JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

TCHEBICHEF

Mémoire sur les nombres premiers.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 366-390.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1852_1_17_A19_0>

MÉMOIRE

SUR

LES NOMBRES PREMIERS;

PAR M. TCHEBICHEF.

(Présenté à l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg, en 1850.)

§ Ier.

Toutes les questions qui dépendent de la loi de répartition des nombres premiers dans la série

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,\quad 11,\quad 12,\quad \text{etc.},$$

présentent, en général, de grandes difficultés. Ce qu'on parvient à conclure, d'après les Tables des nombres premiers avec une probabilité très-grande, reste le plus souvent sans démonstration rigoureuse. Par exemple, les Tables des nombres premiers nous portent à croire qu'à partir de $a > 3$, il y a toujours un nombre premier plus grand que a et plus petit que $2a - 2$ [ce qui est le *postulatum* connu de M. Bertrand (*)]; mais, jusqu'à présent, la démonstration de cette proposition a manqué pour des valeurs de a, qui surpassent la limite de nos Tables. La difficulté devient encore plus grande quand on se donne des limites plus étroites, ou qu'on demande à assigner la limite de a au-dessus de laquelle la série

$$a+1,\quad a+2,\ldots,\quad 2a-2.$$

contient au moins deux, trois, quatre, etc., nombres premiers.

Il y a une autre espèce de questions très-difficiles qui dépendent aussi de la loi de répartition des nombres premiers dans la série

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,\quad 11,\quad \text{etc.},$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXe cahier.

et dont la résolution est très-nécessaire. Ce sont les questions sur la valeur numérique des séries dont les termes sont des fonctions des nombres premiers

$$2,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\quad 11,\quad 13,\quad 17,\quad \text{etc.}$$

Euler a prouvé que la série

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}+\frac{1}{11^\alpha}+\frac{1}{13^\alpha}+\ldots$$

devient divergente pour les mêmes valeurs de α que celles qui rendent divergente la série

$$\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}+\ldots,$$

savoir, pour $\alpha \leqq 1$. Mais pour certaines formes du terme u_n, la convergence de la série

$$u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8+\ldots$$

n'est plus une condition nécessaire pour que la série

$$u_2+u_3+u_5+u_7+u_{11}+u_{13}+\ldots$$

conserve une valeur finie. Tel est, par exemple, le cas de

$$u_n=\frac{1}{n\log n}.$$

En effet, la valeur de la série

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\ldots,$$

comme il sera prouvé plus tard, ne surpasse pas 1,73, tandis que la série

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{6\log 6}+\ldots$$

est divergente. Quel est donc le *criterium* de la convergence des séries qui ne sont composées que de termes aux indices premiers 2, 3, 5, 7, 11, etc.? Et, dans le cas de leur convergence, comment assigner le degré d'approximation de leurs valeurs, calculées d'après leurs premiers termes? La résolution de ces questions par rapport aux séries de la forme

$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11} + u_{13} + \ldots$$

est très-intéressante; car on les rencontre dans certaines recherches sur les nombres.

Ce Mémoire contient la résolution des questions citées. J'y parviens en traitant la fonction qui désigne la somme des logarithmes des nombres premiers au-dessous d'une limite donnée. D'après une équation que cette fonction vérifie, on peut assigner deux limites entre lesquelles tombe la valeur de cette somme. Parmi les différentes conclusions que nous en tirons, nous parvenons à assigner des limites entre lesquelles on trouve toujours au moins un nombre premier, ce qui nous conduit très-simplement à prouver le *postulatum* cité de M. Bertrand. Quant à l'évaluation des séries de la forme

$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11} + \ldots,$$

nous trouvons le *criterium* pour juger si elles sont convergentes ou divergentes, et dans le premier cas, nous donnons la méthode pour calculer, avec un certain degré d'approximation, la différence de la valeur de ces séries avec la somme de leurs premiers termes. Nous donnons aussi une formule pour calculer, par approximation, combien il y a de nombres premiers qui ne surpassent pas une valeur donnée, et nous assignons la limite de l'erreur de cette formule, ce qu'on ne pouvait faire jusqu'à présent. Dans un Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie de Saint-Pétersbourg, en 1848, j'ai prouvé que, si l'on rejette, dans l'expression de la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas x, tous les termes qui sont zéro par rapport à

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log^3 x}, \ldots,$$

quand on fait $x = \infty$, cette expression se réduit à $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$; mais, pour les valeurs finies de x, on se trouve dans l'incertitude sur la valeur des termes qu'on rejette. Quant à la formule de Legendre, son degré d'approximation n'est connu que dans les limites des Tables des nombres premiers dont on se sert pour la vérifier.

§ II.

Convenons de désigner, en général, par $\theta(z)$ la somme des logarithmes (hyperboliques) de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas z. Cette fonction devient égale à zéro dans le cas où z est inférieur au plus petit des nombres premiers, savoir à 2. Nous aurons souvent à l'écrire en prenant pour z une quantité composée, telle que $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ par exemple; alors nous écrirons simplement $\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ au lieu de $\theta\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$. Il n'est pas difficile de s'assurer que la fonction θ vérifie l'équation suivante :

$$\left.\begin{array}{l}
\theta(x)+\theta(x)^{\frac{1}{2}}+\theta(x)^{\frac{1}{3}}+\theta(x)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{2}\right)+\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{3}\right)+\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+\theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
+\theta\left(\frac{x}{4}\right)+\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}+\theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} = \log 1.2.3\ldots[x],$$

où nous employons $[x]$ pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans la valeur de x. Les séries que cette équation contient, sont prolongées jusqu'aux termes qui deviennent zéro.

Pour vérifier cette équation, nous remarquons que ses deux membres sont composés de termes de la forme $K \log \alpha$, où α est un nombre premier, et K un entier quelconque. Dans le premier membre, K sera égal au nombre des termes dans les séries

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} x, & \frac{x}{2}, & \frac{x}{3}, & \frac{x}{4},\ldots, \\ (x)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}},\ldots, \\ (x)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}},\ldots, \\ (x)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}},\ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

qui ne sont pas plus petits que α; car, en général, la valeur de $\theta(z)$ ne contient le terme $\log \alpha$ que dans le cas où $z \leqq \alpha$. Quant au coefficient de $\log \alpha$ dans le second membre, il est égal à la plus haute puissance de α, qui divise $1.2.3\ldots[x]$. Or il se trouve que cette puissance est aussi égale au nombre des termes des séries (1) qui ne sont pas plus petits que α; car le nombre des termes de la série

$$x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{3},\ \frac{x}{4},\ldots,$$

qui ne sont pas plus petits que α, est égal à celui des termes de la série

$$1,\ 2,\ 3,\ldots,\ [x],$$

qui sont divisibles par α.

Le même rapport existe entre le nombre des termes de cette série divisibles par α^2, α^3, α^4, etc., et le nombre des termes des séries

$$\begin{array}{llll} (x)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}},\ldots, \\ (x)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}},\ldots, \\ (x)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}},\ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

qui ne sont pas plus petits que α.

Donc, les deux nombres de notre équation sont composés des mêmes termes, ce qui prouve son identité.

L'équation que nous venons de démontrer peut être présentée sous cette forme

$$(2)\qquad \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots = \mathrm{T}(x),$$

en faisant, pour abréger,

$$(3)\qquad \begin{cases} \theta(z) + \theta(z)^{\frac{1}{2}} + \theta(z)^{\frac{1}{3}} + \theta(z)^{\frac{1}{4}} + \ldots = \psi(z), \\ \log 1.2.3\ldots[x] = \mathrm{T}(x). \end{cases}$$

En passant à l'application de ces formules, nous remarquerons que, d'après ce que nous avons dit par rapport à la valeur de $\theta(z)$ quand z est inférieur à 2, la fonction $\psi(z)$ devient zéro quand on fait $z < 2$, et, par conséquent, l'équation (2) ne présentera aucune exception dans les limites

$$x = 0, \quad x = 2,$$

si l'on prend zéro pour la valeur de $\mathrm{T}(x)$ quand x est inférieur à 2.

§ III.

D'après cette équation, il n'est pas difficile de trouver plusieurs inégalités que la fonction $\psi(x)$ vérifie. Celles dont nous nous servirons dans ce Mémoire sont les suivantes :

$$\psi(x) > \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right),$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right).$$

Pour prouver ces inégalités, nous cherchons d'après l'équation (2) la valeur de

$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right),$$

ce qui nous conduit à cette équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\psi(x)+\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\psi\left(\frac{x}{4}\right)+\ldots\\
&+\psi\left(\frac{x}{30}\right)+\psi\left(\frac{x}{2.30}\right)+\psi\left(\frac{x}{3.30}\right)+\psi\left(\frac{x}{4.30}\right)+\ldots\\
&-\psi\left(\frac{x}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2.2}\right)-\psi\left(\frac{x}{3.2}\right)-\psi\left(\frac{x}{4.2}\right)-\ldots\\
&-\psi\left(\frac{x}{3}\right)-\psi\left(\frac{x}{2.3}\right)-\psi\left(\frac{x}{3.3}\right)-\psi\left(\frac{x}{4.3}\right)-\ldots\\
&-\psi\left(\frac{x}{5}\right)-\psi\left(\frac{x}{2.5}\right)-\psi\left(\frac{x}{3.5}\right)-\psi\left(\frac{x}{4.5}\right)-\ldots\\
&=\mathrm{T}(x)+\mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right)-\mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right)-\mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right)-\mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right),
\end{aligned}\right.$$

dont le premier membre se réduit à

$$\mathrm{A}_1\psi(x)+\mathrm{A}_2\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\mathrm{A}_3\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\mathrm{A}_4\psi\left(\frac{x}{4}\right)+\ldots+\mathrm{A}_n\psi\left(\frac{x}{n}\right)+\ldots,$$

A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n, etc., étant des coefficients numériques. Or, en examinant la valeur de ces coefficients, il n'est pas difficile de s'assurer qu'en général

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_n=1,\quad \text{si } n=30m+1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\\
&\mathrm{A}_n=0,\quad \text{si } n=30m+2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 14,\ 16,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 21,\ 22,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28,\\
&\mathrm{A}_n=-1,\ \text{si } n=30m+6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\\
&\mathrm{A}_n=-1,\ \text{si } n=30m+30.
\end{aligned}$$

En effet, dans le premier cas, n n'étant divisible par aucun des nombres 2, 3, 5, on ne trouve le terme $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ que dans la première ligne de l'équation (4). Dans le second cas, n est divisible par un des nombres 2, 3, 5; donc, outre le terme $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ de la première ligne, l'une des trois dernières contiendra $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, et, après la réduction, on trouvera o pour coefficient de $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$. Dans le troisième cas, n est divisible par deux des nombres 2, 3, 5. Donc les trois dernières lignes de l'équation (4) contiendront deux termes égaux à $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, et comme la première ligne contient $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, pris positivement, il ne reste dans le résultat que $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$. On arrive à la même conclusion dans le dernier cas, où n est divisible par 30; car alors le terme $\pm\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ se rencontre dans toutes les cinq lignes, deux fois avec le signe + et trois fois avec le signe −.

Donc, pour

$$
\begin{aligned}
n = 30\,m + {} & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\\
& 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24,\\
& 25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,
\end{aligned}
$$

nous trouvons

$$
\begin{aligned}
A_n = {} & 1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1,\\
& 0, 1, -1, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1,
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que l'équation (4) se réduit à

$$
\begin{aligned}
& \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \psi\left(\frac{x}{12}\right) + \ldots\\
& = \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right),
\end{aligned}
$$

où tous les termes du premier membre ont pour coefficient 1, alternativement avec le signe + et −. De plus, comme d'après la nature de la fonction $\psi(x)$, la série

$$
\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \psi\left(\frac{x}{12}\right) + \ldots
$$

est décroissante, sa valeur sera comprise entre les limites $\psi(x)$ et

$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right)$. Donc, d'après l'équation précédente, on aura nécessairement

$$\psi(x) \geqq T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right).$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leqq T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right).$$

§ IV.

Examinons maintenant la fonction $T(x)$ qui entre dans ces formules. D'après l'équation (3), et en dénotant par a le plus grand nombre entier contenu dans la valeur de x, que nous ne supposons pas inférieure à 1, nous avons

$$T(x) = \log.\ 1.2.3\ldots a,$$

ou, ce qui revient au même,

$$T(x) = \log 1.2.3.a(a+1) - \log(a+1).$$

Or, on sait que

$$\log 1.2.3\ldots a < \log\sqrt{2\pi} + a\log a - a + \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{12a},$$

$$\log 1.2.3\ldots a(a+1) > \log\sqrt{2\pi} + (a+1)\log(a+1) - (a+1) + \frac{1}{2}\log(a+1);$$

donc

$$T(x) < \log\sqrt{2\pi} + a\log a - a + \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{12a},$$

$$T(x) > \log\sqrt{2\pi} + (a+1)\log(a+1) - (a+1) - \frac{1}{2}\log(a+1),$$

et, par conséquent,

$$T(x) < \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{12},$$

$$T(x) > \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x - \frac{1}{2}\log x;$$

car, a étant le plus grand nombre entier contenu dans la valeur de x, que nous ne supposons pas inférieure à 1, nous trouvons

$$a \leqq x > a + 1, \quad a \geqq 1,$$

ce qui entraîne évidemment les conditions

$$x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12} \geqq a \log a - a + \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{12a},$$

$$x \log x - x - \frac{1}{2} \log x \leqq (a+1) \log (a+1) - (a+1) - \frac{1}{2} \log (a+1).$$

Les inégalités que nous venons de prouver par rapport à $T(x)$ nous donnent

$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) < 2 \log \sqrt{2\pi} + \frac{2}{12} + \frac{31}{30} x \log x - \log 30^{\frac{1}{30}} . x$$
$$- \frac{31}{30} x + \log x - \frac{1}{2} \log 30,$$

$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) > 2 \log \sqrt{2\pi} + \frac{31}{30} x \log x - \log^{\frac{1}{30}} . x$$
$$- \frac{31}{30} x - \log x + \frac{1}{2} \log 30,$$

$$\mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right) < 3 \log \sqrt{2\pi} + \frac{3}{12} + \frac{31}{30} x \log x$$
$$- \log 2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{6}} . x - \frac{31}{30} x + \frac{3}{2} \log x - \frac{1}{2} \log 30,$$

$$\mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right) > 3 \log \sqrt{2\pi} + \frac{31}{30} x \log x$$
$$- \log 2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}} . x - \frac{31}{30} x - \frac{3}{2} \log x + \frac{1}{2} \log 30.$$

Combinant ces inégalités par voie de soustraction, savoir : la première avec la dernière, la seconde avec la troisième, nous trouverons

$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right) < \log \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} . x$$
$$+ \frac{5}{2} \log x - \frac{1}{2} \log 1800 \pi + \frac{2}{12},$$

$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right) > \log\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}}\,.\,x$$
$$-\frac{5}{2}\log x + \frac{1}{2}\log\frac{450}{\pi} - \frac{3}{12},$$

ce que nous écrirons sous la forme

$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right) < \mathrm{A}x + \frac{5}{2}\log x$$
$$-\frac{1}{2}\log 1800\pi + \frac{2}{12},$$
$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right) > \mathrm{A}x - \frac{5}{2}\log x$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{450}{\pi} - \frac{3}{12};$$

en faisant, pour abréger,

$$(5)\qquad \mathrm{A} = \log\frac{2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0{,}92129202.$$

L'analyse que nous avons employée pour démontrer ces inégalités suppose $x \geqq 30$; car, en traitant $\mathrm{T}(x)$, nous avons pris $x \geqq 1$, puis nous avons remplacé x par

$$\frac{x}{2},\ \frac{x}{3},\ \frac{x}{5}\ \text{ et }\ \frac{x}{30}.$$

Mais il n'est pas difficile de s'assurer qu'on aura des formules applicables à toutes les valeurs de x plus grandes que 1, si l'on remplace les inégalités précédentes par celles-ci, plus simples,

$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right) < \mathrm{A}x + \frac{5}{2}\log x,$$
$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right) > \mathrm{A}x - \frac{5}{2}\log x - 1;$$

car, en examinant ces inégalités pour les valeurs de x prises dans les limites 1 et 30, on reconnaîtra très-aisément qu'elles ne présentent aucune exception.

§ V.

En combinant ces inégalités avec celles que nous avons déduites plus haut par rapport à $\psi(x)$ (§ III), nous parvenons à ces deux formules,

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2}\log x - 1, \quad \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < Ax + \frac{5}{2}\log x,$$

dont la première nous donne une valeur qui reste inférieure à $\psi(x)$. Quant à la seconde, elle nous servira pour assigner l'autre limite de $\psi(x)$. Pour y parvenir, nous remarquons que

$$fx = \frac{6}{5}Ax + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{4}\log x$$

est une fonction qui vérifie l'équation

$$f(x) - f\left(\frac{x}{6}\right) = Ax + \frac{5}{2}\log x.$$

Or cette équation, retranchée de l'inégalité

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < Ax + \frac{5}{2}\log x,$$

donne

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f(x) + f\left(\frac{x}{6}\right) < 0,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\psi(x) - f(x) < \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f\left(\frac{x}{6}\right).$$

En changeant successivement dans cette formule x en $\frac{x}{6}, \frac{x}{6^2}, \ldots, \frac{x}{6^m}$, nous trouverons

$$\psi(x) - f(x) < \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f\left(\frac{x}{6}\right) < \psi\left(\frac{x}{6^2}\right) - f\left(\frac{x}{6^2}\right) \cdots$$
$$< \psi\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) - f\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right).$$

Si nous supposons actuellement que m soit le plus grand nombre entier qui vérifie la condition $\frac{x}{6^m} \overline{\overline{>}} 1$, la quantité $\frac{x}{6^{m+1}}$ tombera entre 1 et $\frac{1}{6}$, et, en examinant la valeur que prend $\psi(z) - f(z)$ dans les limites $z = 1$, $z = \frac{1}{6}$, on reconnaîtra que $\psi(z) = 0$, et que $-f(z)$ reste au-dessous de 1. Donc

$$\psi\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) - f\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) < 1,$$

et, d'après les inégalités précédentes,

$$\psi(x) - f(x) < 1.$$

Enfin, en substituant pour $f(x)$ sa valeur, nous aurons

$$\psi(x) < \frac{6}{5} A x + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{4} \log x + 1.$$

D'après les formules que nous venons de trouver, il ne sera pas difficile d'assigner deux limites entre lesquelles tombe la valeur de $\theta(x)$, c'est-à-dire la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x.

En effet, d'après la formule (3), nous trouvons

$$\psi(x) - \psi(\sqrt{x}) = \theta(x) + \theta(x)^{\frac{1}{3}} + \theta(x)^{\frac{1}{5}} + \ldots,$$

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) = \theta(x) - \left[\theta(x)^{\frac{1}{2}} - \theta(x)^{\frac{1}{3}}\right] - \left[\theta(x)^{\frac{1}{4}} - \theta(x)^{\frac{1}{5}}\right] - \ldots,$$

ce qui prouve que

$$(6) \qquad \theta(x) \overline{\overline{<}} \psi(x) - \psi(\sqrt{x}), \quad \theta(x) \overline{\overline{>}} \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}),$$

car les termes

$$\theta(x)^{\frac{1}{3}}, \quad \theta(x)^{\frac{1}{5}}, \ldots, \quad \theta(x)^{\frac{1}{2}} - \theta(x)^{\frac{1}{3}}, \quad \theta(x)^{\frac{1}{4}} - \theta(x)^{\frac{1}{5}}, \ldots$$

sont évidemment positifs ou zéro.

Mais nous venons de trouver

$$\psi(x) < \frac{6}{5} A x + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{4} \log x + 1,$$

$$\psi(x) > A x - \frac{5}{2} \log x - 1,$$

ce qui donne

$$\psi(\sqrt{x}) < \frac{6}{5}\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{16\log 6}\log^2 x + \frac{5}{8}\log x + 1,$$

$$\psi(\sqrt{x}) > \mathrm{A}x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4}\log x - 1,$$

et, par conséquent,

$$\psi(x) - \psi(\sqrt{x}) < \frac{6}{5}\mathrm{A}x - \mathrm{A}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2,$$

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) > \mathrm{A}x - \frac{12}{5}\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3.$$

Donc, d'après la formule (6),

$$(7)\quad \begin{cases} \theta(x) < \frac{6}{5}\mathrm{A}x - \mathrm{A}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2, \\ \theta(x) > \mathrm{A}x - \frac{12}{5}\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3. \end{cases}$$

Ainsi, nous arrivons à la conséquence, que la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x est comprise dans les limites

$$\frac{6}{5}\mathrm{A}x - \mathrm{A}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2,$$

$$\mathrm{A}x - \frac{12}{5}\mathrm{A}x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3.$$

§ VI.

Voyons maintenant ce qu'on peut tirer de ces formules sur la totalité des nombres premiers compris dans des limites données. Soient L et l les deux limites en question, et supposons qu'il y ait m nombres premiers plus grands que l et ne surpassant pas L : la somme des logarithmes de ces nombres sera comprise dans les limites $m\log l$, $m\log \mathrm{L}$. Donc, d'après la notation que nous employons, on aura

$$\theta(\mathrm{L}) - \theta(l) > m\log l,$$

$$\theta(\mathrm{L}) - \theta(l) < m\log \mathrm{L},$$

et, par conséquent,

$$m < \frac{\theta(\mathrm{L}) - \theta(l)}{\log l}, \quad m > \frac{\theta(\mathrm{L}) - \theta(l)}{\log \mathrm{L}}.$$

Mais, d'après la formule (7), nous trouvons que la valeur $\theta(\mathrm{L}) - \theta(l)$ est inférieure à

$$\mathrm{A}\left(\frac{6}{5}\mathrm{L} - l\right) - \mathrm{A}\left(\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}l^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\log 6}(2\log^2\mathrm{L} + \log^2 l)$$
$$+ \frac{5}{4}(2\log\mathrm{L} + 3\log l) + 5,$$

et surpasse

$$\mathrm{A}\left(\mathrm{L} - \frac{6}{5}l\right) - \mathrm{A}\left(\frac{12}{5}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2\mathrm{L} + \log^2 l)$$
$$- \frac{5}{4}(3\log\mathrm{L} + 2\log l) - 5.$$

Donc

$$m < \frac{\mathrm{A}\left(\frac{6}{5}\mathrm{L} - l\right) - \mathrm{A}\left(\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}l^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\log 6}(2\log^2\mathrm{L} + \log^2 l) + \frac{5}{4}(2\log\mathrm{L} + 3\log l) + 5}{\log l},$$

$$m > \frac{\mathrm{A}\left(\mathrm{L} - \frac{6}{5}l\right) - \mathrm{A}\left(\frac{12}{5}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2\mathrm{L} + 2\log^2 l) - \frac{5}{4}(3\log\mathrm{L} + 2\log l) - 5}{\log \mathrm{L}}.$$

Ainsi, nous trouvons deux limites entre lesquelles tombe la quantité m, qui désigne combien il y a de nombres premiers plus grands que l, mais qui ne surpassent pas L. La dernière de ces formules nous prouve que, dans les limites l et L, on trouve plus de k nombres premiers, si k, L et l vérifient cette condition

$$k < \frac{\mathrm{A}\left(\mathrm{L} - \frac{6}{5}l\right) - \mathrm{A}\left(\frac{12}{5}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2\mathrm{L} + 2\log^2 l) - \frac{5}{4}(3\log\mathrm{L} + 2\log l) - 5}{\log \mathrm{L}},$$

et comme $l < \mathrm{L}$, on vérifie cette condition en faisant

$$k = \frac{\mathrm{A}\left(\mathrm{L} - \frac{6}{5}l\right) - \frac{12}{5}\mathrm{A}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}(\log^2\mathrm{L} + 2\log^2\mathrm{L}) - \frac{5}{4}(3\log\mathrm{L} + 2\log\mathrm{L}) - 5}{\log \mathrm{L}},$$

et, par conséquent, en prenant

$$l = \frac{5}{6}\mathrm{L} - 2\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2\mathrm{L}}{16\log 6.\mathrm{A}} - \frac{5}{6\mathrm{A}}\left(\frac{25}{4} + k\right)\log\mathrm{L} - \frac{25}{6\mathrm{A}}.$$

Donc, si l'on prend cette valeur de l, on est sûr de trouver plus de k nombres premiers dans les limites l et L. Il faut y joindre encore la condition que l et L ne sont pas plus petits que 1, ce que nous avons supposé par rapport à x, en traitant la fonction $\theta(x)$.

Dans le cas particulier de $k = 0$, nous concluons qu'il y a nécessairement un nombre premier compris dans les limites l et L, si l'on prend

$$l = \frac{5}{6}L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2 L}{16\log 6.A} - \frac{125\log L}{24A} - \frac{25}{6A}.$$

Ceci nous conduit très-simplement à prouver rigoureusement le *postulatum* cité de M. Bertrand. Il n'est pas difficile de s'assurer que les limites a et $2a - 2$, dans le cas de $a > 160$, comprennent ces deux limites

$$l = \frac{5}{6}L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2 L}{16\log 6.A} - \frac{125\log L}{24A} - \frac{25}{6A}, \quad L,$$

L étant une valeur convenablement choisie. En effet, pour que ces limites tombent entre

$$a, \quad 2a - 2,$$

on n'a qu'à vérifier ces conditions,

$$2a - 2 > L,$$

$$a < \frac{5}{6}L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2 L}{16\log 6.A} - \frac{125\log L}{24A} - \frac{25}{6A}.$$

Or on vérifie évidemment la première en prenant $L = 2a - 3$. Quant à la seconde, elle devient, pour $L = 2a - 3$,

$$a < \frac{5}{6}(2a - 3) - 2\sqrt{2a - 3} - \frac{25\log^2(2a - 3)}{16\log 6.A} - \frac{125\log(2a - 3)}{24A} - \frac{25}{6A},$$

ce qui est juste pour toutes les valeurs de a, qui surpassent la plus grande racine de l'équation

$$x = \frac{5}{6}(2x - 3) - 2\sqrt{2x - 3} - \frac{25\log^2(2x - 3)}{16\log 6.A} - \frac{125\log(2x - 3)}{24A} - \frac{25}{6A},$$

et cette racine, nous la trouvons comprise entre les limites 159 et 160.

Donc, toutes les fois que a surpasse 160, on peut assigner entre a et $2a - 2$ deux nouvelles limites

$$l = \frac{5}{6}L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2 L}{16\log 6 . A} - \frac{125\log L}{24\,A} - \frac{25}{6\,A}, \quad L,$$

et comme celles-ci comprennent nécessairement un nombre premier, on sera certain de trouver un nombre premier, qui surpasse a et reste inférieur à $2a - 2$, ce qui prouve le *postulatum* de M. Bertrand pour toutes les valeurs de a qui surpassent 160. Quant aux valeurs de a qui ne sont pas plus grandes que 160, ce *postulatum* se vérifie directement à l'aide des Tables des nombres premiers.

§ VII.

Au moyen de la fonction $\theta(x)$ que nous employons pour désigner la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x, on peut facilement exprimer la somme

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho) = U,$$

où α, β, γ,..., ρ sont les nombres premiers compris dans les limites données. En effet, si α, β, γ,..., ρ sont compris dans les limites l et L, cette somme peut être exprimée ainsi

$$\frac{\theta(l) - \theta(l-1)}{\log l} F(l) + \frac{\theta(l+1) - \theta(l)}{\log(l+1)} F(l+1)$$
$$+ \frac{\theta(l+2) - \theta(l+1)}{\log(l+2)} F(l+2) + \ldots + \frac{\theta(L) - \theta(L-1)}{\log L} F(L);$$

car, en général, la fonction $\frac{\theta(x) - \theta(x-1)}{\log x}$, pour x entier, se réduit à 0 si x est un nombre composé, et à 1 si x est un nombre premier. Donc

$$U = \frac{\theta(l) - \theta(l-1)}{\log l} F(l) + \frac{\theta(l+1) - \theta(l)}{\log(l+1)} F(l+1)$$
$$+ \frac{\theta(l+2) - \theta(l+1)}{\log(l+2)} F(l+1) + \ldots + \frac{\theta(L) - \theta(L-1)}{\log L} F(L),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}U = -\theta(l-1)\frac{F(l)}{\log l} &+ \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\theta(l)\\ &+ \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\theta(l+1) + \ldots\\ &+ \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\theta(L) + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\theta(L).\end{aligned}$$

Or, si nous supposons que la fonction $\frac{F(x)}{\log x}$, dans les limites $x = l-1$ et $x = L+1$, reste constamment positive et décroissante, le signe de $\theta(l-1)$ dans l'expression de U sera $-$, et le signe de chacune des fonctions

$$\theta(l),\quad \theta(l+1),\ldots,\quad \theta(L)$$

sera $+$. Par conséquent, d'après les inégalités (7), et en faisant, pour abréger,

$$(8)\qquad \begin{cases}\theta_1(x) = \frac{6}{5}Ax - Ax^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2,\\ \theta_2(x) = Ax - \frac{12}{5}Ax^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3,\end{cases}$$

nous aurons une valeur inférieure à U, si, dans son expression, nous remplaçons $\theta(l-1)$ par $\theta_1(l-1)$, et $\theta(l)$, $\theta(l+1),\ldots$, $\theta(L)$ par $\theta_2(l)$, $\theta_2(l+1),\ldots$, $\theta_2(L)$. Au contraire, en remplaçant $\theta(l-1)$ par $\theta_2(l-1)$, et $\theta(l)$, $\theta(l+1),\ldots$, $\theta(L)$ par $\theta_1(l)$, $\theta_1(l+1),\ldots$, $\theta_1(L)$, nous trouverons une valeur plus grande que U. Donc

$$\begin{aligned}U > -\theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} &+ \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\theta_2(l)\\ &+ \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\theta_2(l+1) + \ldots\\ &+ \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\theta_2 L + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\theta_2 L,\\ U < -\theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} &+ \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\theta_1(l)\\ &+ \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\theta_1(l+1) + \ldots\\ &+ \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\theta_1 L + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\theta_1 L,\end{aligned}$$

et comme les seconds membres sont identiques avec les sommes

$$\vartheta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\vartheta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x},$$

$$\vartheta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x},$$

nous en conclurons

$$(9)\quad\begin{cases} U > \vartheta_2(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \displaystyle\sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\vartheta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x}, \\ U < \vartheta_1(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \vartheta_2(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \displaystyle\sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x}. \end{cases}$$

D'après les formules que nous venons de trouver, il n'est pas difficile de démontrer ce théorème :

THÉORÈME. *Si la fonction* $F(x)$, *passé une certaine limite de* x, *reste positive, la convergence de la série*

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \frac{F(5)}{\log 5} + \frac{F(6)}{\log 6} + \dots$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + F(13) + \dots$$

soit également convergente.

Démonstration. Supposons que l soit la limite de x au-dessus de laquelle $F(x)$ conserve le signe $+$, $\frac{Fx}{\log x}$ représentant une fonction décroissante, et que α, β, γ,..., ρ soient des nombres premiers compris dans les limites l et L. En faisant

$$S = F(2) + F(3) + F(5) + \dots + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \dots$$
$$+ F(\rho) = S_0 + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \dots + F(\rho),$$

nous conclurons d'après l'équation (9),

$$S > S_0 + \theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x},$$

$$S < S_0 + \theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x}.$$

Ces inégalités font voir que, dans le cas où les expressions

$$\sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x}, \quad \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x},$$

pour $L=\infty$, restent finies, la série

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+\ldots$$

sera convergente; au contraire, si la supposition de $L=\infty$ rend la valeur de ces expressions infinies, la série

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+\ldots$$

sera divergente.

La substitution des valeurs de $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ d'après l'équation (8) dans les expressions précédentes les réduit à

$$\sum_{x=l}^{x=L}\left\{\begin{array}{l} A - \frac{12}{5}A(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) - \frac{5}{8\log 6}[\log^2 x - \log^2(x-1)] \\ - \frac{15}{4}[\log x - \log(x-1)] \end{array}\right\}\frac{F(x)}{\log x},$$

$$\sum_{x=l}^{x=L}\left\{\begin{array}{l} \frac{6}{5}A - A(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) + \frac{5}{4\log 6}[\log^2 x - \log^2(x-1)] \\ + \frac{5}{2}[\log x - \log(x-1)] \end{array}\right\}\frac{F(x)}{\log x},$$

et comme les fonctions

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}, \quad \log^2 x - \log^2(x-1), \quad \log x - \log(x-1),$$

pour des valeurs très-grandes de x, deviennent infiniment petites, nous concluons que dans le cas où

$$\sum_{x=l}^{x=\infty} \frac{F(x)}{\log x}$$

a une valeur finie, les expressions

$$\sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x}, \quad \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x},$$

pour $L=\infty$, seront également finies; au contraire, pour $L=\infty$, elles seront infiniment grandes, si la somme

$$\sum_{x=l}^{x=L} \frac{F(x)}{\log x},$$

avec l'augmentation de L, converge vers l'infini. Mais le premier cas a toujours lieu, si la série

$$\frac{F(2)}{\log 2}+\frac{F(3)}{\log 3}+\frac{F(4)}{\log 4}+\frac{F(5)}{\log 5}+\frac{F(6)}{\log 6}+\ldots$$

est convergente, et le second suppose la divergence de cette série, ce qui prouve le théorème énoncé. Ainsi, nous concluons de là que les séries

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\frac{1}{11\log 11}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2\log^2(\log 2)}+\frac{1}{3\log^2(\log 3)}+\frac{1}{5\log^2(\log 5)}+\frac{1}{7\log^2(\log 7)}$$
$$+\frac{1}{11\log^2(\log 11)}+\ldots$$

sont convergentes, tandis que les deux suivantes

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2\log(\log 2)}+\frac{1}{3\log(\log 3)}+\frac{1}{5\log(\log 5)}+\frac{1}{7\log(\log 7)}$$
$$+\frac{1}{11\log(\log 11)}+\ldots$$

sont divergentes.

§ VIII.

Quand la série

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + \ldots$$

est convergente, nous trouverons sa valeur, avec une approximation aussi grande qu'on le voudra, en calculant la somme de ses premiers termes. En dénotant par S_0 la somme de tous les termes qui précèdent $F(\alpha)$, α étant le plus petit des nombres premiers contenus dans la série

$$l, \quad l+1, \quad l+2, \ldots,$$

et l un nombre entier au-dessus duquel toutes les valeurs de x rendent $\frac{F(x)}{\log x}$ positif et décroissant, nous mettrons la série

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \ldots = S$$

sous cette forme

$$S = S_0 + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots = S_0 + U.$$

Cela posé, nous chercherons les limites entre lesquelles tombe U, en faisant $L = \infty$ dans les formules (9). De cette manière, nous trouverons

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} U &> \theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=\infty} \frac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x} F(x), \\ U &< \theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=\infty} \frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x} F(x). \end{aligned} \right.$$

La demi-somme de ces expressions donnera une valeur approchée de U, et leur demi-différence sera la limite de l'erreur de cette valeur. Cette limite sera d'autant plus petite, que le nombre l et, par conséquent, le nombre de termes de la somme S_0, sera plus considérable.

Pour donner un exemple de ces calculs, nous allons chercher la valeur approchée de la série

$$S = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{5\log 5} + \frac{1}{7\log 7} + \frac{1}{11\log 11} + \ldots.$$

En prenant

$$l = 100,$$

$$S_0 = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{5\log 5} + \frac{1}{7\log 7} + \frac{1}{11\log 11} + \ldots + \frac{1}{97\log 97},$$

$$S = S_0 + U,$$

U étant déterminé par la série

$$U = \frac{1}{101\log 101} + \frac{1}{103\log 103} + \frac{1}{107\log 107} + \ldots,$$

nous trouverons, par les Tables des nombres premiers,

$$S_0 = 1{,}42,$$

et les inégalités (10) pour

$$F(x) = \frac{1}{x\log x}, \quad l = 100,$$

nous donneront

$$U > \frac{\theta_2(99)}{100\log^2 100} - \frac{\theta_1(99)}{100\log^2 100} + \sum_{x=100}^{x=\infty} \frac{\theta_2(x) - \theta_2(x-1)}{x\log^2 x} > 0{,}14,$$

$$U < \frac{\theta_1(99)}{100\log^2 100} - \frac{\theta_2(99)}{100\log^2 100} + \sum_{x=100}^{x=\infty} \frac{\theta_1(x) - \theta_1(x-1)}{x\log^2 x} < 0{,}28.$$

D'après ces inégalités, nous concluons que la valeur de U ne diffère de

$$\frac{0{,}28 + 0{,}14}{2} = 0{,}21$$

que d'une quantité plus petite que

$$\frac{0{,}28 - 0{,}14}{2} = 0{,}07.$$

Donc

$$1{,}42 + 0{,}21 = 1{,}63$$

sera la valeur de la série

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{5\log 5} + \frac{1}{7\log 7} + \frac{1}{11\log 11} + \ldots,$$

exacte à 0,1 près.

§ IX.

La totalité des nombres premiers, compris dans des limites données, se déduit, comme cas particulier, de la valeur de la série

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho),$$

que nous avons examinée dans les paragraphes précédents. En effet, si l'on prend

$$F(x) = 1,$$

la somme

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho)$$

se réduira à autant d'unités qu'il se trouve de termes dans la série des nombres premiers

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots,\ \rho.$$

Donc, les formules (9), dans le cas de $F(x) = 1$, détermineront les limites entre lesquelles tombe la totalité des nombres premiers, compris entre l et L. Ces limites sont plus étroites que celles que nous avons trouvées dans le § VI, en vertu des inégalités que la fonction $\theta(x)$ vérifie. Dans le cas particulier de $l = 2$, nous trouvons que

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\theta_2(1)}{\log 2} - \dfrac{\theta_1(1)}{\log 2} + \displaystyle\sum_{x=2}^{x=L} \dfrac{\theta_2(x) - \theta_2(x-1)}{\log x}, \\ \dfrac{\theta_1(1)}{\log 2} - \dfrac{\theta_2(1)}{\log 2} + \displaystyle\sum_{x=2}^{x=L} \dfrac{\theta_1(x) - \theta_1(x-1)}{\log x} \end{array} \right.$$

sont des limites entre lesquelles tombe la totalité des nombres premiers de 2 à L, ou bien, ce qui revient au même, la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas L. En calculant la demi-somme de ces limites (11), nous aurons une valeur approchée de la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas L. Quant à l'erreur de cette valeur, elle ne pourra surpasser la demi-différence des expressions (11). Par des calculs très-simples, on parvient à connaître que le rapport de la demi-différence des expressions (11) à leur demi-somme devient égal à $\frac{1}{11}$, quand on fait $L = \infty$. Donc, pour de tres-grandes valeurs de L, ce rapport sera inférieur à $\frac{1}{10}$, et, par conséquent, si l'on calcule, d'après nos formules, la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas une limite donnée, très-grande, l'erreur sera inférieure à $\frac{1}{10}$ de la quantité cherchée.