenju, Hrvatski matematički elektronski časopis math.e, 6 (2005). )

17. Formulu nazivamo **kondicionalnom** ako je oblika $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$, gdje je svaka od formula $F_i$ jednog od sljedećeg oblika:

(1) propozicionalna varijabla;

(2) $\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_m$, gdje su $P_i$ propozicionalne varijable;

(3) $\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_m \vee P_{m+1}$, gdje su $P_i$ propozicionalne varijable.

Dokažite da je svaki skup kondicionalnih formula zatvoren na presjeke.
Uputa: Za kondicionalnu formulu $F$ ćemo reći da je 1-kondicionalna ako je jednog od oblika (1), (2) ili (3) kao što je navedeno u iskazu zadatka. Ako je kondicionalna formula $F$ oblika $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$, gdje su $F_i$ 1-kondicionalne, tada kažemo da je formula $F$ $n$-kondicionalna. Indukcijom po $n$ lako se dokaže da je svaka $n$-kondicionalna formula zatvorena na presjeke. Iz toga očito slijedi da je svaki skup kondicionalnih formula zatvoren na presjeke.

18. Neka je $S$ skup formula. Za skup formula $S'$ kažemo da je **skup aksioma** za $S$ ako $S$ i $S'$ imaju iste logičke posljedice, tj. za sve formule $F$ vrijedi: $S \models F$ ako i samo ako $S' \models F$. Kažemo da je $S$ **konačno aksiomatizabilan** ako postoji konačan skup aksioma za $S$. Dokažite:

a) skup formula $S'$ je skup aksioma za $S$ ako i samo ako za sve interpretacije $I$ vrijedi: $I(S) = 1$ ako i samo ako $I(S') = 1$.

b) skup $S$ je konačno aksiomatizabilan ako i samo ako postoji jednočlan skup aksioma za $S$.

19. Dokažite da je skup formula $S$ zatvoren na presjeke ako i samo ako za $S$ postoji skup aksioma koji sadrži samo kondicionalne formule.
Rješenje: Ako za skup $S$ postoji kondicionalan skup aksioma tada primjenom zadataka 17 i 18 a) lako slijedi da je skup $S$ zatvoren na presjeke.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da je $S$ skup formula koji je zatvoren na presjeke. Označimo sa $S'$ sljedeći skup formula

$$\{F \;:\; F \text{ je kondicionalna formula i vrijedi } \; S \models F\}.$$

Primjenom zadatka 18 dokazujemo da je $S'$ skup aksioma za $S$. Ako je $I$ interpretacija tako da vrijedi $I(S) = 1$ tada iz definicije skupa $S'$ očito slijedi $I(S') = 1$. Neka je $I$ interpretacija takva da vrijedi $I(S') = 1$. Promotrimo prvo situaciju kada je $I \not\equiv 1$. Označimo sa $I^-$ skup svih propozicionalnih varijabli $P$ za koje vrijedi $I(P) = 0$. Za $P \in I^-$ definiramo skup formula

$$\Sigma_P = \{F \;:\; F \equiv P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg P,\; n > 0,\; I(F) = 1\} \cup \{\neg P\}.$$

Neka je $F$ proizvoljna formula skupa $\Sigma_P$. Tada je formula $\neg F$ ekvivalentna kondicionalnoj formuli $G$ koja je oblika $P$ ili pak $\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee P$. No, očito je $I(G) = 0$, pa imamo $G \notin S'$. To znači da vrijedi $S \not\models \neg F$, tj. skup formula $S \cup \{F\}$ je ispunjiv.

Neka je $\Sigma' = \{F_1, \ldots F_m\}$ proizvoljan konačan podskup od $\Sigma_P$. Iz definicije skupa $\Sigma_P$ slijedi da postoji formula $F \in \Sigma_P$ tako da vrijedi $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \Leftrightarrow F$. Prije smo dokazali da je skup $S \cup \{F\}$ ispunjiv. Iz toga slijedi da je skup $S \cup \Sigma'$ ispunjiv, odnosno da je skup $S \cup \Sigma_P$ konačno ispunjiv. Iz teorema kompaktnosti slijedi da postoji interpretacija $I_P$ tako da vrijedi $I_P(S \cup \Sigma_P) = 1$. Sada je lako provjeriti da vrijedi

$$(\bigcap_{P \in I^-} I_P) \equiv I.$$

Iz dokazane činjenice $I_P(S \cup \Sigma_P) = 1$ posebno slijedi $I_P(S) = 1$, za sve $P \in I^-$. Pošto je po pretpostavci skup $S$ zatvoren na presjeke tada slijedi da vrijedi

$$(\bigcap_{P \in I^-} I_P)(S) = 1,$$

a onda i $I(S) = 1$, što smo i trebali dokazati.

Preostalo je promotriti slučaj kada je $I \equiv 1$. Neka je $\Sigma$ skup svih formula oblika $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$. Na isti način kao prije dokazali bi da je skup

$\Sigma \cup S$ konačno ispunjiv. Iz teorema kompaktnosti tada slijedi da postoji interpretacija $J$ takva da vrijedi $J(\Sigma \cup S) = 1$. No, iz $J(\Sigma) = 1$ slijedi $J \equiv I$.

20. Dokažite da je neka formula zatvorena na presjeke ako i samo ako je ekvivalentna nekoj kondicionalnoj formuli.
Rješenje: Iz zadatka 17 znamo da je svaka kondicionalna formula zatvorena na presjeke. Očito je tada i svaka formula, koja je ekvivalentana nekoj kondicionalnoj formuli, zatvorena na presjeke.

    Dokažimo obrat. Neka je $F$ formula koja je zatvorena na presjeke. Iz prethodnog zadatka slijedi da postoji skup kondicionalnih formula $S'$ koji je skup aksioma za $\{F\}$. Tada vrijedi $S' \models F$. Iz teorema kompaktnosti slijedi da postoje formule $F_1, \ldots, F_n$ iz $S'$ tako da vrijedi $\{F_1, \ldots, F_n\} \models F$. Očito tada vrijedi i $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \Rightarrow F$, te je formula $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ ekvivalentna nekoj kondicionalnoj formuli. Neka je $I$ interpretacija za koju vrijedi $I(F) = 1$. Pošto je $S'$ skup aksioma za $\{F\}$ tada iz zadatka 18 slijedi $I(S') = 1$. Tada posebno vrijedi $I(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) = 1$. To znači da vrijedi i $F \Rightarrow (F_1 \wedge \ldots \wedge F_n)$.

21. Za skup formula $S$ kažemo da je **nezavisan** ako ne postoji formula $A \in S$ tako da vrijedi $S \backslash \{A\} \models A$. Dokažite da je skup $S$ nezavisan ako i samo ako je svaki konačan podskup od $S$ nezavisan.

22. Dokažite da svaki konačan skup formula $S$ sadrži podskup $S'$ koji je nezavisan i ujedno je $S'$ skup akioma za $S$. Vrijedi li tvrdnja za prebrojiv skup formula?
Rješenje: Tvrdnja ne vrijedi općenito za prebrojive skupove formula. Npr. neka je $S = \{P_1,\ P_1 \wedge P_2,\ P_1 \wedge P_2 \wedge P_3, \ldots\}$. Lako je dokazati da svaki nezavisan podskup od $S$ ima samo jedan element. No, u drugu ruku niti jedan jednočlan podskup od $S$ ne može biti skup aksioma za $S$.

23. Dokažite da za svaki skup formula postoji nezavisan skup aksioma.
Rješenje: Ako je $S$ konačan tada tvrdnja slijedi po prethodnom zadatku. Neka je $S = \{A_1,\ A_2,\ \ldots\}$ prebrojiv skup formula. Ako je svaka formula iz $S$ valjana tada je prazan skup traženi nezavisan skup aksioma.

    Promotrimo sada slučaj kada $S$ sadrži i oborivu formulu. Definirajmo induktivno niz formula $(B_n)$. Neka je $A_i$ prva (u smislu indeksa) formula iz $S$ koja je oboriva. Tada definiramo $B_1 \equiv A_i$. Za već definiranu formulu $B_n$ promatramo postoji li formula $F \in S$ takva da $B_n \not\models F$. Ako takva formula $F$ postoji neka je $A_j$ prva (u smislu indeksa) formula iz $S$ koja nije posljedica od $B_n$. Tada definiramo $B_{n+1} \equiv B_n \wedge A_j$. Ako pak takva formula

$F$ ne postoji tada definiramo $B_{n+1} \equiv B_n$ (uočite da je tada $B_k \equiv B_n$, za sve $k > n$).

Očito vrijedi $S \models B_i$, za sve $i \in \mathbb{N}$, te iz definicije niza $(B_n)$ imamo da je $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ skup aksioma za $S$. Uočite da skup $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ ne mora biti nezavisan. Pomoću niza $(B_n)$ definiramo nezavisan skup aksioma za $S$.

Promotrimo prvo slučaj kada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $B_k \equiv B_n$, za sve $k > n$. Neka je $n$ najmanji prirodni broj s tim svojstvom, tj. neka je $B_{n-1} \not\equiv B_n$. Ako bi formula $B_n$ bila valjana, tada bi očito i formule $B_1$, $B_2$, $\ldots$, $B_{n-1}$ morale biti valjane. Iz toga slijedi da je svaka formula iz $S$ valjana, što se protivi pretpostavci s početka dokaza. To znači da formula $B_n$ nije valjana, a onda je skup $\{B_n\}$ nezavisan. Očito je onda $\{B_n\}$ jedan traženi nezavisan skup aksioma za $S$.

Pretpostavimo sada da je skup $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan. Definirajmo niz formula $(C_n)$ ovako:

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv B_1; \\ C_{n+1} &\equiv B_n \to B_{n+1}. \end{aligned}$$

Indukcijom po $n$ lako se dokaže da je svaka formula $C_n$ oboriva. Dokažimo sada da je skup $C = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ nezavisan. U tu svrhu izaberimo proizvoljan $m \in \mathbb{N}$, i dokažimo da $C\setminus\{C_m\} \not\models C_m$. Pošto formula $C_m$ nije valjana, tada postoji interpretacija $I$ takva da je $I(C_m) = 0$. Iz definicije formule $C_m$ dobivamo $I(B_{m-1}) = 1$ i $I(B_m) = 0$. Iz definicije niza formula $(B_n)$ tada slijedi da je $I(B_j) = 1$ za sve $j \leq m-1$, te $I(B_k) = 0$ za sve $k \geq m$. Sada iz definicije niza $(C_n)$ slijedi da je $I(C\setminus\{C_m\}) = 1$.

Lako je provjeriti da je $C$ skup aksioma za $S$.

24. Za dani skup formula $S$ skup totalnih interpretacija $I_S = \{I : I(S) = 1\}$ nazivamo **karakterističan skup interpretacija za** $S$. Neka su $S_1$ i $S_2$ skupovi formula za koje vrijedi $I_{S_1} = (I_{S_2})^c$. Dokažite da su tada skupovi $S_1$ i $S_2$ konačno aksiomatizabilni.
Rješenje: Primijetimo da skup $S_1 \cup S_2$ nije ispunjiv, pa iz teorema kompaktnosti slijedi da dani skup nije ni konačno ispunjiv. Dakle, postoje konačni skupovi $\Delta_1 \subseteq S_1$ i $\Delta_2 \subseteq S_2$, tako da skup $\Delta_1 \cup \Delta_2$ nije ispunjiv. Ovdje promatramo samo slučaj kada su $\Delta_1$ i $\Delta_2$ neprazni skupovi. Ostale slučajeve prepuštamo čitaocu. Tvrdimo da je $\Delta_1$, odnosno $\Delta_2$, skup aksioma za skup formula $S_1$, odnosno za $S_2$. Iz zadatka 18 slijedi da je dovoljno dokazati da su skupovi $\Delta_i$ i $S_i$ $(i = 1, 2)$ istiniti za iste interpretacije. Za ilustraciju promatramo slučaj kada je $i = 1$. Ako je $I$ interpretacija za koju vrijedi $I(\Delta_1) = 1$, tada nije $I(S_2) = 1$. Inače bismo imali $I(\Delta_1 \cup \Delta_2) = 1$, što je suprotno s pretpostavkom da skup $\Delta_1 \cup \Delta_2$ nije

ispunjiv. Dakle, $I \in (I_{S_2})^c$. No, po pretpostavci zadatka je $I_{S_1} = (I_{S_2})^c$, što znači da je $I(S_1) = 1$.

25. Neka je $\{I_1, \ \ldots, \ I_n\}$ proizvoljan konačan skup totalnih interpretacija. Dokažite da postoji skup formula $S$ tako da vrijedi $\{I_1, \ \ldots, \ I_n\} = I_S$. Rješenje: Za $j \in \{1, \ldots, n\}$ i $k \in \mathbb{N}$ definiramo literale $Q_{jk}$ ovako

$$Q_{jk} \equiv \begin{cases} \ \ P_k, & \text{ako je } I_j(P_k) = 1; \\ \neg P_k, & \text{ako je } I_j(P_k) = 0. \end{cases}$$

Neka je skup formula $S$ zadan sa $S = \{ \bigvee_{j=1}^{n} ( \bigwedge_{k=1}^{m} Q_{jk}) \ : \ m \in \mathbb{N}\}$. Lako je provjeriti da skup $S$ ima tražena svojstva.

26. Odredite neki prebrojiv skup interpretacija koji nije karakterističan skup interpretacija niti jednog skupa formula. Zatim, odredite neki prebrojiv skup interpretacija $\mathcal{I}$ za koji postoji skup formula $S$, tako da je upravo $\mathcal{I}$ karakterističan skup interpretacija za $S$.

27. Za interpretacije $I$ i $J$ pišemo $I \subseteq J$ ako za sve propozicionalne varijable $P$ vrijedi da iz činjenice $I(P) = 1$ slijedi $J(P) = 1$. Kažemo da je skup formula $S$ **rastući** ako za sve interpretacije $I$ i $J$, takve da je $I \subseteq J$, iz činjenice $I(S) = 1$ slijedi $J(S) = 1$. Dokažite da je skup formula rastući ako i samo ako za njega postoji skup aksioma koji sadrži samo pozitivne formule. (Pojam pozitivne formule je definiran u zadatku 4).

28. Dokažite da je formula $F$ rastuća ako i samo ako vrijedi barem jedno od sljedećeg:

    a) formula $F$ je ekvivalentna nekoj pozitivnoj formuli;

    b) formula $F$ je valjana;

    c) formula $F$ je antitautologija.

29. Za skup formula $S$ kažemo da je **maksimalno konzistentan** ako je konzistentan, i svaki njegov pravi nadskup je inkonzistentan. Dokažite da za maksimalno konzistentan skup formula $S$ i sve formule $A$ i $B$ vrijedi:

    a) $A \in S$ ako i samo ako $S \vdash A$;

    b) $(A \wedge B) \in S$ ako i samo ako $A \in S$ i $B \in S$;

    c) $(A \vee B) \in S$ ako i samo ako $A \in S$ ili $B \in S$;

    d) $\neg A \in S$ ako i samo ako $A \notin S$.

Rješenje Za ilustraciju dokazujemo samo jedan smjer tvrdnje a). Pretpostavimo da vrijedi $S \vdash A$. Ako $A \notin S$ tada je skup $S \cup \{A\}$ inkonzistentan. U drugu ruku iz pretpostavke $S \vdash A$ i zadatka 4 slijedi da je skup $S \cup \{A\}$ konzistentan.

30. Dokažite da je skup formula $S$ maksimalno konzistentan ako i samo ako je maksimalno konačno ispunjiv (vidi zadatak 2).

31. Postoji li maksimalno konzistentan nezavisan skup formula? (Definicija nezavisnog skupa formula je dana u zadatku 21).
Rješenje: Ne. Neka je $S$ proizvoljan maksimalno konzistentan skup formula. Lako je pokazati da $S$ mora sadržavati barem dvije različite formule $A$ i $B$ (dokažite!). Lako je vidjeti da tada imamo $\{A, B, A \wedge B\} \subseteq S$. No, skup formula $\{A, B, A \wedge B\}$ očito nije nezavisan, a onda ni $S$ nije nezavisan.

32. Je li skup svih teorema od $RS$ maksimalno konzistenatan skup formula?
Rješenje: Ne. Označimo skup svih teorema od $RS$ sa $S$. Neka je $F$ propozicionalna varijabla. Pošto $F$ nije valjana formula tada nije ni teorem od $RS$ (uočite da ne vrijedi ni $\vdash \neg F$.) Iz propozicije 1.43. slijedi da je skup $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan. Dakle, $S \cup \{\neg F\}$ je konzistentan pravi nadskup od $S$.

33. Dokažite da je svaki maksimalno konzistentan skup potpun.

34. Neka je $S$ skup formula. Dokažite da je $S$ potpun skup formula ako i samo ako postoji najviše jedna interpretacija $I$ za koju vrijedi $I(S) = 1$.

35. Neka je $S$ skup literala, pri čemu za svaki $k \in \mathbb{N}$ točno jedan od literala $P_k$ i $\neg P_k$ pripada skupu $S$. Dokažite da je $S$ potpun skup formula, ali nije maksimalno konzistentan.

36. Neka je $A$ proizvoljna antitautologija. Označimo sa $R$ račun sudova koji je dobiven dodavanjem formule $A$ kao aksioma sistemu $RS$. Je li skup svih teorema računa $R$ potpun skup formula?
Rješenje: Da. Sistem $R$ je inkonzistentan, tj. u njemu je dokaziva svaka formula.

37. Neka alfabet logike sudova sadrži i logičke konstante $\perp$ i $\top$. Označimo sa $RS'$ sistem za logiku sudova koji je dobiven proširenjem sistema $RS$ sa sljedeće dvije nove sheme aksioma za logičke konstante:

$$A \to \top \qquad \text{i} \qquad \perp \to A.$$

Za formulu kažemo da je **zatvorena** ako ne sadrži propozicionalne varijable. Dokažite da je $RS'$ potpun sistem u odnosu na zatvorene formule.

Uputa: Modificirajte dokaz teorema potpunosti za $RS$ kako bi dobili teorem potpunosti za sistem $RS'$. Tada tvrdnja zadatka odmah slijedi jer je svaka zatvorena formula valjana ili pak antitautologija.

38. Neka je $\mathcal{P}$ beskonačan skup (ne nužno prebrojiv!), čije elemente nazivamo propozicionalne varijable. Za alfabet $\mathcal{A} = \mathcal{P} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (, )\}$ na uobičajan način definiramo pojam formule, tautologije, formalnog izvoda (aksiomi su sve tautologije, a jedino pravilo izvoda je modus ponens), konzistentnog i potpunog skupa formula. Dokažite da za svaki konzistentan skup formula $S$ postoji potpun konzistentan nadskup.
Uputa: Neka je $E$ skup i $J$ klasa podskupova od $E$. Kažemo da je $J$ *konačnog karaktera* ako za svaki podskup $A$ od $E$ vrijedi: $A \in J$ ako i samo ako svaki konačan podskup od $A$ pripada $J$. *Teichmüller-Tukeyeva lema*[18] glasi:

> Ako je $J$ neprazna klasa podskupova od $E$ koja je konačnog karaktera tada $J$ sadrži maksimalan element.

Primjenom dane leme dokazujemo tvrdnju zadatka. Označimo sa $E$ skup formula alfabeta $\mathcal{A}$. Neka je $J$ klasa svih podskupova $A$ od $E$ koji imaju svojstvo da je skup $S \cup A$ konzistentan. Dokažite da je klasa $J$ konačnog karaktera. Pošto je $J$ neprazna klasa (prazan skup pripada $J$) tada iz Teichmüller-Tukeyeve leme slijedi da postoji maksimalan element $A$ u $J$. Dokažimo još da je $S \cup A$ potpun skup formula. Neka je $F$ formula tako da vrijedi $S \cup A \not\vdash F$. Tada je skup $S \cup A \cup \{\neg F\}$ konzistentan po propoziciji 1.43. a). (Primijetite da tvrdnja propozicije vrijedi i za ovaj neprebrojivi alfabet.) To znači da je $A \cup \{\neg F\} \in J$. Zbog maksimalnosti skupa $A$ vrijedi $\neg F \in A$. Dakle, vrijedi $S \cup A \vdash \neg F$, što smo i trebali dokazati.

[18]Teichmüller-Tukeyeva lema je ekvivalentna aksiomu izbora (vidi npr. [35] ili [19]).

## 1.7 Prirodna dedukcija

U točki pod naslovom *Testovi valjanosti* proučavali smo kako se ispituje valjanost neke formule. Zatim, u točki *Račun sudova* vidjeli smo da je svaka valjana formula teorem Frege-Łukasiewiczevog sistema. Svakako je za sistem $RS$ zanimljivo da su tri sheme aksioma i jedno pravilo izvoda dovoljni za dobivanje svih valjanih formula. No, sigurno je nejasno (barem na prvi pogled) zašto su tako odabrane sheme aksioma dobre za dobivanje svih valjanih formula.

Vidjeli smo da su dokazi u sistemu $RS$ prilično složeni i neprirodni. Sjetimo se npr. dokaza da je formula $A \to A$ teorem sistema $RS$ (vidi lemu 1.30.). U ovoj točki definiramo sistem prirodne dedukcije, u kojem će dokazi biti jasniji i u većini slučajeva prirodniji.

Sistem $RS$, kao i svi sistemi iz sljedeće točke 1.8 *Alternativne aksiomatizacije logike sudova*, su hilbertovski, tj. zadani su s nekoliko shema aksioma i jednim pravilom izvoda. Za razliku od hilbertovskih sistema, sistem prirodne dedukcije zadan je s nekoliko pravila izvoda i ne sadrži uopće niti jednu shemu aksioma.

U ovoj točki smatramo da alfabet sadrži logičke veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ i $\leftrightarrow$ . Simbol $\perp$ koristit ćemo kao pokratu za antitautologiju (npr. za $P \wedge \neg P$). To znači da sada posebno ne zahtijevamo da alfabet sadrži logičke konstante $\top$ i $\perp$.

Izvodi u sistemu prirodne dedukcije će se sastojati od vrlo jednostavnih koraka kao što je npr. "iz $A$ i $B$ zaključujemo $A \wedge B$", što zapisujemo s

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

Formule napisane neposredno iznad crte (u ovom slučaju to su $A$ i $B$) nazivamo **premise**, a formulu napisanu ispod crte (u ovom slučaju to je $A \wedge B$) nazivamo **konkluzija.**

Dani primjer je pravilo izvoda koje ćemo nazivati **introdukcija** veznika $\wedge$, i označavati ga sa $(\wedge I)$. Prije popisa svih pravila izvoda koja čine sistem prirodne dedukcije, te definicije dokaza i izvoda, dajemo nekoliko primjera.

**Primjer 1.54.** *Primjenom neposredno jasnih pravila pokažimo da iz skupa formula $\{P, Q, (P \wedge Q) \to R\}$ "slijedi" formula $R$. To ćemo kratko označavati sa $P, Q, (P \wedge Q) \to R \vdash R$.*

*Očito iz skupa formula $\{P, Q\}$ slijedi formula $P \wedge Q$. Primijetimo da smo prethodnu činjenicu dobili uvođenjem konjunkcije,tj. introdukcijom veznika $\wedge$. To pravilo ćemo označavati sa $(\wedge I)$. Zatim, iz skupa formula $\{P \wedge Q,\ (P \wedge Q) \to R\}$ slijedi formula $R$, i to primjenom već poznatog pravila izvoda modus ponens. U ovoj točki ćemo radi sustavnosti naziva to pravilo nazivati* **eliminacija** *kondicionala, i označavat ćemo ga s $(\to E)$.*

*Opisani izvod ćemo shematski zapisivati ovako:*

$$\dfrac{\dfrac{P \qquad Q}{P \wedge Q}\,(\wedge I) \qquad (P \wedge Q) \rightarrow R}{R}\,(\rightarrow E)$$

**Primjer 1.55.** *Pokažimo da vrijedi* $P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S)),\ R \wedge (P \wedge Q) \vdash S$. *Ovdje ćemo napisati samo kratki shematski izvod bez komentara.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R\wedge(P\wedge Q)}{P\wedge Q}\,(\wedge E)}{P}\,(\wedge E) \qquad P\rightarrow(Q\rightarrow(R\rightarrow S))}{Q\rightarrow(R\rightarrow S)}\,(\rightarrow E) \qquad \dfrac{\dfrac{R\wedge(P\wedge Q)}{P\wedge Q}\,(\wedge E)}{Q}\,(\wedge E)}{R\rightarrow S}\,(\rightarrow E) \qquad \dfrac{R\wedge(P\wedge Q)}{R}\,(\wedge E)}{S}\,(\rightarrow E)$$

U prethodnom primjeru smo koristili i pravilo eliminacije konjunkcije, koje označavamo sa $(\wedge E)$. Uočite da smo u prethodna dva primjera koristili samo sljedeća tri pravila izvoda: $(\wedge I)$, $(\wedge E)$ i $(\rightarrow E)$.

**Primjer 1.56.** *Za ilustraciju još dokazujemo da vrijedi* $P \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

$$\dfrac{\dfrac{P}{P \vee Q}\,(\vee I) \qquad \dfrac{P}{P \vee R}\,(\vee I)}{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}\,(\wedge I)$$

*U ovom primjeru smo uveli i pravilo introdukcije disjunkcije koje označavamo sa* $(\vee I)$.

Sva pravila izvoda možemo podijeliti obzirom na logičke veznike na koje se odnose, a zatim na **pravila introdukcije** i **eliminacije** veznika.

Uočite da za veznik $\wedge$ postoje dva pravila eliminacije: lijevo i desno (iz formule $A \wedge B$ slijedi formula $A$ – lijevi dio konjunkcije, te iz formule $A \wedge B$ slijedi formula $B$ – desni dio konjunkcije). Za veznik $\vee$ postoji lijevo i desno pravilo introdukcije, te za veznik $\leftrightarrow$ imamo lijevo i desno pravilo eliminacije. Sva ta pravila ćemo točno zapisati prilikom zadavanja sistema prirodne dedukcije.

Pravilo dvojne negacije, tj. pravilo koje označavamo sa $(DN)$, je jednostavno prirodno pravilo koje nam omogućava "kraćenje" parova negacije. Shematski ga zapisujemo ovako:

$$\frac{\neg\neg A}{A}\,(DN)$$

Sva pravila sistema prirodne dedukcije nisu na prvi pogled tako jasna i prirodna kao do sada navedena. U sljedećem primjeru želimo objasniti pravilo introdukcije kondicionala koje označavamo sa $(\rightarrow I)$.

**Primjer 1.57.** *U ovom primjeru želimo pokazati da formula $A \rightarrow C$ "slijedi" iz skupa formula $S = \{A \rightarrow (B \rightarrow C),\ B\}$. Primijetimo da bi bilo dobro da formula $A$ pripada skupu pretpostavki $S$ (tada bismo uzastopnom primjenom pravila $(\rightarrow E)$ dobili da vrijedi $B \rightarrow C$, odnosno $C$). No, formula $A$ ne pripada skupu pretpostavki.*

*Kako bismo proveli dokaz mi pretpostavljamo da je formula $A$ dana kao neka vrsta pretpostavke. Naravno, ne možemo reći da je $A$ pretpostavka. Zbog toga ćemo formulu $A$ nazivati* **privremena pretpostavka***, i prilikom uvođenja u dokaz označavat ćemo je sa $\overline{A}^{\,1}$.*

*Iz $\overline{A}^{\,1}$ i pretpostavke $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ primjenom pravila $(\rightarrow E)$ slijedi $B \rightarrow C$. Iz $B \rightarrow C$ i pretpostavke $B$ ponovnom primjenom pravila $(\rightarrow E)$ slijedi formula $C$. Time smo primjenom privremene pretpostavke $\overline{A}^{\,1}$ dokazali da iz skupa formula $S$ slijedi formula $C$. (Nadamo se da se slažete da to zapravo znači da je iz skupa $S$ izvediva formula $A \rightarrow C$). Reći ćemo da je primjenom pravila $(\rightarrow I)$* **zatvorena** *privremena pretpostavka $A$, te završen izvod formule $A \rightarrow C$ iz skupa $S$. Za pravilo $(\rightarrow I)$ reći ćemo da je* **hipotetičko***. Na kraju dajemo kratki zapis gore opisanog izvoda.*

$$\cfrac{\cfrac{B \qquad \cfrac{\overline{A}^{\,1} \qquad A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow C}\,(\rightarrow E)}{C}\,(\rightarrow E)}{A \rightarrow C}\,{}_1(\rightarrow I)$$

Shematski zapis pravila introdukcije kondicionala, tj. pravila označenog sa $(\rightarrow I)$, izgleda ovako:

$$\begin{array}{c} \overline{A}^{\,n} \\ \vdots \\ \cfrac{B}{A \rightarrow B}\,{}_n(\rightarrow I) \end{array}$$

Uočite da je shematski zapis pravila $(\rightarrow I)$ nešto kompliciraniji od zapisa do sada uvedenih pravila. Shematski zapis pravila $(\rightarrow I)$ ne pokazuje samo kako se iz premisa dobije konkluzija, već i kako od nekog izvoda dobijemo novi izvod.

U prethodnom primjeru prilikom primjene pravila introdukcije kondicionala pišemo ${}_1(\rightarrow I)$ kako bismo naglasili da je primjenom pravila $(\rightarrow I)$ zatvorena prije uvedena privremena pretpostavka označena s 1. Ako ćemo u nekom izvodu koristiti više različitih privremenih pretpostavki označavat ćemo ih s različitim prirodnim brojevima. Kada primjenjujemo hipotetičko pravilo označavat ćemo koju privremenu pretpostavku zatvaramo.

Pravilo introdukcije kondicionala nije jedino hipotetičko pravilo sistema prirodne dedukcije. Takva su još pravila eliminacija disjunkcije i introdukcija negacije. Sva ostala pravila sistema prirodne dedukcije nazivat ćemo **prirodna pravila**.

Eliminacija disjunkcije je hipotetičko pravilo. Ono nam jednostavno govori da ako iz oba člana disjunkcije $A \vee B$ možemo izvesti neku formulu $C$, tada tu formulu $C$ možemo izvesti iz $A \vee B$ bez privremenih pretpostavki. To je najkompliciranije pravilo sistema prirodne dedukcije. Uočite da je to jedino pravilo čijom primjenom zatvaramo dvije različite privremene pretpostavke. Shematski zapis tog pravila je dan sa:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix} \overline{A}^{\,n} \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \overline{B}^{\,m} \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\;{}_{n,m}(\vee E)$$

Hipotetičko pravilo introdukcije negacije je zapravo pravilo kontradikcije. To pravilo nam govori da ako iz privremene pretpostavke $A$ dobijemo kontradikciju tada zaključujemo da vrijedi $\neg A$. Pravilo introdukcije veznika $\neg$ zapisujemo ovako:

$$\dfrac{\begin{matrix} \overline{A}^{\,n} \\ \vdots \\ \perp \end{matrix}}{\neg A}\;{}_{n}(\neg I)$$

Sada konačno strogo definiramo sistem prirodne dedukcije, tj. točno navodimo sva pravila izvoda koja definiraju sistem.

**Definicija 1.58.** *Sistem prirodne dedukcije PD zadan je sljedećim pravilima izvoda:*

$$\frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge E) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge E) \qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}\,(\wedge I)$$

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}\overline{A}^{\,n}\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\overline{B}^{\,m}\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\,{}_{n,m}(\vee E) \qquad \frac{A}{A \vee B}\,(\vee I) \qquad \frac{B}{A \vee B}\,(\vee I)$$

$$\frac{A \qquad \neg A}{\perp}\,(\neg E) \qquad \frac{\neg\neg A}{A}\,(DN) \qquad \frac{\begin{matrix}\overline{A}^{\,n}\\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg A}\,{}_{n}(\neg I)$$

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}\,(\to E) \qquad \frac{\begin{matrix}\overline{A}^{\,n}\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\,{}_{n}(\to I)$$

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \to B}\,(\leftrightarrow E) \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \to A}\,(\leftrightarrow E) \qquad \frac{A \to B \qquad B \to A}{B \leftrightarrow A}\,(\leftrightarrow I)$$

Važno je istaknuti da hipotetičkim pravilima zatvaramo samo one privremene pretpostavke koje su uvedene prije primjene danog pravila, odnosno ne možemo zatvarati s hipotetičkim pravilom one privremene pretpostavke koje su uvedene nakon primjene tog hipotetičkog pravila. Primjenom nekog hipotetičkog pravila ne moramo zatvoriti sve uvedene privremene pretpostavke, već samo neke odabrane. No, tada moramo točno odrediti skup pretpostavki, tj. koju tvrdnju smo zapravo dokazali.

**Primjer 1.59.** *Prije definicije izvoda u sistemu prirodne dedukcije dajemo još neke primjere izvoda kako biste lakše razumjeli definiciju 1.62.*

1. $P \lor P,\ P \to (Q \land R) \vdash R$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \lor P \qquad \overline{P}^{\,1} \qquad \overline{P}^{\,2}}{P}\,{}_{1,2}(\lor E) \qquad P \to (Q \land R)}{Q \land R}\,(\to E)}{R}\,(\land E)$$

2. $\vdash \neg(P \land \neg Q) \to (P \to Q)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg(P\land\neg Q)}^{\,1} \qquad \dfrac{\overline{P}^{\,2} \quad \overline{\neg Q}^{\,3}}{P\land\neg Q}\,(\land I)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg\neg Q}\,{}_{3}(\neg I)}{Q}\,(DN)}{P\to Q}\,{}_{2}(\to I)}{\neg(P\land\neg Q)\to(P\to Q)}\,{}_{1}(\to I)$$

3. $P \land (Q \lor R) \vdash (P \land Q) \lor (P \land R)$

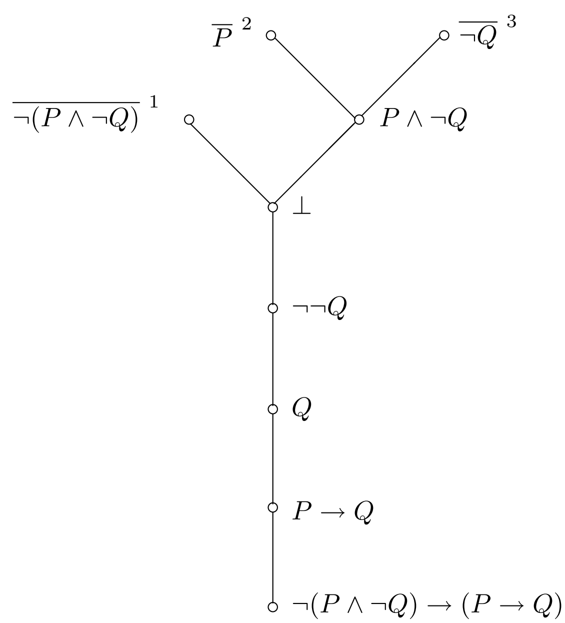
$$\dfrac{\dfrac{P\land(Q\lor R)}{Q\lor R}\,(\land E) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P\land(Q\lor R)}{P}\,(\land E) \quad \overline{Q}^{\,1}}{P\land Q}\,(\land I)}{(P\land Q)\lor(P\land R)}\,(\lor I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{P\land(Q\lor R)}{P}\,(\land E) \quad \overline{R}^{\,2}}{P\land R}\,(\land I)}{(P\land Q)\lor(P\land R)}\,(\lor I)}{(P\land Q)\lor(P\land R)}\,{}_{1,2}(\lor E)$$

4. *Nadamo se da se slažete da formula $P \lor Q$ nije teorem sistema $PD$ (iz teorema adekvatnosti slijedit će da su teoremi od $PD$ valjane formule). U sljedećem izvodu*

$$\dfrac{\overline{P}^{\,1}}{P \lor Q}\,(\lor I)$$

*uvedena privremena pretpostavka $P$ nije zatvorena. To znači da je ovo izvod za $P \vdash P \lor Q$, ali nikako ne za $\vdash P \lor Q$.*

Iz svih prethodnih primjera možemo uočiti da izvodi imaju oblik **stabla**. Kao jedan primjer zapisa izvoda u obliku stabla navodimo drugi izvod iz primjera 1.59.




Sada dajemo definiciju stabla. Želiom istaknuti da mi promatramo samo konačna stabla.

**Definicija 1.60.** **Stablo** *je konačan parcijalno uređen skup* $(S,<)$ *(tj. binarna relacija* $<$ *je irefleksivna i tranzitivna) koji ima sljedeća dva svojstva:*

*a) postoji najmanji element* $s_0 \in S$ *(taj element nazivamo* **korijen***);*

*b) za svaki* $s \in S$, $s \neq s_0$, *postoji jedinstveni konačni niz* $s_1, \ldots, s_n \in S$, *tako da vrijedi*

$$s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = s,$$

*te za sve* $i = 0, \ldots, n-1$ *vrijedi da je* $s_{i+1}$ *neposredni sljedbenik od* $s_i$.

*(Za* $y \in S$ *kažemo da je neposredni sljedbenik elementa* $x \in S$ *ako vrijedi* $x < y$ *i ne postoji* $z \in S$ *takav da vrijedi* $x < z < y$*).*

*Elemente stabla obično nazivamo* **čvorovi**. **List** *je čvor za koji ne postoji sljedbenik.* **Put** *je svaki niz čvorova* $s_1, \ldots, s_n$ *pri čemu je za sve* $i = 1, \ldots, n-1$ *čvor* $s_{i+1}$ *neposredni sljedbenik od* $s_i$. *Za svaki* $s \in S$ *parcijalno uređen skup* $\{x \in S : s \leq x\}$ *nazivamo* **podstablo**. *Po definiciji smatramo da je* **visina** *korijena jednaka jedan.* **Visina čvora** $s$ *je duljina jedinstvenog puta od* $s$ *do korijena.* **Visina stabla** *je maksimum skupa svih visina čvorova, odnosno duljina najdužeg puta u stablu.*

*Neka je* $S'$ *podstablo od* $S$, *te neka je* $s_0'$ *korijen od* $S'$, *a* $s_0$ *korijen od* $S$. *Kažemo da je* $S'$ **neposredno podstablo** *od* $S$ *ako je* $s_0'$ *neposredni sljedbenik od* $s_0$.

Nas će samo zanimati stabla čiji čvorovi su označeni formulama. Uočite da ne bi bilo točno reći da su čvorovi stabla formule jer se u izvodu jedna formula može pojaviti više puta.

**Definicija 1.61.** **Označeno stablo** *je uređena trojka* $(S, <, f)$ *gdje je* $(S, <)$ *stablo, a*

$$f : S \ \rightarrow \ \mathcal{F} \cup \{\overline{F}^n : F \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\perp\}$$

*(Sa* $\mathcal{F}$ *smo označili skup svih formula logike sudova). Funkciju* $f$ *nazivamo funkcija označavanja, i govorimo da je čvor* $s \in S$ *označen sa* $f(s)$.

Pojmovi vezani uz stabla kao što su: korijen, list, put, podstablo, visina čvora, visina stabla, neposedno podstablo, ... koriste se i za označena stabla. Tako npr. korijen označenog stabla $(S, <, f)$ je onaj čvor koji je korijen stabla $(S, <)$.

Kako bismo mogli navesti definiciju izvoda u sistemu prirodne dedukcije moramo prvo vrlo pažljivo uvesti oznake koje ćemo koristiti za označena stabla. Najčešće ćemo označena stabla označavati sa $D$, $D'$ i $D''$. Ako je $A$ formula i $n \in \mathbb{N}$ tada oznake $A$ i $\overline{A}^n$ označavaju stabla koja se sastoje samo od jednog čvora.

Sada redom navodimo oznake za označena stabla i pripadna objašnjenja.

$$\begin{matrix} D \\ A \end{matrix}$$

Ovu oznaku koristimo za označeno stablo čiji korijen je označen s formulom $A$. Smatrat ćemo da ova oznaka i oznaka $D$ označavaju isto označeno stablo. Razlika je jedino što navedena oznaka, za razliku od oznake $D$, ističe da je korijen označen sa $A$.

$$\frac{\begin{matrix} D \\ A \end{matrix}}{B}$$

Ovu oznaku koristimo za označeno stablo čiji je korijen označen sa $B$, te je jedino neposredno podstablo označeno sa $\substack{D \\ A}$.

$$\frac{\begin{matrix} D \\ A \end{matrix} \quad \begin{matrix} D' \\ B \end{matrix}}{C}$$

Ovu oznaku koristimo za označeno stablo s korijenom označenim formulom $C$, te ima točno dva neposredna podstabla koja su označena sa $\substack{D \\ A}$ i $\substack{D' \\ B}$.

$$\frac{\begin{matrix} D \\ A \end{matrix} \quad \begin{matrix} D' \\ B \end{matrix} \quad \begin{matrix} D'' \\ C \end{matrix}}{F}$$

Ovo je oznaka za označeno stablo s korijenom označenim formulom $F$, te ima točno tri neposredna podstabla koja su označena sa $\substack{D \\ A}$, $\substack{D' \\ B}$ i $\substack{D'' \\ C}$.

$$\begin{matrix} A \\ D \\ B \end{matrix}$$

Ovo je oznaka za označeno stablo s korijenom označenim s formulom $B$, koje može, ali ne mora, imati jedan ili više listova označenih formulom $A$. Smatrat ćemo da ova oznaka i oznaka $D$ označavaju isto označeno stablo.

$$\frac{\begin{matrix} A \\ D \\ B \end{matrix}}{C}$$

Ovu oznaku koristimo za označeno stablo čiji je korijen označen sa $C$, te ima jedno neposredno podstablo. Neki listovi (možda niti jedan, a možda svi) su označeni formulom $A$.

$$\frac{\begin{matrix} \overline{A}^n \\ D \\ B \end{matrix}}{C}$$

Ovu oznaku koristimo za označeno stablo koje je kao stablo jednako onom koje smo označili s prethodno navedenom oznakom. Razlika je samo da su neki listovi (možda niti jedan, a možda svi) označeni formulom $\overline{A}^n$.

Prvo ćemo definirati skup $X$ svih izvoda sistema prirodne dedukcije. Nakon toga ćemo jednostavno reći da je izvod svaki element skupa $X$.

**Definicija 1.62.** *Skup $X$ svih izvoda sistema prirodne dedukcije je najmanji skup koji sadrži sva označena stabla s točno jednim čvorom, te je skup $X$ zatvoren na sljedeće operacije:*

*(1)* *Ako* $\begin{array}{c} D \\ A \end{array}$ *i* $\begin{array}{c} D' \\ B \end{array}$ *pripadaju $X$, tada i označeno stablo*

$$\frac{\begin{array}{c} D \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} D' \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$ *pripada skupu $X$.*

*(2)* *Ako* $\begin{array}{c} D \\ A \wedge B \end{array}$ *pripada $X$, tada i označena stabla*

$$\frac{\begin{array}{c} D \\ A \wedge B \end{array}}{A} \quad i \quad \frac{\begin{array}{c} D \\ A \wedge B \end{array}}{B}$$ *pripadaju skupu $X$;*

*(3)* *Ako označeno stablo* $\begin{array}{c} D \\ A \end{array}$ *pripada $X$, tada i* $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ A \end{array}}{A \vee B}$ *pripada $X$.*

*Ako označeno stablo* $\begin{array}{c} D \\ B \end{array}$ *pripada $X$, tada i* $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ B \end{array}}{A \vee B}$ *pripada $X$.*

*(4) Ako označena stabla*

$$\begin{array}{c} \\ D \\ A \vee B, \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ D' \\ C, \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \\ D'' \\ C, \end{array}$$ *pripadaju skupu $X$*

*tada i označeno stablo*

$$\frac{\begin{array}{c} \\ D \\ A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{A}^{n} \\ D' \\ C \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overline{B}^{m} \\ D'' \\ C \end{array}}{C}$$ *pripada skupu $X$;*

*(5)* *Ako označena stabla* $\begin{array}{c} D \\ A \end{array}$ *i* $\begin{array}{c} D' \\ A \to B \end{array}$ *pripadaju skupu* $X$ *tada i*

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} D' \\ A \to B \end{array}}{B} \quad \text{\textit{pripada skupu} } X;$$

*(6)* *Ako označeno stablo*

$$\begin{array}{c} A \\ D \\ B \end{array} \quad \text{\textit{pripada skupu} } X \text{ \textit{tada i}} \quad \dfrac{\begin{array}{c} \overline{A}^n \\ D \\ B \end{array}}{A \to B} \quad \text{\textit{pripada skupu} } X;$$

*(7)* *Ako* $\begin{array}{c} D \\ \neg\neg A \end{array}$ *pripada* $X$ *tada i* $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \neg\neg A \end{array}}{A}$ *pripada skupu* $X$;

*(8)* *Ako* $\begin{array}{c} D \\ A \end{array}$ *i* $\begin{array}{c} D' \\ \neg A \end{array}$ *pripadaju* $X$ *tada i*

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} D' \\ \neg A \end{array}}{\bot} \quad \text{\textit{pripada} } X;$$

*(9)* *Ako* $\begin{array}{c} A \\ D \\ \bot \end{array}$ *pripada* $X$ *tada i* $\dfrac{\begin{array}{c} \overline{A}^n \\ D \\ \bot \end{array}}{\neg A}$ *pripada* $X$;

*(10)* *Ako* $\begin{array}{c} D \\ A \leftrightarrow B \end{array}$ *pripada* $X$ *tada i* $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ A \leftrightarrow B \end{array}}{A \to B}$ *i* $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ A \leftrightarrow B \end{array}}{B \to A}$ *pripadaju* $X$;

*(11)* *Ako* $\begin{array}{c} D \\ A \to B \end{array}$ *i* $\begin{array}{c} D' \\ B \to A \end{array}$ *pripadaju* $X$ *tada i*

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ A \to B \end{array} \quad \begin{array}{c} D' \\ B \to A \end{array}}{A \leftrightarrow B} \quad \text{\textit{pripada skupu} } X.$$

*Svako označeno stablo* $D \in X$ *nazivamo* **izvod**.

*Skup $S$ svih formula kojima su označeni listovi izvoda $D$, koje nisu privremene pretpostavke zatvorene nekim hipotetičkim pravilom, nazivamo* **skup pretpostavki** *izvoda $D$.*

*Ako je korijen izvoda $D$ označen s formulom $F$, a $S$ je skup pretpostavki, tada govorimo još da je formula $F$ izvediva iz skupa pretpostavki $S$. To označavamo sa $S \vdash_{PD} F$. Obično ćemo kratko pisati $S \vdash F$ ako nema mogućnosti zabune.*

*Ako vrijedi $S \vdash F$, te je $S'$ neki nadskup od $S$ tada po definiciji smatramo da vrijedi $S' \vdash F$.*

*Za formulu $F$ kažemo da je* **teorem** *sistema prirodne dedukcije ako je izvediva iz praznog skupa. To ćemo zapisivati kao $\vdash_{PD} F$, tj. kratko $\vdash F$. Tada dani izvod nazivamo i* **dokaz** *u sistemu prirodne dedukcije.*

**Napomena 1.63.** *Ako prilikom korištenja nekog hipotetičkog pravila zatvaramo neku privremenu pretpostavku nije nužno zahtijevati da je neki list izvoda označen s tom privremenom pretpostavkom. Promotrimo tu situaciju prilikom korištenja pravila $(\to I)$.*

*Neka je $\frac{D}{B}$ neki izvod formule $B$ iz skupa pretpostavki $S$. Pomoću tog izvoda možemo konstruirati izvod za formulu $A \to B$ iz skupa $S$. Neka je $n$ najmanji prirodan broj koji je veći od svih brojeva koji označavaju privremene pretpostavke u izvodu $D$. U izvodu $D$ uz korijen $B$ dodajemo sljedeće:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A}^{\,n} \qquad \begin{array}{c} D \\ B \end{array}}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{B}\,(\wedge E)}{A \to B}\,{}_n(\to I)$$

*Ovaj primjer nam ilustrira da je u izvodima dozvoljeno zatvaranje privremene pretpostavke iako ta pretpostavka nije prije uvedena. Odnosno navedeni izvod možemo kraće zapisati kao:*

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ B \end{array}}{A \to B}$$

*Na analogan način bi postupili i kod preostala dva hipotetička pravila, tj. kod $(\vee E)$ i $(\neg I)$.*

Sada nam je cilj dokazati prvo teorem adekvatnosti, tj. da je svaki teorem sistema prirodne dedukcije valjana formula. Za račun sudova dokaz teorema adekvatnosti je jednostavno slijedio iz činjenice da je svaki aksiom valjana formula, te da pravilo izvoda modus ponens čuva istinitost. Iz toga je jednostavno slijedilo da je u svakom dokazu svaka formula valjana. U sistemu prirodne dedukcije to nije slučaj. U nekim izvodima koristimo i simbol $\perp$, odnosno antitautologiju $P \wedge \neg P$. Zatim, u izvodima se mogu pojaviti privremene pretpostavke koje nisu valjane formule. Iz tih razloga dokaz teorema adekvatnosti za sistem prirodne dedukcije će biti nešto kompliciraniji.

**Teorem 1.64.** *(teorem adekvatnosti za sistem prirodne dedukcije)*
*Neka je $S$ skup formula, i $F$ neka formula. Ako vrijedi $S \vdash_{PD} F$ tada vrijedi $S \models F$. Posebno imamo da je svaki teorem sistema prirodne dedukcije valjana formula.*

*Dokaz.* Za proizvoljni izvod $D$ sa $S_D$ označavamo pripadni skup pretpostavki, a sa $F_D$ formulu kojom je označen korijen stabla. Indukcijom po visini stabla dokazujemo da za svaki izvod $D$ vrijedi $S_D \models F_D$.

Ako je visina stabla $D$ jednaka jedan tada se stablo $D$ sastoji od samo jednog čvora, tj. vrijedi $S_D = \{F_D\}$. Tada očito vrijedi $S_D \models F_D$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, koji ima svojstvo da za svako stablo izvoda visine strogo manje od $n$ vrijedi tvrdnja. Neka je $D$ neko stablo čija je visina točno $n$. Promatramo slučajeve obzirom na pravilo izvoda pomoću kojeg je dobiven korijen $F_D$.

Promotrimo prvo prirodna pravila. Za ilustraciju raspišimo tvrdnju za pravilo $(\wedge I)$. Tada stablo $D$ ima točno dva neposredna podstabla oblika $\frac{D'}{A}$ i $\frac{D''}{B}$, te je $F_D \equiv A \wedge B$. Shematski stablo $D$ izgleda ovako:

$$\frac{\begin{matrix} D' & \qquad & D'' \\ A & & B \end{matrix}}{A \wedge B}$$

Iz pretpostavke indukcije slijedi $S_{D'} \models A$ i $S_{D''} \models B$. Očito je $S_{D'} \cup S_{D''} = S_D$, pa imamo $S_D \models A$ i $S_D \models B$, a onda i $S_D \models A \wedge B$. Sasvim analogno dokaz izgleda za ostala prirodna pravila.

Posvetimo malo više pažnje hipotetičkim pravilima, i to prvo pravilu $(\to I)$. Tada je izvod $D$ moguće shematski zapisati u obliku:

$$\frac{\begin{array}{c}\overline{A}^n\\ D'\\ B\end{array}}{A \to B}$$

Iz pretpostavke indukcije slijedi $S_{D'} \models B$. Očito vrijedi $S_D \cup \{A\} = S_{D'}$. Time imamo $S_D \cup \{A\} \models B$. Lako je vidjeti da iz toga slijedi $S_D \models A \to B$.

Promotrimo sada pravilo $(\neg I)$. Izvod $D$ je tada oblika:

$$\frac{\begin{array}{c}\overline{A}^n\\ D'\\ \bot\end{array}}{\neg A}$$

Iz pretpostavke indukcije slijedi $S_{D'} \models \bot$ (tj. skup $S_{D'}$ nije ispunjiv). Očito je $S_D \cup \{A\} = S_{D'}$. To znači da skup $S_D \cup \{A\}$ nije ispunjiv. Iz toga odmah slijedi $S_D \models \neg A$.

Preostalo je još raspisati slučaj kada je formula $F_D$ dobivena pravilom $(\vee E)$. Tada je izvod $D$ oblika:

$$\frac{\begin{array}{c} \\ D_1\\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overline{A}^n\\ D_2\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\overline{B}^m\\ D_3\\ C\end{array}}{C}$$

Iz pretpostavke indukcije slijedi $S_{D_1} \models A \vee B$, $S_{D_2} \models C$ i $S_{D_3} \models C$. Očito vrijedi: $S_{D_1} \subseteq S_D$, $S_{D_2} \subseteq S_D \cup \{A\}$ i $S_{D_3} \subseteq S_D \cup \{B\}$. Ako skup $S_D$ nije ispunjiv skup formula tada očito vrijedi $S_D \models C$. Razmotrimo slučaj kada je $S_D$ ispunjiv skup. Neka je $I$ interpretacija takva da vrijedi $I(S_D) = 1$. Tada iz činjenica $S_{D_1} \models A \vee B$ i $S_{D_1} \subseteq S_D$ slijedi $I(A \vee B) = 1$. Radi određenosti neka je $I(A) = 1$. Tada iz $I(S_D \cup \{A\}) = 1$, $S_{D_2} \subseteq S_D \cup \{A\}$ i $S_{D_2} \models C$ slijedi $I(C) = 1$. $\square$

Kao i za sistem $RS$, tako i ovdje za sistem $PD$, teorem adekvatnosti povlači konzistentnost sistema $PD$. To ističemo u sljedećem korolaru.

**Korolar 1.65.** *Sistem prirodne dedukcije je konzistentan, tj. ne postoji formula $A$ tako da su $A$ i $\neg A$ teoremi sistema prirodne dedukcije.*

Sada nam je cilj dokazati teorem potpunosti za sistem prirodne dedukcije, odnosno da je svaka valjana formula teorem sistema prirodne dedukcije. U tu svrhu dokazujemo prvo sljedeće tri leme. Leme jednostavno iskazuju da je svaki od aksioma sistema $RS$ teorem sistema prirodne dedukcije.

**Lema 1.66.** *Za proizvoljne formule $A$ i $B$ vrijedi* $\vdash_{PD} A \to (B \to A)$.

*Dokaz.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A}^{\,1} \qquad \overline{B}^{\,2}}{A \wedge B}(\wedge I)}{A}(\wedge E)}{B \to A}{}_2(\to I)}{A \to (B \to A)}{}_1(\to I)$$

**Lema 1.67.** *Za proizvoljne formule $A$, $B$ i $C$ vrijedi*

$$\vdash_{PD} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)).$$

*Dokaz.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A}^{\,3} \quad \overline{A\to(B\to C)}^{\,1}}{B\to C}(\to E) \qquad \dfrac{\overline{A}^{\,3} \quad \overline{A\to B}^{\,2}}{B}(\to E)}{C}(\to E)}{A\to C}{}_3(\to I)}{(A\to B)\to(A\to C)}{}_2(\to I)}{(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))}{}_1(\to I)$$

**Lema 1.68.** *Za sve formule $A$ i $B$ formula $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ je teorem sistema $PD$.*

*Dokaz.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A}^{\,2} \qquad \dfrac{\overline{\neg B \to \neg A}^{\,1} \qquad \overline{\neg B}^{\,3}}{\neg A}\,(\to E)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg\neg B}\,{}_3(\neg I)}{B}\,(DN)}{A \to B}\,{}_2(\to I)}{(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)}\,{}_1(\to I)$$

**Teorem 1.69.** *(teorem potpunosti za sistem prirodne dedukcije)*
*Ako je $A$ valjana formula tada je $A$ teorem sistema $PD$.*

*Dokaz.* Ako je $A$ valjana formula tada iz teorema potpunosti za sistem $RS$ slijedi $\vdash_{RS} A$. Reći ćemo da je formula $F$ $n$-dokaziva ako u sistemu $RS$ postoji dokaz za nju duljine $n$. Indukcijom po $n$ dokazujemo da je svaka $n$-dokaziva formula teorem sistema prirodne dedukcije.

Ako je $n = 1$ tada je $F$ aksiom sistema $RS$. Iz prethodnih triju lema slijedi da je tada $F$ teorem sistema $PD$.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$, za sve $k < n$ i sve $k$-dokazive formule $G$, vrijedi da je $G$ teorem sistema $PD$. Neka je $F$ neka $n$-dokaziva formula, te neka je niz formula $F_1, \ldots, F_n$ neki dokaz u $RS$ za $F$. Iz definicije dokaza u sistemu $RS$ slijedi da je $F$ aksiom ili je dobivena primjenom pravila modus ponens. Ako je $F$ aksiom od $RS$ tada tražena tvrdnja slijedi iz prethodnih triju lema. Razmotrimo još slučaj kada je $F$ dobivena iz nekih formula $F_i$ i $F_j$ pomoću pravila izvoda modus ponens, gdje su $i, j < n$. Neka je $F_j \equiv F_i \to F$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da su formule $F_i$ i $F_j$ teoremi sistema $PD$. To znači da postoji označeno stablo $D$ koje je izvod za formulu $F_i$, odnosno stablo $D'$ koje je izvod za $F_j$. Spajanjem tih dvaju izvoda, i primjenom pravila $(\to E)$, dobivamo izvod za formulu $F$ u sistemu prirodne dedukcije. Sljedećom slikom prikazujemo opisanu konstrukciju.

$$\dfrac{\begin{matrix} D \\ F_i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D' \\ F_j \end{matrix}}{\mathrm{F}}$$

□

Iz teorema adekvatnosti i potpunosti za sisteme $RS$ i $PD$ dobivamo sljedeći korolar.

**Korolar 1.70.** *Za sve formule $F$ vrijedi:*

$$\vdash_{RS} F \quad \textit{ako i samo ako} \quad \vdash_{PD} F.$$

Sumirajmo na kraju dosadašnje rezultate u sljedećem korolaru.

**Korolar 1.71.** *Za sve formule $F$ i skupove formula $S$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

*a)* $S \models F$;

*b)* $S \vdash_{PD} F$;

*c)* $S \vdash_{RS} F$.

**Napomena 1.72.** *Na kraju ove točke kratko ćemo opisati pojam* **normalizacije izvoda** *sistema prirodne dedukcije. Nećemo ništa strogo definirati, već ćemo najvažnije stvari pokušati objaniti navodeći primjere. Promotrimo prvo sljedeći izvod.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A\wedge C}^{\,1}}{A}\,(\wedge E) \qquad \overline{A\to B}^{\,2}}{B}\,(\to E) \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{A\wedge C}^{\,1}}{C}\,(\wedge E)}{B\to C}\,(\to I)}{C}\,(\to E)}{(A\to B)\to C}\,(\to I)}{(A\wedge C)\to((A\to B)\to C)}\,(\to I)$$

*Posebno uočite formulu $B \to C$ u prethodnom izvodu. Ta formula je prvo konkluzija jednog pravila introdukcije, a onda je odmah premisa pravila eliminacije. Takve situacije bi svakako željeli izbjeći u izvodima.*

*Za formulu $F$ u izvodu kažemo da je* **formula reza** *ako je $F$ prvo konkluzija jednog pravila introdukcije, a onda je odmah premisa pravila eliminacije. Kažemo da se u nekom izvodu pojavljuje* **rez** *ako postoji u tom izvodu barem jedna formula reza. Za izvod $D$ kažemo da je u* **normalnoj formi** *ako ne sadrži niti jedan rez.*

*Jedan izvod formule* $(A \wedge C) \to ((A \to B) \to C)$ *može se bez reza zapisati ovako:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \wedge C}^{1}}{C}\,(\wedge E)}{(A \to B) \to C}\,(\to I)}{(A \wedge C) \to ((A \to B) \to C)}\,(\to I)$$

*Teorem o normalizaciji govori da se svaki izvod može normalizirati. Posljedica toga je da za svaki izvod postoji jedinstvena normalna forma. Iako se na prvi pogled tvrdnja teorema normalizacije može činiti očita, njen dokaz je relativno zahtjevan. Sve detalje o normalizaciji možete pronaći u [33], [42], [43] i [14].*

**Zadaci:**

1. Odredite izvode u sistemu prirodne dedukcije za sljedeće tvrdnje:

   a) $A, A \to B, B \to C \vdash C$;
   b) $(P \wedge Q) \to (R \wedge S), \neg\neg P, Q \vdash S$;
   c) $P, \neg\neg(P \to Q) \vdash (R \wedge S) \vee Q$;
   d) $P \to (Q \wedge R),\ P \vdash P \wedge Q$;
   e) $\neg P \to \neg\neg Q,\ \neg\neg\neg P \vdash Q$;
   f) $P \wedge Q \vdash Q \wedge P$;
   g) $(P \wedge Q) \wedge R \vdash P \wedge (Q \wedge R)$;
   h) $P \to Q,\ (P \to Q) \to (Q \to P) \vdash P \leftrightarrow Q$;
   i) $P \to (Q \to (R \to S)),\ R \wedge (P \wedge Q) \vdash S$.

   Uputa: koristite samo prirodna pravila.

2. Primjenom prirodnih pravila i hipotetičkog pravila $(\to I)$ dokažite sljedeće tvrdnje:

   a) $\vdash P \to (P \vee Q)$;
   b) $\vdash P \to ((P \to Q) \to Q)$;
   c) $(P \vee Q) \to R \vdash P \to R$;
   d) $P \wedge Q \vdash P \to Q$;
   e) $P,\ (P \wedge Q) \to \neg R,\ \neg R \to \neg S \vdash Q \to \neg S$;

f) $P \vdash (P \to Q) \to Q$;

g) $(P \wedge Q) \to R \vdash P \to (Q \to R)$;

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P}^{\,1} \qquad \overline{Q}^{\,2}}{P \wedge Q}(\wedge I) \qquad (P \wedge Q) \to R}{R}(\to E)}{Q \to R}{}_{2}(\to I)}{P \to (Q \to R)}{}_{1}(\to I)$$

h) $(P \wedge Q) \to R \vdash Q \to (P \to R)$;

i) $P \to (Q \to R) \vdash Q \to (P \to R)$;

j) $\neg P,\ (P \vee Q) \to R \vdash Q \to R$;

k) $P \leftrightarrow Q,\ Q \leftrightarrow R \vdash P \leftrightarrow R$;

l) $P \to (Q \to R) \vdash Q \to ((P \wedge Q) \to R)$.

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{Q}^{\,1} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{P \wedge Q}^{\,2}}{P}(\wedge E) \qquad P \to (Q \to R)}{Q \to R}(\to E)}{R}(\to E)}{(P \wedge Q) \to R}{}_{2}(\to I)}{Q \to ((P \wedge Q) \to R)}{}_{1}(\to I)$$

3. Odredite izvode za sljedeće tvrdnje:

a) $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$;

b) $P,\ \neg P \vdash Q$;

c) $\neg P \to P \vdash P$;

d) $\neg(\neg P \wedge \neg Q),\ \neg P \vdash Q$;

e) $P \to Q \vdash \neg P \vee Q$;

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\neg(\neg P \vee Q)}^{\,1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg(\neg P \vee Q)}^{\,1} \qquad \dfrac{\dfrac{P \to Q \quad \overline{P}^{\,2}}{Q}\,(\to E)}{\neg P \vee Q}\,(\vee I)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg P}\,{}_2(\neg I)}{\neg P \vee Q}\,(\vee I)}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(\neg P \vee Q)}\,{}_1(\neg I)}\,(\neg E)}{\neg P \vee Q}\,(DN)$$

f) $(\neg P \wedge Q) \to \neg R,\ R,\ Q \vdash P$;

g) $P \to Q,\ \neg Q \vdash \neg P$.

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \to Q \qquad \overline{P}^{\,1}}{Q}\,(\to E) \qquad \neg Q}{\bot}\,(\neg E)}{\neg P}\,{}_1(\neg I)$$

Uputa: u svim izvodima od hipotetičkih pravila upotrijebite samo pravilo $(\neg I)$.

4. U sistemu prirodne dedukcije odredite izvode za:

a) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P$;

Rješenje:

$$\dfrac{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \qquad \dfrac{\overline{P \wedge Q}^{\,1}}{P}\,(\wedge E) \qquad \dfrac{\overline{P \wedge R}^{\,2}}{P}\,(\wedge E)}{P}\,{}_{1,2}(\vee E)$$

b) $P \vee Q \vdash Q \vee P$;
c) $(P \vee Q) \vee R \vdash P \vee (Q \vee R)$;
d) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vdash P \wedge (Q \vee R)$;
e) $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash P \vee (Q \wedge R)$;
f) $P \vee (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;
g) $(P \vee Q) \wedge R \vdash R \wedge (Q \vee P)$;

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{(P\vee Q)\wedge R}{R}(\wedge E) \qquad \dfrac{\dfrac{(P\vee Q)\wedge R}{P\vee Q}(\wedge E)\quad \dfrac{\overline{P}^{\,1}}{Q\vee P}(\vee I)\quad \dfrac{\overline{Q}^{\,2}}{Q\vee P}(\vee I)}{Q\vee P}{\scriptstyle 1,2}(\vee E)}{R\wedge(Q\vee P)}(\wedge I)$$

h) $((P \wedge Q) \wedge R) \vee (P \wedge R) \vdash (P \vee \neg Q) \wedge R$.

5. Odredite izvode u sistemu $PD$ za sljedeće tvrdnje:

a) $\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$;

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P\vee Q}^{\,1}\qquad \dfrac{\overline{P}^{\,2}\quad \dfrac{\neg P\wedge\neg Q}{\neg P}(\wedge E)}{\bot}(\neg E)\qquad \dfrac{\dfrac{\neg P\wedge \neg Q}{\neg Q}(\wedge E)\quad \overline{Q}^{\,3}}{\bot}(\neg E)}{\bot}{\scriptstyle 2,3}(\vee E)}{\neg(P\vee Q)}{\scriptstyle 1}(\neg I)$$

b) $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$;

Rješenje:

$$\dfrac{\neg P\vee\neg Q \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P\wedge Q}^{\,1}}{P}(\wedge E)\quad \overline{\neg P}^{\,2}}{\bot}(\neg E)}{\neg(P\wedge Q)}{\scriptstyle 1}(\neg I)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P\wedge Q}^{\,3}}{Q}(\wedge E)\quad \overline{\neg Q}^{\,4}}{\bot}(\neg E)}{\neg(P\wedge Q)}{\scriptstyle 3}(\neg I)}{\neg(P\wedge Q)}{\scriptstyle 2,4}(\vee E)$$

c) $\neg(P \land Q) \vdash \neg P \lor \neg Q$;

d) $P \lor Q \vdash \neg(\neg P \land \neg Q)$.

6. Primjenom prirodnih pravila izvoda i dva hipotetička pravila odredite izvode za sljedeće tvrdnje:

a) $\vdash (P \to Q) \to \neg(P \land \neg Q)$;

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P\to Q}^{\,1} \qquad \dfrac{\overline{P\land\neg Q}^{\,2}}{P}\,(\land E)}{Q}\,(\to E) \qquad \dfrac{\overline{P\land\neg Q}^{\,2}}{\neg Q}\,(\land E)}{\bot}\,(\neg E)}{\neg(P\land\neg Q)}\,{}_2(\neg I)}{(P\to Q)\to\neg(P\land\neg Q)}\,{}_1(\to I)$$

b) $\vdash P \lor \neg P$;

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P}^{\,2}}{P\lor\neg P}\,(\lor I) \qquad \overline{\neg(P\lor\neg P)}^{\,1}}{\bot}\,(\neg E)}{\neg P}\,{}_2(\neg I)}{P\lor\neg P}\,(\lor I) \qquad \overline{\neg(P\lor\neg P)}^{\,1}}{\bot}\,(\neg E)}{\neg\neg(P\lor\neg P)}\,{}_1(\neg I)}{P\lor\neg P}\,(DN)$$

c) $\neg(P \land Q) \vdash P \to \neg Q$;

d) $P \lor Q,\ \neg P \vdash Q$;

e) $P \leftrightarrow Q \vdash \neg P \leftrightarrow \neg Q$;

f) $\vdash P \leftrightarrow \neg\neg P$;

g) $\vdash (P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \land \neg Q)$.

7. Dokažite da su sljedeća pravila izvoda dopustiva[19] u sistemu $PD$ :

   a) *hipotetički silogizam*

$$\frac{P \to Q \qquad\qquad Q \to R}{P \to R}\,(sil)$$

   b) *konstruktivna dilema*

$$\frac{P \vee Q \qquad P \to R \qquad Q \to S}{R \vee S}\,(kon\ dil)$$

   c) *modus tolens*

$$\frac{(P \vee Q) \to \neg R \qquad\qquad \neg\neg R}{\neg(P \vee Q)}\,(mod\ tol)$$

   d) *disjunktivni silogizam*

$$\frac{P \vee Q \qquad\qquad \neg P}{Q}\,(dis\ sil)$$

   e) *obrat po kontrapoziciji*

$$\frac{P \to Q}{\neg Q \to \neg P}\,(kontra)$$

   f) *apsorpcija*

$$\frac{P \to Q}{P \to (P \wedge Q)}\,(aps)$$

8. Primjenom nekog od pravila izvoda iz prethodnog zadatka odredite izvode za:

   a) $\neg A \to B,\ C \to D,\ \neg A \vee C,\ \neg B \vdash D;$

   Rješenje:

$$\dfrac{\neg B \qquad\qquad \dfrac{\neg A \vee C \qquad \neg A \to B \qquad C \to D}{B \vee D}\,(kon\ dil)}{D}\,(dis\ sil)$$

[19]Pojam dopustivog pravila je definiran na strani 49 za sistem $RS$. U istom smislu koristimo taj pojam za sistem $PD$.

b) $A \to B,\ (A \land B) \to C,\ \neg C \vdash \neg A$;

c) $(A \lor B) \to \neg C \vdash \neg\neg C \to \neg(A \lor B)$.

9. Ispitajte jesu li sljedeća pravila izvoda dopustiva u sistemu $PD$ :

a)

$$\frac{A \lor B \qquad B \to C}{\neg A \lor C}$$

b)

$$\frac{A \to B \qquad B}{A}$$

c)

$$\frac{(A \lor B) \to C}{C \to B}$$

d)

$$\frac{A \to (B \to C) \qquad B}{B \to C}$$

e)

$$\frac{A \qquad (A \land B) \to \neg C \qquad \neg C \to \neg D}{B \to D}$$

Uputa: ako je neko pravilo izvoda $\frac{A_1 \ldots A_n}{B}$ dopustivo u sistemu $PD$, i sve formule $A_1, \ldots A_n$ su valjane, tada je i formula $B$ valjana.

10. Koristeći sva tri hipotetička pravila odredite izvode za sljedeće tvrdnje:

a) $(P \lor Q) \land (P \lor R) \vdash \neg P \to (Q \land R)$;

b) $\neg P \lor Q \vdash P \to Q$;

c) $\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$.

Rješenje:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P}^{\,2} \quad \dfrac{\overline{P}^{\,2} \quad \dfrac{\overline{P \leftrightarrow \neg P}^{\,1}}{P \to \neg P}(\leftrightarrow E)}{\neg P}(\to E)}{\bot}(\neg E)}{\neg P}{}_2(\neg I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg P}^{\,3} \quad \dfrac{\overline{\neg P}^{\,3} \quad \dfrac{\overline{P \leftrightarrow \neg P}^{\,1}}{\neg P \to P}(\leftrightarrow E)}{P}(\to E)}{\bot}(\neg E)}{\neg\neg P}{}_3(\neg I)}{P}(DN)}{\bot}(\neg E)}{\neg(P \leftrightarrow \neg P)}{}_1(\neg I)$$

11. Ispitajte jesu li sljedeće formule teoremi sistema prirodne dedukcije. Za formule koje su teoremi odredite dokaze.

    a) $(P \to Q) \to ((P \lor R) \to (Q \lor R))$;
    b) $(P \to Q) \to Q$;
    c) $((P \to Q) \land (Q \to R)) \land (P \land \neg R)$;
    d) $((P \lor Q) \lor (R \to P)) \to ((P \lor \neg P) \to ((R \land \neg P) \land \neg Q))$.

    Uputa: pomoću glavnog testa provjerite je li dana formula valjana, pa primijenite teorem adekvatnosti.

12. Odredite što je dokazano sa sljedećim izvodima.

    a)

$$\dfrac{P \lor Q \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{P}^{\,1} \qquad \overline{Q}^{\,2}}{P \land Q}(\land I)}{Q}(\land E) \qquad \overline{Q}^{\,2}}{Q}{}_{1,2}(\lor E)$$

    b)

$$\dfrac{\overline{P \lor Q}^{\,3} \qquad \dfrac{\overline{P}^{\,1}}{P \lor Q}(\lor I) \qquad \dfrac{\overline{Q}^{\,2}}{P \lor Q}(\lor I)}{P \lor Q}{}_{1,2}(\lor E)$$

## 1.8 Alternativne aksiomatizacije logike sudova

U prethodnoj točki razmatrali smo sistem prirodne dedukcije. Kao što smo već bili istaknuli u tom sistemu su izvodi prirodniji nego u prije definiranom hilbertovskom Frege–Łukasiewiczevom sistemu. Razlog detaljnog proučavanja hilbertovskog sistema je taj što ćemo kasnije upravo tako zadavati teorije prvog reda kao što su Peanova aritmetika i Zermelo–Fraenkelova teorija skupova.

U ovoj točki navodimo neke alternativne aksiomatizacije logike sudova. Osim što se sistemi razlikuju po izabranim shemama aksioma, razlikuju se i po izabranim primitivnim logičkim veznicima, te sadrži li njihov alfabet logičke konstante $\top$ i $\bot$. Za svaki od tih sistema mogu se dokazati metateoremi kao i za $RS$. No, najvažnije je istaknuti da su svi navedeni sistemi međusobno ekvivalentni, tj. ako su $T_1$ i $T_2$ sistemi tada za sve formule $F$ iz zajedničkog jezika vrijedi

$$T_1 \vdash F \qquad \text{ako i samo ako} \qquad T_2 \vdash F.$$

Prvo navodimo *Hilbert–Bernaysov*[20] sistem za veznike $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ i $\neg$, bez konstanti. Sheme aksioma su podijeljene u grupe obzirom o kojem vezniku govore:

I. Sheme aksioma za kondicional
   1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;
   2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
   3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

II. Sheme aksioma za konjunkciju
   1. $(A \wedge B) \rightarrow A$;
   2. $(A \wedge B) \rightarrow B$;
   3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$.

III. Sheme aksioma za disjunkciju
   1. $A \rightarrow (A \vee B)$;
   2. $B \rightarrow (A \vee B)$;
   3. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$.

IV. Sheme aksioma za bikondicional
   1. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
   2. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$;
   3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$.

[20] P. Bernays, 1888.–1977.

V. Sheme aksioma za negaciju

1. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$;
2. $A \to \neg\neg A$;
3. $\neg\neg A \to A$.

Jedino pravilo izvoda je modus ponens.

*Asserov* sistem za logiku sudova bez konstanti ima, kao i Hilbert-Bernaysov sistem, sheme aksioma podijeljene u grupe obzirom na logičke veznike. Jedino pravilo izvoda je također modus ponenes. Za veznike $\wedge$, $\vee$, $\neg$ i $\leftrightarrow$ sheme aksioma su iste. Za kondicional je umjesto sheme $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$ uzeta shema $((A \to B) \to A) \to A$.

Sada navodimo sistem od *Devidéa* koji ima aksiome i za obje logičke konstante $\top$ i $\bot$. Sheme aksioma za $\to$, $\wedge$, $\vee$ i $\leftrightarrow$ su iste kao kod Asserovog sistema. Sheme aksioma za negaciju i konstante su sljedeće:

V. Sheme aksioma za negaciju

1. $A \to (\neg A \to B)$;
2. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;
3. $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.

VI. Sheme aksioma za konstante

1. $A \to \top$;
2. $\bot \to A$.

Jedino pravilo izvoda je modus ponens.

*Novikovljev*[21] sistem za logiku sudova s veznicima $\wedge$, $\vee$, $\to$ i $\neg$, bez konstanti, ima samo dvije sheme aksioma za kondicional: $A \to (B \to A)$ i $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$. Sheme aksioma za ostale veznike su iste kao kod Asserovog sistema.

*Kleenijev*[22] sistem za logiku sudova s veznicima $\wedge$, $\vee$, $\to$ i $\neg$, bez konstanti, ima iste sheme aksioma za kondicional kao Novikovljev sistem. Za veznik $\vee$ ima iste sheme aksioma kao i svi prethodni sistemi. Za veznike $\wedge$ i $\neg$ sadrži sljedeće sheme aksioma:

II. Sheme aksioma za konjunkciju

1. $(A \wedge B) \to A$;

[21] V. Novikov, 1901.–1975.
[22] S. C. Kleene, 1909.–1994.

2. $(A \wedge B) \rightarrow B$;
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$.

V. Sheme aksioma za negaciju

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$;
2. $\neg\neg A \rightarrow A$.

Jedino pravilo izvoda je modus ponens.[23]

*Rosserov* sistem za logiku sudova s veznicima $\wedge$ i $\neg$, bez konstanti, sadrži samo sljedeće tri sheme aksioma:

1. $A \rightarrow (A \wedge A)$;
2. $(A \wedge B) \rightarrow A$;
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg(B \wedge C) \rightarrow \neg(C \wedge A))$.

Naravno, $A \rightarrow B$ je pokrata za $\neg(A \wedge \neg B)$. Kao i svi prethodni sistemi sadrži modus ponens kao jedino pravilo izvoda.

*Hilbert–Ackermannov*[24] sistem sadrži samo $\vee$ i $\neg$ kao primitivne veznike. Veznik $\rightarrow$ se promatra samo kao pokrata. Sheme aksioma su sljedeće:

1. $(A \vee A) \rightarrow A$;
2. $A \rightarrow (A \vee B)$;
3. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$;
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C))$.

Jedino pravilo izvoda je modus ponens.

U *Whitehead–Russellovom* sistemu promatraju se samo veznici $\vee$ i $\neg$. Kondicional, tj. formula $A \rightarrow B$, je pokrata za formulu $\neg A \vee B$. Sheme aksioma su sljedeće:

1. $(A \vee A) \rightarrow A$;
2. $A \rightarrow (A \vee B)$;
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$.

Jedino pravilo izvoda je modus ponens.

---

[23] Ako u Kleenijevom sistemu umjesto sheme aksioma $\neg\neg A \rightarrow A$ uzmemo shemu $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ dobivamo **intuicionističku logiku sudova**, odnosno Brouwer-Haytingov sistem. U tom sistemu formule $\neg\neg A \rightarrow A$, $A \vee \neg A$, $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ i $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ nisu teoremi. O tome možete više saznati u točki 1.9.

[24] W. Ackermann, 1896.–1962.

U *Waysbergovom*sistemu promatraju se samo formule koje sadrže veznik $\to$ i konstantu $\perp$. Pravilo izvoda je modus ponens. Sheme aksioma su sljedeće:

1. $A \to (B \to A)$;
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
3. $((A \to \perp) \to \perp) \to A$.

U *Mereditovom* sistemu promatraju se samo veznici $\to$ i $\neg$. Uz modus ponens kao pravilo izvoda sadrži samo sljedeću shemu aksioma:

$$((((A \to B) \to (\neg C \to \neg D)) \to C) \to E) \to ((E \to A) \to (D \to A)).$$

Svakako je posebno zanimljiv *Nicodov*[25] sistem u kojem se promatraju formule izgrađene samo pomoću veznika $\uparrow$ (Shefferova operacija). Nicodov sistem sadrži samo jednu shemu aksioma:

$$(A \uparrow (B \uparrow C)) \uparrow ((D \uparrow (D \uparrow D)) \uparrow ((E \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow E) \uparrow (A \uparrow E)))),$$

a jedino pravilo izvoda je

$$\frac{A \qquad\qquad A \uparrow (B \uparrow C)}{C}.$$

Za svaki od sistema može se postaviti pitanje **nezavisnosti aksioma**. Naš osnovni sistem kojeg promatramo, tj. Frege–Łukasiewiczev sistem, ima nezavisan skup aksioma (vidi zadatak 13 na strani 52).

**Zadaci:**

1. Dokažite teorem adekvatnosti za svaki od sistema definiran u ovoj točki. Uputa: Dokažite da je svaki aksiom promatranog sistema tautologija. Pošto znamo da pravilo modus ponens čuva istinitost, tada tvrdnja zadatka slijedi indukcijom po duljini dokaza proizvoljnog teorema u promatranom sistemu.

   Ovdje dajemo dokaz adekvatnosti Nicodovog sistema. Dokažimo prvo da je svaki aksiom Nicodovog sistema tautologija. U tu svrhu pravila glavnog testa proširimo sa sljedećim pravilima za veznik $\uparrow$:

$$\begin{array}{ccc} & A \uparrow B \ \top & \\ / & & \backslash \\ A \perp & & B \perp \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} A \uparrow B \ \perp \\ A \top \\ B \top \end{array}$$

[25] J. Nicod, 1893.–1924.

(Dokažite da dana pravila čuvaju istinitost.) Primjenom tih pravila lako je dokazati da je svaki aksiom Nicodovog sistema tautologija.

Dokažimo sada da pravilo izvoda Nicodovog sistema čuva istinitost. Neka je $I$ interpretacija za koju vrijedi: $I(A) = I(A \uparrow (B \uparrow C)) = 1$. Tada po definiciji operacije $\uparrow$ slijedi $I(B \uparrow C) = 0$, a onda i $I(C) = 1$.

Za formulu $F$ kažemo da je $n-$dokaziva ($n \in \mathbb{N}$) ako postoji neki dokaz u Nicodovom sistemu duljine $n$. Indukcijom po $n$ dokažite da je svaka $n$-dokaziva formula tautologija.

2. Dokažite teorem potpunosti za Devidèov sistem s logičkim konstantama.

3. Dokažite da je svaki od definiranih sistema konzistentan.

4. Dokažite da za svaki od definiranih sistema vrijedi teorem dedukcije.

5. Za svaki sistema definiran u ovoj točki komentirajte:

   a) Vrijede li za sistem sva svojstva konzistentnosti kao i za $RS$? (Npr. skup je konzistentan ako i samo ako je svaki njegov konačan podskup konzistentan).
   b) Vrijedi li Lindenbaumova lema za sistem?
   c) Je li skup svih teorema maksimalno konzistentan?
   d) Vrijedi li (generalizirani) teorem potpunosti?

6. Dana je sljedeća aksiomatizacija računa sudova :

$$\begin{array}{rl}
1. & A \to (B \to A);\\
2. & (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C));\\
3. & (A \ \wedge \ B) \to A;\\
4. & (A \ \wedge \ B) \to B;\\
5. & (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \ \wedge \ C));\\
6. & A \to (A \vee B);\\
7. & B \to (A \vee B);\\
8. & (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C));\\
9. & (A \to \neg B) \to (B \to \neg A);\\
10. & \neg\neg A \to A.
\end{array}$$

Jedino pravilo izvoda je modus ponens. Označimo ovako dobiveni sistem računa sudova sa $IB$ (dokaz i izvod su definirani uobičajno). Dokažite da u sistemu $IB$ vrijedi teorem dedukcije.
Rješenje: Uočite da se prvi aksiom sistema $IB$ podudara s aksiomom (A1) sistema $RS$. Lako je dokazati da za proizvoljne formule $F$, $G$ i $H$ vrijedi

$\vdash_{IB} (F \to (G \to H)) \to (G \to (F \to H))$ (dokažite!). Neka su $A$, $B$ i $C$ proizvoljne formule. Označimo sa $F$ formulu $A \to B$. Zatim, neka je $G \equiv (A \to (B \to C))$ i $H \equiv A \to C$. Tada iz prije navedene činjenice slijedi

$$\vdash_{IB} (F \to (G \to H)) \to (G \to (F \to H)),$$

tj.

$$\vdash_{IB} ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))) \to$$
$$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))).$$

Sada primjenom drugog aksioma sistema $IB$ i pravila modus ponens slijedi

$$\vdash_{IB} ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))).$$

Dakle, i aksiom (A2) sistema $RS$ je jedan od teorema sistema $IB$. Koristeći napomenu iza teorema dedukcije na strani 47 slijedi da za sistem $IB$ vrijedi teorem dedukcije.

## 1.9 Neke neklasične logike sudova

U razmatranjima koja slijede logiku sudova koju smo do sada bili promatrali nazivat ćemo **klasična logika sudova**, kako bismo je mogli razlikovati od drugih logika sudova. Mi ćemo ovdje navesti osnovne informacije o dvjema neklasičnim logikama sudova: intuicionističkoj i modalnoj. Postoje i druge neklasične logike sudova, kao što su npr. viševaljana logika, vjerojatnosna logika, fuzzy logika, ... Obično se ne promatraju u udžbenicima iz logike, već su svakoj od njih posvećene posebne monografije.

### 1.9.1 Intuicionistička logika

Osnivačima intuicionizma se smatraju L. Kronecker i L. E. J. Brouwer. Prije nego što definiramo intuicionističku propozicionalnu logiku i pripadnu semantiku, promotrimo prvo dva primjera.

**Primjer 1.73.** *Dokažimo da postoje iracionalni brojevi* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *takvi da je* $a^b \in \mathbb{Q}$. *Znamo da je* $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Ako je* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ *dokaz je gotov, tj. našli smo iracionalne brojeve* $a$ *i* $b$ *(*$a = b = \sqrt{2}$*) takve da je* $a^b$ *racionalan broj.*
*Ako pak* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, *tj.* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *tada definiramo* $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *i* $b = \sqrt{2}$.
*Tada je očito* $a^b \in \mathbb{Q}$.
*Time smo dokazali da postoje* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *takvi da je* $a^b \in \mathbb{Q}$.

*Postavlja se pitanje koji su to konkretni racionalni brojevi koji zadovoljavaju traženi uvjet. Iz gornjeg dokaza se to ne može iščitati.*

Intuicionisti dokaz iz prethodnog primjera ne smatraju dokazom jer nije konstruktivan. Uočimo da smo do zaključka o egzistenciji traženih iracionalnih brojeva došli primjenjujući zakon o isključenju trećeg, tj. tautologiju $A \vee \neg A$. To znači da se u intuicionističkoj logici formula $A \vee \neg A$ ne smatra valjanom formulom.

**Primjer 1.74.** *U klasičnoj logici sudova znamo da za sve formule* $A$ *i* $B$ *vrijedi* $(A \to B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \vee B)$. *Sljedećim primjerom želimo ilustrirati da prethodna logička ekvivalencija formula ne vrijedi u intuicionističkoj logici. Neka je za svaki* $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, *sa* $\varphi_n$ *označena formula koja izražava sljedeću činjenicu:*

*"u decimalnom prikazu broja* $\pi$ *pojavljuje se* $n$ *uzastopnih sedmica."*

*Očito je formula* $\varphi_{100} \to \varphi_{99}$ *istinita. No, to isto ne možemo tvrditi za formulu* $\neg\varphi_{100} \vee \varphi_{99}$. *To znači da formula* $(\varphi_{100} \to \varphi_{99}) \to (\neg\varphi_{100} \vee \varphi_{99})$ *nije istinita, odnosno imamo* $(A \to B) \not\Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

U prethodna dva primjera smo naveli neke valjane formule klasične logike sudova za koje ne želimo da budu valjane formule intuicionističke logike sudova (to su formule $A \vee \neg A$ i $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ ). Postavlja se pitanje koji su nam kriteriji kada neku formulu smatramo valjanom formulom intuicionističke logike. Mi se nećemo detaljno baviti formalnim sistemima za intuicionističku logiku.

Alfabet, te pojam formule se definira sasvim isto kao kod klasične logike sudova. Spomenimo samo da se sistem prirodne dedukcije za intuicionisitičku logiku $IL$ dobiva iz sistema $PD$ izostavljanjem pravila dvojne negacije (pojam dokaza i izvoda se definira na sasvim isti način).

Spomenimo vezu između klasične i intuicionističke logike sudova. U tu svrhu prvo definiramo Gödelovu translaciju. Označimo sa $\mathcal{F}$ skup svih formula logike sudova. Gödelova translacija je funkcija $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ koja je induktivno definirana sljedećim pravilima:

$$\begin{aligned} g(P) &= \neg\neg P, \quad \text{gdje je } \; P \; \text{ proizvoljna propozicionalna varijabla;} \\ g(A \wedge B) &= g(A) \wedge g(B), \\ g(A \vee B) &= \neg(\neg g(A) \wedge \neg g(B)), \\ g(A \rightarrow B) &= g(A) \rightarrow g(B), \end{aligned}$$

gdje su $A$ i $B$ proizvoljne formule. Ako je $S$ skup formula tada sa $g(S)$ označavamo skup $\{g(A) : A \in S\}$.

Sada ističemo dva teorema koji govore o vezi intuicionističke i klasične logike sudova. Dokaze tih teorema možete pogledati u knjizi [43].

**Teorem** (K. Gödel)
Neka je $S$ neki skup formula, a $F$ neka formula. Tada vrijedi:

$$S \vdash_{PD} F \qquad \text{ako i samo ako} \qquad g(S) \vdash_{IL} g(F).$$

**Teorem** (V. Glivenko)
Neka je $F$ proizvoljna formula logike sudova. Tada vrijedi:

$$\vdash_{PD} F \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \vdash_{IL} \neg\neg F.$$

Sva dosadašnja razmatranja nam nisu dala kriterije za određivanje je li neka formula valjana u intuicionističkoj logici. U tu svrhu moramo definirati semantiku za intuicionističku logiku. To, naravno, ne mogu biti funkcije sa skupa varijabli u skup $\{0, 1\}$, jer onda opet ne bismo mogli zaključiti da npr. formula $P \vee \neg P$ nije valjana u intucionističkoj logici, tj. nije teorem sistema $IL$. Sada definiramo pojam Kripkeovog okvira, odnosno Kripkeovog modela za intuicionističku logiku.

**Definicija 1.75.** **Kripkeov okvir** $\mathfrak{F}$ *je proizvoljan neprazan parcijalno uređen skup* $(W, \leq)$. *Elemente skupa* $W$ *obično nazivamo* **svijetovi**. *Relacija* $\leq$ *se naziva* **relacija dostiživosti**. *To znači da ako za neke svijetove* $w, v \in W$ *vrijedi* $wRv$ *tada još kažemo da je svijet* $v$ *dostiživ iz svijeta* $w$.

**Definicija 1.76.** **Kripkeov model** $\mathfrak{M}$ *je uređena trojka* $(W, \leq, \Vdash)$, *gdje je* $(W, \leq)$ *proizvoljni Kripkeov okvir, a* $\Vdash$ *je relacija između svijetova iz* $W$ *i formula, koju nazivamo* **relacija forsiranja**. *Relacija forsiranja mora zadovoljavati sljedeće uvjete:*

$$w \nVdash \bot$$

$$w \Vdash A \vee B \quad \textit{ako i samo ako} \quad w \Vdash A \ \ \textit{ili} \ \ w \Vdash B;$$

$$w \Vdash A \wedge B \quad \textit{ako i samo ako} \quad w \Vdash A \ \ \textit{i} \ \ w \Vdash B;$$

$$w \Vdash A \to B \quad \textit{ako i samo ako} \quad \forall v (w \leq v \ \ \textit{i} \ \ v \Vdash A \ \ \textit{povlači} \ \ v \Vdash B),$$

*gdje je* $w \in W$ *proizvoljan, te su* $A$ *i* $B$ *proizvoljne formule. Ako vrijedi* $w \Vdash A$ *tada još kažemo da je formula* $A$ *istinita na svijetu* $w$.

Formulu $\neg A$ promatramo kao pokratu formule $A \to \bot$. Lako je vidjeti da vrijedi:

$$w \Vdash \neg A \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \forall v (w \leq v \ \ \text{povlači} \ \ v \nVdash A).$$

Uočite da je relacija forsiranja zadana sa svojim djelovanjem na propozicionalnim varijablama.

Ako je $\mathfrak{M} = (W, \leq, \Vdash)$ Kripkeov model i $F$ neka formula za koju vrijedi $w \Vdash F$, za sve $w \in W$, tada to kratko označavamo sa $\mathfrak{M} \Vdash F$.

Navodimo bez dokaza dva najvažnija teorema koji povezuju sintaksu i semantiku intuicionističke logike. Prvi teorem je lako dokazati indukcijom po složenosti formule. Dokaz drugog teorema je dan u [43], odnosno u A. Dobi, Intuicionistička logika, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 2000.

**Teorem 1.77.** *Za sve formule $F$ vrijedi:*

*ako $\vdash_{IL} F$ tada za sve Kripkeove model $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash F$.*

**Teorem potpunosti za sistem IL**. Za sve formule $F$ vrijedi:

ako za sve Kripkeove model $\mathfrak{M}$ imamo $\mathfrak{M} \Vdash F$ tada vrijedi $\vdash_{IL} F$.

**Zadaci**:

1. Dokažite da su za sve formule $A$ i $B$ sljedeće formule teoremi sistema $IL$:
   a) $A \to \neg\neg A$
   b) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
   c) $\neg A \to \neg\neg\neg A$
   d) $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$
   e) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$
   f) $\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B)$
   g) $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$
2. Dokažite teorem adekvatnosti za sistem $IL$.
   Uputa: Dokaz provedite indukcijom po visina stabla izvoda slično kao dokaz teorema adekvatnosti za sistem $PD$.
3. Dokažite da sljedeće formule nisu teoremi sistema IL:
   a) $P \vee \neg P$
   b) $\neg\neg P \to P$
   c) $\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$
   d) $(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)$.

   Uputa: Ako želimo dokazati $\nvdash_{IL} F$ iz teorema adekvatnosti slijedi da je dovoljno definirati Kripekov model $\mathfrak{M}$ takav da vrijedi $\mathfrak{M} \nVdash F$. Npr. za tvrdnju a) definiramo redom: $W = \{w, v\}$, $w \leq v$, te $x \Vdash P$ ako i samo ako $x = v$. Tada imamo $w \nVdash P$ i $w \nVdash \neg P$. To znači $w \nVdash P \vee \neg P$.
4. Dokažite teorem supstitucije za sistem IL, tj. ako su $A$, $B$ i $F$ formule, te je $P$ propozicionalna varijabla, tada vrijedi:

$$\vdash_{IL} (A \leftrightarrow B) \to (F(A/P) \leftrightarrow F(B/P)).$$

### 1.9.2 Modalna logika

Sjetimo se prvo kako je definirana interpretacija kondicionala u klasičnoj logici sudova. Zapišimo je tablicom:

| P | Q | P $\to$ Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Prilikom definicije interpretacije kondicionala bili smo spomenuli da je u prvi mah pomalo čudan uvjet da iz $I(P) = 0$ i $I(Q) = 1$ slijedi $I(P \to Q) = 1$, odnosno da iz "laži" slijedi "sve". Obično se ta situacija naziva **paradoks materijalne implikacije**. U sljedećim primjerima želimo naglasiti da u klasičnoj logici sudova to ne možemo popraviti. Promatramo binarne logičke veznike $\circ$ za koje vrijedi $1 \circ 0 = 0$ i $1 \circ 1 = 1$.

**Primjer 1.78.** *Označimo sa $imp_1$ binarni logički veznik čija je interpretacija zadana sljedećom tablicom:*

| $P$ | $Q$ | $P\ imp_1\ Q$ |
|---|---|---|
| *0* | *0* | *1* |
| *0* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *0* |
| *1* | *1* | *1* |

*Lako je provjeriti da vrijedi $(P\ imp_1\ Q) \Leftrightarrow (Q\ imp_1\ P)$. To bi značilo da je svaka tvrdnja ekvivalentna sa svojim obratom. Nadamo se da se slažete da ne želimo da veznik kondicional ima to svojstvo. Dakle, $imp_1$ ne možemo uzeti umjesto kondicionala.*

Na sličan način bi vidjeli da i druge kombinacije imaju nedostatke (vidi zadatak 1). To znači da u klasičnoj logici sudova ne možemo ispraviti nedostatke kondicionala. U tu svrhu promatraju se operatori na sudovima. Promotrimo prvo nekoliko primjera iz prirodnog jezika u kojima se pojavljuju operatori:

"Nužno će danas padati kiša."
"Moguće ću danas doći na posao."
"Ako gledam televiziju tada nužno žmirkam i zijevam."

U prethodnim rečenicama pojavljuju se dva operatora: "nužno" i "moguće," koje redom označavamo sa $\Diamond$ i $\Box$ . Ti operatori su primjeri tzv. **modalnih**

**operatora**, pa se iz tog razloga pripadne logike nazivaju **modalne logike**. Važno je reći da modalni operatori $\Diamond$ i $\Box$ nisu bulovski logički veznici, a to znači da ni njihova interpretacija ne može biti zadana pomoću neke istinosne funkcije.

Pomoću modalnih operatora može se definirati tzv. **striktna implikacija**, koja se označava sa $\prec$, na sljedeći način: $A \prec B \equiv \Box\,(A \to B)$. Osnovno je pitanje koja svojstva ima upravo definirana striktna implikcija. Mi se ovdje nećemo baviti striktnom implikacijom već ćemo promatrati modalne logike.

U razvoju modalne logike postojale su tri faze: sintaktička (Lewisovi prvi modalni sistemi, 1918.), klasična (Kripkeova semantika; teoremi potpunosti) i moderna ("modalna logika je sredstvo za opis relacijskih struktura"). O tome možete više čitati u knjizi [3].

Pojam nužnosti i mogućnosti je u nekim situacijama nejasan u intuitivnom smislu. Npr. hoćemo li formulu $\Box\, A \to \Box\,\Box\, A$ uzeti kao aksiom u modalnim sistemima ili ne? Upravo to je bio razlog da su početkom XX. stoljeća definirani mnogi modalni aksiomatski sistemi. Radi ilustracije mi ćemo ovdje definirati sintaksu i semantiku jednog od najjednostavnijih modalnih sistema koji se obično označava sa $K$ (u čast S. Kripkeu).

**Definicija 1.79.** *Alfabet modalnog sistema $K$ sadrži alfabet klasične logike sudova i logičku konstantu $\bot$, te jedan unarni modalni operator $\Box$. Pojam formule se definira standardno, pri čemu se još dodaje: ako je $A$ formula tada je i $\Box\, A$ formula.*

*Koristimo i unarni modalni operator $\Diamond$, pri čemu je $\Diamond A$ pokrata za formulu $\neg\,\Box\,\neg A$.*

*Sistem $K$ sadrži sljedeće aksiome:*

$$\begin{array}{ll} A0) & \textit{sve tautologije (u novom jeziku!)} \\ A1) & \Box\,(A \to B) \to (\,\Box\, A \to \Box\, B) \end{array}$$

*Pravila izvoda sistema $K$ su:*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}\ \textit{(mod pon)} \qquad\qquad i \qquad\qquad \frac{A}{\Box\, A}\ \textit{(nužnost)}$$

*Sasvim analogno kao za sistem RS definiraju se pojmovi dokaza, izvoda i teorema.*

**Napomena 1.80.** *U iskazu aksioma $A0$) smo naveli da su sve tautologije aksiomi, ali promatrane u novom jeziku. To znači da ne uzimamo samo valjane* *formule klasične logike sudova već i modalne formule koje supstitucijom "modalnih potformula" s propozicionalnim varijablama postaju tautologije. Takve su očito* $\Box A \vee \neg \Box A$, $\Box \Diamond \Box A \to \Box \Diamond \Box A$ *i* $(\Diamond A \wedge \neg \Box A) \to \neg \Box A$.

Radi ilustracije u sljedećoj propoziciji navodimo nekoliko teorema sistema $K$.

**Propozicija 1.81.** *Neka su* $A$ *i* $B$ *proizvoljne formule. Tada su sljedeće formule teoremi sistema* $K$ :

*a)* $\Box (A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$

*b)* $(\Box A \wedge \Box B) \to \Box (A \wedge B)$

*c)* $(\Box A \vee \Box B) \to \Box (A \vee B)$

*d)* $\Box (A \leftrightarrow B) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$

*e)* $\Box \bot \to \Box A$

Za ilustraciju pišemo niz formula koji je jedan dokaz za a):

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(A \wedge B) \to A$ | (A0) |
| 2. | $\Box ((A \wedge B) \to A)$ | (nužnost: 1.) |
| 3. | $\Box ((A \wedge B) \to A) \to (\Box (A \wedge B) \to \Box A)$ | (A1) |
| 4. | $\Box (A \wedge B) \to \Box A$ | (mod pon: 2., 3.) |
| 5. | $(A \wedge B) \to B$ | (A0) |
| 6. | $\Box ((A \wedge B) \to B)$ | (nužnost: 5.) |
| 7. | $\Box ((A \wedge B) \to B) \to (\Box (A \wedge B) \to \Box B)$ | (A1) |
| 8. | $\Box (A \wedge B) \to \Box B$ | (mod pon: 6., 7.) |
| 9. | $(\Box (A \wedge B) \to \Box A) \to ((\Box (A \wedge B) \to \Box B) \to$ $\to (\Box (A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)))$ | (A0) |
| 10. | $(\Box (A \wedge B) \to \Box B) \to (\Box (A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B))$ | mod pon: 4., 9. |
| 11. | $\Box (A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$ | mod pon: 8., 10. |

Sada definiramo semantiku modalnih logika. U prethodnoj točki o intuicionističkoj logici smo definirali pojam Kripkeovog okvira i modela. Ovdje također imamo te pojmove.

**Definicija 1.82.** *Neka je* $W$ *neki neprazan skup, te* $R \subseteq W \times W$ *proizvoljna binarna relacija. Tada uređeni par* $(W, R)$ *nazivamo* **Kripkeov okvir** *ili kratko* **okvir**. *Elemente skupa* $W$ *nazivamo* **svijetovi**, *a relaciju* $R$ *nazivamo* **relacija dostiživosti**.

**Kripkeov model** $\mathfrak{M}$ *je uređena trojka* $(W, R, \Vdash)$, *gdje je* $(W, R)$ *okvir, a* $\Vdash$ *je binarna relacija između svijetova i formula, koju nazivamo relacija forsiranja, te ima sljedeća svojstva:*

$$\begin{array}{l}
w \nVdash \bot \\
w \Vdash \neg A \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ w \nVdash A \\
w \Vdash A \wedge B \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ w \Vdash A \ \ \textit{i} \ \ w \Vdash B \\
w \Vdash A \vee B \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ w \Vdash A \ \ \textit{ili} \ \ w \Vdash B \\
w \Vdash A \to B \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ w \nVdash A \ \ \textit{ili} \ \ w \Vdash B \\
w \Vdash A \leftrightarrow B \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ w \Vdash A \ \ \textit{je ekvivalentno sa} \ \ w \Vdash B \\
w \Vdash \Box A \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ \forall v (wRv \ \ \textit{povlači} \ v \Vdash A)
\end{array}$$

Primijetimo da relacija forsiranja $\Vdash$ komutira s bulovskim veznicima, a definicija istinitosti formula oblika $\Box A$ je analogna definiciji istinitosti formula oblika $A \to B$ u intuicionističkoj logici.

**Definicija 1.83.** *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *Kripkeov model. Kažemo da je neka formula* $F$ **istinita na modelu** $\mathfrak{M}$ *ako za sve svijetove* $w \in W$ *vrijedi* $\mathfrak{M}, w \Vdash F$. *To kratko označavamo sa* $\mathfrak{M} \models F$.

*Kažemo da je formula* $F$ **valjana** *ako za sve Kripkeove modele* $\mathfrak{M}$ *vrijedi* $\mathfrak{M} \models F$.

*Neka je* $\mathcal{F} = (W, R)$ *neki Kripkeov okvir, te* $F$ *neka formula. Kažemo da je formula* $F$ *istinita na okviru* $\mathcal{F}$ *ako za svaku relaciju* $\Vdash$ *na okviru* $\mathcal{F}$ *vrijedi da za model* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *vrijedi* $\mathfrak{M} \models F$. *To označavamo sa* $\mathcal{F} \models F$.

Kao i obično teorem adekvatnosti se lako dokazuje indukcijom po duljini dokaza.

**Teorem 1.84.** *Ako je* $F$ *formula takva da* $\vdash_K F$ *tada je* $F$ *valjana.*

Ovdje ćemo samo iskazati teorem potpunosti. Dokaz tog teorema možete pogledati npr. u knjizi [3].

**Teorem potpunosti za sistem** $K$. Ako je $F$ valjana formula tada je $F$ teorem sistema $K$.

Za razliku od klasične logike sudova za modalnu logiku ne postoji samo jedan istaknuti sistem (kojemu su drugi sistemi ekvivalentni). Ovdje navodimo još nekoliko najčešće razmatranih proširenja sistema $K$. Sistem $T$ dobivamo kada sistemu $K$ dodamo još kao novu shemu aksioma $\Box A \to A$. Sistem $S4$ dobivamo kada sistemu $T$ dodamo još kao novu shemu aksioma $\Box A \to \Box \Box A$. Konačno, sistem $S5$ se dobije dodavanjem sistemu $T$ nove sheme aksioma $\Diamond A \to \Box \Diamond A$.

Priču o modalnim logikama počeli smo s paradoksom materijalne implikacije, odnosno uvođenje modalnih logika motivirali smo promatranjem operatora "nužno" i "moguće". Tako je i išao povijesni razvoj. Danas se promatraju razni modalni operatori. Npr. u temporalnoj logici se promatraju operatori "uvijek će biti da ..." i "uvijek je bilo da ...". Zatim, u logikama znanja i vjerovanja promatraju se operatori oblika "on zna da ..." i "on vjeruje da ..." U logikama dokazivosti za formule oblika $\Box A$ promatra se interpretacija "formula $A$ je dokaziva". Velike su primjene modalnih logika u računarstvu.

## Zadaci

1. Označimo sa $imp_2$, odnosno $imp_3$, binarne logičke veznike čije su interpretacije zadane sljedećom tablicom:

| P | Q | P $imp_2$ Q | P $imp_3$ Q |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

   Provjerite da za $i = 2, 3$ vrijedi $\Big((P\ imp_i\ Q) \wedge (Q\ imp_i\ P)\Big) \not\Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$.

2. Dokažite da je svaka tautologija klasične logike sudova valjana modalna formula.
   Uputa: Pretpostavimo da je $F$ formula klasične logike sudova koja nije valjana modalna formula. Tada po definiciji postoji Kripkeov model $\mathfrak{M}$ i svijet $w$ takav da $\mathfrak{M}, w \nVdash F$. Definiramo interpretaciju $I$ sa: $I(P) = 1$ ako i samo ako $w \Vdash P$. Indukcijom po složenosti formule $F$ lako je dokazati da vrijedi $I(F) = 0$.

3. Neka je $\mathcal{F} = (W, R)$ proizvoljni okvir. Za okvir $\mathcal{F}$ kažemo da je tranzitivan (refleksivan; simetričan) ako je relacija $R$ tranzitivna (refleksivna; simetrična). Dokažite:

   a) $\mathcal{F} \Vdash (\Diamond\Diamond P \to \Diamond P)$ ako i samo ako $\mathcal{F}$ je tranzitivan okvir.
   Zatim, dokažite da postoji okvir $\mathcal{F}$ koji nije tranzitivan, relacija forsiranja $\Vdash$ na $\mathcal{F}$ i $w \in \mathcal{F}$ tako da za model $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, \Vdash)$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\Diamond P \to \Diamond P$.

   b) $\mathcal{F} \Vdash (P \to \Diamond P)$ ako i samo ako $\mathcal{F}$ je refleksivan okvir.
   Zatim, dokažite da postoji okvir $\mathcal{F}$ koji nije refleksivan, relacija forsiranja $\Vdash$ na $\mathcal{F}$ i $w \in \mathcal{F}$ tako da za model $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, \Vdash)$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash p \to \Diamond P$.

c) $\mathcal{F} \Vdash (P \to \Box \Diamond P)$ ako i samo ako $\mathcal{F}$ je simetričan okvir.
Zatim, dokažite da postoji okvir $\mathcal{F}$ koji nije simetričan, relacija forsiranja $\Vdash$ na $\mathcal{F}$ i $w \in \mathcal{F}$ tako da za model $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, \Vdash)$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash P \to \Box \Diamond P$.

4. Za binarnu relaciju $R$ kažemo da je inverzno dobro fundirana ako ne postoji niz $(x_n)$ takav da je $x_1 R x_2 R x_3 \ldots$ Za okvir $\mathcal{F} = (W, R)$ kažemo da je inverzno dobro fundiran ako je relacija $R$ inverzno dobro fundirana. Dokažite:

$\mathcal{F} \models \Box (\Box P \to P) \to \Box P$ ako i samo ako okvir $\mathcal{F}$ je inverzno dobro fundiran.

(Formula $\Box (\Box P \to P) \to \Box P$ se naziva Löbov aksiom. Promatra se u logici dokazivosti koja je modalni opis predikata dokazivosti u Peanovoj aritmetici).

5. Dokažite da su sljedeće formule teoremi sistema $K$ :

a) $(\Box P \wedge \Box Q) \to \Box (P \wedge Q)$
b) $\Box (P \leftrightarrow Q) \to (\Box P \leftrightarrow \Box Q)$
c) $\Box \bot \to \Box P$
d) $\neg \Box \bot \to (\Box P \to \Diamond P)$
e) $\Diamond (P \vee Q) \leftrightarrow (\Diamond P \vee \Diamond Q)$
f) $(\Box P \vee \Box Q) \to \Box (P \vee Q$
g) $(\Diamond P \wedge \Diamond Q) \to \Diamond (P \wedge Q)$

6. Primjenom teorema adekvatnosti dokažite da sljedeće formule nisu teoremi sistema $K : P \to \Box P$, $\Box (P \vee Q) \to (\Box P \vee \Box Q)$, $(\Box P \to \Box Q) \to \Box (P \to Q)$ i $(\Box P \leftrightarrow \Box Q) \to \Box (P \leftrightarrow Q)$.

7. Dokažite da sljedeće formule nisu teoremi sistema $K$ :

a) $\Box (P \vee Q) \to (\Box P \vee \Box Q)$
b) $(\Box P \to \Box Q) \to \Box (P \to Q)$
c) $(\Box P \leftrightarrow \Box Q) \to \Box (P \leftrightarrow Q)$
d) $\Diamond \Diamond P \to \Diamond P$
e) $P \to \Diamond P$
f) $P \to \Box \Diamond P$

8. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash)$ Kripkeovi modeli. (Relacije forsiranja jednako označavamo iako se nužno ne radi o istim relacijama). Za relaciju $Z \subseteq W \times W'$ kažemo da je **bisimulacija** između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ ako ispunjava slijedeća tri uvjeta:

(at) za sve $(w, w') \in Z$ i sve propozicionalne varijable $P$ vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash P \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w' \Vdash P.$$

(forth) za sve $(w, w') \in Z$ i sve $v \in W$ takve da vrijedi $wRv$ postoji $v' \in W'$ takav da $(v, v') \in Z$ i $w'R'v'$.

(back) za sve $(w, w') \in Z$ i sve $v' \in W'$ takve da vrijedi $w'Rv'$ postoji $v \in W'$ takav da $(v, v') \in Z$ i $wRv$.

Ako je $Z$ bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada to označavamo sa $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$, te umjesto $(w, w') \in Z$ pišemo i $Z : \mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$, odnosno i $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$. Kažemo još da su modeli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ bisimulirani.

Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) $\{(w, w) : w \in W\} \ : \ \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}$;

b) ako $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ tada $Z^{-1} : \mathfrak{M}' \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}$;

c) ako $Z_1 : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$ i $Z_2 : \mathfrak{M}' \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}''$ tada $Z_1 \circ Z_2 : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}''$;

d) ako je $\{Z_i : i \in I\}$ neka familija bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada $\bigcup_{i \in I} Z_i : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$;

e) za svaka dva Kripkeova modela postoji maksimalna bisimulacija.

Za svijetove $w \in W$ i $w' \in W'$ kažemo da su **modalno ekvivalentni** ako za sve formule $F$ vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash F \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash F.$$

Ako su $w$ i $w'$ modalno ekvivalentni tada to označavamo sa $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$. Dokažite da ako vrijedi $Z : \mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$ tada vrijedi i $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$. (Obrat općenito ne vrijedi; vidi [3]).

Definirajte izomorfizam između dva Kripkeova modela. Dokažite da su svaka dva izomorfna modela ujedno i bisimulirana.

9. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash')$ Kripkeovi modeli. Kažemo da je $\mathfrak{M}'$ **generirani podmodel** od $\mathfrak{M}$ ako vrijedi:

   (i) $\emptyset \neq W' \subseteq W$;

   (ii) za sve $w, v \in W$ takve da je $w \in W'$ i vrijedi $wRv$ tada je $v \in W'$;

   (iii) relacija $R'$ je podskup od $R$, a relacija $\Vdash'$ je podskup od $\Vdash$.

   Neka je $\mathfrak{M}'$ generirani podmodel od $\mathfrak{M}$. Dokažite da je tada $Z = \{(v, v) : v \in W'\}$ jedna bisimulacija između modela $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{M}$.

10. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash)$ dva Kripkeova modela. Za funkciju $f : W \to W'$ kažemo da je **ograničeni morfizam** ako vrijedi:

   (i) za sve $w \in W$ i sve propozicionalne varijable $p$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash p$;

   (ii) za sve $w, v \in W$ takve da je $wRv$ vrijedi $f(w) R' f(v)$;

(iii) za sve $w \in W$ i sve $w' \in W'$ takve da $f(w)R'w'$ postoji $v \in W$ tako da $wRv$ i $f(v) = w'$.

Dokažite da ako je $f$ ograničeni morfizam između Kripkeovih modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ tada za relaciju $Z = \{(w, f(w)) : w \in W\}$ vrijedi $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$.

11. Za Kripkeov model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ kažemo da je **slikovno konačan** ako je za sve $w \in W$ skup $\{v : wRv\}$ konačan. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ slikovno konačni modeli. Dokažite da tada vrijedi:

$$\text{ako } \ \mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w' \ \text{ tada } \ \mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$$

(Hennessy–Milnerov teorem)

# Poglavlje 2

# Logika prvog reda

## 2.1 Uvod

U prethodnom poglavlju proučavali smo klasičnu[1] logiku sudova. No, unatoč dobrim svojstvima, kao što su npr. teoremi kompaktnosti i potpunosti, logika sudova je vrlo slaba teorija. I to u sljedećem smislu: mnoga logička zaključivanja koja koristimo bilo u svakodnevnom životu, bilo u matematici, ne možemo izraziti u logici sudova[2]. Pokušat ćemo to ilustrirati sljedećim primjerima. Promotrimo prvo jedno vrlo jednostavno zaključivanje (iznad crte su navedene pretpostavke, a ispod crte je zaključak)

$$\begin{array}{l} \text{Svi ljudi su smrtni.} \\ \text{Grci su ljudi.} \\ \hline \text{Grci su smrtni.} \end{array}$$

Lako je vidjeti da ovo jednostavno zaključivanje ne možemo opisati propozicionalnim formama, već moramo u obzir uzeti i sadržaj rečenica. Označimo redom predikate: sa $C(x)$ "$x$ je čovjek", sa $S(x)$ "$x$ je smrtan" i sa $G(x)$ "$x$ je Grk". Tada gornji primjer možemo zapisati u obliku:

$$\begin{array}{c} \forall x(C(x) \to S(x)) \\ \forall x(G(x) \to C(x)) \\ \hline \forall x(G(x) \to S(x)) \end{array}$$

Sljedeći primjer je bio nerješiv za srednjovjekovne logičare, tj. pomoću Aristotelovih silogizama nisu uspjeli zapisati ovo očito valjano zaključivanje.

[1] Neklasične logike su npr. modalne logike, viševaljane logike, linearna logika, ...

[2] U okvire logike sudova ne uklapa se ni Aristotelova teorija silogizama, a ni najjednostavnija zaključivanja iz aritmetike i geometrije.

$$\frac{\text{Sve elipse su krivulje.}}{\text{Svatko ko crta elipsu crta krivulju.}}$$

Ako sa $E(x)$ označimo predikat "$x$ je elipsa", a sa $K(x)$ predikat "$x$ je krivulja", te sa $C(x,y)$ predikat "$y$ crta $x$", tada formalno zapisan gornji primjer izgleda

$$\frac{\forall x(E(x) \to K(x))}{\forall y(C(x,y) \wedge E(x) \to C(x,y) \wedge K(x))}$$

Pokušajte sami formalno zapisati (i uočite da to ne možete napraviti u logici sudova) sljedeći primjer:

$$\frac{\text{Svi ljudi su životinje.}}{\text{Glava čovjeka je glava životinje.}}$$

Logika sudova ne samo da ne može opisati jednostavna zaključivanja, već je pomoću nje nemoguće formalno zapisati i neke osnovne matematičke pojmove. Jedan takav pojam je neprekidnost funkcije u točki. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $x_\circ$, tj. istinita je formula

$$\forall \epsilon \; \exists \delta \; \forall x \; ( \mid x - x_\circ \mid < \delta \quad \to \mid f(x) - f(x_\circ) \mid < \epsilon).$$

Negacija gornje tvrdnje, tj. formula

$$\neg \forall \epsilon \; \exists \delta \; \forall x \; ( \mid x - x_\circ \mid < \delta \quad \to \mid f(x) - f(x_\circ) \mid < \epsilon),$$

je formalni zapis činjenice da funkcija $f$ ima prekid u nekoj točki $x_\circ$. Primjenom pravila prijelaza za kvantifikatore (sistematski ćemo ih proučavati u točki 2.4) dobivamo

$$\exists \epsilon \; \forall \delta \; \exists x \; ( \mid x - x_\circ \mid < \delta \;\; \wedge \;\; \mid f(x) - f(x_\circ) \mid \geq \epsilon).$$

Važno je uočiti da u prethodnim primjerima istinitost zaključka ne ovisi samo o istinitosti dijelova koji su dobiveni samo rastavljanjem obzirom na logičke veznike. To znači da za opis takvih zaključivanja moramo prije svega promatrati širi jezik. Tako ćemo u logici prvog reda[3] kao osnovne znakove alfabeta imati i varijable za objekte ili individualne varijable, relacijske simbole, funkcijske simbole i konstantske simbole, te kvantifikatore: $\forall$ i $\exists$. Logika sudova se može shvatiti dijelom logike prvog reda ako propozicionalne varijable poistovjetimo s nul-mjesnim relacijskim simbolima.

[3] Kao alternativni nazivi za logiku prvog reda u literaturi se još koriste *predikatna logika* ili *kvantifikacijska logika*.

Prethodnim primjerima i razmatranjima željeli smo naglasiti da logika sudova ima premalu izražajnu moć i da ne može opisati čak ni neka jednostavna svakodnevna zaključivanja. No, prelaskom na opsežniji alfabet neka dobra svojstva se gube. Jedno takvo svojstvo koje ima logika sudova, ali ne i logika prvog reda, je **odlučivost**. Definiciju pojma odlučivosti moguće je dati tek nakon proučavanja pojma izračunljivosti (npr. rekurzivne funkcije, Turingovi[4] strojevi, $\lambda-$račun, ...; vidi npr. [7] ili [27]). Pokušat ćemo ovdje intuitivno objasniti što to znači da je logika sudova odlučiva, a logika prvog reda nije.

Za svaku formulu logike sudova možemo u konačno mnogo koraka provjeriti je li valjana, tj. je li istinita za svaku interpretaciju. To možemo napraviti pomoću nekog od testova valjanosti kao što su npr. semantičke tablice, rezolucija ili glavni test. To nije moguće napraviti za sve formule logike prvog reda, tj. ne postoji algoritam koji bi primijenjen na proizvoljnu formulu u konačno mnogo koraka davao odgovor je li dana formula valjana.

Sada ćemo pokušati objasniti što znači riječ "prvog" u nazivu "logika prvog reda". U tu svrhu promotrimo sljedeća dva primjera formula.

$$\forall x \exists R \exists f (R(x) \rightarrow f(x) = x) \qquad (1)$$
$$\forall R \exists P \forall g (R(x,y) \rightarrow g(P,R) = y) \qquad (2)$$

U primjeru (1) je dana formula logike drugog reda jer kvantificiramo po relacijama i funkcijama koje se odnose na individualne varijable. U primjeru (2) je formula logike trećeg reda jer kvantificiramo po funkciji $g$ čiji su argumenti funkcije i relacije. Primjer formule logike drugog reda je i aksiom matematičke indukcije:

$$\forall P((P(0) \ \wedge \ \forall x(P(x) \rightarrow P(x+1))) \ \rightarrow \ \forall x P(x)),$$

jer kvantificiramo po svim svojstvima $P$ prirodnih brojeva.

Čak i u logici prvog reda ne možemo izraziti sve osnovne matematičke pojmove kao što su npr. konačan skup ili pak prebrojiv skup (o tome će biti riječi u točki 2.7.3). Iz tog razloga promatraju se jači sistemi od logike prvog reda, kao što su logika drugog reda, slaba logika drugog reda, beskonačne logike, ... (vidi npr. [12]). Logika prvog reda ima istaknuto mjesto među svim tim sistemima. O tome govore Lindströmovi teoremi. Pojmovi i sadržaj tih teorema pripada dijelu matematičke logike koji se naziva *apstraktna teorija modela*. Ovdje ne dajemo sve potrebne definicije za izreku teorema. O Lindströmovim teoremima možete na primjer čitati u [12] ili u D. Ferberuš, Lindströmov prvi teorem, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 1999.

**Lindströmov prvi teorem**

Logika prvog reda je jedinstvena logika zatvorena za veznike $\wedge$ i $\neg$, te kvantifika-

[4] A. Turing, 1912.–1954.

tor ∃, i za koju vrijedi teorem kompaktnosti i Löwenheim-Skolemov[5] teorem.

Važno je još reći da u ovom drugom poglavlju ne proučavamo samo jednu teoriju – logiku prvog reda, već općenito teorije prvog reda.

## 2.2 Jezik teorija prvog reda

U čitavoj ovoj točki govorimo *teorija prvog reda* iako taj pojam nismo definirali (i još ne možemo!). Da bi se zadala teorija prvog reda treba definirati pripadni alfabet i skup aksioma. U ovoj točki definiramo alfabet, odnosno jezik, a u sljedećim točkama ćemo definirati aksiome.

**Definicija 2.1.** **Alfabet** *neke teorije prvog reda je unija skupova* $A_1, \ldots, A_6$ *gdje su redom skupovi* $A_i$ *definirani sa:*

$A_1 = \{x_0, x_1, \ldots\}$, *prebrojiv skup čije elemente nazivamo* **individualne varijable**.

$A_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$, *skup* **logičkih simbola**, *koje redom nazivamo: negacija, konjunkcija, disjunkcija, kondicional, bikondicional, univerzalni i egzistencijalni kvantifikator.*

$A_3 = \{R_k^{n_k} : k \in I\}$, *skup čije elemente nazivamo* **relacijski simboli.** *Skup* $I$ *je neki podskup* $\mathbb{N}$. *Prirodan broj* $n_k$ *se naziva mjesnost relacijskog simbola. Pretpostavljamo da ovaj skup sadrži barem jedan dvomjesni relacijski simbol.*

$A_4 = \{f_k^{m_k} : k \in J\}$, *skup čije elemente nazivamo* **funkcijski simboli.** *Skup* $J$ *je neki podskup* $\mathbb{N}$, *možda i prazan. Prirodan broj* $m_k$ *se naziva mjesnost funkcijskog simbola.*

$A_5 = \{c_k : k \in K\}$, *skup čije elemente nazivamo* **konstantski simboli.** *Skup* $K$ *je neki podskup* $\mathbb{N}$, *možda i prazan.*

$A_6 = \{(\ )\ ,\}$, *skup pomoćnih simbola (lijeva i desna zagrada, te zarez).*

Naveli smo da elemente skupa $A_1$ nazivamo individualne varijable. To znači da će te varijable poprimati vrijednosti nekih individua, odnosno objekata. To mogu biti brojevi, vektori, pravci, riječi nekog alfabeta, ...

Umjesto skupa $A_2$, slično kao u logici sudova, dovoljno je uzeti za skup logičkih simbola npr. $\{\neg, \rightarrow, \forall\}$. Ostali veznici i kvantifikator ∃ tada se mogu uvesti kao pokrate. Tako ćemo i postupiti prilikom dokaza teorema potpunosti.

[5] L. Löwenheim, 1878.–1957.; T. Skolem, 1887.–1963.

Upravo definirani alfabet je prebrojiv. Može se promatrati i neprebrojiv alfabet (to je razuman zahtjev kada proučavamo neku neprebrojivu strukturu).

U definiciji smo naveli da pretpostavljamo da skup $A_3$ sadrži barem jedan dvomjesni relacijski simbol (rezerviran je za relaciju jednakosti). Skupovi funkcijskih i konstantskih simbola mogu biti i prazni. Obično se unija skupova relacijskih, funkcijskih i konstantskih simbola naziva **skup nelogičkih simbola** ili **signatura**. Nadalje ćemo obično skup nelogičkih simbola označavati sa $\sigma$.

Uočite da su za različite teorije prvog reda skupovi nelogičkih simbola upravo ono po čemu se razlikuju pripadni alfabeti. To je razlog da usvajamo sljedeće:

> smatrat ćemo da je definiran alfabet neke teorije prvog reda ako smo zadali skup nelogičkih simbola.

Logika prvog reda je jedna istaknuta teorija prvog reda. Sada definiramo njenu signaturu.

**Definicija 2.2.** *Skup nelogičkih simbola logike prvog reda je unija prebrojivo mnogo relacijskih simbola, prebrojivo mnogo funkcijskih simbola i prebrojivo mnogo konstantskih simbola. Štoviše, smatramo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji prebrojivo mnogo relacijskih i funkcijskih simbola mjesnosti $k$.*

Za Peanovu aritmetiku[6] skup nelogičkih simbola je $\{=, 0, ', +, \cdot, =\}$, gdje je $0$ konstantski simbol, $'$ je jednomjesni funkcijski simbol (interpretira se funkcijom sljedbenika), a $+$ i $\cdot$ su dvomjesni funkcijski simboli čije su standardne interpretacije jasne.

Skup nelogičkih simbola Zermelo-Fraenkelove teorije skupova uz simbol za jednakost sadrži još samo jedan dvomjesni relacijski simbol. Obično se taj simbol označava sa $\in$ .

Prilikom pisanja raznih riječi alfabeta neke teorije prvog reda nećemo se strogo držati samo simbola iz alfabeta. Tako ćemo obično umjesto individualnih varijabli $x_i$ pisati znakove $x,\ y,\ z,\ \ldots$ Umjesto relacijskih simbola pisat ćemo znakove $P,\ Q,\ R,\ \ldots,$ umjesto funkcijskih simbola pisat ćemo $f,\ g,\ h,\ \ldots$ Mjesnost ćemo obično ispuštati ako će se iz samog zapisa moći lako odrediti.

U daljnjem tekstu smatramo da je fiksiran neki skup nelogičkih simbola $\sigma$. To znači da sljedeće pojmove definiramo za proizvoljnu teoriju prvog reda, a ne samo za logiku prvog reda. Prije definicije najznačajnijih riječi alfabeta, tj. formula, definiramo riječi koje se nazivaju termi.

**Definicija 2.3.** *$\sigma-$**term**, odnosno kratko **term**, je riječ definirana sljedećom induktivnom definicijom:*

[6] Peanova aritmetika je jedna teorija prvog reda koju ćemo definirati u točki 2.8

a) *svaka individualna varijabla i svaki konstantski simbol koji pripada* $\sigma$ *su termi;*

b) *ako je* $f$ *neki* $n-$*mjesni funkcijski simbol iz* $\sigma$ *i* $t_1, \ldots, t_n$ $\sigma$*-termi, tada je riječ* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *term;*

c) *riječ je* $\sigma$*-term ako i samo ako je nastala pomoću konačno mnogo primjena pravila a) i b).*

Uočite da će interpretacija svakog terma biti neki objekt skupa u kojem valuiramo individualne varijable. Sada dajemo definiciju formule.

**Definicija 2.4.** *Ako je* $R$ *neki* $n-$*mjesni relacijski simbol iz* $\sigma$*, te su* $t_1, \ldots, t_n$ *termi, tada riječ* $R(t_1, \ldots, t_n)$ *nazivamo* **atomarna formula.**

*Pojam* $\sigma$-**formule**, *odnosno kratko* **formule**, *definiran je sljedećom induktivnom definicijom:*

a) *svaka atomarna formula je formula;*

b) *ako su* $A$ *i* $B$ *formule tada su* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ *i* $(A \leftrightarrow B)$ *također formule;*

c) *ako je* $A$ *formula, a* $x$ *varijabla, tada su riječi* $(\forall x A)$ *i* $(\exists x A)$ *također formule;*

d) *riječ je* $\sigma$*-formula ako i samo ako je nastala primjenom konačno mnogo puta pravila a), b) i c).*

Uočimo da svaka teorija prvog reda sadrži atomarne formule jer smo u definiciji alfabeta zahtijevali da je skup relacijskih simbola neprazan.

U uvjetu c) ne zahtijevamo da formula $A$ sadrži varijablu $x$. Npr. riječ $\exists x(P(y,z) \rightarrow Q(z))$ je formula.

Ovdje ćemo upotrebljavati istu konvenciju za ispuštanje zagrada kao kod logike sudova, tj. prioritet logičkih veznika i kvantifikatora je od najvećeg do najmanjeg dan sljedećom slikom:

$$\forall \quad \exists \quad \neg$$

$$\wedge \quad \vee$$

$$\rightarrow \quad \leftrightarrow$$

U isti redak su stavljeni simboli koji imaju isti prioritet. Radi izbjegavanja zabune (kad npr. u formuli dolaze simboli s istim prioritetom) ponekad ćemo pisati zagrade. Kod formula oblika $\forall xA$ i $\exists xA$ formulu $A$ nazivamo **doseg kvantifikatora** $\forall x$, odnosno $\exists x$.

**Složenost formule** je broj kvantifikatora i logičkih veznika koji se u njoj javljaju. **Potformula** dane formula je podriječ formule koja je i sama formula. **Shema formule** je riječ sagrađena od meta-varijabli za formule ($A,\ B,\ C, \ldots$) pomoću pravila koja vrijede za formule. Uvrštavanjem u shemu formule umjesto meta-varijabli konkretnih formula dobiva se formula koju nazivamo **instanca.** Shema formule je zapravo oznaka za određeni skup formula.[7]

**Definicija 2.5.** *U svakoj atomarnoj formuli svaki nastup varijable je* **slobodan**. *U formulama oblika* $\forall xA$ *i* $\exists xA$ *svaki nastup varijable* $x$ *je* **vezan.** *Ako varijabla* $x$ *ima slobodan (vezan) nastup u formuli* $A$, *i* $B$ *je proizvoljna formula, tada je taj nastup varijable* $x$ *slobodan (odnosno vezan) i u formulama* $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$, $\forall yA$ *i* $\exists yA$, *gdje je* $y$ *varijabla različita od* $x$.

U formuli $P(x,y) \to \forall xR(x)$ imamo tri nastupa varijable $x$. Prvi nastup je slobodan, a sljedeća dva su vezana. Nastup varijable $y$ je slobodan. U formuli $\forall x(P(x,y) \to \forall xR(x))$ svi nastupi varijable $x$ su vezani, a nastup varijable $y$ je slobodan.

Za neku varijablu $x$ kažemo da je **slobodna varijabla** u formuli $A$ ako postoji barem jedan njezin nastup u formuli koji je slobodan. Inače kažemo da je to **vezana varijabla** u formuli. Po dogovoru smatramo da je svaki nastup varijable u proizvoljnom termu slobodan.

Formula koja ne sadrži slobodne varijable naziva se **zatvorena formula** ili **rečenica**.

Formula koja ne sadrži kvantifikatore naziva se **otvorena formula**.

Za formulu $A$ sa $A(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ označavamo da varijabe $x_1,\ \ldots,\ x_n$ mogu doći slobodne u formuli $A$. To ne znači da svaka od varijabli $x_1,\ \ldots,\ x_n$ dolazi slobodna u formuli $A$, niti znači da se u nizu $x_1,\ \ldots,\ x_n$ nalaze sve slobodne varijable formule $A$. Oznaka $A(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ služit će nam da nakon supstitucije neke varijable $x_i$ s termom $t$ pišemo

$$A(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ t/x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n).$$

Sada želimo definirati supstituciju varijable u formuli s danim termom. No, moramo postaviti još jedan uvjet da bi nam supstitucije bile ispravne, tj. da čuvaju istinitost. U vezi toga promotrimo sljedeći primjer.

[7]Prilikom zadavanja formule važno je definirati formule na način da ih možemo "prepoznavati" u skupu svih riječi alfabeta. Malo točnije: važno je da postoji algoritam koji za proizvoljnu riječ izabranog alfabeta može odrediti je li ta riječ formula ili ne. No, takvim pitanjima ne možemo se ovdje baviti, jer treba prvo definirati pojam algoritma, te razviti pripadnu teoriju (vidi npr. [35]).

**Primjer 2.6.** *Neka je* $A(x)$ *formula* $\forall y \exists x R(y,x) \to \exists y R(y,x)$, *a term* $t$ *neka je varijabla* $y$. *Potformula* $\forall y \exists x R(y,x)$ *od* $A(x)$ *se posebno može promatrati kao zapis o funkcionalnosti relacije* $R$. *Promotrimo što dobivamo supstitucijom varijable* $y$ *s termom* $t$. *Nakon supstitucije dobivamo formulu* $A(t/x)$, *tj.* $\forall y \exists x R(y,x) \to \exists y R(y,y)$. *Ova posljednja formula posebno izražava da svaka funkcija ima fiksnu točku, što naravno nije istina. To znači da ne možemo dozvoliti proizvoljne supstitucije terma u formulu. Uočimo da je drugi nastup varijable* $x$ *u početnoj formuli bio slobodan, a varijabla* $y$ *iz terma* $t$ *nakon supstitucije postaje vezana. Točan opis te situacije dan je sljedećom definicijom.*

**Definicija 2.7.** *Kažemo da je* **term** $t$ **slobodan za varijablu** $x$ **u formuli** $A$ *ako niti jedan slobodan nastup varijable* $x$ *ne leži u dosegu kvantifikatora* $\forall y$ *ili* $\exists y$, *gdje je* $y$ *proizvoljna varijabla terma* $t$. *Ako je term* $t$ *slobodan za varijablu* $x$ *u formuli* $A$ *tada pod supstitucijom varijable* $x$ *termom* $t$ *podrazumijevamo zamjenu svakog slobodnog nastupa varijable* $x$ *termom* $t$. *Ako formula ne sadrži slobodnih nastupa varijable* $x$ *smatramo da je supstitucija moguća, ali je nakon supstitucije početna formula nepromijenjena.*

**Primjer 2.8.**

*a) Term* $f(x_1,x_3)$ *je slobodan za varijablu* $x_1$ *u formuli* $\forall x_2 P(x_1,x_2) \to R(x_1)$, *ali nije slobodan za* $x_1$ *u formuli* $\exists x_3 \forall x_2 P(x_1,x_2) \to R(x_1)$.

*b) Svaki term koji ne sadrži varijable, tj. izgrađen je samo iz konstantskih i funkcijskih simbola, slobodan je za svaku varijablu u svakoj formuli.*

*c) Promotrimo na kraju jedan primjer iz matematičke analize. Neka je funkcija* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirana sa* $F(x) = \int_0^1 (x+y)dy$. *Lako je vidjeti da je* $F(x) = x + \frac{1}{2}$. *Ako bismo varijablu* $x$ *zamijenili sa* $y$ *dobili bismo* $\int_0^1 2y\, dy$, *tj.* 1. *Naravno, takvu supstituciju ne bismo nikada napravili, jer "term* $y$ *nije slobodan za varijablu* $x$ *u formuli* $F(x)$."

**Zadaci:**

1. Neka je zadan alfabet $A = \{(,\ )\}$. *Pravilno pridruženje zagrada* je svaka bijekcija $\Pi$ koja svakom nastupu lijeve zagrade u nekoj riječi $a$ alfabeta $A$ pridružuje jedan nastup desne zagrade tako da vrijedi:

   a) svaki nastup lijeve zagrade stoji lijevo u riječi $a$ od njoj pridružene desne zagrade;

b) ako se neki nastup lijeve ili desne zagrade našao u riječi $a$ unutar para zagrada pridružene obzirom na $\Pi$, tada se i njoj pridružena zagrada nalazi unutar tog para.

Dokažite da riječi u alfabetu $A$ dopuštaju najviše jedno pravilno pridruženje zagrada.

2. Jesu li sljedeće riječi termi logike prvog reda: $v_3$, $a$, $B$, $a_2$, $f(x, f(y, x, x), z)$ i $h(x, g(h(x, f(x), z), f(f(y))), x)$?

3. Jesu li sljedeće riječi formule logike prvog reda: $A) \wedge B)$, $P(x) \to \exists x P(y)$, $A \wedge \neg((B \vee \to (C \leftrightarrow \neg(\neg A \vee B))))$ ?

4. Dokažite da termi logike prvog reda dopuštaju točno jedno pravilno pridruženje zagrada.

5. Dokažite da formule logike prvog reda dopuštaju točno jedno pravilno pridruženje zagrada.

6. Jesu li termi $f(v_3)$, $g(v_2,\ v_1)$ i $g(c_1,\ v_2)$ slobodni za varijablu $v_2$ u formuli
$$\exists v_1 \forall v_3 (g(v_1,\ f(v_2)) = f(v_3)) \ ?$$

## 2.3 Interpretacije i modeli

U ovoj točki ćemo definirati semantiku za jezik proizvoljne teorije prvog reda. Interpretacija svakom nelogičkom simbolu pridružuje neki objekt: konstantu, relaciju ili funkciju. Pomoću pojma interpretacije definirat ćemo istinitost formule. To više neće biti jednostavno kao kod logike sudova jer će istinitost formule ovisiti i o valuaciji slobodnih varijabli. Na kraju ćemo definirati pojam ispunjive, oborive i valjane formule.

U čitavoj ovoj točki sa $\sigma$ označavamo proizvoljan, ali fiksiran, skup nelogičkih simbola (za neku teoriju prvog reda).

**Definicija 2.9.** **$\sigma$-struktura**, *odnosno kratko* **struktura**, *je uređeni par* $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$, *gdje je* $M$ *neprazni skup koji nazivamo* **nosač**, *a* $\varphi$ *je preslikavanje sa skupa nelogičkih simbola* $\sigma$ *koje ima sljedeća svojstva:*

*a) svakom relacijskom simbolu* $R_k^{n_k}$ *iz* $\sigma$ *pridružuje se* $n_k$*-mjesna relacija* $\varphi(R_k^{n_k})$ *na* $M$*;*

*b) svakom funkcijskom simbolu* $f_k^{m_k}$ *iz* $\sigma$ *pridružuje se* $m_k$*-mjesna funkcija* $\varphi(f_k^{m_k})$ *sa* $M^{m_k}$ *u* $M$*;*

*c) svakom konstantskom simbolu* $c_k$ *iz* $\sigma$ *pridružuje se neki element* $\varphi(c_k)$ *iz* $M$*.*

Ako je $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ struktura obično ćemo umjesto $M$ koristiti oznaku $|\,\mathfrak{M}\,|$. Zatim, umjesto $\varphi(R)$, $\varphi(f)$ i $\varphi(c)$ ćemo redom koristiti oznake $R^{\mathfrak{M}}$, $f^{\mathfrak{M}}$ i $c^{\mathfrak{M}}$.

Za teoriju $PA$ (Peanovu aritmetiku), čiji je skup nelogičkih simbola $\{0, s, +, \cdot, =\}$, jedna struktura je $(\mathbb{N}, \varphi)$, gdje je $\varphi(0)$ broj nula, $\varphi(+)$ je zbrajanje na skupu $\mathbb{N}$, $\varphi(\cdot)$ je množenje na skupu $\mathbb{N}$, $\varphi(s)$ je funkcija sljedbenika, a binarni relacijski simbol $=$ se interpretira relacijom jednakosti na $\mathbb{N}$. Tu strukturu za teoriju $PA$ označavamo sa $\omega$.

**Kardinalitet strukture** $\mathfrak{M}$ je kardinalni broj skupa $|\,\mathfrak{M}\,|$, pa ćemo tako govoriti o konačnim i beskonačnim, odnosno o prebrojivim i neprebrojivim strukturama.

Za danu strukturu $\mathfrak{M}$ svaku funkciju sa skupa individualnih varijabli u nosač strukture nazivamo **valuacija.**

**Lema 2.10.** *Neka je $\mathfrak{M}$ neka $\sigma$-struktura i $v$ neka valuacija. Postoji jedinstveno proširenje $v'$ od $v$ koje je definirano na skupu svih terma, koji određuje dani skup nelogičkih simbola $\sigma$, te $v'$ ima sljedeća svojstva:*

$$\begin{aligned} v'(x_k) &= v(x_k), \\ v'(c) &= c^{\mathfrak{M}}, \\ v'(f(t_1, \ldots, t_n)) &= f^{\mathfrak{M}}(v'(t_1), \ldots, v'(t_n)), \end{aligned}$$

*za sve varijable $x_k$, sve konstantske simbole $c$ i sve funkcijske simbole $f$ iz $\sigma$, te za sve $\sigma$-terme $t_i$.*

*Dokaz.* Zadanim uvjetima očito je definirano proširenje od $v$. Dokažimo da je to proširenje jedinstveno. Pretpostavimo da su $v'$ i $v''$ proširenja od $v$ koja imaju tražena svojstva. Indukcijom po duljini terma $t$ (tj. po broju simbola iz kojih je izgrađen term) dokazujemo da vrijedi $v'(t) = v''(t)$. Ako je $t$ term duljine jedan tada je on individualna varijabla ili konstanski simbol. No, iz zadanih uvjeta imamo $v'(x_k) = v(x_k) = v''(x_k)$, te $v'(c) = c^{\mathfrak{M}} = v''(c_k)$. Pretpostavimo sada da se funkcije $v'$ i $v''$ poklapaju na svim termima čija je duljina strogo manja od $m$ ($m > 1$). Neka je $t$ term čija je duljina $m$. Tada je $t$ oblika $f(t_1, \ldots, t_n)$. Primijetimo da je duljina svakog terma $t_i$ strogo manja od $m$, pa po pretpostavci indukcije vrijedi $v'(t_i) = v''(t_i)$, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada imamo $v'(t) = f^{\mathfrak{M}}(v'(t_1), \ldots, v'(t_n)) = f^{\mathfrak{M}}(v''(t_1), \ldots, v''(t_n)) = v''(t)$. □

U daljnjem tekstu smatramo da je svaka valuacija definirana na skupu svih terma, i to na način kao što je navedeno u iskazu prethodne leme. Ako je $\mathfrak{M}$ strukura, $v$ valuacija na $\mathfrak{M}$ i $t$ term, tada ćemo obično umjesto $v(t)$ pisati $t^{\mathfrak{M}}[v]$. Odnosno, ako je sa $t(x_1, \ldots, x_n)$ označen term čiji je skup varijabli podskup od $\{x_1, \ldots, x_n\}$, te su $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$, tada sa $t^{\mathfrak{M}}[a_1, \ldots, v_n]$ označavamo valuaciju terma pri čemu vrijedi $v(x_i) = a_i$, za sve $i = 1, \ldots, n$.

**Definicija 2.11.** *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije $\sigma$-strukture. Funkciju $h :| \mathfrak{M} | \to | \mathfrak{N} |$ nazivamo* **homomorfizam** *ako redom vrijedi:*

*a) za sve relacijske simbole $R \in \sigma$ i sve $a_1, \ldots, a_n$ iz $| \mathfrak{M} |$ vrijedi da*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{M}} \quad \text{povlači} \quad (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{N}};$$

*b) za sve funkcijske simbole $f \in \sigma$ i sve $a_1, \ldots, a_n$ iz $| \mathfrak{M} |$ vrijedi*

$$h(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{N}}(h(a_1), \ldots, h(a_n));$$

*c) za sve konstantske simbole $c \in \sigma$ vrijedi*

$$h(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}.$$

Indukcijom po duljini terma lako je dokazati da vrijedi sljedeća lema.

**Lema 2.12.** *Neka je $h$ homomorfizam struktura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$. Tada za sve terme $t(x_1, \ldots, x_n)$ i sve $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi*

$$h(t^{\mathfrak{M}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathfrak{N}}[h(a_1), \ldots, h(a_n)].$$

*Posebno, ako je $t$ zatvoreni term tada vrijedi $h(t^{\mathfrak{M}}) = t^{\mathfrak{N}}$.*

Sada nam je cilj definirati istinitost formule. No, prije te definicije moramo definirati pojam interprtacije.

**Definicija 2.13.** *Svaki uređeni par neke $\sigma$-strukture $\mathfrak{M}$ i proizvoljne valuacije $v$ na $M$ nazivamo* **$\sigma$-interpretacija***, ili kratko* **interpretacija***.*

Uočite da je sa zadavanjem interpretacije određena "vrijednost" svakog simbola u proizvoljnoj formuli, pa sada možemo definirati istinitost formule u odnosu na interpretaciju.

Za danu valuaciju $v$ i varijablu $x$ sa $v_x$ označavamo svaku valuaciju koja se podudara sa $v$ na svim varijablama osim možda na varijabli $x$.

**Definicija 2.14.** *Neka je $(\mathfrak{M}, v)$ neka $\sigma$-interpretacija.* **Istinitost $\sigma$–formule** *$F$ za danu interpretaciju, u oznaci $\mathfrak{M} \models_v F$, definiramo induktivno po složenosti formule $F$ ovako:*

*a) ako je $F$ atomarna formula, tj. $F$ je oblika $R(t_1, \ldots, t_n)$, tada definiramo:*

$\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $(t_1^{\mathfrak{M}}[v], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}[v]) \in R^{\mathfrak{M}}$;

*b) ako je $F$ formula oblika $\neg G$ tada definiramo:*

$\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako ne vrijedi* $\mathfrak{M} \models_v G$;

*c) ako je $F$ formula oblika $A \wedge B$ tada definiramo:*

$\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v A$ *i* $\mathfrak{M} \models_v B$;

*d) ako je $F$ formula oblika $A \vee B$ tada definiramo:*

$\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v B$;

*e) ako je $F$ formula oblika $A \to B$ tada definiramo:*

$\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako ne vrijedi* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ili vrijedi* $\mathfrak{M} \models_v B$;

*f) ako je $F$ formula oblika $A \leftrightarrow B$ tada definiramo:*

$\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako vrijedi da je* $\mathfrak{M} \models_v A$ *ekvivalentno sa* $\mathfrak{M} \models_v B$;

*g) ako je $F$ formula oblika $\forall x G$ tada definiramo:*

$\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_{v_x} G$ *za sve valuacije* $v_x$;

*h) ako je $F$ formula oblika $\exists x G$ tada definiramo:*

$\mathfrak{M} \models_v F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \models_{v_x} G$ *za neku valuaciju* $v_x$.

U daljnjem tekstu umjesto "ne vrijedi $\mathfrak{M} \models_v F$" pisat ćemo kratko $\mathfrak{M} \not\models_v F$, i govorit ćemo da je formula $F$ **neistinita** za danu interpretaciju.

Ako je $F(x_1, \ldots, x_n)$ formula, te $v$ valuacija na $\mathfrak{M}$, tada umjesto $\mathfrak{M} \models_v F$ koristimo i oznaku $\mathfrak{M} \models F[a_1, \ldots, a_n]$, gdje je $a_i = v(x_i)$, za sve $i = 1, \ldots, n$.

Uočimo da definicija istinitosti formule oblika $\forall x F(x)$ ne može biti: "za sve $m \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi $\mathfrak{M} \models F(m)$". Problem je u tome da elementi nosača $\mathfrak{M}$ nisu nužno elementi alfabeta, tj. riječ $F(m)$ općenito nije formula.

Neka je $\Gamma$ skup formula, te $\mathfrak{M}$ struktura za $\Gamma$ i $v$ valuacija na $M$. Sa $\mathfrak{M} \models_v \Gamma$ kratko označavamo da za sve $F \in \Gamma$ vrijedi $\mathfrak{M} \models_v F$.

**Definicija 2.15.** *Kažemo da je formula $F$* **ispunjiva** *(***oboriva***) ako postoji interpretacija $(\mathfrak{M}, v)$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \models_v F$ $(\mathfrak{M} \not\models_v F)$.*

*Kažemo da je struktura $\mathfrak{M}$* **model** *za formulu $F$ ako je to struktura za $F$ i vrijedi $\mathfrak{M} \models_v F$ za sve valuacije $v$. Tu činjenicu označavamo sa $\mathfrak{M} \models F$.*

*Kažemo da je formula* **valjana** *ako je istinita za svaku interpretaciju.*

**Primjer 2.16.** *Sada ćemo na konkretnim formulama ilustrirati pojmove definirane u prethodnoj definiciji. Atomarna formula $R(x)$ ($R$ je jednomjesni relacijski simbol) je ispunjiva, jer je istinita npr. za interpretaciju koju čini struktura $\mathfrak{M} = (\mathsf{N}, \varphi)$ i valucija $v(x) = 2$, gdje je $R^{\mathfrak{M}}$ jednomjesna relacija na $\mathsf{N}$ definirana sa: $n \in R^{\mathfrak{M}}$ ako i samo ako je $n$ paran. Očito vrijedi $\mathfrak{M} \models_v R(x)$. No, ta ista formula je i oboriva. Formula je neistinita npr. za tu istu strukturu $\mathfrak{M}$ i valuaciju $w(x) = 3$. To znači da struktura $\mathfrak{M} = (\mathsf{N}, \varphi)$ nije model za formulu $R(x)$, pa dana formula nije valjana.*

*Lako je provjeriti da je formula $\neg \forall x Q(x, z) \to \exists x(\neg Q(x, z))$ valjana. Dakle, istinita je za svaku interpretaciju u kojoj je interpretiran dvomjesni relacijski simbol $Q$.*

*Formula* $\neg(\exists x R(x,x,y) \to \exists x R(x,x,y))$ *nije ispunjiva. Uočite da to slijedi još iz "sudovnog nivoa", tj. dana formula je "slična" antitautologiji* $\neg(P_1 \to P_1)$.

Indukcijom po složenosti formule lako je dokazati sljedeću propoziciju koja jednostavno govori da istinitost formule ovisi samo o varijablama koje imaju slobodan nastup.

**Propozicija 2.17.** *Neka je* $\mathfrak{M}$ *neka* $\sigma$*–struktura i* $F$ *neka* $\sigma$*–formula. Neka su* $x_1, \ldots, x_n$ *sve varijable koje imaju slobodan nastup u formuli* $F$, *te neka su* $v$ *i* $w$ *valuacije za koje vrijedi*

$$v\,|_{\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}} = w\,|_{\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}}\ .$$

*Tada vrijedi*

$$\mathfrak{M} \models_v F \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad \mathfrak{M} \models_w F.$$

Ako su $x_1, \ldots, x_n$ sve varijable koje imaju slobodni nastup u formuli $F$ tada je **zatvorenje** od $F$ formula $\forall x_1 \ldots \forall x_n F$. Zatvorenje formule $F$ kratko označavamo sa $\overline{F}$.

U sljedećoj propoziciji ističemo važno svojstvo zatvorenja formule. Tu činjenicu ćemo često koristiti (neki put čak i bez posebnog isticanja). Tvrdnja propozicije odmah slijedi iz definicije istinitosti.

**Propozicija 2.18.** *Neka je* $\mathfrak{M}$ *neka* $\sigma$*–struktura i* $F$ *neka* $\sigma$*–formula. Tada vrijedi*

$$\mathfrak{M} \models F \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad \mathfrak{M} \models \overline{F}.$$

U sljedećoj propoziciji ističemo vezu između istinitosti formula i homomorfizma. Tvrdnju propozicije je lako dokazati indukcijom po složenosti formule.

**Propozicija 2.19.** *Neka je* $h$ *homomorfizam struktura* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$. *Tada za sve formule* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *bez kvantifikatora i sve* $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$ *vrijedi:*

$$\textit{ako}\ \ \mathfrak{M} \models F[a_1, \ldots, a_n]\ \ \textit{tada}\ \ \mathfrak{N} \models F[h(a_1), \ldots, h(a_n)].$$

Napominjemo da tvrdnja prethodne propozicije općenito ne vrijedi za formule koje sadrže kvantifikatore.

Pojmovi podstrukture i proširenja strukture trebat će nam u sljedećim točkama pa ih ovdje definiramo.

**Definicija 2.20.** *Neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$ $\sigma$*–strukture. Kažemo da je* $\mathfrak{M}$ **podstruktura** *od* $\mathfrak{N}$, *odnosno da je* $\mathfrak{N}$ **proširenje strukture** $\mathfrak{M}$, *ako vrijedi sljedeće:*

*a)* $|\mathfrak{M}| \subseteq |\mathfrak{N}|$;

*b) za sve relacijske simbole* $R \in \sigma$ *vrijedi:*

$$R^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{N}} \mid_{|\mathfrak{M}|^n};$$

*c) za sve funkcijske simbole* $f \in \sigma$ *vrijedi:*

$$f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{N}} \mid_{|\mathfrak{M}|^n};$$

*d) za sve konstantske simbole* $c \in \sigma$ *vrijedi:*

$$c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{N}}.$$

*Ako je* $\mathfrak{M}$ *podstruktura od* $\mathfrak{N}$ *tada to označavamo sa* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

Sljedeća propozicija izriče osnovna svojstva podstruktura.

**Propozicija 2.21.** *Neka je* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, *i* $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$ *proizvoljni. Tada za sve terme* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *i sve formule* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *koje ne sadrže kvantifikatore vrijedi:*

*a)* $t^{\mathfrak{M}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathfrak{N}}[a_1, \ldots, a_n]$;

*b)* $\mathfrak{M} \models F[a_1, \ldots, a_n]$ *ako i samo ako* $\mathfrak{N} \models F[a_1, \ldots, a_n]$.

*Dokaz.* Pošto je inkluzija, tj. preslikavanje $h : |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{N}|$ definirano sa $h(m) = m$, homomorfizam tada iz leme 2.12. slijedi tvrdnja a). Tvrdnja b) se lako dokaže indukcijom po složenosti formule. □

Tvrdnja b) iz prethodne propozicije općenito ne vrijedi za formule koje sadrže kvantifikatore (odredite neki primjer).

**Definicija 2.22.** *Kažemo da su* $\sigma$*–strukture* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$ **elementarno ekvivalentne** *ako za sve zatvorene* $\sigma$*–formule* $F$ *vrijedi:* $\mathfrak{M} \models F$ *ako i samo ako* $\mathfrak{N} \models F$. *To označavamo sa* $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

Lako je provjeriti da je $\equiv$ relacija ekvivalencije.

**Definicija 2.23.** *Neka je* $h$ *homomorfizam struktura* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$. *Ako je funkcija* $h$ *bijekcija, te je funkcija* $h^{-1}$ *također homomorfizam, tada kažemo da je* $h$ **izomorfizam** *struktura, te govorimo da su strukture* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$ **izomorfne**. *Koristimo oznaku* $h : \mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, *odnosno* $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

Izomorfizam struktura povlači njihovu elementarnu ekvivalentnost, tj. istinitost rečenica je sačuvana na izomorfnim strukturama. Pošto se dokaz te činjenice provodi opet indukcijom po složenosti formule ovdje ga ispuštamo.

**Propozicija 2.24.** *Ako vrijedi $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ tada vrijedi i $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.*

Napominjemo da obrat prethodne propozicije općenito ne vrijedi. Za to vidite zadatak 9 iz točke 2.8

U sljedećim točkama ćemo definirati račun logike prvog reda. Tada ćemo jedan od glavnih ciljeva biti dokazati da je svaka valjana formula teorem danog računa. U tom dokazu ćemo koristiti teorem potpunosti računa sudova. U tu svrhu definiramo pojam sudovno valjane formule.

**Definicija 2.25.** *Neka je $F(P_1, \ldots, P_n)$ valjana formula logike sudova. Zamijenimo svaku propozicionalnu varijablu $P_i$ s proizvoljnom formulom logike prvog reda (naravno, istu varijablu mijenjamo istom formulom). Lako je dokazati (dokažite!) da je dobivena formula valjana.*

*Reći ćemo da je valjana formula logike prvog reda* **sudovno valjana** *ako je dobivena iz neke valjane formule logike sudova na gore opisani način.*

**Primjer 2.26.** *Formula $\forall x P(x,y) \to \forall x P(x,y)$ je sudovno valjana jer supstitucijom propozicionalne varijable $P_1$ u valjanu formulu $P_1 \to P_1$ s formulom $\forall x P(x,y)$ dobivamo početnu formulu.*

*Formula $(\exists x \forall y Q(x,y) \to \forall z R(z)) \leftrightarrow (\neg \exists x \forall y Q(x,y) \vee \forall z R(z))$ je također sudovno valjana. Supstitucijom varijable $P_1$ s formulom $\exists x \forall y Q(x,y)$, te varijable $P_2$ s formulom $\forall z R(z)$, u valjanu formulu $(P_1 \to P_2) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_2)$ dobivamo početnu formulu.*

*Sljedeće formule su valjane, ali nisu sudovno valjane.*

$\forall x \forall y P(x,y) \to \exists x \exists y P(x,y)$;
$\forall x A(x) \to A(t)$, *gdje je term $t$ slobodan za varijablu $x$ u formuli $A(x)$;*
$\forall x (A \to B) \to (A \to \forall x B)$, *gdje $A$ ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$.*

Na kraju ove točke definiramo relaciju logičke posljedice i logički ekvivalentne formule.

**Definicija 2.27.** *Neka je $F$ $\sigma$–formula i $\Gamma$ skup $\sigma$–formula. Kažemo da formula $F$* **logički slijedi** *iz skupa formula $\Gamma$ ako za svaku $\sigma$-strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi da $\mathfrak{M} \models \Gamma$ povlači $\mathfrak{M} \models F$. To kratko označavamo sa $\Gamma \models F$. Relaciju $\models$ nazivamo* **relacija logičke posljedice**. *Ako je skup $\Gamma$ jednočlan, tj. $\Gamma = \{A\}$, tada umjesto $\{A\} \models B$ pišemo i $A \Rightarrow B$.*

*Kažemo da su $\sigma$–formule $F$ i $G$* **logički ekvivalentne** *ako vrijedi $F \Rightarrow G$ i $F \Rightarrow G$. Tu činjenicu označavamo sa $F \Leftrightarrow G$.*

Sada navodimo teorem o zamjeni koji ćemo kasnije često koristiti, i to najčešće bez posebnog isticanja. Ne dajemo dokaz tog teorema pošto je analogan dokazu teorema o zamjeni u logici sudova (vidi zadatak 5 iz točke 1.3 u prvom poglavlju).

**Teorem 2.28.** *(teorem o zamjeni)*
*Neka je sa $F(A)$ označena formula u kojoj je $A$ možda potformula. Zatim, neka je $B$ neka formula koja ima svojstvo $A \Leftrightarrow B$. Označimo sa $F(B)$ formulu dobivenu zamjenom u $F(A)$ svakog nastupa potformule $A$ sa $B$. Tada vrijedi $F(A) \Leftrightarrow F(B)$.*

**Zadaci:**

1. Dokažite lemu 2.12.

2. Dokažite da je formula $A(x_1, \ldots, x_n)$ ispunjiva ako i samo ako je ispunjiva zatvorena formula $\exists x_1 \ldots \exists x_n A(x_1, \ldots, x_n)$.

3. Dokažite da je valjana svaka instanca sljedećih shema formula:

   a) $A \to (B \to A)$;

   b) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

   c) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$;

   d) $\forall x A(x) \to A(t)$, gdje je term $t$ slobodan za varijablu $x$ u formuli $A$;

   e) $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$, ako formula $A$ ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$.

4. Neka je $A(u, x, y)$ formula logike prvog reda koja ne sadrži drugih slobodnih varijabli osim $u, x$ i $y$. Zatim, neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol koji se ne pojavljuje u formuli $A(u, x, y)$. Dokažite da je formula $F \equiv \exists u \forall x \exists y A(u, x, y)$ valjana ako i samo ako je valjana formula $G \equiv \exists u(\forall x(\exists y A(u, x, y) \to R(u, x)) \to \forall x R(u, x))$.
   Rješenje: Dokazujemo da iz valjanosti formule $F$ slijedi valjanost formule $G$. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna struktura za formulu $G$. Pošto je očito $\mathfrak{M}$ struktura i za formulu $F$, i po pretpostavci je formula $F$ valjana, tada imamo $\mathfrak{M} \models F$. Po definiciji istinitosti formule slijedi da postoji $m_0 \in M$ tako da vrijedi

   $$\mathfrak{M} \models \forall x \exists y A(u, x, y)[m_0] \qquad (*)$$

Pretpostavimo da $\mathfrak{M} \not\models G$. Tada posebno:

$$\begin{array}{ll} (1) & \mathfrak{M} \models \forall x(\exists y A(u,x,y) \to R(u,x))[m_0] \\ (2) & \mathfrak{M} \not\models \forall x R(u,x)[m_0]. \end{array}$$

Iz (2) slijedi da postoji $m_1 \in M$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \not\models_w R(u,x)[m_0, m_1]$. Iz (1) slijedi $\mathfrak{M} \models (\exists y A(u,x,y) \to R(u,x))[m_0, m_1]$. Iz prethodnih dviju činjenica slijedi $\mathfrak{M} \not\models \exists y A(u,x,y)[m_0, m_1]$. No, to je kontradikcija sa $(*)$.

Dokažimo sada obrat, tj. da iz valjanosti formule $G$ slijedi i valjanost formule $F$. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna struktura za formulu $F$. Pošto se relacijski simbol $R$ po pretpostavci zadatka ne pojavljuje u formuli $A(u,x,y)$ tada možemo strukturu $\mathfrak{M}$ dopuniti do strukture $\mathfrak{N}$ za formulu $G$. U tu svrhu definirajmo $R^{\mathfrak{N}}$ kao dvomjesnu relaciju na $\mathfrak{M}$ za koju vrijedi:

$$\mathfrak{N} \models \forall x \forall u (R(u,x) \leftrightarrow \exists y A(u,x,y)) \qquad (**)$$

Pošto je po pretpostavci formula $G$ valjana tada posebno imamo $\mathfrak{N} \models G$. Tada postoji $m_0 \in M$ tako da vrijedi

$$\mathfrak{N} \models (\forall x(\exists y A(u,x,y) \to R(u,x)) \to \forall x R(u,x))[m_0] \qquad (***)$$

Iz $(**)$ slijedi $\mathfrak{N} \models (\exists y A(u,x,y) \to R(u,x))[m_0]$. Sada iz $(***)$ imamo $\mathfrak{N} \models \forall x R(u,x)[m_0]$, tj. $\mathfrak{N} \models \forall x \exists y A(u,x,y)[m_0]$. Tada očito vrijedi $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y A(u,x,y)[m_0]$, a onda po definiciji istinitosti formule imamo $\mathfrak{M} \models \exists u \forall x \exists y A(u,x,y)$.

5. Za pravilo izvoda

$$\frac{A_1 \ \dots \ A_n}{B}$$

kažemo da **čuva istinitost** ako vrijedi

$$\{A_1, \dots, A_n\} \models B.$$

Dokažite da sljedeća pravila izvoda čuvaju istinitost:

a) modus ponens

$$\frac{A \qquad A \to B}{B};$$

b) generalizacija

$$\frac{A}{\forall x A};$$

c) $\forall$-introdukcija

$$\frac{A \to B}{A \to \forall x B}$$

gdje formula $A$ ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$;

d) $\exists$-introdukcija

$$\frac{A \to B}{\exists x A \to B}$$

gdje formula $B$ ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$;

e) $\forall$-eliminacija

$$\frac{A \to \forall x B}{A \to B};$$

f) $\exists$-eliminacija

$$\frac{\exists x A \to B}{A \to B}.$$

6. Dokažite propoziciju 2.17.

7. Dokažite propoziciju 2.18.

8. Dokažite propoziciju 2.24.
Rješenje: Ilustrirat ćemo dokaz činjenice da $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_m)$ povlači $\mathfrak{N} \models R(t_1, \ldots, t_m)$, pri čemu je $R$ relacijski simbol, a $t_i$ su termi. Označimo sa $h$ neki izomorfizam danih struktura. Zatim neka su $b_1, \ldots, b_n \in |\mathfrak{N}|$ proizvoljni. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ sa $a_i$ označimo $h^{-1}(b_i)$. Iz pretpostavke $\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_m)$ posebno slijedi

$$\mathfrak{M} \models R(t_1, \ldots, t_m)[a_1, \ldots, a_n].$$

Iz definicije istinitosti formule tada slijedi

$$(t_1^{\mathfrak{M}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_m^{\mathfrak{M}}[a_1, \ldots, a_n]) \in R^{\mathfrak{M}}.$$

Iz leme 2.12. znamo da vrijedi

$$h(t_i^{\mathfrak{M}}[a_1, \ldots, a_n]) = t_i^{\mathfrak{N}}[b_1, \ldots, b_n].$$

Tada iz definicije izomorfizma slijedi

$$(t_1^{\mathfrak{N}}[b_1, \ldots, b_n], \ldots, t_m^{\mathfrak{N}}[b_1, \ldots, b_n]) \in R^{\mathfrak{N}},$$

a to je upravo ono što smo trebali dokazati.

9. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ $\sigma$–strukture u kojima je relacijski simbol $=$ interpretiran s relacijom jednakosti. Neka je $\mathfrak{M}$ konačna struktura, te neka vrijedi $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Dokažite da tada vrijedi $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.
Uputa: Neka je $|\mathfrak{M}| = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Definiramo rečenicu

$$F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \Big( ( \bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j ) \ \wedge \ \forall y ( \bigvee_{1 \le i \le n} x_i = y ) \Big).$$

Očito vrijedi $\mathfrak{M} \models F_n$. Iz pretpostavke $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ tada slijedi $\mathfrak{N} \models F_n$, tj. $|\mathfrak{N}| = \{b_1, \dots, b_n\}$.

Neka je $c$ novi konstantski simbol. Ako je $\mathfrak{A}$ neka $\sigma$–struktura i $a \in |\mathfrak{A}|$ tada sa $(\mathfrak{A}, a)$ označavamo $\sigma \cup \{c\}$–strukturu kod koje je $c^{\mathfrak{M}} = a$.

Dokažite da za svaki $a \in |\mathfrak{M}|$ postoji $b \in |\mathfrak{N}|$ tako da vrijedi $(\mathfrak{M}, a) \equiv (\mathfrak{N}, b)$.

Primjenom $n$-puta prethodno navedene tvrdnje dobivamo da postoji bijekcija $h : \{a_1, \dots, a_n\} \to \{b_1, \dots, b_n\}$ tako da vrijedi

$$(\mathfrak{M}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{N}, h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

Dokažite da je $h$ izomorfizam.

10. Za proizvoljnu $\sigma$–strukturu $\mathfrak{M}$ definiramo skup rečenica sa:

$$Th(\mathfrak{M}) = \{F : F \ \text{ je rečenica i } \ \mathfrak{M} \models M\}.$$

Skup rečenica nazivamo teorija strukture $\mathfrak{M}$. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ $\sigma$–strukture za koje vrijedi $Th(\mathfrak{M}) \subseteq Th(\mathfrak{N})$. Dokažite da je tada $Th(\mathfrak{M}) = Th(\mathfrak{N})$, tj. vrijedi $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

11. Neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da je svaka konačna $\{R\}$-struktura model za formulu

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R(x_1, x_1) \wedge (R(x_1, x_3) \to (R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3)))) \to$$

$$\exists y \forall z R(y, z),$$

te da formula nije valjana.
Rješenje: Označimo danu formulu sa $G$. Dokažimo prvo da je svaka konačna $\{R\}$-struktura model za formulu $G$. Neka je $\mathfrak{M}$ struktura za formulu $G$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \not\models G$. Pošto je $G$ zatvorena formula tada $\mathfrak{M} \models \neg G$, tj.

$$\mathfrak{M} \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R(x_1, x_1) \wedge (R(x_1, x_3) \to (R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3)))) \wedge$$

$$\forall y \exists z (\neg R(y, z)).$$

(Tu koristimo pravila prijelaza za kvantifikatore. Npr. koristimo činjenicu $\neg(\exists y \forall z R(y,z)) \Leftrightarrow \forall y \exists z (\neg R(y,z))$. U sljedećoj točki ćemo detaljno razmatrati pravila prijelaza. Naravno, tu koristimo i teorem zamjene.) Iz toga slijedi da redom vrijedi:

a) $(m,m) \in R^{\mathfrak{M}}$, za sve $m \in |\mathfrak{M}|$;
b) ako su $m_1, m_3 \in |\mathfrak{M}|$ takvi da je $(m_1, m_3) \in R^{\mathfrak{M}}$ tada za proizvoljni $m_2 \in R^{\mathfrak{M}}$ vrijedi $(m_1, m_2) \in R^{\mathfrak{M}}$ ili $(m_2, m_3) \in R^{\mathfrak{M}}$;
c) za svaki $m \in |\mathfrak{M}|$ postoji barem jedan $h(m) \in |\mathfrak{M}|$ tako da vrijedi $(m, f(m)) \notin R^{\mathfrak{M}}$.

Neka je $m \in |\mathfrak{M}|$ proizvoljan, ali fiksiran. Induktivno definiramo niz $(m_n)$ u skupu $|\mathfrak{M}|$ ovako:

$$\begin{aligned} m_0 &= m \\ m_{n+1} &= h(m_n). \end{aligned}$$

Tvrdimo da za sve $i \neq j$ vrijedi $m_i \neq m_j$. (Uočite da iz toga slijedi da je nosač $|\mathfrak{M}|$ beskonačan, pa smo time dokazali da je svaka konačna $\{R\}$-struktura model za danu formulu).

U tu svrhu primijetimo da iz uvjeta c) slijedi $(m_{j-1}, m_j) \notin R^{\mathfrak{M}}$ za sve $j > 0$. Zatim, indukcijom po $k$ dokažite da vrijedi $(m_k, m_0) \in R^{\mathfrak{M}}$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Neka su $i, j \in \mathbb{N}$ različiti, te neka je $i < j$. Tada iz prethodne činjenice (dokazane indukcijom) slijedi $(m_{j-1}, m_i) \in R^{\mathfrak{M}}$. Sumirajmo:

$$(m_{j-1}, m_j) \notin R^{\mathfrak{M}} \qquad \text{i} \qquad (m_{j-1}, m_i) \in R^{\mathfrak{M}}.$$

Iz toga direktno slijedi $m_i \neq m_j$.

Preostalo je definirati neku beskonačnu $\{R\}$-strukturu koja nije model za $G$. Neka je $\mathfrak{M}$ struktura s nosačem $\mathbb{Q}$ a $R^{\mathfrak{M}}$ je relacija uređaja. Lako je provjeriti da vrijedi $\mathfrak{M} \not\models G$.

12. Neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da je svaka $\{R\}$-struktura, koja ne sadrži više od tri elementa, model za formulu

$$\exists x \forall y (R(x,y) \to (\neg R(y,x) \to (R(x,x) \leftrightarrow R(y,y)))).$$

Rješenje: Označimo danu formulu sa $F$. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljna struktura za formulu $F$. Dokazat ćemo da iz $\mathfrak{M} \not\models F$ slijedi da nosač $|\mathfrak{M}|$ ima barem četiri elementa.

Pošto je $F$ zatvorena formula tada iz pretpostavke $\mathfrak{M} \not\models F$ slijedi $\mathfrak{M} \models \neg F$, tj.

$$\mathfrak{M} \models \forall x \exists y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg(R(x,x) \leftrightarrow R(y,y))).$$

Iz toga zaključujemo da za svaki $m \in |\mathfrak{M}|$ postoji neki element $h(m) \in |\mathfrak{M}|$ (barem jedan takav; izaberemo jedan) tako da vrijedi:

a) $(m, h(m)) \in R^{\mathfrak{M}}$;
b) $(h(m), m) \notin R^{\mathfrak{M}}$;
c) $(m,m) \in R^{\mathfrak{M}}$ ako i samo ako $(h(m), h(m)) \notin R^{\mathfrak{M}}$.

Neka je $m_0 \in |\mathfrak{M}|$ proizvoljan, ali fiksiran. Označimo $m_1 = h(m_0)$, $m_2 = h(m_1)$ i $m_3 = h(m_2)$. Time smo dobili podskup $\{m_0, m_1, m_2, m_3\}$ od $|\mathfrak{M}|$. Da bismo dokazali da skup $|\mathfrak{M}|$ sadrži više od tri elementa preostalo je dokazati da je $m_i \neq m_j$ za sve $i \neq j$. Iz tvrdnje c) slijedi da je $m_0 \neq m_1$, $m_1 \neq m_2$ i $m_2 \neq m_3$. Iz uvjeta a) i b) slijedi $m_0 \neq m_2$ i $m_1 \neq m_3$. Lako je vidjeti da $m_0 \neq m_3$.

13. Neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da je svaka konačna $\{R\}$-struktura model za formulu

$$\exists x \forall y \exists z ((R(y,z) \to R(x,z)) \to (R(x,x) \to R(y,x))),$$

te da formula nije valjana.
Rješenje: Označimo danu formulu sa $F$. Neka je $\mathfrak{M}$ struktura za $F$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \not\models F$. Pošto je $F$ zatvorena formula tada vrijedi $\mathfrak{M} \models \neg F$. Dakle,

$$\mathfrak{M} \models \forall x \exists y \forall z ((R(y,z) \to R(x,z)) \wedge R(x,x) \wedge \neg R(y,x)).$$

To znači da za svaki $m \in |\mathfrak{M}|$ postoji neki $h(m) \in |\mathfrak{M}$ tako da vrijedi:

a) ako je $m' \in |\mathfrak{M}|$ takav da $(h(m), m') \in R^{\mathfrak{M}}$ tada vrijedi i $(m, m') \in R^{\mathfrak{M}}$;
b) $(m,m) \in R^{\mathfrak{M}}$;
c) $(h(m), m) \notin R^{\mathfrak{M}}$.

Neka je $m_0 \in M$ proizvoljan, ali fiksiran. Definiramo niz u $|\mathfrak{M}|$ sa $m_{n+1} = h(m_n)$. Dokažite da je $m_i \neq m_j$ za sve $i \neq j$.

Definirajmo na kraju neku beskonačnu strukturu koja nije model za $F$. Neka je $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$, a $R^{\mathfrak{M}}$ neka je relacija uređaja na skupu $\mathbb{N}$. Očito za strukturu $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M} \not\models F$.

14. Neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da postoji beskonačan model za formulu

$$\forall x \forall y \forall z \exists u [\ R(x,x) \land (\ \neg R(x,y) \to (\ \neg R(y,z) \to \neg R(x,z)\ )) \land \neg R(x,u)\ ].$$

Zatim dokažite da ne postoji konačan model za tu formulu.

15. Neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da postoji beskonačan model za formulu

$$\forall x \exists y R(x,y) \land \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \land \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \to$$
$$(R(y,z) \to R(x,z))).$$

Zatim dokažite da ne postoji konačan model za nju.

16. Neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol, te neka je formula $F$ zadana sa:

$$\forall x \forall y \forall z \Big( R(x,y) \to (R(y,z) \to R(x,z) \Big) \ \land \ \forall x (\neg R(x,x)) \ \land \ \forall x \exists y R(x,y).$$

Dokažite da niti jedna konačna struktura nije model za danu formulu, te da je formula ispunjiva.

17. Neka su $R_1, \ldots, R_n$ jednomjesni relacijski simboli, te neka je $\sigma = \{R_1, \ldots, R_n\}$. Dokažite da je $\sigma$–formula $F$ ispunjiva ako i samo ako je $F$ istinita za neku interpretaciju koja ne sadrži više od $2^n$ elemenata.
Uputa: Neka je $\mathfrak{M}$ struktura za $F$. Na $|\mathfrak{M}|$ definirajmo binarnu relaciju $\sim$ ovako:

$a_1 \sim a_2$ ako i samo ako

$$a_1 \in R_i^{\mathfrak{M}} \text{ je ekvivalentno sa } a_2 \in R_i^{\mathfrak{M}}, \quad \text{za sve } \ i = 1, \ldots, n.$$

Lako je provjeriti da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Za svaki $a \in |\mathfrak{M}|$ sa $[a]$ označimo pripadnu klasu ekvivalencije. Označimo sa $|\mathfrak{N}|$ kvocijentni skup $|\mathfrak{M}|/\sim$ . Očito skup $|\mathfrak{N}|$ ne sadrži više od $2^n$ elemenata. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, te sve $a_1, a_2 \in |\mathfrak{M}|$ definiramo binarnu relaciju $R_i^{\mathfrak{N}}$ sa:

$$[a] \in R_i^{\mathfrak{N}} \qquad \text{ako i samo ako} \qquad a \in R_i^{\mathfrak{M}}.$$

Time je definirana struktura $\mathfrak{N}$ za formulu $F$. Zatim, neka je $h : |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{N}|$ funkcija definirana sa $h(a) = [a]$. Lako je provjeriti da je $h$ homomorfizama struktura.

18. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dvije $\sigma$–strukture tako da vrijedi $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Kažemo da je $\mathfrak{M}$ **elementarna podstruktura** od $\mathfrak{N}$ ako za sve $\sigma$–formule $F(v_1, \ldots, v_n)$ i sve $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi

$$\mathfrak{M} \models F[a_1, \ldots, a_n] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{N} \models F[a_1, \ldots, a_n].$$

Ako je $\mathfrak{M}$ elementarna podstruktura od $\mathfrak{N}$ tada to označavamo sa $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, te još kažemo da je $\mathfrak{N}$ elementarno proširenje od $\mathfrak{N}$.

Neka su $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{A}$ proizvoljne $\sigma$–strukture. Dokažite da tada vrijedi:

a) ako $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ tada $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$;
b) ako $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N} \prec \mathfrak{A}$ tada $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{A}$;
c) ako $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{A}$, $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ tada $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

Odredite primjere strukura $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ ali ne vrijedi $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

19. (Kriterij Tarskog za elementarne podstrukture)
Neka $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, te neka za sve formule $F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ i sve $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi:

$$\text{ako } \mathfrak{M} \models \exists x_{n+1} F[a_1, \ldots, a_n] \text{ tada postoji } a \in |\mathfrak{M}|$$
$$\text{takav da } \mathfrak{N} \models F[a_1, \ldots, a_n, a].$$

Dokažite da tada vrijedi $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$.

20. Primjenom kriterija Tarskog dokažite da vrijedi $(\mathbb{Q}, <) \prec (\mathbb{R}, <)$.

21. Neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da niti jedna od sljedećih formula nije logička posljedica preostalih dviju:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \quad \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \to (R(y,z) \to R(x,z))); \\ F_2 &\equiv \quad \forall x \forall y (R(x,y) \to (R(y,x) \to x = y)); \\ F_3 &\equiv \quad \forall x \exists y R(x,y) \to \exists y \forall x R(x,y). \end{aligned}$$

Rješenje: U svim sljedećim interpretacijama neka je simbol $=$ interpretiran relacijom jednakosti.

Neka je $|\mathfrak{M}| = \{a, b, c\}$ i $R^{\mathfrak{M}} = \{(a,b),\ (b,c)\}$. Provjerite da vrijedi $\mathfrak{M} \models \neg F_1 \wedge F_2 \wedge F_3$.

Neka je, zatim, $|\mathfrak{N}| = \{a, b\}$ i $R^{\mathfrak{N}} = \{a, b\}^2$. Lako je vidjeti da $\mathfrak{N} \models F_1 \wedge \neg F_2 \wedge F_3$.

Na kraju definirajmo $|\mathfrak{A}| = \mathbf{Z}$, a $R^{\mathfrak{A}}$ neka je relacija uređaja na skupu svih cijelih brojeva, tj. $\leq$ . Provjerite da vrijedi $\mathfrak{M} \models F_1 \wedge F_2 \wedge \neg F_3$.

22. Neka je $\Gamma$ neki skup formula, te $F$ neka formula. Definirajmo nešto drugačiju relaciju logičke posljedice $\models^*$ . Definiramo da vrijedi $\Gamma \models^* F$ ako i samo ako za sve interpretacije $(\mathfrak{M}, v)$ vrijedi:

$$\text{ako } \ \mathfrak{M} \models_v \Gamma \ \text{ tada } \mathfrak{M} \models_v F.$$

Dokažite da tada za sve formule $F$ i $G$ vrijedi:

$$F \models^* G \ \text{ ako i samo ako } \ \text{ formula } \ F \to G \ \text{ je valjana.}$$

Odredite dvije formule $F$ i $G$ takve da je $F \to G$ valjana, ali ne vrijedi $F \models G$.

23. Dokažite teorem o zamjeni.

## 2.4 Preneksna normalna forma

U prvom poglavlju dokazali smo da za svaku formulu logike sudova postoji konjunktivna i disjunktivna normalna forma. U ovoj točki cilj nam je dokazati sličan rezultat za teorije prvog reda. No, ovdje nas više zanimaju kvantifikatori, tj. kako kvantifikatore staviti na početak formule. U čitavoj ovoj točki smatramo da je $\sigma$ neka proizvoljna, ali fiksirana signatura. U sljedećoj lemi dajemo **pravila prijelaza** za kvantifikatore.

**Lema 2.29.** *Neka su $A$, $B$ i $C$ $\sigma$–formule, te neka formula $B$ ne sadrži slobodne nastupe varijable $x$. Tada vrijedi:*

1. $\neg\exists xA \ \Leftrightarrow\ \forall x(\neg A)$;
2. $\neg\forall xA \ \Leftrightarrow\ \exists x(\neg A)$;
3. $(\forall xA \rightarrow B) \ \Leftrightarrow\ \exists x(A \rightarrow B)$;
4. $(\exists xA \rightarrow B) \ \Leftrightarrow\ \forall x(A \rightarrow B)$;
5. $(B \rightarrow \forall xA) \ \Leftrightarrow\ \forall x(B \rightarrow A)$;
6. $(B \rightarrow \exists xA) \ \Leftrightarrow\ \exists x(B \rightarrow A)$;
7. $(B \wedge \forall xA) \ \Leftrightarrow\ \forall x(B \wedge A)$;
8. $(\forall xA \wedge B) \ \Leftrightarrow\ \forall x(A \wedge B)$;
9. $(B \wedge \exists xA) \ \Leftrightarrow\ \exists x(B \wedge A)$;
10. $(\exists xA \wedge B) \ \Leftrightarrow\ \exists x(A \wedge B)$;
11. $(B \vee \forall xA) \ \Leftrightarrow\ \forall x(B \vee A)$;
12. $(\forall xA \vee B) \ \Leftrightarrow\ \forall x(A \vee B)$;
13. $(B \vee \exists xA) \ \Leftrightarrow\ \exists x(B \vee A)$;
14. $(\exists xA \vee B) \ \Leftrightarrow\ \exists x(A \vee B)$;
15. $(\forall xA \wedge \forall xC) \ \Leftrightarrow\ \forall x(A \wedge C)$;
16. $(\exists xA \vee \exists xC) \ \Leftrightarrow\ \exists x(A \vee C)$.

*Dokaz.* Pomoću definicije istinosti i definicije ekvivalencija formula lako je provjeriti svaku od navedenih ekvivalencija. □

Neka je $R$ dvomjesni relacijski simbol. Označimo sa $A$ formulu $\exists x R(x, y)$. Neka je zatim sa $A'$ označena formula koja je dobivena zamjenom vezane varijable $x$ s varijablom $z$, tj. neka je $A' \equiv \exists z R(z, y)$. Lako je provjeriti da su formule $A$ i $A'$ logički ekvivalentne. Iz definicije istinosti i logičke ekvivalencije formula lako je dobiti da ta činjenica vrijedi općenito. Upravo to ističemo u sljedećoj lemi.

**Lema 2.30.** *Neka je $A$ $\sigma$–formula i $x$ varijabla za koju postoji vezani nastup u formuli $A$. Zatim, neka je $y$ varijabla koja ne nastupa u formuli $A$. Označimo sa $A'$ formulu dobivenu iz $A$ zamjenom svakog vezanog nastupa varijable $x$ sa $y$. Tada vrijedi $A \Leftrightarrow A'$.*

Prethodnu lemu ćemo često koristiti prilikom određivanja preneksne normalne forme za neku formulu. Sada definiramo najvažniji pojam ove točke – preneksnu normalnu formu. Zatim dokazujemo teorem o egzistenciji preneksne normalne forme.

**Definicija 2.31.** *Za $\sigma$–formulu $Q_1 x_1 \ \ldots \ Q_m x_m A$ kažemo da je u* **preneksnoj normalnoj formi** *ako je $A$ otvorena formula (tj. ne sadrži kvantifikatore), a $Q_i$ je simbol $\forall$ ili $\exists$, za $i = 1, \ldots, m$. Po definiciji smatramo da je svaka otvorena formula u preneksnoj normalnoj formi.*

**Teorem 2.32.** *(teorem o preneksnoj normalnoj formi)*
*Za svaku $\sigma$–formulu $F$ postoji $\sigma$–formula $F'$ u preneksnoj normalnoj formi tako da vrijedi $F \Leftrightarrow F'$. Formulu $F'$ nazivamo preneksna normalna forma za formulu $F$.*

*Dokaz.* Za svaki $i \in \mathbb{N}$ za dani simbol $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ definiramo simbol $\overline{Q_i}$ sa

$$\overline{Q_i} \equiv \begin{cases} \forall, & \text{ako je } Q_i \text{ simbol } \exists; \\ \exists, & \text{ako je } Q_i \text{ simbol } \forall. \end{cases}$$

Dokaz teorema provodimo indukcijom po složenosti formule $F$, tj. po $k(F)$. Ako je $k(F) = 0$, tj. ako je $F$ atomarna formula, tada je ona po definiciji u preneksnoj normalnoj formi. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ $(n > 0)$ vrijedi da za svaku formulu $G$, čija je složenost strogo manja od $n$, postoji preneksna normalna forma. Neka je, zatim, $F$ formula čija je složenost upravo jednaka $n$. Razlikujemo slučajeve obzirom na oblik formule $F$.

a) Formula $F$ je oblika $\neg G$. Tada je $k(G) < n$ pa po pretpostavci indukcije postoji formula $G'$ u preneksnoj normalnoj formi za koju vrijedi $G \Leftrightarrow G'$.

Neka je $G' \equiv Q_1 x_1 \ \dots \ Q_m x_m A$, gdje je $A$ formula bez kvantifikatora, a $Q_i$ je znak $\forall$ ili $\exists$. Primjenom pravila prijelaza 1 i 2 iz leme 2.29. slijedi $F \Leftrightarrow \overline{Q_1} x_1 \ \dots \ \overline{Q_m} x_m(\neg A)$. Očito je formula $\overline{Q_1} x_1 \ \dots \ \overline{Q_m} x_m(\neg A)$ u preneksnoj normalnoj formi.

b) Formula $F$ je oblika $G \to H$. Tada je $k(G),\ k(H) < n$ pa po pretpostavci indukcije postoje formule $G'$ i $H'$ u preneksnoj normalnoj formi za koje vrijedi $G \Leftrightarrow G'$ i $H \Leftrightarrow H'$. Neka je $G' \equiv Q_1 x_1 \ \dots \ Q_m x_m A$ i $H' \equiv Q_{m+1} y_1 \ \dots \ Q_{m+k} y_k B$ ($A$ i $B$ su otvorene formule). Neka su $z_1, \dots, z_{m+k}$ varijable koje ne nastupaju u formulama $G'$ i $H'$. Po lemi 2.30. slijedi:

$$G' \Leftrightarrow Q_1 z_1 \ \dots \ Q_m z_m A(z_1/x_1, \dots, z_m/x_m) \quad \text{i}$$

$$H' \Leftrightarrow Q_{m+1} z_{m+1} \ \dots \ Q_{m+k} z_{m+k} B(z_{m+1}/y_1, \dots, z_{m+k}/y_k).$$

Primjenom pravila prijelaza 3, 4, 5 i 6 iz leme 2.29., i teorema o zamjeni (vidi teorem 2.28. iz točke 2.3), slijedi da je formula $F$ logički ekvivalentna s formulom

$$\overline{Q_1} z_1 \ \dots \ \overline{Q_m} z_m Q_{m+1} z_{m+1} \ \dots \ Q_{m+k} z_{m+k} \Big( A(z_1/x_1, \dots, z_m/x_m)$$
$$\to B(z_{m+1}/y_1, \dots, z_{m+k}/y_k) \Big).$$

Time je dobivena tražena preneksna normalna forma formule $F$ za ovaj slučaj.

c) Kada je formula $F$ oblika $F \wedge G$, $F \vee G$ ili $F \leftrightarrow G$ dokaz je analogan kao u slučaju b).

d) Formula $F$ je oblika $\forall x G$ (odnosno $\exists x G$). Pošto je $k(G) < n$ tada po pretpostavci indukcije postoji formula $G'$ u preneksnoj normalnoj formi koja je logički ekvivalentna s $G$. Očito je $\forall x G'$ (odnosno $\exists x G'$) tražena normalna forma za $F$.

$\square$

Dokaz prethodnog teorema nam daje postupak za određivanje normalne forme proizvoljne formule. To ilustriramo u sljedećem primjeru.

**Primjer 2.33.** *Neka je $F \equiv \forall x \exists y R(x, y) \to \neg \forall z P(z)$, gdje je $R$ dvomjesni, a $P$ jednomjesni relacijski simbol. Odredimo preneksnu normalnu formu formule $F$. Uočimo da nije potrebno mijenjati vezane varijable, tj. primjenjivati lemu 2.30. Primjenom pravila prijelaza redom imamo ekvivalencije:*

$$F \Leftrightarrow \forall x \exists y R(x, y) \to \exists z(\neg P(z)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x(\exists y R(x,y) \to \exists z(\neg P(z))) \Leftrightarrow$$
$$\exists x \forall y(R(x,y) \to \exists z(\neg P(z))) \Leftrightarrow$$
$$\exists x \forall y \exists z(R(x,y) \to (\neg P(z))).$$

*Posljednja formula je u preneksnoj normalnoj formi i logički je ekvivalentna s formulom $F$.*

*Promotrimo još jedan primjer. Neka je sada $F \equiv \forall x R(x) \wedge \forall x P(x)$, gdje su $R$ i $P$ jednomjesni relacijski simboli. Primjenom pravila prijelaza 15 iz leme 2.29. slijedi $F \Leftrightarrow \forall x(R(x) \wedge P(x))$, i to je jedna preneksna normalna forma za $F$. To možemo napraviti i drugačije. Primjenom leme 2.30. imamo $F \Leftrightarrow \forall x R(x) \wedge \forall y P(y)$. Tada primjenom pravila prijelaza imamo $F \Leftrightarrow \forall x \forall y(R(x) \wedge P(y))$. Time smo dobili još jednu preneksnu normalnu formu formule $F$. Ovim primjerom željeli smo istaknuti da preneksna normalna forma za zadanu formulu općenito nije jedinstvena.*

U sljedećem primjeru želimo istaknuti mjesta u nastavi matematike gdje je potrebno znati pravila prijelaza za kvantifikatore.

**Primjer 2.34.** *Napišimo prvo formalnu definiciju konvergencije[8] niza $(a_n)$ realnih brojeva:*

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists n_\circ \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_\circ \ \to \mid a_n - L \mid < \epsilon).$$

*Zapišimo sada da je niz $(a_n)$ divergentan. Negacijom prethodne izreke dobivamo:*

$$(\forall L \in \mathbb{R})(\exists \epsilon > 0)(\forall n_\circ \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n \geq n_\circ \ \wedge \ \mid a_n - L \mid \geq \epsilon).$$

*Primjeri kod kojih bi se svakako trebalo također pažljivo raditi s kvantifikatorima su:*

*a) točka (ni)je gomilište niza realnih brojeva;*

*b) funkcija (ni)je neprekidna u točki (na skupu);*

*c) funkcija (ni)je derivabilna u točki (na skupu);*

*d) red realnih brojeva (ni)je konvergentan;*

*e) kriteriji konvergencije redova realnih brojeva;*

*f) funkcija (ni)je Riemann integrabilna.*

[8] U definiciji koristimo **ograničene kvantifikatore**. To nisu novi simboli, već samo pokrate. Tako npr. $(\exists L \in \mathbb{R})F(L)$ označava formulu $\exists L(L \in \mathbb{R} \wedge F(L))$, a $(\forall \epsilon > 0)G(\epsilon)$ je pokrata za $\forall \epsilon(\epsilon > 0 \to G(\epsilon))$.

**Zadaci:**

1. Odredite formule $A$ i $B$ tako da nisu logički ekvivalentne sljedeće formule:

   a) $\exists xA \wedge \exists xB$ i $\exists x(A \wedge B)$;
   b) $\forall xA \vee \forall xB$ i $\forall x(A \vee B)$;
   c) $A \to \forall xB$ i $\forall x(A \to B)$;
   d) $A \to \exists xB$ i $\exists x(A \to B)$;
   e) $\forall xA \to B$ i $\exists x(A \to B)$;
   f) $\exists xA \to B$ i $\forall x(A \to B)$.

2. Odredite preneksne normalne forme sljedećih formula:

   a) $\neg\exists x\forall y\exists z\forall uA(x, y, z, u)$;
   b) $\exists x\forall yA(x, y) \wedge \exists x\forall yB(x, y)$;
   c) $\exists x\forall yA(x, y) \vee \exists x\forall yB(x, y)$;
   d) $\exists x\forall yA(x, y) \to \exists x\forall yB(x, y)$;
   e) $(\exists x\forall yA(x, y) \wedge \exists xB(x)) \to \forall zC(z)$;
   f) $(\forall x\forall yP(x, y) \wedge \exists x\exists yQ(x, y)) \to \forall zR(z)$;
   g) $\forall x(P(x) \to \exists xQ(x)) \wedge \forall x(P(x) \wedge \forall xQ(x))$;
   h) $(\forall x\exists yR(y, x) \wedge \exists y\forall zP(y, z)) \to \exists x\forall yQ(x, y)$.

3. Formulu u preneksnoj normalnoj formi kod koje je svaki kvantifikator univerzalni nazivamo $\forall$-**formula** ili **univerzalna formula**. Ako je svaki kvantifikator egzistencijalni tada formulu nazivamo $\exists$-**formula** ili **egzistencijalna formula**. Dokažite:

   a) ako je $\mathcal{M}$ model za neku zatvorenu $\forall$-formulu $F$ tada je i svaka podstruktura od $\mathcal{M}$ model za $F$;

   b) ako je $\mathcal{M}$ model za zatvorenu $\exists$-formula $G$ tada je i svako proširenje strukture $\mathcal{M}$ model za $G$;

   c) nađite primjer formule $F$ i strukture $\mathcal{M}$ tako da vrijedi $\mathcal{M} \models F$, te postoji podstruktura i proširenje strukture $\mathcal{M}$ koji nisu model za $F$.

   (Napominjemo da vrijede i obrati tvrdnji a) i b). O tome možete čitati u [5], [7], i [10].)

4. Neka je $G$ formula logike prvog reda koja ne sadrži kvantifikatore, te konstantske i funkcijske simbole. Zatim, neka je $\{x_1, \dots, x_n\}$ skup svih varijabli koje nastupaju u formuli $G$. Dokažite da je formula $\forall x_1 \dots \forall x_n G$

valjana ako i samo ako je svaka struktura za $G$, koja ima točno $n$ elemenata, model za formulu $G$.
Rješenje: Neka je $\sigma$ skup svih nelogičkih simbola koji se pojavljuju u formuli $G$. Označimo sa $F$ formulu $\forall x_1 \ldots \forall x_n G$. Ako je formula $F$ valjana tada je svaka struktura za nju ujedno i model. Posebno je svaka struktura s točno $n$ elemenata model za formulu $F$.

Pretpostavimo sada da formula $F$ nije valjana. Konstruirat ćemo $\sigma$–strukturu sa $n$ elemenata koja neće biti model za formulu $F$. Pošto $F$ nije valjana tada postoji $\sigma$–struktura $\mathfrak{M}$ tako da $\mathfrak{M} \not\models F$. Iz definicije istinitosti formule slijedi da postoje $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{M}|$ (koji nisu nužnu svi različiti!) tako da $\mathfrak{M} \not\models_v G[a_1, \ldots, a_n]$. Neka je $|\mathfrak{N}| = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ako skup $|\mathfrak{N}|$ ima točno $n$ elemenata tada traženi model $\mathfrak{N}$ definiramo kao podstrukturu od $\mathfrak{M}$ s nosačem $|\mathfrak{N}|$. (Uočite da tu koristimo pretpostavku zadatka da formula $G$ ne sadrži ni kontstantske, a ni funkcijske simbole).

Promotrimo sada slučaj kada skup $|\mathfrak{N}|$ sadrži manje od $n$ elemenata. Pretpostavimo da je $a_i \neq a_j$ za sve $i, j = 1, \ldots k$ $(k < n)$ kada je $i \neq j$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $a_i \notin \mathbb{N}$.

Neka je $|\mathfrak{A}| = \{a_1, \ldots, a_k, k+1, \ldots, n\}$. Očito skup $|\mathfrak{A}|$ ima točno $n$ elemenata. Neka je $f : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$ funkcija definirana sa:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \in \{a_1, \ldots, a_k\}; \\ a_1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za svaki relacijski simbol $R \in \sigma$ sa $R^{\mathfrak{A}}$ označavamo relaciju na skup $|\mathfrak{A}|$ definiranu sa:

$$(b_1, \ldots, b_p) \in R^{\mathfrak{A}} \quad \text{ako i samo ako} \quad (f(b_1), \ldots, f(b_p)) \in R^{\mathfrak{M}},$$

za $b_i \in |\mathfrak{A}|$. Time je definirana neka $\sigma$–struktura $\mathfrak{A}$.

Indukcijom po složenosti lako je dokazati da za sve $\sigma$–formule $B$ i sve $b_1, \ldots, b_s \in |\mathfrak{A}|$ vrijedi

$$\mathfrak{A} \models B[b_1, \ldots, b_s] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models B[f(b_1), \ldots, f(b_s)].$$

Sada iz te činjenice, te pretpostavke $\mathfrak{M} \not\models G$, odmah slijedi $\mathfrak{A} \not\models G$.

5. Neka je $G(x_1, \ldots, x_m)$ formula koja ne sadrži kvantifikatore, te funkcijske i konstantske simbole. Dokažite da je zatvorena formula

$$F \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_m G(x_1, \ldots, x_m)$$

valjana ako i samo ako je svaka jednoelementarna struktura za nju ujedno i njen model.
Rješenje: Neka je $k$ kardinalni broj (konačan ili beskonačan) za koji vrijedi $k > 1$, te neka je $\mathfrak{M}$ struktura za $F$ kardinalnosti $k$. Pretpostavimo da $\mathfrak{M}$ nije model za formulu $B$. Pošto je $F$ zatvorena formula, tada vrijedi $\mathfrak{M} \models \neg F$, tj. $\mathfrak{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\neg G)$. Neka je $m \in |\mathfrak{M}|$ proizvoljan, ali fiksiran. Očito vrijedi $\mathfrak{M} \models \neg G[m, \ldots, m]$. Neka je $|\mathfrak{N}| = \{m\}$. Za svaki relacijski simbol $R$ koji nastupa u formuli $G$ definiramo

$$(m, \ldots, m) \in R^{\mathfrak{N}} \text{ ako i samo ako } (m, \ldots, m) \in R^{\mathfrak{M}}.$$

Očito vrijedi $\mathfrak{N} \models \neg G[m, \ldots, m]$, a onda i $\mathfrak{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\neg G)$. Iz toga slijedi $\mathfrak{N} \not\models F$.

6. Za formulu $F$ kažemo da je **monadska** ako u njoj od nelogičkih simbola nastupaju samo jednomjesni relacijski simboli. Neka je $F$ monadska formula za koju postoji model. Dokažite da tada postoji konačan model za $F$.
   Uputa: Za svaku monadsku formulu postoji preneksna normalna forma koja je oblika $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m G$.

7. Neka je $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m F$ neka $\sigma$–formula (formula $F$ moguće sadrži kvantifikatore). Označimo kratko $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. Neka su, zatim, $f_1, \ldots, f_m$ $n-$mjesni funkcijski simboli koji ne pripadaju $\sigma$. Dokažite da za svaku $\sigma$–strukturu $\mathfrak{M}$ postoji ekstenzija $\mathfrak{N}$ koja je $\sigma \cup \{f_1, \ldots, f_m\}$-struktura, tako da vrijedi

$$\mathfrak{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\exists y_1 \ldots \exists y_m F(\vec{x}, \vec{y}) \leftrightarrow F(\vec{x}, f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))).$$

8. Neka je $F$ formula koja ne sadrži kvantifikatore. Za $n \geq 0$ formulu oblika $\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m F$ nazivamo **Skolemova normalna forma**.

   a) Dokažite da za svaku formulu $F$ postoji Skolemova normalna forma $F'$ tako da vrijedi: $F$ je valjana ako i samo ako je $F'$ valjana. (Tada kažemo da je $F'$ Skolemova normalna forma za formulu $F$).

   b) Odredite Skolemovu normalnu formu za formule:

      $b_1$) $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall x \exists y Q(x, y)$;
      $b_2$) $\exists x \forall y \exists z \forall v R(x, y, z, v)$;
      $b_3$) $\forall x \exists y \forall z \exists v R(x, y, z, v)$.

Uputa za $b_1$) : Jedna preneksna normalna forma dane formule je

$$\forall z \exists u \forall x \exists y (Q(z,u) \to Q(x,y).$$

Tada je jedna Skolemova forma za danu formulu jednaka

$$\forall z \forall x (Q(z, f(z)) \to Q(x, g(z,x))).$$

## 2.5 Glavni test

Sada razmatramo jedan postupak koji može poslužiti prilikom rješavanja sljedećih problema:

- Ispitivanje **valjanosti** formule;
- Ispitivanje **ispunjivosti** formule;
- Ispitivanje **oborivosti** formule;
- Određivanje je li neka formula **logička posljedica** zadanog konačnog skupa formula;
- Određivanje jesu li zadane dvije formule **logički ekvivalentne**.

Postupak koji ovdje opisujemo naziva se **glavni test** za formule logike prvog reda. Slično kao i kod logike sudova glavni test se sastoji od razgradnje dane formule i izgradnje stabla čiji su čvorovi označeni podformulama.

Gore navedenim problemima smo se bavili u točki 1.5, ali za formule logike sudova. Ovdje su problemi daleko složeniji jer imamo kvantifikatore, relacijske, funkcijske i konstantske simbole. Nije teško vidjeti da se svi navedeni problemi mogu svesti na ispitivanje valjanosti. To smo već komentirali na početku točke 1.5 gdje smo se bavili testovima valjanosti za logiku sudova.

Kod logike sudova sva tri navedena testa valjanosti (semantičke tablice, rezolucija i glavni test) uvijek završavaju u konačno mnogo koraka i korektno odgovaraju na postavljeno pitanje. Kod logike prvog reda to više nije slučaj. U zadatku 11 iz točke 2.3 naveden je primjer oborive formule $F$ za koju je svaka konačna struktura model. To znači da će ponekad biti nemoguće odrediti (beskonačnu) strukturu u konačno mnogo koraka.

U ovoj točki promatramo samo zatvorene formule koje ne sadrže konstantske i funkcijske simbole. Vidjet ćemo da je i taj smanjeni alfabet dovoljan kako bi se naglasila sva složenost problema ispitivanja valjanosti u logici prvog reda.

Sada prvo navodimo pravila glavnog testa za propozicionalne veznike.

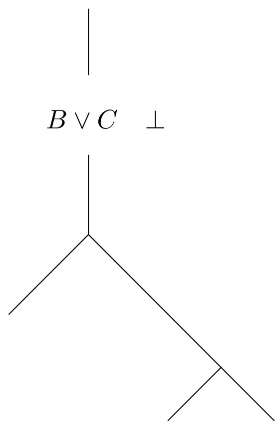
$$
\begin{array}{lcc}
(\neg) & \begin{array}{c} \neg B \ \top \\ B \ \bot \end{array} & \begin{array}{c} \neg B \ \bot \\ B \ \top \end{array} \\[2ex]
(\wedge) & \begin{array}{c} B \wedge C \ \top \\ B \ \top \\ C \ \top \end{array} & \begin{array}{c} B \wedge C \ \bot \\ / \quad \backslash \\ B \ \bot \quad C \ \bot \end{array} \\[2ex]
(\vee) & \begin{array}{c} B \vee C \ \top \\ / \quad \backslash \\ B \ \top \quad C \ \top \end{array} & \begin{array}{c} B \vee C \ \bot \\ B \ \bot \\ C \ \bot \end{array} \\[2ex]
(\rightarrow) & \begin{array}{c} B \rightarrow C \ \top \\ / \quad \backslash \\ B \ \bot \quad C \ \top \end{array} & \begin{array}{c} B \rightarrow C \ \bot \\ B \ \top \\ C \ \bot \end{array} \\[2ex]
(\leftrightarrow) & \begin{array}{c} B \leftrightarrow C \ \top \\ / \quad \backslash \\ B \ \top \quad B \ \bot \\ C \ \top \quad C \ \bot \end{array} & \begin{array}{c} B \leftrightarrow C \ \bot \\ / \quad \backslash \\ B \ \top \quad B \ \bot \\ C \ \bot \quad C \ \top \end{array}
\end{array}
$$

Naravno, gornja pravila za propozicionalne veznike su sasvim ista kao i kod logike sudova. Zaokruživanje znakova $\top$ i $\bot$ (npr. $\top$ ) znači da je zahtjev ispunjen novim zahtjevima koji ga slijede na svim granama koje su ispod tog zahtjeva. Sljedećim primjerom želimo naglasiti da nove zahtjeve moramo pisati na svim granama koje su ispod.

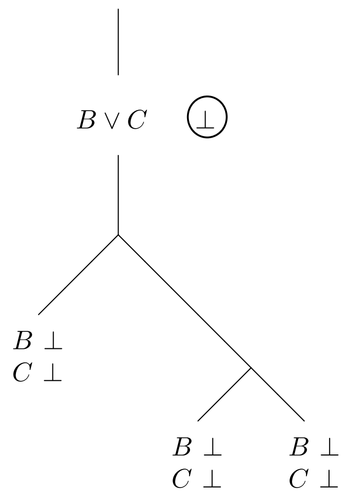
**Primjer 2.35.** *Slika 1 prikazuje izgled stabla u nekom trenutku testiranja. Istaknut je redak $B \vee C \ \bot$. Time se želi naglasiti da taj redak još nije analiziran, tj. nije uzet u razmatranje.*

*Na slici 2 želimo istaknuti kako mora izgledati stablo neposredno nakon analize retka $B \vee C \ \bot$.*

*Slika 1*




*Slika 2*




Preostalo je napisati pravila glavnog testa za kvantifikatore. No, opišimo prvo što zapravo znači ispitati valjanost neke formule $F$ pomoću glavnog testa. Analogno zaključujemo prilikom ispitivanja ispunjivosti, oborivosti i logičke posljedice.

Ako ispitujemo je li neka formula $F$ valjana, tada je prvi redak testa oblika $F \perp$. To znači da mi pokušavamo odrediti postoji li struktura koja nije model za formulu $F$. Iz definicije strukture slijedi da moramo odrediti nosač $|\mathfrak{M}|$ i preslikavanje $\varphi$.

Opišimo prvo na koji način određujemo nosač $|\mathfrak{M}|$, tj. navedimo u kojim koracima ispitivanja "punimo" nosač s novim elementima. Postoje dva takva osnovna oblika. To su: $\forall x G(x) \perp$ i $\exists x G(x) \top$. Za svaki od ta dva navedena oblika moramo u $|\mathfrak{M}|$ dodati novi element, jer npr. istinitost formule $\exists x G(x)$ znači da postoji element u $|\mathfrak{M}|$ koji je "svjedok" istinitosti. Nakon analize retka oblika $\exists x G(x) \top$, prvo zaokružujemo znak $\top$, tj. pišemo $\top$, te u taj redak dopisujemo (..$a$..). Element $a$ mora biti novi, tj. ne smije biti uveden u nekom prethodnom koraku. Oznaka (..$a$..) nam sugerira da smo element $a$ upravo uveli u tom koraku. Zatim, u (nekom) sljedećem retku pišemo $G(a) \top$. Analogno postupamo za retke oblika $\forall x G(x) \perp$. Time smo opisali dva oblika pravila za kvantifikatore.

Važno je istaknuti da u ovoj točki znakove $a, b, c \ldots, a_1, a_2, \ldots$ smatramo elementima alfabeta, tj. to su konstantski simboli u jednu ruku. U drugu ruku te oznake koristimo za elemente nosača interpretacije.

Sada opisujemo pravila za slučajeve $\forall x G(x) \top$ i $\exists x G(x) \perp$. Što zapravo znači istinitost formule oblika $\forall x G(x)$ za neku interpretaciju? Po definiciji to znači istinitost formule $G(x)$ za svaku valuaciju. Malo neprecizno, ali kraće zapisano, to zapravo znači istinitost formule[9] $G(m)$, za svaki element $m \in |\mathfrak{M}|$. Dakle, za svaki uvedeni element $a$ u nosaču mi moramo ispitati istinitost formule $G(a)$. Posebno to znači da ispitujemo za elemente koji su uvedeni prije i poslije retka $\forall x G(x) \top$. To pak povlači da redak oblika $\forall x G(x) \top$ možda nikad neće biti do kraja analiziran, jer se moguće poslije njega uvodi novi element u nosač. Analizu retka oblika $\forall x G(x) \top$ u odnosu na element $a$ označavamo sa $\forall x G(x) \top$ @. Zatim, u (nekom) sljedećem retku pišemo $G(a) \top$. Analogno postupamo za retke oblika $\exists x G(x) \perp$.

Sada navodimo pravila za kvantifikatore. Oznaka ($\uparrow\ a \downarrow\ a$) nam sugerira da novo uvedeni element $a$ moramo dopisati kod svih redaka oblika $\forall x G(x) \top$ i $\exists x G(x) \perp$ koji su bili prije i koji će se pojaviti kasnije.

| | | |
|---|---|---|
| ($\forall$) | $\forall x B \top$ @, ... <br> $B(a) \top$ | $\forall x B \perp$ (..$a$..) ($\uparrow\ a \downarrow\ a$) <br> $B(a) \perp$ |
| ($\exists$) | $\exists x B \top$ (..$a$..) ($\uparrow\ a \downarrow\ a$) <br> $B(a) \top$ | $\exists x B \perp$ @, ... <br> $B(a) \perp$ |

Kada tijekom testiranja dobivamo da na nekoj grani stabla mora vrijediti $A$ $\top$ i $A$ $\perp$ tada završavamo testiranje (na toj grani!), i stavljamo oznaku $X$. To znači da su zahtjevi za postojanje strukture kontradiktorni. Ako sve grane završe sa $X$ tada zaključujemo da tražena struktura ne postoji. Inače s grana očitavamo traženu strukturu.

Nakon sljedećeg primjera ćemo komentirati kako sa stabla glavnog testa možemo očitati interpretacije nelogičkih simbola.

**Primjer 2.36.** *Ispitajmo valjanost formule*

$$(\forall x A(x) \to \exists x B(x)) \to \exists x (A(x) \to B(x)).$$

*Na sljedećoj slici dano je jedno stablo glavnog testa za zadanu formulu.*

[9]Ponovno ističemo da strogo govoreći riječ $G(m)$ nije formula, jer $m$ nije term. No, $G(m) \top$ je kraći (i jasniji) zapis činjenice $\mathfrak{M} \models G[m]$.

$$(\forall x A(x) \to \exists x B(x)) \to \exists x(A(x) \to B(x)) \quad \perp$$

$$\forall x A(x) \to \exists x B(x) \quad \top$$

$$(*) \qquad \exists x(A(x) \to B(x)) \quad \perp$$

$$\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
\forall x A(x) \quad \perp \quad (..a..) & \exists x B(x) \quad \top \quad (..b..) \\
A(a) \quad \perp & B(b) \quad \top \\
(*) \quad \exists x(A(x) \to B(x)) \ \perp \ @ & (*) \quad \exists x(A(x) \to B(x)) \ \perp \ b \\
A(a) \to B(a) \quad \perp & A(b) \to B(b) \quad \perp \\
A(a) \quad \top & A(b) \quad \top \\
B(a) \quad \perp & B(b) \quad \perp \\
X & X
\end{array}$$

*Opišemo kratko provedeno ispitivanje. Početnu formulu označavamo sa $F$. Pošto se trebalo ispitati je li dana formula $F$ valjana, test smo proveli tražeći strukturu koja nije model za danu formulu. To znači da je prvi redak oblika $F \perp$. Početna formula $F$ je oblika $G \to H$. Iz pravila za istinitost kondicionala slijedi da se uvjet $F \perp$ svodi na dva nova uvjeta: drugi i treći redak na prethodnoj slici.*

*Sada ćemo objasniti zašto je ispred trećeg retka stavljena oznaka $(*)$. Primijetimo da je drugi redak oblika $C \to D \top$. Iz pravila za istinitost kondicionala imamo da se taj zahtjev svodi na: $C \perp$ ili $D \top$. Dakle, na osnovu drugog retka znamo da će u stablu biti grananje. Pošto je treći redak oblika $\exists x E(x) \perp$, iz pravila za kvantifikatore znamo da ćemo iza znaka $\perp$ morati dopisivati sve elemente nosača koji su uvode. Kako bismo izbjegli da se uvedeni elementi nosača na lijevoj grani zabunom ne pojave na desnoj grani, ili obrnuto, treći redak označavamo sa $(*)$. Kasnije taj treći redak prepisujemo na svakoj grani, te ga analiziramo na svakoj grani posebno.*

*Opišimo još samo provedeni test na lijevoj grani, jer je na desnoj grani sve analogno. Prvi redak lijeve grane je $\forall x A(x) \perp$. To je oblik pravila za kvantifikatore kod kojeg moramo uvesti novi element. To smo i učinili u tom retku, te to označili sa (..a..). Treći redak na lijevoj grani ima oznaku $(*)$, i to je jednostavno prepisani treći redak s početka. U tom retku je iza oznake $\perp$ napisano još @. To znači da je taj redak analiziran obzirom na uvedeni element $a$. Nakon toga* *slijedi jednostavna propozicionalna analiza.*

*Primijetimo da su lijeva i desna grana stabla završile oznakom kontradikcije X. To znači da ne postoji struktura koja nije model za formulu F. Time zaključujemo da je dana formula valjana.*

Sljedećim primjerom želimo istaknuti nužnost uvođenja novih elemenata u nosač prilikom analize formula oblika $\forall x G(x)\ \bot$ i $\exists x G(x)\ \top$.

**Primjer 2.37.** *Pomoću glavnog testa ispitajmo vrijedi li*

$$\forall x \exists y P(x,y) \to \forall x Q(x) \models \forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x)).$$

*Ispitivanje pomoću glavnog testa kratko je zapisano u obliku sljedećeg grafa.*

$$\begin{array}{c}
\forall x \exists y P(x,y) \to \forall x Q(x) \quad \top \\
\forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x)) \quad \bot \quad (..a..) \\
\forall y (P(a,y) \to Q(a)) \quad \bot \quad (..b..) \\
P(a,b) \to Q(a) \quad \bot \\
P(a,b) \quad \top \\
Q(a) \quad \bot
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\forall x \exists y P(x,y) \quad \bot \quad (..c..) & \forall x Q(x)\ \top\ a,\ b \\
\exists y P(c,y)\ \bot\ a,\ b,\ c & Q(a) \quad \top \\
P(c,a) \quad \bot & X \\
P(c,b) \quad \bot & \\
P(c,c) \quad \bot &
\end{array}$$

*Pošto lijeva grana nije završila oznakom za kontradikciju zaključujemo da dana tvrdnja nije istinita. S te lijeve grane možemo pročitati strukturu za koju početna tvrdnja nije istinita. Nosač strukture je* $|\mathfrak{M}| = \{a,b,c\}$, *te je* $P^{\mathfrak{M}} = \{(a,b)\}$ *i* $Q^{\mathfrak{M}} = \emptyset$.

*Uočimo još da na desnoj grani prvi redak oblika* $\forall x Q(x)\ \top$ *nismo analizirali u odnosu na element b. To nije nužno jer smo već naišli na kontradikciju.*

*Pogledajmo sada što se događa kada u rješavanju gornjeg zadatka koristimo "stare" elemente.*

$$\begin{array}{c}
\forall x \exists y P(x,y) \to \forall x Q(x) \quad \top \\
\forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x)) \quad \perp \quad (..a..) \\
\forall y (P(a,y) \to Q(a)) \quad \perp \quad (..b..) \\
P(a,b) \to Q(a) \quad \perp \\
P(a,b) \quad \top \\
Q(a) \quad \perp
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
\forall x \exists y P(x,y) \quad \perp \quad (!\ ..a..) & \forall x Q(x) \ \top \ a,\ b \\
\exists y P(a,y) \ \perp \ a,\ b & Q(a) \quad \top \\
P(a,b) \quad \perp & X \\
X &
\end{array}$$

*U sedmom retku smo sa* (! ..*a*..) *označili da ne uvodimo novi element već koristimo stari. Dani test je na svim granama završio kontradikcijom, pa bi brzopleto (i krivo) mogli zaključiti da je dana formula valjana. Iz prethodnog testa znamo da formula nije valjana. Korištenjem "starog" elementa a mi smo posljednjim testom zapravo dokazali da ne postoji strukura s točno dva elementa koja nije model za F.*

U sljedećem primjeru želimo istaknuti kako se glavni test koristi za ispitivanje je li neka formula $F$ oboriva. Početni redak u testu je oblika $F\perp$. To znači da pokušavamo odrediti strukturu koja nije model za formulu $F$.

**Primjer 2.38.** *Ispitajmo pomoću glavnog testa je li sljedeća formula oboriva:*

$$(\exists x \forall y R(x,y) \lor \forall y(\exists x P(y,x) \to \forall x R(x,y))) \to \exists x (Q(x) \lor R(x,x)).$$

$$(\exists x \forall y R(x,y) \vee \forall y(\exists x P(y,x) \to \forall x R(x,y))) \to \exists x(Q(x) \vee R(x,x)) \quad \bot$$

$$\exists x \forall y R(x,y) \vee \forall y(\exists x P(y,x) \to \forall x R(x,y)) \quad \top$$

$$(*) \quad \exists x(Q(x) \vee R(x,x)) \quad \bot$$

Lijeva grana:

$$\exists x \forall y R(x,y) \quad \top \quad (..a..)$$

$$\forall y R(a,y) \ \top \ a$$

$$R(a,a) \quad \top$$

$$(*)\ \exists x(Q(x) \vee R(x,x)) \ \bot \ a$$

$$Q(a) \vee R(a,a) \quad \bot$$

$$Q(a) \quad \bot$$

$$R(a,a) \quad \bot$$

$$X$$

Desna grana:

$$\forall y(\exists x P(y,x) \to \forall x R(x,y)) \ \top \ (..b..) \ b$$

$$\exists x P(b,x) \to \forall x R(x,b) \quad \top$$

$$(*)\ \exists x(Q(x) \vee R(x,x)) \ \bot \ b$$

$$Q(b) \vee R(b,b) \quad \bot$$

$$Q(b) \quad \bot$$

$$R(b,b) \quad \bot$$

$$\exists x P(b,x) \ \bot \ b \qquad\qquad \forall x R(x,b) \ \top \ b$$

$$P(b,b) \quad \bot \qquad\qquad R(b,b) \quad \top$$

$$\qquad\qquad\qquad X$$

*Zadana formula je oboriva. Struktura* $\mathfrak{M}$ *koja to dokazuje je zadana sa:* $\mathfrak{M} = \{b\}$, *te* $Q^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{M}} = \emptyset$.

*Svakako treba istaknuti i način uvođenja elementa b u prvom retku na desnoj grani. Primijetite da je taj redak oblika* $\forall x G(x)\ \top$. *Iz pravila za kvantifikatore znamo da to nije oblik kod kojeg se uvodi novi element. No, ni u sljedećim recima nema oblika s kvantifikatorima kod kojih se uvodi novi element. Radi provođenja daljnje analize bili smo prinuđeni u tom prvom retku na desnoj grani uvesti novi element.*

Sljedeći primjer pokazuje da nekad test ne mora završiti, ali mi ipak možemo odrediti jednu traženu (beskonačnu) strukturu.

**Primjer 2.39.** *Ispitajmo je li formula $\forall x\exists yA(x,y) \to \exists y\forall xA(x,y)$ valjana. Kao i obično, test ćemo provesti zapisujući ga u obliku stabla.*

$$\forall x\exists yA(x,y) \to \exists y\forall xA(x,y) \quad \bot$$

$$\begin{array}{l}
\forall x\exists yA(x,y) \ \top \quad (..a_1..) \quad a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3, a_4, a_5, \ldots \\
\exists y\forall xA(x,y) \ \bot \quad a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3, a_4, \ldots \\
\quad \exists yA(a_1,y) \ \top \quad (..a_2..) \\
\quad \forall xA(x,a_1) \ \bot \quad (..a_3..) \\
\quad A(a_1,a_2) \ \top \\
\quad A(a_3,a_1) \ \bot \\
\quad \exists yA(a_2,y) \ \top \quad (..a_4..) \\
\quad \forall xA(x,a_2) \ \bot \quad (..a_5..) \\
\quad A(a_2,a_4) \ \top \\
\quad A(a_5,a_2) \ \bot \\
\qquad \vdots
\end{array}$$

*Neka je $|\mathfrak{M}| = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, te $A^{\mathfrak{M}} = \{(a_n, a_{2n}) : n \in \mathbb{N}\}$ Nije teško vidjeti da vrijedi $\mathfrak{M} \not\models \forall x\exists yA(x,y) \to \exists y\forall xA(x,y)$. To znači da dana formula nije valjana.*

Prethodni primjer je prije svega važan kako bi istaknuli da glavni test ne mora uopće završti.

Istaknimo samo da je moguće konstruirati konačnu strukturu koja nije model za danu formulu (vidi zadatak 9).

**Primjer 2.40.** *U zadatku 11 iz točke 2.3 naveli smo primjer formule*

$$\forall x_1\forall x_2\forall x_3(R(x_1,x_1) \land (R(x_1,x_3) \to (R(x_1,x_2) \lor R(x_2,x_3)))) \to$$

$$\exists y\forall zR(y,z)$$

*za koju je svaka konačna struktura model, ali ona ipak nije valjana. Pokušajte to dokazati pomoću glavnog testa. Analiza dosta brzo postaje jako složena. Nije uopće jasna strategija kojom bismo konstruirali beskonačnu strukturu.*

*Pokušajte, zatim, pomoću glavnog testa ispitati slijedi li logički formula*

$$\forall x \forall y \exists z (R(x,y) \to (R(x,z) \to R(z,y))$$

*iz skupa formula*

$$\{\forall x \exists y R(x,y),\ \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x)\}.$$

*Analiza vrlo brzo postaje jako složena, te nije jasno hoće li glavni test uopće završiti.*

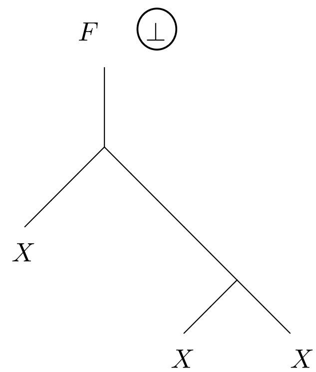
Naravno, vrlo lako je napisati još kompliciranije formule za koje će ispitivanje valjanosti biti jako složeno. No, to nije slučaj samo s glavnim testom, već se isti problemi javljaju kod svakog testa za ispitivanje valjanosti formula logike prvog reda. To ističemo u sljedećom Churchovom[10] teoremu.

**Teorem 2.41.** *Logika prvog reda je neodlučiva, tj. ne postoji test kojim bi se za svaku formulu u konačno mnogo koraka mogli ispitati je li valjana.*

Za dokaz gornjeg teorema morali bismo prvo uvesti osnovne pojmove i rezultate teorije izračunljivosti. No, to prelazi okvire ove skripte. Dokaz Churchovog teorema možete naći u [12].

Rezimirajmo na kraju kako sve glavni test može završiti prilikom ispitivanja valjanosti neke formule. Moguće su sljedeće dvije situacije:

a) Test je završio u konačno mnogo koraka i sve grane su završile kontradikcijom. Takvu jednu situaciju prikazujemo sljedećom slikom.

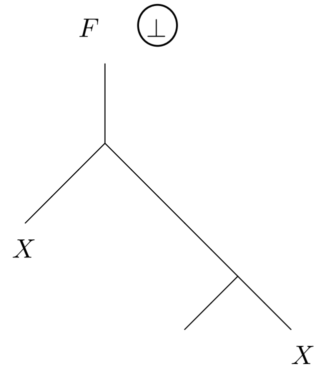



[10] A. Church, 1903.–1995.

Tada zaključujemo da je dana formula $F$ valjana.

b) Postoji grana koja nije završila kontradikcijom. Tu razlikujemo sljedeća dva podslučaja.

$b_1$) Postoji grana koja nije završila kontradikcijom gdje je test proveden do kraja (analiziran je svaki redak po svim uvedenim elementima). Na sljedećoj slici je prikazana jedna takva situacija.




Tada zaključujemo da je dana formula $F$ oboriva. S grane koja nije završila kontradikcijom čitamo strukturu koja nije model za danu formulu.

$b_2$) Test nije proveden do kraja i nije jasno hoće li završiti u konačno koraka U nekim specijalnim slučajevima moguće je na osnovu periodičkog ponavljanja odrediti beskonačnu strukturu koja nije model za danu formulu (vidi primjer 2.39.). No, većinom u takvim slučajevima ne možemo ništa zaključiti.

Važno je ipak istaknuti da je glavni test potpun i korektan test. Dokaz te činjenice dan je u [37] i [36].

**Zadaci:**

1. Odredite preneksnu normalnu formu formule i ispitajte valjanost pomoću glavnog testa

$$(\exists z F(z) \ \wedge \ (\exists y F(y) \rightarrow \forall x G(x))) \rightarrow \exists w (F(w) \wedge G(w))$$

Rješenje:

Određujemo prvo preneksnu normalnu formu dane formule:

$$(\exists z F(z) \ \wedge \ (\exists y F(y) \rightarrow \forall x G(x))) \rightarrow \exists w (F(w) \wedge G(w)) \Leftrightarrow$$

$$\exists z (F(z) \ \wedge \ (\exists y F(y) \rightarrow \forall x G(x))) \rightarrow \exists w (F(w) \wedge G(w)) \Leftrightarrow$$

$$\exists z (F(z) \ \wedge \ \forall x \forall y (F(y) \rightarrow G(x))) \rightarrow \exists w (F(w) \wedge G(w)) \Leftrightarrow$$

$$\exists z \forall x \forall y (F(z) \ \wedge \ (F(y) \rightarrow G(x))) \rightarrow \exists w (F(w) \wedge G(w)) \Leftrightarrow$$

$$\forall z \exists x \exists y \exists w [(F(z) \ \wedge \ (F(y) \rightarrow G(x))) \rightarrow (F(w) \wedge G(w))]$$

Na posljednju formulu primjenjujemo glavni test:

$$\forall z \exists x \exists y \exists w[(F(z) \ \wedge \ (F(y) \to G(x))) \to (F(w) \wedge G(w))] \quad \perp \quad (..a..)$$

$$\exists x \exists y \exists w[(F(a) \ \wedge \ (F(y) \to G(x))) \to (F(w) \wedge G(w))] \quad \perp \ @$$

$$\exists y \exists w[(F(a) \ \wedge \ (F(y) \to G(a))) \to (F(w) \wedge G(w))] \quad \perp \ @$$

$$\exists w[(F(a) \ \wedge \ (F(a) \to G(a))) \to (F(w) \wedge G(w))] \quad \perp \ @$$

$$(F(a) \ \wedge \ (F(a) \to G(a))) \to (F(a) \wedge G(a)) \quad \perp$$

$$F(a) \ \wedge \ (F(a) \to G(a)) \quad \top$$

$$F(a) \wedge G(a) \quad \perp$$

$$F(a) \quad \top$$

$$F(a) \to G(a) \quad \top$$

$$\begin{array}{ccc} F(a) \ \perp & & G(a) \ \top \\ X & & \begin{array}{ccc} F(a) \ \perp & & G(a) \ \perp \\ X & & X \end{array} \end{array}$$

Sve grane su završile kontradikcijom pa zaključujemo da je dana formula valjana.

2. Pomoću glavnog testa ispitajte valjanost sljedećih formula:

   a) $(B \to (\forall x A(x) \wedge \forall x C(x))) \to (\neg B \vee \forall x(A(x) \wedge C(x)))$, pri čemu je $B$ zatvorena formula;

   b) $\forall x \forall y P(x,y) \to (\exists y \exists x P(y,x) \ \vee \ \exists x \exists y P(x,y))$;

   c) $(\neg A \wedge (\exists x B(x) \vee \exists x C(x))) \ \leftrightarrow \ \neg(A \vee \forall x(\neg B(x) \wedge \neg C(x)))$;

   d) $\forall x \forall y(P(x,y) \wedge Q(x)) \to (\forall x \forall y P(x,y) \wedge \forall x Q(x))$.

   Rješenje: Sve navedene formule su valjane.

3. Odredite prvo preneksnu normalnu formu formule

$$(\forall x F(x) \vee (\exists x F(x) \to \forall x G(x))) \to (\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)),$$

a zatim ispitajte je li dobivena preneksna normalna forma oboriva.

4. Pomoću glavnog testa ispitajte vrijedi li:

   a) $\{\forall x \forall y (F(x,y) \to \neg F(y,x))\} \models \neg \exists x F(x,x)$;

   b) $\{\forall x (A(x) \to B(x))\} \models \forall y (\exists x (A(x) \land C(y,x)) \to \exists x (B(x) \land C(y,x)))$;

   c) $\{\exists x \forall y B(x,y) \to A,\ \neg A \lor \exists x \exists y B(x,y)\} \models A \lor \neg \forall y \forall x B(y,x)$, gdje je formula $A$ zatvorena;

   d) $\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \models \forall x \forall y (R(x,y) \to (R(y,x) \to R(x,x)))$;

   e) $F \to \neg \forall y \exists x R(x,y),\ \forall x \exists y R(y,x) \lor \exists x R(x,x) \models \neg F \lor \forall x \forall y R(x,y)$;

   f) $\exists x (R(x,x) \to \forall y R(x,y)) \models \forall x \forall y (\neg R(x,y) \to R(y,x))$. Ako tvrdnja ne vrijedi odredite barem jednu interpretaciju koja to dokazuje.

5. Ispitajte pomoću glavnog testa vrijedi li

$$F(a) \to G(b),\ \forall x (\neg F(x)) \models \neg G(b).$$

Rješenje: Pošto dana formula sadrži konstantske simbole $a$ i $b$ moramo prvo reći pravilo što raditi s njima prilikom glavnog testa. Po definiciji strukture za svaki konstantski simbol mora postojati element u nosaču. To znači da prije početka testiranja smatramo da nosač strukture sadrži barem dva elementa. Interpretacije konstatskih simbola, kao i obično u ovoj točki, označavamo istim znakovima. Glavni test zapisujemo u obliku stabla ovako:

$$
\begin{array}{ll}
F(a) \to G(b) & \top \\
\forall x(\neg F(x)) & \top \quad a, b \\
\neg G(b) & \perp \\
G(b) & \top \\
\neg F(a) & \top \\
F(a) & \perp \\
\neg F(b) & \top \\
F(b) & \perp
\end{array}
$$

$$
F(a) \ \perp \qquad\qquad G(b) \ \top
$$

Pošto sve grane nisu završile kontradikcijom zaključujemo da dana tvrdnja nije istinita, tj. formula $\neg G(b)$ logički ne slijedi iz skupa formula $\{F(a) \to G(b),\ \forall x(\neg F(x))\}$.

6. Pomoću glavnog testa ispitajte je li ispunjiva formula

$$(\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x Q(x)) \wedge \neg \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x)).$$

7. Neka je $A$ zatvorena formula, a $B$ formula s točno jednom slobodnom varijablom. Koristeći glavni test dokažite ili opovrgnite

$$\{\exists x B(x) \to A,\ \neg A \vee \exists x B(x)\} \models A \vee \neg \exists x B(x).$$

8. Pomoću glavnog testa odredite barem dvije strukture koje dokazuju

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \not\models \forall y(\exists x(A(y) \wedge C(y, x)) \to \exists x(B(y) \wedge C(x, x))).$$

Rješenje:

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \quad \top \ a,\ b$$

$$\forall y(\exists x(A(y) \wedge C(y,x)) \to \exists x(B(y) \wedge C(x,x))) \quad \bot \qquad (..a..)$$

$$\exists x(A(a) \wedge C(a,x)) \to \exists x(B(a) \wedge C(x,x)) \quad \bot$$

$$\exists x(A(a) \wedge C(a,x)) \quad \top \qquad (..b..)$$

$$\exists x(B(a) \wedge C(x,x)) \quad \bot \ a,\ b$$

$$A(a) \wedge C(a,b) \quad \top$$

$$A(a) \quad \top$$

$$C(a,b) \quad \top$$

$$A(a) \to B(a) \quad \top$$

$$\begin{array}{cc}
A(a) \ \bot & B(a) \ \top \\
X & B(a) \wedge C(a,a) \ \bot \\
 & \begin{array}{cc}
 B(a) \ \bot & C(a,a) \ \bot \\
 X & B(a) \wedge C(b,b) \ \bot \\
  & \begin{array}{cc}
  B(a) \ \bot & C(b,b) \ \bot \\
  X & A(b) \to B(b) \ \top \\
   & \begin{array}{cc}
   A(b) \ \bot & B(b) \ \top
   \end{array}
  \end{array}
 \end{array}
\end{array}$$

Neka je $|\mathfrak{M}| = \{a,b\}$, te $A^{\mathfrak{M}} = \{a\}$, $B^{\mathfrak{M}} = \{a\}$, i $C^{\mathfrak{M}} = \{(a,b)\}$. Zatim definiramo $|\mathfrak{N}| = \{a,b\}$, $A^{\mathfrak{N}} = \{a\}$, $B^{\mathfrak{N}} = \{a,b\}$ i $C^{\mathfrak{N}} = \{(a,b)\}$. Tada su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ tražene dvije strukture.

9. Prilikom ispitivanje valjanosti formule $\forall x \exists y A(x,y) \to \exists y \forall x A(x,y)$ proveden je sljedeći glavni test:

$$\forall x \exists y A(x,y) \to \exists y \forall x A(x,y) \quad \perp$$

$$\forall x \exists y A(x,y) \; \top \quad (..a_1..) \qquad a_1 \;\; , \;\; a_2$$

$$\exists y \forall x A(x,y) \; \perp \qquad a_1 \;\; , \;\; a_2$$

$$\exists y A(a_1,y) \;\; \top \qquad (..a_2..)$$

$$A(a_1,a_2) \;\; \top$$

$$\forall x A(x,a_1) \;\; \perp \qquad (!..a_1..)$$

$$A(a_1,a_1) \;\; \perp$$

$$\exists y A(a_2,y) \;\; \top \qquad (!..a_1..)$$

$$A(a_2,a_1) \;\; \top$$

$$\forall x A(x,a_2) \;\; \perp \qquad (!..a_2..)$$

$$A(a_2,a_2) \;\; \perp$$

Uočite da je test završen, tj. provedena je analiza za sve formule i sve elemente. Pošto test nije završen kontradikcijom možemo li zaključiti da dana formula nije valjana?

(Uočite da smo u primjeru 2.39. također ispitivali valjanost iste formule. U gornjem testu smo s znakom ! označili da upotrebljavamo stari element, iako bismo po pravilu trebali uvoditi novi element.)

10. Neka je $F$ zatvorena formula, a $R$ dvomjesni relacijski simbol. Koristeći glavni test dokažite ili opovrgnite

$$\{\neg F \lor \exists x \forall y(\neg R(x,y)),\ \forall y \exists x R(y,x) \lor \exists x R(x,x)\} \models F \to \exists x \exists y R(x,y).$$

Rješenje:

$\neg F \vee \exists x \forall y(\neg R(x,y))$ $\top$

$\forall y \exists x R(y,x) \vee \exists x R(x,x)$ $\top$

$F \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$ $\bot$

$F$ $\top$

$(I)$ $\exists x \exists y R(x,y)$ $\bot$ $@$

$\neg F$ $\top$

$F$ $\bot$

$X$

$\exists x \forall y(\neg R(x,y))$ $\top$ $(..a..)$

$(II)$ $\forall y(\neg R(a,y))$ $\top$ $@$

$\neg R(a,a)$ $\top$

$R(a,a)$ $\bot$

$(III)$ $\exists y R(a,y)$ $\bot$ $@$

$R(a,a)$ $\bot$

$\forall y \exists x R(y,x)$ $\top @$ , $c$

$(I)$ $\exists x \exists y R(x,y)$ $\bot$ $c$

$(II)$ $\forall y(\neg R(a,y))$ $\top$ $c$

$(III)$ $\exists y R(a,y)$ $\bot$ $c$

$\exists x R(a,x)$ $\top$ $(..c..)$

$R(a,c)$ $\top$

$R(a,c)$ $\bot$

$X$

$\exists x R(x,x)$ $\top$ $(..b..)$

$(I)$ $\exists x \exists y R(x,y)$ $\bot$ $b$

$(II)$ $\forall y(\neg R(a,y))$ $\top$ $b$

$(III)$ $\exists y R(a,y)$ $\bot$ $b$

$R(b,b)$ $\top$

$\exists y R(b,y)$ $\bot$ $b$

$R(b,b)$ $\bot$

$X$

Pošto su sve grane završile kontradikcijom zaključujemo da je početna tvrdnja istinita.

## 2.6 Račun teorija prvog reda

U prethodnim točkama vidjeli smo da ispitati valjanost neke formule ponekad može značiti ispitati njenu istinitost za beskonačne interpretacije. To može biti vrlo komplicirano. Zbog toga ima smisla promatrati formalne dokaze pomoću kojih bismo dobivali valjane formule (i samo njih).

U ovoj točki prvo dajemo definiciju jednog hilbertovskog sistema za logiku prvog reda, kojeg ovdje označavamo sa $RP$ (račun predikata). Nakon toga definiramo redom pojmove: dokaz, teorem i izvod. Prvo dokazujemo teorem adekvatnosti za sistem $RP$, kojim je iskazana korektnost sistema obzirom na semantiku definiranu u točki 2.3. Zatim navodimo osnovna svojstva izvoda, odnosno dokaza. Te činjenice služe nam kasnije za dokaz najvažnijeg teorema o teorijama prvog reda - generaliziranog teorema potpunosti kojeg dokazujemo u sljedećoj točki.

### 2.6.1 Osnovne definicije

Važno je naglasiti da u ovoj točki ne promatramo isti skup logičkih simbola kao prije, već samo skup $\{\neg, \rightarrow, \forall\}$. To smanjenje nije nikakvo bitno smanjenje izražajnosti jezika logike prvog reda, jer se svi "ispušteni" veznici mogu definirati pomoću veznika $\neg$ i $\rightarrow$, te je kvantifikator $\exists$ moguće izraziti pomoću $\forall$. To smanjenje skupa logičkih simbola bitno će nam skratiti dokaze koji se provode indukcijom po složenosti formule. Logičke simbole koji ne pripadaju alfabetu ipak ćemo koristiti prilikom zapisivanja nekih formula. No, ti simboli su samo pokrate za neke duže formule. Sada to točno definiramo:

$$
\begin{array}{l}
A \wedge B \ \text{ označava } \ \neg(A \rightarrow \neg B); \\
A \vee B \ \text{ označava } \ \neg A \rightarrow B; \\
A \leftrightarrow B \ \text{ označava } \ \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A)); \\
\exists x A \ \text{ označava } \ \neg \forall x(\neg A).
\end{array}
$$

Logika prvog reda je osnovni primjer teorije prvog reda. Prije smo bili definirali njen alfabet, a sada ćemo definirati pripadni račun. Nakon toga ćemo definirati čime je zadana neka teorija prvog reda.

**Definicija 2.42. Račun logike prvog reda** *zadan je s pet shema aksioma i dva pravila izvoda. Sheme aksioma su sljedeće:*

*(A1)* $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

*(A2)* $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

*(A3)* $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$;

*(A4)* $\forall x A(x) \rightarrow A(t/x)$, *gdje je term* $t$ *slobodan za varijablu* $x$ *u formuli* $A$;

*(A5)* $\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$, *gdje formula $A$ ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$.*

*Pravila izvoda su modus ponens i generalizacija, tj.*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad\qquad i \qquad\qquad \frac{A}{\forall x A}.$$

*Ovako definirani sistem kratko ćemo označavati sa RP.*

U dokazima ćemo kratko pisati **mod pon** umjesto "modus ponens", odnosno **gen** umjesto "generalizacija". Na prvi pogled čini se da se sheme aksioma $(A1)$, $(A2)$ i $(A3)$ poklapaju sa shemama iz računa sudova $RS$. No, ne smijemo zaboraviti da sada govorimo o formulama logike prvog reda, a ne logike sudova.

Nakon definicije sistema $RP$ možemo konačno točno reći čime je zadana neka teorija prvog reda.

**Definicija 2.43.** **Teorija $T$ prvog reda** *definirana je svojim jezikom, skupom aksioma i pravilima izvoda. Smatramo da je definiran jezik teorije $T$ ako smo definirali skup nelogičkih simbola $\sigma$. Po definiciji smatramo da svaka teorija $T$ sadrži sve sheme aksioma sistema RP. Te aksiome nazivamo logički aksiomi teorije Zatim, jedina pravila izvoda teorije prvog reda su modus ponens i generalizacija.*
*Aksiomi teorije $T$ koji nisu valjane formule nazivamo* **nelogički aksiomi.** *Smatramo da je zadan skup aksioma teorije $T$ ako je zadan skup nelogičkih aksioma.*[11]

**Primjer 2.44.** *Kao primjer teorije prvog reda definiramo teoriju parcijalno uređenih skupova. Pripadni skup nelogičkih simbola sadrži jedan binarni relacijski simbol $\leq$ i dvomjesni relacijski simbol za jedankost.*

*Nelogički aksiomi teorije su aksiomi za jednakost, o kojima ćemo govoriti u točki 2.8, te još sljedeće formule:* $\forall x(x \leq x)$, $\forall x \forall y(x \leq y \ \wedge y \leq x \ \to \ x = y)$ *i* $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \to \ x \leq z)$.

*Uočimo da dani aksiomi redom izražavaju refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost.*

Često ćemo za neku formulu reći da je to formula jezika neke teorije ili samo da je to formula dane teorije. Pod tim podrazumijevamo da je to formula pripadnog alfabeta.

Definicija dokaza i izvoda u proizvoljnoj teoriji prvog reda slična je kao u logici sudova. Iz sljedeće definicije su vidljive razlike.

[11]Postoje i drugi načini zadavanja teorije prvog reda. Neki autori svaki skup zatvorenih formula danog alfabeta nazivaju teorija. Zatim, za dani alfabet $\sigma$ i $\sigma$-strukturu $\mathfrak{M}$, skup svih zatvorenih $\sigma$-formula za koje je $\mathfrak{M}$ model, naziva se teorija strukture $\mathfrak{M}$ i označava sa $Th(\mathfrak{M})$.

**Definicija 2.45.** *Neka je zadana neka teorija $T$ prvog reda. Neka su $A_1, \ldots, A_n$ i $A$ formule jezika teorije $T$. Kažemo da je niz formula $A_1, \ldots, A_n$* **dokaz** *za formulu $A$ u teoriji $T$ ako vrijedi:*

*a) formula $A_n$ je upravo $A$;*

*b) za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi jedno od:*

- *formula $A_i$ je aksiom od $T$;*
- *formula $A_i$ je nastala primjenom pravila izvoda modus ponens ili generalizacije na neke formule $A_j$ i $A_k$, pri čemu je $j, k < i$.*

*Kažemo da je formula $A$* **teorem sistema** *$T$ ako u $T$ postoji dokaz za $A$. To označavamo sa $\vdash_T A$.*

Obično ćemo u ovoj točki kratko pisati $\vdash A$ umjesto $\vdash_{RP} A$. Sa $\nvdash A$ ćemo označavati činjenicu da formula $A$ nije teorem logike prvog reda, a $\nvdash_T A$ označava da formula $A$ nije teorem neke teorije $T$ prvog reda.

Sljedeća napomena bit će nam od velike pomoći prilom navođenja jednostavnih primjera teorema sistema $RP$. Koristit ćemo je i prilikom dokaza generaliziranog teorema potpunosti.

**Napomena 2.46.** *Neka je formula $A$ sudovno valjana, tj. postoje potformule $B_1, \ldots, B_n$ od $A$ tako da je formula $A' \equiv A(P_1/B_1, \ldots, P_n/B_n)$ valjana formula logike sudova. Iz teorema potpunosti za RS (tj. teorema 1.49.) slijedi da je formula $A'$ teorem sistema RS, tj. postoji konačan niz formula $C_1, \ldots, C_m$ logike sudova koji je dokaz za $A'$ u RS. Tada je očito niz formula*

$$C_1(B_1/P_1, \ldots, B_n/P_n), \ldots, C_m(B_1/P_1, \ldots, B_n/P_n)$$

*dokaz formule $A$ u sistemu RP.*

*Time smo dokazali da je svaka sudovno valjana formula teorem sistema RP.*

*Ako je $T$ neka teorija prvog reda, i $F$ sudovno valjana formula koja pripada jeziku od $T$, tada je očito $F$ teorem od $T$.*

*Na sličan način možemo dokazati da je svako dopustivo pravilo sistema RS ujedno dopustivo pravilo sitema RP. To znači da prilikom dokaza u sistemu RP možemo koristiti npr. pravila eliminacije i introdukcije veznika $\wedge$, te hipotetički silogizam.*

U sljedećem primjeru navodimo jednostavne teoreme sistema $RP$.

**Primjer 2.47.** *Lako je vidjeti da su formule $\forall x R(x) \to \forall x R(x)$, $\neg\neg\exists x R(x,a) \leftrightarrow \exists x R(x,a)$ i $\forall x \exists y R(x,z,y) \vee \neg\forall x \exists y R(x,z,y)$ sudovno valjane. Iz prethodne napomene slijedi da su to teoremi sistema RP.*

*Formula $\forall x\forall yR(x,y) \to \forall y\forall xR(x,y)$ je valjana, ali nije sudovno valjana. Sljedeći niz formula je dokaz za nju u sistemu RP.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x\forall yR(x,y) \to \forall yR(x,y)$ | (*aksiom (A4)*) |
| 2. | $\forall yR(x,y) \to R(x,y)$ | (*aksiom (A4)*) |
| 3. | $\forall x\forall yR(x,y) \to R(x,y)$ | (*hip. sil. 1. i 2.*) |
| 4. | $\forall x(\forall x\forall yR(x,y) \to R(x,y))$ | (*gen: 3.*) |
| 5. | $\forall x(\forall x\forall yR(x,y) \to R(x,y)) \to$ $(\forall x\forall yR(x,y) \to \forall xR(x,y))$ | (*aksiom (A5)*) |
| 6. | $\forall x\forall yR(x,y) \to \forall xR(x,y)$ | (*mod pon: 4. i 5.*) |
| 7. | $\forall y(\forall x\forall yR(x,y) \to \forall xR(x,y))$ | (*gen: 6.*) |
| 8. | $\forall y(\forall x\forall yR(x,y) \to \forall xR(x,y)) \to$ $(\forall x\forall yR(x,y) \to \forall y\forall xR(x,y))$ | (*aksiom (A5)*) |
| 9. | $\forall x\forall yR(x,y) \to \forall y\forall xR(x,y)$ | (*mod pon: 7. i 8.*) |

Važno je da izabrani aksiomi i pravila izvoda kao rezultat daju samo valjane formule. Upravo o tome govori sljedeći teorem.

**Teorem 2.48.** *(teorem adekvatnosti za sistem RP)*
*Svaki teorem sistema RP je valjana formula.*

*Dokaz.* Lako je provjeriti da je svaki aksiom sistema $RP$ valjana formula (vidi zadatak 3 u točki 2.3).

Za formulu $F$ kažemo da je $n$-dokaziva ako postoji barem jedan dokaz duljine $n$ u sistemu $RP$ za $F$. Indukcijom po $n$ dokazujemo da je svaka $n$-dokaziva formula valjana. Ako je $F$ 1-dokaziva tada iz definicije dokaza slijedi da je $F$ neki aksiom. No, na početku smo primijetili da je svaki aksiom sistema $RP$ valjana formula. Pretpostavimo da je za neki $n > 1$ svaka $k$-dokaziva formula, gdje je $k < n$, valjana formula. Neka je $F$ neka $n$-dokaziva formula. Iz definicije dokaza slijedi da je $F$ aksiom, ili je nastala iz nekih formula $G$ i $H$ pomoću pravila modus ponens, ili pak je nastala iz neke formule $G$ primjenom pravila generalizacije.

Ako je $F$ aksiom tada znamo da je $F$ valjana formula. Ako je $F$ nastala pomoću nekih formula $G$ i $H$ pomoću pravila modus ponens tada za $G$ i $H$ postoje dokazi čija je duljina strogo manja od $n$. Po pretpostavci indukcije slijedi da su $G$ i $H$ valjane formule. Lako je provjeriti da pravilo modus ponens čuva istinitost (vidi zadatak 5 u točki 2.3). Iz toga slijedi da je formula $F$ također valjana. Analogno zaključujemo ako je formula $F$ nastala pomoću pravila generalizacije. □

Analogni rezultat vrijedi za sve teorije prvog reda. To ističemo u sljedećem teoremu. Dokaz teorema je sasvim analogan teoremu adekvatnosti za sistem $RP$, pa ga ispuštamo. Prvo dajemo definiciju modela teorije prvog reda.

**Definicija 2.49.** *Neka je $T$ neka $\sigma$-teorija prvog reda. Za $\sigma$-strukturu $\mathfrak{M}$ kažemo da je* **model** *za teoriju $T$ ako za sve nelogičke aksiome $F$ od $T$ vrijedi $\mathfrak{M} \models F$.*

**Teorem 2.50.** *Neka je $T$ teorija prvog reda i $F$ neka formula jezika teorije $T$. Ako vrijedi $\vdash_T F$ tada za sve modele $\mathfrak{M}$ teorije $T$ vrijedi $\mathfrak{M} \models F$.*

Iz napomene 2.46. znamo da za određeni podskup valjanih formula (sudovno valjane formule) vrijedi i obrat teorema adekvatnosti, tj. teorem potpunosti. Teorem potpunosti u punoj općenitosti dokazat ćemo u sljedećoj točki.

Sada dajemo definiciju izvoda u proizvoljnoj teoriji prvog reda.

**Definicija 2.51.** *Neka je $T$ neka teorija prvog reda. Zatim, neka je $\Gamma$ skup formula jezika teorije $T$, te $A$ formula istog jezika. Kažemo da je niz $A_1, \ldots, A_n$ formula teorije $T$* **izvod** *iz skupa $\Gamma$ formule $A$ u teoriji $T$, u oznaci $\Gamma \vdash_T A$, ako vrijedi:*

*a) formula $A_n$ je upravo formula $A$;*

*b) za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

- *$b_1$) $A_i$ je aksiom teorije $T$;*
- *$b_2$) $A_i \in \Gamma$;*
- *$b_3$) formula $A_i$ je nastala iz nekih $A_k$, $A_j$ $(k, j < i)$ pomoću pravila izvoda modus ponens ili generalizacije.*

Obično ćemo u ovom poglavlju kratko zapisivati $\Gamma \vdash A$ umjesto $\Gamma \vdash_{RP} A$.

### 2.6.2 Metateoremi o teorijama prvog reda

U ovoj točki navodimo neke teoreme o teorijama prvog reda, tj. promatramo metateoreme. Neka je $T$ proizvoljna, ali fiksirana teorija prvog reda. Sve formule koje spominjemo u ovoj točki pripadaju jeziku teorije $T$.

Sada teorem dedukcije više ne vrijedi u istom obliku kao što je bio izrečen i dokazan za račun sudova. Točnije, za proizvoljnu formulu $A$, za koju vrijedi $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, ne mora vrijediti $\Gamma \vdash A \to B$. To pokazujemo u sljedećem primjeru.

**Primjer 2.52.** *Neka je $A$ atomarna formula $P(x)$, i $\Gamma = \emptyset$, te $B \equiv \forall x P(x)$. Primjenom pravila generalizacije lako dobivamo da vrijedi $\Gamma \cup \{A\} \vdash \forall x A$. Neka je $\mathfrak{M}$ struktura za formulu $A$ zadana sa $|\mathfrak{M}| = \{a,\ b\}$ i $P^{\mathfrak{M}} = \{a\}$. Očito $\mathfrak{M} \not\models A \to \forall x A$, pa formula $A \to \forall x A$ nije valjana. Iz teorema adekvatnosti za sistem RP slijedi $\not\vdash A \to \forall x A$. Tada posebno za $\Gamma = \emptyset$ slijedi $\Gamma \not\vdash A \to \forall x A$.*

**Teorem 2.53.** *(teorem dedukcije)*
*Neka je $\Gamma$ skup formula teorije $T$, $A$ zatvorena, a $B$ proizvoljna formula. Ako vrijedi $\Gamma \cup \{A\} \vdash_T B$ tada vrijedi i $\Gamma \vdash_T A \to B$.*

*Dokaz.* Za formulu $F$ kažemo da je $n$-izvodljiva iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$ ako postoji barem jedan izvod u $T$ iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$ čija je duljina $n$. Indukcijom po $n$ dokazat ćemo da za svaku $n$-izvodljivu formulu $F$ iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$ vrijedi $\Gamma \vdash_T A \to F$. Očito iz toga slijedi tvrdnja teorema.

Prilikom dokaza baze i koraka indukcije javljuju se ista tri posebna slučaja, pa prvo njih razmatramo.

a) Formula $F$ je aksiom teorije $T$. U tom slučaju izvod formule $A \to F$ iz skupa $\Gamma$ u teoriji $T$ je dan sljedećim nizom formula:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $F$ | (aksiom) |
| 2. | $F \to (A \to F)$ | (aksiom $(A1)$) |
| 3. | $A \to F$ | (mod pon: 1. i 2.) |

b) Formula $F$ je element skupa $\Gamma$. Tada je jedan izvod formule $A \to F$ iz skupa $\Gamma$ dan sljedećim nizom formula:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $F$ | (iz $\Gamma$) |
| 2. | $F \to (A \to F)$ | (aksiom $(A1)$) |
| 3. | $A \to F$ | (mod pon: 1. i 2.) |

c) Formula $F$ je upravo formula $A$. Tada se tražena tvrdnja $\Gamma \vdash_T A \to F$ zapravo svodi na $\Gamma \vdash_T A \to A$. Pošto je formula $A \to A$ sudovno valjana tada zbog napomene 2.46. imamo $\vdash_T A \to A$, a onda i $\Gamma \vdash_T A \to A$.

Sada indukcijom po $n$ dokazujemo da za svaku $n$-izvodljivu formulu $F$ iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$ vrijedi $\Gamma \vdash_T A \to F$.

Neka je formula $F$ 1-izvodljiva iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$. Tada iz definicije izvoda slijedi da formula $F$ može biti aksiom ili iz skupa pretpostavki, tj. iz $\Gamma \cup \{A\}$. Tvrdnja je za oba slučaja već dokazana u prethodno razmatranim slučajevima a), b) i c).

Neka je $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ koji ima svojstvo da za sve $k < n$, i sve $k$-izvodljive formule $G$ iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$, vrijedi $\Gamma \vdash_T A \to G$. Neka je $F$ proizvoljna $n$-izvodljiva formula iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$. Razlikujemo slučajeve obzirom na način javljanja formule $F$ u izvodu. Ako je $F$ aksiom ili iz skupa pretpostavki tada opet iz prije dokazanih specijalnih slučajeva a), b) i c) slijedi tražena tvrdnja. Preostalo je još dokazati tvrdnju za slučaj kada je formula $F$ nastala primjenom pravila izvoda modus ponens ili generalizacije.

(i) Neka je formula $F$ nastala primjenom pravila modus ponens iz formula $G$ i $H$. Neka je $G \equiv H \rightarrow F$. Očito za formule $G$ i $H$ postoje izvodi iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$ čija je duljina strogo manja od $n$. Po pretpostavci indukcije vrijedi $\Gamma \vdash_T A \rightarrow H$ i $\Gamma \vdash_T A \rightarrow (H \rightarrow F)$. Primjenom sheme aksioma $(A2)$ imamo

$$\vdash_T (A \rightarrow (H \rightarrow F)) \rightarrow ((A \rightarrow H) \rightarrow (A \rightarrow F)).$$

Sada dva puta primjenom pravila modus ponens slijedi $\Gamma \vdash_T A \rightarrow F$.

(ii) Neka je formula $F$ dobivena primjenom pravila generalizacije iz neke formule $G$. Tada je $F \equiv \forall x G$. Pošto za formulu $G$ postoji izvod iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$, čija je duljina strogo manja od $n$, tada po pretpostavci indukcije slijedi $\Gamma \vdash_T A \rightarrow G$. Primjenom pravila generalizacije imamo $\Gamma \vdash_T \forall x(A \rightarrow G)$. Po shemi aksioma $(A5)$ vrijedi

$$\vdash_T \forall x(A \rightarrow G) \rightarrow (A \rightarrow \forall x G)$$

(po pretpostavci teorema formula $A$ je zatvorena). Primjenom pravila modus ponens dobivamo traženu tvrdnju $\Gamma \vdash_T A \rightarrow \forall x G$, tj. $\Gamma \vdash_T A \rightarrow F$.

$\square$

Detaljno analizirajući dokaz teorema dedukcije može se zaključiti da formula $A$ ne mora biti nužno zatvorena. Dovoljno je da postoji izvod za $B$ iz $\Gamma \cup \{A\}$ u kojem se ne koristi pravilo generalizacije za varijablu koja ima slobodan nastup u formuli $A$.

**Primjer 2.54.** *Kao primjenu teorema dedukcije dokazat ćemo da je formula* $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$ *teorem sistema RP. Očito je dovoljno dokazati da vrijedi*

$$\{\forall x(A \rightarrow B),\ \forall x A\} \vdash \forall x B.$$

*Sljedeći niz formula je jedan izvod za* $\forall x B$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x A \rightarrow A$ | (*aksiom* $(A4)$) |
| 2. | $\forall x A$ | (*pretpostavka*) |
| 3. | $A$ | (*mod pon: 1. i 2.*) |
| 4. | $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ | (*aksiom* $(A4)$) |
| 5. | $\forall x(A \rightarrow B)$ | (*pretpostavka*) |
| 6. | $A \rightarrow B$ | (*mod pon: 4. i 5.*) |
| 7. | $B$ | (*mod pon: 3. i 6.*) |
| 8. | $\forall x B$ | (*gen: 7.*) |

*Strogo gledajući u gornjem dokazu koristili smo jaču verziju teorema dedukcije, jer formule* $\forall x(A \rightarrow B)$ *i* $\forall x A$ *ne moraju biti zatvorene. No, u izvodu* *nismo koristili pravilo generalizacije za varijable koje imaju slobodan nastup u formuli $\forall x(A \to B)$ ili $\forall xA$.*

*Iz dokazane tvrdnje lako slijedi $\vdash \forall x(A \leftrightarrow B) \to (\forall xA \to \forall xB)$, a onda i*

$$\vdash \forall x(A \leftrightarrow B) \to (\forall xA \leftrightarrow \forall xB).$$

Sada navodimo još neke metateoreme.

**Teorem 2.55.** *Neka je $T$ proizvoljna teorija prvog reda. Za sve formule $A$ teorije $T$ vrijedi:*

$$\vdash_T A \quad \textit{ako i samo ako} \quad \vdash_T \overline{A}.$$

*(Sa $\overline{A}$ je označeno univerzalno zatvorenje formule $A$, tj. ako su $x_1, \ldots, x_n$ sve varijable koje imaju slobodni nastup u formuli $A$ tada je $\overline{A} \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n A$).*

*Dokaz.* Ako je $A$ teorem teorije $T$ tada $n$-puta primjenom pravila generalizacije slijedi da je to i formula $\overline{A}$.

Ako je $\overline{A}$ teorem teorije $T$ tada primjenom sheme aksioma $(A4)$ i pravila modus ponens lako slijedi da je i formula $A$ teorem teorije $T$.

Sada navodimo dva teorema koji govore o kvantifikatorima. To su teorem o distribuciji kvantifikatora i teorem o negaciji prefiksnog oblika.

**Teorem 2.56.** *(teorem o distribuciji kvantifikatora)*
*Neka je $T$ $\sigma$-teorija prvog reda. Neka su $A$ i $B$ $\sigma$-formule, i za sve $i = 1, \ldots, n$ neka je $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Ako vrijedi $\vdash_T A \leftrightarrow B$ tada vrijedi i*

$$\vdash_T Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n A \leftrightarrow Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n B.$$

*Dokaz.* Primjenom pravila generalizacije iz pretpostavke teorema $\vdash_T A \leftrightarrow B$ slijedi $\vdash_T \forall x(A \leftrightarrow B)$. Iz primjera 2.54. znamo da vrijedi $\vdash_T \forall x(A \leftrightarrow B) \to (\forall xA \leftrightarrow \forall xB)$. Tada lako slijedi $\vdash_T \forall xA \leftrightarrow \forall xB$. Na sličan način bismo dobili da vrijedi $\vdash_T \exists xA \leftrightarrow \exists xB$.

Tvrdnju teorema sada je lako dokazati po $n$, tj. po broju kvantifikatora $Q_i$.
□

U točki 2.4 bili smo naveli da vrijede De Morganova pravila za kvantifikatore, tj. vrijedi $\neg\forall xF \Leftrightarrow \exists x\neg F$ i $\neg\exists xF \Leftrightarrow \forall x\neg F$. U sljedećem teoremu dajemo sintaktičku općenitu verziju De Morganovih pravila.

**Teorem 2.57.** *(teorem o negaciji prefiksnog oblika)*
*Neka je $T$ proizvoljna $\sigma$-teorija prvog reda. Neka je $A$ $\sigma$-formula, i za sve $i = 1, \ldots, n$ neka je $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Tada vrijedi*

$$\vdash_T \neg Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n A \leftrightarrow \overline{Q_1} x_1 \ldots \overline{Q_n} x_n (\neg A),$$

*gdje je*

$$\overline{Q_i} \equiv \begin{cases} \forall, & \textit{ako je } Q_i \textit{ simbol } \exists; \\ \exists, & \textit{ako je } Q_i \textit{ simbol } \forall. \end{cases}$$

*Dokaz.* Tvrdnju teorema ćemo dokazati indukcijom po broju kvantifikatora. Prvo promotrimo dva posebna slučaja koja ćemo koristiti u daljnjem dokazu.

Pošto je formula $\neg\neg\forall x(\neg A) \leftrightarrow \forall x(\neg A)$ sudovno valjana tada iz napomene 2.46. slijedi da je i teorem. Iz definicije simbola $\exists$ tada imamo

$$\vdash_T \neg\exists x A \leftrightarrow \forall x(\neg A) \qquad (*)$$

Dokažimo sada da vrijedi

$$\vdash_T \neg\forall x A \leftrightarrow \exists x(\neg A) \qquad (**)$$

Iz definicije simbola $\exists$ slijedi da za sve formule $B$ vrijedi $\vdash_T \neg\forall x(\neg B) \leftrightarrow \exists x B$. Posebno, za formulu $B \equiv \neg A$ imamo $\vdash_T \neg\forall x(\neg\neg A) \leftrightarrow \exists x(\neg A)$. Preostalo je još dokazati da vrijedi $\vdash_T \forall x(\neg\neg A) \leftrightarrow \forall x A$. No, formula $\neg\neg A \leftrightarrow A$ je sudovno valjana, a onda je i teorem od $T$. Iz prethodnog teorema o distribuciji kvantifikatora sada slijedi tražena tvrdnja.

Sada prelazimo na dokaz tvrdnje teorema. Kao što smo već bili naveli dokaz provodimo indukcijom po broju kvantifikatora $Q_i$. Ako je $n = 1$ tada tvrdnja teorema slijedi iz prije dokazanih činjenica $(*)$ i $(**)$.

Pretpostavimo da vrijedi

$$\vdash_T \neg Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n A \leftrightarrow \overline{Q_2} x_2 \ldots \overline{Q_n} x_n(\neg A).$$

Promotrimo slučaj kada je $Q_1$ kvantifikator $\forall$. Iz prethodnog teorema o distribuciji kvantifikatora slijedi

$$\vdash_T \exists x_1(\neg Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n A) \leftrightarrow \exists x_1(\overline{Q_2} x_2 \ldots \overline{Q_n} x_n(\neg A)).$$

Iz dokazane tvrdnje $(**)$ slijedi

$$\vdash_T \neg\forall x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n A \leftrightarrow \exists x_1(\overline{Q_2} x_2 \ldots \overline{Q_n} x_n(\neg A)).$$

No, to je upravo tražena tvrdnja za slučaj kada je $Q_1$ kvantifikator $\forall$. Na sličan način provodimo dokaz kada je $Q_1$ kvantifikator $\exists$. □

Sada navodimo teorem ekvivalencije iz kojeg odmah slijedi teorem o zamjeni, koji se često koristi (doduše, bez posebnog isticanja). U točki 2.3 naveli smo teorem 2.28. koji je semantička verzija teorema o zamjeni.

**Teorem 2.58.** *(teorem ekvivalencije)*
*Neka je sa $F(A)$ označena formula u kojoj je $A$ neka potformula. Označimo sa $F(B)$ formulu dobivenu zamjenom nekih (možda svih) nastupa potformule $A$ u $F(A)$ s nekom formulom $B$. Zatim, neka svaka varijabla koja ima slobodni nastup u formuli $A$ ili $B$, a nije vezana varijabla formule $F(A)$, pripada skupu $\{y_1, \ldots, y_k\}$. Tada vrijedi*

$$\vdash_T \forall y_1 \ \ldots\ \forall y_k(A \leftrightarrow B) \to (F(A) \leftrightarrow F(B)).$$

*Dokaz.* Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule $F(A)$. Razmotrit ćemo samo najsloženiji slučaj u dokazu koraka indukcije. Neka je $n \in \mathbb{N}$ koji ima svojstvo da za sve formule $G(A)$, čija je složenost strogo manja od $n$, vrijedi

$$\vdash_T \forall y_1 \ldots \forall y_k(A \leftrightarrow B) \to (G(A) \leftrightarrow G(B)) \qquad (*)$$

Zatim, neka je $F(A)$ formula oblika $\forall x G(A)$ čija je složenost jednaka $n$. Ako je $A \equiv F(A)$ tada tvrdnja teorema trivijalno vrijedi. Promotrimo slučaj kada je $A$ prava potformula od $F(A)$. Tada je $F(B) \equiv \forall x G(B)$. Primjenom pravila generalizacije na formulu iz $(*)$, a zatim odgovarajuće instance aksioma $(A5)$ i pravila modus ponens, dobivamo

$$\vdash_T \forall y_1 \ldots \forall y_k(A \leftrightarrow B) \to \forall x(G(A) \leftrightarrow G(B)).$$

Primjenom teorema o distribuciji kvantifikatora, tj. teorema 2.56., slijedi tražena tvrdnja. □

Jednostavna ali vrlo važna posljedica prethodnog teorema je teorem o zamjeni.

**Korolar 2.59.** *(teorem o zamjeni)*
*Neka su $F(A)$, $A$, $B$ i $F(B)$ formule kao u prethodnom teoremu. Ako vrijedi $\vdash_T A \leftrightarrow B$ tada $\vdash_T F(A) \leftrightarrow F(B)$.*

**Teorem 2.60.** *(teorem o zamjeni vezane varijable)*
*Neka je $T$ proizvoljna $\sigma$-teorija prvog reda i $A$ neka $\sigma$-formula. Neka je $\forall x B(x)$ potformula od $A$, te neka je varijabla $y$ slobodna za varijablu $x$ u formuli $B$. Označimo sa $A'$ formulu nastalu zamjenom nekih (možda i svih) nastupa potformule $\forall x B(x)$ u $A$ sa $\forall y B(y)$. Tada vrijedi*

$$\vdash_T A \leftrightarrow A'.$$

*Dokaz.* Iz aksioma (A4) slijedi da vrijedi $\vdash \forall x B(x) \to B(y)$. Primjenom pravila generalizacije slijedi $\vdash \forall y(\forall x B(x) \to B(y))$. Sada iz aksioma (A5) slijedi

$\vdash \forall y(\forall x B(x) \to \forall y B(y)) \to (\forall x B(x) \to \forall y B(y))$. Primjenom pravila modus ponens dobivamo $\vdash \forall x B(x) \to \forall y B(y)$. Analogno bismo dokazali da vrijedi $\vdash \forall y B(y) \to \forall x B(x)$. Sada primjenom teorema o zamjeni slijedi tražena tvrdnja. □

Na kraju ove točke navodimo bez dokaza dva vrlo važna teorema o teorijama prvog reda. Njihove dokaze možete pogledati npr. u [7].

**Robinsonov[12] teorem o konzistentnosti**
Neka su $\sigma_1$ i $\sigma_2$ skupovi nelogičkih simbola, te $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Neka je $T_1$ konzistentna $\sigma_1$-teorija prvog reda, a $T_2$ konzistentna $\sigma_2$-teorija prvog reda. Zatim, neka je $T$ potpuna $\sigma$-teorija takva da za sve $\sigma$-formule $F$ vrijedi:

$$\text{ako} \quad \vdash_T F \quad \text{tada} \quad \vdash_{T_1} F \quad \text{i} \quad \vdash_{T_2} F.$$

Tada je $T_1 \cup T_2$ konzistentna teorija.

Neposredna posljedica Robinsonovog tema je interpolaciona lema. Za formulu $A$ sa $\sigma_A$ označavamo skup svih nelogičkih simbola koji se pojavljuju u formuli $A$.

**Craigova interpolaciona lema**
Neka je $A \to B$ zatvorena valjana formula. Tada postoji zatvorena formula $C$ takva da su formule $A \to C$ i $C \to B$ valjane, te $\sigma_C \subseteq (\sigma_A \cup \sigma_B) \cup \{=\}$.

Važna posljedica Craigove interpolacione leme je Bethov[13] teorem o definabilnosti koji govori da je svaki implicitno definiran nelogički simbol u nekoj teoriji prvog reda moguće eksplicitno definirati.

**Zadaci:**

1. Dokažite da su sljedeće formule teoremi sistema $RP$ :

   a) $\forall x R(x) \to \exists x R(x)$;

   b) $\exists x \exists y R(x,y) \to \exists y \exists x R(x,y)$;

   c) $\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$;

   d) $\exists x(A \to B) \to (\exists x A \to B)$, ako formula $B$ ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$;

   e) $\exists x(A \to B) \to (\forall x A \to \exists x B)$.

[12] A. Robinson, 1918.–1974.
[13] E. W. Beth, 1908.–1964.

2. Neka je $F$ otvorena formula logike prvog reda i neka vrijedi $\vdash F$. Dokažite da postoji dokaz za $F$ čiji su svi elementi otovorene formule.
Uputa: vidi napomenu 2.46.

3. Dokažite da su sljedeća pravila izvoda **dopustiva**[14] u svakoj teoriji prvog reda:

a) $\exists$-introdukcija
$$\frac{A \to B}{\exists x A \to B},$$
gdje formula $B$ ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$;

c) $\forall$-introdukcija
$$\frac{A \to B}{A \to \forall x B},$$
gdje formula $A$ ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$;

e) $\forall$-eliminacija
$$\frac{A \to \forall x B}{A \to B};$$

f) $\exists$-eliminacija
$$\frac{\exists x A \to B}{A \to B}.$$

4. Primjenom teorema dedukcije dokažite da vrijedi:
$$\vdash \forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B).$$
Rješenje: Dokazujemo da vrijedi $\{\forall x(A \to B)\} \vdash (\exists x A \to \exists x B)$. U tu svrhu navodimo sljedeći izvod.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(A \to B)$ | (pretpostavka) |
| 2. | $\forall x(A \to B) \to (A \to B)$ | (aksiom (A4)) |
| 3. | $A \to B$ | (mod pon: 1. i 2.) |
| 4. | $\exists x B \to \exists x B$ | (sudovno valjana) |
| 5. | $B \to \exists x B$ | ($\exists$–eliminacija; zadatak 3) |
| 6. | $A \to \exists x B$ | (hip. sil. 3. i 5.) |
| 7. | $\exists x A \to \exists x B$ | ($\exists$–introdukcija; zadatak 3) |

5. Dokažite da su sljedeće fomule teoremi sistema $RP$ :

a) $\forall x(A \to \exists y(\neg A \vee B)) \to \forall x(A \to \exists y(A \to B))$;

[14]Definicija dopustivog pravila izvoda je dana u točki 1.6 na strani 49 za račun sudova. Sasvim analogna je definicija tog pojma za teorije prvog reda.

b) $(A \wedge \exists x(\neg(B \vee \forall yC))) \rightarrow (A \wedge \exists x(\neg B \wedge \exists y(\neg C)))$;

c) $(B \rightarrow (\forall xA \wedge \forall xC)) \rightarrow (\neg B \vee \forall x(A \wedge C))$.

Rješenje a): Formula $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ je sudovno valjana, a onda i teorem sistema $RP$. Iz teorema o distribuciji kvantifikatora slijedi

$$\vdash \exists y(\neg A \vee B) \leftrightarrow \exists y(A \rightarrow B).$$

Primjenom teorema zamjene slijedi tražena tvrdnja.

6. Odredite jesu li sljedeće formule teoremi sistema $RP$ :

   a) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow B)$, ako formula $B$ ne sadrži slobodni nastup varijable $x$;

   b) $\exists x(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\forall xA \rightarrow \exists xB)$.

7. Dokažite da sljedeće formule nisu teoremi sistema $RP$ :

   a) $\forall y\exists xR(x, y) \rightarrow \exists x\forall yR(x, y)$;

   b) $(\forall xA \leftrightarrow \forall xB) \rightarrow \forall x(A \leftrightarrow B)$.

   Uputa: Primijenite teorem adekvatnosti.

8. Neka je $P$ tromjesni relacijski simbol. Dokažite da je sljedeća formula teorem sistema $RP$ :

$$\forall x\exists y\forall z(P(x, y, z) \vee P(x, z, x)) \rightarrow \forall x\exists y(\forall zP(x, y, z) \rightarrow \exists zP(x, y, z)).$$

   Uputa: Iz zadatka 1 slijedi da je formula $\forall zP(x, y, z) \rightarrow \exists zP(x, y, z)$ teorem sistema $RP$.

9. Neka je sa $\mathfrak{F}$ označen skup svih formula logike prvog reda. Zatim, neka su dane funkcije $f_1, f_2 : \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{F})$ koje imaju sljedeća svojstva:

   a) $f_1(\emptyset) \subseteq f_2(\emptyset)$;

   b) za svaki $S \subseteq \mathfrak{F}$, i svaku formulu $F \in f_1(X)$, postoji konačan podskup $S^*$ od $S$ tako da je $F \in f_1(S^*)$;

   c) za svaki $S \subseteq \mathfrak{F}$, te svaku zatvorenu formulu $F_1$ i proizvoljnu formulu $F_2$, za koje je $F_2 \in f_1(S \cup \{F_1\})$, vrijedi $(F_1 \rightarrow F_2) \in f_1(S)$;

   d) za sve $S_1, S_2 \subseteq \mathfrak{F}$, takve da je $S_1 \subseteq S_2$, vrijedi $f_2(S_1) \subseteq f_2(S_2)$;

   e) za svaki $S \subseteq \mathfrak{F}$ i sve $H_1, H_2 \in \mathfrak{F}$, takve da je $(H_1 \rightarrow H_2) \in f_2(X)$, vrijedi $H_2 \in f_2(X \cup \{H_1\})$;

f) za formulu $F \in \mathfrak{F}$ sa $\overline{F}$ označimo univerzalno zatvorenje od $F$. Analogno, za $S \subseteq \mathfrak{F}$ neka je $\overline{S} = \{\overline{F} : F \in S\}$. Za sve $S \subseteq \mathfrak{F}$ vrijedi

$$f_1(S) \subseteq f_1(\overline{S}) \text{ i } f_2(\overline{S}) \subseteq f_2(S).$$

Dokažite da za sve $S \subseteq \mathfrak{F}$ vrijedi $f_1(S) \subseteq f_2(S)$. Definirajte preslikavanja $f_1, f_2 : \mathcal{P}(\mathfrak{F}) \to \mathcal{P}(\mathfrak{F})$ koja imaju svojstva a)-f).
Rješenje: Neka je $F \in f_1(S)$ proizvoljna formula. Iz uvjeta b) slijedi da postoji konačan podskup $S^*$ od $S$ tako da je $F \in f_1(S^*)$. Ako je $S^* = \emptyset$ tada iz uvjeta a) imamo $F \in f_2(S)$. Sada promatramo slučaj kada je $S^* \neq \emptyset$. Neka je $S^* = \{G_1, \ldots, G_n\}$. Iz činjenice $F \in f_1(S^*)$ i uvjeta f) slijedi $F \in f_1(\overline{S^*})$. Sada $n$-puta primjenom uvjeta c) dobivamo

$$\overline{G_1} \to (\overline{G_2} \to (\ldots (\overline{G_n} \to F)) \ldots) \in f_1(\emptyset).$$

Iz uvjeta a) slijedi

$$\overline{G_1} \to (\overline{G_2} \to (\ldots (\overline{G_n} \to F)) \ldots) \in f_2(\emptyset).$$

Sada $n$-puta primjenom uvjeta e) slijedi $F \in f_2(\overline{S^*})$. Primjenom uvjeta f) slijedi $F \in f_2(S^*)$. Konačno, iz uvjeta d) slijedi $F \in f_2(S)$.

### 2.6.3 Sistem prirodne dedukcije za logiku prvog reda

Sistem prirodne dedukcije za logiku prvog reda sadrži sva pravila sistema prirodne dedukcije logike sudova, tj. pravila izvoda $(\wedge E)$, $(\wedge I)$, $(\vee E)$, $(\vee I)$, $(\neg E)$, $(DN)$, $(\neg I)$, $(\to E)$, $(\to I)$, $(\leftrightarrow E)$ i $(\leftrightarrow I)$. Naravno, moramo još dodati pravila izvoda za kvantifikatore. Ovdje ih navodimo:

$$\dfrac{A(x)}{\forall x A(x)}\,(\forall I)$$ pri čemu $x$ nije slobodna varijabla niti jedne pretpostavke izvoda za formulu $A(x)$;

$$\dfrac{\forall x A(x)}{A(t/x)}\,(\forall E)$$ gdje je $t$ proizvoljan term koji je slobodan za varijablu $x$ u formuli $A(x)$;

$$\dfrac{A(t/x)}{\exists A(x)}\,(\exists I)$$ gdje je $t$ proizvoljan term koji je slobodan za varijablu $x$ u formuli $A(x)$;

$$\dfrac{\exists x A(x) \qquad \begin{array}{c} \overline{A(x)}^{\,n} \\ \vdots \\ B \end{array}}{B}\,(\exists E)$$ pri čemu varijabla $x$ nema slobodnih nastupa u formuli $B$, te niti u jednoj pretpostavci u izvodu formule $B$, osim možda u formuli $A(x)$.

Na analogan način bi se proširile definicije pojmova iz logike sudova kao što su označeno stablo i izvod. Navodimo jedan primjer izvoda u sistemu prirodne dedukcije za logiku prvog reda.

**Primjer 2.61.** *Neka je $A$ formula koja ne sadrži slobodnih nastupa varijable $x$. Za ilustraciju ćemo dokazati da je formula $\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))$ teorem sistema prirodne dedukcije logike prvog reda.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\forall x(A \to B(x))}^{\,1}}{A \to B(x)}\,(\forall E) \qquad \overline{A}^{\,2}}{B(x)}\,(\to E)}{\forall x B(x)}\,(\forall I)}{A \to \forall x B(x)}\,(\to I)}{\forall x(A \to B(x)) \to (A \to \forall x B(x))}\,(\to I)$$

Za sistem prirodne dedukcije logike prvog reda vrijedi teorem adekvatnosti, tj. svaki teorem je valjana formula. Može se dokazati da vrijedi i obrat, tj. teorem potpunosti. Zatim, ovdje je također moguća normalizacija. Prirodna dedukcija u logici prvog reda detaljno je obrađena u [33], [42], [43] i [14].

**Zadaci:**

1. Odredite izvode u sistemu prirordne dedukcije za:

   a) $(A \to \forall xB) \leftrightarrow \forall x(A \to B)$, pri čemu varijabla $x$ nema slobodni nastup u formuli $A$;

   b) $\exists x(A \vee B) \leftrightarrow (\exists xA \vee \exists xB)$;

   c) $\neg\exists xA \leftrightarrow \forall x\neg A$;

   d) $\exists x(A \to B) \leftrightarrow (\forall xA \to B)$, pri čemu varijabla $x$ nema slobodni nastup u formuli $B$;

   e) $\forall x(A \to B) \leftrightarrow (\exists xA \to B)$, pri čemu varijabla $x$ nema slobodni nastup u formuli $B$;

2. Dokažite teorem adekvatnosti za sistem prirodne dedukcije.

3. Dokažite da sljedeće formule nisu teoremi sistema prirodne dedukcije:

   a) $\exists x(A \wedge B) \leftrightarrow (\exists xA \wedge \exists xB)$;

   b) $\exists x(A \to B) \leftrightarrow (\forall xA \to B)$;

   c) $\forall x\exists yA \to \exists y\forall xA$;

   d) $\exists xA \to \forall xA$.

4. Dokažite da je u definicijama pravila izvoda za kvantifikatore nužno navoditi uvjete za varijable i terme.

## 2.7 Teorem potpunosti i posljedice

Sada nam je glavni cilj dokazati teorem potpunosti, tj. da je svaka valjana formula teorem sistema $RP$. Prvo ćemo dokazati jači teorem, tzv. generalizirani teorem potpunosti. Nakon toga će teorem potpunosti slijediti kao jednostavan korolar. Prije samih dokaza navedenih teorema dajemo definiciju konzistentne teorije prvog reda, te navodimo osnovna svojstva vezana uz konzistentnost.

### 2.7.1 Konzistentnost

U prvi tren čini se da je sljedeća definicija konzistentnog skupa formula sasvim ista kao za logiku sudova. No, moramo imati na umu da je sada jezik, a i skup aksioma drugačiji.

**Definicija 2.62.** *Neka je $T$ proizvoljna teorija prvog reda, te $\sigma$ pripadna signatura.*
*Kažemo da je teorija $T$* **konzistentna** *ako ne postoji $\sigma$–formula $F$ tako da su $F$ i $\neg F$ teoremi teorije $T$.*
*Inače kažemo da je teorija $T$* **inkonzistentna.**

*Za skup $\sigma$–formula $\Gamma$ kažemo da je* **konzistentan** *u teoriji $T$ ako ne postoji $\sigma$–formula $F$ tako da vrijedi $\Gamma \vdash_T F$ i $\Gamma \vdash_T \neg F$.*
*Inače kažemo da je skup formula $\Gamma$* **inkonzistentan** *u teoriji $T$.*

**Teorem 2.63.** *Teorija $RP$ je konzistentna.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da su za neku formulu $F$ istovremeno $F$ i $\neg F$ teoremi logike prvog reda. Iz teorema adekvatnosti 2.48. tada slijedi da su formule $F$ i $\neg F$ valjane, što je nemoguće. □

Lako je vidjeti da je svaki podskup konzistentnog skupa konzistentan. Očito je svaki nadskup inkonzistentnog također inkonzistentan. Skup formula može biti konzistentan u nekoj teoriji $T$, a inkonzistentan u nekoj drugoj teoriji $T'$.

**Napomena 2.64.** *Primijetimo da je teorija $T$ prvog reda konzistentna ako i samo ako je konzistentan skup svih teorema teorije $T$ obzirom na logiku prvog reda.*

U sljedećoj propoziciji navodimo osnovna svojstva konzistentnih skupova. Pošto su dokazi danih tvrdnji sasvim isti kao u propozicionalnom slučaju (vidi propozicije 1.40., 1.42. i 1.43.) ovdje ih nećemo ponovno pisati.

**Propozicija 2.65.** *Neka je $T$ teorija prvog reda, $\sigma$ pripadna signatura, i $\Gamma$ skup $\sigma$–formula. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) *Skup* $\Gamma$ *je konzistentan u teoriji* $T$ *ako i samo je svaki konačan podskup od* $\Gamma$ *konzistentan u teoriji* $T$*;*

b) *Skup formula* $\Gamma$ *je konzistentan u teoriji* $T$ *ako i samo ako postoji* $\sigma$*–formula* $F$ *tako da vrijedi* $\Gamma \not\vdash_T F$;

c) *Ako je* $F$ *zatvorena* $\sigma$*–formula i vrijedi* $\Gamma \not\vdash_T F$*, tada je skup* $\Gamma \cup \{\neg F\}$ *konzistentan u teoriji* $T$*;*

d) *Ako je* $F$ *zatvorena* $\sigma$*–formula i vrijedi* $\Gamma \not\vdash_T \neg F$*, tada je skup formula* $\Gamma \cup \{F\}$ *konzistentan u teoriji* $T$*;*

e) *Ako postoji model teorijie* $T$ *koji je model i za skup formula* $\Gamma$ *tada je skup* $\Gamma$ *konzistentan u teoriji* $T$*;*

f) *Ako je* $\Gamma$ *konzistentan skup formula u teoriji* $T$ *i* $F$ *zatvorena* $\sigma$*–formula, tada je bar jedan od skupova* $\Gamma \cup \{F\}$ *i* $\Gamma \cup \{\neg F\}$ *konzistentan u teoriji* $T$*;*

g) *Ako je* $\Gamma$ *konzistentan skup formula u teoriji* $T$*, te je* $F$ $\sigma$*–formula takva da vrijedi* $\Gamma \vdash F$*, tada je i skup* $\Gamma \cup \{F\}$ *konzistentan u teoriji* $T$*.*

Sada nam je cilj dokazati da za svaku konzistentnu teoriju prvog reda postoji potpuno proširenje. U tu svrhu navodimo sljedeću lemu, korolar i definicije.

**Lema 2.66.** *Skup svih formula logike prvog reda je prebrojiv.*

*Dokaz.* Iz definicije 2.2. znamo da je alfabet logike prvog reda konačna unija prebrojivih i konačnih skupova. To znači da je alfabet logike prvog reda prebrojiv skup. Tada iz propozicije 1.1. slijedi da je skup svih riječi alfabeta logike prvog reda prebrojiv. Očito je skup svih formula beskonačan. Iz toga slijedi da je taj skup prebrojiv. □

**Korolar 2.67.** *Skup svih formula proizvoljne teorije prvog reda je prebrojiv. Skup svih zatvorenih formula proizvoljne teorije prvog reda je prebrojiv. Posebno je prebrojiv skup svih zatvorenih formula logike prvog reda.*

**Definicija 2.68.** *Za teoriju* $T$ *prvog reda kažemo da je* **potpuna** *ako za svaku zatvorenu formulu* $F$ *pripadnog jezika vrijedi* $\vdash_T F$ *ili* $\vdash_T \neg F$*.*

Svaka inkonzistentna teorija je potpuna. U sljedećoj lemi dokazat ćemo da postoje konzistentne potpune teorije. No, prije nam treba definicija proširenja teorije.

**Definicija 2.69.** *Neka su $T$ i $T'$ teorije prvog reda, te neka su redom sa $\sigma$, odnosno sa $\sigma'$, označeni njihovi skupovi nelogičkih simbola.*

*Kažemo da je teorija $T'$* **proširenje teorije** *$T$ ako je $\sigma \subseteq \sigma'$ i za sve $\sigma$-formule $F$ vrijedi da iz pretpostavke $\vdash_T F$ slijedi $\vdash_{T'} F$.*

*Ako je teorija $T'$ proširenje teorije $T$ i vrijedi $\sigma = \sigma'$ tada kažemo da je $T'$* **jednostavno proširenje** *$T$.*

*Kažemo da su teorije $T$ i $T'$ prvog reda* **ekvivalentne** *ako je $T$ jednostavno proširenje od $T'$, i obratno.*

Ako je konzistentna teorija $T'$ proširenje teorije $T$, tada je očito i $T$ konzistenta teorija.

Ako je $T$ teorija prvog reda i $S$ skup formula pripadnog jezika, tada sa $T+S$ označavamo teoriju nastalu dodavanjem svih formula iz $S$ skupu aksioma od $T$. Ako je skup $S$ jednočlan, tj. $S = \{F\}$, tada umjesto $T + \{F\}$ ponekad kratko pišemo $T + F$.

Lindenbaumovu lemu za logiku sudova, tj. lemu 1.45., bili smo detaljno dokazali. Dokaz Lindenbaumove leme za teorije prvog reda sasvim analogan, ali ćemo ga ipak napisati koako bismo istaknuli neke detalje.

**Lema 2.70.** *(Lindenbaumova lema)*
*Za svaku konzistentnu teoriju $T$ prvog reda postoji konzistentno potpuno proširenje.*

*Dokaz.* Iz korolara 2.67. znamo da je skup svih zatvorenih formula teorije $T$ prebrojiv, pa neka niz $F_0,\ F_1,\ F_2,\ \ldots$ sadrži sve zatvorene formule teorije $T$. Definiramo niz teorija $(T_n)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} T_0 &= T; \\ T_{n+1} &= \begin{cases} T_n + F_n, & \text{ako } \vdash_{T_n} F_n; \\ T_n + \neg F_n, & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned}$$

Indukcijom po $n$ dokazujemo da je svaka teorija $T_n$ konzistentna. Teorija $T_0$ je konzistentna po pretpostavci leme. Pretpostavimo sada da je za neki $n \in \mathbb{N}$ teorija $T_n$ konzistentna. Ako je $T_{n+1}$ jednaka $T_n + F_n$ tražena tvrdnja slijedi iz tvrdnji g) iz propozicije 2.65. Ako je pak $T_{n+1} = T_n + \neg F_n$ tada vrijedi $\not\vdash_{T_n} F_n$, a onda iz propozicije 2.65. c) slijedi da je teorija $T_{n+1}$ konzistentna.

Sa $T'$ označimo teoriju čiji je skup nelogičkih aksioma unija skupova aksioma teorija $T_n$. Očito je $T'$ proširenje od $T$. Preostalo je dokazati da je teorija $T'$ konzistentna i potpuna.

Za dokaz konzistentnosti teorije $T'$ iz napomene 2.64. slijedi da je dovoljno dokazati da je skup svih teorema od $T'$ konzistentan. Neka je $S$ proizvoljan konačan podskup skupa svih teorema od $T'$. Po definiciji niza $(T_n)$ vrijedi da je za sve $n \in \mathbb{N}$ skup svih teorema teorije $T_n$ podskup skupa svih teorema teorije $T_{n+1}$. Iz toga slijedi da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $S$ podskup skupa svih teorema od $T_n$. No, prije smo dokazali da je teorija $T_n$ konzistentna, pa je i skup $S$ konzistentan kao podskup konzistentnog skupa. Time smo dokazali da je svaki konačan podskup skupa svih teorema od $T'$ konzistenatan. Iz propozicije 2.65. a) slijedi tada da je i teorija $T'$ konzistentna.

Dokažimo još da je $T'$ potpuna teorija. Neka je $F$ proizvoljna zatvorena formula jezika teorije $T'$. Tada je to i formula jezika teorije $T$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $F \equiv F_n$. Ako vrijedi $\vdash_{T_n} F_n$ tada naravno vrijedi i $\vdash_{T'} F_n$. Ako pak je $\not\vdash_{T_n} F_n$, tada je po definiciji $T_{n+1} = T_n + \neg F_n$. Tada očito $\vdash_{T_{n+1}} \neg F_n$, a onda vrijedi i $\vdash_{T'} \neg F_n$. □

**Zadaci:**

1. Neka je $T$ teorija prvog reda i $\Gamma$ skup formula od $T$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

   a) skup $\Gamma$ je inkonzistentan;

   b) za sve formule $A$ vrijedi $\Gamma \vdash_T \neg(A \to A)$;

   c) postoji formula $A$ tako da vrijedi $\Gamma \vdash_T \neg(A \to A)$.

2. Neka je $T$ teorija prvog reda, $\Gamma$ skup formula i $A$ neka zatvorena formula od $T$. Dokažite da je skup $\Gamma \cup \{A\}$ inkonzistentan ako i samo ako vrijedi $\Gamma \vdash_T \neg A$.
   Rješenje: Neka je skup $\Gamma \cup \{A\}$ inkonzistentan. Iz tvrdnje b) propozicije 2.65. znamo da je tada svaka formula izvediva iz skupa $\Gamma \cup \{A\}$. Tada posebno vrijedi $\Gamma \cup \{A\} \vdash_T \neg A$. Primjenom teorema dedukcije slijedi $\Gamma \vdash_T A \to \neg A$. Formula $(A \to \neg A) \to \neg A$ je sudovno valjana, pa iz napomene 2.46. slijedi $\vdash_{RP} (A \to \neg A) \to \neg A$. Posebno imamo da vrijedi $\Gamma \vdash_T (A \to \neg A) \to \neg A$. Iz ovog posljedenjeg, i prije dokazane činjenice $\Gamma \vdash_T A \to \neg A$, primjenom pravila modus ponens slijedi $\Gamma \vdash_T \neg A$.

3. Neka je skup $\Gamma \cup \{\exists x A(x)\}$ konzistentan skup formula neke teorije prvog reda. Zatim, neka je $y$ varijabla koja ne nastupa niti u jednoj formuli skupa $\Gamma \cup \{\exists x A(x)\}$. Dokažite da je tada i skup $\Gamma \cup \{\exists x A(x),\ A(y/x)\}$ konzistentan.

4. Neka je $T$ neka teorija prvog reda i $\Gamma$ neki skup formula od $T$. Kažemo da je skup formula $\Gamma$ **maksimalno konzistentan** ako je $\Gamma$ konzistentan skup formula i svaki pravi nadskup od $\Gamma$ je inkonzistentan. Dokažite da za sve formule $F$ i $G$ vrijede sljedeće tvrdnje:

a) $\Gamma \vdash_T F$ ako i samo ako $F \in \Gamma$;

b) $F \in \Gamma$ ili $\neg F \in \Gamma$, ali ne oboje;

c) $F \notin \Gamma$ ako i samo ako $\neg F \in \Gamma$;

d) $(F \wedge G) \in \Gamma$ ako i samo ako $F \in \Gamma$ i $G \in \Gamma$;

e) $(F \vee G) \in \Gamma$ ako i samo ako $F \in \Gamma$ ili $G \in \Gamma$;

f) $(F \rightarrow G) \in \Gamma$ ako i samo ako $F \notin \Gamma$ ili $G \in \Gamma$;

5. Dokažite da je svaki maksimalno konzistentan skup formula ujedno i potpun. Zatim odredite jedan primjer potpunog skupa formula koji nije maksimalno konzistentan.

6. Neka je $T$ potpuna i konzistentna teorija prvog reda. Zatim, neka je $\mathfrak{M}$ struktura tako da za proizvoljnu zatvorenu atomarnu formulu $F$ od $T$ vrijedi da je činjenica $\mathfrak{M} \models F$ ekvivalentna sa $\vdash_T F$. Dokažite da prethodna ekvivalencija vrijedi za sve zatvorene formule oblika $F_1 \rightarrow F_2$ i $\neg F_1$, gdje su $F_1$ i $F_2$ atomarne formule.

7. Za teoriju $T$ prvog reda kažemo da je potpuna u odnosu na strukturu $\mathfrak{M}$ ako za sve formule $F$ vrijedi da je $\vdash_T F$ ekvivalentno sa $\mathfrak{M} \models F$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentnte:

   a) teorija $T$ je potpuna;

   b) teorija $T$ je potpuna u odnosu na neki svoj model;

   c) teorija $T$ je potpuna u odnosu na svaki svoj model.

8. Neka su $T$ i $T'$ teorije prvog reda koje imaju sljedeća svojstva:

   a) teorija $T'$ je jednostavno proširenje od $T$;

   b) teorija $T$ je potpuna;

   c) teorija $T'$ je konzistentna.

   Dokažite da su teorije $T$ i $T'$ ekvivalentne.
   Rješenje: Neka je $F$ teorem teorije $T'$. Iz teorema 2.55. slijedi tada da je i $\overline{F}$ teorem od $T'$. Iz uvjeta b) imamo da je $\overline{F}$ ili $\neg\overline{F}$ teorem od $T$. Pošto iz uvjeta a) i c) slijedi da je teorija $T'$ konzistentno proširenje od $T$ tada ne može vrijediti $\vdash_T \neg\overline{F}$. To znači da imamo $\vdash_T \overline{F}$. Iz teorema 2.55. tada slijedi da je i $F$ teorem od $T$.

### 2.7.2 Generalizirani teorem potpunosti

U ovom dijelu sa $T$ označavamo proizvoljnu konzistentnu teoriju prvog reda. Smatramo da alfabet od logičkih simbola sadrži samo negaciju, kondicional i univerzalni kvantifikator. No, upotrebljavat ćemo i ostale logičke simbole kao pokrate kako je već bilo definirano u točki 2.6.

Ako je $\mathfrak{M}$ model za teoriju $T$, i $F$ teorem od $T$, tada iz teorema 2.50. znamo da vrijedi $\mathfrak{M} \models F$. Zatim, iz tvrdnje e) propozicije 2.65. znamo da je konzistentna svaka teorija prvog reda koja ima model.

U ovom dijelu ćemo dokazati da za svaku konzistentnu teoriju prvog reda postoji model. Odmah se prirodno postavlja pitanje što bi mogao biti nosač takvog modela. Jasno je da nam za to ne mogu poslužiti na primjer skupovi brojeva $\mathbb{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{R}$. Ako je $\mathfrak{M}$ struktura za teoriju $T$ tada posebno za sve zatvorene terme[15] $t$ mora vrijediti $t^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$. Najjednostavnije je za svaki zatvoreni term $t$ definirati $t^{\mathfrak{M}} = t$, a iz toga slijedi da kao mogući nosač tražene strukture $\mathfrak{M}$ za teoriju $T$ uzmemo skup svih zatvorenih terma teorije $T$. Tada bismo interpretaciju konstantskih i funkcijskih simbola redom definirali sa: $c^{\mathfrak{M}} = c$ i $f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$. Tada bi očito za sve zatvorene terme $t$ vrijedilo $t^{\mathfrak{M}} = t$.

No, definicija interpretacija relacijskih simbola na skup svih zatvorenih terma nije tako jednostavna. Iz definicije strukture znamo da za svaki relacijski simbol $R$ moramo definirati $R^{\mathfrak{M}}$ kao relaciju na skupu svih zatvorenih terma teorije $T$. Ako je za neke zatvorene terme $t_1, \ldots, t_n$ atomarna formula $R(t_1, \ldots, t_n)$ teorem teorije $T$ tada bi prirodno bilo definirati $(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathfrak{M}}$. Ako je pak formula $\neg R(t_1, \ldots, t_n)$ teorem teorije $T$ tada bi mogli definirati $(t_1, \ldots, t_n) \notin R^{\mathfrak{M}}$. No, problem je da moguće postoji atomarna formula $R(t_1, \ldots, t_n)$ tako da vrijedi:

$$\not\vdash_T R(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{i} \quad \not\vdash_T \neg R(t_1, \ldots, t_n).$$

U tom slučaju nemamo jasan kriterij kako definirati relaciju $R^{\mathfrak{M}}$ na $n$-torki $(t_1, \ldots, t_n)$. To znači da svojstvo "biti teorem od $T$" ne može biti definiciono svojstvo za istinitost proizvoljne atomarne formule. Time smo naveli prvi problem prilikom definicije modela za teoriju $T$ ako koristimo skup svih zatvorenih terma.

Sada navodimo drugi problem. Skup svih zatvorenih terma proizvoljne konzistentne teorije $T$ općenito neće moći biti nosač modela, jer ako teorija ne sadrži konstantske simbole tada je skup svih zatvorenih terma prazan. No, čak ako je i skup svih zatvorenih terma neprazan može se dogoditi da ne postoji model za

[15] Za term kažemo da je **zatvoren** ako ne sadrži individualne varijable. To znači da je izgrađen samo pomoću konstantskih i funkcijskih simbola.

teoriju $T$ čiji je nosač upravo skup svih zatvorenih terma. Razlog tome je da moguće postoji neki teorem teorije $T$ koji tvrdi egzistenciju nekog elementa s određenim svojstvom, ali ne postoji zatvoreni term koji bi reprezentirao takav objekt. Tu situaciju ćemo detaljnije pokušati objasniti sljedećim primjerom.

**Primjer 2.71.** *Neka skup nelogičkih simbola neke teorije $T$ prvog reda sadrži samo jedan konstantski simbol $c$, i uz relacijski simbol za jednakost, sadrži još samo jedan jednomjesni relacijski simbol $R$. Zatim, neka su nelogički aksiomi teorije $T$ formule $\neg R(c)$ i $\exists x R(x)$. Lako je konstruirati neki model za $T$. Iz tvrdnje e) propozicije 2.65. slijedi da je teorija $T$ konzistentna.*

*Neka je $|\mathfrak{M}|$ skup svih zatvorenih terma teorije $T$. Tada je očito $|\mathfrak{M}| = \{c\}$. Definirajmo da je $c^{\mathfrak{M}} = c$. Iz aksioma $\neg R(c)$ teorije $T$ slijedi da moramo definirati $R^{\mathfrak{M}} = \emptyset$. Time je definirana jedna struktura $\mathfrak{M}$ za teoriju $T$. Ta struktura nije model za teoriju $T$ jer imamo $\mathfrak{M} \not\models \exists x R(x)$.*

*To pokazuje da skup svih zatvorenih terma nije dovoljan kao nosač traženog modela. Da bi formula $\exists x R(x)$ bila istinita, nosač $M$ bi trebao sadržavati barem još jedan element. Reći ćemo da je to element koji* **svjedoči** *istinitost formule $\exists R(x)$.*

Kako bismo se riješili gore navedenih teškoća, morat ćemo početnu teoriju $T$ proširiti. Grubo govoreći to ćemo učiniti u dva koraka. Prvo ćemo je nadopuniti sa svim "svjedocima", a zatim ćemo je "upotpuniti". No, krenimo redom.

**Definicija 2.72.** *Teoriju $T$ prvog reda nazivamo* **Henkinova teorija** *ako za svaku zatvorenu formulu jezika teorije $T$ koja je oblika $\exists x F(x)$ postoji konstantski simbol $c$ jezika teorije $T$ tako da vrijedi $\vdash_T \exists x F(x) \rightarrow F(c/x)$.*

Važnost pojma Henkinove teorije jasno je istaknuta u sljedećoj lemi.

**Lema 2.73.** *Neka je $T$ konzistentna i potpuna Henkinova teorija. Označimo sa $|\mathfrak{M}|$ skup svih zatvorenih terma teorije $T$. Zatim definirajmo interpretaciju nelogičkih simbola teorije $T$ na sljedeći način:*

$$\begin{array}{rcl} c^{\mathfrak{M}} & = & c; \\ f^{\mathfrak{M}}(t_1, \ldots, t_n) & = & f(t_1, \ldots, t_n), \end{array}$$

*gdje je $c$ konstantski simbol, $f$ funkcijski simbol, a $t_1, \ldots, t_n$ su zatvoreni termi. Za proizvoljan relacijski simbol $R$ od $T$ definirajmo relaciju $R^{\mathfrak{M}}$ ovako:*

$$(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathfrak{M}} \quad \text{ako i samo ako} \quad \vdash_T R(t_1, \ldots, t_n).$$

*Označimo sa $\mathfrak{M}$ upravo definiranu strukturu.*[16] *Tada za sve zatvorene formule $F$ jezika teorije $T$ vrijedi:*

[16]Obično se tako definirana struktura naziva *kanonski model* za teoriju $T$.

$$\vdash_T F \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models F.$$

*Dokaz.* Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule $F$. Ako je $F$ zatvorena atomarna formula tada je $F$ oblika $R(t_1, \ldots, t_n)$, gdje su $t_i$ zatvoreni termi. No, tada tražena tvrdnja slijedi iz definicije strukture $\mathfrak{M}$.

Pretpostavimo sada da za svaku zatvorenu formulu $G$, čija je složenost strogo manja od složenosti zatvorene formule $F$, vrijedi tvrdnja. Sada po slučajevima, obzirom na oblik formule $F$, dokazujemo da tvrdnja vrijedi i za formulu $F$. (Prisjetimo se da alfabet teorije $T$ od logičkih simbola sadrži samo $\neg$, $\to$ i $\forall$).

a) Neka je $F$ oblika $\neg G$.

   Ako $\mathfrak{M} \models F$ tada $\mathfrak{M} \not\models G$, pa po pretpostavci indukcije slijedi $\not\vdash_T G$. Pošto je po pretpostavci leme $T$ potpuna teorija, a $G$ je zatvorena formula, tada vrijedi $\vdash_T \neg G$.

   Ako $\mathfrak{M} \not\models F$ tada $\mathfrak{M} \models G$, pa po pretpostavci indukcije slijedi $\vdash_T G$. Pošto je $T$ konzistentna teorija tada vrijedi $\not\vdash_T \neg G$, tj. $\not\vdash_T F$.

b) Neka je $F$ oblika $G \to H$.

   Ako $\mathfrak{M} \not\models F$ tada $\mathfrak{M} \models G$ i $\mathfrak{M} \not\models H$. Po pretpostavci indukcije slijedi $\vdash_T G$ i $\not\vdash_T H$. Ako bi vrijedilo $\vdash_T F$, tj. $\vdash_T G \to H$, tada primjenom pravila modus ponens slijedi $\vdash_T H$, što je suprotno početnom zaključku. To znači da mora vrijediti $\not\vdash_T F$.

   Pretpostavimo sada da vrijedi $\not\vdash_T F$. Zbog potpunosti teorije $T$ slijedi $\vdash_T \neg F$. Primjenom tautologija $\neg(P \to Q) \to P$ i $\neg(P \to Q) \to \neg Q$ dobivamo $\vdash_T G$ i $\vdash_T \neg H$. Zbog konzistentnosti teorije $T$ tada slijedi $\not\vdash_T H$. Primjenom pretpostavke indukcije dobivamo $\mathfrak{M} \models G$ i $\mathfrak{M} \not\models H$. No, to upravo znači da $\mathfrak{M} \not\models F$.

c) Neka je $F$ oblika $\forall x G$.

   Ako je $B$ također zatvorena formula tada očito vrijedi: $\mathfrak{M} \models G$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models F$. Slično imamo: $\vdash_T G$ ako i samo ako $\vdash_T F$. Sada tražena tvrdnja slijedi po pretpostavci indukcije.

   Promotrimo sada slučaj kada $G$ nije zatvorena formula, tj. (samo!) varijabla $x$ ima slobodan nastup u formuli $G(x)$. Neka je $c$ konstantski simbol koji je svjedok za formulu $\exists x(\neg G(x))$, tj. neka vrijedi $\vdash_T \exists x(\neg G(x)) \to \neg G(c)$.

   Pretpostavimo prvo da vrijedi $\mathfrak{M} \models \forall x G(x)$. Tada za sve $t \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi $\mathfrak{M} \models G[t]$. Pošto je nosač strukture $\mathfrak{M}$ skup svih zatvorenih terma, tada očito za sve zatvorene terme $t$ vrijedi $\mathfrak{M} \models G(t/x)$. Posebno za $t = c$

imamo $\mathfrak{M} \models G(c)$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da tada vrijedi $\vdash_T G(c)$. Pošto je $c$ svjedok za formulu $\exists x(\neg G(x))$, tada imamo da vrijedi $\vdash_T \exists x(\neg G(x)) \to \neg G(c)$. Primjenom odgovarajuće tautologije dobivamo da vrijedi i $\vdash_T G(c) \to \neg\exists x(\neg G(x))$. Iz toga, i prije dokazane činjenice $\vdash_T G(c)$, slijedi $\vdash_T \neg\exists x(\neg G(x))$. To je ekvivalentno sa $\vdash_T \forall x G(x)$ (vidi npr. tvrdnju $(**)$ u dokazu teorema 2.57. o negaciji prefiksnog oblika).

Pretpostavimo sada da vrijedi $\vdash_T \forall x G(x)$. Iz aksioma $(A4)$ sistema $RP$ tada posebno slijedi da za sve zatvorene terme $t$ vrijedi $\vdash_T \forall x G(x) \to G(t)$. Primjenom pravila modus ponens dobivamo da vrijedi $\vdash_T G(t)$. Primjenom pretpostavke indukcije dobivamo da za sve zatvorene terme $t$ vrijedi $\mathfrak{M} \models G(t)$, a onda i $\mathfrak{M} \models \forall x G(x)$. □

**Napomena 2.74.** *Važno je primijetiti da model $\mathfrak{M}$ iz prethodne leme općenito ne može biti efektivno konstruiran jer interpretacija relacijskih simbola ovisi o izvodu u teoriji $T$, a to je općenito* **neodlučivo** *(vidi napomene na strani 123).*

Očito je skup svih zatvorenih terma svake Henkinove teorije prebrojiv. Iz te činjenice, i prethodne leme, jednostavno dobivamo sljedeći korolar.

**Korolar 2.75.** *Za svaku konzistentnu i potpunu Henkinovu teoriju postoji prebrojiv model.*

Kako bismo dokazali da za svaku konzistentnu teoriju prvog reda postoji prebrojiv model, preostalo je još dokazati da za svaku konzistentnu teoriju $T$ prvog reda postoji konzistentno i potpuno proširenje koje je Henkinova teorija. U sljedećoj lemi "pripremamo teren" za proširenje alfabeta teorije $T$ sa svim "svjedocima".

**Lema 2.76.** *Neka je $T$ konzistentna teorija prvog reda. Označimo sa $T_0$ teoriju dobivenu dodavanjem alfabetu od $T$ prebrojivo mnogo konstantskih simbola. Tada je $T_0$ konzistentna teorija.*

*Dokaz.* Neka je $\{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv skup novih konstantskih simbola. Pretpostavimo da je teorija $T_0$ inkonzistentna. Neka je $F$ formula teorije $T_0$ tako da vrijedi $\vdash_{T_0} F$ i $\vdash_{T_0} \neg F$. Neka je $F_1, \ldots, F_n$ proizvoljan dokaz formule $F$ u teoriji $T_0$. U tom dokazu zamijenimo svaku konstantu $c_i$ s nekom varijablom koja se ne javlja niti u jednoj formuli dokaza. Time smo dobili dokaz u $T$ neke formule $F'$. Analogno bismo iz činjenice $\vdash_{T_0} \neg F$ dobili da vrijedi $\vdash_T \neg F'$. To znači da je teorija $T$ inkonzistentna. Time je dobivena kontradikcija s pretpostavkom leme. □

**Lema 2.77.** *Za svaku konzistentnu teoriju $T$ prvog reda postoji konzistentno i potpuno proširenje koje je Henkinova teorija.*

*Dokaz.* Označimo sa $T_0$ teoriju dobivenu dodavanjem alfabetu od $T$ prebrojivo mnogo konstantskih simbola koje označavamo sa $c_0,\ c_1, \ldots$

Iz korolara 2.67. znamo da je skup svih formula teorije $T_0$ prebrojiv. Posebno je prebrojiv skup svih njenih formula koje sadrže najviše jednu slobodnu varijablu (to znači da je formula zatvorena ili sadrži jedan ili više slobodnih nastupa jedne te iste varijable).

Neka je $F_1(x_{i_1}),\ F_2(x_{i_2}),\ \ldots$ niz koji sadrži sve formule teorije $T_0$ koje sadrže najviše jednu slobodnu varijablu. Sa $x_{i_k}$ smo označili slobodnu varijablu formule $F_k$ ako takva postoji. Ako formula $F_k$ ne sadrži slobodnu varijablu neka je tada $x_{i_k}$ fiksirana varijabla (npr. $x_1$).

Sada definiramo podniz od $(c_j)$. Neka je $c_{j_1}$ prvi konstantski simbol (prvi u smislu indeksa) koji se ne pojavljuje u formuli $F_1(x_{i_1})$. Za već definirane $c_{j_1},\ \ldots,\ c_{j_k}$ neka je $c_{j_{k+1}}$ prvi (u smislu indeksa) koji je različit od već izabranih $c_{j_1},\ \ldots,\ c_{j_k}$ i ne pojavljuje se u formulama $F_1(x_{i_1}), \ldots, F_{k+1}(x_{i_{k+1}})$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definiramo formulu:

$$G_k \ \equiv\ \exists x_{i_k}\ F_k(x_{i_k}) \rightarrow F_k(c_{j_k}).$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ označavamo sa $T_n$ teoriju čiji je skup nelogičkih aksioma jednak uniji skupa nelogičkih aksioma teorije $T_0$ i skupa formula $\{G_1,\ \ldots,\ G_n\}$. Neka je sa $T_\infty$ označena teorija čiji je skup nelogičkih aksioma jednak uniji skupova nelogičkih aksioma teorija $T_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Indukcijom po $n$ dokažimo da je svaka teorija $T_n$ konzistentna. Iz leme 2.76. znamo da je teorija $T_0$ konzistentna. Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N}$ $(n > 0)$ teorija $T_{n-1}$ konzistentna, a teorija $T_n$ inkonzistentna. Iz tvrdnje b) propozicije 2.65. slijedi da je u $T_n$ dokaziva svaka formula pripadnog jezika. Posebno je dokaziva formula $\neg G_n$, tj. vrijedi $\vdash_{T_n} \neg G_n$. Iz definicije teorije $T_n$ tada slijedi $\vdash_{T_{n-1}+G_n} \neg G_n$. Iz teorema dedukcije (formula $G_n$ je zatvorena!) slijedi

$$\vdash_{T_{n-1}} G_n \rightarrow \neg G_n \tag{$*$}$$

Pošto je formula $(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$ tautologija logike sudova, tada je formula $(G_n \rightarrow \neg G_n) \rightarrow \neg G_n$ sudovno valjana. Iz napomene 2.46. tada slijedi da je $(G_n \rightarrow \neg G_n) \rightarrow \neg G_n$ teorem sistema *RP*. Posebno imamo

$$\vdash_{T_{n-1}} (G_n \rightarrow \neg G_n) \rightarrow \neg G_n \tag{$**$}$$

Iz dokazanih činjenica $(*)$ i $(**)$ primjenom pravila modus ponens dobivamo $\vdash_{T_{n-1}} \neg G_n$, tj. $\vdash_{T_{n-1}} \neg(\exists x_{i_n} F_n(x_{i_n}) \rightarrow F_n(c_{j_n}))$. Iz tog posljednjeg (primjenom odgovarajućih tautologija i napomene 2.46.) slijedi

$$\vdash_{T_{n-1}} \exists x_{i_n} F_n(x_{i_n}) \qquad \text{i} \qquad \vdash_{T_{n-1}} \neg F_n(c_{j_n}).$$

Sjetimo se da je $\vdash_{T_{n-1}} \exists x_{i_n} F_n(x_{i_n})$ pokrata za $\vdash_{T_{n-1}} \neg\forall x_{i_n}(\neg F_n(x_{i_n}))$. Promotrimo proizvoljni, ali fiksirani, dokaz formule $\neg F_n(c_{j_n})$ u teoriji $T_{n-1}$. Neka je $x_p$

neka varijabla koja ne nastupa niti u jednoj formuli tog odabranog dokaza. Zamijenimo u tom dokazu svaki nastup konstantskog simbola $c_{j_n}$ s varijablom $x_p$. Dobiveni niz formula je očito dokaz formule $\neg F_n(x_p)$ u teoriji $T_{n-1}$. Primjenom pravila generalizacije slijedi $\vdash_{T_{n-1}} \forall x_p(\neg F_n(x_p))$. Iz aksioma $(A4)$ sistema $RP$ imamo $\vdash_{T_{n-1}} \forall x_p(\neg F_n(x_p)) \to \neg F_n(x_{i_n})$. (Važno je uočiti da je term $x_{i_n}$ slobodan za varijablu $x_p$ u formuli $F_n(x_p)$. ) Iz toga, i već dokazane činjenice $\vdash_{T_{n-1}} \forall x_p(\neg F_n(x_p))$, primjenom pravila modus ponens slijedi $\vdash_{T_{n-1}} \neg F_n(x_{i_n})$. Sada primjenom pravila generalizacije dobivamo $\vdash_{T_{n-1}} \forall x_{i_n}(\neg F_n(x_{i_n}))$. Iz toga, i već dokazane činjenice $\vdash_{T_{n-1}} \neg\forall x_{i_n}(\neg F_n(x_{i_n}))$, slijedi da je teorija $T_{n-1}$ inkonzistentna, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom.

Dokažimo sada da je i teorija $T_\infty$ konzistentna. Neka je $\Gamma$ proizvoljan konačan skup teorema od $T_\infty$. Iz definicije niza teorija $(T_n)$ slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $\Gamma$ skup teorema teorije $T_k$. Pošto je teorija $T_k$ konzistentna tada je očito i skup $\Gamma$ konzistentan. Iz tvrdnje a) propozicije 2.65. slijedi da je i teorija $T_\infty$ konzistentna.

Iz Lindenbaumove leme (tj. leme 2.70.) slijedi da za teoriju $T_\infty$ postoji konzistentno potpuno proširenje. Označimo takvo jedno proširenje sa $T'$. Očito je $T'$ konzistentno i potpuno proširenje teorije $T$. Očito je $T_\infty$ Henkinova teorija. Pošto teorije $T_\infty$ i $T'$ imaju iste alfabete, te je $T'$ proširenje od $T_\infty$, tada je i $T'$ Henkinova teorija. □

Nizom lema i propozicija u ovom dijelu dokazali smo sljedeći teorem.

**Teorem 2.78.** *(generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda) Za svaku konzistentnu teoriju $T$ prvog reda postoji prebrojiv model.*

### 2.7.3 Posljedice generaliziranog teorema potpunosti

U ovom dijelu navodimo najvažnije posljedice generaliziranog teorema potpunosti. Prije svega to su Gödelov teorem potpunosti, teorem kompaktnosti i Löwenheim-Skolemovi teoremi.

**Korolar 2.79.** *Neka je $T$ teorija prvog reda i $F$ formula pripadnog jezika. Ako je formula $F$ istinita u svakom modelu za $T$ tada je $F$ teorem od $T$.*

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati tvrdnju za zatvorene formule, jer iz propozicije 2.18. znamo da je neka struktura $\mathfrak{M}$ model za formulu $A$ ako i samo ako je $\mathfrak{M}$ model za formulu $\overline{A}$. Zatim, iz teorema 2.55. znamo da vrijedi $\vdash_T A$ ako i samo ako $\vdash_T \overline{A}$, za sve formule $A$.

Tvrdnju korolara dokazujemo obratom po kontrapoziciji. Neka je $F$ zatvorena formula koja nije teorem teorije $T$. Iz propozicije 2.65. slijedi da je tada teorija $T + \{\neg F\}$ konzistentna. Iz generaliziranog teorema potpunosti slijedi da postoji model $\mathfrak{M}$ za teoriju $T + \{\neg F\}$. To znači da formula $F$ nije istinita u modelu $\mathfrak{M}$ za teoriju $T$. $\square$

Neposredna posljedica prethodnog korolara je sljedeći Gödelov teorem potpunosti. Adekvatnost za sistem $RP$ smo već dokazali u teoremu 2.48., te za teorije prvog reda istaknuli u teoremu 2.50.

**Korolar 2.80.** *(Gödelov teorem potpunosti)*
*Neka je $T$ teorija prvog reda i $F$ formula pripadnog jezika. Tada vrijedi:*

$$\vdash_T F \quad \text{ako i samo ako} \quad \text{je } F \text{ istinita u svim modelima od } T.$$

*Posebno vrijedi: $\vdash_{RP} F$ ako i samo ako je $F$ valjana formula.*

**Korolar 2.81.** *Neka je $S$ skup formula logike prvog reda, a $F$ neka formula. Vrijedi*

$$S \models F \quad \text{ako i samo ako} \quad S \vdash_{RP} F.$$

*Dokaz.* Ako vrijedi $S \vdash_{RP} F$ tada indukcijom po duljini izvoda $F_1, \ldots, F_n$ lako dokazujemo $S \models F_i$, za sve $i$. Tada posebno slijedi $S \models F_n$, tj. $S \models F$.

Pretpostavimo sada da $S \not\vdash_{RP} F$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $F$ zatvorena formula. Tada iz propozicije 2.65. slijedi da je skup formula $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan. Tada iz generaliziranog teorema potpunosti slijedi da postoji neki model $\mathfrak{M}$ za tu teoriju. Tada imamo $\mathfrak{M} \models S$ i $\mathfrak{M} \models \neg F$, tj. $\mathfrak{M} \not\models F$. To znači da $S \not\models F$. $\square$

U sljedećem korolaru ističemo teorem kompaktnosti za logiku prvog reda. Teorem kompaktnosti je osnova dijela matematičke logike koji se naziva teorija modela.

**Korolar 2.82.** *(Teorem kompaktnosti)*
*Neka je $S$ skup formula logike prvog reda. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

*a) Postoji model za $S$ ako i samo ako za svaki konačan podskup od $S$ postoji model.*

*b) $S \models F$ ako i samo postoji konačan podskup $S'$ od $S$ tako da vrijedi $S' \models F$.*

*Dokaz.*

a) Neka za svaki konačan podskup od $S$ postoji model. Tada je očito svaki konačan podskup od $S$ konzistentan. Iz propozicije 2.65. slijedi da je skup $S$ konzistentan. Tada iz generaliziranog teorema potpunosti slijedi egzistencija modela za $S$.

b) Tvrdnja slijedi iz korolara 2.81. i definicije izvoda.

□

**Napomena 2.83.** *Sada želimo objasniti zašto se prethodni korolar naziva teorem kompaktnosti, tj. njegovu vezu s topologijom.*

*Neka je $\sigma$ neki skup nelogičkih simbola. Za $\sigma$–strukturu $\mathfrak{M}$ sa $Th(\mathfrak{M})$ označavamo skup svih $\sigma$–rečenica za koje je $\mathfrak{M}$ model. Označimo*

$$\mathcal{T} = \{Th(\mathfrak{M}) : \ \mathfrak{M} \ \textit{ je } \sigma\textit{–struktura } \}.$$

*Za proizvoljnu $\sigma$–rečenicu $F$ definiramo:*

$$[F] = \{T : T \in \mathcal{T} \ \textit{i} \ F \in T\}.$$

*Lako je provjeriti da je skup*

$$\mathcal{B} = \{[F] : \ F \ \sigma - \textit{rečenica}\}$$

*baza za zatvorene skupove, tj. da definira topologiju na skupu $\mathcal{T}$ (uočite da vrijedi $[F] \cup [G] = [F \vee G]$). Za svaki skup $\sigma$–rečenica $\Gamma$ očito vrijedi:*

$$\textit{skup } \Gamma \textit{ je ispunjiv} \quad \textit{ako i samo ako} \quad \bigcap_{F \in \Gamma} [F] \neq \emptyset.$$

*Ako je topologija na skupu $\mathcal{T}$ kompaktna*[17] *tada za sve skupove $\sigma$–rečenica $\Gamma$ vrijedi:*

$$\bigcap_{F \in \Gamma} [F] \neq \emptyset \ \ \textit{ako i samo ako} \quad \bigcap_{F \in \Gamma'} [F] \neq \emptyset,$$

*za sve konačne podskupove $\Gamma'$ od $\Gamma$. Ovo posljednje je ekvivalentno sa: skup formula $\Gamma$ je ispunjiv ako i samo ako je svaki njegov konačan podskup ispunjiv.*

U sljedećem korolaru navodimo Löwenheim–Skolemov teorem koji je kao i teorem kompaktnosti vrlo važan za teorem kompaktnosti.

**Korolar 2.84.** *(Löwenheim–Skolemov teorem "na dolje")*
*Svaka teorija prvog reda koja ima beskonačan model ima i prebrojiv model.*

*Dokaz.* Ako teorija ima model tada je ona očito konzistentna. Sada iz generaliziranog teorema potpunosti slijedi da teorija ima i prebrojiv model. □

Sada nam je cilj dokazati Löwenheim–Skolemov teorem "na gore". U tu svrhu prvo dokazujemo sljedeću lemu.

[17] Neka je $\mathcal{T}$ topologija koja ima svojstvo da za svaku njenu familiju $\mathcal{Z}$ zatvorenih skupova vrijedi: ako za sve konačne podskupove $\Sigma$ od $\mathcal{Z}$ vrijedi $\cap\Sigma \neq \emptyset$, tada vrijedi i $\cap\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Tada je topologija $\mathcal{T}$ kompaktna.

**Lema 2.85.** *Neka su $\alpha$ i $\beta$ beskonačni kardinalni brojevi za koje vrijedi $\alpha < \beta$. Ako neka teorija prvog reda $T$ ima model čiji je kardinalni broj $\alpha$ tada postoji i model za $T$ čiji je kardinalni broj $\beta$.*

*Dokaz.* Neka je $\mathfrak{M}$ model za $T$ čiji je kardinalni broj $\alpha$. Neka je $|\mathfrak{N}|$ proizvoljan nadskup od $|\mathfrak{M}|$ čiji je kardinalni broj jednak $\beta$. Sada ćemo definirati proširenje $\mathfrak{N}$ strukture $\mathfrak{M}$ čiji je nosač $|\mathfrak{N}|$. U tu svrhu izaberimo proizvoljan element $m \in \mathfrak{M}$. Za svaki element $u \in |\mathfrak{N}|$ uvodimo oznaku:

$$\overline{u} = \begin{cases} u, & \text{ako je } u \in |\mathfrak{M}| \\ m, & \text{ako je } u \in |\mathfrak{N}| \setminus |\mathfrak{M}| \end{cases}$$

Sada redom za nelogičke simbole teorije $T$ opisujemo njihovu interpretaciju na nosač $|\mathfrak{N}|$. Za konstantski simbol $c$ teorije $T$ definiramo $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$. Za $n$–mjesni relacijski simbol $R$ definiramo $n$-mjesnu relaciju $R^{\mathfrak{N}}$ na sljedeći način:

$$(u_1, \ldots, u_n) \in R^{\mathfrak{N}} \text{ ako i samo ako } (\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}) \in R^{\mathfrak{M}}$$

Analogno bismo definirali interpretaciju proizvoljnog funkcijskog simbola.

Indukcijom po složenosti proizvoljne formule $F(x_1, \ldots, x_n)$ teorije $T$ lako je dokazati da za sve $u_1, \ldots, u_n \in |\mathfrak{N}|$ vrijedi:

$$\mathfrak{N} \models F[u_1, \ldots, u_n] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M} \models F[\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}].$$

Iz toga neposredno slijedi da je $\mathfrak{N}$ model za teoriju $T$ čiji je kardinali broj jednak $\beta$. $\square$

**Korolar 2.86.** *(Löwenheim–Skolemov teorem "na gore")*
*Neka je $\alpha$ beskonačni kardinalni broj i $T$ proizvoljna konzistentna teorija prvog reda. Tada postoji model za $T$ čiji je kardinalni broj jednak $\alpha$.*

*Dokaz.* Iz generaliziranog teorema potpunosti znamo da postoji prebrojiv model za $T$. Sada iz prethodne leme slijedi tvrdnja korolara. $\square$

**Napomena 2.87.** *Teorem potpunosti (za prebrojiv jezik) je dio doktorske disertacije Kurta Gödela iz 1930. godine. (Nemojte taj teorem miješati s poznatim Gödelovim teoremima nepotpunosti!). Kod Gödela teorem kompaktnosti je dan kao jednostavna posljedica teorema potpunosti.*

*Teorem kompaktnosti za neprebrojiv jezik je 1936. godine dokazao Malcev.*[18] *U dokazu je koristio Skolemove funkcije i teorem kompaktnosti za logiku sudova.*

[18] A. Malcev, 1909.–1967.

*Dokaz teorema potpunosti koji smo mi naveli u biti je dokaz koji je dao L. Henkin 1949. godine u svojoj doktorskoj disertaciji. Za razliku od Gödelovog dokaza, Henkinov dokaz lako je poopćiti na jezike proizvoljnog kardinaliteta.*

*Löwenheim je 1915. godine dokazao da ako neka formula ima model tada ima i prebrojiv model. Skolem je 1919. godine dokazao istu tvrdnju, ali ne za jednu formulu već za proizvoljan skup formula. No, oni su promatrali prebrojiv jezik. Tarski*[19] *je dokazao tvrdnju za proizvoljne jezike.*

**Zadaci:**

1. Provjerite jesu li sljedeće formule teoremi sistema $RP$ :

   a) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R(x_1, x_1) \wedge (R(x_1, x_3) \rightarrow (R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3)))) \rightarrow \exists y \forall z R(y, z)$;

   b) $\exists x \forall y (R(x, y) \rightarrow (\neg R(y, x) \rightarrow (R(x, x) \leftrightarrow R(y, y))))$;

   c) $\exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \exists x \exists y R(y, x)$;

   d) $\neg \forall x \forall y R(x, y) \vee \forall x \exists y R(y, x)$.

2. Neka je $T$ konzistentna teorija prvog reda. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

   a) teorija $T$ je potpuna;

   b) svaka dva modela od $T$ su elementarno ekvivalentna;

   c) za svaki model $\mathfrak{M}$ od $T$, teorija $T$ je ekvivalentna s teorijom $Th(\mathfrak{M})$, tj. za sve formule $F$ vrijedi $\vdash_T F$ ako i samo ako $\vdash_{Th(\mathfrak{M})} F$.

   Rješenje: Lako je pokazati da iz tvrdnje a) slijedi b). Dokažimo da iz tvrdnje b) slijedi c). Očito je teorija $Th(\mathfrak{M})$ proširenje od $T$. Neka je $\mathfrak{N}$ proizvoljan model od $T$. Po pretpostavci vrijedi $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Posebno vrijedi $\mathfrak{N} \models Th(\mathfrak{M})$. Dakle, svaki model za teoriju $T$ je i model za skup formula $Th(\mathfrak{M})$. Po teoremu potpunosti slijedi $\vdash_T F$, za sve $F \in Th(\mathfrak{M})$.

   Na kraju dokažimo još da iz tvrdnje c) slijedi a). Pošto je $T$ konzistentna teorija tada iz generaliziranog teorema potpunosti slijedi da postoji model $\mathfrak{M}$ za $T$. Neka je $F$ proizvoljna zatvorena formula. Očito vrijedi $\mathfrak{M} \models F$ ili $\mathfrak{M} \models \neg F$, tj. $F \in Th(\mathfrak{M})$ ili $\neg F \in Th(\mathfrak{M})$. No, tada imamo $\vdash_{Th(\mathfrak{M})} F$ ili $\vdash_{Th(\mathfrak{M})} \neg F$. Po pretpostavci tada slijedi $\vdash_T F$ ili $\vdash_T \neg F$.

3. Dokažite da je teorem kompaktnosti ekvivalentan sa sljedećom tvrdnjom:

[19] A. Tarski, 1902.–1983.

Neka je $S$ skup formula. Tada vrijedi $S \models F$ ako i samo ako postoji konačan podskup $S'$ od $S$ tako da vrijedi $S' \models F$.

4. Neka je $F$ zatvorena formula i $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ skup zatvorenih formula logike prvog reda. Neka je, zatim, $S$ skup formula koji ima svojstvo da za svaki model $\mathfrak{M}$ od $S$ postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \models F \to G_k$. Dokažite da postoji konačan podskup $I$ od $\mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$S \models F \to \bigvee_{i \in I} G_i.$$

Rješenje: Neka je $\mathfrak{M}$ model za skup formula $S \cup \{\neg G_n : n \in \mathbb{N}\}$. To je posebno model za $S$, pa iz pretpostavke zadatka slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da imamo $\mathfrak{M} \models F \to G_k$. Tada vrijedi i

$$\mathfrak{M} \models \neg G_k \to \neg F \qquad (*)$$

No, pošto je $\mathfrak{M}$ model za skup formula $\{\neg G_n : n \in \mathbb{N}\}$, tada posebno imamo

$$\mathfrak{M} \models \neg G_k \qquad (**)$$

Iz činjenica $(*)$ i $(**)$ dobivamo $\mathfrak{M} \models \neg F$. Time smo dokazali da vrijedi

$$S \cup \{\neg G_n : n \in \mathbb{N}\} \models \neg F.$$

Iz teorema kompaktnosti slijedi da postoji konačan podskup $T$ skupa formula $S \cup \{\neg G_n : n \in \mathbb{N}\}$ tako da vrijedi $T \models \neg F$.

Ako je $T \cap \{\neg G_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ tada promatramo skup $T \cup \{\neg G_1\}$. Očito vrijedi $T \cup \{\neg G_1\} \models \neg F$, a onda i $S \cup \{\neg G_1\} \models \neg F$. Iz toga slijedi $S \models \neg G_1 \to \neg F$, odnosno $S \models F \to G_1$, pa je $\{G_1\}$ traženi konačan podskup.

Promotrimo sada slučaj kada je $T \cap \{G_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Neka je $I$ (konačan!) podskup od $\mathbb{N}$ tako da vrijedi $T \cap \{\neg G_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\neg G_i : i \in I\}$. Iz činjenice $T \models \neg F$ slijedi i $S \cup \{\neg G_i : i \in I\} \models \neg F$. Tada imamo i

$$S \models (\bigwedge_{i \in I} \neg G_i) \to \neg F,$$

a onda i

$$S \models F \to \neg(\bigwedge_{i \in I} \neg G_i).$$

Primjenom De Morganovih pravila slijedi tražena tvrdnja.

5. Neka su $A$ i $B$ prebrojivi skupovi, te $R \subseteq A \times B$. Za $x \in A$ sa $A_x$ označimo skup $\{y : y \in B,\ (x, y) \in R\}$. Neka skup $R$ ima sljedeća svojstva:

   (1) za sve $x \in A$ skup $A_x$ je konačan;

   (2) za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq A$ skup $\bigcup_{i=1}^{k} A_{x_i}$ sadrži najmanje $k$ elemenata.

   Dokažite da postoji injekcija $f : A \to B$ koja ima svojstvo da $f(a) = b$ povlači $(a, b) \in R$.
   Napomena: Rješenje ovog zadatka može se iščitati iz rješenja zadatka 7.

6. Jedno društvo sadrži konačan broj mladića. Neka je $n$ broj mladića u tom društvu. Pretpostavimo da za svaki $k$, $(1 \leq k \leq n)$, svaka grupa od $k$ mladića poznaje najmanje $k$ djevojaka. Dokažite da postoji način da se svaki mladić vjenča s jednom djevojkom koju poznaje, te da niti jedna djevojka nije udana za više od jednog mladića.
   Rješenje: Dokaz provodimo indukcijom po $n$. Tvrdnja je očito istinita za $n = 1$. Pretpostavimo da za sve $m < n$ tvrdnja vrijedi te neka je u društvu točno $n$ mladića. Promotrimo ova dva slučaja:

   a) za sve $k < n$ svaka grupa od $k$ mladića poznaje najmanje $k + 1$ djevojku;

   b) postoji $k$ $(k \leq n)$ i grupa $S$ od $k$ mladića koji poznaju točno $k$ djevojaka.

   Za slučaj a): Neka je izabran proizvoljan mladić iz društva, te neka je vjenčan s proizvoljnom djevojkom iz društva koju poznaje. Dakle, sada društvo sadrži $n - 1$ mladića i vrijedi: za sve $k \leq n - 1$ svaka grupa od $k$ mladića poznaje najmanje $k$ djevojaka. Primjenom pretpostavke indukcije slijedi tvrdnja.

   Za slučaj b): Na skup $S$ primijenimo pretpostavku indukcije. Dakle, u društvu je ostalo $n - k$ (nevjenčanih) mladića. Označimo taj ostatak društva sa $S'$. Dokažimo sada sljedeću tvrdnju $(*)$ :

   > za sve $l \leq n - k$ svaka grupa od $l$ mladića iz društva $S'$ poznaje najmanje $l$ djevojaka.

   Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $l \leq n - k$ tako da neka grupa $T$ od $l$ mladića od $S'$ poznaje manje od $l$ djevojaka. Promotrimo skup mladića $S \cup T$. Taj skup sadrži $k + l$ mladića. No, oni poznaju manje od $k + l$ djevojaka, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. Time je tvrdnja $(*)$ dokazana.

Primjenom upravo dokazane tvrdnje $(*)$ zaključujemo da na skup $S'$ možemo primijeniti pretpostavku indukciju.

7. Neka neko društvo sadrži prebrojivo mnogo mladića. Svaki mladić iz društva poznaje najviše konačno mnogo djevojaka. Zatim, za svaki $k \in \mathbb{N}$, grupa od $k$ mladića poznaje najmanje $k$ djevojaka. Primjenom teorema kompaktnosti dokažite da u takvom društvu postoji način da se svaki mladić vjenča s jednom djevojkom koju poznaje, te da niti jedna djevojka nije udana za više od jednog mladića. Je li istinita tvrdnja zadatka ako ispustimo pretpostavku da svaki mladić poznaje samo konačno mnogo djevojaka?
Rješenje: Sa $\sigma$ označimo skup nelogičkih simbola

$$\{m_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{d_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{R\},$$

gdje su $m_i$ i $d_k$ konstantski simboli, a $R$ je dvomjesni relacijski simbol. (Naravno, $m_i$ je oznaka za $i$-tog mladića, a $d_k$ je oznaka za $k$-tu djevojku. Intuitivna interpretacija od $R(x, y)$ je "mladić $x$ je vjenčan s djevojkom $y$"). Za $i \in \mathbb{N}$ neka je sa $k(i)$ označen broj djevojaka koje poznaje $i$-ti mladić. Zatim, za $i \in \mathbb{N}$ neka je $S_i = \{i_1, \ldots, i_{k(i)}\} \subseteq \mathbb{N}$ tako da $i$-ti mladić poznaje svaku $j$-tu djevojku, za sve $j \in S_i$. Sa $\Sigma$ označimo skup formula koji se sastoji od:

(1) za sve $i \in \mathbb{N}$

$$R(m_i, d_{i_1}) \ \vee \ \ldots \ \vee \ R(m_i, d_{i_{k(i)}});$$

(2) za sve $i \in \mathbb{N}$, te sve $k, l \in \mathbb{N}$ takve da $k \neq l$

$$\neg(R(m_i, d_k) \ \wedge \ R(m_i, d_l));$$

(3) za sve $j \in \mathbb{N}$, te sve $k, l \in \mathbb{N}$ takve da $k \neq l$

$$\neg(R(m_k, d_j) \ \wedge \ R(m_l, d_j)).$$

Neka je $\Sigma'$ proizvoljan konačan podskup od $\Sigma$. Neka je $I = \{k_1, \ldots, k_p\}$ skup svih $i \in \mathbb{N}$ tako da se konstanski simbol $m_i$ pojavljuje u nekoj formuli iz skupa $\Sigma'$. Iz prethodnog zadatka slijedi da postoji interpretacija relacije $R$ tako da se svaki $i$-ti mladić, gdje je $i \in I$, vjenča s jednom djevojkom, te niti jedna djevojka nije vjenčana s više od jednim mladićem. No, to znači da postoji model za $\Sigma'$ (točno ga definirajte skupovno i "matematički"!). Tada iz teorema kompaktnosti slijedi da postoji model za skup $\Sigma$. Pošto su formule oblika (1) u $\Sigma$ tada je svaki mladić iz društva vjenčan barem s jednom djevojkom, a zbog (2) i (3) slijedi da nema bigamije.

Tvrdnja općenito ne vrijedi ako se izostavi pretpostavka da svaki mladić poznaje najviše konačno mnogo djevojaka. Neka su npr. mladići označeni sa $m_i$, a djevojke sa $d_i$ ($i \in \mathbb{N}$). Zatim, neka prvi mladić poznaje sve djevojke, a za sve $i > 1$ mladić $m_i$ neka poznaje samo djevojku $d_{i-1}$. Očito tada ne postoji način da se svaki mladić vjenča s djevojkom koju poznaje.

8. Dokažite da su za proizvoljnu formulu $A$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne:
   a) svaka prebrojiva struktura je model za formulu $A$;
   b) formula $A$ je valjana;
   c) formula $A$ je teorem sistema $RP$, tj. $\vdash A$.
9. Dokažite da ako neka teorija prvog reda ima proizvoljno velike konačne modele tada ima bar jedan beskonačan model.

### 2.7.4 Ograničenja logike prvog reda

Posljedice teorema kompaktnosti i Löwenheim–Skolemovih teorema su mnoge. Istaknimo ovdje neke koje ističu ograničenja logike prvog reda. Ako je $S$ neki skup $\sigma$–formula tada uvodimo oznaku:

$$Mod(S) = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \text{ je } \sigma\text{–struktura takva da } \mathfrak{M} \models S\}$$

**Definicija 2.88.** *Neka je $\mathcal{K}$ neka klasa $\sigma$–struktura. Kažemo da je klasa $\mathcal{K}$* **elementarna** *ako postoji skup $\sigma$–formula $S$ tako da vrijedi $Mod(S) = \mathcal{K}$.*

Klasa svih parcijalno uređenih skupova, klasa svih grupa, klasa svih vektorskih prostora, klasa svih prstenova i klasa svih polja su neki primjeri elementarnih klasa. Kasnije ćemo dati primjere klasa struktura koje nisu elementarne.

**Definicija 2.89.** *Za klasu $\mathcal{K}$ $\sigma$–struktura kažemo da je* **$\Delta$–elementarna** *ako postoji konačan skup $\sigma$–formula $S$ tako da vrijedi $Mod(S) = \mathcal{K}$.*

Lako je dokazati da vrijede sljedeće propozicije.

**Propozicija 2.90.** *Neka je $\mathcal{K}$ $\Delta$–elementarna klasa $\sigma$–struktura i $S$ neki skup $\sigma$–formula tako da vrijedi $Mod(S) = \mathcal{K}$. Tada postoji konačan podskup $S' \subseteq S$ tako da vrijedi $Mod(S') = \mathcal{K}$.*

**Propozicija 2.91.** *Neka je $\mathcal{K}$ neka klasa $\sigma$–struktura. Sa $\mathcal{K}^c$ označimo klasu svih $\sigma$–struktura koje ne pripadaju $\mathcal{K}$. Tada vrijedi:*

*klasa $\mathcal{K}$ je $\Delta$–elementarna ako i samo ako klase $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}^c$ su elementarne.*

**Primjer 2.92.** *Klasa $\mathcal{K}_\infty$ svih beskonačnih skupova je elementarna, ali nije $\Delta$–elementarna. Npr. za skup formula $S = \{\exists y_1 \ldots \exists y_n \bigwedge_{i\neq j} y_i \neq y_j : n \in \mathbb{N}\}$ očito vrijedi $Mod(S) = \mathcal{K}_\infty$ (promatramo samo normalne strukture).*

*Kako bi dokazali da klasa $\mathcal{K}_\infty$ nije $\Delta$–elementarna primijetimo prvo da klasa $\mathcal{K}_{<\infty}$ svih konačnih skupova nije elementarna. (Ako je $S$ skup formula takav da za sve konačne strukture $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M} \models S$ tada iz Löweinheim–Skolemovog teorema slijedi da postoji beskonačna struktura $\mathfrak{N}$ tako da vrijedi $\mathfrak{N} \models S$).*
*Očito vrijedi $\mathcal{K}_\infty^c = \mathcal{K}_{<\infty}$. Iz propozicije 2.91. slijedi da klasa $\mathcal{K}_\infty$ nije $\Delta$–elementarna.*

**Primjer 2.93.** *Za fiksirani prosti broj $p$ klasa svih polja karakteristike $p$ je $\Delta$–elementarna. Klasa $\mathcal{K}_0$ svih polja karakteristike nula je elementarna, ali nije $\Delta$–elementarna.*

*Označimo sa $S_0$ skup aksioma teorije polja. Za proizvoljni prosti broj $p$ sa $\overline{p}$ označimo term $1 + \ldots + 1$ ($p$–puta). Tada za $S = S_0 \cup \{\overline{2} \neq 0,\ \overline{3} \neq 0,\ \ldots\}$ imamo $Mod(S) = \mathcal{K}_0$, pa je klasa $\mathcal{K}_0$ elementarna. Pretpostavimo da je ta klasa $\Delta$–elementarna. Iz propozicije 2.90. slijedi da postoje prosti brojevi $p_1, \ldots, p_k$ tako da za konačan skup formula $S' = S'_0 \cup \{\overline{p_1} \neq 0, \ldots, \overline{p_k} \neq 0\}$ ($S'_0$ je neki konačan podskup od $S_0$) vrijedi $Mod(S') = \mathcal{K}_0$. Neka je $p$ prosti broj takav da je $p > p_i$, za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$. Tada očito vrijedi $\mathbf{Z}_p \models S'$, ali $\mathbf{Z}_p \notin \mathcal{K}_0$.*

*Klasa svih polja, čija je karakteristika različita od nule, nije elementarna. Klasa svih algebarski zatvorenih polja je elementarna, ali nije $\Delta$–elementarna.*

**Primjer 2.94.** *Neka je $(G, \circ)$ Abelova grupa, te $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $y \in G$. Tada sa $ny$ označavamo $y \circ \ldots \circ y$ ($n$–puta). Za Abelovu grupu kažemo da je* **djeljiva** *ako za svaki $n \geq 1$ ı $x \in G$ postoji $y \in G$ tako da vrijedi $ny = x$. Klasa svih djeljivih grupa je elementarna, ali nije $\Delta$–elementarna.*

*Neka je $G$ Abelova grupa i neka je sa $e$ označen neutralan element. Za grupu $G$ kažemo da je* **bez torzija** *ako za svaki $n \geq 1$ ı $x \neq e$ vrijedi $nx \neq e$. Klasa svih grupa bez torzija je elementarna, ali nije $\Delta$–elementarna.*
*(Uočite da bi ovdje bilo dobro imati beskonačnu dugu formulu oblika: $(\forall x \neq e)(2x \neq e \wedge 3x \neq e \wedge \ldots)$.*

**Primjer 2.95.** *Znamo da ne postoji skup formula signature $\{0, s, +, \cdot, =\}$ koji bi karakterizirao strukturu $(\mathbb{N}, 0, s, +\cdot, =)$ do na izomorfizam. U drugu ruku, iz Dedekindovog teorema znamo da $\mathbb{N}$ možemo karakterizirati do na izomorfizam u logici drugog reda.*

Prethodni primjeri mogu poslužiti kao motivacija za razmatranje proširenja logike prvog reda. U **logici drugog reda** dopuštena je i kvantifikacija po relacijskim i funkcijskim varijablama. U logici drugog reda mogu se definirati pojmovi "biti beskonačan" i "biti prebrojiv". No, u logici drugog reda ne vrijedi teorem kompaktnosti, a ni Löwenheim–Skolemov teorem.

U **beskonačnoj logici** dopuštene su beskonačne disjunkcije. Odnosno, točnije logika $L_{\omega_1\omega}$ dopušta i sljedeća pravila izgradnje formula: ako je $S$ prebrojiv skup formula tada su $\bigwedge S$ i $\bigvee S$ također formule. Simbol $L_{\omega_1\omega}$ označava da je dozvoljeno prebrojivo mnogo ($< \omega_1$) konjunkcija i disjunkcija, te najviše konačno mnogo ($< \omega$) kvantifikatora. Löweinheim–Skolemov teorem vrijedi za logiku $L_{\omega_1\omega}$, a teorem kompaktnosti ne.

Promatraju se i druga proširenja. Kao što su višesortna logika prvog reda, slaba logika drugog reda, monadska logika drugog reda, logike s dodatnim kvantifikatorima, itd.

Logika prvog reda ima istaknuto mjesto među svim tim sistemima. O tome govore Lindströmovi teoremi. Prvi Lindströmov teorem je naveden na strani 123.

**Zadaci:**

1. Dokažite da su sljedeće klase $\Delta$–elementarne: grupa, Abelovih grupa, prstenova, integralnih domena, polja, uređenih polja, lineranih uređaja, mreža i Booleovih algebri.

2. Dokažite da su sljedeće klase elementarne, ali nisu $\Delta$–elementarne: djeljivih grupa, grupa bez torzija, polja karakteristike nula, algebarski zatvorenih polja, realno zatvorenih polja i konačnih polja.

### 2.7.5 Kategoričnost teorija

Ako su dvije strukture izomorfne očito su pripadni nosači ekvipotentni skupovi. Naravno, obrat ne vrijedi, tj. ekvipotentnost nosača ne povlači izomorfizam interpretacija. Ovdje želimo samo istaknuti neke pojmove vezane uz kardinalnost struktura i izomorfizma.

**Definicija 2.96.** *Za konzistentu teoriju $T$ prvog reda kažemo da je* **kategorična** *ako su svi njeni modeli izomorfni.*

Iz Löwenheim–Skolemovog teorema "na gore" slijedi da niti jedna konzistentna teorija prvog reda nije kategorična. Iz tog razloga uvodimo pojam $\lambda$–kategoričnosti.

**Definicija 2.97.** *Neka je $\lambda$ neki kardinalni broj. Kažemo da je neka teorija $T$* $\lambda$–**kategorična** *ako $T$ ima barem jedan model kardinalnosti $\lambda$ i ako su svi njeni modeli kardinalnosti $\lambda$ izomorfni.*

Teorija gustih prebrojivih linearnih uređaja bez krajnjih točaka je $\aleph_0$–kategorična (vidi [31]).

Sada nam je cilj dokazati Vaughtov[20] test u kojem se primjenjuje $\lambda$–kategoričnost. U tu svrhu prvo dokazujemo sljedeću lemu.

**Lema 2.98.** *Neka je $T$ teorija prvog reda koja ima beskonačan model $\mathfrak{M}$, te neka je $\lambda$ neki beskonačan kardinalni broj. Tada postoji model $\mathfrak{N}$ za $T$ kardinalnosti $\lambda$ koji je elementarno ekvivalentan s modelom $\mathfrak{M}$, tj. vrijedi $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.*

*Dokaz.* Označimo sa $Th(\mathfrak{M})$ skup svih zatvorenih formula istinitih na modelu $\mathfrak{M}$. Pošto je $\mathfrak{M}$ beskonačan model za $Th(\mathfrak{M})$, tada iz korolara 2.86. slijedi da postoji model $\mathfrak{N}$ za $Th(\mathfrak{M})$ kardinaliteta $\lambda$. Dakle, vrijedi $\mathfrak{N} \models Th(\mathfrak{M})$, tj. $Th(\mathfrak{M}) \subseteq Th(\mathfrak{N})$. Za dokaz obratne inkluzije uzmimo proizvoljnu zatvorenu formulu $F$ za koju vrijedi $\mathfrak{N} \models F$. Pretpostavimo $\mathfrak{M} \not\models F$. Iz pretpostavke $\mathfrak{M} \not\models F$, tada slijedi $\mathfrak{M} \models \neg F$. No, pošto je $Th(\mathfrak{M}) \subseteq Th(\mathfrak{N})$, tada vrijedi $\mathfrak{N} \models \neg F$. To je kontradikcija s pretpostavkom $\mathfrak{N} \models F$. □

**Propozicija 2.99.** *(Łoś–Vaughtov test)*
*Neka je $T$ teorija prvog reda koja je $\lambda$-kategorična, za neki beskonačan kardinalni broj $\lambda$, te neka je svaki model od $T$ beskonačan. Tada je $T$ potpuna teorija.*

*Dokaz.* Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ proizvoljni modeli od $T$. Iz pretpostavke propozicije slijedi da su to beskonačni modeli. Iz prethodne leme slijedi da postoje modeli $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{N}'$ kardinalnosti $\lambda$ tako da vrijedi:

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}' \qquad \text{i} \qquad \mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}'.$$

Pošto je po pretpostavci propozicije teorija $T$ $\lambda$–kategorična tada su modeli $\mathfrak{M}'$ i $\mathfrak{N}'$ izomorfni. Iz propozicije 2.24. tada slijedi da su elementarno ekvivalentni, tj. $\mathfrak{M}' \equiv \mathfrak{N}'$. Sada je lako vidjeti da vrijedi $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Time smo dokazali da su svaka dva modela od $T$ elementarno ekvivalentna. Iz zadatka 2 sa strane 202 slijedi da je $T$ potpuna teorija. □

Primjenom Łoś–Vaughtovog testa može se dokazati da je teorija gustih linearnih uređaja bez krajnjih točaka potpuna (vidi zadatke 8 i 9 na strani 219). Zatim, primjenom istog testa može se dokazati da je teorija algebarski zatvorenih polja potpuna (vidi npr. [26] ili [32]). No, spomenimo i ograničenost primjene Łoś–Vaughtovog testa. Postoje potpune teorije koje imaju samo beskonačne modele, ali nisu $\lambda$–kategorične niti za jedan beskonačni kardinalni broj $\lambda$ (vidi npr. [7]). Zapravo, ograničenost primjene testa najbolje ocrtava sljedeći teorem:

[20] R. L. Vaught, 1926.–2002.

> **Morleyev teorem**. Neka je $T$ potpuna teorija koja je $\lambda$–kategorična za neki beskonačni neprebrojivi kardinalni broj $\lambda$, te nema konačnih modela. Tada je $T$ $\mu$–kategorična za svaki neprebrojivi kardinalni broj.

O prethodnom teoremu možete čitati u [26], odnosno u D. Vrgoč, Morleyev teorem, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 2007. Morleyev teorem smatra se početkom teorije klasifikacije u teoriji modela.

## 2.8 Primjeri teorija prvog reda

U ovoj točki navodimo nekoliko primjera teorija prvog reda. Prvo proučavamo teorije prvog reda s jednakošću, a zatim navodimo dvije istaknute teorije prvog reda. To su Peanova aritmetika i Zermelo-Fraenkelova teorija skupova.[21]

### 2.8.1 Teorije s jednakošću

Prilikom definicije alfabeta teorije prvog reda pretpostavili smo da je skup relacijskih simbola neprazan, tj. da uvijek sadrži barem jedan dvomjesni relacijski simbol $R^2$. Taj simbol $R^2$ je "rezerviran" za jednakost. Zbog toga ćemo umjesto $R^2(x, y)$ pisati $x = y$. Slično, $x \neq y$ će nam biti pokrata za $\neg(x = y)$.

U sljedećem primjeru želimo naglasiti da interpretacija simbola = ne mora biti relacija jednakosti na nosaču.

**Primjer 2.100.** *Za fiksirani $n \in \mathbb{N}$ označimo sa $F_n$ formulu*

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \Big( \big( \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \big) \ \wedge \ \forall y \big( \bigvee_{1 \leq i \leq n} x_i = y \big) \Big).$$

*Na prvi pogled se čini da svaka formula $F_n$ izražava činjenicu da model sadrži točno $n$ elemenata. No, to ne vrijedi. Kako bi to pokazali definiramo model za $F_n$ koji nema točno $n$ elemenata. Neka je $n > 0$ proizvoljan prirodan broj. Neka je $\mathcal{M}$ struktura s nosačem $\mathbb{N}$, a $=^{\mathfrak{M}}$ je binarna relacija zadana sa:*

$$=^{\mathfrak{M}} = \{(1,1), \ldots, (n,n)\} \cup \{(1,j) : j > n\}.$$

*Lako je vidjeti da vrijedi $\mathcal{M} \models F_n$. Ovim primjerom smo htjeli naglasiti da jednakost nije logički pojam, već ga moramo posebno definirati.*

Sada dajemo definiciju teorije $T$ prvog reda s jednakošću. Točno navodimo koja svojstva mora imati relacijski simbol = .

**Definicija 2.101.** *Neka je $T$ teorija prvog reda. Reći ćemo da je $T$* **teorija prvog reda s jednakošću** *ako su sljedeće formule teoremi od $T$ :*

*(1)* $x = x$

*(2)* $x = y \ \rightarrow \ (A(x) \rightarrow A'(y))$, *gdje je $A(x)$ atomarna formula, a $A'(y)$ je formula dobivena zamjenom nekih, možda i svih, slobodnih nastupa varijable $x$ s varijablom $y$.*

[21] E. Zermelo, 1871.–1953.; A. Fraenkel, 1891.–1965.

Uočite da smo u uvjetu *(2)* naveli da je $A(x)$ atomarna formula. Želimo naglasiti da je $A(x)$ oznaka za formulu u kojoj varijabla $x$ može imati slobodan nastup. To znači da $A$ nije nužno jednomjesni relacijski simbol. Naravno, želimo da formula iz uvjeta *(2)* bude teorem od $T$ za sve formule $A$, a ne samo za atomarne. Tu činjenicu ćemo kasnije i dokazati.

Uočite, zatim, da u uvjetu *(2)* ne zahtijevamo da je u formuli $A(x)$ svaki slobodan nastup varijable $x$ zamijenjen s varijablom $y$. Sjetimo se da smo obično sa $A(y/x)$ označavali formulu koja je dobivena iz formule $A(x)$ zamjenom *svih* slobodnih nastupa varijable $x$ s varijablom $y$. No, prilikom definicije teorije s jednakošću u uvjetu *(2)* dozvoljavamo da su *samo neki* nastupi varijable $x$ u formuli $A(x)$ zamijenjeni s varijablom $y$.

Iz definicije nije na prvi pogled jasno ima li dvomjesni relacijski simbol = sva svojstva koja bi trebala imati relacija jednakosti (npr. simetričnost, tranzitivnost, ... ). Upravo ta jednostavna svojstva navodimo u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 2.102.** *Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću. Tada vrijedi:*

*a)* $\vdash_T t = t$, *gdje je $t$ proizvoljan term;*

*b)* $\vdash_T x = y \ \rightarrow \ y = x$;

*c)* $\vdash_T x = y \ \rightarrow \ (y = z \rightarrow x = z)$.

*Dokaz.* Sljedeći niz formula je jedan dokaz u $T$ za formulu $t = t$ :

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $x = x$ | (uvjet (1) iz definicije 2.101.) |
| 2. | $\forall x(x = x)$ | (gen: 1.) |
| 3. | $\forall x(x = x) \rightarrow t = t$ | (logički aksiom (A4)) |
| 4. | $t = t$ | (mod pon: 2,3) |

Dokažimo sada tvrdnju b). Označimo sa $A(x)$ formulu $x = x$, a sa $A'(y)$ neka je označena formula $y = x$.[22] Tada primjenom uvjeta *(2)* iz definicije 2.101. imamo:

$$\vdash_T x = y \ \rightarrow \ (x = x \ \rightarrow y = x) \qquad (*)$$

Pošto je $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$ tautologija, tada je formula

$$(x = y \ \rightarrow \ (x = x \ \rightarrow y = x)) \ \rightarrow \ (x = x \ \rightarrow \ (x = y \ \rightarrow y = x))$$

sudovno valjana. Iz napomene 2.46. slijedi da je to teorem proizvoljne teorije prvog reda, a onda i teorije $T$. Primjenom te činjenice, i dokazane tvrdnje označene sa $(*)$, pomoću pravila modus ponens slijedi

[22] Uočite da je ovdje važno da ne zahtijevamo da su u formuli $A(x)$ svi slobodni nastupi varijable $x$ zamijenjeni s varijablom $y$.

$$\vdash_T x = x \to (x = y \to y = x).$$

Sada primjenom pravila modus ponens na posljednju dokazanu činjenicu i uvjeta *(1)* iz definicije teorije s jednakošću slijedi tražena tvrdnja.

Dokažimo na kraju tvrdnju c). Označimo sa $A(y)$ atomarnu formulu $x = y$, te neka je $A'(z) \equiv x = z$. Primjenom uvjeta *(2)* iz definicije teorije s jednakošću dobivamo $\vdash_T y = z \to (x = y \ \to \ x = z)$. Primjenom iste tautologije kao u dokazu tvrdnje b) dobivamo traženu tvrdnju. □

U sljedećoj propoziciji dokazujemo da svojstvo *(2)* iz definicije teorije s jednakošću vrijedi za sve formule, a ne samo za atomarne.

**Propozicija 2.103.** *Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću. Neka je $A(x)$ formula pripadnog jezika, te neka je varijabla $y$ slobodna za varijablu $x$ u formuli $A(x)$. Označimo sa $A'(y)$ formulu dobivenu iz $A(x)$ zamjenom nekih, možda i svih, slobodnih nastupa varijable $x$ sa $y$. Tada vrijedi*

$$\vdash_T x = y \ \to \ (A(x) \to A'(y)).$$

*Dokaz.* Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule $A(x)$. Za atomarne formule tvrdnja vrijedi po uvjetu (2) iz definicije 2.101. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve formule čija je složenost strogo manja od $n$ $(n > 0)$. Promotrimo slučajeve obzirom na oblik formule $A(x)$ :

a) Formula $A(x)$ je oblika $\neg B(x)$.
Po induktivnoj pretpostavci imamo $\vdash_T y = x \to (B'(y) \to B(x))$. Primjenom simetričnosti (propozicija 2.102. b)) i tautologija $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ i $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$ slijedi tražena tvrdnja.

b) Formula $A(x)$ je oblika $B(x) \to C(x)$.

c) Formula $A(x)$ je oblika $\forall z B(x, z)$.

Dokaze za slučajeve b) i c) prepuštamo čitaocu. □

Iz dokazanih propozicija zaključujemo da je interpretacija simbola $=$ kod svake teorije prvog reda s jednakošću neka relacija ekvivalencije. Strukturu $\mathfrak{M}$ kod koje je $=^{\mathfrak{M}}$ upravo relacija jednakosti, tj. vrijedi $=^{\mathfrak{M}} = \{(m, m) : m \in M\}$, nazivamo **normalna struktura** dane teorije.

Sada nam je glavni cilj dokazati da za svaku konzistentnu teoriju $T$ prvog reda s jednakošću postoji normalan model. U tu svrhu dokazujemo sljedeće leme.

**Lema 2.104.** *Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću, te $k \in \mathbb{N}$. Tada za sve relacijske simbole $R$ vrijedi:*

*a)* $\vdash_T (x_1 = y_1 \land \ldots \land x_k = y_k) \to$
$(R(x_1, \ldots, x_n) \to R(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n))$, *ako je* $k < n$;

*b)* $\vdash_T (x_1 = y_1 \land \ldots \land x_k = y_k) \to (R(x_1, \ldots, x_n) \to R(y_1, \ldots, y_n))$, *ako je* $k \geq n$.

*Dokaz.* Dokaz provodimo indukcijom po $k$. Za bazu indukcije, tj. za $k = 1$, tražena tvrdnja slijedi iz uvjeta *(2)* definicije teorije prvog reda s jednakošću.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da za sve $l < k$ vrijedi tvrdnja, te neka je $R$ $n$-mjesni relacijski simbol. Promatrat ćemo samo slučaj kada je $k < n$. Drugi slučaj, tj. kada je $k \geq n$, dokazuje se analogno. Iz uvjeta (2) definicije teorije s jednakošću imamo

$$\vdash_T x_k = y_k \to (R(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \to$$

$$R(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)).$$

Primjenom tautologije $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ slijedi:

$$\vdash_T R(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \to$$

$$(x_k = y_k \to R(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)) \qquad (*)$$

Po pretpostavci indukcije, i primjenom odgovarajuće tautologije, imamo

$$\vdash_T (x_1 = y_1 \land \ldots \land x_{k-1} = y_{k-1} \land R(x_1, \ldots, x_n)) \to R(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_k, \ldots, x_n).$$

Iz ovog posljednjeg, i dokazane činjenice označene sa $(*)$, primjenom hipotetičkog silogizma slijedi

$$\vdash_T (x_1 = y_1 \land \ldots \land x_{k-1} = y_{k-1} \land R(x_1, \ldots, x_n)) \to$$

$$(x_k = y_k \to R(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n))$$

Iz ovog posljednjeg lako slijedi tražena tvrdnja. $\square$

Prethodna lema govori o relacijskim simbolima. U sljedećoj lemi izričemo analogne tvrdnje za funkcijske simbole.

**Lema 2.105.** *Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću, te $k \in \mathbb{N}$. Tada za sve funkcijske simbole $f$ vrijedi:*

*a)* $\vdash_T (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_k = y_k) \to$
$(f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)),$
*ako je $k < n$;*

*b)* $\vdash_T (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_k = y_k) \to (f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)),$
*ako je $k \geq n$.*

*Dokaz.* Analogno kao kod prethodne leme 2.104. □

**Lema 2.106.** *Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću i $\mathfrak{M}$ model za $T$. Tada postoji normalan model $\mathfrak{N}$ za $T$ tako da vrijedi $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.*

*Dokaz.* Iz propozicije 2.102. slijedi da je relacija $=^{\mathfrak{M}}$ jedna relacija ekvivalencije. Za svaki $m \in |\mathfrak{M}|$ sa $[m]$ označimo pripadnu klasu ekvivalencije i neka je sa $|\mathfrak{N}|$ označen kvocijentni skup $|\mathfrak{M}|/ =^{\mathfrak{M}}$ . Sada definiramo interpretaciju svakog nelogičkog simbola teorije $T$.

Za $n$-mjesni relacijski simbol $R$ definiramo relaciju $R^{\mathfrak{N}}$ sa:

$$([m_1], \ldots, [m_n]) \in R^{\mathfrak{N}} \quad \text{ako i samo ako} \quad (m_1, \ldots, m_n) \in R^{\mathfrak{M}},$$

za sve $m_1, \ldots, m_n \in M$.

Dokažimo da je ova definicija dobra, tj. ne ovisi o izboru reprezentanata klasa ekvivalencije. Neka su $m_1, \ldots, m_n, p_1, \ldots, p_n$ iz $|\mathfrak{M}|$ takvi da za sve $i$ vrijedi $m_i =^{\mathfrak{M}} p_i$. Tada očito vrijedi

$$\mathfrak{M} \models \big(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n)[m_1, \ldots, m_n, p_1, \ldots, p_n]$$

Pošto je $\mathfrak{M}$ model za teoriju $T$ tada iz leme 2.104. slijedi

$$\mathfrak{M} \models \big(R(x_1, \ldots, x_n) \to R(y_1, \ldots, y_n)\big)[m_1, \ldots, m_n, p_1, \ldots, p_n]$$

No, to upravo znači:

$$\text{ako} \quad (m_1, \ldots, m_n) \in R^{\mathfrak{M}} \quad \text{tada} \quad (p_1, \ldots, p_n) \in R^{\mathfrak{M}}.$$

Za $n$-mjesni funkcijski simbol $f$ definiramo funkciju $f^{\mathfrak{N}}$ sa:

$$f^{\mathfrak{N}}([m_1], \ldots, [m_n]) = [f^{\mathfrak{M}}(m_1, \ldots, m_n)],$$

za sve $m_1, \ldots, m_n \in M$. Neovisnost ove definicije o izboru reprezentanata klasa ekvivalencije slijedi iz leme 2.105.

Za konstantski simbol $c$ teorije $T$ definiramo $c^{\mathfrak{N}} = [c^{\mathfrak{M}}]$.

Primijetimo da redom vrijedi: $[m] =^{\mathfrak{N}} [p]$ ako i samo ako $m =^{\mathfrak{M}} p$, a to je ekvivalentno sa $[m] = [p]$. To znači da je $=^{\mathfrak{N}}$ relacija jednakosti na skupu $|\mathfrak{N}|$.

Neka je $v$ proizvoljna valuacija na $\mathfrak{M}$. Sa $v'$ označimo valuaciju na $\mathfrak{N}$ definiranu sa $v'(x) = [v(x)]$. Indukcijom po duljini terma lako je dokazati da za sve terme $t$ teorije $T$ vrijedi $v'(t) = [v(t)]$.

Zatim, indukcijom po složenosti formule $F$ nije teško dokazati da vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models_v F \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models_{v'} F.$$

Iz prethodne tvrdnje odmah slijedi da vrijedi $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$. □

**Teorem 2.107.** *Za svaku konzistentnu teoriju prvog reda s jednakošću postoji konačan ili prebrojiv normalan model.*

*Dokaz.* Iz generaliziranog teorema potpunosti 2.78. znamo da za $T$ postoji prebrojiv model $\mathfrak{M}$. Iz leme 2.106. (i njenog dokaza) slijedi da pomoću modela $\mathfrak{M}$ možemo definirati konačan ili prebrojiv normalan model za $T$. □

**Teorem 2.108.** *(Löwenheim-Skolemov teorem za teorije s jednakošću) Ako za teoriju $T$ prvog reda s jednakošću postoji beskonačan normalan model tada postoji i prebrojiv normalan model za $T$.*

*Dokaz.* Označimo sa $\mathfrak{M}$ jedan beskonačan normalan model za $T$. U svrhu dokaza definiramo novu teoriju $T'$. Skup nelogičkih simbola od $T'$ neka je unija skupa nelogičkih simbola od $T$ i prebrojivog skupa novih konstantskih simbola koje označavamo sa $b_i$ ($i \in \mathbb{N}$). Skup nelogičkih aksioma za $T'$ definiramo kao proširenje skupa nelogičkih aksioma od $T$ sa svim formulama oblika $b_i \neq b_j$, gdje je $i \neq j$.

Tvrdimo da je $T'$ konzistentna teorija. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji formula $F$ tako da vrijedi $\vdash_{T'} F$ i $\vdash_{T'} \neg F$. Lako je vidjeti da tada vrijedi i $\vdash_{T'} F \wedge \neg F$. Neka je $F_1, \ldots, F_m$ jedan izvod za $F \wedge \neg F$ u teoriji $T'$. U tom izvodu postoji samo konačno mnogo konstantskih simbola koji pripadaju alfabetu od $T$. Neka su to $c_1, \ldots, c_p$. Naravno, postoji i samo konačno mnogo novih konstantskih simbola $b_i$ koji se javljaju u izvodu. Neka su to $b_1, \ldots, b_n$. Definiramo strukturu $\mathfrak{N}$ za niz formula $F_1, \ldots, F_m$. Nosač strukture neka je skup $|\mathfrak{M}|$. Za sve nelogičke simbole $c$ teorije $T$ koji nastupaju u nekoj formuli $F_i$ definiramo $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$.

Zatim, neka je $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq |\mathfrak{M}|$ koji ima točno $n$ elemenata, te vrijedi $\{m_1, \ldots, m_n\} \cap \{c_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_p^{\mathfrak{M}}\}$ (takav podskup postoji jer je po pretpsotavci skup $|\mathfrak{M}|$ beskonačan). Za svaki $i = 1, \ldots, n$ definiramo $b_i^{\mathfrak{N}} = m_i$.

Pošto je po pretpostavci $\mathfrak{M}$ model za $T$ tada vrijedi i $\mathfrak{N} \models T$, a onda posebno i $\mathfrak{N} \models F_i$ za sve $i = 1, \ldots, m$. Posebno imamo $\mathfrak{N} \models F_m$, tj. $\mathfrak{N} \models F \wedge \neg F$, što je nemoguće.

Iz teorema 2.107. slijedi da za konzistentnu teoriju $T'$ postoji konačan ili prebrojiv normalan model $\mathfrak{A}$. Pošto vrijedi $\mathfrak{A} \models b_i \neq b_j$, za sve $i \neq j$, te je $\mathfrak{A}$ normalna struktura, tada je očito $\mathfrak{A}$ prebrojiva struktura. □

Sada navodimo jedno svojstvo jednakosti koje će nam pomoći da u Zermelo-Fraenkelovoj teoriji skupova lakše razumijemo aksiom ekstenzionalnosti.

**Propozicija 2.109.** *Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću i $\in$ proizvoljan dvomjesni relacijski simbol koji pripada skupu nelogičkih simbola od $T$. Umjesto $\in (x, y)$ pisat ćemo $x \in y$. Tada vrijedi:*

*a)* $\vdash_T x = y \;\rightarrow\; \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$;

*b)* $\vdash_T x = y \;\rightarrow\; \forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z)$.

*Dokaz.* Trvdnje lako slijede iz propozicije 2.103. □

**Napomena 2.110.** *Napominjemo da "obrati" tvrdnji iz prethodne propozicije općenito nisu teoremi proizvoljne teorije prvog reda, tj. svaka normalna struktura nije model za formule*

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \qquad i \qquad \forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y.$$

*Navodimo jedan primjer normalne strukture koja nije model za prvu formulu. Neka je $\mathfrak{M}$ normalna struktura gdje je $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$ a $\in^{\mathfrak{M}}$ je binarna relacija na $\mathbb{N}$ zadana sa:*

$$n \in^{\mathfrak{M}} m \quad \text{ako i samo ako} \quad n \quad \text{je prost i} \quad n \mid m.$$

*Očito za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$n \in^{\mathfrak{M}} 4 \quad \text{ako i samo ako} \quad n \in^{\mathfrak{M}} 8.$$

*Očito $\mathfrak{M} \models \big(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)\big)[4, 8]$ i $\mathfrak{M} \not\models (x \neq y)[4, 8]$. Tada $\mathfrak{M} \not\models \big(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y\big)[4, 8]$.*

**Zadaci:**

1. Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću, te $A(x)$ proizvoljna formula. Dokažite da su sljedeće formule teoremi od $T$ :

   a) $\forall x(A(x) \leftrightarrow \exists y(x = y \wedge A(y)))$;

   b) $\forall x(A(x) \leftrightarrow \forall y(x = y \to A(y)))$;

   c) $\forall x \exists y(x = y)$.

   Rješenje a): Prvo dokazujemo da je formula $\exists y(x = y \wedge A(y)) \to A(x)$ teorem od $T$. U tu svrhu pišemo sljedeći niz formula:

   | | |
   |---|---|
   | 1. $y = x \to (A(y) \to A(x))$ | (po uvjetu (2) iz definicije 2.101.) |
   | 2. $x = y \to y = x$ | (propozicija 2.102.) |
   | 3. $x = y \to (A(y) \to A(x))$ | (hip. sil.: 1. i 2. ) |
   | 4. $(x = y \wedge A(y)) \to A(x)$ | (primjenom odgovarajuće tautologije) |
   | 5. $\exists y(x = y \wedge A(y)) \to A(x)$ | ($\exists$-introdukcija: 4) |

   (Pravilo $\exists$–introdukcije je dopustivo pravilo u svakoj teoriji prvog reda. Vidi zadatak 3 u točki 2.6.)

   Analogno se dokazuje "obrat", tj. da je formula $A(x) \to \exists y(x = y \wedge A(y))$ teorem.

2. Nađite primjere formula $F$ koje imaju svojstvo:

   a) svaka normalna struktura koja ne sadrži više od $n$ elemenata je model za $F$;

   b) svaka normalna struktura koja ne sadrži manje od $n$ elemenata je model za $F$;

   c) sve normalne strukture koja sadrže točno $n$ elemenata, i samo takve, su modeli za $F$.

3. Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću za koju postoje proizvoljno veliki konačni normalni modeli (tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $m \geq n$ i normalan model za $T$ kardinalnosti $m$.) Dokažite da tada postoji beskonačan normalan model za $T$.

4. Neka je $S$ skup formula za koji postoji beskonačan model. Postoji li konačan normalan model za $S$ ako je skup $S$ konačan, odnosno beskonačan. Rješenje: Neka je $F$ formula iz zadatka 14 sa strane 143. Zatim, neka je $S = \{F\}$. Po navedenom zadatku 14 za formulu $F$ postoji beskonačan model, ali ne postoji konačan model za nju. To znači da posebno ne postoji konačan normalan model za ovdje definiran konačan skup formula $S$.

Neka je sada $S = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ gdje su formule $F_n$ definirane s:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \Bigg( \bigwedge_{1 \leq i \ < j \leq n} x_i \neq x_j \Bigg).$$

Očito svaki konačan podskup od $S$ ima (normalan) model. Po teoremu kompaktnosti postoji model za $S$. No, očito niti jedan normalan model od $S$ ne može biti konačan.

5. Neka je $S$ skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite: za skup $S$ postoji normalan model ako i samo ako za svaki konačan podskup od $S$ postoji normalan model.

6. Neka je $T$ teorija prvog reda i $\mathfrak{M}$ struktura za $T$ takva da je $=^{\mathfrak{M}}$ relacija ekvivalencije. Je li tada $\mathfrak{M}$ model za sve formule oblika:

   (1) $x = x$;

   (2) $x = y \ \rightarrow \ (A(x) \rightarrow A'(y))$, gdje je $A(x)$ atomarna formula, a $A'(y)$ je formula dobivena zamjenom nekih, moguće i svih, slobodnih nastupa varijable $x$ s varijablom $y$.

   Rješenje: Ne. Neka je $P$ jednomjesni relacijski simbol. Sami konstruirajte strukturu $\mathfrak{M}$ tako da je $=^{\mathfrak{M}}$ relacija ekvivalencije, i tako da $\mathfrak{M} \not\models x = y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))$.

   (Uočite da iz ovog zadatka slijedi da ne može svaka relacija ekvivalencije biti interpretacija znaka $=$ kod teorija s jednakošću).

7. Ako je $F(x)$ formula tada sa $\exists! x F(x)$ označavamo formulu

   $$\exists x F(x) \wedge \forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \rightarrow x = y).$$

   Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću. Dokažite da su tada sljedeće formule teoremi od $T$ :

   a) $\forall x \exists! y (x = y)$;

   b) $\exists! x F(x) \leftrightarrow \exists x \forall y (x = y \leftrightarrow F(y))$;

   c) $\forall x (F(x) \leftrightarrow G(x)) \rightarrow (\exists! x F(x) \leftrightarrow \exists! x G(x))$.

8. Neka je $T$ teorija prvog reda s jednakošću čiji je skup nelogičkih simbola $\{=, \ <\}$, gdje je $<$ dvomjesni relacijski simbol. Nelogički aksiomi, uz aksiome za jednakost, su sljedeći: $\neg(x < x)$, $\ x < y \rightarrow (y < z \rightarrow x < z)$, $x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x$, $\ \forall x \forall y \exists z (x < y \rightarrow (x < z \wedge z < y))$, $\ \forall x \exists y (x < y)$ i $\ \forall x \exists y (y < x)$. Dokažite da je $T$ $\aleph_\circ$-kategorična teorija, a nije kategorična. Uputa: primijenite Cantorov teorem o uređanoj karakteristici skupa racionalnih brojeva (vidi [31], str. 84).

9. Sa $\mathbb{Q}$ označimo skup racionalnih brojeva, a sa $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva. Uređeni skupovi $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ su interpretacije jezika čiji su jedini nelogički simboli $=$ i $<$ . Dokažite da vrijedi $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <)$. (Primijetimo da strukture $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ nisu izomorfni.)

   Rješenje: Dokazujemo da su obje gornje strukture modeli iste potpune teorije. Neka je $T$ teorija, kao što je definirano u prethodnom zadatku. Lako je vidjeti da svaki model od $T$ mora biti beskonačan. Pošto je po prethodnom zadatku teorija $T$ i $\aleph_\circ$-kategorična, tada iz Łoś-Vaughtovog testa (vidi propoziciju 2.99.) slijedi da je $T$ potpuna teorija. Pošto su $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ očito modeli za $T$, tada iz zadatka 2 sa strane 202 slijedi da su elementarno ekvivalentni.

10. Neka je teorija $T$ prvog reda kategorična u odnosu na klasu svih svojih normalnih modela. Dokažite da tada svi normalni modeli imaju isti konačan broj elemenata.

    Uputa: Pretpostavite da postoji beskonačan normalan model $\mathfrak{M}$ za $T$. Zatim konstruirajte normalan model za $T$ koji je veće kardinalnosti od $\mathfrak{M}$.

### 2.8.2 Peanova aritmetika

Peanova aritmetika, tj. skraćeno $PA$, je teorija prvog reda s jednakošću čiji je skup nelogičkih simbola $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, gdje je 0 konstantski simbol, $'$ je jednomjesni funkcijski simbol, a $+$ i $\cdot$ su dvomjesni funkcijski simboli.[23]

Umjesto terma oblika $+(x, y)$ pisat ćemo $x + y$, a umjesto $\cdot(x, y)$ pisat ćemo $x \cdot y$. Teorija $PA$, uz aksiome za jednakost (npr. formule iz definicije 2.101.), sadrži i sljedeće nelogičke aksiome:

(1) $x' = y' \to x = y$

(2) $0 \neq x'$

(3) $x + 0 = x$

(4) $x + y' = (x + y)'$

(5) $x \cdot 0 = 0$

(6) $x \cdot y' = x \cdot y + x$

(7) shema aksioma indukcije:

$$A(0) \to \Big(\forall x(A(x) \to A(x')) \to \forall x A(x)\Big),$$

gdje je $A(x)$ proizvoljna formula.

Uočimo da iz aksioma (1) i (2) slijedi da teorija $PA$ nema konačan normalan model (injekcija na konačnom skupu mora biti i surjekcija).

Prisjetimo se da aksiom matematičke indukcije glasi:

$$\forall P\Big(\big(P(0) \land (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \to P(n+1))\big) \to (\forall n \in \mathbb{N})P(n)\Big),$$

gdje je $P$ proizvoljna relacija na skupu prirodnih brojeva. Primijetimo da je aksiom matematičke indukcije formula drugog reda, te da ne odgovara potpuno shemi aksioma (7). Aksiom matematičke indukcije se odnosi na sve podskupove prirodnih brojeva, a njih ima neprebrojivo. Shema aksioma indukcije se odnosi na sve formule $A(x)$ teorije $PA$, a njih ima prebrojivo.

Neka je sa $\omega$ označena struktura za teoriju $PA$ čiji je nosač skup prirodnih brojeva, a interpretaciju nelogičkih simbola redom zadajemo ovako:

- relacijski simbol $=$ je interpretiran s relacijom jednakosti;
- konstanski simbol 0 je interpretiran s brojem nula;

[23] Jasne su standardne interpretacije simbola 0, $+$ i $\cdot$. Standardna interpretacija jednomjesnog simbola $'$ je funkcija sljedbenika, tj. funkcija $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana sa $s(x) = x + 1$.

- funkcijski simbol $'$ se interpretira s funkcijom $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja je definirana sa $s(n) = n + 1$;
- funkcijski simbol $+$ je interpretiran s funkcijom zbrajanja, a simbol $\cdot$ s funkcijom množenja.

Prirodno se postavlja pitanje postoji li neki normalan model teorije $PA$ koji nije izomorfan strukturi $\omega$. Ako bi takav model postojao to bi značilo da dana teorija $PA$ ne opisuje samo prirodne brojeve. Kasnije ćemo dokazati da postoji model za $PA$ koji nije izomorfan sa $\omega$, čak je elementarno ekvivalentan sa $\omega$.

Drugo osnovno pitanje o sistemu $PA$ je o njegovoj "snazi", tj. je li svaka istinita tvrdnja o prirodnim brojevima teorem teorije $PA$. Navest ćemo teorem koji će iskazivati nepotpunost teorije $PA$.

U ovoj točki sa $\vdash F$ označavamo da je $F$ teorem teorije $PA$.

Za ilustraciju ćemo dokazati neka svojstva funkcijskih simbola $+$ i $\cdot$. Prije toga ističemo da svojstva tih funkcijskih simbola iskazana u aksiomima vrijede za proizvoljne terme.

**Lema 2.111.** *Za proizvoljne terme $t$, $t_1$ i $t_2$ sljedeće formule su teoremi od $PA$:*

*a)* $t_1' = t_2' \to t_1 = t_2$

*b)* $0 \neq t'$

*c)* $t \neq 0 \to \exists y(t = y')$

*d)* $t + 0 = t$

*e)* $t_1 + t_2' = (t_1 + t_2)'$

*f)* $t \cdot 0 = 0$

*g)* $t_1 \cdot t_2' = t_1 \cdot t_2 + t_1$

*Dokaz.* Za ilustraciju dokazujemo tvrdnju a). Ostale tvrdnje dokazuju se analogno. Sljedećim nizom formula dajemo jedan dokaz za danu formulu.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $x' = y' \to x = y$ | (aksiom (1)) |
| 2. | $\forall x(x' = y' \to x = y)$ | (gen: 1.) |
| 3. | $\forall x(x' = y' \to x = y) \to (t_1' = y' \to t_1 = y)$ | (logički aksiom (A4)) |
| 4. | $t_1' = y' \to t_1 = y$ | (mod pon: 2. i 3.) |
| 5. | $\forall y(t_1' = y' \to t_1 = y)$ | (gen: 4.) |
| 6. | $\forall y(t_1' = y' \to t_1 = y) \to (t_1' = t_2' \to t_1 = t_2)$ | (logički aksiom (A4)) |
| 7. | $t_1' = t_2' \to t_1 = t_2$ | (mod pon: 5. i 6.) |

□

Sljedećom propozicijom želimo istaknuti neke (očekivane!) teoreme teorije $PA$.

**Propozicija 2.112.** *Neka su* $t$, $t_1$, $t_2$ *i* $t_3$ *proizvoljni termi teorije* $PA$. *Sljedeće formule su teoremi teorije* $PA$ :

*a)* $0 + t = t$

*b)* $0 \cdot t = 0$

*c)* $t_1 + t_2 = t_2 + t_1$

*d)* $t_1 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_1$

*e)* $(t_1 + t_2) + t_3 = t_1 + (t_2 + t_3)$

*f)* $(t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$

*g)* $(t_1 + t_2) \cdot t_3 = (t_1 \cdot t_3) + (t_2 \cdot t_3)$

*h)* $t_1 + t_2 = t_1 + t_3 \;\rightarrow\; t_2 = t_3$

*i)* $t_1 + t_2 = 0 \;\rightarrow\; (t_1 = 0 \wedge t_2 = 0)$

*Dokaz.* Radi ilustracije dokazujemo tvrdnju a). Označimo sa $A(x)$ formulu $0 + x = x$. Iz leme 2.111. d) slijedi $\vdash 0 + 0 = 0$, tj. $\vdash A(0)$.

Sada dokazujemo $\vdash A(x) \rightarrow A(x')$. U tu svrhu ćemo dokazati da vrijedi $\{A(x)\} \vdash A(x')$. Jedan izvod dajemo sljedećim nizom formula.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $0 + x' = (0 + x)'$ | (lema 2.111. e)) |
| 2. | $0 + x = x \rightarrow (0 + x)' = x'$ | (lema 2.105.) |
| 3. | $0 + x = x$ | (pretpostavka) |
| 4. | $(0 + x)' = x'$ | (mod pon: 2. i 3.) |
| 5. | $0 + x' = x'$ | (tranzitivnost jednakosti: $1, 4$) |

Time smo dokazali $\{0 + x = x\} \vdash 0 + x' = x'$. Primjenom teorema dedukcije slijedi $\vdash 0 + x = x \rightarrow 0 + x' = x'$, a onda primjenom pravila generalizacije dobivamo $\vdash \forall x(0 + x = x \rightarrow 0 + x' = x')$.

Iz sheme aksioma indukcije imamo

$$\vdash 0 + 0 = 0 \;\rightarrow\; (\forall x(0 + x = x \rightarrow 0 + x' = x') \rightarrow \forall x(0 + x = x)).$$

Iz dokazanih činjenica $\vdash 0 + 0 = 0$ i $\vdash \forall x(0 + x = x \rightarrow 0 + x' = x')$ pomoću pravila modus ponens slijedi $\vdash \forall x(0 + x = x)$. Iz aksioma (A4) imamo $\vdash \forall x(0 + x = x) \rightarrow 0 + t = t$, a onda i $\vdash 0 + t = t$. □

Terme oblika $0'^{\cdots'}$, gdje se znak $'$ pojavljuje točno $n$-puta, nazivamo **numerali** i označavamo sa $\overline{n}$. U sljedećoj propoziciji bez dokaza navodimo neka svojstva numerala.

**Propozicija 2.113.** *Neka su $t$ i $s$ proizvoljni termi, a $m$ i $n$ proizvoljni prirodni brojevi. Sljedeće formule su teoremi teorije $PA$.*

*a)* $t + \overline{1} = t'$

*b)* $t \cdot \overline{1} = t$

*c)*
$$t \cdot \overline{n} = \underbrace{t + \ldots + t}_{n-puta}$$

*d)* $t \cdot s = \overline{1} \rightarrow (t = \overline{1} \wedge s = \overline{1})$

*e)* $\overline{m + n} = \overline{m} + \overline{n}$

*f)* $\overline{m \cdot n} = \overline{m} \cdot \overline{n}$

Svaki model od $PA$ koji je izomorfan sa $\omega$ nazivamo **standardni model** za $PA$. Skup svih formula za koje je $\omega$ model obično se naziva **aritmetika**.

Model od $PA$ koji nije izomorfan sa $\omega$ nazivamo **nestandardni model**.[24] Pošto je $\omega$ model za $PA$ iz Löwenheim–Skolemovog teorema slijedi da za teoriju $PA$ postoje modeli proizvoljno velikog beskonačnog kardinaliteta. Takvi modeli očito nisu izomorfni sa $\omega$, tj. nestandardni su. U sljedećoj propoziciji dokazujemo egzistenciju nestandardnog modela koji ima još jedno važno dodatno svojstvo.

**Propozicija 2.114.** *Postoji nestandardni model za $PA$ koji je elementarno ekvivalentan sa $\omega$.*

*Dokaz.* Neka je $c$ novi konstantski simbol koji ne pripada alfabetu $PA$. Neka je $x < y$ pokrata za formulu $\exists z(z \neq 0 \wedge x + z = y)$. Promotrimo skup formula $S$ definiran sa:

$$S = Th(\omega) \cup \{\overline{n} < c \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Neka je $S'$ proizvoljan konačan podskup od $S$. Označimo sa $m$ najveći prirodan broj koji ima svojstvo da se numeral $\overline{m}$ pojavljuje u nekoj formuli iz skupa $S'$. Neka je $\mathfrak{M}$ struktura za $S'$ s nosačem $\mathbb{N}$, gdje je $c^{\mathfrak{M}} = m + 1$, a ostali nelogički simboli su interpretirani standardno. Lako je vidjeti da je $\mathfrak{M}$ model za $S'$. To znači da svaki konačan podskup od $S$ ima normalan model, pa iz teorema kompaktnosti slijedi da postoji i normalan model za skup $S$ (vidi zadatak 5 u ovoj točki).

[24]Nestandardni modeli su jako značajni pri proučavanju Peanove aritmetike. Ryll–Nardzewski je upravo pomoću nestandardnih modela 1952. godine dokazao da teorija $PA$ nije konačno aksiomatizabilna.

Neka je sa $\mathfrak{N}$ označen jedan normalan model za $S$. Primijetimo da posebno vrijedi $\mathfrak{N} \models Th(\omega)$. Lako je vidjeti da tada vrijedi i $\omega \models Th(\mathfrak{N})$. Iz toga slijedi $\omega \equiv \mathfrak{N}$.

Dokažimo još da strukture $\omega$ i $\mathfrak{N}$ nisu izomorfne. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $f$ neki izomorfizam struktura $\omega$ i $\mathfrak{N}$. Indukcijom po $n$ dokazujemo da tada vrijedi $f(n) = \overline{n}^{\mathfrak{N}}$, za sve $n \in \mathbb{N}$ (ovdje nam $\overline{0}$ označava simbol 0).

Iz definicije izomorfizma imamo $\overline{0}^{\mathfrak{N}} = 0^{\mathfrak{N}} = f(0^{\omega}) = f(0)$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$\overline{n+1}^{\mathfrak{N}} = (\overline{n}\,')^{\mathfrak{N}} = (')^{\mathfrak{N}}(\overline{n}^{\mathfrak{N}}) = (')^{\mathfrak{N}}(f(n)) = f((')^{\omega}(n)) = f(n+1).$$

Iz upravo dokazane tvrdnje slijedi da ne postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji bi vrijedilo $f(n) = c^{\mathfrak{N}}$. To znači da struktura $\omega$ ne može biti izomorfna sa $\mathfrak{N}$. $\square$

Peanova aritmetika je teorija prvog reda, pa za nju vrijedi Gödelov teorem potpunosti, tj. teorem 2.80. To znači da je teorija $PA$ potpuna u odnosu na klasu svih svojih modela, tj. za sve formule $F$ vrijedi: $\vdash_{PA} F$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models F$, za sve modele $\mathfrak{M}$ od $PA$.

Postavlja se pitanje je li teorija $PA$ potpuna, tj. vrijedi li za sve zatvorene formule $F$ jedno od: $\vdash_{PA} F$ ili $\vdash_{PA} \neg F$. O tome govori sljedeći teorem.

**Gödelov prvi teorem nepotpunosti**
Postoji zatvorena formula $G$ za koju vrijedi $\not\vdash_{PA} G$ i $\not\vdash_{PA} \neg G$.

Obično se formula $G$ iz prethodnog teorema naziva Gödelova rečenica. Istaknimo važnost prethodnog teorema. Ako je $F$ zatvorena formula tada očito vrijedi $\omega \models F$ ili $\omega \models \neg F$. Posebno to vrijedi za Gödelovu rečenicu. To znači da u sistemu $PA$ nije moguće dokazati sve istinite tvrdnje o prirodnim brojevima. U prvi tren mogli bismo reći da to samo znači da smo loše odabrali aksiome o prirodnim brojevima. Zatim, može se činiti da je dodavanje formule $G$, ili njene negacije, teoriji $PA$ kao novog aksioma, rješenje problema. No, iz dokaza Gödelovog teorema može se vidjeti da niti jedno aksiomatizabilno proširenje teorije $PA$ nije potpuno.

Ako u teoriji $PA$ shemu aksioma indukcije zamijenimo s formulom $x \neq 0 \to \exists y(x = y')$ dobivamo teoriju koja se obično označava sa $Q$, i naziva Robinsonova aritmetika. Teorija $Q$ je također nepotpuna.

Gödelova rečenica $G$ je aritmetički zapis sljedeće rečenice: "Ja nisam dokaziva u teoriji $PA$". Mogli bismo u prvi tren pomisliti da je to nezanimljiva tvrdnja o prirodnim brojevima, te onda i Gödelov teorem nema neku posebnu važnost. No, nakon Gödelovog rezultata otkriveni su (značajni!) kombinatorni principi koji nisu dokazivi u teoriji $PA$.[25]

### 2.8.3 Zermelo–Fraenkelova teorija skupova

Ernst Zermelo je 1905. godine prvi formulirao skup aksioma za teoriju skupova. Abraham Fraenkel je taj skup aksioma 1920. godine modificirao. Njima u čast jedna aksiomatska teorija skupova se naziva Zermelo-Fraenkelova teorija skupova, i označava sa $ZF$.

Skup nelogičkih simbola teorije $ZF$ sadrži samo dva nelogička simbola. Uz simbol za jedankost to je još jedan dvomjesni relacijski simbol koji se obično označava sa $\in$ . Atomarne formule oblika $\in(x, y)$ ćemo zapisivati kao $x \in y$.

Aksiomi teorije $ZF$ većinom opisuju kako iz danih skupova smijemo graditi nove skupove. Nelogičke aksiome teorije $ZF$ nećemo jednostavno popisati, jer ih je nezgrapno zapisivati bez prije uvedenih pokrata. Navest ćemo aksiome teorije $ZF$ i nakon svakog aksioma dati komentare. Prilikom komentara o aksiomima umjesto da govorimo "term teorije $ZF$" govorit ćemo "skup". Razlog tome je što su skupovi standardna interpretacija teorije $ZF$. Nadamo se da ta naša mala nepreciznost neće prouzročiti nedoumice. Prvi aksiom teorije $ZF$ je:

(1) *Aksiom ekstenzionalnosti:*

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y.$$

Taj aksiom smo već bili razmatrali u napomeni 2.110. Primijetite da taj aksiom uvijek koristimo prilikom dokazivanja jednakosti dvaju skupova. Važno je istaknuti da upravo zbog aksioma ekstenzionalnosti slijedi npr. $\{a, b, c, d\} = \{b, a, d, c\}$, tj. prilikom zadavanja skupova nije važno kojim poretkom navodimo njihove elemente. Zatim, iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi da kod skupova ne razlikujemo ponavljanje istih elemenata. Tako je npr. $\{a, b, c, c, c, c\} = \{a, b, c\}$.

Sada redom navodimo ostale aksiome teorije $ZF$.

(2) *Aksiom praznog skupa*:

$$\exists x \forall y(\neg(y \in x)).$$

Ovaj aksiom jednostavno govori da postoji skup koji ne sadrži niti jedan element. Iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi da je skup s tim svojstvom jedinstven. Iz tog razloga smijemo alfabetu teorije $ZF$ dodati novi konstantski simbol za prazan skup, kojeg označavamo sa $\emptyset$.

[25] Dokaz Gödelovog teorema nepotpunosti dan je npr. u [38] i [27], odnosno u D. Predrijevac, Nepotpunost aritmetike, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 2000. O nedokazivim kombinatornim principima u teoriji $PA$ možete čitati u [1].

(3) *Aksiom para*:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow (x = u \lor y = u)).$$

Ako su $x$ i $y$ skupovi tada iz ovog aksioma slijedi da postoji skup čiji su jedini elementi $x$ i $y$. Iz aksioma ekstenzionalnosti slijedi da je takav skup jedinstven. To nam daje za pravo da alfabetu teorije $ZF$ dodamo novi dvomjesni funkcijski simbol kojeg označavamo sa $\{,\}$. Tada skup čiji su jedini elementi $x$ i $y$ označavamo sa $\{x, y\}$. Za dani term $x$ sa $\{x\}$ kratko označavamo term $\{x, x\}$. (Ovime želimo izbjeći uvođenje novog jednomjesnog funkcijskog simbola poput $\{\}$ ).

(4) *Aksiom unije*:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \land z \in t)).$$

Pokušat ćemo objasniti aksiom unije na jednom primjeru. Neka je dan skup $A = \{a, \ \{b, c\}, \ \{d\}\}$. Tada aksiom unije tvrdi da je kolekcija objekata, koji su elementi nekog elementa od $A$, također skup. U ovom slučaju to znači da je $\{b, c, d\}$ također skup.

Primjenom aksioma ekstenzionalnosti slijedi da je skup $y$, čija egzistencija se tvrdi u aksiomu unije, jedinstven. Iz tog razloga opet smijemo alfabetu teorije $ZF$ dodati novi funkcijski simbol kojeg označavamo sa $\cup$. Za dani skup $x$ sa $\cup x$ označavamo skup čija se egzistencija tvrdi u ovom aksiomu.

Ako su $x$ i $y$ skupovi tada iz aksioma para slijedi egzistencija skupa $\{x, y\}$. Iz aksioma unije slijedi da je $\cup\{x, y\}$ također skup. Obično taj skup (kao jedan term teorije $ZF$!) zapisujemo standardno sa $x \cup y$.

(5) *Aksiom partitivnog skupa*

Kako bismo ovaj aksiom iskazali u jasnijem i kraćem obliku uvodimo pokratu $x \subseteq y$ za formulu $\forall z (z \in x \to z \in y)$. Tada je *aksiom partitivnog skupa* sljedeća formula:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Ovaj aksiom jednostavno tvrdi da svi podskupovi nekog skupa opet čine skup.

(6) *Aksiom beskonačnosti*:

$$\exists x \Big( \emptyset \in x \land \forall y (y \in x \to (y \cup \{y\}) \in x) \Big).$$

Bez ovog aksioma ne bismo mogli tvrditi da postoje beskonačni skupovi.

(7) *Shema aksioma separacije*:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall x \exists y \forall z \big( z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge F(z, x_1, \dots, x_n)) \big),$$

gdje je $F$ proizvoljna formula teorije $ZF$ u kojoj ne nastupaju varijable $x$ i $y$. Ovaj aksiom izriče da iz svakog skupa možemo odvojiti ("separirati") podskup koji ima neko dano svojstvo $F$. Varijable $x_1, \dots, x_n$ možemo shvatiti kao parametre.

(8) *Shema aksioma zamjene*:

$$\forall t_1 \dots \forall t_k \Bigg( \forall x \exists! y F(x, y, t_1, \dots, t_k) \rightarrow$$

$$\forall u \exists v \forall z \big( z \in v \leftrightarrow \exists w (w \in u \wedge F(w, z, t_1, \dots, t_k)) \big) \Bigg),$$

gdje je $F$ proizvoljna formula teorije $ZF$, te $u$ i $v$ su različite varijable koje su različite od $x$, $y$, $z$, $t_1, \dots, t_k$ i $w$.

U prvom dijelu aksioma je zapisana "funkcionalnost" formule $F$, tj. ističe se da nas zanimaju formule koje opisuju neku funkciju. Zatim se u drugom dijelu aksioma tvrdi da je slika skupa također skup (tj. ako je $u$ skup tada je i slika skupa $u$, obzirom na funkciju koju definira formula $F$, također skup).

(9) *Aksiom izbora*:

$$\forall a \Bigg( (\forall x (x \in a \rightarrow x \neq \emptyset) \wedge$$

$$\forall x \forall y ((x \in a \wedge y \in a) \rightarrow (x = y \vee x \cap y = \emptyset))) \rightarrow$$

$$\exists b \forall x \exists u (x \in a \rightarrow b \cap x = \{u\}) \Bigg).$$

Ovaj aksiom tvrdi da za svaki skup $a$, čiji su elementi neprazni u parovima disjunktni skupovi, postoji skup $b$ koji sadrži točno jedan element svakog člana od $a$. Funkcijski simbol $\cap$ je na standardan način dodan alfabetu.

(10) *Aksiom dobre utemeljenosti*:

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Ovaj aksiom tvrdi da ne postoji skup $x$ za koji bi postajao beskonačni niz skupova $(x_n)$ tako da vrijedi:

$$\dots \in \; x_2 \; \in \; x_1 \in x.$$

Zašto uopće teoriju skupova promatrati aksiomatski? Jedan razlog nezadovoljstva s naivnom (neaksiomatskom) teorijom skupova je svakako pojava paradoksa. O tome smo već bili govorili u uvodu ove skripte. Drugi razlog aksiomatskog zasnivanja bio je nemogućnost odgovora na neka pitanja o skupovima koja su se prirodno nametala. Možda jedno od najpoznatijih pitanja, i jedno od razumljivih na ovom samom početku priče o teoriji $ZF$, je svakako *Cantorova hipoteza kontinuuma*. To je sljedeća tvrdnja:

> ako je $S$ beskonačan podskup skupa $\mathbb{R}$ tada postoji bijekcija sa $S$ na $\mathbb{N}$ ili sa $S$ na $\mathbb{R}$.

Dugo se pokušavala dokazati, a i opovrgnuti ta hipoteza. No, svi pokušaji u naivnoj teoriji skupova su bili bezuspješni. Cohen je 1963. godine dokazao da je Cantorova hipoteza kontinuuma neodlučiva u teoriji $ZF$. To znači da je u danoj teoriji ne možemo dokazati, a ni opovrgnuti (vidi [1], [11] i [19], odnosno V. Čačić, Nezavisnost i relativna konzistentnost aksioma izbora i hipoteze kontinuuma, magistarski rad, PMF–MO, Zagreb, 2007.)

## 2.9 Ultraprodukti

U dokazu generaliziranog teorema potpunosti koristili smo Henkinovu kontrukciju modela. Sada ćemo navesti još jednu metodu za konstrukciju modela. To su ultraprodukti. Kao jednu primjenu dat ćemo drugi dokaz teorema kompaktnosti za logiku prvog reda. No, prvo dajemo primjere koji ističu još jednu motivaciju za uvođenje ultraprodukata.

**Primjer 2.115.** *Kartezijev produkt familije grupa je grupa. Skicirajmo dokaz te tvrdnje. Neka je $\{(G_i, \circ_i) : i \in I\}$ familija grupa. Označimo*

$$G = \prod_{i \in I} G_i = \{f \mid f : I \to \cup_{i \in I} G_i, \quad \textit{za sve} \;\; i \in I \;\; \textit{vrijedi} \; f(i) \in G_i\}$$

*Zatim, neka je $\circ$ binarna relacija na $G$ definirana sa:*

$$(f \circ g)(i) = f(i) \circ_i g(i).$$

*Lako je provjeriti da je za sve $f, g \in G$ funkcija $f \circ g$ ponovno element od $G$, te da je $(G, \circ)$ grupa. To znači da je Kartezijev produkt proizvoljne familije grupa ponovno grupa.*

**Primjer 2.116.** *Kartezijev produkt polja općenito nije polje. Kako bi dokazali tu tvrdnju definirajmo prvo Kartezijev produkt polja. Neka je $I \neq \emptyset$, te za sve $i \in I$ neka je $F_i = (A_i, +_i, \cdot_i, 0_i, 1_i)$ polje. Označimo $A = \prod_{i \in I} A_i$. Redom definiramo:*

*a) funkciju $0 : I \to \cup A_i$ sa $0(i) = 0_i$*

*b) funkciju $1 : I \to \cup A_i$ sa $1(i) = 1_i$*

*c) funkcije $+$ i $\cdot$ sa:*

$$(f + g) : I \to \cup_{i \in I} A_i, \quad (f + g)(i) = f(i) + g(i)$$

$$(f \cdot g) : I \to \cup_{i \in I}, \quad (f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i).$$

*Uz tako definirane operacije Kartezijev produkt polja općenito nije polje. Npr. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nije polje, jer uređeni parovi $(0, 1)$ i $(1, 0)$ različiti su od nule, ali $(0, 1) \cdot (1, 0) = 0$.*

**Primjer 2.117.** *Kartezijev produkt linearno uređenih skupova općenito nije linearno uređen skup. U svrhu dokaza te tvrdnje prvo uvodimo potrebne definicije. Neka je* $I \neq \emptyset$*, te za sve* $i \in I$ *neka je* $\{(A_i, R_i), i \in I\}$ *neka familija linearno uređenih skupova (to znači da je svaka relacija* $R_i$ *irefleksivna, tranzitivna i linearna). Označimo* $A = \prod_{i \in I} A_i$ *te definiramo relaciju* $R \subseteq A \times A$ *sa:*

$$fRg \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \text{za sve } \ i \in I \ \ \text{vrijedi} \ \ f(i) R_i g(i).$$

*Uz tako prirodno definiranu relaciju* $R$ *skup* $(A, R)$ *općenito nije linearno uređen. (Npr. na* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *elementi* $(0,1)$ *i* $(1,0)$ *nisu usporedivi).*

Kako riješiti istaknute probleme? Ideja je jednostavna. Na Kartezijevom produktu $\prod_{i \in I} A_i$ definiramo posebnu relaciju ekvivalencije $\sim$, te promatramo kvocijenti skup $\prod_{i \in I} A_i / \sim$ . U tu svrhu ćemo sada definirati pojmove filtra i ultrafiltra.

**Definicija 2.118.** *Neka je* $I \neq \emptyset$*. Za* $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ *kažemo da je* **filtar** *nad skupom* $I$ *ako vrijedi:*

*(i)* $I \in F$

*(ii) ako su* $X, Y \in F$ *tada* $X \cap Y \in F$ *(zatvorenost na presjeke)*

*(iii) ako* $X \in F$ *te* $X \subseteq Z \subseteq I$ *tada je* $Z \in F$ *(zatvorenost za nadskupe)*

Uočite da uvjet (i) u definiciji garantira nepraznost filtra. Ako bi na početku definicije zahtijevali $F \neq \emptyset$, tada uvjet (i) slijedi iz uvjeta (iii).

**Primjer 2.119.**

1. *Za svaki skup* $I$ *je* $\{I\}$ *filtar. Nazivamo ga* **trivijalni** *filtar.*
2. *Za svaki skup* $I$ *partitivni skup* $\mathcal{P}(I)$ *je filtar nad* $I$*. Nazivamo ga* **nepravi** *filtar.*
3. *Ako je* $I$ *skup te* $X$ *njegov proizvoljni podskup tada je skup* $F = \{Y \subseteq I : X \subseteq Y\}$ *filtar nad* $I$*. Nazivamo ga* **filtar generiran skupom** $X$*.*
   *Ako je* $X$ *jednočlan skup tada* $F$ *nazivamo* **glavni filtar.**
4. *Neka je* $I$ *beskonačan skup. Tada je* $F = \{X : X \subseteq I, \ X^c \ \text{ konačan}\}$ *filtar. Nazivamo ga* **Fréchetov filtar**.
5. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $x \in X$*. Tada je skup*

$$\{Y : Y \subseteq X \ \ \text{takav da} \ \ (\exists U \in \mathcal{T})(x \in U \subseteq Y)\} \qquad \text{filtar.}$$

**Propozicija 2.120.** *Neka je $E$ proizvoljan podskup od $\mathcal{P}(I)$, i neka je*

$$F = \bigcap \{F' \ : \ F' \ \text{je filtar nad} \ I, \ E \subseteq F'\}.$$

*Tada vrijedi:*

*a)* $F$ *je filtar nad* $I$.

*b)* $F = \{X \subseteq I \ : \ $ *postoje* $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ *tako da vrijedi* $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \subseteq X\}$.

**Definicija 2.121.** *Za filtar $F$ nad skupom $I$ kažemo da je* **pravi** *ako je:*

*(iv)* $F \neq \mathcal{P}(I)$.

*Za pravi filtar nad skupom $I$ kažemo da je* **ultrafiltar** *ako za sve $X \subseteq I$ vrijedi:*

*(v)* $X \in F$ *ako i samo ako* $I \backslash X \notin F$.

**Napomena 2.122.** *Za definiciju ultrafiltra uvjet (i) iz definicije filtra je suvišan, jer slijedi iz uvjeta (v) i (iii). Uvjeti iz definicije ultrafiltra biti će jasni kada se detaljno raspiše dokaz Łosovog teorema koji ćemo navesti kasnije.*

Svaki glavni filtar je ultrafiltar.

**Propozicija 2.123.** *Vrijedi:*

*a) Filtar $F$ je pravi ako i samo ako $\emptyset \notin F$.*

*b) Neka je $E \subseteq \mathcal{P}(I)$, te $F = \cap\{F' : F'$ je filtar nad $I$ takav da $E \subseteq F'\}$. Tada vrijedi: $F$ je pravi filtar ako i samo ako $E$ ima* **svojstvo konačnih presjeka** *tj. za sve $X$, $Y \in E$ vrijedi $X \cap Y \neq \emptyset$.*

**Propozicija 2.124.** *Neka je $F$ pravi filtar nad skupom $I$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

*a) $F$ je ultrafiltar.*

*b) $F$ je maksimalan filtar, tj. ne postoji pravi filtar $F'$ nad $I$ takav da je $F$ pravi podskup od $F'$.*

*c) za sve $X, Y \subseteq I$ vrijedi:*

$$X \cup Y \in F \ \text{ako i samo ako} \ X \in F \ \text{ili} \ Y \in F.$$

**Teorem 2.125.** *Neka je $I$ neprazan skup i $E \subseteq \mathcal{P}(I)$ koji ima svojstvo konačnih presjeka. Tada postoji ultrafiltar $U$ nad $I$ takav da je $E \subseteq U$.*

*Dokaz.* Označimo

$$F_0 = \bigcap \{F' \ : \ F' \text{ filtar nad } I \text{ i } E \subseteq F'\}$$

Iz propozicije 2.120. slijedi da je $F_0$ filtar, a iz propozicije 2.123. slijedi da je $F_0$ pravi filtar. Neka je $\mathcal{F} = \{F' : F' \text{ je pravi filtar nad } I \text{ i } E \subseteq F'\}$. Pošto je $F_0 \in \mathcal{F}$ tada je $\mathcal{F}$ neprazan skup. Skup $(\mathcal{F}, \subset)$ je parcijalno uređen skup. Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljan lanac u $\mathcal{F}$. Označimo sa $F_1$ uniju svih filtera iz $\mathcal{L}$. Lako je provjeriti da je $F_1$ pravi filtar koji sadrži $F$. Time imamo da za svaki lancu $\mathcal{F}$ postoji gornja međa. Iz Zornove leme[26] slijedi da postoji maksimalni element $U$ u $\mathcal{F}$. Iz propozicije 2.124. slijedi da je $U$ ultrafiltar. □

**Teorem 2.126.** *(Teorem o ultrafiltru).*
*Svaki pravi filtar $F$ nad $I$ može biti proširen do ultrafiltra nad $I$.*

*Dokaz.* Iz propozicije 2.123. znamo da svaki pravi filtar ima svojstvo konačnih presjeka. Iz prethodnog teorema slijedi tražena tvrdnja. □

**Definicija 2.127.** *Neka je $\{M_i : i \in I\}$ proizvoljna familija skupova, te $U$ proizvoljan ultrafiltar nad $I$. Na Kartezijevom produktu familije skupova $\{M_i : i \in I\}$, tj. na skupu*

$$\prod_{i \in I} M_i = \{f \mid f : I \to \cup_{i \in I} M_i \ \ \textit{tako da je za sve} \ \ i \in I \ \ \textit{ispunjeno} \ \ f(i) \in M_i\}$$

*definiramo binarnu relaciju $\sim$ ovako:*

$$f \sim g \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U$$

*Lako je pokazati da je relacija $\sim$ relacija ekvivalencije. Za $f \in \prod_{i \in I} M_i$ sa $f_U$ označavamo pripadnu klasu ekvivalencije. Skup svih klasa ekvivalencije nazivamo* **ultraprodukt** *familije skupova $\{M_i : i \in I\}$, te ga označavamo sa $\prod\limits_U M_i$.*

**Definicija 2.128.** *Neka je $\sigma$ proizvoljna signatura, te neka je $\{\mathfrak{M}_i = (M_i, \varphi_i) : i \in I\}$ neka familija $\sigma$–struktura. Neka je $U$ proizvoljan ultrafiltar nad skupom $I$. Definiramo novu $\sigma$–strukturu $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ na sljedeći način:*

[26] Zornova lema glasi: *Ako je $(A, <)$ parcijalno uređen skup čiji svaki lanac ima gornju među tada skup $A$ sadrži barem jedan maksimalni element.* Zornova lema je ekvivalentna aksiomu izbora. O tome vidi npr. [19].

$$M = \prod_U M_i$$

$$((f_1)_U, \ldots, (f_n)_U) \in \varphi(R) \quad \textit{ako i samo ako}$$
$$\{i \;:\; (f_1(i), \ldots, f_n(i)) \in \varphi_i(R)\} \in U, \quad \textit{za sve relacijske simbole} \quad R^n \in \sigma$$

$$\varphi(f^n)((f_1)_U, \ldots, (f_n)_U) = \Big(\ i \mapsto \varphi_i(f^n)(f_1(i), \ldots, f_n(i))\ \Big)_U, \quad \textit{za sve} \quad f^n \in \sigma$$

$$\varphi(c) = \Big(i \mapsto \varphi_i(c)\Big)_U$$

*Upravo definirana struktura se naziva* **ultraprodukt familije struktura** $\{\mathfrak{M} : i \in I\}$ *i označavamo je sa* $\prod_U \mathfrak{M}_i$. *Ako su sve strukture* $\mathfrak{M}_i$ *međusobno jednake, tj.* $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}$, *za sve* $i \in I$, *tada pripadni ultraprodukt nazivamo* **ultrapotencija** *strukture* $\mathfrak{N}$.

**Propozicija 2.129.** *Definicija ultraprodukta ne ovisi o izboru reprezentanata. Točnije, ako* $I \neq \emptyset$, $\{\mathfrak{M}_i = (M_i, \varphi_i) : i \in I\}$ *familija* $\sigma$*–struktura,* $U$ *ultrafiltar nad* $I$, *te*

$$f_1, \ldots, f_n,\ g_1, \ldots, g_n \in \textstyle\prod_{i \in I} M_i \quad \textit{tako da vrijedi}$$

$$f_1 \sim g_1, \quad \ldots \quad f_n \sim g_n,$$

*tada vrijedi:*

*a)* $\{i :\ (f_1(i), \ldots, f_n(i)) \in \varphi_i(R)\} \in U$ *ako i samo ako* $\{i :\ (g_1(i), \ldots, g_n(i)) \in \varphi_i(R)\} \in U$;

*b)* $\Big(i \mapsto \varphi_i(f_1(i), \ldots, f_n(i))\ \Big) \ \sim\ \Big(i \mapsto \varphi_i(g_1(i), \ldots, g_n(i))\ \Big)$

**Napomena 2.130.** *Lako je pokazati da je ultraprodukt proizvoljne familije polja ponovno polje (nad proizvoljnim ultrafiltrom). Zatim, ultraprodukt familije linearno uređenih skupova je linearno uređen skup.*

**Teorem 2.131.** *(Łosov osnovni teorem o ultraproduktima).*
*Neka je* $I \neq \emptyset$, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ *proizvoljna familija* $\sigma$*–struktura i* $U$ *proizvoljan ultrafiltar nad* $I$. *Tada za sve zatvorene formule* $F$ *vrijedi:*

$$\prod_U \mathfrak{M}_i \models F \quad \textit{ako i samo ako} \quad \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models F\} \in U.$$

(Prilikom dokaza prvo se treba indukciom po složenosti dokazati općenitija tvrdnja za formule koje mogu sadržavati i slobodne nastupe varijabli.)

**Teorem 2.132.** *(Teorem kompaktnosti).*
*Neka je $S$ proizvoljan skup zatvorenih formula. Za skup $S$ postoji model ako i samo ako za svaki konačan podskup od $S$ postoji model.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da za svaki konačan podskup od $S$ postoji model. Označimo sa $I$ skup svih konačnih podskupova skupa $S$. Za $i \in I$ neka je sa $\mathfrak{M}_i$ označen neki model. Za svaki $F \in S$ označimo $S_F = \{i \in I : F \in i\}$, te $E = \{S_F : F \in S\}$. Lako je dokazati da skup $E$ ima svojstvo konačnih presjeka. Iz teorema **1** slijedi da postoji ultrafiltar $U$ nad $I$ takav da je $E \subseteq U$. Dokažimo da je ultraprodukt $\prod_U \mathfrak{M}_i$ model za skup rečenica $S$. Neka je $F \in S$ proizvoljna rečenica. Za sve $i \in S_F$ očito vrijedi $\mathfrak{M}_i \models i$, te $F \in i$. Tada očito za sve $i \in S_F$ vrijedi $\mathfrak{M}_i \models F$. Iz toga slijedi:

$$S_F \subseteq \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models F\}.$$

Pošto je po definiciji $S_F \in E$, te je $E \subseteq U$, tada imamo $S_F \in U$, a onda i $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models F\} \in U$. Iz Łosovog teorema sada slijedi $\prod_U \mathfrak{M}_i \models F$. □

Bili smo definirali pojam elementarno ekvivalentnih modela (vidi 135), te naveli da su svaka dva izomorfna modela ujedno i elementarno ekvivalentna (vidi propoziciju 2.24.). Zatim, istaknuli smo da obrat ne vrijedi općenito (vidi zadatak 9 iz točke 2.8). Ovdje ističemo teorem o izomorfizmu za ultraprodukte koji baca novo svjetlo na navedenu problematiku.

> *Dva modela su elementarno ekvivalenta ako i samo ako imaju izomorfne ultrapotencije, tj. točnije: ako su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ elementarno ekvivalentni modeli tada postoji ultrafiltar $U$ tako da su ultrapotencije $\prod_U \mathfrak{M}$ i $\prod_U \mathfrak{N}$ izomorfne.*

Implikacija ($\Leftarrow$) slijedi lako iz Łosovog teorema. Za dokaz obrata vidite npr. [5]. O ultraproduktima detaljnije možete čitati u [2], [5], [6], [7] [17], [32] i P. C. Eklof, Ultraproducts for Algebraists, u [1].

**Zadaci:**

1. Neka je $F$ filtar nad skupom $I$. Dokažite:

   a) ako $X_1, \ldots, X_n \in F$ tada je $X_1 \cap \ldots \cap X_n \in F$;

b) ako $X, Y \in F$ tada je $X \cup Y \in F$;

c) ako je $\{X_j : j \in F\}$ familija skupova iz $F$ tada je $\cup X_j \in F$.

2. Neka je $I$ neprazan skup, te $w \in I$. Dokažite da je $\{X \ : \ X \subseteq I \ \text{ i } \ w \in X\}$ filtar nad I.

3. Dokažite da je svaki konačni filtar glavni.

4. Neka je $E$ prebrojiv podskup od $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dokažite da je tada filtar generiran s $E$ glavni filtar.

5. Neka je $I$ beskonačan skup. Za $X \subseteq I$ kažemo da je **kofinitan** ako je skup $I \setminus X$ konačan. Dokažite da vrijedi:

   a) Skup svih kofinitnih podskupova od $I$ ima svojstvo konačnih presjeka.

   b) Postoje ultrafiltri nad $I$ koji ne sadrže niti jedan konačan podskup od $I$.

   c) Ultrafiltar $U$ nad $I$ nije glavni ako i samo ako $U$ sadrži samo beskonačne skupove ako i samo ako $U$ sadrži sve kofinitne podskupove od $I$.

   d) Svaki ultrafiltar nad $I$ ima beskonačno mnogo elemenata.

6. Neka je $U$ ultrafiltar nad skupom $I$, te $X \in U$ proizvoljan. Dokažite da je tada $U \cap \mathcal{P}(X)$ ultrafiltar.

7. Neka je $U$ ultrafiltar nad skupom $I$, te neka je $I = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Tada postoji $i$ takav da je $A_i \in U$. Ako su skupovi $A_i$ u parovima disjunktni tada postoji točno jedan $i$ takav da je $A_i \in U$.
   Rješenje: Ako $A_i \notin U$ tada je $A_i^c \in U$. Pošto je

$$\emptyset = I^c = (A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$$

   tada je nemoguće da za sve $i$ vrijedi $A_i \notin U$ (svaki ultrafiltar ima svojstvo konačnih presjeka).
   Ako su skupovi u $A_i$ u parovima disjunktni tada je nemoguće $A_i, A_j \in U$, opet zbog svojstva konačnih presjeka svakog ultrafiltra.

8. Neka je $U$ ultrafiltar nad skupom $I$ koji sadrži neki konačan skup $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dokažite da je tada $U$ glavni ultrafiltar.
   Rješenje: Očito $I = A^c \cup \{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_n\}$. Iz prethodnog zadatka slijedi da postoji $i$ takav da je $\{a_i\} \in U$. Tada je $U = \{X \subseteq I : a_i \in X\}$.

9. Neka je $S$ skup podskupova nekog skupa $I$ takav da za sve $X_1, \ldots, X_n \in S$ vrijedi da je $X_1 \cap \ldots \cap X_n$ beskonačan skup. Dokažite da je tada skup $S$ sadržan u nekom ultrafiltru nad $I$ koji nije glavni.
Rješenje: Označimo sa $\mathcal{F}$ Fréchetov filtar nad skupom $I$. Očito skup $S \cup \mathcal{F}$ ima svojstvo konačnih presjeka. Iz teorema o ultrafiltru slijedi da postoji ultrafiltar $U$ tako da je $S \cup \mathcal{F} \subseteq U$. Iz zadatka 8 slijedi da ultrafiltar $U$ nije glavni.

Za ultrafiltar $U$ kažemo da je **prebrojivo nepotpun** ako nije zatvoren za prebrojive presjeke, tj. postoji niz $(X_n) \subseteq U$ takav da $\cap X_n \notin U$.

10. Dokažite da je ultrafiltar nad $\mathbb{N}$ koji sadrži Fréchetov filtar prebrojivo nepotpun. Dokažite da je svaki glavni ultrafiltar prebrojivo potpun.
Rješenje: Neka je $X_n = \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Pošto je svaki skup kofinitan tada je $X_n \in U$. Očito je $\cap_n X_n = \emptyset$.
Ako je $U = \{X \subseteq I : a \in X\}$ neki glavni filtar, te $(X_n) \subseteq U$, tada je očito $a \in \cap X_n$. Iz toga odmah slijedi $\cap X_n \in U$, tj. glavni ultrafiltar $U$ je prebrojivo potpun.

11. Neka je $I \neq \emptyset$ i $U$ ultrafiltar nad $I$. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

   a) ultrafiltar $U$ je prebrojivo nepotpun;
   b) postoji niz $(Y_n) \subseteq U$ takav da vrijedi $\cap Y_n = \emptyset$ i $I = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$
   c) postoji niz $(Z_n) \subseteq \mathcal{P}(I)$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Z_n \notin U$, za sve $n \neq m$ vrijedi $Z_n \cap Z_m = \emptyset$ i $\cup Z_n = I$.

Rješenje. b)$\Rightarrow$ a). Pošto je $\cap Y_n = \emptyset$ tada $\cap Y_n \notin U$.

a) $\Rightarrow$ b). Neka je $(X_n) \subseteq U$ takav da $\cap X_n \notin U$. Definiramo induktivno niz skupova $(Y_n)$ ovako:

$$Y_0 = I$$

$$Y_1 = X_0 \setminus (\cap X_n)$$

$$Y_{n+1} = Y_n \cap X_n, \quad \text{za sve} \quad n > 0$$

Indukcijom po $n$ lako je dokazati da je $(Y_n) \subseteq U$.
(Komentar: Pošto je $Y_0 = I$, te je $U$ ultrafiltar, tada je $Y_0 \in U$. Pošto je $X_0 \in U$ te $(\cap X_n)^c \in U$ tada je $X_0 \cap (\cap X_n)^c \in U$. No, $X_0 \cap (\cap X_n)^c =$

$X_0 \setminus (\cap X_n) = Y_1$, pa je $Y_1 \in U$. Pretpostavimo da za neki $n > 0$ vrijedi $Y_n \in U$. Pošto je po definiciji $Y_{n+1} = Y_n \cap X_n$ tada je $Y_{n+1} \in U$).

Iz definicije niza $(Y_n)$ odmah slijedi da vrijedi

$$I = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$$

Dokažimo da je $\cap Y_n = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $x \in \cap Y_n$ proizvoljan. Pošto je tada $x \in Y_1$ tada iz definicije skupa $Y_1$ slijedi $x \in X_0$ i $x \notin \cap X_n$. Zatim, za sve $n \geq 1$ imamo $x \in Y_{n+1}$, a onda pošto je $Y_{n+1} = Y_n \cap X_n$, tada je $x \in X_n$. Time smo dobili kontradikciju.

c) $\Rightarrow$ b). Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $Y_n = \cup_{k \geq n} Z_k$. Očito vrijedi $I = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$.

Za svaki $n \geq 1$ imamo $Z_1 \cup \dots \cup Z_{n-1} \notin U$ (vidi propoziciju 2.124.). Pošto je $U$ ultrafiltar tada je $(Z_1 \cup \dots \cup Z_{n-1})^c \in U$. Pošto je $\cup Z_n = I$, te su skupovi $Z_n$ u parovima disjunktni, tada je $(Z_1 \cup \dots \cup Z_{n-1})^c = \cup_{k \geq n} Z_k = Y_n$. Time imamo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Y_n \in U$.

Provjerimo još da je $\cap Y_n = \emptyset$. Ako je $x \in \cap Y_n$ tada za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \in Y_n = \cup_{k \geq n} Z_k$. Iz toga jednostavno slijedi da ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in Z_n$ (tu također koristimo disjunktnost skupova $Z_i$). To je kontradikcija sa $x \in I$ i $I = \cup Z_n$.

Dokazujemo sada da vrijedi a)$\Rightarrow$c). Induktivno prvo definiramo niz skupova $(Y_n)$ ovako:

$$\begin{aligned} Y_0 &= I \\ Y_1 &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_n \\ Y_{n+1} &= \bigcap_{k \leq n} X_k, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Zatim, neka je

$$\begin{aligned} Z_0 &= Y_1 \\ Z_n &= Y_{n+1} \setminus Y_{n+2}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Provjerimo da niz $(Z_n)$ ima tri tražena svojstva.

Dokažimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Z_n \notin U$. Primijetimo prvo da po pretpostavci $Z_0 \notin U$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da vrijedi $Z_n \in U$. Tada je $Y_{n+1} \setminus Y_{n+2} \in U$. Pošto vrijedi $X_n \in U$ tada zbog zatvorenosti na presjeke slijedi $(Y_{n+1} \setminus Y_{n+2}) \cap X_{n+1} \in U$. No,

$$(Y_{n+1} \setminus Y_{n+2}) \cap X_n = (\bigcap_{k<n+1} X_k \setminus \bigcap_{k<n+2} X_k) \cap X_n = \emptyset,$$

čime imamo $\emptyset \in U$, što je nemoguće.

Dokažimo sada da za sve $n \neq m$ vrijedi $Z_n \cap Z_m = \emptyset$. Primijetimo prvo da je za sve $n > 0$ ispunjeno

$$\begin{aligned} Z_0 \cap Z_n &= (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k) \cap (Y_{n+1} \setminus Y_{n+2}) = \\ &\phantom{=} (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k) \cap (\bigcap_{k<n+1} X_k \setminus \bigcap_{k<n+2} X_k) = \emptyset. \end{aligned}$$

Promotrimo sada slu caj kada su $n, m > 0$. Radi određenosti neka je $n < m$. Pretpostavimo da je $x \in Z_n \cap Z_m$. Primijetimo:

$$\begin{aligned} Z_n \cap Z_m &= (Y_n \setminus Y_{n+1}) \cap (Y_m \setminus Y_{m+1}) = \\ &= (\bigcap_{k<n} X_k \setminus \bigcap_{k<n+1} X_k) \cap (\bigcap_{k<m} X_k \setminus \bigcap_{k<m+1} X_k) \end{aligned}$$

Tada je $x \in \bigcap_{k<n} X_k$ i $x \notin X_n$, te je $x \in \bigcap_{k<m}$ i $x \notin X_m$. Pošto je po pretpostavci $n < m$, te je $x \in \bigcap_{k<m} X_k$ tada je posebno $x \in X_n$. Time smo dobili kontradikciju.

Dokažimo na kraju da vrijedi $I = \cup Z_n$. Neka je $x \in I$ proizvoljan. Promatramo dva slučaja: $x \notin \bigcap_n X_n$ i $x \in \bigcap_n X_n$.

Ako je $x \in \bigcap_n X_n$, tada iz definicije $Z_1 = \bigcap_n X_n$ slijedi $x \in Z_1$. Pretpostavimo sada da $x \notin \bigcap_n X_n$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ najmanji koji ima svojstvo $x \notin X_n$. Primijetimo da je tada $x \in \bigcap_{k<n} X_k$, tj. $x \in Y_n$. Zatim, imamo $x \notin \bigcap_{k<n+1} X_k$, tj. $x \notin Y_{n+1}$. Tada $x \in Y_n \setminus Y_{n+1}$, tj. $x \in Z_{n+1}$.

12. Neka je $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$ neka familija $\sigma$–struktura i $S$ neki skup $\sigma$–rečenica. Dokažite da tada vrijedi:

    a) ako je za sve $F \in S$ skup $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models F\}$ kofinitan tada za svaki ultrafiltar $U$ nad $I$ koji nije glavni vrijedi $\prod_U \mathcal{M}_i \models S$.

    b) ako je za svaki $\{F_1, \ldots, F_n\} \subseteq S$ skup $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models F_1 \wedge \ldots \wedge F_n\}$ neprazan tada postoji ultrafiltar $U$ nad $I$ tako da vrijedi $\prod_U \mathcal{M}_i \models S$.

13. Neka je $P$ neki beskonačan skup prostih brojeva, te neka je za svaki $p \in P$ sa $F_p$ označeno neko polje karakteristike $p$. Neka je $U$ neki ultrafiltar nad $P$ koji nije glavni. Dokažite da je tada $\prod_U F_p$ polje karakteristike 0.
    Rješenje: Neka je $S = \{G_n : n \geq 1\}$, gdje je $G_n \equiv n \cdot 1 \neq 0$. Za svaki $n$ skup $\{p \in P : F_p \models G_n\}$ je kofinitan, pošto je to skup prostih brojeva iz $P$ koji ne dijele $n$. Tada iz zadatka 12 a) slijedi da je $\prod_u F_p$ jedan model za skup formula $S$. Iz toga slijedi da je $\prod_U F_p$ polje karakteristike nula.

# Bibliografija


[1] K. J. Barwise (ed.), *Handbook of math. logic, I–IV,* North–Holland, Amsterdam, 1977.

[2] J. L. Bell, A. B. Slomson, *Models and ultraproducts*, North–Holland, Amsterdam, 1969.

[3] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic,* Springer–Verlag, 2001.

[4] S. Buss (ed.), *Handbook of proof theory*, Elsevier, 1998.

[5] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model theory*, North–Holland, Amsterdam, 1997.

[6] W. W. Comfort, S. Negrepointis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer–Verlag, 1974.

[7] R. Cori, D. Lascar, *Mathematical Logic I, II*, Oxford University Press, 2000.

[8] B. Ćirović, *Uvod u matematičku logiku i teoriju rekurzivnih funkcija*, Filozofsko-teološki institut Družbe Isusove, Zagreb, 1996.

[9] V. Devidé, *Matematička logika (Prvi dio: Klasična logika sudova)*, Beograd, 1964.

[10] K. Doets, *Basic model theory*, CSLI Publications, 1996.

[11] F. R. Drake, D. Singh, *Intermediate Set Theory*, John Wiley & Sons, 1996.

[12] H. D. Ebinghaus, J. Flum, W. Thomas, *Mathematical logic*, Springer–Verlag, 1984.

[13] H. B. Enderton, *A math. introduction to logic*, Academic Press, 1970.

[14] J.–Y. Girard, P. Taylor, Y. Lafont, *Proofs and Types,* Cambridge University Press, 1989.

[15] P. Hájek, P. Pudlák, *Metamathematics of first-order arithmetic,* Springer–Verlag, 1992.

[16] A. G. Hamilton, *Logic for mathematicians*, Cambridge University Press, 1995.

[17] W. Hodges, *Model theory*, Cambridge University Press, 1993.

[18] S. V. Jablonski, G. P. Gavrilov, V. B. Kudrjavcev, *Funkcije algebre logike i klase Posta* (rus.), Nauka, Moskva, 1966.

[19] T. Jech, *Set Theory*, Academic Press, 1978.

[20] M. Kac, S. M. Ulam, *Matematika i logika*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[21] L. A. Kalužnin, *Što je matematička logika*, Školska knjiga, Zagreb, 1975

[22] G. Kreisel, S. C. Krivine, *Elements of math. logic*, North–Holland, 1967.

[23] I. A. Lavrov, L. L. Maksimova, *Zbornik zadač po teorii množestv., mat. logik i teorii algoritmov (rus.)*, Nauka, Moskva, 1986.

[24] J. Malitz, *Introduction to math. logic*, Springer–Verlag, 1979.

[25] A. B. Manaster, *Completeness, Compacteness and Undecidability*, Prentice–Hall, Inc., New Jersey, 1975.

[26] A. Marcja, C. Toffalori, *A guide to classical and modern model theory*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[27] E. Mendelson, *Introduction to math. logic*, Chapman&Hall, 1997.

[28] E. Mendelson, *Boolean algebra and switching circuits*, Schaum's Outline series, McGraw–Hill, 1970.

[29] J. D. Monk, *Mathematical Logic*, Springer–Verlag, 1976.

[30] J. Nolt, D. Rohatyn, *Logic,* Schaum's Outline series, McGraw–Hill, 1988.

[31] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, HMD, Zagreb, 2000.

[32] B. Poizat, *A course in model theory*, Springer–Verlag, 2000.

[33] D. Prawitz, *Natural Deduction*, Almqvist&Wiksell, Stockholm, 1964.

[34] N. Prijatelj, *Osnove matematične logike (2. del Formalizacija)*, Ljubljana, 1992.

[35] J. R. Shoenfield, *Mathematical logic,* Addison–Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1973.

[36] S. G. Simpson, *Mathematical logic,* skripta, The Pennsylvania State University, 2001.
http://www.math.psu.edu/simpson/

[37] R. M. Smullyan, *First–order logic*, Springer–Verlag, 1968. Pergamon Press, 1967.

[38] R. M. Smullyan, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, New York, 1992.

[39] Z. Šikić, *Novija filozofija matematike*, Nolit, Beograd, 1987.

[40] Z. Šikić, *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[41] G. Takeuti, *Proof theory*, North–Holland, Amsterdam, 1975.

[42] A. S. Troelstra, H. Schwichtenberg, *Basic proof theory*, Cambridge University Press, 2000.

[43] D. van Dalen, *Logic and structures*, Springer–Verlag, 1997.

[44] M. Vuković, *Teorija skupova*, predavanja, PMF–MO, Zagreb, 2006.
http://web.math.hr/~vukovic/dodiplomska_nastava.htm

# Indeks


Ackermann, W., 104
aksiomi
    logički, 173
    logike prvog reda, 172
    nelogički, 173
    računa sudova, 45
alfabet, 11
    logike prvog reda, 125
    logike sudova, 11
    modalne logike, 113
    teorije prvog reda, 124
antitautologija, 17
Aristotel, 1, 10
Asser, G., 103
Asserov sistem, 103
atomarna formula, 12, 126

baza skupa veznika, 31
Bernays, P., 102
Beth, E. W., 182
bisimulacija, 117
Boole, G., 2
Brouwer, L. E. J., 4
Burali–Forti, C., 4

Cantor, G., 3, 229
Church, A., 163
Cohen, P., 229
Craig, W., 182

de Morgan, A., 17
Dedekind, W., 2
Descartes, R., 2
Devideé, V., 103
disjunkcija
    ekskluzivna, 14
    inkluzivna, 14
disjunktivna normalna forma, 22
dokaz
    u sistemu $PD$, 88
    u sistemu $RP$, 174
    u sistemu $RS$, 45
    u teoriji prvog reda, 174
dopustivo pravilo izvoda, 49

egzistencijalna formula, 150
ekskluzivna disjunkcija, 14, 31
ekvivalentne teorije, 190
elementarna ekvivalencija, 135
elementarna konjunkcija, 22
elementarna podstruktura, 144
Euklid, 1, 10

Filon, 15
filtar, 231
    pravi, 232
formula
    antitautologija, 17
    atomarna, 12, 126
    egzistencijalna, 150
    elementarna disjunkcija, 22
    elementarna konjunkcija, 22
    ispunjiva, 17, 133
    istinita za interpretaciju, 15, 132
    kondicionalna, 70
    konkluzija, 77

literal, 22
logike sudova, 12
modalna, 113
monadska, 152
neistinita za interpretaciju, 15, 133
nepadajuća, 20
nerastuća, 20
oboriva, 17, 133
otvorena, 127
pozitivna, 18
premisa, 77
savršena normalna forma, 24
shema, 43, 127
sudovno valjana, 136
tautologija, 17
teorije prvog reda, 126
univerzalna, 150
valjana, 17, 133
zatvorena, 13, 127
Fraenkel, A., 211
Frege, G., 3, 43
funkcijski simbol, 124

Gödel, K., 4, 199
Gödelov prvi teorem nepotpunosti, 225
Gödelov teorem potpunosti, 199
Gödelova translacija, 109
generalizirani teorem potpunosti, 62, 198

Henkin, L., 194
Henkinova teorija, 194
Heyting, A., 4
Hilbert, D., 4, 10, 102, 104
Hilbert–Ackermannov sistem, 104
Hilbert–Bernaysov sistem, 102
hipotetička pravila izvoda, 79
hipotetički silogizam, 44
homomorfizam, 131

individualne varijable, 124
inkluzivna disjunkcija, 14
inkonzistentan skup, 54, 188
inkonzistentna teorija, 188
instanca, 127
interpolaciona lema, 25
interpretacija, 132
adekvatna, 14
parcijalna, 14
totalna, 14
intuicionistička logika, 109
ispunjiva formula, 17, 133
istinita formula za interpretaciju, 15, 132
izomorfizam struktura, 135
izraziv veznik, 30
izvod
u PD, 86
u sistemu $RP$, 176
u sistemu $RS$, 46

jednostavno proširenje teorije, 190
jezik, 11

Kant, I., 2
kategorična teorija, 208
$\lambda$–kategorična teorija, 208
Kleene, S. C., 103
Kleenijev sistem, 103
konačno oboriv skup formula, 65
kondicionalna formula, 70
konjunktivna normalna forma, 22
konkatenacija, 11
konkluzija, 77
konzistentan skup, 54, 188
konzistentna teorija, 188
Kripke, S., 110
Kripkeov model, 110, 115
Kripkeov okvir, 110, 114

Löwenheim, L., 124, 200
Löwenheim–Skolemov teorem, 200

Leibniz, G. W., 2
Lindenbaum, A., 60, 190
Lindenbaumova lema, 190
literal, 22
logički aksiomi, 173
logički ekvivalentne formule, 17, 136
logički slijed, 16, 136
logički veznici, 12
logika prvog reda, 172
Los, J., 63
Lukasiewicz, J., 31, 43

maksimalno konzistentan skup, 74, 191
Malcev, A., 201
Mereditov sistem, 105
modalni operatori, 113
model, 133, 176
monadska formula, 152

neistinita formula za interpretaciju, 15, 133
nelogički aksiomi, 173
nepadajuća formula, 20
nerastuća formula, 20
nezavisan skup formula, 72
nezavisan skup veznika, 31
Nicod, J., 105
Nicodov sistem, 105
normalna forma
  disjunktivna, 22
  konjunktivna, 22
  preneksna, 147
  savršena, 24
  Skolemova, 152
normalna struktura, 213
Novikov, V., 103
Novikovljev sistem, 103
numeral, 223

oboriv skup formula, 65
oboriva formula, 17, 133
otvorena formula, 127
označeno stablo, 84

parcijalna interpretacija, 14
Parmenid, 1
Peano, G., 2, 221
Peanova aritmetika, 221
Peierce, 17
Platon, 1
podriječ, 11
podstruktura, 135
Post, E., 33
potformula, 13, 127
potpun skup formula, 59
potpun skup veznika, 31
potpuna teorija, 189
pozitivna formula, 18
pravi filtar, 232
pravilo izvoda, 44
  $(DN)$, 81
  $(\leftrightarrow E)$, 81
  $(\leftrightarrow I)$, 81
  $(\neg E)$, 81
  $(\neg I)$, 81
  $(\rightarrow E)$, 77, 81
  $(\rightarrow I)$, 79, 81
  $(\vee E)$, 81
  $(\vee I)$, 81
  $(\wedge E)$, 81
  $(\wedge I)$, 77, 81
  apsorpcija, 99
  disjunktivni silogizam, 99
  dopustivo, 49
  generalizacija, 173
  hipotetički silogizam, 44, 99
  hipotetičko, 79
  konstruktivna dilema, 99
  modus ponens, 45
  modus tolens, 99
  obrat po kontrapoziciji, 99
  prirodno, 80

prazna riječ, 11
premisa, 77
preneksna normalna forma, 147
presjek interpretacija, 66
pretpun skup veznika, 33
prirodno pravilo izvoda, 80
proširenje strukture, 135
proširenje teorije, 190
propozicionalne varijable, 12
propozicionalni veznik, 30
  Łukasiewiczeva operacija, 31
  ekskluzivna disjunkcija, 31
  linearan, 33
  monoton, 33
  samodualan, 33
  Shefferova operacija, 31

rastući skup formula, 74
rečenica, 127
relacija dostiživosti, 110, 114
relacija forsiranja, 110, 115
relacija logičke posljedice
  u logici prvog reda, 136
  u logici sudova, 16
relacijski simbol, 124
riječ, 11
Robinson, A., 182
Rosser, J. B., 104
Rosserov sistem, 104
Russell, B., 3, 104

savršena normalna forma, 24
semantička tablica, 14
Sheffer, H. M., 31
Shefferova operacija, 31
shema formule, 43, 127
signatura, 125
sistem
  $PD$, 81
  $RP$, 173
  $RS$, 45
  Asserov, 103
  Devidéov, 103
  Hilbert–Bernaysov, 102
  Hilbert-Ackermannov, 104
  Kleenijev, 103
  Mereditov, 105
  modalni, K , 113
  Nicodov, 105
  Novikovljev, 103
  Rosserov, 104
  Waysbergov, 105
  Whitehead–Russellov, 104
Skolem, T., 124, 152, 200
Skolemova normalna forma, 152
skup formula
  inkonzistentan, 54
  ispunjiv, 54
  konačno oboriv, 65
  konzistentan, 54
  maksimalno konzistentan, 74, 191
  nezavisan, 72
  oboriv, 65
  zatvoren na presjeke, 66
skup nelogičkih simbola, 125
skup veznika
  $D$, 33
  $L$, 33
  $M$, 33
  $T_0$, 33
  $T_1$, 33
  nezavisan, 31
  potpun, 31
  pretpun, 33
  zatvoren, 33
  zavisan, 31
složenost formule, 13, 127
slobodan nastup varijable, 127
slobodna varijabla, 127
Sokrat, 1
stablo, 83
  označeno, 84
striktna implikacija, 113

struktura, 130
sudovno valjana formula, 136

Tarski, A., 202
tautologija, 17
Teofrast, 2
teorem
    adekvatnosti za sistem $RP$, 175
    adekvatnosti za sistem $RS$, 45
    dedukcije za $RS$, 47
    dedukcije za teorije prvog reda, 177
    ekvivalencije, 181
    Gödelov teorem potpunosti, 199
    kompaktnosti, 62, 199, 235
    Löwenheim-Skolemov, 200
    o supstituciji, 19
    o zamjeni, 18, 137
    potpunosti za $RS$, 62
    potpunosti za sistem prirodne dedukcije, 92
    u sistemu $RS$, 45
    u sistemu prirodne dedukcije, 88
    u teoriji prvog reda, 174
teorija prvog reda, 173
teorija prvog reda s jednakošću, 211
term, 125
term slobodan za varijablu, 128
test valjanosti, 38
totalna interpretacija, 14
Turing, A., 123

ultrafiltar, 232
ultrapotencija, 234
ultraprodukt
    familije skupova, 233
    familije struktura, 234
univerzalna formula, 150

valjana formula, 17, 133
valuacija, 130
varijabla
    individualna, 124
    propozicionalna, 12
    slobodna, 127
    vezana, 127
vezan nastup varijable, 127
vezana varijabla, 127
Viet, F., 2

Waysbergov sistem, 105
Whitehead, A. N., 4, 104
Whitehead–Russellov sistem, 104

zatvoren skup veznika, 33
zatvorena formula, 13, 127
zatvorenje formule, 134
zavisan skup veznika, 31
Zenon, 1
Zermelo, E., 211
Zermelo–Fraenkelova teorija skupova, 226
Zornova lema, 233