На правах рукописи

СУДОПЛАТОВ Сергей Владимирович

ТЕОРИИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ И ПОЛИГОНОМЕТРИИ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск-2006

Работа выполнена в Новосибирском государственном техническом университете и в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор Палютин Евгений Андреевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН Гончаров Сергей Савостьянович,

доктор физико-математических наук, профессор Хисамиев Назиф Гарифуллинович,

доктор физико-математических наук Степанова Алёна Андреевна

Ведущая организация:
Омский государственный университет

Защита состоится 22 марта 2007 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "____"___________ 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук А. Н. Ряскин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из основных задач современной теории моделей является решение *спектральной проблемы*, т.е. проблемы описания для различных классов теорий T функций $I(T,\lambda)$ числа попарно неизоморфных моделей теории T в мощности λ. Интерес к этой проблеме вызван прежде всего тем, что для ее решения требуется построение содержательной структурной теории.

Проблема описания функций спектра, а также классов теорий, зависящих от этих функций, привлекала и продолжает привлекать внимание большой группы специалистов по теории моделей, составляя обширную область исследований. Это отражено в большом количестве статей, а также в ряде монографий, среди которых упомянем следующие книги — С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов [1], Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин [2], Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн [3], Дж. Сакс [4], Справочная книга по математической логике [5], Дж. Болдуин [7], А. Пилай [8], Б. Пуаза [9], С. Шелах [10], Ф. Вагнер [11].

Как известно [10], [21], спектральная проблема решена в целом для счетных полных теорий в несчетных мощностях λ.

До настоящего времени одной из малоисследованных проблем остается проблема описания числа $I(T,\omega)$ попарно неизоморфных счетных моделей теории T для данных классов полных теорий. В этой связи следует отметить *гипотезу Воота*, согласно которой не существует теории T с условием $\omega < I(T,\omega) < 2^{\omega}$. Эта гипотеза была подтверждена для теорий деревьев, унаров, многообразий, для o-минимальных теорий, для теорий модулей над некоторыми кольцами. В классе стабильных теорий гипотеза Воота доказана для ω-стабильных теорий [42], для различных классов суперстабильных теорий [20], [32], а также для 1-базируемых теорий с неизолированным типом над конечным множеством, который ортогонален пустому множеству [44]. Предпринимались попытки построения примеров, опровергающих гипотезу Воота. Однако до настоящего времени проблема остается открытой.

Еще одной интересной гипотезой является *гипотеза Пилая*, согласно которой для счетной теории T условие $\mathrm{dcl}(\varnothing) \models T$ влечет $I(T,\omega) \geq \omega$. А. Пилай [35] доказал эту гипотезу для стабильных теорий, а также установил (см. [33]), что из $\mathrm{dcl}(\varnothing) \models T$ следует $I(T,\omega) \geq 4$. П. Танович [45] показал, что гипотеза Пилая верна для теорий, не имеющих свойства строгого порядка.

В 1959 г. К. Рыль-Нардзевский [39] опубликовал свою знаменитую теорему, представляющую синтаксический критерий счетной категоричности теории (т.е. условия $I(T, \omega) = 1$), согласно которому счетная категоричность теории эквивалентна конечному числу n-типов теории для каждого натурального числа n и фиксированного множества свободных переменных. Это означает, что каждая счетно категоричная теория определяется одной характеристикой, а именно, *функцией Рыль-Нардзевского*, которая каждому натуральному числу n ставит в соответствие число типов от n фиксированных переменных.

Большое количество результатов связано с *эренфойхтовыми* теориями, т.е. теориями, имеющими конечное (> 1) число счетных моделей. Р. Воотом [49] установлено, что не существует полных теорий, имеющих ровно две счетные модели. На основе теории плотного линейного порядка А. Эренфойхт (см. [49]) построил первоначальные примеры теорий, имеющих ровно n счетных моделей для любого натурального $n \geq 3$. Дальнейшие исследования были связаны с построением эренфойхтовых теорий, обладающих различными дополнительными свойствами, с нахождением и исследованием структурных свойств эренфойхтовых теорий, а также с нахождением классов полных теорий, не содержащих эренфойхтовых теорий.

М. Г. Перетятькин [16] для каждого $n \geq 3$ построил полную разрешимую теорию, имеющую ровно n счетных моделей, из которых лишь одна конструктивизируема. В работах М. Г. Перетятькина [17], Б. Омарова [15], Т. Миллара [31], С. Томаса [46], Р. Вудроу [51] построены примеры эренфойхтовых теорий, допускающих константные обогащения до теорий с бесконечным числом счетных моделей, а также неэренфойхтовых теорий, некоторые константные обогащения которых являются эренфойхтовыми. Р. Вудроу [50] показал, что в предположении элиминации кванторов и при ограничении сигнатуры на бинарный предикатный символ и константные символы счетные полные теории, имеющие ровно три счетные модели, являются по существу примерами Эренфойхта. А. Пилай [34] установил, что в любой эренфойхтовой теории с малым числом связей интерпретируется бесконечный плотный частичный порядок. С. С. Гончаров и М. Пурмахдиан [13] доказали, что каждая эренфойхтова теория имеет конечный ранг. С. С. Гончаров показал, что существует разрешимая эренфойхтова теория, все типы которой вычислимы, но не все счетные модели могут быть выбраны разрешимыми. В работе К. Икеда, А. Пилая и А. Цубои [26] показано, что в любой почти ω-категоричной теории с тремя счетными моделями интерпретируется плотный линейный порядок. Е. Р. Байсалов [12] описал числа счетных моделей o-минимальных теорий (класс o-минимальных теорий включает классические примеры эренфойхтовых теорий). С. Лемп и Т. Слемен установили, что свойство эренфойхтовости Π^1_1-полно. У. Калверт, В. Харизанов, Дж. Найт, С. Миллер описали сложность индексных множеств классической эренфойхтовой теории.

Более тридцати лет известна *проблема Лахлана* о существовании стабильной эренфойхтовой теории. В направлении решения этой проблемы для различных подклассов класса стабильных теорий установлено отсутствие теорий T с условием $1 < I(T, \omega) < \omega$. Это отсутствие было доказано для класса несчетно категоричных теорий (Дж. Болдуин, А. Лахлан [18]), для суперстабильных теорий (А. Лахлан [28], Д. Ласкар [30], С. Шелах [41], Ю. Заффе [40], А. Пилай [36]), для теорий с неглавным суперстабильным типом (Т. Г. Мустафин [14]), для стабильных теорий, у которых $\mathrm{dcl}(\varnothing)$ является моделью [35], для нормальных теорий (А. Пилай [36]), для слабо нормальных (1-базируемых) теорий (А. Пилай [37]), для теорий, допускающих конечную кодировку (Е. Хрушовский [24]), для объединений псевдо-суперстабильных теорий (А. Цубои [48]), для теорий без плотных цепей ответвляемости [23]. А. Цубои [47] доказал, что любая счетная эренфойхтова теория, представляющаяся в виде счетного объединения ω-категоричных теорий, нестабильна. А. А. Викентьев установил наследственность неэренфойхтовости при расширении неэренфойхтовых формульных ограничений. П. Танович [43] показал, что любая стабильная теория, в которой интерпретируется бесконечное множество попарно различных констант, является неэренфойхтовой. Им же [45] доказано, что если теория T эренфойхтова, то $\mathrm{dcl}(\varnothing)$ конечно или теория T имеет свойство строгого порядка.

С развитием теории простых теорий (см. [11]) наряду с проблемой Лахлана для стабильных теорий возникла аналогичная проблема для простых теорий:*проблема Лахлана для простых теорий*. Б. Ким [27] обобщил теорему Лахлана [28] о суперстабильных теориях и установил, что эренфойхтовы теории не содержатся в классе суперпростых теорий.

При определении числа счетных моделей важную роль играют так называемые *властные* типы, которые всегда присутствуют в эренфойхтовых теориях (см. [19]). По существу, доказательство отсутствия эренфойхтовых теорий в вышеперечисленных классах сводится к тому, что для этих классов доказывается отсутствие теорий с неглавными властными типами. Другие существенные свойства, которыми обладают эренфойхтовы теории — несимметричность отношения полуизолированности на множестве реализаций властных типов, а также бесконечный вес неглавных властных типов в простых теориях. Начала систематизации структурных свойств эренфойхтовых теорий и их властных типов положены в кандидатской диссертации автора [6].

А. Лахлан [29] доказал, что структура бесконечной псевдоплоскости содержится в моделях любой ω-категоричной стабильной несуперстабильной теории, а А. Пилай [37] получил аналогичный результат для стабильных не 1-базируемых теорий. Таким образом, положительное решение проблемы Лахлана возможно лишь в классе теорий, интерпретирующих псевдоплоскости.

Взаимосвязь типов в теориях во многом определяется предпорядками Рудина–Кейслера [38]. Эти предпорядки имеют конечное число классов эквивалентности для эренфойхтовых теорий. В работах Д. Ласкара проведено исследование различных видов предпорядков Рудина–Кейслера и показано, что любому властному типу соответствует наибольший класс эквивалентности по предпорядку Рудина–Кейслера.

Е. Хрушовский [25] с помощью модификации генерической конструкции Йонсона–Фраисе опроверг гипотезу Зильбера, построив примеры сильно минимальных не локально модулярных теорий, в которых не интерпретируется группа. Его оригинальная конструкция, послужившая основой для построения соответствующего примера, а также для последующего решения других известных теоретико-модельных проблем, стимулировала интенсивное изучение как самой конструкции Хрушовского и ее различных (в широком смысле) модификаций, способных создавать "генерические" теории с заданными свойствами, так и аксиоматических основ, позволяющих определить границы применимости этой конструкции.

Применительно к проблеме Лахлана Б. Хервиг [22] показал плодотворность конструкции Хрушовского, построив на ее основе малую стабильную теорию с типом, имеющим бесконечный вес.

В работе [53] автором показано, что структура неглавного властного типа содержит структуру бесконтурного орграфа, обладающего свойством попарного пересечения. В работе [54] установлено, что указанное свойство реализуется с помощью тригонометрий групп на проективной плоскости. Обнаруженная связь эренфойхтовых теорий с тригонометриями и полигонометриями стимулировала создание структурной теории полигонометрий и тригонометрий групп.

"*Полигонометрия* (от греч. polýgōnos — многоугольный и metréō — измеряю) — один из методов определения взаимного положения точек земной поверхности для построения опорной геодезической сети, служащей основой топографических съемок, планировки и строительства городов, перенесения проектов инженерных сооружений в натуру и т. п. Положения пунктов в принятой системе координат определяют *методом полигонометрии* путем измерения на местности длин линий, последовательно соединяющих эти пункты и образующих *полигонометрический ход*, и горизонтальных углов между ними. При значительных размерах территории, на которой должна быть создана опорная геодезическая сеть, прокладываются взаимно пересекающиеся полигонометрические ходы, образующие *полигонометрическую сеть*...

Время возникновения метода полигонометрии неизвестно. В прошлом он имел ограниченное применение из-за большого объема линейных измерений, затрудненных условиями местности, громоздкости необходимого оборудования и невозможности контроля результатов работы до ее полного завершения. Поэтому в прошлом метод полигонометрии применялся только для обоснования городских съемок и для сгущения опорной геодезической сети, созданной *методом триангуляции*... С изобретением электрооптических дальномеров и радиодальномеров, позволяющих непосредственно измерять линии на местности с высокой точностью, метод полигонометрии освободился от своего основного недостатка и стал применяться наравне с методом триангуляции."[1]

Полигонометрии исследовались А. И. Лекселем, Н. И. Фуссом, Т. Банахевичем и другими. В 20 веке важную роль сыграли исследования русского геодезиста В. В. Данилова, детально разработавшего метод параллактической полигонометрии, который был намечен В. Я. Стру-

[1]Большая Советская Энциклопедия. (В 30 томах). Гл. ред. А.М.Прохоров. — М.: Советская Энциклопедия, 1975. — Т. 20, с. 195.

ве еще в 1836 г. В развитии теории и методов полигонометрии большое значение имели труды советских геодезистов А. С. Чеботарева, В. В. Попова, Н. А. Кузина и Н. Н. Лебедева, разработавших рациональные методы ведения полигонометрических работ различного вида и точности, а также методы вычислительной обработки и оценки погрешности их результатов.

Как известно, наряду с классической тригонометрией на евклидовой плоскости, к классическим тригонометриям также относятся сферическая и гиперболическая тригонометрии.

Цель работы. Изучение структурных свойств класса элементарных полных теорий с конечным числом счетных моделей. Развитие классификационной теории эренфойхтовых структур, а также теории полигонометрий групп.

Общая методика исследований. В работе используется аппарат теории моделей, включающий современные средства спектральной теории, теории генерических моделей, а также теоретико-модельные конструкции. При изучении полигонометрий и тригонометрий групп применяется арсенал теории групп, теории графов, геометрии и теории универсальных алгебр.

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты:

— найдены синтаксическая характеризация и основные характеристики для класса эренфойхтовых теорий (теорема 1.1.13);

— развита теория синтаксических генерических конструкций, позволяющая строить генерические модели посредством классов типов (параграф 1.5);

— на основе синтаксического подхода к построению генерических моделей сконструированы примеры, реализующие все возможности для основных характеристик класса эренфойхтовых теорий (теорема 1.9.1);

— найдены алгебраические критерии существования полигонометрий и тригонометрий (теоремы 2.1.3 и 2.1.4), критерии изоморфизма и вложимости полигонометрий (теоремы 2.1.5, 2.3.1, 2.3.3, 2.3.8);

— установлено существование тригонометрии группы без кручения на проективной плоскости (теоремы 2.2.1 и 2.2.7), а также существование и число попарно неизоморфных полигонометрий для различных пар конечных групп (параграф 2.7);

— описан и исследован класс частичных алгебр, определяющих полигонометрии (параграф 3.1), а также класс групп автоморфизмов полигонометрий (параграф 3.2);

— изучены свойства и описаны функции спектра теорий всюду конечно определенных полигонометрий (параграф 3.5);

— установлено существование ω-стабильных тригонометрий групп без кручения на проективной плоскости (теорема 3.7.35);

— исследованы полигонометрии групп с условиями симметрии расстояний (параграф 3.9), обобщенные полигонометрии, соответствующие произвольному множеству матриц сторон и углов (параграф 3.10), полигонометрии с несущественными раскрасками точек (параграф 3.11);

— исследованы свойства теорий, наследуемых при транзитивных размещениях алгебраических систем (параграф 3.12).

Все основные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в общей теории моделей, при решении пограничных вопросов, связанных с теорией групп, теорией графов, геометрией и теорией универсальных алгебр, при чтении спецкурсов по теории моделей, написании учебных пособий и монографий

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Девятой Всесоюзной конференции по математической логике (Ленинград, 1988), на Международных конференциях по алгебре (Новосибирск, 1989; Барнаул, 1991; Красноярск, 1993; Москва, 1998; Москва, 2004; Екатеринбург, 2005), на Советско-Французском коллоквиуме по теории моделей (Караганда, 1990), на Суслинских конференциях (Саратов, 1991, 1994), на XI Межреспубликанской конференции по математической логике (Казань, 1992), на Казахско-Французских коллоквиумах по теории моделей (Алма-Ата, 1994; Караганда, 2000), на Международных конференциях по математической логике памяти А.И.Мальцева (Новосибирск, 1994, 1999, 2001, 2004), на Летней школе по теории моделей и универсальной алгебре (Эрлагол, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005), на Корейско-Российском Международном симпозиуме по Науке и Технологии (Ульсан, 1997), на Летней школе по универсальной алгебре и упорядоченным множествам (Велке Карловице, Чехия, 1998), на Международном семинаре “Универсальная алгебра и ее приложения” (Волгоград, 1999), на Международной конференции, посвященной 60-летию со дня рождения академика Ю.Л.Ершова (Новосибирск, 2000), на Международном семинаре по теории групп (Екатеринбург, 2001), на Международной конференции "Алгебра и ее приложения" (Красноярск, 2002), на Научных сессиях НГТУ (Новосибирск, 2003, 2005, 2006), на Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию Московского университета (Москва, 2004), на Международной конференции "Алгебра, логика и кибернетика" (Иркутск, 2004), на Французско-Казахстанской конференции "Теория моделей и алгебра" (Астана, 2005), на Девятой Азиатской логической конференции (Новосибирск, 2005), на Международной алгебраической конференции к 100-летию со дня рождения П. Г. Конторовича и 70-летию Л. Н. Шеврина (Екатеринбург, 2005), на Международной конференции "Методы логики в математике III" (Санкт-Петербург, 2006), на Международной школе "Теория моделей и ее применения в компьютерной науке" (Алма-Ата, 2006), на Российской школе-семинаре "Синтаксис и семантика логических систем" (Иркутск, 2006).

Автор выступал с докладами о результатах диссертации на заседаниях семинаров в Новосибирске (семинар "Теория моделей", 1987–2006; семинар "Алгебра и логика", 1993, 1995, 2001; семинар "Теория групп", 1999; семинар "Эварист Галуа", 2002; семинар "Теория вычислимости", 2005; Общеинститутский математический семинар ИМ СО РАН, 2005), в Москве (1991, 2000, алгебраический семинар МГУ), в Париже, Франция (1993, семинар по теории моделей), в Лионе, Франция (1993, семинар по теории моделей), в Екатеринбурге (2003, семинар "Алгебраические системы"), в Урбане, США (2004, семинар по теории моделей), в Чикаго, США (2004, семинар по теории моделей).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [52]–[98]; часть из них включена в учебник С. В. Судоплатова и Е. В. Овчинниковой [52].

Объем и структура диссертации. Диссертация содержит 320 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения, библиографии и алфавитного указателя. Основные утверждения диссертации названы теоремами. Все утверждения занумерованы тройками индексов, из которых первые два индекса указывают на номер соответствующего параграфа, а третий — порядковый номер утверждения в этом параграфе. Нумерация примеров основана на том же принципе, но составлена независимо от нумерации утверждений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 изучаются вопросы, связанные с синтаксической характеризацией класса эренфойхтовых теорий. Центральной здесь является доказываемая в параграфе 1.1 теорема 1.1.13, представляющая синтаксическую характеризацию класса элементарных полных теорий с конечным числом счетных моделей и являющаяся аналогом теоремы Рыль-Нардзевского.

Через $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$ (возможно с индексами) обозначаются бесконечные модели элементарных теорий, через $M, N, \ldots$ — их соответствующие носители. Тип кортежа $\bar{a}$ в модели $\mathcal{M}$ обозначается через $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a})$, а также через $\mathrm{tp}(\bar{a})$, если из контекста ясно, о какой модели идет речь. Множество всех типов теории T над пустым множеством обозначается через $S(T)$ или $S(\varnothing)$.

Тип $p(\bar{x}) \in S(T)$ называется *мощным* или *властным* типом теории T, если в любой модели $\mathcal{M}$ теории T, реализующей тип p, реализуется любой тип $q \in S(T)$: $\mathcal{M} \models S(T)$.

Ясно, что наличие властного типа влечет *малость* теории T, т.е. счетность множества $S(T)$, что в свою очередь влечет существование для любого типа $p \in S(T)$ и любой его реализации $\bar{a}$ простой модели $\mathcal{M}_{\bar{a}}$ над $\bar{a}$. Поскольку все простые модели над реализациями типа p изоморфны, эти модели обозначаются через $\mathcal{M}_p$.

Пусть p и q — типы из $S(T)$. Будем говорить, что тип p *подчиняется* типу q или p *не превосходит* q *по предпорядку Рудина–Кейслера* и писать $p \leq_{RK} q$, если $\mathcal{M}_q \models p$, т.е. модель $\mathcal{M}_p$ является элементарной подмоделью модели $\mathcal{M}_q$: $\mathcal{M}_p \preceq \mathcal{M}_q$. При этом будем также говорить, что модель $\mathcal{M}_p$ *подчиняется* модели $\mathcal{M}_q$ или *не превосходит модели* $\mathcal{M}_q$ *по предпорядку Рудина–Кейслера* и писать $\mathcal{M}_p \leq_{RK} \mathcal{M}_q$.

Типы p и q называются *взаимоподчиняемыми*, *взаимореализуемыми* или *эквивалентными по Рудину–Кейслеру* ($p \sim_{RK} q$), если $p \leq_{RK} q$ и $q \leq_{RK} p$. При этом модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ также называются *взаимоподчиняемыми* или *эквивалентными по Рудину–Кейслеру* ($\mathcal{M}_p \sim_{RK} \mathcal{M}_q$).

Обозначим через $\mathrm{RK}(T)$ множество $\mathbf{PM}$ типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_p$ ($p \in S(T)$) с отношением подчинения, индуцированным отношением подчинения $\leq_{RK}$ между моделями $\mathcal{M}_p$: $\mathrm{RK}(T) = \langle \mathbf{PM}, \leq_{RK} \rangle$. Будем говорить, что типы изоморфизма $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbf{PM}$ *взаимоподчиняемы* ($\mathbf{M}_1 \sim_{RK} \mathbf{M}_2$), если взаимоподчиняемы их представители.

Элементарная цепь $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ называется *элементарной над типом* p ($p \in S(T)$), если $\mathcal{M}_n \simeq \mathcal{M}_p$ для любого $n \in \omega$. Модель $\mathcal{M}$ называется *предельной над типом* p, если $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$ для некоторой элементарной цепи $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ над типом p и $\mathcal{M} \not\simeq \mathcal{M}_p$.

Для любого класса $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}$, состоящего из типов изоморфизма взаимоподчиняемых моделей $\mathcal{M}_{p_1}, \ldots, \mathcal{M}_{p_n}$, обозначим через $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}})$ число попарно неизоморфных моделей, каждая из которых предельна над некоторым типом p_i.

Теорема 1.1.13 *Для любой счетной полной теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) *$I(T, \omega) < \omega$;*

(2) *теория T мала, $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$ и $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}) < \omega$ для любого $\widetilde{\mathbf{M}} \in \mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}$.*

При выполнении условия (1) *(или* (2)*) теория T обладает следующими свойствами:*

(а) $\mathrm{RK}(T)$ *имеет наименьший элемент $\mathbf{M}_0$ (тип изоморфизма простой модели) и $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_0}) = 0$;*

(б) $\mathrm{RK}(T)$ *имеет наибольший $\sim_{RK}$-класс $\widetilde{\mathbf{M}_1}$ (класс типов изоморфизма всех простых моделей над реализациями властных типов), и из $|\mathrm{RK}(T)| > 1$ следует $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_1}) \geq 1$;*

(в) *если $|\widetilde{\mathbf{M}}| > 1$, то $\mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}}) \geq 1$.*

Более того, справедлива следующая декомпозиционная *формула:*

$$I(T, \omega) = |\mathrm{RK}(T)| + \sum_{i=0}^{|\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}|-1} \mathrm{IL}(\widetilde{\mathbf{M}_i}),$$

где $\widetilde{\mathbf{M}_0}, \ldots, \widetilde{\mathbf{M}_{|\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}|-1}}$ — все элементы ч.у.м. $\mathrm{RK}(T)/\sim_{RK}$.

Будем говорить, что теория T обладает *свойством согласованного расширения цепей простых над кортежами моделей* (CEP), если для любого типа $p \in S(T)$ любые две предельные модели $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ над типом p изоморфны. Заметим, что существование изоморфизма предельных моделей равносильно существованию элементарных цепей $(\mathcal{M}_n)_{n\in\omega}$ и $(\mathcal{N}_n)_{n\in\omega}$ над типом p, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$, $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{N}_n$;

2) существуют константные обогащения $\mathcal{M}'_{n+1} = \langle \mathcal{M}_{n+1}, c\rangle_{c\in M'_n}$ и $\mathcal{N}'_{n+1} = \langle \mathcal{N}_{n+1}, c\rangle_{c\in N'_n}$, $n \in \omega$, $\mathcal{M}'_0 = \mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}'_0 = \mathcal{N}_0$, такие, что $\mathcal{M}'_{n+1} \simeq \mathcal{N}'_{n+1}$, $n \in \omega$.

На основании теоремы 1.1.13 справедлива следующая теорема для теорий, удовлетворяющих условию (CEP).

Теорема 1.1.14. *Пусть теория T удовлетворяет* (CEP). *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $I(T,\omega) < \omega$;

(2) *теория T мала и* $|\mathrm{RK}(T)| < \omega$.

При этом справедливо следующее неравенство, которое превращается в равенство при $|\mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}| \leq 2$:

$$I(T,\omega) \leq |\mathrm{RK}(T)| + |\mathrm{RK}(T)/{\sim_{RK}}| - 1.$$

Из теоремы 1.1.14 выводится синтаксическая характеризация класса теорий, имеющих ровно три счетные модели.

Следствие 1.1.15. *Для любой полной теории T следующие условия эквивалентны:*

(1) $I(T,\omega) = 3$;

(2) *теория T мала, обладает* (CEP) *и* $|\mathrm{RK}(T)| = 2$. $\square$

В параграфе 1.2 определяются понятия несущественных и почти несущественных совмещений и раскрасок моделей, при которых типы кортежей при совмещениях определяются типами тех же кортежей, рассматриваемых в исходных моделях. Доказываются характеризации несущественности и почти несущественности совмещений (теоремы 1.2.6 и 1.2.7). В этом же параграфе устанавливается, что при несущественных совмещениях и раскрасках моделей сохраняются свойства λ-стабильности и малости теории (теоремы 1.2.8 и 1.2.12). В завершающей части параграфа 1.2 определяется понятие упорядоченной раскраски, приводится достаточное условие несимметричности отношения полуизолированности при наличии упорядоченной раскраски (предложение 1.2.13) и строится пример ω-стабильной теории (пример 1.2.3), который показывает, что различные элементарные цепи над одним и тем же типом могут порождать неизоморфные предельные модели и при этом образуется континуум попарно неизоморфных предельных моделей.

В параграфе 1.3 определяются понятия p-главного p-типа и редуцированности теории над типом и доказывается, что из отсутствия свойства строгого порядка в теории T с неглавным властным типом p следует существование не p-главного p-типа и нередуцированность теории над типом p (предложение 1.3.5 и теорема 1.3.6). В этом же параграфе приводится пример ω-стабильной теории, имеющей не p-главный p-тип, реализующийся в модели $\mathcal{M}_p$ (пример 1.3.1).

В параграфе 1.4 определяется понятие властного орграфа, устанавливается связь властных орграфов с властными типами (предложения 1.4.1 и 1.4.2), дается описание структуры транзитивных замыканий насыщенных властных орграфов, образующихся в моделях теорий с неглавными властными 1-типами при условии конечного числа неглавных 1-типов (теорема 1.4.3), и доказывается, что структура властного орграфа, рассматриваемая в модели простой теории, индуцирует бесконечный вес (предложение 1.4.6). Приведем в этой связи определение властного орграфа и формулировку теоремы 1.4.3.

Счетный бесконтурный орграф $\Gamma = \langle X, Q \rangle$ называется *властным*, если выполняются следующие условия:

(а) группа автоморфизмов орграфа Γ транзитивна;

(б) формула $Q(x, y)$ эквивалентна в теории $\mathrm{Th}(\Gamma)$ дизъюнкции главных формул;

(в) $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(\Gamma, a) = \{a\}$ для любой вершины $a \in X$;

(г) $\Gamma \models \forall x, y \exists z (Q(z, x) \wedge Q(z, y))$ (свойство *попарного пересечения*).

Теорема 1.4.3. *Пусть* $\Gamma = \langle X; Q \rangle$ *— насыщенный властный орграф, в котором* $\mathrm{acl}(\{a\}) \cap \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n(a, \Gamma) = \{a\}$ *для любого* $a \in X$. *Тогда его транзитивное замыкание* $\mathrm{TC}(\Gamma) = \left\langle X, \bigcup\limits_{n\in\omega} Q^n \right\rangle$ *изоморфно направленному вниз множеству с транзитивной группой автоморфизмов и имеющему один из следующих порядков:*

(1_α) *плотный частичный порядок с максимальными антицепями, содержащими* α *элементов,* $\alpha \in (\omega + 1) \setminus \{0\}$*;*

(2) *частичный порядок с бесконечным числом покрывающих элементов для любого элемента.*

В параграфе 1.5 определяется понятие генерического класса, а также синтаксический способ построения генерической модели. Устанавливается существование генерической модели (теорема 1.5.2), а также показывается, что синтаксический подход обобщает подход семантический (теорема 1.5.3). Определяется понятие самодостаточного генерического класса, устанавливается свойство конечного замыкания для класса моделей теории генерической насыщенной модели, порожденной самодостаточным классом (следствие 1.5.6), приводятся критерии насыщенности генерической модели (теорема 1.5.7), доказывается существование самодостаточных замыканий (теорема 1.5.8), а также однородность генерической модели, порожденной самодостаточным классом (следствие 1.5.9). Определяется понятие наследственного класса и показывается, что любая счетная однородная модель порождается некоторым наследственным классом (теорема 1.5.10), а, значит, любая полная счетная теория является генерической (следствие 1.5.11). Устанавливается критерий малости теории (теорема 1.5.12), критерий вложимости одной счетной однородной модели в другую на языке генерических классов (теорема 1.5.13). Определяется свойство однородного амальгамирования генерического класса $\mathbf{T}_0$ и доказывается, что это свойство при условии конечных замыканий влечет насыщенность генерической модели, а также $\Delta(\mathbf{T}_0)$-базируемость генерической теории, где $\Delta(\mathbf{T}_0)$ — множество формул, которые получаются навешиванием кванторов существования на конъюнкции формул, определяющих типы порождающего самодостаточного класса (теорема 1.5.14). Замечается, что в условиях теоремы 1.5.14 проверка свойств формул, сохраняющихся при переходе к булевым комбинациям, сводится к проверке свойств формул из множества $\Delta(\mathbf{T}_0)$ (следствие 1.5.15). В частности, если стабильны формулы, входящие в множество $\Delta(\mathbf{T}_0)$, то генерическая теория является стабильной (следствие 1.5.16).

Приведем формулировку основной теоремы параграфа 1.5:

Теорема 1.5.14. *Если* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$ *— самодостаточный класс, обладающий свойством однородного* t*-амальгамирования, и класс* $\mathbf{K}$ *имеет конечные замыкания, то* $(\mathbf{T}_0; \leqslant)$*-генерическая модель* $\overline{\mathcal{M}}$ ω*-насыщена. При этом любое конечное множество* $A \subseteq \overline{M}$ *расширяется до своего самодостаточного замыкания* $\overline{A} \subseteq \overline{M}$*, тип* $\mathrm{tp}(\overline{A})$ *содержит тип* $\overline{\Phi}(Y)$ *для самодостаточного типа* $\overline{\Phi}(\overline{A})$ *и выполняется* $\overline{\Phi}(Y) \vdash \mathrm{tp}(\overline{A})$.

В параграфе 1.6 на основе синтаксической генерической конструкции и несущественной упорядоченной раскраски бесконтурного орграфа строится пример генерического властного орграфа, имеющего неограниченные длины кратчайших маршрутов и допускающего обогащение до структуры неглавного властного типа.

Теорема 1.6.3. *Существует счетный цветной насыщенный орграф* $\mathcal{M} \in \mathbf{K}_0$*, удовлетворяющий вместе со своей теорией* T_0 *следующим условиям:*

1) *если* $f : \mathcal{A} \to_c \mathcal{M}$*,* $g : \mathcal{A} \to_c \mathcal{B}$ *— c-вложения и* $\mathcal{B} \in \mathbf{K}_0^*$*, то существует c-вложение* $h : \mathcal{B} \to_c \mathcal{M}$ *такое, что* $f = g \circ h$*;*

2) *если* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *— c-изоморфные c-подграфы орграфа* $\mathcal{M}$*, то* $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(B)$*;*

3) *раскраска обеднения* $\mathcal{M} \upharpoonright Q$ *модели* $\mathcal{M}$ *до графовой сигнатуры* $\Sigma = \{Q\}$ *несущественна и* Q*-упорядочена;*

4) *формула* $Q(x, y)$ *является главной формулой в теории* $\mathrm{Th}(\mathcal{M} \upharpoonright Q)$*.*

В параграфе 1.7 приводятся генерические конструкции обогащений теории из параграфа 1.6, в которых любой неглавный тип является властным.

Теорема 1.7.4 *Существует малая теория T, обогащающая теорию T_0 и удовлетворяющая условию $|\mathrm{RK}(T)| = 2$.*

В параграфе 1.8 дается генерическая конструкция обогащения теории из параграфа 1.7, имеющего ровно три счетные модели:

Теорема 1.8.8. *Существует полная теория T, обогащающая генерическую теорию T_0 и удовлетворяющая условию $I(T, \omega) = 3$.*

В параграфе 1.9 на основе генерических конструкций из параграфов 1.6 — 1.8 приводятся конструкции, реализующие всевозможные основные характеристики полных теорий с конечным числом счетных моделей:

Теорема 1.9.1. *Для любого конечного предупорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$ с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\widetilde{x_1}$ в упорядоченном фактор-множестве $\langle X, \leq \rangle / \sim$ по отношению $\sim$ (где $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ и $y \leq x$), а также для любой функции $f : X/{\sim} \to \omega$, удовлетворяющей условиям $f(\widetilde{x_0}) = 0$, $f(\widetilde{x_1}) > 0$ при $|X| > 1$, $f(\widetilde{y}) > 0$ при $|\widetilde{y}| > 1$, существует полная теория T и изоморфизм $g : \langle X, \leq \rangle \xrightarrow{\sim} \mathrm{RK}(T)$ такой, что $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y})) = f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y} \in X/{\sim}$.*

В параграфе 1.10 устанавливаются аналоги теорем 1.1.13 и 1.9.1 для малых теорий с конечными предпорядками Рудина–Кейслера (теоремы 1.10.1 и 1.10.3).

В параграфе 1.11 представляется описание всевозможных предпорядков Рудина–Кейслера в малых теориях:

Теорема 1.11.1. 1. *Для любой малой теории T предупорядоченное множество $\mathrm{RK}(T)$ не более чем счетно, направлено вверх и имеет наименьший элемент.*

2. *Для любого не более чем счетного предупорядоченного направленного вверх множества $\langle X, \leq \rangle$, имеющего наименьший элемент, существует малая теория T, для которой $\mathrm{RK}(T) \simeq \langle X, \leq \rangle$.*

В параграфе 1.12 показывается, что наряду с получающимся при доказательстве теоремы 1.6.3 властным орграфом, соответствующим условию (1_ω) теоремы 1.4.3, существуют две модификации основной конструкции, в первой из которых властный орграф соответствует условию 2 теоремы 1.4.3 (теорема 1.12.2), а вторая конструкция позволяет построить властный тип без властного орграфа (теорема 1.12.5). Строящиеся при этом генерические модели $\hat{\mathcal{M}}$ и $\check{\mathcal{M}}$ расширяются до моделей, теории которых имеют любой заданный предпорядок подчинения и любую заданную функцию распределения числа предельных моделей.

В главе 2 определяются различные понятия полигонометрий и тригонометрий групп, обосновывается связь тригонометрий с властными орграфами и представляются различные алгебраические и теоретико-графовые свойства полигонометрий.

Понятия полигонометрии и тригонометрии группы с особым элементом и первоначальные примеры таких полигонометрий и тригонометрий (примеры 2.1.1 и 2.1.2) приводятся в параграфе 2.1. В этом же параграфе доказывается, что любой орграф, индуцируемый бесконтурной тригонометрией, является властным (предложение 2.1.1). Кроме того устанавливаются критерии существования полигонометрий (теоремы 2.1.3 и 2.1.4), критерий изоморфизма полигонометрий (теорема 2.1.5), критерий существования тригонометрии (теорема 2.1.6). Замечается, что в отличие от классических тригонометрий в тригонометриях групп имеет место неоднозначность параметров треугольников по трем сторонам (предложение 2.1.8).

Система $\mathcal{P} = \langle P, L, I\rangle$, где P — множество *точек*, L — множество *линий*, $I \subseteq P \times L$ — *отношение инцидентности*, называется *точной* (λ_1, λ_2)*-псевдоплоскостью*, где λ_1, λ_2 — некоторые кардиналы, если выполняются следующие предложения:

$$\forall p \in P \ \ \exists^{=\lambda_1} l \in L \ \ I(p,l), \ \ \forall l \in L \ \ \exists^{=\lambda_2} p \in P \ \ I(p,l),$$

$$\forall p_1 \neq p_2 \in P \ \ \exists^{\leq 1} l \in L \ \ (I(p_1,l) \wedge I(p_2,l)),$$
$$\forall l_1 \neq l_2 \in L \ \ \exists^{\leq 1} p \in P \ \ (I(p,l_1) \wedge I(p,l_2)).$$

Здесь $\exists^{=\lambda}$ означает "существует ровно λ", а $\exists^{\leq 1}$ — "существует не более одного".

Точная (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость $\mathcal{P}$ называется *плоскостью*, если выполняется

$$\forall p_1 \neq p_2 \in P \ \ \exists^{=1} l \in L \ \ (I(p_1,l) \wedge I(p_2,l)).$$

Плоскость $\mathcal{P}$ называется *проективной плоскостью*, если

$$\forall l_1 \neq l_2 \in L \ \ \exists^{=1} p \in P \ \ (I(p,l_1) \wedge I(p,l_2)).$$

Точная (λ_1, λ_2)-псевдоплоскость называется *точной* λ*-псевдоплоскостью*, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Пусть G — группа, g_0 — неединичный элемент группы G. Система $\langle G, \mathcal{P}, g_0\rangle$ (обозначаемая через $\mathrm{pm}(G, \mathcal{P}, g_0)$) называется *полигонометрией группы G с особым элементом g_0 на точной $|G|$-псевдоплоскости* $\mathcal{P} = \langle P, L, \in\rangle$, если выполняются следующие условия:

а) для любой линии $l \in L$ *группа G действует точно транзитивно на множестве l*, т.е. $pe = p$, $(pg_1)g_2 = p(g_1g_2)$, $p \in l$, $g_1, g_2 \in G$, и для любых точек $p', p'' \in l$ существует ровно один элемент $g \in G$ такой, что $p'' = p'g$;

б) для любых точек $p_1, p_2 \in P$ и линий $l_1, l_2 \in L$, если $p_1 \in l_1$ и $p_2 \in l_2$, то существует такая биекция $f : P \to P$, что

(i) $f(p_1) = p_2$, $f(l_1) = l_2$;

(ii) множество $f(l)$ принадлежит множеству L для любой линии $l \in L$, и $f(\{l \mid p \in l\}) = \{l \mid f(p) \in l\}$ для любой точки $p \in P$;

(iii) для любой линии $l \in L$ и любых точек $p', p'' \in l$, если $p'' = p'g$ на l, то $f(p'') = f(p')g$ на $f(l)$;

в) для любой точки $p \in P$ множество $p \uparrow \rightleftharpoons \{p' \mid p' = pg_0$ на некоторой линии $l\}$ является линией и отображение $p \in P \mapsto p \uparrow \in L$ осуществляет биекцию между P и L.

Отметим, что термин "полигонометрия" определяет класс описанных выше объектов более точно, чем использованный в ранних работах автора термин "тригонометрия". Указанная замена терминологии произведена по предложению Е.А.Палютина.

Полигонометрия $\mathrm{pm}(G, \mathcal{P}, g_0)$ называется *тригонометрией* группы G с особым элементом g_0, если $\mathcal{P}$ — плоскость. Тригонометрия $\mathrm{pm}(G, \mathcal{P}, g_0)$ будет обозначаться через $\mathrm{trm}(G, \mathcal{P}, g_0)$.

Предложение 2.1.1. *Если $\Gamma_{g_0} = \langle P; Q_{g_0}\rangle$ — особый граф g_0-бесконтурной тригонометрии* $\mathrm{trm} = \mathrm{trm}(G, \langle P, L, \in\rangle, g_0)$*, то Γ_{g_0} — властный орграф.*

Теорема 2.1.3. *Пусть g_0 — неединичный элемент группы G, $\mathbf{\Delta}$ — некоторое множество G-треугольников. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество $\mathbf{\Delta}$ является g_0-согласованным;*

(2) *на некоторой точной $|G|$-псевдоплоскости $\mathcal{P}$ существует полигонометрия* $\mathrm{pm}(G, \mathcal{P}, g_0)$ *такая, что* $\mathbf{\Delta} = \mathbf{S}_3(G, \mathcal{P}, g_0)$.

Теорема 2.1.4. *Пусть g_0 — неединичный элемент группы G,* $\mathbf{S}$ *— некоторое множество G-многоугольников. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathbf{S}$ *— g_0-полигонометрическое множество;*

(2) *на некоторой точной $|G|$-псевдоплоскости $\mathcal{P}$ существует полигонометрия* $\mathrm{pm}(G, \mathcal{P}, g_0)$ *такая, что* $\mathbf{S} = \mathbf{S}(G, \mathcal{P}, g_0)$.

Теорема 2.1.5. *Следующие условия эквивалентны:*
(1) $\mathrm{pm}(G, \mathcal{P}_1, g_0) \simeq \mathrm{pm}(G, \mathcal{P}_2, g_0)$*;*
(2) $\mathbf{S}(G, \mathcal{P}_1, g_0) = \mathbf{S}(G, \mathcal{P}_2, g_0)$ *и* $c(\mathcal{P}_1) = c(\mathcal{P}_2)$*.*

Теорема 2.1.6. *Если* $\mathcal{P}$ *— связная псевдоплоскость и тройка* $(G, \mathcal{P}, g_0)$ *образует полигонометрию, то следующие условия эквивалентны:*
(1) $\mathbf{S}_3(G, \mathcal{P}, g_0)$ *—* g_0*-предполное* (g_0*-полное*) *множество;*
(2) $\mathcal{P}$ *—* (*проективная*) *плоскость.*

В параграфе 2.2 доказывается существование тригонометрии свободной λ-порожденной группы F_λ (где λ — произвольный бесконечный кардинал) на проективной плоскости (теорема 2.2.1), устанавливается максимальное число таких тригонометрий (теорема 2.2.2) и показывается существование тригонометрии, имеющей властный орграф (следствие 2.2.4). Кроме того доказываются теорема о расширении полигонометрии подгруппы до полигонометрии группы (теорема 2.2.5), теорема о существовании на проективной плоскости тригонометрии группы $G \times F_\lambda$ для любой группы G и подходящей мощности λ (теорема 2.2.7) и теорема о существовании на проективной плоскости тригонометрии группы $G \times A$ для любой группы G и подходящей абелевой группы A (теорема 2.2.8).

Теорема 2.2.1. *Для любого* $\lambda \geq \omega$ *группа* F_λ *имеет тригонометрию на некоторой проективной плоскости.*

Теорема 2.2.2. *Для любого* $\lambda \geq \omega$ *группа* F_ω *имеет* 2^λ *тригонометрий на проективной плоскости.*

Следствие 2.2.4. *Существует тригонометрия, имеющая властный особый орграф.*

Теорема 2.2.5. *Если подгруппа* H *группы* G *имеет полигонометрию на точной* $|H|$*-псевдоплоскости* $\mathcal{P}_H$*, то группа* G *имеет тригонометрию на некоторой точной* $|G|$*-псевдоплоскости, расширяющей псевдоплоскость* $\mathcal{P}_H$*.*

Теорема 2.2.7. *Для любой группы* G *группа* $G \times F_{\lambda(G)}$*, где* $\lambda(G) = \max\{|G|, \omega\}$*, имеет тригонометрию на некоторой проективной плоскости.*

Теорема 2.2.8. *Для любой группы* G *группа* $G \times A$*, где* $A = A_{-1} \oplus \sum\limits_{i<\lambda(G)} A_i$*, где* $A_{-1} \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}\}$*,* $A_i \in \{\mathbb{Z}\} \cup \{\mathbb{Z}_n \mid 2 \leq n < \omega\}$*,* $\lambda(G) = \max\{|G|, \lambda\}$*, имеет тригонометрию на некоторой проективной плоскости.*

В параграфе 2.3 устанавливается критерии вложимости одной полигонометрии в другую (теоремы 2.3.1 и 2.3.3), критерий вложимости полигонометрии в тригонометрию на проективной плоскости (теорема 2.3.8), необходимое условие совместного вложения полигонометрий (предложение 2.3.10).

Теорема 2.3.1. *Пусть* G_1 *— неединичная подгруппа группы* G_2*,* $\mathcal{P}_1$ *— связная точная* $|G_1|$*-псевдоплоскость. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *полигонометрия* $\mathrm{pm}(G_1, \mathcal{P}_1, g_0)$ *вложима в полигонометрию* $\mathrm{pm}(G_2, \mathcal{P}_2, g_0)$*;*

(2) $\mathbf{S}(G_1, \mathcal{P}_1, g_0) = \mathbf{S}(G_2, \mathcal{P}_2, g_0) \restriction G_1$.

Теорема 2.3.3. *Пусть* G_1 *— неединичная подгруппа группы* G_2*. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *полигонометрия* $\mathrm{pm}(G_1, \mathcal{P}_1, g_0)$ *вложима в полигонометрию* $\mathrm{pm}(G_2, \mathcal{P}_2, g_0)$*;*

(2) $\mathbf{S}(G_1, \mathcal{P}_1, g_0) = \mathbf{S}(G_2, \mathcal{P}_2, g_0) \restriction G_1$*, и число* $c(\mathcal{P}_1)$ *не превосходит числа* $c(\mathcal{P}'_1)$ *для любой максимальной* G_1*-подполигонометрии* $\mathrm{pm}(G_1, \mathcal{P}'_1, g_0)$ *полигонометрии* $\mathrm{pm}(G_2, \mathcal{P}_2, g_0)$*.*

Теорема 2.3.8. *Пусть* $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G, \mathcal{P}, g_0)$ *— некоторая* (g_0*-бесконтурная) полигонометрия, имеющая не более* $\lambda(\mathrm{pm})$ *компонент связности. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *полигонометрия* pm *вложима в некоторую* (g_0*-бесконтурную) тригонометрию* pm' *группы* $G * F_{\lambda(\mathrm{pm})}$ *на проективной плоскости;*

(2) *полигонометрия* pm *не содержит* h.p.*-многоугольников.*

В параграфе 2.4 определяются понятия полигонометрии и тригонометрии пары групп, объединяющие понятия полигонометрии и тригонометрии группы, а также классические тригонометрии. Приводятся примеры, интерпретирующие полигонометрии пар групп в виде классических тригонометрий. Аналогично полигонометриям групп устанавливаются критерии существования полигонометрии (теоремы 2.4.1 и 2.4.2), изоморфизма полигонометрий (теорема 2.4.3), существования тригонометрии (теорема 2.4.4), вложимости одной полигонометрии в другую (теорема 2.4.6), теорема о расширении полигонометрии с пары подгрупп на пару групп (теорема 2.4.9), критерий вложимости полигонометрии в тригонометрию на проективной плоскости (теорема 2.4.10), теорема о совместной вложимости полигонометрий (теорема 2.4.11), предложение о вложимости любой полигонометрии пары групп в полигонометрию группы (предложение 2.4.12).

В параграфе 2.5 определяются понятия гомоморфизма полигонометрий и фактор-полигонометрии и приводится полигонометрический аналог теоремы о гомоморфизмах (теорема 2.5.1).

В параграфе 2.6 определяются полигонометрические аналоги операций над графами, показывается, что любая связная полигонометрия получается некоторой факторизацией древесной полигонометрии (следствие 2.6.4), а также доказываются критерии вложимости цветного графа в полигонометрии:

Теорема 2.6.6 *Пусть* $\Gamma = \langle M, \langle R_i \mid i \in I \rangle \rangle$ *— цветной граф с попарно различными отношениями и без петель. Следующие условия эквивалентны:*

1) *граф* Γ *вложим в некоторую полигонометрию пары групп;*

2) *граф* Γ *вложим в некоторую тригонометрию группы;*

3) *граф* Γ *вложим в некоторую тригонометрию группы* $G = *_{i \in \lambda} (\mathbb{Z}_2)_i * F_\lambda$*, где* $(\mathbb{Z}_2)_i$ *— копия группы* $\mathbb{Z}_2$*,* F_λ *— свободная* λ*-порожденная группа,* $\lambda = |\Gamma| + \omega$*;*

4) *для любых дуг* $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Q_i$ *не существует цвета* $j \neq i$ *в* Γ*, и если* $(b_1, a_1) \in Q_j$*, то* $(b_2, a_2) \in Q_j$*.*

В параграфе 2.7 приводятся критерии для конечных полигонометрий (предложения 2.7.1 и 2.7.2), примеры серий конечных полигонометрий и описание полигонометрий малого порядка.

В главе 3 изучаются алгебраические системы и элементарные теории, связанные с полигонометриями групп. В параграфе 3.1 определяется аксиоматизируемый класс частичных алгебр, соответствующих полигонометриям (класс полигонометрических алгебр). На языке этих алгебр приводятся критерий существования полигонометрий (теорема 3.1.1), критерий изоморфизма полигонометрий (теорема 3.1.3), доказывается теорема о подобии теории класса полигонометрических алгебр над проективными плоскостями конечно аксиоматизируемой теории (теорема 3.1.10), исследуются вопросы замкнутости класса полигонометрических алгебр относительно операций над частичными алгебрами (предложения 3.1.11 и 3.1.12), а также изучается связь категории гомоморфизмов полигонометрий с категорией гомоморфизмов полигонометрических алгебр (предложение3.1.14).

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— некоторая частичная алгебра, определенная на носителе* $G_1 \cup G_2$*. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{A}$ *является полигонометрической алгеброй над парой групп* (G_1, G_2)*;*

(2) *на некоторой точной* $(|G_1|, |G_2|)$*-псевдоплоскости* $\mathcal{P}$ *существует полигонометрия* $\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *такая, что* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathrm{pm})$*.*

Теорема 3.1.3. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P}) \simeq \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P}')$*;*

(2) $\mathcal{A}(\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})) = \mathcal{A}(\mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P}'))$ *и* $c(\mathcal{P}) = c(\mathcal{P}')$*.*

Теорема 3.1.10. *Теория класса всех тригонометрических алгебр над проективной плоскостью подобна конечно аксиоматизируемой теории класса всех проективно тригонометрических алгебр.*

В параграфе 3.2 изучаются группы автоморфизмов полигонометрий. Приводится описание группы автоморфизмов данной полигонометрии на языке порождающих элементов и определяющих соотношений (теорема 3.2.4), а также описание класса групп автоморфизмов полигонометрий (теорема 3.2.15).

Теорема 3.2.4. *Если* $\mathrm{GN}(\mathbf{S})$ — *полигонометрическое множество, задающее полигонометрию* $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ *с* $c(\mathrm{pm})$ *компонентами связности, то*

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{pm}) \simeq \Big\langle\, G_1, G_2 \parallel R_1, R_2,$$

$$\left\{ a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 \ldots a_n\alpha_n = e \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S} \right\} \Big\rangle \;\bar{\imath}\; \mathrm{S}_{c(\mathrm{pm})}.$$

При этом, если $c(\mathrm{pm}) = 1$*, то группа* G_1 *изоморфна стабилизаторам линий, а* G_2 — *стабилизаторам вершин.*

Теорема 3.2.15. *Группа* G *изоморфна группе автоморфизмов некоторой полигонометрии пары групп* (G_1, G_2) *тогда и только тогда, когда* G *изоморфна некоторой группе* $G_0 \;\bar{\imath}\; \mathrm{S}_\lambda$ *с некоторым кардиналом* λ*, удовлетворяющей следующим условиям:*

(а) $G_1 \leq G_0$, $G_2 \leq G_0$, $G_1 \cap G_2 = \{e\}$;

(б) *группа* G_0 *порождается множеством* $G_1 \cup G_2$;

(в) *если* $a_1\alpha_1 \ldots a_{n-2}\alpha_{n-2}a_{n-1}\alpha_{n-1}a_n\alpha_n = e$ *и* $a_1\alpha_1 \ldots a_{n-2}\alpha_{n-2}a_{n-1}\alpha'_{n-1} a'_n\alpha'_n = e$, $a_i \in G_1 \setminus \{e\}$, $\alpha_i \in G_2 \setminus \{e\}$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 3$, *то* $\alpha_{n-1} = \alpha'_{n-1}$, $a_n = a'_n$, $\alpha_n = \alpha'_n$;

(г) *если* $\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_{n-2}a_{n-2}\alpha_{n-1}a_{n-1}\alpha_n a_n = e$ *и* $\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_{n-2}a_{n-2}\alpha_{n-1}a'_{n-1} \alpha'_n a'_n = e$, $a_i \in G_1 \setminus \{e\}$, $\alpha_i \in G_2 \setminus \{e\}$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 3$, *то* $a_{n-1} = a'_{n-1}$, $\alpha_n = \alpha'_n$, $a_n = a'_n$;

(д) *если* $a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 a_3\alpha_3 = e$, $a_i \in G_1$, $\alpha_i \in G_2$, $1 \leq i \leq 3$, *и* $a_3 = e$, *то* $a_1 = a_2 = e$ *или* $\alpha_1 = e$;

(е) *если* $a_1\alpha_1 a_2\alpha_2 a_3\alpha_3 = e$ $a_i \in G_1$, $\alpha_i \in G_2$, $1 \leq i \leq 3$, *и* $\alpha_1 = e$, *то* $\alpha_2 = \alpha_3 = e$ *или* $a_3 = e$.

В параграфе 3.3 на языке групп автоморфизмов охарактеризован класс полигонометрий групп (теорема 3.3.1), а также условие определимости полигонометрии пары групп в алгебраической системе (предложение 3.1.2).

В параграфе 3.4 определяется понятие полигонометрической теории, приводятся свойства полигонометрических теорий (предложения 3.4.1, 3.4.2, 3.4.4; теоремы 3.4.11 и 3.4.12), параметризация формул и типов в полигонометрических теориях (предложения 3.4.6 — 3.4.9).

В параграфе 3.5 описываются спектральные функции теорий всюду конечно определенных полигонометрий, т.е. полигонометрий, имеющих конечное число различных наборов параметров нетривиальных n-угольников для каждого n.

Теорема 3.5.4. *Пусть T — теория бесконечной всюду конечно определенной полигонометрии* $\mathrm{pm} = \mathrm{pm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$. *Тогда*

1) $I(T, \lambda) = 1$ *для любого* $\lambda \geq \omega$, *если* G_1, G_2 *— конечные группы и* $d(\mathrm{pm}) < \infty$;

2) $I(T, \omega) = \omega$ *и* $I(T, \lambda) = 1$ *для любого* $\lambda > \omega$, *если* G_1, G_2 *— конечные группы и* $d(\mathrm{pm}) = \infty$;

3) $I(T, \omega_\alpha) = (\max(|G_1|, |G_2|, |\alpha|))^\omega$, *если* $\omega \leq \max(|G_1|, |G_2|) \leq \omega_\alpha$.

В параграфе 3.6 доказывается обобщение теоремы 3.5.4 для теорий, любая модель которых представляется в виде ациклического гиперграфа минимальных простых моделей и обладающих свойством расширения изоморфизмов семейств минимальных простых моделей. Класс таких теорий обозначается через $\mathcal{T}_H^a$.

Теорема 3.6.2. *Любая теория T из класса $\mathcal{T}_H^a$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) $1 \leq d(T) \leq 2$, $I(T, |T|) = |\alpha + \omega|$, *где* $|T| = \omega_\alpha$, *и* $I(T, \lambda) = 1$, *если* $\lambda > |T|$;

2) $d(T) = \infty$, T *— тотально трансцендентная теория бесконечного ранга Морли и* $I(T, \omega_\alpha) = (\max(\lambda_0, |\alpha|))^\omega$, *где* λ_0 *— число точек сочленения минимальной простой модели, лежащей в* $|T|^+$*-насыщенной модели теории* T, $\omega_\alpha \geq |T|$.

В параграфе 3.7 с помощью модификации конструкции Хрушовского доказывается существование ω-стабильной тригонометрии группы $G * F_\omega$ на проективной плоскости для любой счетной группы G.

Теорема 3.7.35. *Для любой счетной группы G и свободной счетно порожденной группы F_ω существует ω-стабильная тригонометрия группы $G * F_\omega$ на проективной плоскости.*

В параграфе 3.8 определяется понятие тригонометрии пары групп с функциями sin и cos (SC-тригонометрии) и устанавливаются теоремы о подобии теории класса всех тригонометрических алгебр, соответствующих правильным SC-тригонометриям конечно аксиоматизируемой теории (теорема 3.8.1), а также о вложимости любой тригонометрии пары (кольцо с единицей, группа) в некоторую SC-тригонометрию (теорема 3.8.2).

В параграфе 3.9 определяется понятие полигонометрии пары групп с условием симметричности расстояний на линиях и переносятся теоремы о полигонометриях на симметричный случай.

В параграфе 3.10 определяются понятия обобщенных и нечетких полигонометрии, позволяющие рассматривать произвольное замкнутое множество матриц сторон и углов (SA-матриц) в виде множества наборов параметров многоугольников некоторой обобщенно полигонометрической системы, а также устанавливать вероятностные значения параметров многоугольников по системам определяющих параметров. В этом параграфе приводятся следующая теорема о существовании обобщенной полигонометрии, соответствующей заданному замкнутому множеству SA-матриц (теорема 3.10.1), теорема о включении обобщенных полигонометрий во властные орграфы (теорема 3.10.3), а также вероятностный аналог теоремы 3.10.1 (теорема 3.10.5).

Теорема 3.10.1. *Для любого замкнутого множества* SA-*матриц* $\mathbf{S}$ *над парой групп* (G_1, G_2) *существует обобщенная полигонометрия* $\mathrm{gpm} = \mathrm{gpm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$, *для которой* $\mathbf{S}(\mathrm{gpm}) = \mathbf{S}$.

В параграфе 3.11 определяется понятие цветной полигонометрии и доказывается критерий несущественности раскраски произвольной полигонометрии, вложимой в тригонометрию (теорема 3.11.1). Кроме того, устанавливается, что несущественность раскраски порождает так называемую группу цветопостоянства, сохраняющую цвета элементов при действиях этой группы на линиях.

В параграфе 3.12 определяются размещения алгебраических систем на свободных псевдоплоскостях, имеющие транзитивные группы автоморфизмов и описываются функции спектра для соответствующих теорий T^*, порожденных теориями T_i, $i \in \omega$:

Теорема 3.12.7. *Функция спектра теории* T^* *имеет следующий вид*:

$I(T^*, \omega_0) = \omega_0$, *если* T_i, $i \in \omega$ *— счетно категоричные теории, не индуцирующие новых счетных систем, и* $I(T^*, \omega_0) = 2^{\omega_0}$ *в противном случае*;

$I(T^*, \omega_\alpha) = (\lambda_\alpha)^\omega$ *при* $\alpha \geq 1$, *где* λ_α *— кардинал, равный максимуму из* $|\alpha + \omega|$, *числа моделей теорий* T_i *мощности* $\leq \alpha$ *и числа новых систем теорий* T_i *мощности* $\leq \alpha$.

Автор выражает глубокую благодарность своему Учителю Евгению Андреевичу Палютину за внимание, проявленное к работе, конструктивную критику и постоянную поддержку.

Список литературы

[1] *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. — Новосибирск: Научная книга, 1999.

[2] *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — СПб.: Лань, 2004.

[3] *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[4] *Сакс Дж.* Теория насыщенных моделей. — М.: Мир, 1976.

[5] *Справочная* книга по математической логике. Ч. 1, Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса. — М.: Наука, 1982.

[6] *Судоплатов С. В.* Базируемость стабильных теорий и свойства счетных моделей с мощными типами: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. — Новосибирск, 1990. — 142 с.

[7] *Baldwin J.T.* Fundamentals of Stability Theory. — Springer-Verlag, 1988.

[8] *Pillay A.* An introduction to stability theory. — Oxford University Press, 1983.

[9] *Poizat B.P.* Cours de théorie des modèles. — Villeurbane: Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1985.

[10] *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models. — Amsterdam: North-Holland, 1990.

[11] *Wagner F.O.* Simple Theories. — Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[12] *Байсалов Е.Р.* Число счетных o-минимальных моделей // Исследования в теории алгебраических систем. Межвузовский сборник научных трудов. Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. С. 25–30.

[13] *Гончаров С. С., Пурмахдиан М.* Итерированные обогащения моделей счетных теорий и их приложения // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, №6. С. 623–645.

[14] *Мустафин Т. Г.* О числе счетных моделей счетной полной теории // Алгебра и логика. 1981. Т. 20, №1. С. 69–91.

[15] *Омаров Б.* Несущественные расширения полных теорий // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, №5. С. 542–550.

[16] *Перетятькин М. Г.* О полных теориях с конечным числом счетных моделей // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, №5. С. 550–576.

[17] *Перетятькин М. Г.* Теории с тремя счетными моделями // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, №2. С. 224–235.

[18] *Baldwin J. T., Lachlan A. H.* On strongly minimal sets // J. Symbolic Logic. 1971. V. 36, No. 1. P. 79–96.

[19] *Benda M.* Remarks on countable models // Fund. math. 1974. V. 81, No. 2. P. 107–119.

[20] *Buechler S.* Classification of small weakly minimal sets, I / J.T. Baldwin (ed.), Classification Theory, Proceedings, Chicago, 1985. — Springer, 1987. — P. 32—71.

[21] *Hart B., Hrushovski E., Laskowski M.S.* The uncountable spectra of countable theories // Ann Math. 2000. V. 152, No. 1. P. 207–257.

[22] *Herwig B.* Weight ω in stable theories with few types // J. Symbolic Logic. 1995. V. 60, No. 2. P. 353–373.

[23] *Herwig B., Loveys J., Pillay A., Tanović P., Wagner F.* Stable theories with no dense forking chains // Arch. Math. Logic. 1992. V. 31. P. 297–304.

[24] *Hrushovski E.* Finitely based theories // J. Symbolic Logic. 1989, V. 54, No. 1. P. 221–225.

[25] *Hrushovski E.* A new strongly minimal set // Ann. Pure and Appl. Logic. 1993. V. 62. P. 147–166.

[26] *Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A.* On theories having three countable models // Math. Logic Quaterly. 1998. V. 44. P. 161–166.

[27] *Kim B.* On the number of countable models of a countable supersimple theory // J. London math. Soc. 1999. V. 60, No. 2. P. 641–645.

[28] *Lachlan A. H.* On the number of countable models of a countable superstable theory // Proc. Int. Cong. Logic, Methodology and Philosophy of Science. Amsterdam: North-Holland, 1973. P. 45–56.

[29] *Lachlan A. H.* Two conjectures regarding the stability of ω-categorical theories // Fund. Math. 1974. V. 81. P. 133–145.

[30] *Lascar D.* Ranks and definability in superstable theories // Israel J. Math. 1976. V. 23, No. 1. P. 53–87.

[31] *Millar T.* Finite extensions and the number of countable models // J. Symbolic Logic. 1989. V. 54, No. 2. P. 264–270.

[32] *Newelski L.* Vaught's conjecture for some meager groups // Israel J. Math. 1999. V.112. P. 271–300.

[33] *Pillay A.* Number of countable models // Journal of Symbolic Logic. 1978. V. 43. P. 492–496.

[34] *Pillay A.* Instability and theories with few models // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. P. 461–468.

[35] *Pillay A.* Dimension theory and homogeneity for elementary extensions of a model // J. Symbolic Logic. 1982. V. 47. P. 147–160.

[36] *Pillay A.* Countable models of stable theories // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89, No. 4. P. 666–672.

[37] *Pillay A.* Stable theories, pseudoplanes and the number of countable models // Ann. Pure and Appl. Log. 1989. V. 43, No. 2. P. 147–160.

[38] *Rudin M.E.* Partial orders on the types of βN // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 155. P. 353—362.

[39] *Ryll-Nardzewski C.* On the categoricity in power $\leqslant \aleph_0$ // Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Math., Astron., Phys. 1959. V. 7. P. 545-548.

[40] *Saffe U.* An introduction to regular types. — Preprint, 1981.

[41] *Shelah S.* End extensions and numbers of countable models // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43. P. 550–562.

[42] *Shelah S., Harrington L., Makkai M.* A proof of Vaught's conjecture for ω-stable theories // Israel J. Math. 1984. V. 49. P. 259–280.

[43] *Tanović P.* On the number of countable models of stable theories // Fund. Math. 2001. V. 169. P. 139–144.

[44] *Tanović P.* A note on countable models of 1-based theories // Archive for Math. Logic. 2002. V. 41, No. 7. P. 669–671.

[45] *Tanović P.* On constants and the strict order property // Archive for Math. Logic, 2006.

[46] *Thomas S.* Theories with finitely many models // J. Symbol. Log. 1986, V. 51. P. 374–376.

[47] *Tsuboi A.* On theories having a finite number of nonisomorphic countable models // J. Symbol. Log. 1985, V. 50, No. 3. P. 806–808.

[48] *Tsuboi A.* Countable models and unions of theories // J. Math. Soc. Japan. 1986. V. 38, No. 3. P. 501–508.

[49] *Vaught R.* Denumerable models of complete theories // Infinistic Methods. — London: Pergamon, 1961. P. 303–321.

[50] *Woodrow R. E.* A note on countable complete theories having three isomorphism types of countable models // J. Symbolic Logic. 1976. V. 41. P. 672–680.

[51] *Woodrow R. E.* Theories with a finite number of countable models // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43, No. 3. P.442–455.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[52] *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник. — М.: ИНФРА-М, Новосибирск: НГТУ, 2004.

[53] *Судоплатов С. В.* О мощных типах в малых теориях // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31, №4. С. 118–128.

[54] *Судоплатов С. В.* Тригонометрии групп и систем // Структурные свойства алгебраических систем. Тематический сборник научных трудов. — Караганда: изд-во КарГУ, 1990. — С. 12–33.

[55] *Судоплатов С. В.* Тригонометрии на точной псевдоплоскости // Труды Советско-Французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда: изд-во КарГУ, 1990. — С. 185–201.

[56] *Судоплатов С. В.* Типовая редуцированность и мощные типы // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33, №1. С. 150–159.

[57] *Судоплатов С. В.* Об отношении вложимости в классе тригонометрий групп // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, №4. С. 429–447.

[58] *Судоплатов С. В.* О тригонометриях групп на проективной плоскости // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36, №2. С. 419–431.

[59] *Судоплатов С. В.* О тригонометриях, не вложимых в тригонометрии с малыми теориями // Исследования в теории алгебраических систем. Межвузовский сборник научных трудов. — Караганда: изд-во КарГУ, 1995. — С. 103-110.

[60] *Судоплатов С. В.* О тригонометриях конечных групп и групп с подгруппами, имеющими тригонометрии // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, №2. С. 419–423.

[61] *Судоплатов С. В.* Об одной оценке сложности теорий графов // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, №3. С. 700–703.

[62] *Судоплатов С. В.* Полигонометрии пар групп // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38, №4. С. 925–931.

[63] *Судоплатов С. В.* Частичные алгебры, ассоциированные с полигонометриями пар групп // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, №4. С. 454–476.

[64] *Судоплатов С. В.* Тригонометрии с функциями Sin и Cos // Алгебра и теория моделей. Сборник трудов / Под. ред. А. Г. Пинуса и К. Н. Пономарева. — Новосибирск, изд-во НГТУ. 1997. — С. 169–172.

[65] *Судоплатов С. В.* Число моделей теорий всюду конечно определенных полигонометрий // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40, №3. С. 689–694.

[66] *Судоплатов С. В.* Транзитивные размещения алгебраических систем // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40, №6. С. 1347–1351.

[67] *Судоплатов С. В.* О классификации полигонометрий групп // Мат. труды. 2001. Т. 4, №1. С. 174–202.

[68] *Судоплатов С. В.* Об ациклических гиперграфах минимальных простых моделей // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42, №6. С. 1408–1412.

[69] *Судоплатов С. В.* ω-Стабильные тригонометрии на проективной плоскости // Мат. труды. 2002. Т. 5, №1. С. 135–166.

[70] *Судоплатов С. В.* Несущественные совмещения и раскраски моделей // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, №5. С. 1132–1141.

[71] *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. I // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, №1. С. 110–124.

[72] *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. II // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, №3. С. 314–353.

[73] *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries and related algebraic systems // Contributions to General Algebra 11 / Proc. of the Olomouc Workshop '98 on General Algebra. — Klagenfurt: Verlag Johannes Heyn, 1999. — P. 191–210.

[74] *Sudoplatov S. V.* Group polygonometries with symmetrical conditions // Алгебра и теория моделей 2. Сборник трудов. / Под. ред. А.Г.Пинуса и К.Н.Пономарева. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 1999. — С. 140–159.

[75] *Sudoplatov S. V.* On classification of group polygonometries // Siberian Advances in Math. 2001. V. 11, No. 3. P. 98–125.

[76] *Sudoplatov S. V.* Closed sets of side-angle matrices and correspondent geometrical structures // Алгебра и теория моделей, 3. Сборник трудов / Под. ред. А.Г.Пинуса и К.Н.Пономарева. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 2001. — С. 131–135.

[77] *Sudoplatov S. V.* ω-Stable trigonometries on a projective plane // Siberian Advances in Math. 2002. V. 12, No. 4. P. 97–124.

[78] *Sudoplatov S. V.* Fuzzy polygonometries // Алгебра и теория моделей, 4. Сборник трудов / Под. ред. А.Г.Пинуса и К.Н.Пономарева. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 2003. — С. 124–128.

[79] *Судоплатов С. В.* Мощные типы и свойство редуцированности // 9-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Тез. докл. — Л.: Наука, 1988. — С. 159.

[80] *Судоплатов С. В.* Аппроксимация свойства проективности с бесконтурной ориентацией в стабильных теориях // Советско-Французский коллоквиум по теории моделей. Тез. докл. — Караганда: изд-во КарГУ, 1990. — С. 46–47.

[81] *Судоплатов С. В.* О тригонометриях групп // XI Межреспубл. конф. по мат. логике. Тез. сообщений. — Казань: изд-во КГУ, 1992. — С. 136.

[82] *Судоплатов С. В.* Транзитивное размещение структуры в структуре свободной ориентированной псевдоплоскости // Третья Междунар. конф. по алгебре. Тез. докл. — Красноярск: изд-во КрГУ, 1993. — С. 321–322.

[83] *Судоплатов С. В.* Отношение вложимости в классе тригонометрий групп // Третья Междунар. конф. по алгебре. Тез. докл. — Красноярск: изд-во КрГУ, 1993. — С. 322–323.

[84] *Sudoplatov S. V.* On trigonometries of pairs of groups // Третья Суслинская конф. Научные математические чтения. — Саратов: изд-во СГПИ, 1994. — С. 58–59.

[85] *Sudoplatov S. V.* Homomorphisms in the class of trigonometries of pairs of groups // Третья Суслинская конф. Научные матем. чтения. — Саратов: изд-во СГПИ, 1994. — С. 60–61.

[86] *Sudoplatov S. V.* On classification of polygonometries of groups // Abstracts. KORUS '97. The first Korea-Russia International Symposium on Science and Technology. September 29 - October 3, 1997. — University of Ulsan, Republic of Korea. — P. 133.

[87] *Sudoplatov S. V.* Automorphism groups of polygonometries // Kurosh Algebraic Conference '98, Abstracts of Talks. — M.: изд-во МГУ, 1998. — С. 119–120.

[88] *Sudoplatov S. V.* On type identifications in trigonometrical theories // Материалы междунар. конф. по мат. логике, посвящ. 90-летию со дня рождения А.И. Мальцева. Тез. докл. — Новосибирск, изд-во ИДМИ. 1999. — С. 111–112.

[89] *Sudoplatov S. V.* On hypergraphs of minimal prime models // Материалы междунар. конф. по мат. логике, посвящ. 90-летию со дня рждения А.И. Мальцева. Тез. докл. — Новосибирск, изд-во ИДМИ. 1999. — С. 112–113.

[90] *Судоплатов С. В.* О полигонометриях с условием симметрии // Международный семинар "Универсальная алгебра и ее приложения"памяти Л. А. Скорнякова. — Волгоград: Перемена, 1999. — С. 61–62.

[91] *Судоплатов С. В.* О погружении тригонометрий групп в неглавные типы // Логика и приложения. Тезисы междунар. конф., посвящ. 60-летию со дня рождения акад. Ю.Л.Ершова. — Новосибирск: изд-во НИИДМИ, 2000. — С. 97.

[92] *Sudoplatov S. V.* On generic group trigonometries // Международный алгебраический семинар, посвященный 70-летию нгаучно-исследовательского семинара МГУ по алгебре, основанного О.Ю.Шмидтом в 1930 г. (13-16 ноября 2000 г.).Тез. докл. — М.: изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2000. — С. 94–95.

[93] *Судоплатов С. В.* Об обобщенных полигонометриях групп // Междунар. семинар по теории групп, посвящ. 70-летию А.И.Старостина и 80-летию Н.Ф.Сесекина. — Екатеринбург: изд-во УрГУ, 2001. — С. 209–212.

[94] *Sudoplatov S. V.* On syntactical generic constructions // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тез. докладов 6-й Международной конференции, посвященной 100-летию Н.Г.Чудакова. — Саратов: Изд-во Саратовского гос. университета, 2004. — С. 142–144.

[95] *Sudoplatov S. V.* On structures of powerful types // Алгебра, логика и кибернетика: Материалы Междунар. конф. — Иркутск: Изд-во ИГПУ, 2004. — С. 198–199.

[96] *Sudoplatov S. V.* On syntactical approach to generic constructions // Model theory and Algebra. France-Kazakhstan Conference. 18-22 July, 2005. Abstracts. — Astana: Edition of ENU, 2005. — P. 62–63.

[97] *Sudoplatov S. V.* On saturated generic models // Abstracts. The 9th Asian Logic Conference. August 16-19, 2005. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2005. — С. 132-133.

[98] *Sudoplatov S. V.* On syntactical generic constructions and embedding relation in the class of homogeneous models // Междунар. алгебраическая конф. к 100-летию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина. Екатеринбург, Россия, 29 августа – 3 сентября 2005 г. Тез. докл. — Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2005. — С. 162-165.