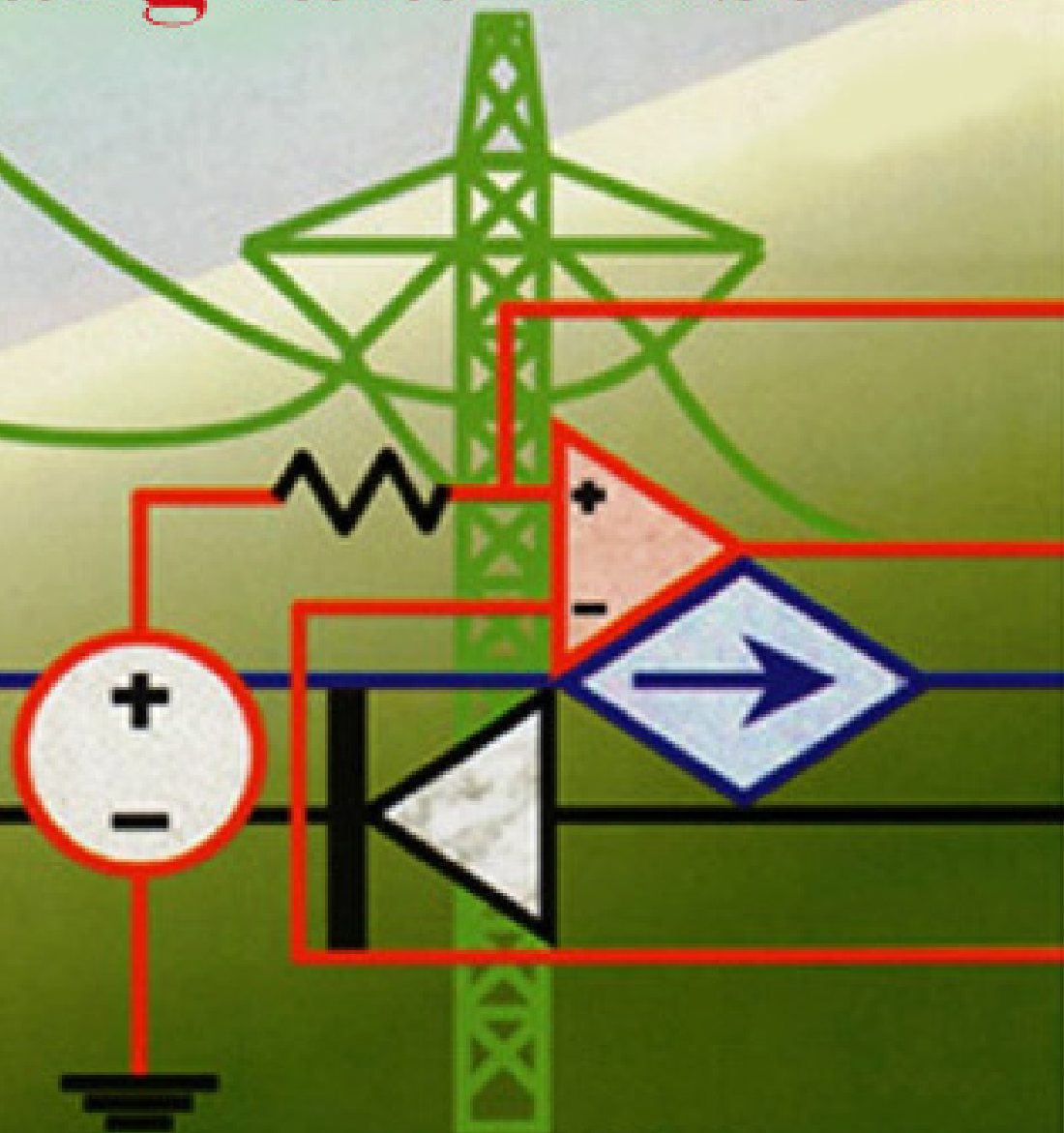


Sudaryatno Sudirham

**Analisis
Rangkaian Listrik**



Penerbit ITB

Dari Penulis:
Buku ini diterbitkan oleh Penerbit ITB
Tahun 2002 ISBN 979-9299-54-3

Versi terbaru tahun 2010 berjudul
“Analisis Rangkaian Listrik”
dalam 3 jilid
bisa diunduh bebas di
<http://www.buku-e.lipi.go.id>

Analisis Rangkaian Listrik

**Oleh
Sudaryatno Sudirham**

Isi

Isi	v
Pengantar	vii
Daftar Notasi	ix
Bab 1. Model Sinyal dan Model Piranti	1
1.1. Model Sinyal	2
1.2. Model Piranti	20
1.3. Spektrum Sinyal	41
Bab 2. Dasar-Dasar Analisis Rangkaian.	45
2.1. Hukum-Hukum Dasar	46
2.2. Kaidah-Kaidah Rangkaian	53
2.3. Teorema Rangkaian	63
2.4. Metoda Analisis Dasar	74
2.5. Metoda Analisis Umum	82
Bab 3. Contoh Aplikasi: Rangkaian Pemroses Energi dan Pemroses Sinyal	95
3.1. Rangkaian-Rangkaian Arus Searah	96
3.2. Rangkaian Dengan Dioda	106
3.3. Rangkaian Dengan OP AMP	113
Bab 4. Analisis Transien Sistem Orde Pertama Dan Orde Kedua	127
4.1. Sistem Orde Pertama	128
4.2. Sistem Orde Dua	144
4.3. Penentuan Persamaan Rangkaian dan Kondisi Awal Dengan Menggunakan Operator Diferensial D	154
Bab 5. Analisis Rangkaian di Kawasan Fasor	159
5.1. Fasor, Impedansi, dan Analisis Rangkaian Sistem Satu Fasa	160
5.2. Analisis Daya Pada Sistem Satu Fasa	179
5.3. Rangkaian Resonansi	197
5.4. Sistem Tiga Fasa	199
Bab 6. Rangkaian Magnetik	209
6.1. Hukum- Hukum Dasar	209
6.2. Perhitungan Pada Rangkaian Magnetik	211
6.3. Rugi-Rugi Dalam Rangkaian Magnetik	215
6.4. Gaya Magnetik	217
6.5. Induktor	219
Bab 7. Pengenalan Pada Mesin-Mesin Listrik	225
7.1. Transformator Satu Fasa	225
7.2. Transformator Pada Sistem Tiga Fasa	235
7.3. Generator Sinkron	238
7.4. Motor Asinkron	249
Bab 8. Analisis Rangkaian di Kawasan s .	261
8.1. Pernyataan Sinyal di Kawasan s Melalui Transformasi Laplace.	262
8.2. Analisis Rangkaian di Kawasan s .	276
8.3. Fungsi Jaringan.	287

Bab 9. Tanggapan Frekuensi	297
9.1. Tanggapan Terhadap Sinyal Sinus Keadaan Mantap	297
9.2. Bode Plots. Pendekatan Garis Lurus Kurva <i>Gain</i> dan Kurva Fasa	303
Bab 10. Analisis Rangkaian Menggunakan Transformasi Fourier.	321
10.1. Deret Fourier.	324
10.2. Transformasi Fourier dan Sifat-Sifatnya.	327
10.3. Analisis rangkaian menggunakan Transformasi Fourier.	336
Bab 11. Pengenalan Pada Sistem.	343
11.1. Pengertian Sinyal dan Sistem.	343
11.2. Diagram Blok.	345
11.3. Persamaan Ruang Status.	355
Lampiran A. Peubah Kompleks.	359
B. Resistor.	363
C. Kapasitor.	365
D. Matriks dan Sistem Persamaan Linier.	371
Daftar Pustaka	390

Pengantar

Assalamu'alaikum w.w.

Buku ini merupakan pengembangan dari “*Catatan Kuliah: Analisis Rangkaian Listrik dan Rangkaian Magnetik*” yang diterbitkan oleh Penerbit ITB pada 1999, yang penulis susun dalam rangka pemberian kuliah di ITB. Materi bahasan ditujukan untuk membangun kemampuan analisis pada rangkaian listrik dengan menggunakan suatu pendekatan yang penulis harapkan dapat seawal mungkin memperkenalkan para mahasiswa pada pemecahan berbagai persoalan yang biasa dijumpai dalam teknik elektro. Urutan sajian materi adalah sebagai berikut.

Bab-1, berisi uraian mengenai dua hal pokok yang ditangani dalam analisis rangkaian listrik yaitu *sinyal listrik* dan *piranti listrik*. Dari bab ini diharapkan mahasiswa memahami dua hal. Yang pertama adalah mengenai berbagai bentuk gelombang sinyal, model matematisnya serta pernyataan-pernyataannya, baik yang berkenaan dengan amplitudo (nilai-nilai maksimum, rata-rata, efektif) maupun yang berkenaan dengan waktu (periode, frekuensi). Yang kedua adalah mengenai berbagai macam piranti listrik yang dimodelkan sebagai elemen rangkaian dengan karakteristik arus-tegangannya. Berbekal pemahaman mengenai dua hal tersebut para mahasiswa diajak masuk ke pemahaman mengenai dasar-dasar analisis rangkaian yang disajikan di Bab-2, yang meliputi hukum-hukum dasar, kaidah-kaidah rangkaian, teorema rangkaian, serta metoda-metoda analisis rangkaian. Dengan selesainya Bab-2, diharapkan mahasiswa telah mempunyai pengetahuan yang cukup untuk mampu melakukan analisis rangkaian-rangkaian sederhana. Kemampuan untuk melakukan analisis ini diberi arahan dalam bentuk contoh aplikasi di Bab-3 yang mencakup contoh-contoh rangkaian arus searah, sumber dan distribusi daya listrik arus searah, rangkaian dengan dioda, dan rangkaian dengan OP AMP. Setelah analisis rangkaian dalam keadaan mantap di Bab-3, mahasiswa diperkenalkan pada analisis rangkaian dalam keadaan peralihan di Bab-4 yang meliputi pembahasan rangkaian orde pertama dan orde kedua. Bab-4 ini merupakan akhir dari pembahasan analisis rangkaian listrik di kawasan waktu. Selanjutnya Bab-5 berisi bahasan mengenai analisis rangkaian di kawasan fasor atau dikenal dengan analisis rangkaian arus bolak-balik keadaan mantap. Diawali dengan pemahaman mengenai pernyataan sinyal sinus dalam fasor serta pengertian impedansi, dilakukanlah analisis rangkaian arus bolak-balik dan analisis daya untuk sistem satu fasa serta analisis pada sistem tiga fasa keadaan seimbang. Dalam bab ini dibahas pula rangkaian resonansi. Dengan selesainya Bab-5 ini diharapkan mahasiswa telah memiliki pengetahuan dan kemampuan untuk melakukan analisis rangkaian arus searah, rangkaian arus bolak-balik keadaan mantap, serta rangkaian-rangkaian dalam keadaan peralihan.

Pada tahap berikutnya mahasiswa diperkenalkan pada aplikasi pengetahuan dan kemampuannya untuk melakukan analisis pada piranti yang tidak hanya mengandung rangkaian listrik tetapi juga rangkaian magnetik, yaitu mesin-mesin listrik. Untuk itu terlebih dahulu diberikan suatu uraian mengenai rangkaian magnetik di Bab-6 yang merupakan langkah awal dalam mengenal mesin-mesin listrik yang diberikan di Bab-7. Di sini hanya diperkenalkan tiga macam mesin listrik yang sering ditemui dalam praktek yaitu transformator, generator sinkron, dan motor asinkron.

Tiga bab berikutnya berisi bahasan mengenai analisis rangkaian di kawasan frekuensi. Bab-8 membahas analisis rangkaian di kawasan s (analisis rangkaian menggunakan transformasi Laplace). Pokok bahasannya meliputi pernyataan sinyal di kawasan s , konsep impedansi, analisis rangkaian serta fungsi alih. Analisis rangkaian di kawasan s ini dilanjutkan dengan pembahasan mengenai tanggapan frekuensi di Bab-9, yang mencakup pembahasan mengenai pernyataan tanggapan frekuensi serta Bode plots. Bab-10 berisi analisis rangkaian dengan menggunakan transformasi Fourier yang akan memperluas pemahaman mengenai tanggapan frekuensi, baik mengenai perilaku sinyal itu sendiri maupun rangkaiannya. Bahasan di bab ini meliputi deret Fourier, transformasi Fourier, sifat-sifat transformasi Fourier, dan analisis rangkaian menggunakan transformasi Fourier.

Bab-11 merupakan bab terakhir dalam buku ini dan berisi pengenalan tentang sistem. Di sini diberikan pengertian yang lebih luas mengenai sinyal serta konsep sistem, model sistem dengan transformasi Laplace, serta persamaan ruang status.

Analisis rangkaian listrik merupakan materi ajaran di tingkat dasar bagi mahasiswa elektro. Mahasiswa mulai mempelajarinya di semester pertama tahun kedua, akan tetapi tidak tertutup kemungkinan untuk mulai mempelajarinya pada semester kedua tahun pertama. Untuk membantu mahasiswa, pada bagian akhir buku ini diberikan dua lampiran yang memuat perangkat matematika yaitu Lampiran-A berisi ulasan-ulang mengenai peubah kompleks dan Lampiran-D berisi ulasan-ulang mengenai matriks dan sistem persamaan linier. Selain daripada itu, mengingat bahwa analisis rangkaian dilakukan dengan menggunakan model ideal dari piranti-piranti listrik, maka untuk memberikan gambaran tentang piranti nyata diberikan pula dua lampiran yaitu Lampiran-B berisi uraian singkat mengenai resistor dan Lampiran-C yang berisi uraian singkat mengenai kapasitor.

Akhir kata, penulis menyampaikan penghargaan dan terimakasih kepada Penerbit ITB atas penerbitan buku ini dan kepada rekan-rekan serta berbagai pihak yang telah memberikan kemudahan dan saran dalam penyiapannya.

Bandung, April 2002.

Penulis

Daftar Notasi

Tegangan :

v atau $v(t)$: tegangan sebagai fungsi waktu.
V	: tegangan dengan nilai tertentu, tegangan searah.
V_{rr}	: tegangan, nilai rata-rata.
V_{rms}	: tegangan, nilai efektif.
V_{maks}	: tegangan, nilai maksimum, nilai puncak.
\mathbf{V}	: fasor tegangan dalam analisis di kawasan fasor.
$ \mathbf{V} $: nilai mutlak fasor tegangan.
$V(s)$: tegangan fungsi s dalam analisis di kawasan s .

Arus :

i atau $i(t)$: arus sebagai fungsi waktu.
I	: arus dengan nilai tertentu, arus searah.
I_{rr}	: arus, nilai rata-rata.
I_{rms}	: arus, nilai efektif.
I_{maks}	: arus, nilai maksimum, nilai puncak.
\mathbf{I}	: fasor arus dalam analisis di kawasan fasor.
$ \mathbf{I} $: nilai mutlak fasor arus.
$I(s)$: arus fungsi s dalam analisis di kawasan s .

Daya :

p atau $p(t)$: daya sebagai fungsi waktu.
p_{rr}	: daya, nilai rata-rata.
S	: daya kompleks.
$ S $: daya kompleks, nilai mutlak.
P	: daya nyata.
Q	: daya reaktif.

Muatan dan Energi :

q atau $q(t)$: muatan, fungsi waktu.
w	: energi.

Elemen Rangkaian, Impedansi, Admitansi :

R	: resistor; resistansi.
L	: induktor; induktansi.
C	: kapasitor; kapasitansi.
Z	: impedansi.
Y	: admitansi.

Fungsi Jaringan:

$T_V(s)$: fungsi alih tegangan.
$T_I(s)$: fungsi alih arus.
$T_Y(s)$: admitansi alih.
$T_Z(s)$: impedansi alih.

Faktor Proporsionalitas Sumber Tak-Bebas :

μ	: <i>gain</i> tegangan.
β	: <i>gain</i> arus.
r	: resistansi alih, <i>transresistance</i> .
g	: konduktansi; konduktansi alih, <i>transconductance</i> .

BAB 1

Model Sinyal dan Model Piranti

Rangkaian listrik (atau rangkaian elektrik) merupakan interkoneksi berbagai *piranti* (*divais – device*) yang secara bersama melaksanakan suatu tugas tertentu. Tugas itu dapat berupa *pemrosesan energi* ataupun *pemrosesan sinyal*. *Energi* dan *informasi* adalah dua di antara banyak kebutuhan pokok manusia. Manusia membutuhkan energi dalam berbagai bentuk misalnya energi mekanis, panas, cahaya. Sementara itu, energi yang tersedia di alam tidak selalu dalam bentuk yang dibutuhkan akan tetapi terkandung dalam berbagai bentuk sumber tenaga misalnya air terjun, batubara, angin, sinar matahari. Selain itu sumber energi tersebut tidak selalu berada di tempat di mana ia diperlukan. Oleh karena itu energi primer yang merupakan energi non listrik dikonversikan menjadi energi listrik dan dalam bentuk inilah energi dapat disalurkan dengan lebih mudah ke tempat ia diperlukan. Di tempat tujuan energi listrik dikonversikan kembali ke dalam bentuk yang sesuai dengan kebutuhan. Demikian pula halnya dengan informasi. Berbagai bentuk informasi dikonversikan ke dalam bentuk sinyal-sinyal listrik dan kemudian disalurkan ke tempat ia diperlukan dan dikonversikan kembali dalam bentuk-bentuk yang dapat ditangkap oleh indera manusia seperti suara dan gambar, ataupun dimanfaatkan untuk suatu keperluan tertentu seperti pengendalian peralatan.

Sistem pemroses energi maupun informasi, dibangun dari rangkaian-rangkaian listrik. Untuk mempelajari perilaku suatu rangkaian listrik kita melakukan *analisis rangkaian*. Untuk itu rangkaian listrik yang ingin kita pelajari kita pindahkan ke atas kertas dalam bentuk gambar, yang kita sebut sebagai *diagram rangkaian*. Diagram rangkaian memperlihatkan interkoneksi berbagai piranti yang digambarkan dengan menggunakan *simbol*. Perilaku setiap piranti kita nyatakan dengan *model piranti*. Untuk membedakan *piranti sebagai benda nyata* dengan *modelnya*, maka model itu kita sebut *elemen*. Sinyal listrik yang hadir dalam rangkaian, kita nyatakan sebagai *peubah rangkaian* yang tidak lain adalah *model matematis* dari sinyal-sinyal tersebut. Jadi dalam pekerjaan analisis rangkaian, kita menghadapi diagram rangkaian (selanjutnya disebut dengan singkat *rangkaiannya*) yang menggambarkan hubungan dari berbagai elemen dengan peubah rangkaian yang merupakan model sinyal.

Sebagai langkah pertama dalam mempelajari analisis rangkaian listrik, di bab ini kita akan membahas mengenai *model sinyal* yang kemudian akan dilanjutkan dengan *model piranti*. Karena pekerjaan analisis menggunakan model-model sedangkan model merupakan pendekatan terhadap keadaan yang sebenarnya dengan pembatasan-pembatasan tertentu, maka hasil suatu analisis harus juga difahami sebagai hasil yang berlaku dalam batas-batas tertentu pula.

1.1. Model Sinyal

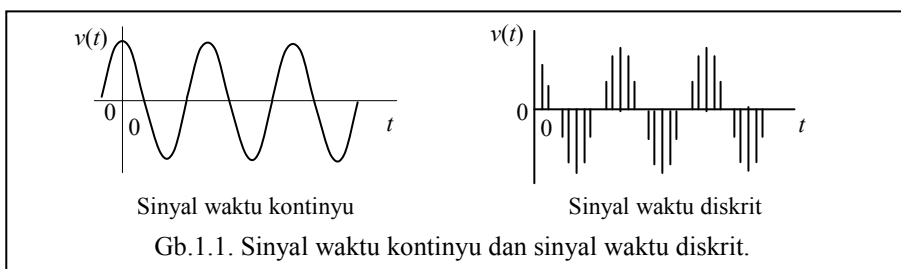
Tujuan :

- menyadari bahwa pembahasan analisis rangkaian yang akan dipelajari berkenaan dengan sinyal waktu kontinu;
- memahami besaran-besaran listrik yang menjadi peubah sinyal dalam analisis rangkaian;
- memahami bahwa pengolahan peubah sinyal harus memperhatikan referensi sinyal;
- memahami berbagai bentuk gelombang sinyal dan pernyataan-pernyataannya;
- mampu menyatakan bentuk gelombang sinyal secara grafis maupun matematis;
- mampu mencari nilai rata-rata dan nilai efektif suatu bentuk gelombang sinyal;

Sinyal

Dalam kelistrikan, ada dua besaran fisika yang menjadi **besaran dasar** yaitu **muatan listrik** (selanjutnya disebut dengan singkat *muatan*, dengan simbol q) dan **energi listrik** (selanjutnya disebut dengan singkat *energi*, dengan simbol w). Muatan dan energi, seperti halnya massa, panjang, dan waktu, merupakan konsep dasar fisika yang menjadi fondasi ilmiah dalam teknologi elektro. Tetapi dalam menangani masalah teknologi praktis kita jarang melibatkan secara langsung kedua besaran ini. Besaran yang lebih sering kita olah adalah **arus**, **tegangan**, dan **daya**. Dalam analisis rangkaian listrik, tiga besaran ini menjadi peubah rangkaian yang kita sebut sebagai **peubah sinyal**. Muatan dan energi biasanya dinyatakan dalam tiga peubah sinyal ini. Alasan untuk berbuat demikian ini cukup sederhana, yaitu bahwa arus dan tegangan adalah besaran-besaran yang mudah diukur dan dengan demikian menjadi peubah yang sesuai dengan praktek teknologi.

Sinyal listrik pada umumnya merupakan fungsi waktu, t . Dalam teknologi elektro yang telah berkembang demikian lanjut kita mengenal dua macam bentuk sinyal listrik yaitu *sinyal waktu kontinu* dan *sinyal waktu diskrit*. Suatu sinyal disebut sebagai sinyal waktu kontinu (atau disebut juga *sinyal analog*) jika sinyal itu mempunyai nilai untuk setiap t dan t sendiri mengambil nilai dari satu set *bilangan riil*. Sebagai contoh sinyal waktu kontinu adalah tegangan listrik di rumah kita. Sinyal waktu diskrit adalah sinyal yang mempunyai nilai hanya pada t tertentu yaitu t_n dengan t_n mengambil nilai dari satu set *bilangan bulat*. Sinyal waktu diskrit kita peroleh misalnya melalui *sampling* pada tegangan listrik di rumah kita. Gb.1.1. memperlihatkan kedua macam bentuk sinyal tersebut. Dalam mempelajari analisis rangkaian di buku ini, kita hanya akan menghadapi *sinyal waktu kontinu* saja.



Peubah Sinyal

Arus, dengan simbol i , adalah ukuran dari aliran muatan. Ia merupakan laju perubahan jumlah muatan yang melewati titik tertentu. Dalam bentuk diferensial ia didefinisikan sebagai:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.1)$$

Dalam sistem satuan SI, arus mempunyai satuan *ampere*, dengan singkatan A. Karena satuan muatan adalah *coulomb*, maka

$$1 \text{ ampere} = 1 \text{ coulomb / detik}$$

Perlu kita ingat bahwa ada dua jenis muatan yaitu muatan *positif* dan *negatif*. Arah arus positif ditetapkan sebagai arah aliran muatan positif *netto*, mengingat bahwa aliran arus di suatu titik mungkin melibatkan kedua macam muatan tersebut.

Tegangan, dengan simbol v , berkaitan dengan perubahan energi yang dialami oleh muatan pada waktu ia berpindah dari satu titik ke titik yang lain di dalam rangkaian. Tegangan antara titik A dan titik B di suatu rangkaian *didefinisikan sebagai perubahan energi per satuan muatan*, yang dalam bentuk diferensial dapat kita tuliskan sebagai:

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (1.2)$$

Satuan tegangan adalah *volt*, dengan singkatan V. Oleh karena satuan energi adalah *joule*, maka 1 volt = 1 joule/coulomb.

Daya, dengan simbol p , didefinisikan sebagai laju perubahan energi, yang dapat kita tuliskan:

$$p = \frac{dw}{dt} \quad (1.3)$$

Dari definisi ini dan definisi untuk arus dan tegangan (1.1) dan (1.2) kita dapatkan:

$$p = \left(\frac{dw}{dt} \right) = \left(\frac{dw}{dq} \right) \left(\frac{dq}{dt} \right) = vi \quad (1.4)$$

Satuan daya adalah *watt*, dengan singkatan W. Sesuai dengan hubungan (1.3) maka 1 watt = 1 joule / detik.

Untuk memperoleh besar energi yang teralihkan dalam selang waktu antara t_1 dan t_2 kita melakukan integrasi daya antara t_1 dan t_2

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt \quad (1.5)$$

Satuan energi adalah *joule*.

Muatan dapat diperoleh dengan mengintegrasikan arus terhadap waktu. Jadi jumlah muatan yang dialihkan oleh arus i dalam selang waktu antara t_1 dan t_2 adalah :

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i dt \quad (1.6)$$

Satuan muatan adalah *coulomb*.

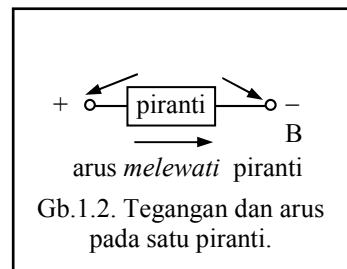
Referensi Sinyal dan Konvensi Pasif

Arus dan tegangan mempunyai hubungan erat namun mereka juga mempunyai perbedaan yang sangat nyata. Arus merupakan ukuran besaran yang *melewati* suatu titik sedangkan tegangan adalah ukuran besaran *antara* dua titik. Jadi arus diukur di satu titik sedangkan tegangan diukur di antara dua titik.

Dalam pekerjaan analisis, arah arus dinyatakan dengan tanda anak panah yang menjadi *referensi arah positif* arus. Referensi ini tidak berarti bahwa arah arus sesungguhnya (yang mengalir pada piranti) adalah seperti ditunjukkan oleh anak panah. Arah arus sesungguhnya dapat berlawanan dengan arah anak panah dan jika demikian halnya kita katakan *arus negatif*. Dalam hal arah arus sesungguhnya sesuai dengan arah anak panah, kita katakan *arus positif*.

Pada elemen rangkaian, tanda “+” dipakai untuk menunjukkan titik yang dianggap mempunyai tegangan yang lebih tinggi dibandingkan dengan titik yang bertanda “-”, dan ini menjadi referensi tegangan. Di sinipun titik yang bertanda “+” pada keadaan sesungguhnya tidak selalu mempunyai potensial lebih tinggi dibandingkan dengan titik yang bertanda “-”. Tetapi jika benar demikian keadaannya kita katakan bahwa tegangan pada piranti adalah positif, dan jika sebaliknya maka tegangan itu negatif.

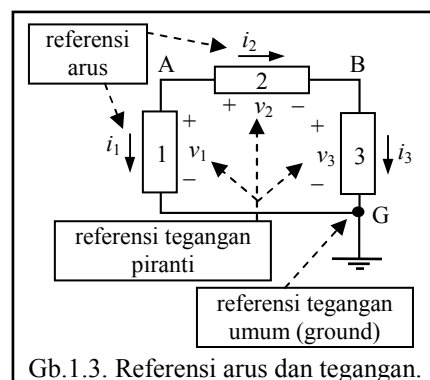
Dalam menentukan referensi tegangan dan arus kita mengikuti *konvensi pasif*. Arah arus digambarkan *masuk ke elemen* pada titik yang bertanda “+”.



Konvensi ini disebut konvensi pasif sebab dalam konvensi ini *piranti menyerap daya*. Perhatikan Gb.1.2. Dengan konvensi ini, jika arus dan tegangan memiliki tanda yang sama, daya bernilai positif. Jika arus dan tegangan berlawanan tanda maka daya bernilai negatif.

Daya positif berarti elemen menyerap daya; daya negatif berarti elemen mengeluarkan daya.

Selain referensi arus dan tegangan pada elemen, untuk menyatakan besar tegangan di berbagai titik pada suatu rangkaian kita dapat menetapkan titik referensi umum yang kita namakan *titik pentanahan* atau *titik nol* atau *ground*. Tegangan di titik-titik lain pada rangkaian dihitung terhadap titik nol ini. Perhatikan penjelasan pada Gb.1.3. Tegangan di titik A dapat kita sebut sebagai v_A yaitu tegangan titik A terhadap titik referensi umum G. Demikian pula v_B adalah tegangan titik B terhadap G. Beda tegangan antara titik A dan B adalah $v_A - v_B = v_{AB} = v_2$.



CONTOH 1.1 : Tegangan pada suatu piranti adalah 12 V (konstan) dan arus yang mengalir padanya adalah 100 mA. a). Berapakah daya yang diserap ? b). Berapakah energi yang diserap selama 8 jam? c). Berapakah jumlah muatan yang dipindahkan melalui piranti tersebut selama 8 jam itu?

Penyelesaian:

a). Daya yang diserap adalah : $p = vi = 12 \times 100 \times 10^{-3} = 1,2 \text{ W}$

b). Energi yang diserap selama 8 jam adalah

$$w = \int_0^8 p dt = \int_0^8 1,2 dt = 1,2t \Big|_0^8 = 9,6 \text{ Wh}$$

c). Jumlah muatan yang dipindahkan selama 8 jam adalah

$$q = \int_0^8 i dt = 100 \times 10^{-3} t \Big|_0^8 = 0,1 \times 8 = 0,8 \text{ Ah}$$

Pemahaman :

Satuan daya adalah Watt. Untuk daya besar digunakan satuan kW, 1 kW = 1000 W. Satuan daya yang lain adalah *horse power* (HP).

$$1 \text{ HP} = 746 \text{ W} \quad \text{atau} \quad 1 \text{ kW} = 1,341 \text{ HP}$$

Watt-hour (Wh) adalah satuan energi yang biasa dipakai dalam sistem listrik.

$$1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J} \quad \text{atau} \quad 1 \text{ kWh} = 3600 \text{ kJ}$$

Satuan muatan adalah Coulomb. Dalam penyelesaian soal di atas, kita menggunakan satuan Ampere-hour (Ah) untuk muatan. Satuan ini biasa digunakan untuk menyatakan kapasitas suatu accu (accumulator). Contoh : accu mobil berkapasitas 40 Ah.

$$\text{karena } 1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} \quad \text{maka} \quad 1 \text{ C} = 1 \text{ As} \quad \text{dan} \quad 1 \text{ Ah} = 3600 \text{ C}$$

CONTOH 1.2 : Sebuah piranti menyerap daya 100 W pada tegangan 200V (konstan). Berapakah besar arus yang mengalir dan berapakah energi yang diserap selama 8 jam ?

Penyelesaian :

$$i = \frac{p}{v} = \frac{100}{200} = 0,5 \text{ A} \quad ; \quad w = \int_0^8 100 dt = 100t \Big|_0^8 = 800 \text{ Wh} = 0,8 \text{ kWh}$$

CONTOH 1.3 : Arus yang melalui suatu piranti berubah terhadap waktu sebagai $i(t) = 0,05t$ ampere. Berapakah jumlah muatan yang dipindahkan melalui piranti ini antara $t = 0$ sampai $t = 5$ detik ?

Penyelesaian :

Jumlah muatan yang dipindahkan dalam 5 detik adalah

$$q = \int_0^5 i dt = \int_0^5 0,05t dt = \frac{0,05}{2} t^2 \Big|_0^5 = \frac{1,25}{2} = 0,625 \text{ coulomb}$$

CONTOH 1.4 : Tegangan pada suatu piranti berubah terhadap waktu sebagai $v = 220 \cos 400t$ dan arus yang mengalir adalah $i = 5 \cos 400t$ A. a). Bagaimanakah variasi daya terhadap waktu ? b). Menyerap atau memberikan dayakah piranti ini ? c). Berapakah nilai daya maksimum dan daya minimum ?

Penyelesaian :

$$a). p = 220 \cos 400t \times 5 \cos 400t = 1100 \cos^2 400t \text{ W} = 550(1 + \cos 800t) = 550 + 550 \cos 800t \text{ W}$$

b). Suku pertama pernyataan daya bernilai positif +550 W. Suku kedua bervariasi antara -550 dan +550. Secara keseluruhan daya selalu bernilai positif. Piranti menyerap daya.

$$c). \text{Nilai daya : } p_{\text{maksimum}} = 550 + 550 = 1100 \text{ W} \quad ; \quad p_{\text{minimum}} = 550 - 550 = 0 \text{ W}$$

CONTOH 1.5 : Tegangan pada suatu piranti berubah terhadap waktu sebagai $v = 220\cos 400t$ dan arus yang mengalir adalah $i = 5\sin 400t$ A. a). Bagaimanakah variasi daya terhadap waktu ? b). Tunjukkan bahwa piranti ini menyerap daya pada suatu selang waktu tertentu dan memberikan daya pada selang waktu yang lain. c). Berapakah daya maksimum yang diserap ? d). Berapakah daya maksimum yang diberikan ?

Penyelesaian :

- a). $p = 220 \cos 400t \times 5 \sin 400t = 1100 \sin 400t \cos 400t = 550 \sin 800t$ W
- b). Dari a) terlihat bahwa daya merupakan fungsi sinus. Pada waktu bernilai positif (selama setengah periode) piranti menyerap daya ; pada waktu bernilai negatif (setengah periode berikutnya) ia memberikan daya.
- c). Daya maksimum yang diserap $p_{maks\ diserap} = 550$ W
- d). Daya maksimum yang diberikan $p_{maks\ diberikan} = 550$ W

Bentuk Gelombang

Pada umumnya sinyal merupakan fungsi waktu, seperti yang kita lihat pada contoh-contoh di atas. Variasi sinyal terhadap waktu disebut *bentuk gelombang*. Secara formal dikatakan:

Bentuk gelombang adalah suatu persamaan atau suatu grafik yang menyatakan sinyal sebagai fungsi dari waktu.

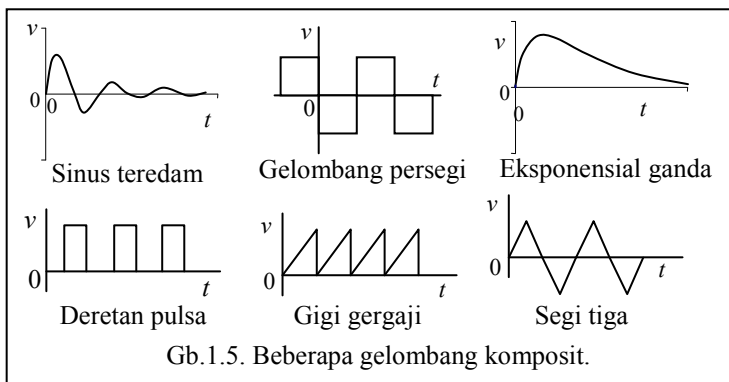
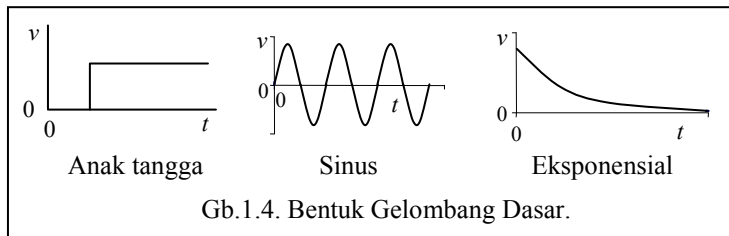
Sebagai contoh, bentuk gelombang yang konstan untuk seluruh waktu, secara matematik dinyatakan dengan persamaan:

$$v = V_0 \quad ; \quad i = I_0 \quad , \quad \text{untuk } -\infty < t < \infty \quad (1.7)$$

Walaupun persamaan tersebut di atas hanyalah model, tetapi model ini sangat bermanfaat sebab ia merupakan pendekatan untuk sinyal yang secara nyata dibangkitkan oleh sumber sebenarnya, misalnya batere.

Bentuk gelombang dikelompokkan dalam dua kelompok. Kelompok pertama disebut *bentuk gelombang dasar* yang meliputi bentuk gelombang *anak tangga*, *sinus*, dan *eksponensial*, seperti terlihat pada Gb.1.4.

Kelompok kedua disebut *bentuk gelombang komposit*. Bentuk gelombang ini tersusun dari beberapa bentuk gelombang dasar, seperti terlihat pada Gb.1.5. Bentuk gelombang sinus teredam misalnya, merupakan hasil kali gelombang sinus dengan eksponensial; gelombang persegi merupakan

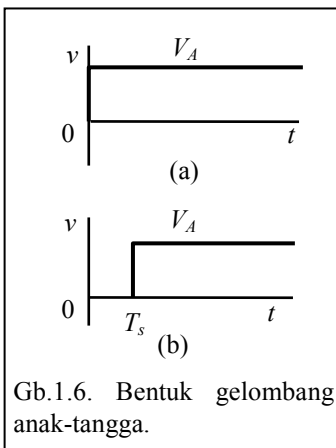


kombinasi dari gelombang-gelombang anak tangga, dan sebagainya. Dalam analisis rangkaian, bentuk-bentuk gelombang ini kita nyatakan secara matematis seperti halnya dengan contoh sinyal konstan (1.7) di atas. Dalam kenyataan, bentuk-bentuk gelombang bisa sangat rumit; walaupun demikian, variasinya terhadap waktu dapat didekati dengan menggunakan gabungan bentuk-bentuk gelombang dasar.

Bentuk Gelombang Dasar

Bentuk gelombang dasar atau bentuk gelombang utama meliputi *fungsi anak-tangga (step function)*, *fungsi eksponensial (exponential function)*, dan *fungsi sinus (sinusoidal function)*.

Fungsi Anak-Tangga (Fungsi Step). Secara umum, fungsi anak-tangga didasarkan pada *fungsi anak-tangga satuan*, yang didefinisikan sebagai berikut:



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } t < 0 \\ 1 & \text{untuk } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.8.a)$$

Beberapa buku membiarkan fungsi $u(t)$ tak terdefinisikan untuk $t = 0$,

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } t < 0 \\ 1 & \text{untuk } t > 0 \end{cases} \quad (1.8.b)$$

sehingga secara matematis fungsi ini mempunyai ketidakkontinuitas pada $t = 0$. Kita akan menggunakan definisi (1.8.a)

Dalam kenyataan, tidaklah mungkin membangkitkan sinyal yang dapat berubah dari satu nilai ke nilai yang lain tanpa memakan waktu. Yang dapat dilakukan hanyalah membuat waktu transisi itu sependek mungkin.

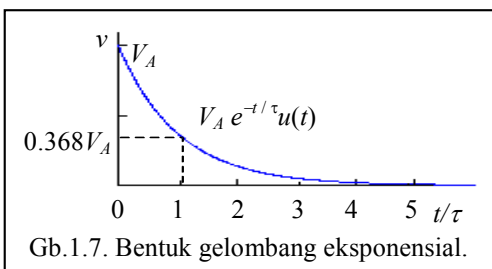
Bila $u(t)$ kita kalikan dengan sesuatu nilai konstan V_A akan kita peroleh bentuk gelombang anak tangga (Gb.1.6.a.):

$$v = V_A u(t) \Rightarrow v = \begin{cases} 0 & \text{untuk } t < 0 \\ V_A & \text{untuk } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.9.a)$$

Jika t kita ganti dengan $(t - T_s)$ kita peroleh bentuk gelombang $V_A u(t - T_s)$ yang merupakan bentuk gelombang anak tangga tergeser ke arah positif sebesar T_s (Gb.1.6.b.).

$$v = V_A u(t - T_s) \Rightarrow v = \begin{cases} 0 & \text{untuk } t < T_s \\ V_A & \text{untuk } t \geq T_s \end{cases} \quad (1.9.b)$$

Bentuk Gelombang Eksponensial. Sinyal eksponensial merupakan sinyal anak-tangga yang amplitudonya menurun secara eksponensial menuju nol. Persamaan bentuk gelombang sinyal ini adalah:



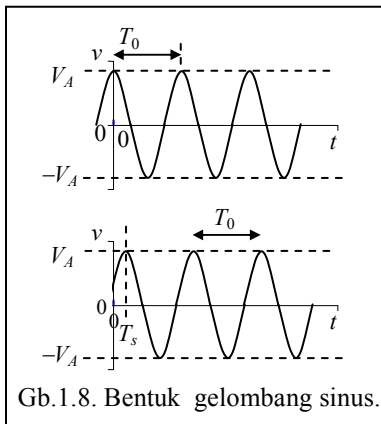
$$v = (V_A e^{-t/\tau}) u(t) \quad (1.10)$$

Parameter yang penting pada sinyal bentuk ini adalah amplitudo V_A dan konstanta waktu τ (dalam detik). Konstanta waktu ini menentukan kecepatan menurunnya amplitudo sinyal. Makin besar τ makin lambat menurunnya amplitudo dan makin kecil τ makin cepat menurunnya amplitudo.

Pada $t = \tau$ sinyal sudah menurun mencapai 36,8 % V_A . Pada $t = 5\tau$ sinyal mencapai $0,00674V_A$, kurang dari 1% V_A . Oleh karena itu kita definisikan durasi (lama berlangsungnya) suatu sinyal eksponensial adalah 5τ . Kalau kita hanya meninjau keadaan untuk $t > 0$, maka $u(t)$ pada persamaan gelombang ini tidak perlu dituliskan lagi. Jadi:

$$v = V_A e^{-t/\tau} \quad (1.11)$$

Bentuk Gelombang Sinus. Sinus merupakan pengulangan tanpa henti dari suatu osilasi antara dua nilai puncak, seperti terlihat pada Gb.1.8. di bawah ini. Amplitudo V_A didefinisikan sebagai nilai maksimum dan minimum osilasi. Periode T_0 adalah waktu yang diperlukan untuk membuat satu siklus lengkap. Dengan menggunakan dua parameter tersebut, yaitu V_A dan T_0 , kita dapat menuliskan persamaan sinus ini dalam fungsi cosinus:



Gb.1.8. Bentuk gelombang sinus.

$$v = V_A \cos(2\pi t / T_0) \quad (1.12)$$

Seperti halnya fungsi anak tangga, persamaan umum fungsi sinus diperoleh dengan mengganti t dengan $(t - T_s)$. Jadi persamaan umum gelombang sinus adalah:

$$v = V_A \cos[2\pi(t - T_s) / T_0] \quad (1.13)$$

dengan T_s adalah waktu pergeseran, yang ditunjukkan oleh posisi puncak yang terjadi pertama kali seperti terlihat pada Gb.1.8. Pada gambar ini T_s adalah positif. Jika T_s negatif pergeserannya akan ke arah negatif.

Pergeseran waktu dapat juga dinyatakan dengan menggunakan sudut:

$$v = V_A \cos[2\pi t / T_0 - \phi] \quad (1.14)$$

Parameter ϕ disebut *sudut fasa*. Hubungan antara waktu pergeseran T_s dan sudut fasa ϕ adalah :

$$\phi = 2\pi \frac{T_s}{T_0} \quad (1.15)$$

Variasi dari gelombang sinus dapat juga dinyatakan dengan menggunakan *frekuensi*. Frekuensi f_0 didefinisikan sebagai jumlah periode dalam satu satuan waktu, yang disebut frekuensi siklus. Oleh karena periode T_0 adalah jumlah detik (waktu) per siklus, maka jumlah siklus (periode) per detik adalah:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (1.16)$$

dengan satuan *hertz* (Hz), atau siklus per detik. Selain frekuensi siklus, kita mengenal pula *frekuensi sudut* ω_0 yang dinyatakan dalam radian per detik, yaitu:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (1.17)$$

Dengan demikian ada dua cara untuk menyatakan frekuensi, yaitu frekuensi siklus (Hz) dan frekuensi sudut (radian per detik), dan fungsi sinus dapat dinyatakan sebagai

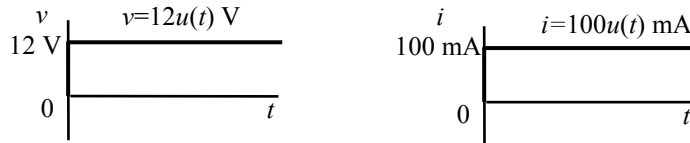
$$\begin{aligned} v &= V_A \cos[2\pi f_0 t - \phi] \quad \text{atau} \\ v &= V_A \cos[\omega_0 t - \phi] \end{aligned} \quad (1.17.a)$$

CONTOH 1.6 : Tegangan pada suatu piranti adalah 12 V (konstan) dan arus yang mengalir padanya adalah 100 mA. a). Berapakah daya yang diserap ? b). Berapakah energi yang diserap selama 8 jam? c). Berapakah jumlah muatan yang dipindahkan melalui piranti tersebut selama 8 jam itu?

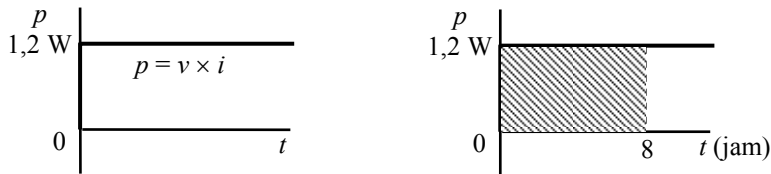
Penyelesaian:

Penyelesaian soal ini telah kita lakukan pada contoh 1.1. Di sini kita akan melihat model sinyalnya. Model matematis dari sinyal tegangan 12 V (konstan) kita tuliskan sebagai $v = 12u(t)$ V, dan arus 100 mA kita tuliskan $i = 100u(t)$ mA.

Jika sinyal-sinyal ini kita gambarkan akan berbentuk seperti di bawah ini.

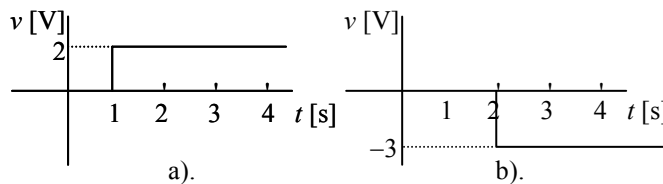


Daya yang diserap adalah $p = v \times i = 1.2$ W dan jika kita gambarkan perubahan daya terhadap waktu adalah seperti gambar berikut.



Energi yang diserap selama 8 jam adalah integral dari daya untuk jangka waktu 8 jam. Besar energi ini ditunjukkan oleh luas bagian yang diarsir di bawah kurva daya seperti ditunjukkan pada gambar di sebelah kanan.

CONTOH 1.7 : Carilah persamaan bentuk gelombang tegangan yang tergambar di bawah ini.



Penyelesaian :

a). Bentuk gelombang tegangan ini adalah gelombang anak tangga yang persamaan umumnya adalah $v(t) = A u(t - T_s)$, dengan A = amplitudo dan T_s = pergeseran waktu. Maka persamaan gelombang pada gambar a) adalah $v_1(t) = 2u(t - 1)$ V.

Gelombang ini mempunyai nilai $v_1(t) = 2$ V untuk $t \geq 1$
 $= 0$ V untuk $t < 1$

b). Bentuk gelombang tegangan gambar b) adalah $v_2(t) = -3u(t - 2)$ V.

Gelombang ini mempunyai nilai $v_2(t) = -3$ V untuk $t \geq 2$
 $= 0$ V untuk $t < 2$

Pemahaman :

$u(t)$ adalah fungsi anak tangga satuan, sebagaimana telah didefinisikan. Fungsi ini tidak mempunyai satuan. Bentuk gelombang tegangan pada gambar a) diperoleh dengan

mengalikan suatu tegangan konstan sebesar 2 V dengan fungsi anak tangga satuan $u(t-1)$ yaitu fungsi anak tangga satuan yang bergeser 1 detik. Sedangkan gelombang tegangan pada gambar b) diperoleh dengan mengalikan tegangan konstan sebesar -3 V dengan fungsi anak tangga satuan yang bergeser 2 detik.

Bentuk gelombang apapun, jika dikalikan dengan fungsi anak tangga satuan $u(t)$ akan bernilai nol untuk $t < 0$, dan jika dikalikan dengan $u(t-T_s)$ akan bernilai nol untuk $t < T_s$.

CONTOH 1.8 : Carilah persamaan dan gambarkanlah dua bentuk gelombang eksponensial berikut ini dalam satu gambar.

- $v_1(t)$: amplitudo 5 V, konstanta waktu 2 detik
- $v_2(t)$: amplitudo 10 V, konstanta waktu 2 detik
- $v_3(t)$: amplitudo 10 V, konstanta waktu 4 detik

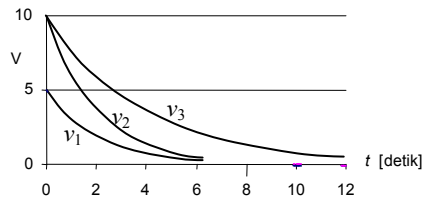
Penyelesaian :

Persamaan umum gelombang eksponensial adalah $v(t) = Ae^{-t/\tau}u(t)$ dengan A = amplitudo, τ = konstanta waktu. Jadi pernyataan kedua gelombang itu masing-masing adalah

$$v_1(t) = 5e^{-t/2}u(t) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 10e^{-t/2}u(t) \text{ V}$$

$$v_3(t) = 10e^{-t/4}u(t) \text{ V}$$



Bentuk gelombang tergambar di samping ini.

Pemahaman :

Kita lihat bahwa walaupun v_1 dan v_2 mempunyai amplitudo yang jauh berbeda, mereka teredam dengan kecepatan yang sama karena konstanta waktunya sama. Pada $t = 5 \times$ konstanta waktu, yaitu $5 \times 2 = 10$ detik, nilai gelombang telah dapat diabaikan.

Gelombang tegangan v_2 dan v_3 mempunyai amplitudo sama tetapi konstanta waktunya berbeda. Kita lihat bahwa gelombang yang konstanta waktunya lebih besar lebih lambat menuju nol, yang konstanta waktunya lebih kecil lebih cepat menuju nol.

CONTOH 1.9 : Tuliskan persamaan gelombang sinus untuk $t > 0$, yang amplitudonya 10 V, frekuensi siklus 50 Hz, dan puncak positif yang pertama terjadi pada $t = 3$ mili detik. Gambarkanlah bentuk gelombangnya.

Penyelesaian :

Pernyataan umum gelombang sinus standar untuk $t > 0$ adalah $v = A \cos\left(2\pi \frac{t-T_s}{T_0}\right)u(t)$

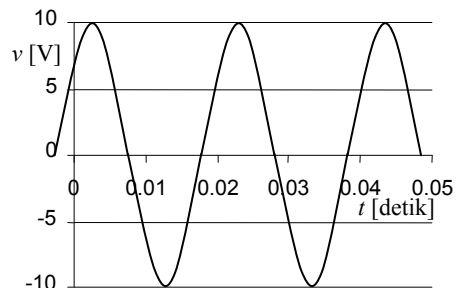
dengan A adalah amplitudo, T_s = pergeseran waktu, T_0 = periode, dan $u(t)$ adalah fungsi anak tangga satuan. Karena frekuensi siklus $f = 1/T_0$ maka persamaan umum ini juga dapat ditulis sebagai

$$v = A \cos(2\pi f(t-T_s))u(t)$$

Dari apa yang diketahui dalam persoalan yang diberikan, kita dapat menuliskan persamaan tegangan

$$v = 10 \cos(100\pi(t - 0,003))u(t)$$

dengan bentuk gelombang terlihat pada gambar di samping ini.



Pemahaman :

Perhatikan bahwa puncak pertama positif terjadi pada $t = 0,003$ detik. Karena frekuensi gelombang 50 Hz, maka ada lima puluh siklus dalam satu detik atau dengan kata lain periode gelombang ini adalah $1/50$ detik = 0,02 detik. Persamaan umum gelombang sinus dapat ditulis dalam berbagai bentuk seperti berikut ini.

$$\begin{array}{l}
 v = A \cos\left(2\pi \frac{t - T_s}{T_0}\right) \quad \text{atau} \quad v = A \cos(2\pi f(t - T_s)) \quad \text{atau} \\
 v = A \cos(\omega(t - T_s)) \quad \text{atau} \quad v = A \cos(\omega t - \phi)
 \end{array}$$

Dari persamaan-persamaan umum ini kita dapat dengan mudah menuliskan persamaan bentuk gelombang sinus berdasarkan parameter-parameter yang diketahui.

CONTOH 1.10 : Tuliskan persamaan gelombang sinus untuk $t > 0$, yang frekuensinya 1000 rad/s, dan puncak positif yang pertama terjadi pada $t = 1$ mili detik. Pada $t = 0$ gelombang ini mempunyai nilai 200 V.

Penyelesaian :

Puncak positif yang pertama terjadi pada $t = 1$ mili detik, artinya pada bentuk gelombang ini terjadi pergeseran waktu sebesar 0,001 detik. Persamaan umum fungsi sinus yang muncul pada $t = 0$ adalah $v = A \cos[\omega(t - T_s)]u(t)$. Amplitudo dari gelombang ini dapat dicari karena nilainya pada $t = 0$ diketahui, yaitu 200 V.

$$\begin{aligned}
 200 &= A \cos(1000(0 - 0,001))u(t) = A \cos(-1) = A \times 0,54 \\
 \Rightarrow A &= 200/0,54 = 370 \text{ V}
 \end{aligned}$$

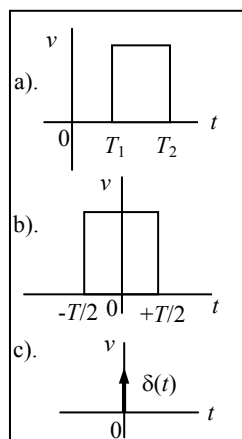
Jadi persamaan gelombang sinus ini adalah : $v = 370 \cos[1000(t - 0,001)]u(t)$ V

Bentuk Gelombang Komposit

Bentuk gelombang yang diperoleh melalui kombinasi bentuk gelombang dasar disebut *bentuk gelombang komposit*. Beberapa di antaranya akan kita lihat berikut ini.

Fungsi Impuls. Secara umum fungsi impuls dapat dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned}
 v &= Au(t - T_1) - Au(t - T_2) \\
 &= A [u(t - T_1) - u(t - T_2)]
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$



Gb.1.9. Impuls
a) Impuls.
b) Simetris thd nol.
c) Impuls satuan.

Bentuk gelombang ini adalah kombinasi dari dua gelombang anak-tangga dengan amplitudo berlawanan tanda, masing-masing dengan pergeseran waktu T_1 dan T_2 . (Gb.1.9.a)

Fungsi Impuls Satuan. Perhatikan gelombang impuls yang simetris terhadap titik nol seperti pada Gb.1.9.b. Persamaan bentuk gelombang ini adalah:

$$v_1 = \frac{1}{T} \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]
 \tag{1.18.a}$$

Impuls dengan persamaan diatas mempunyai amplitudo $1/T$ dan bernilai nol di semua t kecuali pada selang $-T/2 \leq t \leq +T/2$.

Luas bidang di bawah pulsa adalah satu karena amplitudonya berbanding terbalik dengan durasinya (lebarnya). Jika lebar pulsa T kita perkecil dengan mempertahankan luasnya tetap satu, maka amplitudonya akan makin besar. Bila T menuju nol maka amplitudonya menuju tak hingga, namun luasnya tetap satu. Fungsi

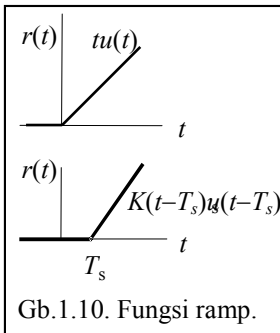
yang diperoleh pada kondisi limit tersebut dinamakan *impuls satuan (unit impuls)*, dengan simbol $\delta(t)$. Representasi grafisnya terlihat pada Gb.1.9.c. Definisi formal dari impuls satuan adalah:

$$v = \delta(t) = 0 \text{ untuk } t \neq 0 ; \int_{-\infty}^t \delta(x)dx = u(t) \quad (1.18.b)$$

Kondisi yang pertama dari definisi ini menyatakan bahwa impuls ini nol di semua t kecuali pada $t = 0$, sedangkan kondisi kedua menyatakan bahwa impuls ini adalah turunan dari fungsi anak-tangga satuan. Jadi $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ (1.18.c)

Amplitudo impuls satuan adalah tak hingga. Oleh karena itu besarnya impuls didefinisikan menurut luasnya. Suatu impuls satuan yang muncul pada $t = T_s$ dituliskan sebagai $\delta(t-T_s)$.

Fungsi Ramp. Jika kita melakukan integrasi pada fungsi anak tangga satuan, kita akan mendapatkan fungsi **ramp satuan** yaitu



Gb.1.10. Fungsi ramp.

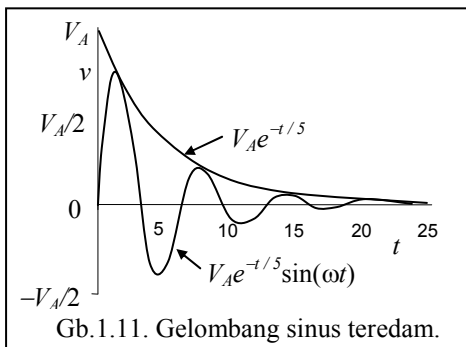
$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(x)dx = tu(t) \quad (1.19)$$

Ramp satuan ini bernilai nol untuk $t \leq 0$ dan sama dengan t untuk $t > 0$. Perhatikan bahwa laju perubahan (kemiringan) dari ramp satuan adalah 1. Jika kemiringannya adalah K maka persamaannya adalah $r_k(t) = K t u(t)$. Bentuk umum fungsi ramp adalah

$$r(t) = K(t-T_s)u(t-T_s), \quad (1.19.a)$$

yang bernilai nol untuk $t < T_s$ dengan kemiringan K .

Bentuk Gelombang Sinus Teredam. Bentuk gelombang komposit ini diperoleh dengan *mengalikan fungsi sinus dengan fungsi eksponensial*, yang memberikan persamaan :

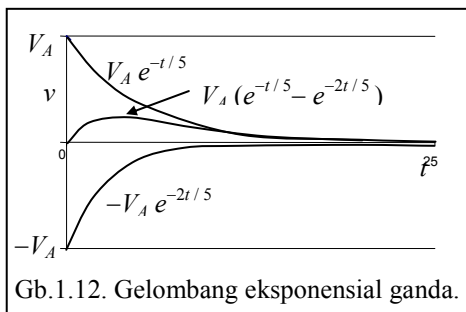


Gb.1.11. Gelombang sinus teredam.

$$v = \sin(\omega t) (V_A e^{-t/\tau}) u(t) = V_A \sin \omega t e^{-t/\tau} u(t) \quad (1.20)$$

Fungsi anak tangga $u(t)$ yang menjadi salah satu faktor dalam persamaan ini untuk memberikan nilai nol pada $t < 0$. Pada $t = 0$, gelombang melalui titik asal karena $\sin(n\pi) = 0$. Bentuk gelombang ini tidak periodik karena faktor eksponensial memaksa amplitudonya menurun. Osilasi ini telah mencapai nilai sangat kecil pada $t = 5\tau$ sehingga telah dapat diabaikan pada $t > 5\tau$.

Bentuk Gelombang Eksponensial Ganda. Gelombang komposit ini diperoleh dengan menjumlahkan dua fungsi eksponensial beramplitudo sama tapi berlawanan tanda. Persamaan bentuk gelombang ini adalah :



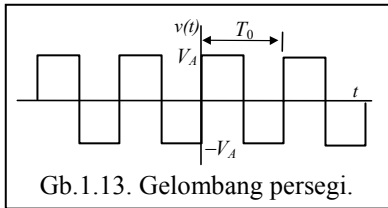
Gb.1.12. Gelombang eksponensial ganda.

$$v = V_A e^{-t/\tau_1} u(t) - V_A e^{-t/\tau_2} u(t) = V_A (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) u(t) \quad (1.21)$$

Bentuk gelombang komposit ini, dengan $\tau_1 > \tau_2$ terlihat pada Gb.1.12. Untuk $t < 0$ gelombang bernilai nol. Pada $t = 0$ gelombang masih bernilai nol karena kedua fungsi saling meniadakan. Pada $t \gg \tau_1$ gelombang ini menuju nol karena kedua bentuk eksponensial

itu menuju nol. Fungsi yang mempunyai konstanta waktu lebih besar akan menjadi fungsi yang lebih menentukan.

Gabungan Fungsi Anak Tangga. Bentuk Gelombang Persegi. Bentuk gelombang persegi juga merupakan gelombang komposit. Karena periodik maka persamaan gelombang ini dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan untuk setiap siklus.



Persamaan untuk siklus yang pertama setelah $t = 0$, merupakan jumlah dari tiga fungsi anak-tangga, yaitu:

$$v_1 = V_A u(t) - 2V_A u(t - \frac{T_0}{2}) + V_A u(t - T_0)$$

Persamaan untuk siklus yang *kedua* setelah $t = 0$ adalah persamaan siklus pertama yang digeser sebesar *satu* perioda :

$$v_2 = V_A u(t - T_0) - 2V_A u(t - \frac{T_0}{2} - T_0) + V_A u(t - 2T_0) = V_A u(t - T_0) - 2V_A u(t - \frac{3T_0}{2}) + V_A u(t - 2T_0)$$

Persamaan untuk siklus yang ke k adalah persamaan siklus pertama yang digeser sebesar $(k-1)$ perioda:

$$v_k = V_A u(t - [k-1]T_0) - 2V_A u(t - \frac{2k-1}{2}T_0) + V_A u(t - kT_0)$$

Persamaan gelombang persegi dapat diperoleh dengan menjumlahkan $v_k(t)$ dari $k = -\infty$ sampai $k = +\infty$.

$$v = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} v_k(t) \tag{1.22}$$

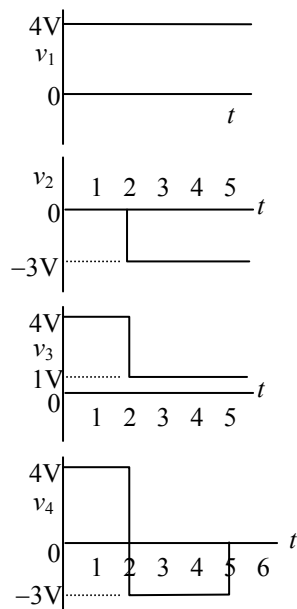
Penjumlahan dari $-\infty$ sampai $+\infty$ tersebut diperlukan karena gelombang persegi melebar ke tak hingga baik ke arah positif maupun ke arah negatif.

CONTOH 1.11 : Gambarkanlah bentuk-bentuk gelombang yang persamaannya adalah

- a. $v_1 = 4 u(t)$ V b. $v_2 = -3 u(t-2)$ V
 c. $v_3 = 4u(t) - 3u(t-2)$ V d. $v_4 = 4u(t) - 7u(t-2) + 3u(t-5)$ V

Penyelesaian :

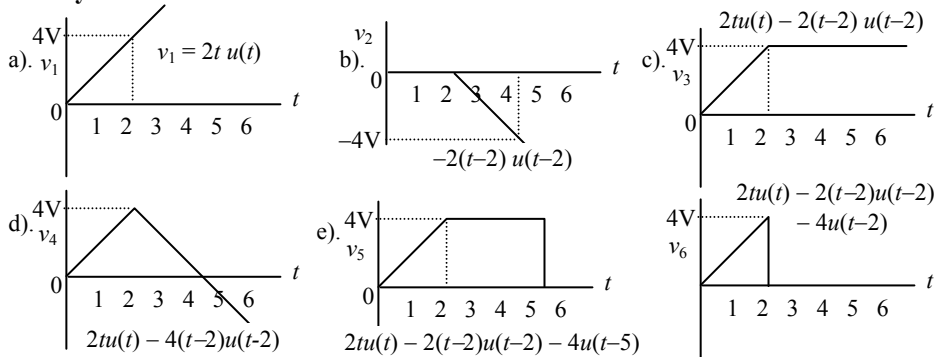
- a). Bentuk gelombang ini adalah gelombang anak tangga dengan amplitudo 4 volt dan muncul pada $t = 0$. Bentuk gelombang terlihat pada gambar di samping.
- b). Gelombang anak tangga ini mempunyai amplitudo -3 volt dan muncul pada $t = 2$. Gambar bentuk gelombang terlihat di samping ini
- c). Bentuk gelombang ini terdiri dari gelombang anak tangga beramplitudo 4 volt yang muncul pada $t = 0$ ditambah (disusul) dengan gelombang anak tangga beramplitudo -3 volt yang muncul pada $t = 2$. Lihat gambar di samping ini.
- d). Bentuk gelombang ini terdiri dari tiga gelombang anak tangga yang masing-masing muncul pada $t = 0$, $t = 2$ dan $t = 5$. Amplitudo mereka berturut-turut adalah 4, -7, dan 3 volt. Bentuk gelombang terlihat pada gambar di samping ini.



CONTOH 1.12 : Gambarkanlah bentuk-bentuk gelombang yang persamaannya adalah

- a). $v_1 = 2t u(t)$ V ; b). $v_2 = -2(t-2) u(t-2)$ V ; c). $v_3 = 2tu(t) - 2(t-2) u(t-2)$ V
 d). $v_4 = 2tu(t) - 4(t-2)u(t-2)$ V ; e). $v_5 = 2tu(t) - 2(t-2)u(t-2) - 4u(t-5)$ V ;
 f). $v_6 = 2tu(t) - 2(t-2)u(t-2) - 4u(t-2)$ V

Penyelesaian :



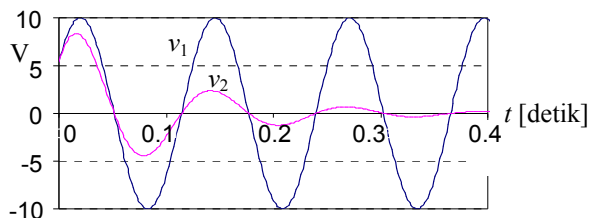
CONTOH 1.13 : Tentukanlah persamaan bentuk gelombang yang mulai muncul pada $t = 0$ berikut ini. a). Gelombang sinus : amplitudo 10 V, frekuensi sudut 50 rad per detik, puncak positif pertama terjadi pada $t = 20$ mili-detik. b). Gelombang sinus pada a) yang teredam sehingga pada $t = 0,5$ detik gelombang sinus ini sudah dapat diabaikan nilainya. c). Gambarkanlah bentuk gelombang pada a) dan b).

Penyelesaian:

- a). Gelombang sinus ini baru muncul pada $t = 0$, sehingga persamaan umumnya adalah $v = A \cos(\omega(t - T_s))u(t)$. Dari parameter yang diketahui, persamaan gelombang yang dimaksud adalah $v_1 = 10 \cos(50(t - 0,020))u(t)$ V.
 b). Agar gelombang sinus pada a) teredam, maka harus dikalikan dengan fungsi eksponensial. Jika nilai gelombang sudah harus dapat diabaikan pada $t = 0,5$ detik, maka konstanta waktu dari fungsi eksponensial sekurang-kurangnya haruslah $\tau = 0,5/5 = 0,1$. Jadi persamaan gelombang yang dimaksud adalah

$$v_2 = 10 \cos(50(t - 0,020))e^{-t/0,1} u(t)$$

- c). Gambar kedua bentuk gelombang tersebut di atas adalah sebagai berikut.



Pemahaman:

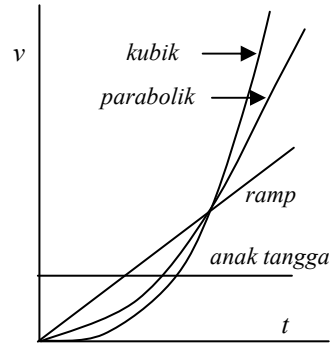
Gelombang sinus pada umumnya adalah non-kausal yang persamaan umumnya adalah $v = A \cos(\omega(t - T_s))$. Dalam soal ini dinyatakan bahwa gelombang sinus baru muncul pada $t = 0$. Untuk menyatakan gelombang seperti ini diperlukan fungsi anak tangga $u(t)$ sehingga persamaan akan berbentuk $v = A \cos(\omega(t - T_s))u(t)$.

Dengan menyatakan bentuk gelombang sinus dengan fungsi cosinus, identifikasi bentuk gelombang menjadi lebih mudah. Puncak pertama suatu fungsi cosinus tanpa pergeseran waktu terjadi pada $t = 0$. Dengan demikian posisi puncak pertama fungsi cosinus menunjukkan pula pergeseran waktunya.

Dengan mengalikan fungsi sinus dengan fungsi eksponensial kita meredam fungsi sinus tersebut. Peredaman oleh fungsi eksponensial berlangsung mulai dari $t = 0$. Oleh karena itu puncak positif pertama dari gelombang sinus teredam pada persoalan di atas mempunyai nilai kurang dari 10 V.

Beberapa Bentuk Gelombang Komposit Yang Lain

Fungsi Parabolik Satuan dan Kubik Satuan. Telah kita lihat bahwa integrasi fungsi anak tangga satuan memberikan fungsi ramp satuan. Jika integrasi dilakukan sekali lagi akan memberikan fungsi parabolik satuan dan integrasi sekali lagi akan memberikan fungsi kubik satuan. Gambar di samping ini memperlihatkan evolusi bentuk fungsi anak tangga menjadi fungsi ramp, parabolik, dan kubik melalui integrasi.

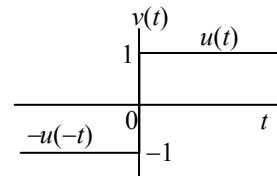


Fungsi-ramp, parabolik, dan kubik ini menuju nilai tak hingga jika t menuju tak hingga. Oleh karena itu pemodelan dengan menggunakan fungsi-fungsi ini dibatasi dalam selang waktu tertentu. Kita ingat sinyal gigi gergaji pada Gb.1.5. dimodelkan dengan fungsi ramp yang berulang pada setiap selang waktu tertentu.

Fungsi Signum. Suatu sinyal konstan (tegangan misalnya) yang pada $t = 0$ berubah polaritas, dimodelkan dengan fungsi signum, dituliskan sebagai

$$v(t) = \text{sgn}(t) \quad (1.22.a)$$

Bentuk gelombang fungsi ini terlihat pada gambar di samping ini. Fungsi signum ini merupakan jumlah dari fungsi anak tangga yang telah kita kenal, ditambah dengan fungsi anak tangga yang diperluas untuk $t < 0$.

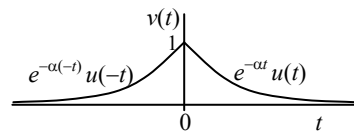


$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \quad (1.22.b)$$

Fungsi Eksponensial Dua Sisi. Perluasan fungsi anak tangga untuk mencakup kejadian sebelum $t = 0$ dapat pula dilakukan pada fungsi eksponensial. Dengan demikian kita dapatkan fungsi eksponensial dua sisi yang kita tuliskan sebagai

$$v(t) = e^{-\alpha t} u(t) + e^{-\alpha(-t)} u(-t) \quad (1.22.c)$$

yang secara grafis terlihat pada gambar di samping ini.



Pernyataan-Pernyataan Gelombang Sinyal

Gelombang Periodik dan Aperiodik. Suatu gelombang disebut periodik jika gelombang itu selalu berulang setiap selang waktu tertentu. Jadi jika $v(t)$ adalah periodik, maka $v(t+T_0)=v(t)$ untuk semua nilai t , dengan T_0 adalah periodanya yaitu selang waktu terkecil yang memenuhi kondisi tersebut. Sinyal yang tidak periodik disebut juga sinyal aperiodik.

Sinyal Kausal dan Sinyal Non-Kausal. Sinyal kausal bernilai nol sebelum saat T_s tertentu. Jadi jika sinyal $v(t)$ adalah kausal maka $v(t) \equiv 0$ untuk $t < T_s$. Jika tidak demikian maka sinyal itu disebut sinyal non-kausal. Sinyal kausal biasa dianggap bernilai nol pada $t < 0$, dengan menganggap $t = 0$ sebagai awal munculnya sinyal. Contoh dari sinyal kausal adalah : fungsi anak-tangga, eksponensial, dan sinus teredam. Sinyal sinus sendiri adalah non-kausal.

Nilai sesaat. Nilai amplitudo gelombang $v(t)$, $i(t)$, ataupun $p(t)$ pada suatu saat t tertentu disebut nilai sesaat dari bentuk gelombang itu.

Amplitudo. Pada umumnya amplitudo gelombang berubah terhadap waktu diantara dua nilai ekstrem yaitu amplitudo maksimum, V_{maks} , dan amplitudo minimum, V_{min} .

Nilai amplitudo puncak ke puncak (peak to peak value) menyatakan fluktuasi total dari amplitudo dan didefinisikan sebagai:

$$V_{pp} = V_{maks} - V_{min} \quad (1.23)$$

Dengan definisi ini maka V_{pp} selalu positif, walaupun mungkin V_{maks} dan V_{min} keduanya negatif.

Nilai puncak. Nilai puncak V_p adalah maksimum dari nilai absolut amplitudo.

$$V_p = \text{Max}\{|V_{maks}|, |V_{min}|\} \quad (1.24)$$

Nilai rata-rata. Nilai rata-rata secara matematis didefinisikan sebagai:

$$V_{rr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(x) dx \quad (1.25)$$

Untuk sinyal periodik, selang waktu T sama dengan perioda T_0 . Ada tidaknya nilai rata-rata menunjukkan apakah suatu sinyal mengandung komponen konstan (tidak berubah terhadap waktu) atau tidak. Komponen konstan ini disebut juga *komponen searah* dari sinyal.

Nilai efektif (nilai rms ; rms value). Nilai ini menunjukkan nilai rata-rata *daya* yang dibawa oleh sinyal. Untuk memahami hal ini kita lihat dulu daya sesaat yang diberikan kepada resistor R oleh tegangan $v(t)$, yaitu:

$$p(t) = \frac{1}{R} [v(t)]^2 \quad (1.26)$$

Daya rata-rata yang diberikan kepada resistor dalam selang waktu T adalah:

$$P_{rr} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [p(t)] dt \quad (1.27)$$

Kalau kedua persamaan di atas ini kita gabungkan, akan kita peroleh:

$$P_{rr} = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [v(t)]^2 dt \right] \quad (1.28)$$

Apa yang berada di dalam kurung besar pada persamaan di atas merupakan nilai rata-rata dari kwadrat gelombang. Akar dari besaran inilah yang digunakan untuk mendefinisikan

nilai rms atau nilai efektif.
$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [v(t)]^2 dt} \quad (1.29)$$

Untuk sinyal periodik, kita mengambil interval satu siklus untuk menghitung nilai rata-rata. Dengan menggunakan nilai rms kita dapat menuliskan daya rata-rata yang diberikan kepada

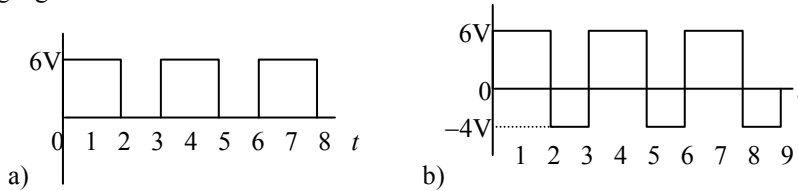
resistor sebagai:
$$P_{rr} = \frac{1}{R} V_{rms}^2 \quad (1.30)$$

Perhatikan bahwa persamaan untuk menghitung P_{rr} dengan menggunakan besaran rms tersebut di atas mirip bentuknya dengan persamaan untuk menghitung daya sesaat pada

sinyal searah, yaitu :
$$p(t) = \frac{1}{R} [v(t)]^2 \quad (1.31)$$

Oleh karena itulah maka nilai rms juga disebut nilai efektif karena ia menentukan daya rata-rata yang diberikan kepada resistor, setara dengan sinyal searah $v(t) = V_{as}$ yang menentukan besar daya sesaat.

CONTOH 1.14 : Tentukanlah nilai tegangan puncak (V_p), tegangan puncak-puncak (V_{pp}), periode (T), tegangan rata-rata (V_{rr}), dan tegangan efektif dari bentuk gelombang tegangan berikut.



Penyelesaian :

$$V_p = 6 \text{ V} \quad ; \quad V_{pp} = 6 \text{ V} \quad ; \quad T = 3 \text{ s}$$

$$\text{a).} \quad V_{rr} = \frac{1}{3} \left(\int_0^2 6 dt + \int_2^3 0 dt \right) = \frac{1}{3} (6 \times 2 + 0) = 4 \text{ V}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\int_0^2 6^2 dt + \int_2^3 0^2 dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{3} (36 \times 2 + 0)} = 4,9 \text{ V}$$

$$V_p = 6 \text{ V} \quad ; \quad V_{pp} = 10 \text{ V} \quad ; \quad T = 3 \text{ s}$$

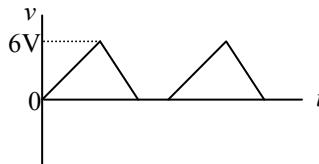
$$\text{b).} \quad V_{rr} = \frac{1}{3} \left(\int_0^2 6 dt + \int_2^3 -4 dt \right) = \frac{1}{3} (6 \times 2 - 4 \times 1) = 2,66 \text{ V}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\int_0^2 6^2 dt + \int_2^3 (-4)^2 dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{3} (36 \times 2 + 16 \times 1)} = 5,42 \text{ V}$$

Pemahaman :

Gelombang periodik dalam contoh di atas, mempunyai persamaan gelombang yang terdiri dari banyak suku sebagaimana dijelaskan pada gelombang komposit. Akan tetapi untuk menghitung nilai rata-rata ataupun efektif, kita cukup melihat satu siklus saja dan gelombangpun kita nyatakan dalam bagian-bagian yang mempunyai persamaan yang sederhana.

CONTOH 1.15 : Tentukanlah nilai tegangan puncak (V_p), tegangan puncak-puncak (V_{pp}), periode (T), tegangan rata-rata (V_{rr}), dan tegangan efektif dari bentuk gelombang tegangan di samping ini.



Penyelesaian :

$$V_p = 6 \text{ V} \quad ; \quad V_{pp} = 6 \text{ V} \quad ; \quad T = 2 \text{ s}$$

$$V_{rr} = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 3t dt + \int_1^2 (6 - 6(t-1)) dt + \int_2^3 0 dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6 \times 3}{2} \right) = 2,25 \text{ V}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\int_0^1 9t^2 dt + \int_1^2 (6 - 6(t-1))^2 dt + \int_2^3 0^2 dt \right)} = 3,0 \text{ V}$$

SOAL-SOAL : MODEL SINYAL

Dalam soal-soal berikut ini, satuan waktu t adalah
 s = detik ; ms = milidetik ; μs = mikrodetik

1. Gambarkan dan tentukan persamaan bentuk gelombang sinyal anak tangga berikut ini :

- a) v_1 : amplitudo 5 V, muncul pada $t = 0$.
- b) v_2 : amplitudo 10 V, muncul pada $t = 1s$.
- c) v_3 : amplitudo -5 V, muncul pada $t = 2s$.

2. Dari sinyal-sinyal di soal 1, gambarkanlah bentuk gelombang sinyal berikut ini.

- a). $v_4 = v_1 + v_2$
- b). $v_5 = v_1 + v_3$
- c). $v_6 = v_1 + v_2 + v_3$

3. Gambarkanlah bentuk gelombang sinyal yang diperoleh dengan cara mengintegrasikan bentuk gelombang sinyal pada soal 1.

4. Gambarkanlah bentuk gelombang sinyal yang diperoleh dengan cara mengintegrasikan bentuk gelombang sinyal pada soal 3.

5. Gambarkan dan tentukan persamaan bentuk gelombang pulsa tegangan berikut ini :

- a). Amplitudo 5 V, lebar pulsa 1 s, muncul pada $t = 0$.
- b). Amplitudo 10 V, lebar pulsa 2 s, muncul pada $t = 1s$.
- c). Amplitudo -5 V, lebar pulsa 3 s, muncul pada $t = 2 s$.

6. Gambarkan dan tentukan persamaan bentuk gelombang sinyal eksponensial yang muncul pada $t = 0$ dan konstanta waktu τ , berikut ini :

- a). v_a = amplitudo 5 V, $\tau = 20$ ms.
- b). v_b = amplitudo 10 V, $\tau = 20$ ms.
- c). v_c = amplitudo -5 V, $\tau = 40$ ms.

7. Dari bentuk gelombang sinyal pada soal 6, gambarkanlah bentuk gelombang sinyal berikut.

- a). $v_d = v_a + v_b$
- b). $v_e = v_a + v_c$
- c). $v_f = v_a + v_b + v_c$

8. Tentukan persamaan bentuk gelombang sinyal sinus berikut ini :

- a). Amplitudo 10 V, puncak pertama terjadi pada $t = 0$, frekuensi 10 Hz.
- b). Amplitudo 10 V, puncak pertama terjadi pada $t = 10$ ms, frekuensi 10 Hz.
- c). Amplitudo 10 V, pergeseran sudut fasa 0° , frekuensi 10 rad/detik.
- d). Amplitudo 10 V, pergeseran sudut fasa $+30^\circ$, frekuensi 10 rad/detik.

9. Gambarkanlah bentuk gelombang komposit berikut.

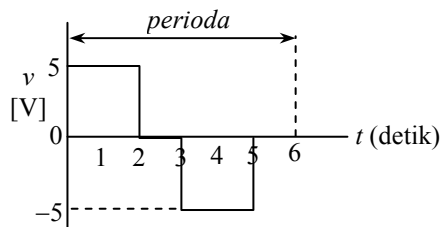
- a). $v_1 = 10\{1 - e^{-100t}\}u(t)$ V
- b). $v_2 = \{10 - 5e^{-100t}\}u(t)$ V
- c). $v_3 = \{10 + 5 \sin(10\pi t)\}u(t)$ V
- d). $v_4 = 10\{1 + e^{-t} \sin(10\pi t)\}u(t)$ V

10. Gambarkanlah bentuk gelombang sinus yang disearahkan penuh, yang persamaannya adalah

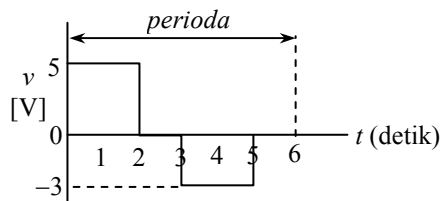
$$v = |A \cos(2\pi t / T_0)| \text{ V}$$

dengan A = amplitudo, T_0 = perioda.

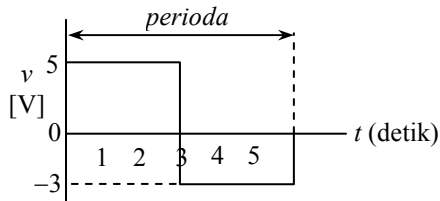
11. Tentukan persamaan siklus pertama dari bentuk gelombang periodik yang digambarkan berikut ini.



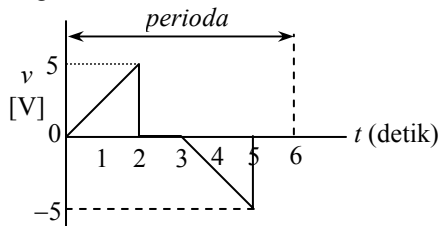
12. Tentukan persamaan siklus pertama dari bentuk gelombang periodik yang digambarkan berikut ini.



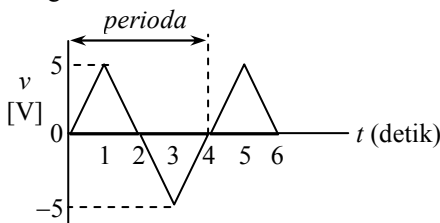
13. Tentukan persamaan siklus pertama dari bentuk gelombang periodik yang digambarkan berikut ini.



14. Tentukan persamaan siklus pertama dari bentuk gelombang periodik yang digambarkan berikut ini.



15. Tentukan persamaan siklus pertama dari bentuk gelombang periodik yang digambarkan berikut ini.



16. Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal pada soal 10.

17. Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal pada soal 11.

18. Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal pada soal 12.

19. Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal pada soal 13.

20. Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal pada soal 14.

21. Hitung nilai rata-rata dan nilai efektif sinyal pada soal 15.

22. a). Gambarkan bentuk gelombang sinyal periodik yang berupa deretan pulsa tegangan yang amplitudonya 10 V, lebar pulsa 20 ms, periode 50 ms.

b). Hitung nilai rata-rata sinyal.

c). Hitung nilai efektif sinyal.

23. a). Gambarkan bentuk gelombang sinyal periodik hasil integrasi bentuk gelombang pada soal nomor 22.

b). Hitung nilai rata-rata sinyal.

c). Hitung nilai efektif sinyal.

24. a). Gambarkan sinyal tegangan periodik berbentuk gelombang gigi gergaji yang amplitudonya 10 V dengan periode 0,5 s.

b). Hitung nilai rata-rata sinyal.

c). Hitung nilai efektif sinyal.

25. Untuk menggerakkan sebuah bandul diperlukan pulsa arus 50 mA dengan lebar pulsa 3 ms. Pulsa arus tersebut harus diberikan setiap detik. Jika pulsa arus itu diambil dari batere berkapasitas 0,5 Ah, berapa lamakah batere akan bertahan ?

1.2. Model Piranti

Tujuan :

- memahami bahwa dalam analisis rangkaian listrik piranti dinyatakan sebagai elemen rangkaian yang merupakan model linier dari piranti;
- mampu memformulasikan karakteristik arus-tegangan piranti / elemen pasif : resistor, kapasitor, induktor, transformator, saklar;
- mampu memformulasikan karakteristik arus-tegangan piranti / elemen aktif : sumber tegangan & sumber arus bebas maupun tak-bebas.

Karakteristik Piranti

Suatu unit piranti mempunyai karakteristik tertentu.

Perilaku suatu piranti dinyatakan oleh *karakteristik $i-v$* yang dimilikinya, yaitu hubungan antara arus yang melalui piranti dengan tegangan yang ada di antara terminalnya.

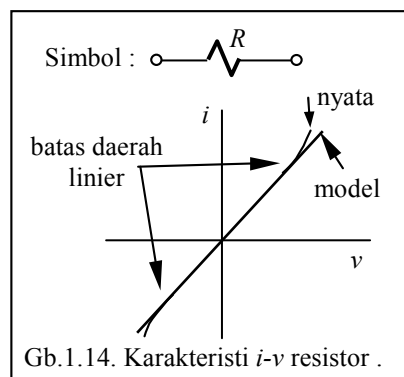
Pada umumnya hubungan ini cukup rumit dan tidak linier. Untuk keperluan analisis, kita menggunakan suatu *model linier* yang lebih sederhana yang cukup mendekati sifat-sifat yang menonjol dari piranti itu. Untuk membedakan antara piranti sebagai *benda nyata* dengan *modelnya*, model itu kita sebut *elemen*. Berikut ini akan kita bahas piranti-piranti dan elemen-elemen rangkaian, yang kita kelompokkan menjadi dua kelompok yaitu *elemen pasif* dan *elemen aktif*.

Piranti dan Elemen Pasif

Resistor

Kita mengenal resistor dalam rentang dimensi (ukuran) yang lebar. Resistor yang digunakan pada rangkaian elektronika berukuran hanya beberapa milimeter bahkan ukuran mikron yang terdapat dalam satu chip. Untuk keperluan variasi tegangan terdapat potensiometer yang berupa resistor dengan kontak geser. Untuk rangkaian pemroses energi, resistor mempunyai ukuran yang besar seperti misalnya resistor yang digunakan dalam lokomotif kereta listrik model lama. Pada dasarnya kita memerlukan resistor yang murni resistif. Akan tetapi dalam kenyataan hal ini tidak selalu dapat dicapai. Namun demikian dengan teknik-teknik pembuatan tertentu, selalu diusahakan agar resistor mendekati keadaan resistif murni tersebut (lihat Lampiran B).

Resistor adalah piranti yang sesungguhnya mempunyai karakteristik $i-v$ yang tidak linier (non linier) seperti terlihat pada Gb.1.14. Namun kalau kita perhatikan karakteristik ini, ada bagian tertentu yang dapat didekati dengan hubungan linier, yaitu bagian yang berada dalam batas daerah operasi resistor tersebut. Batas daerah operasi ini biasanya dinyatakan sebagai batas daya (*power rating*), yaitu daerah yang mempunyai kurva $i-v$ berbentuk garis lurus melalui titik asal. Dalam analisis rangkaian kita selalu memanfaatkan resistor dalam batas-batas kemampuan daya-nya sehingga kita mempunyai *resistor linier*.



Gb.1.14. Karakteristi $i-v$ resistor .

Karakteristik i - v Resistor. Dengan mengikuti konvensi pasif, hubungan antara arus dan tegangan dari resistor dapat ditulis dalam suatu persamaan yang dikenal sebagai hukum Ohm yaitu :

$$v_R = R i_R \quad \text{atau} \quad i_R = G v_R \quad \text{dengan} \quad G = \frac{1}{R} \quad (1.32)$$

R dan G adalah konstanta positif.

Parameter R disebut *resistansi* dengan satuan ohm, Ω . Parameter G disebut *konduktansi* dengan satuan siemens, S (atau *mho* dalam literatur lama). Secara grafis, hukum Ohm berbentuk garis lurus. Karakteristik i - v dalam hukum Ohm adalah *linier dan bilateral*. *Linier* berarti karakteristiknya berbentuk garis lurus, sehingga tegangan selalu sebanding dengan arus, dan demikian pula sebaliknya. *Bilateral* berarti bahwa kurva karakteristiknya simetris terhadap titik (0,0). Karena sifat bilateral ini maka pembalikan tegangan akan menyebabkan pembalikan arah arus tanpa mengubah besar arusnya. Dengan demikian kita dapat menghubungkan resistor dalam rangkaian tanpa memperhatikan polaritasnya. Hal ini berbeda dengan piranti lain seperti dioda, transistor, OP AMP, sumber, yang menuntut kita untuk selalu memperhatikan polaritasnya karena piranti-piranti ini tidak bersifat bilateral.

Daya Pada Resistor. Daya yang diserap resistor dapat dihitung dengan hubungan

$$p_R = v_R i_R = i_R^2 R = v_R^2 G = \frac{v_R^2}{R} \quad (1.33)$$

Di sini, R bernilai positif maka daya selalu positif. Berdasarkan konvensi pasif, hal ini berarti bahwa resistor selalu *menyerap daya*.

CONTOH 1.16 : Tegangan pada sebuah resistor 400Ω adalah 200 V (konstan). Berapakah arus yang mengalir melalui resistor tersebut dan berapakah daya yang diserap ? Dalam waktu 8 jam, berapakah energi yang diserap ?

Penyelesaian :

Arus dan daya pada resistor adalah

$$i = \frac{v}{R} = \frac{200}{400} = 0,5 \text{ A} \quad \text{dan} \quad p = vi = \frac{v^2}{R} = \frac{(200)^2}{400} = 100 \text{ W}$$

Karena tegangan dan arus konstan maka jumlah energi yang diserap selama 8 jam adalah

$$w = \int_0^8 p dt = \int_0^8 100 dt = 100 \times 8 = 800 \text{ Watt.jam} = 0,8 \text{ kWh}$$

CONTOH 1.17 : Tegangan pada suatu resistor 1200Ω berubah terhadap waktu sebagai $v_R = 240 \sin 400t$ Volt. Bagaimanakah arus yang melalui resistor dan daya yang diserapnya ?

Penyelesaian :

Arus yang melalui resistor adalah $i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{240 \sin 400t}{1200} = 200 \sin 400t \text{ mA}$.

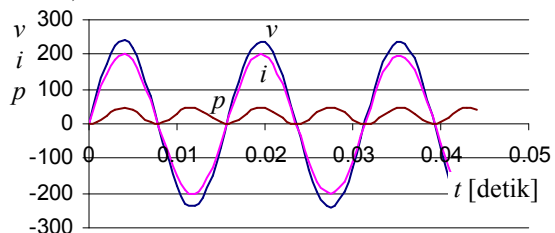
Daya yang diserap adalah $p_R = v_R i_R = 240 \sin 400t \times 0,2 \sin 400t = 48 \sin^2 400t \text{ W}$

Dengan menggunakan kesamaan $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, maka nilai daya dapat dituliskan

$$p_R = 48 (1 - \cos 800t)/2 = 24 - 24 \cos 800t \text{ W}$$

Pemahaman :

Jika kita gambarkan tegangan, arus, dan daya akan kita peroleh gambar seperti di samping ini.



Arus dan tegangan bervariasi secara bersamaan. Hal ini terlihat juga dari persamaan arus dan tegangan, yang keduanya merupakan fungsi sinus. Daya bervariasi secara periodik dengan frekuensi dua kali lipat dari frekuensi tegangan maupun arus, namun nilainya tidak pernah negatif. Nilai rata-rata daya selalu positif; hal ini dapat dilihat juga dari persamaannya yang menunjukkan bahwa daya terdiri dari komponen konstan 24 W ditambah komponen yang bervariasi sinus (yang nilai rata-ratanya 0). Menurut konvensi pasif, hal ini berarti bahwa resistor selalu menyerap daya.

Kapasitor

Seperti halnya resistor, kita mengenal kapasitor yang berdimensi kecil yang sering dipakai pada rangkaian elektronika sampai kapasitor berdimensi besar yang digunakan dalam rangkaian pemrosesan energi yang kita kenal sebagai *capacitor bank*. Untuk keperluan penalaan, kita mengenal juga kapasitor dengan nilai yang dapat diubah yang disebut kapasitor variabel.

Kapasitor adalah suatu piranti dinamik yang berbasis pada variasi kuat medan listrik yang dibangkitkan oleh sumber tegangan. Ada berbagai bentuk kapasitor yang dapat kita jumpai dalam praktek (lihat Lampiran C). Bentuk yang paling sederhana adalah dua pelat paralel yang dipisahkan oleh suatu bahan dielektrik. Bahan dielektrik ini memberikan gejala resistansi. Dalam mempelajari analisis rangkaian listrik kita menganggap kapasitor sebagai piranti ideal, tanpa mengandung resistansi. Suatu kapasitor mempunyai *kapasitansi* C yang besarnya adalah

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \quad (1.34)$$

dengan ϵ_r adalah permitivitas relatif dielektrik dan ϵ_0 adalah permitivitas ruang hampa. A adalah luas pelat dan d adalah tebal dielektrik yang sama dengan jarak pelat. Kapasitansi ini merupakan konstanta hubungan antara beda tegangan pelat-pelat kapasitor dengan muatannya:

$$q = Cv_C \quad (1.35)$$

Satuan kapasitansi adalah *farad* (F) (sebagai penghormatan kepada Michel Faraday, seorang fisikawan Inggris).

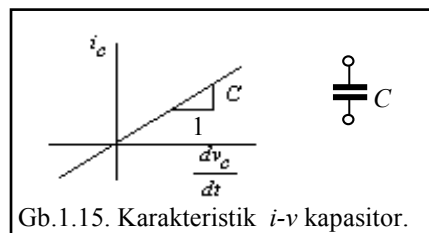
Karakteristik i - v Kapasitor Ideal. Hubungan antara arus dan tegangan kapasitor dapat kita peroleh dari turunan $q(t)$

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \frac{d(Cv_C)}{dt} = C \frac{dv_C}{dt} \quad (1.36)$$

Hubungan i - v ini dapat kita gambarkan dalam bentuk grafik seperti terlihat pada Gb.1.19. Arus i_C berbanding lurus dengan turunan terhadap waktu dari v_C dan kemiringan dari garis itu adalah C .

Dalam relasi (1.36), arus i_C merupakan turunan terhadap waktu dari tegangan v_C . Hal ini berarti bahwa jika v_C konstan maka arusnya nol, dan sebaliknya kalau arusnya nol berarti tegangannya konstan. Dengan kata lain kapasitor bersifat sebagai rangkaian terbuka jika diberi tegangan searah. Jadi arus hanya akan mengalir jika tegangannya berubah terhadap waktu dan oleh karena itu kapasitor disebut elemen dinamik.

Akan tetapi perubahan tegangan yang tak-kontinu akan memberikan arus yang tak-terhingga besarnya; hal demikian ini secara fisis tidak mungkin. Oleh karena itu tegangan kapasitor harus merupakan fungsi kontinu dari waktu. Untuk mencari tegangan v_C kita gunakan



Gb.1.15. Karakteristik i - v kapasitor.

hubungan antara arus dan tegangan yang sudah kita peroleh, yaitu $i_C = C dv_C/dt$, dengan mengalikan kedua ruas dengan dt dan mengintegrasinya:

$$\int_{v_C(t_0)}^{v_C(t)} dv_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt \quad (1.37)$$

Jika dalam menentukan batas-batas integrasi tersebut diatas, kita menganggap bahwa pada saat $t = t_0$ kapasitor sudah mempunyai tegangan sebesar $v_C(t_0)$ maka integrasi di atas memberikan :

$$v_C = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt \quad (1.38)$$

Kalau pada saat $t=t_0$ kapasitor belum bertegangan maka $v_C(t_0)=0$, sehingga kita mempunyai hubungan

$$v_C = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt \quad (1.39)$$

Daya Dan Energi Pada Kapasitor. Dengan mengikuti konvensi pasif, daya kapasitor dapat kita tuliskan sebagai

$$p_C = v_C i_C = C v_C \frac{dv_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} C v_C^2 \right] \quad (1.40)$$

Persamaan (1.40) ini menunjukkan bahwa daya bisa positif bisa juga negatif karena tegangan kapasitor dan laju perubahannya bisa mempunyai tanda yang berlawanan. Daya positif berarti kapasitor menyerap daya, sedangkan kalau daya negatif berarti kapasitor memberikan daya. Kemampuan kapasitor untuk *menyerap* dan *memberikan daya* ini mempunyai arti bahwa kapasitor dapat *menyimpan energi*. Besarnya energi yang tersimpan pada kapasitor dapat kita lihat dari persamaan (1.40). Karena kita tahu bahwa daya adalah turunan terhadap waktu dari energi, maka apa yang berada dalam tanda kurung pada persamaan (1.40) di atas tentulah menunjukkan besarnya energi. Secara matematis besarnya energi pada saat t dapat kita peroleh dari persamaan di atas, yaitu

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 + \text{konstanta} \quad (1.41)$$

Konstanta pada (1.41) adalah besarnya energi yang telah tersimpan sebelumnya. Apabila simpanan energi awal ini nol, maka

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 \quad (1.42)$$

Energi yang tersimpan ini tidak pernah negatif sebab ia sebanding dengan kwadrat dari tegangan. Kapasitor akan menyerap daya dari rangkaian jika ia sedang melakukan penyimpanan energi. Ia akan mengeluarkan energi yang disimpannya itu pada waktu ia memberikan energi pada rangkaian. Namun alih energi netto tidak pernah negatif ; hal ini berarti bahwa kapasitor adalah elemen pasif.

Karena tegangan kapasitor menentukan *status* atau *keadaan energi* dari elemen ini, maka tegangan kapasitor disebut sebagai *peubah keadaan (state variable)*.

Secara singkat dapat kita katakan bahwa kapasitor merupakan suatu elemen dinamik dengan sifat-sifat sebagai berikut :

- 1). Arus yang melalui kapasitor akan nol jika tegangannya tidak berubah terhadap waktu. Kapasitor berperilaku seperti rangkaian terbuka pada tegangan searah.
- 2). Tegangan kapasitor adalah fungsi kontinu dari waktu. Perubahan tak kontinu dari tegangan kapasitor memerlukan arus dan daya yang tak terhingga besarnya, yang secara fisis tidak mungkin terjadi.
- 3). Kapasitor menyerap daya dari rangkaian jika ia melakukan penyimpanan energi. Ia mengeluarkan energi yang disimpan sebelumnya, jika ia memberikan energi pada rangkaian.

CONTOH 1.18 : Tegangan pada suatu kapasitor $2 \mu\text{F}$ berubah terhadap waktu sebagai $v_C = 200\sin 400t$ Volt. Bagaimanakah arus yang melalui kapasitor dan daya yang *diserapnya*?

Penyelesaian :

Arus yang melalui kapasitor adalah

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = 2 \times 10^{-6} \times \frac{d}{dt}(200 \sin 400t) = 160 \cos 400t \text{ mA}$$

Daya yang *diserap* kapasitor adalah

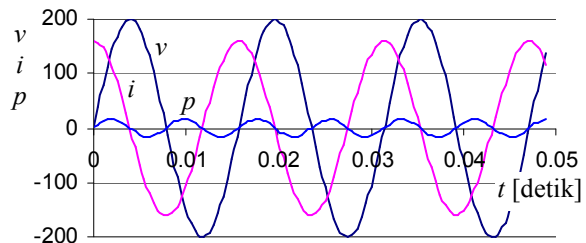
$$\begin{aligned} p_C &= v_C i_C = 200 \sin 400t \times 0.16 \cos 400t \\ &= 32 \cos 400t \sin 400t \\ &= 16 \sin 800t \text{ W} \end{aligned}$$

Pemahaman :

Jika tegangan, arus, dan daya kita gambarkan akan kita lihat keadaan yang berbeda dengan apa yang kita temui pada resistor pada contoh 1.17.

Pada waktu tegangan mulai naik, arus justru sudah mulai menurun dari nilai maksimumnya. Bentuk gelombang tegangan mencapai puncak pertama-nya lebih lambat dari bentuk gelombang arus; dengan perkataan lain *arus mendahului tegangan*.

Perbedaan kemunculan ini disebut pergeseran fasa yang untuk kapasitor besarnya adalah 90° ; jadi arus mendahului tegangan dengan beda fasa sebesar 90° . Hal ini akan kita pelajari lebih lanjut di Bab-5.



Daya bervariasi secara sinus dengan frekuensi dua kali lipat dari frekuensi tegangan maupun arus. Akan tetapi variasi ini berada di sekitar nilai 0; hal ini berbeda dari resistor. Pada selang waktu tertentu daya bernilai positif (selama setengah perioda) dan pada selang waktu berikutnya bernilai negatif (selama setengah perioda berikutnya), dan demikian seterusnya. Menurut konvensi pasif, hal ini berarti bahwa kapasitor menyerap daya selama setengah perioda dan memberikan daya selama setengah perioda berikutnya. Secara keseluruhan tidak akan ada penyerapan daya netto; hal ini berbeda dengan resistor yang justru selalu menyerap daya karena daya selalu positif.

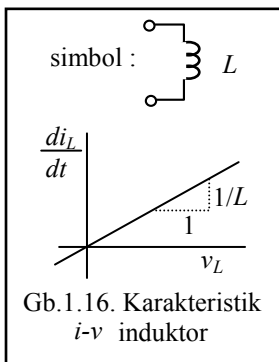
Induktor

Induktor sebagai piranti induktif, dengan dimensi kecil, banyak dipakai dalam rangkaian elektronika. Untuk rangkaian pemroses energi, kita mengenal piranti induktif berukuran ukuran besar yang disebut *reaktor* (lihat sub-bab 6.2). Induktor dibangun dari kawat (konduktor) yang dililitkan pada suatu inti yang terbuat dari bahan magnetik ataupun tanpa inti (berinti udara). Kegunaan dari inti bahan magnetik dapat dilihat pada sub-bab 6.1. Oleh karena ia terbuat dari gulungan kawat, maka induktor selalu mengandung resistansi. Akan tetapi dalam analisis rangkaian listrik yang akan kita pelajari, kita menganggap induktor sebagai piranti ideal tanpa mengandung resistansi.

Induktor adalah elemen dinamik yang berbasis pada variasi medan magnetik yang ditimbulkan oleh arus. Pada kumparan dengan jumlah lilitan N , dan dialiri arus sebesar i_L , akan timbul fluksi magnet sebesar $\phi = kNi_L$, dengan k adalah suatu konstanta. Jika tidak ada kebocoran, fluksi ini akan memberikan *fluksi lingkup* sebesar $\lambda = N\phi = kN^2 i_L$. Hubungan antara arus yang melalui induktor itu dengan fluksi lingkup yang ditimbulkannya dinyatakan dengan suatu konstanta L yang kita sebut *induktansi* induktor dengan satuan *henry*.

$$\lambda = Li_L = kN^2 i_L \quad (1.43)$$

Karakteristik i - v Induktor Ideal. Menurut hukum Faraday, tegangan pada induktor sama dengan laju perubahan fluksi lingkungannya. Karakteristik i - v dari induktor dapat diperoleh dari turunan terhadap waktu dari λ dengan mengingat bahwa L adalah suatu konstanta.



$$v_L = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d[Li_L]}{dt} = L \frac{di_L}{dt} \quad (1.44)$$

Dengan demikian kita mendapatkan hubungan i - v untuk induktor

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1.45)$$

Hubungan ini dapat kita gambarkan seperti terlihat pada Gb.1.16. Turunan terhadap waktu dari i_L pada (1.45) di atas, menunjukkan bahwa tegangan pada induktor adalah nol jika arus tidak berubah terhadap waktu. Jadi pada arus searah tegangan induktor adalah nol, $v_L = 0$; ia berperilaku seperti suatu hubung singkat. Induktor adalah elemen dinamik karena hanya jika ada perubahan arus maka ada tegangan. Akan tetapi perubahan arus yang tak kontinu menyebabkan tegangan menjadi tak terhingga besarnya, yang secara fisis tak mungkin terjadi. Oleh karena itu arus i_L harus kontinu terhadap waktu (arus tidak dapat berubah secara tiba-tiba).

Untuk mencari arus i_L kita gunakan hubungan antara arus dan tegangan yang sudah kita peroleh, yaitu $v_L = L di/dt$, dengan mengalikan kedua ruas dengan dt dan mengintegrasinya:

$$\int_{i_L(t_0)}^{i_L(t)} di_L = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L dt \quad (1.46)$$

Jika dalam menentukan batas-batas integrasi tersebut diatas kita menganggap bahwa pada saat $t=t_0$ induktor sudah dialiri arus sebesar $i_L(t_0)$, maka integrasi di atas memberikan :

$$i_L = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L dt \quad (1.47)$$

Kalau pada saat $t = t_0$ induktor belum dialiri arus maka $i_L = 0$, dan

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_L dt \quad (1.48)$$

Daya Dan Energi Pada Induktor. Dengan mengikuti konvensi pasif, daya pada induktor dapat kita tuliskan sebagai

$$p_L = v_L i_L = Li_L \frac{di_L}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} Li_L^2 \right] \quad (1.49)$$

Seperti halnya pada kapasitor, persamaan daya untuk induktor ini juga menunjukkan bahwa daya bisa positif bisa juga negatif karena arus induktor dan laju perubahannya bisa mempunyai tanda yang berlawanan. Daya positif berarti induktor menyerap daya sedangkan kalau dayanya negatif berarti induktor memberikan daya. Kemampuan induktor untuk menyerap dan memberikan daya; hal ini berarti bahwa induktor dapat menyimpan energi.

Besarnya energi yang tersimpan pada induktor dapat kita lihat dari persamaan (1.49). Daya adalah turunan terhadap waktu dari energi, maka apa yang berada dalam tanda kurung pada persamaan (1.49) menunjukkan besarnya energi. Secara matematis besarnya energi pada saat t dapat kita peroleh dari persamaan tersebut, yaitu

$$w_L = \frac{1}{2} Li_L^2 + \text{konstanta} \quad (1.50)$$

Konstanta pada (1.50) adalah besarnya energi yang telah tersimpan pada saat tertentu sebelumnya. Apabila simpanan energi awal ini nol, maka energi induktor adalah

$$w_L = \frac{1}{2} Li_L^2 \quad (1.51)$$

Energi yang tersimpan ini tidak pernah negatif sebab ia sebanding dengan kwadrat dari arus. Induktor akan menyerap daya dari rangkaian jika ia sedang melakukan penyimpanan energi. Ia akan mengeluarkan energi yang disimpannya jika ia memberikan energi pada rangkaian. Seperti halnya pada kapasitor, alih energi netto pada induktor tidak pernah negatif; hal ini menunjukkan bahwa induktor adalah elemen pasif. Karena arus induktor menentukan status atau keadaan energi dari elemen ini, maka *arus* disebut sebagai *variabel keadaan (state variable)* dari induktor.

Secara singkat dapat kita katakan bahwa induktor merupakan suatu elemen dinamik dengan sifat-sifat sebagai berikut :

- 1). Tegangan pada induktor akan nol jika arusnya tidak berubah terhadap waktu. Induktor berperilaku seperti suatu hubung singkat pada arus searah.
- 2). Arus yang melalui induktor adalah fungsi kontinu dari waktu. Perubahan tak kontinu dari arus induktor memerlukan tegangan serta daya yang tak terhingga besarnya, yang secara fisis tidak mungkin terjadi.
- 3). Induktor menyerap daya dari rangkaian jika ia melakukan penyimpanan energi. Ia mengeluarkan energi yang disimpan sebelumnya jika ia memberikan energi pada rangkaian.

CONTOH 1.19 : Tegangan pada suatu induktor 2,5 H berubah terhadap waktu sebagai $v_L = 200\sin 400t$ Volt. Bagaimanakah arus yang melalui induktor dan daya yang diserapnya ?

Penyelesaian :

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \rightarrow i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt = \frac{200}{2.5 \times 400} \times (-\cos 400t) + K$$

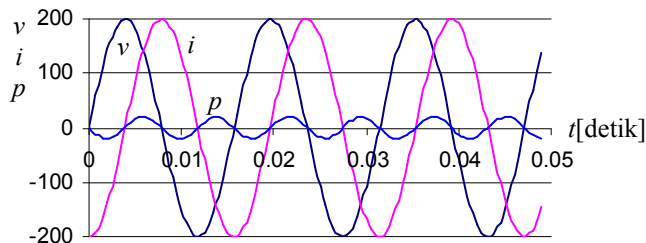
Konstanta integrasi K adalah arus pada induktor pada saat awal integrasi dilakukan, yang kita sebut arus awal induktor. Jika arus awal ini tidak ada maka

$$\Rightarrow i_L = -200 \cos 400t \text{ mA}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_L &= v_L i_L = 200 \sin 400t \times (-0.2 \cos 400t) = -40 \sin 400t \cos 400t \\ &= -20 \sin 800t \text{ W} \end{aligned}$$

Pemahaman :

Gambar variasi v , i , dan p pada induktor adalah sebagai berikut.



Bentuk gelombang tegangan mencapai nilai puncak pertama-nya lebih awal dari bentuk gelombang arus. Jadi tegangan mendahului arus atau lebih sering dikatakan bahwa arus ketinggalan dari tegangan (hal ini merupakan kebalikan dari kapasitor). Perbedaan fasa di sini juga 90° , artinya arus ketinggalan dari tegangan dengan sudut fasa 90° . Kita akan mempelajari hal ini lebih lanjut di Bab-5.

Seperti halnya dengan kapasitor, daya bervariasi secara sinus di sekitar nilai nol. Jadi pada induktor juga tidak terjadi penyerapan daya netto. Induktor menyerap daya dalam setengah periode, dan memberikan daya pada setengah periode berikutnya.

Induktansi Bersama

Misalkan ada sebuah kumparan yang dialiri arus yang berubah terhadap waktu. Misalkan pula ada sebuah kumparan lain yang berdekatan dengan kumparan yang pertama. Fluksi dari kumparan yang pertama akan melingkupi pula kumparan yang kedua dan akan membangkitkan tegangan pada kumparan yang kedua itu. Kopling antara arus yang berubah di kumparan yang pertama dengan tegangan yang terbangkitkan di kumparan yang kedua menunjukkan adanya suatu *induktansi bersama*. Hal yang sebaliknya juga terjadi, yaitu jika kumparan kedua dialiri arus maka akan timbul tegangan di kumparan pertama. Jadi kalau masing-masing dialiri arus maka keduanya akan saling mempengaruhi.

Misalkan jumlah lilitan kumparan pertama adalah N_1 ; jika arus yang mengalir adalah i_1 maka akan timbul fluksi magnet sebesar $\phi_1 = k_1 N_1 i_1$, dengan k_1 adalah konstanta proporsionalitas. Jika kita anggap tidak ada kebocoran fluksi, maka ϕ_1 akan melingkupi semua lilitan di kumparan ini dan akan menimbulkan apa yang kita sebut sebagai *fluksi lingkup* sebesar $\lambda_{11} = N_1 \phi_1 = k_1 N_1^2 i_1$. Misalkan pula jumlah lilitan kumparan kedua N_2 dengan arus i_2 . Fluksi magnet di kumparan ini adalah $\phi_2 = k_2 N_2 i_2$ dan fluksi lingkungannya $\lambda_{22} = N_2 \phi_2 = k_2 N_2^2 i_2$. Jadi secara singkat

$$\begin{aligned} \phi_1 &= k_1 N_1 i_1 & \text{dan} & & \phi_2 &= k_2 N_2 i_2 \\ \lambda_{11} &= k_1 N_1^2 i_1 & \text{dan} & & \lambda_{22} &= k_2 N_2^2 i_2 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Sebagai akibat fluksi lingkup masing-masing, di setiap kumparan terdapat tegangan

$$v_{11} = \frac{d\lambda_{11}}{dt} = k_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} \quad \text{dan} \quad v_{22} = \frac{d\lambda_{22}}{dt} = k_2 N_2^2 \frac{di_2}{dt} \quad (1.53)$$

Kalau kedua kumparan itu didekatkan satu terhadap lainnya, maka sebagian fluksi yang ditimbulkan oleh kumparan yang satu akan melingkupi pula kumparan yang lain. Jadi selain fluksi yang ditimbulkannya sendiri, setiap kumparan melingkupi juga fluksi yang berasal dari kumparan yang lain. Kumparan pertama melingkupi fluksinya sendiri ϕ_1 , dan fluksi yang berasal dari kumparan kedua $\phi_{12} = N_1 k_{12} \phi_2$. Demikian pula dengan kumparan kedua, selain ϕ_2 melingkupi pula $\phi_{21} = N_2 k_{21} \phi_1$ yang berasal dari kumparan pertama.

Di kumparan pertama, ϕ_{12} akan memberikan fluksi lingkup $\lambda_{12} = N_1 \phi_{12} = N_1^2 k_{12} \phi_2$ dan tegangan v_{12} . Di kumparan kedua, ϕ_{21} akan memberikan fluksi lingkup $\lambda_{21} = N_2 \phi_{21} = N_2^2 k_{21} \phi_1$ dan tegangan v_{21} . Dengan demikian maka di kumparan pertama ada tegangan v_{11} yang timbul karena fluksi lingkungannya sendiri, λ_{11} , dan ada tegangan v_{12} yang timbul karena ada pengaruh dari kumparan kedua, λ_{12} . Jadi tegangan total di kumparan pertama adalah $v_1 = v_{11} + v_{12}$. Demikian pula halnya dengan kumparan kedua; di kumparan ini terdapat tegangan total sebesar $v_2 = v_{22} + v_{21}$. Keadaan untuk kedua kumparan ini kita tuliskan seperti berikut.

<p>Kumparan 1</p> $v_1 = v_{11} + v_{12} = \frac{d\lambda_{11}}{dt} + \frac{d\lambda_{12}}{dt}$ $= [k_1 N_1^2] \frac{di_1}{dt} + [k_{12} N_1 N_2] \frac{di_2}{dt}$	<p>Kumparan 2</p> $v_2 = v_{22} + v_{21} = \frac{d\lambda_{22}}{dt} + \frac{d\lambda_{21}}{dt}$ $= [k_2 N_2^2] \frac{di_2}{dt} + [k_{21} N_2 N_1] \frac{di_1}{dt}$
--	--

(1.54)

Kita dapat melihat pada (1.54) bahwa ada empat macam parameter induktansi yaitu :

$$L_1 = k_1 N_1^2 \quad L_2 = k_2 N_2^2 \quad (1.55)$$

$$\text{dan} \quad M_{12} = k_{12} N_1 N_2 \quad M_{21} = k_{21} N_2 N_1 \quad (1.56)$$

Induktansi L_1 dan L_2 adalah induktansi sendiri dari masing-masing kumparan sedangkan parameter M_{12} dan M_{21} adalah induktansi bersama antara dua kumparan tersebut. Dalam medium magnet yang linier $k_{12} = k_{21} = k_M$ dan oleh karena itu maka

$$M_{12} = M_{21} = k_M N_1 N_2 = M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (1.57)$$

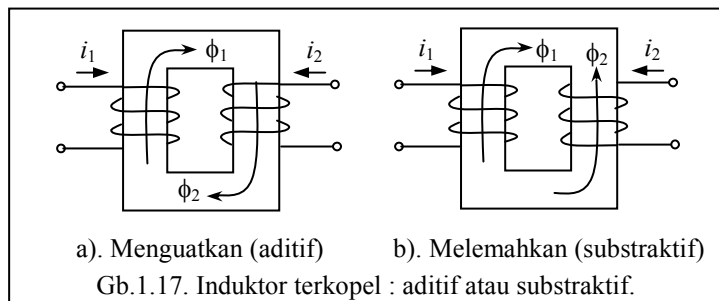
dengan $k = k_M / \sqrt{(k_1 k_2)}$.

Dengan demikian maka secara umum tegangan di masing-masing kumparan adalah :

$$v_1 = v_{11} + v_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad \text{dan} \quad v_2 = v_{22} + v_{21} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \quad (1.58)$$

Tanda \pm pada (1.58) diperlukan karena pengaruh dari kumparan yang satu terhadap kumparan yang lain tidaklah selalu positif tetapi dapat pula negatif. Pengaruh itu positif jika fluksi dari kumparan yang satu *memperkuat* fluksi dari kumparan yang dipengaruhi, sedangkan apabila *memperlemah* maka dikatakan bahwa pengaruhnya negatif.

Bagaimana pengaruh positif dan negatif ini



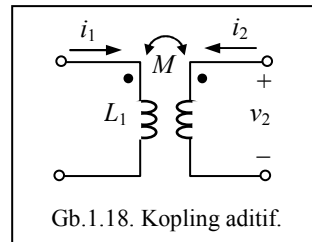
Gb.1.17. Induktor terkopel : aditif atau substraktif.

terjadi dapat dijelaskan melalui Gb.1.17 yang memperlihatkan dua kumparan terkopel magnetik. Arah fluksi yang dibangkitkan oleh arus di masing-masing kumparan menurut *kaidah tangan kanan*. Dengan arah lilitan kumparan seperti Gb.1.21.a. maka fluksi ϕ_1 yang dibangkitkan oleh i_1 dan ϕ_2 yang dibangkitkan oleh i_2 akan sama arahnya. Dalam keadaan demikian fluksi ϕ_2 dan ϕ_1 saling memperkuat atau *aditif*. Pada Gb.1.21.b. arah lilitan kumparan kedua berlawanan dengan arah lilitan kumparan kedua pada Gb.1.21.a. Fluksi ϕ_2 berlawanan arah dengan ϕ_1 . Dalam hal ini kedua fluksi saling melemahkan atau *substraktif*.

Konvensi Titik. Karena ada kemungkinan fluksi dari kumparan yang satu *memperkuat* atau *memperlemah* fluksi dari kumparan yang lain sehingga diperlukan tanda \pm pada persamaan (1.58), timbul pertanyaan kapan tanda + atau - kita gunakan sedangkan kita tahu bahwa nilai M selalu positif. Untuk itu kita menggunakan *konvensi titik (dot convention)* untuk menyatakan pengaruh positif atau negatif dari satu kumparan terhadap kumparan lainnya. Kita memberikan tanda titik di salah satu ujung di setiap kumparan dengan pengertian:

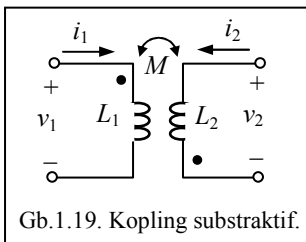
Arus i yang masuk ke ujung yang bertanda titik di salah satu kumparan, akan membangkitkan tegangan berpolaritas positif pada ujung kumparan yang lain yang juga bertanda titik. Besarnya tegangan yang terbangkit adalah $M di/dt$.

Hubungan Tegangan dan Arus. Dengan konvensi titik tersebut di atas, hubungan arus dan tegangan pada dua kumparan yang terkopel secara magnetik, yang simbolnya terlihat pada Gb.1.18., dapat kita turunkan. Dalam penurunan hubungan ini, untuk rangkaian masing-masing kumparan kita tetap menggunakan *konvensi pasif*, sedangkan untuk kopling antara kedua kumparan kita gunakan *konvensi titik*. Jadi hubungan tegangan dan arus untuk Gb.1.18. adalah



Gb.1.18. Kopling aditif.

$$v_1 = v_{11} + v_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad ; \quad v_2 = v_{22} + v_{21} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (1.59)$$



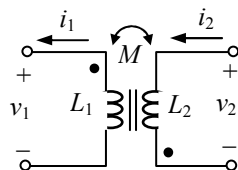
Gb.1.19. Kopling substraktif.

Gb.1.18. adalah simbol dari dua kumparan yang terkopel aditif, yaitu dua kumparan dengan arah lilitan seperti pada Gb.1.17.a. Simbol untuk kumparan terkopel substraktif, dengan arah lilitan seperti Gb.1.17.b., diperlihatkan oleh Gb.1.19. dengan hubungan tegangan dan arus :

$$v_1 = v_{11} + v_{12} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(-i_2)}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (1.60)$$

$$v_2 = v_{22} + v_{21} = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

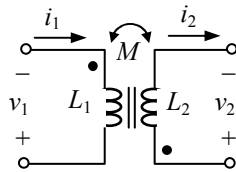
Perhatikanlah bahwa tanda titik terkait dengan keadaan nyata (arah lilitan) sedangkan referensi arus dan tegangan ditentukan tanpa dikaitkan dengan keadaan sebenarnya (kita ingat bahwa arah referensi arus dan tegangan tidak selalu sama dengan keadaan sebenarnya). Oleh karena itu *tanda titik tidak saling terkait dengan referensi arus dan tegangan*. Hal ini jelas terlihat dari Gb.1.19. dan persamaan (1.60) di atas. Berikut ini dua contoh lain penurunan hubungan tegangan dan arus dua kumparan yang terkopel magnetik.



$$v_1 = L_1 \frac{d(-i_1)}{dt} + M \frac{d(-i_2)}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{d(-i_1)}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

$$(1.61)$$



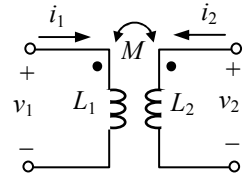
$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{d(-i_1)}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Perhatikanlah bahwa dalam penurunan persamaan di atas kita tetap mengikuti konvensi pasif, sedangkan pengaruh timbal balik dari kumparan, yang ditunjukkan oleh $M \frac{di}{dt}$, kita mengikuti konvensi titik.

CONTOH 1.20 : Pada dua kumparan terkopel magnetik seperti pada gambar di samping ini, diketahui bahwa tegangan di kumparan pertama adalah

$$v_1 = 10 \cos 100t \text{ V}$$

Tentukanlah tegangan v_2 pada kumparan kedua.



$$L_1 = L_2 = 10 \text{ mH} ; M = 2 \text{ mH}$$

Penyelesaian :

Hubungan arus dan tegangan pada rangkaian kumparan pertama adalah

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \rightarrow 10 \cos 100t = 0,01 \frac{di_1}{dt} + 0$$

karena $i_2 = 0$. Untuk kumparan kedua, $v_2 = 0 + 0,002 \frac{di_1}{dt}$

Dengan memasukkan nilai di_1/dt dari persamaan kumparan pertama ke persamaan kumparan kedua diperoleh $v_2 = 0,002 \frac{10 \cos 100t}{0,01} = 2 \cos 100t \text{ V}$

Pemahaman :

Apabila kita salah memilih tanda induktansi bersama, maka hasil yang akan kita peroleh adalah $v_2 = -2 \cos 100t \text{ V}$

Kesalahan dalam menentukan tanda untuk M akan menyebabkan ter-inversinya sinyal v_2 . Kesalahan demikian jika terjadi dalam praktek, misalnya untuk pengaturan kecepatan motor, pada waktu motor hendak diperlambat justru kecepatan motor akan bertambah. Oleh karena itu kita harus berhati-hati.

CONTOH 1.21 : Pada dua kumparan terkopel magnetik seperti pada gambar di samping ini, diketahui bahwa arus masing-masing kumparan adalah

$$i_1 = 5 \cos 10000t \text{ dan } i_2 = 2 \sin 5000t \text{ A.}$$

Tentukanlah tegangan v_1 dan v_2 .

Penyelesaian :

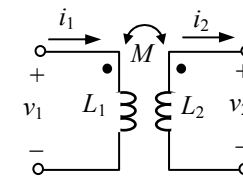
Persamaan tegangan-arus untuk masing-masing kumparan adalah

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{d(-i_2)}{dt} ; v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai yang diketahui, akan diperoleh

$$v_1 = -10 \sin 10000t - 3 \cos 5000t \text{ V}$$

$$v_2 = -5 \cos 5000t - 15 \sin 10000t \text{ V}$$



$$L_1 = 0,2 \text{ mH}, L_2 = 0,5 \text{ mH} \\ M = 0,3 \text{ mH}$$

Transformator Ideal

Apa yang kita bahas mengenai kumparan terkopel magnetik di atas adalah prinsip dari transformator. Kumparan yang pertama disebut kumparan primer sedang yang kedua disebut kumparan sekunder. Seperti halnya resistor, induktor dan kapasitor, kita mengenal transformator ukuran kecil yang dipakai pada rangkaian elektronika, dan transformator ukuran besar yang dipakai pada rangkaian pemroses energi, yang biasa disebut transformator daya. Selain itu ada pula transformator ukur untuk keperluan pengukuran arus besar, yang disebut transformator arus, dan pengukuran tegangan tinggi yang disebut transformator tegangan. Dalam kenyataan, transformator-transformator tersebut mengandung ketidak-sempurnaan misalnya fluksi bocor, rugi daya di belitan dan rugi daya dalam inti-nya, serta ketidak-linieran. Transformator yang akan kita bahas di sini adalah transformator ideal.

Kopling Sempurna. Pada transformator ideal kita menganggap bahwa *kopling magnetik antar kumparan terjadi secara sempurna*, artinya semua fluksi yang melingkupi kumparan primer juga melingkupi kumparan sekunder dan demikian pula sebaliknya.

Jika jumlah lilitan di kumparan primer dan sekunder masing-masing adalah N_1 dan N_2 sedangkan arus masing-masing adalah i_1 dan i_2 maka fluksi masing-masing kumparan adalah

$$\phi_1 = k_1 N_1 i_1 \quad \text{dan} \quad \phi_2 = k_2 N_2 i_2$$

dengan k_1 dan k_2 adalah konstanta proporsionalitas.

Selain fluksinya sendiri, setiap kumparan juga melingkupi fluksi yang dibangkitkan di kumparan yang lain, yaitu

$$\phi_{12} = k_{12} N_2 i_2 \quad \text{dan} \quad \phi_{21} = k_{21} N_1 i_1$$

Jika terjadi kopling sempurna, maka

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \phi_2 & \text{dan} & \quad \phi_{21} = \phi_1 \\ \text{yang berarti : } & k_{12} N_2 i_2 = k_2 N_2 i_2 & \text{dan} & \quad k_{21} N_1 i_1 = k_1 N_1 i_1 \\ \text{sehingga : } & k_{12} = k_2 & \text{dan} & \quad k_{21} = k_1 \end{aligned}$$

Untuk medium maknit yang linier maka $k_{12} = k_{21} = k_M$, sehingga untuk transformator ideal ini $k_1 = k_2 = k_{12} = k_{21} = k_M$.

Dengan demikian maka (1.55) dan (1.56) menjadi

$$L_1 = k_M N_1^2 \quad ; \quad L_2 = k_M N_2^2 \quad ; \quad M = k_M N_1 N_2 = \sqrt{L_1 L_2} \quad (1.63)$$

Dengan menggunakan (1.58), tegangan pada kumparan primer dan sekunder dapat kita peroleh yaitu

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} = N_1 \left(k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} \right) \\ v_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} = \pm N_2 \left(\pm k_M N_2 \frac{di_2}{dt} + k_M N_1 \frac{di_1}{dt} \right) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Rasio persamaan pertama dan kedua dari (1.64), memberikan

$$\frac{v_1}{v_2} = \pm \frac{N_1}{N_2} = \pm a \quad (1.65)$$

Parameter a disebut *perbandingan lilitan*. Jika $a > 1$, kita mempunyai transformator penurun tegangan (*step-down transformer*) dan jika $a < 1$ kita mempunyai transformator penaik tegangan (*step-up transformer*). Tanda + atau - tergantung dari arah referensi arus primer dan sekunder relatif terhadap referensi titik. Jika referensi arah arus di kedua kumparan menuju atau meninggalkan referensi titik kita berikan tanda +.

Rugi Daya Nol. Selain kopling sempurna, kita juga menganggap bahwa dalam transformator ideal tidak ada rugi daya. Hal ini berarti bahwa daya yang diserap (atau hilang) di kedua kumparan adalah nol.

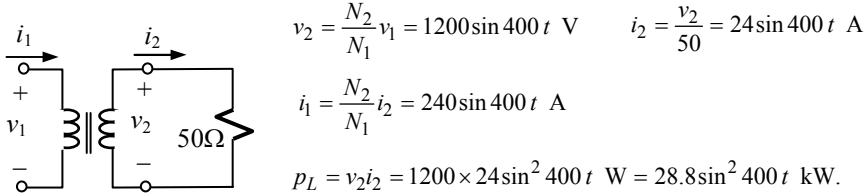
$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0 \quad \text{atau} \quad \boxed{\frac{i_2}{i_1} = -\frac{v_1}{v_2} = \mp \frac{N_1}{N_2} = \mp a} \quad (1.66)$$

Dari (1.65) dan (1.66) jelas bahwa jika tegangan sekunder lebih besar dari tegangan primer (*step-up transformer*) maka arus sekunder lebih kecil dari arus primer. Transformator jenis inilah yang digunakan pada transmisi daya listrik. Dengan tegangan yang tinggi, arus pada saluran transmisi menjadi kecil sehingga rugi-rugi daya pada saluran (i^2R) dapat ditekan.

CONTOH 1.22 : Suatu transformator mempunyai perbandingan lilitan $N_1/N_2 = 0,1$. Dengan tegangan masukan $120\sin 400t$ V, dan dengan menganggap transformator ini ideal, tentukanlah tegangan sekunder, arus sekunder, serta arus primer, jika diberi beban resistif sebesar 50Ω . Hitung pula daya yang diserap oleh beban.

Penyelesaian :

Gambar dari rangkaian transformator ini adalah seperti berikut.



CONTOH 1.23 : Dalam contoh 1.22, berapakah resistansi yang dilihat oleh sumber (yaitu resistansi di sisi primer) ?

Penyelesaian :

Dalam contoh ini tegangan primer adalah $v_1 = 120\sin 400t$ sedangkan arus yang mengalir adalah $i_1 = 240\sin 400t$. Jadi resistansi yang terlihat di sisi primer adalah

$$R'_2 = \frac{v_1}{i_1} = \frac{120 \sin 400t}{240 \sin 400t} = 0,5 \Omega$$

Pemahaman :

R'_2 ini disebut *resistansi masukan ekuivalen* (*equivalent input resistance*). Jika kita perhatikan lebih lanjut akan terlihat bahwa

$$\boxed{R'_2 = \frac{v_1}{i_1} = \frac{(N_1 / N_2) v_2}{(N_2 / N_1) i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_2}$$

CONTOH 1.24 : Sebuah transformator (ideal) digunakan untuk menurunkan tegangan dari $220\cos 314t$ V ke $110\cos 314t$ V. Jumlah lilitan primer maupun sekunder tidak diketahui. Untuk mencarinya dibuat kumparan pembantu (kumparan ketiga) dengan 20 lilitan. Dengan memberikan tegangan sebesar $220\cos 314t$ V pada belitan primer diperoleh tegangan sebesar $5,5\cos 314t$ V di kumparan pembantu. Carilah jumlah lilitan primer dan sekunder.

Penyelesaian :

Pada waktu tegangan primer $220\cos 314t$ V, tegangan di kumparan pembantu adalah $5,5\cos 314t$ V. Jadi perbandingan jumlah lilitan kumparan primer dan kumparan pembantu adalah

$$\frac{N_1}{N_3} = \frac{220\cos 314t}{5,5\cos 314t} = 40$$

Karena $N_3 = 20$, maka $N_1 = 40 \times 20 = 800$ lilitan.

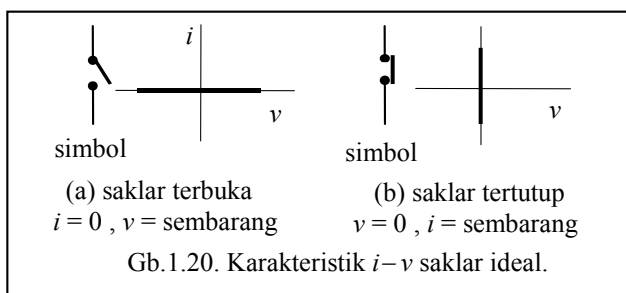
Perbandingan lilitan transformator adalah $\frac{N_2}{N_1} = \frac{110\cos 314t}{220\cos 314t} = 0,5$

Jadi jumlah lilitan sekunder adalah $N_2 = 400$ lilitan.

Saklar

Saklar adalah piranti yang digunakan untuk menutup dan membuka rangkaian. Dalam keadaan tertutup, suatu saklar mempunyai batas arus maksimum yang mampu ia salurkan. Dalam keadaan terbuka, saklar mempunyai batas tegangan maksimum yang mampu ia tahan. Dalam keadaan terbuka ini, terdapat arus kecil yang tetap mengalir yang kita sebut arus bocor. Sebaliknya dalam keadaan tertutup masih terdapat tegangan kecil antar terminalnya.

Untuk rangkaian-elektronik kita mengenal saklar dengan kemampuan arus dalam orde mA dan tegangan dalam orde Volt. Sedangkan piranti penutup dan pembuka rangkaian dengan kapasitas besar kita jumpai pada rangkaian pemroses energi. Pemutus dan pembuka rangkain berkapasitas besar ini mempunyai kemampuan arus dalam orde kA dan tegangan dalam kV yang dikenal dengan sebutan *circuit breaker*. Dalam analisis rangkaian, saklar dimodelkan sebagai kombinasi *rangkaian hubung-terbuka* dan *rangkaian hubung-singkat* dan *dianggap ideal* dalam arti tidak terdapat rugi daya atau dengan kata lain daya selalu nol (tidak menyerap daya). Dalam keadaan terbuka, arus bernilai nol (tanpa arus bocor) sedangkan tegangan pada terminalnya bernilai sembarang tanpa batas. Dalam keadaan tertutup tegangan antara terminalnya nol sedangkan nilai arusnya sembarang tanpa batas. Gb.1.20. di bawah ini menggambarkan karakteristik saklar ideal yang dimaksud.



Elemen Sebagai Model Dari Gejala

Sebagaimana dijelaskan di atas, elemen adalah model dari piranti, seperti resistor, kapasitor, induktor dan sebagainya. Selain dari pada itu sering terdapat gejala-gejala adanya resistansi, atau kapasitansi, ataupun induktansi pada piranti atau antar piranti, pada konduktor atau antar konduktor dalam rangkaian listrik. Gejala-gejala seperti itu dapat pula dimodelkan sebagai elemen rangkaian. Sebagai contoh, pada saluran transmisi daya terdapat resistansi pada kawat, kapasitansi antar kawat dan antara kawat dengan tanah, dan juga terdapat induktansi. Pada piranti elektronik juga terdapat kapasitansi antar terminal yang disebut kapasitansi bocor. Accu mobil mengandung gejala adanya resistansi juga yang disebut resistansi internal. Resistansi, kapasitansi, ataupun induktansi pada piranti-piranti tersebut merupakan gejala yang ada pada piranti yang juga dapat dimodelkan sebagai elemen rangkaian.

Piranti dan Elemen Aktif

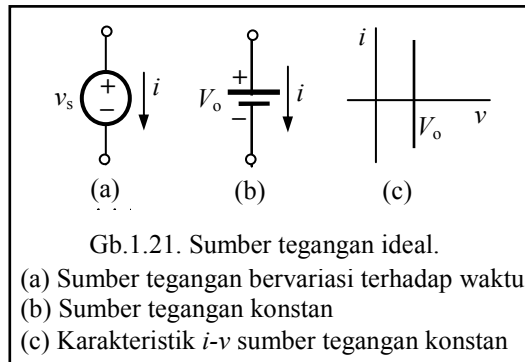
Sumber Bebas

Sumber bebas adalah sumber yang tidak tergantung dari peubah sinyal di bagian lain dari rangkaian. Sumber sinyal dapat dimodelkan dengan dua macam elemen, yaitu: *sumber tegangan* atau *sumber arus*. Sumber-sumber ini dapat membangkitkan sinyal yang konstan ataupun bervariasi terhadap waktu, yang merupakan masukan pada suatu rangkaian. Mereka sering disebut sebagai *fungsi penggerak* atau *forcing function* atau *driving function* yang mengharuskan rangkaian memberikan tanggapan.

Sumber Tegangan Bebas Ideal. Gb.1.21. memperlihatkan simbol dan karakteristik i - v dari sumber tegangan bebas ideal. Perhatikan referensi arus dan tegangannya, yang tetap mengikuti konvensi pasif. Karakteristik i - v sumber tegangan ideal memberikan persamaan elemen sbb:

$$\begin{aligned} v &= v_s ; \\ i &= \text{sembarang} \end{aligned}$$

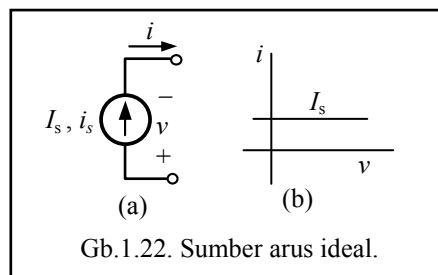
Persamaan ini menyatakan bahwa sumber tegangan ideal membangkitkan tegangan v_s pada terminalnya dan akan memberikan arus berapa saja yang diperlukan oleh rangkaian yang terhubung padanya.



Sumber Arus Bebas Ideal. Gb.1.22. menunjukkan simbol dan karakteristik i - v sumber arus bebas ideal. Perhatikan referensi arus dan tegangannya, yang juga tetap sesuai dengan konvensi pasif. Karakteristik i - v sumber arus ideal memberikan persamaan elemen:

$$i = i_s ; \quad v = \text{sembarang}$$

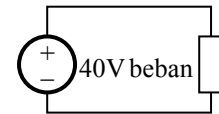
Sumber arus ideal memberikan arus i_s dalam arah sesuai dengan arah tanda anak panah pada simbolnya dan memberikan tegangan berapa saja yang diperlukan oleh rangkaian yang terhubung padanya. Perhatikan bahwa sumber arus *bukan* sumber yang tegangannya nol.



CONTOH 1.25 : Sebuah sumber tegangan konstan 40 V ideal, mencatu sebuah beban. Jika diketahui bahwa beban menyerap daya konstan sebesar 100 W, berapakah arus yang keluar dari sumber? Jika beban menyerap 200 W, berapakah arus yang keluar dari sumber?

Penyelesaian :

Karena merupakan sumber tegangan ideal maka ia akan memberikan arus berapa saja yang diminta beban pada tegangan yang konstan 40 V.



Jika daya yang diserap beban 100 W, maka arus yang diberikan oleh sumber adalah

$$i = \frac{p}{v} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ A}$$

Jika daya yang diserap beban 200 W, maka arus yang diberikan oleh sumber adalah

$$i = \frac{p}{v} = \frac{200}{40} = 5 \text{ A}$$

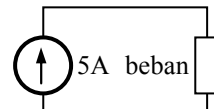
Pemahaman :

Sumber tegangan ideal memberikan arus berapa saja yang diminta oleh beban, pada tegangan kerja yang tidak berubah. Sumber semacam ini dapat kita gunakan untuk mendekati keadaan dalam praktek apabila sumber mempunyai kemampuan yang jauh lebih besar dari daya yang diperlukan oleh beban atau dengan kata lain sumber tersebut kita anggap mempunyai kapasitas yang *tak berhingga*.

CONTOH 1.26 : Sebuah sumber arus konstan 5 A ideal, mencatu sebuah beban. Jika diketahui bahwa beban menyerap daya konstan sebesar 100 W, pada tegangan berapakah sumber beroperasi? Jika beban menyerap 200 W, berapakah tegangan sumber?

Penyelesaian :

Sumber arus ideal memberikan arus tertentu, dalam hal ini 5 A, pada tegangan berapa saja yang diperlukan oleh beban.



Jika daya yang diserap beban 100 W, maka tegangan sumber adalah

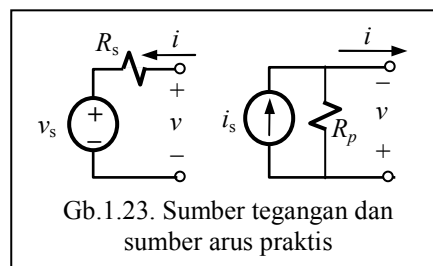
$$v = \frac{p}{i} = \frac{100}{5} = 20 \text{ V}$$

Jika daya yang diserap beban 200 W, maka tegangan sumber adalah

$$v = \frac{p}{i} = \frac{200}{5} = 40 \text{ V}$$

Sumber Praktis. Gb.1.23. menunjukkan model sumber tegangan dan sumber arus praktis; sumber ini disebut *praktis* karena mereka lebih mendekati keadaan nyata dibandingkan dengan model sumber ideal.

Suatu sumber nyata pada umumnya mengandung gejala-gejala adanya resistansi ataupun induktansi dan kapasitansi. Resistor R_s ataupun R_p dalam model sumber praktis yang terlihat pada Gb.1.23. merupakan representasi dari gejala resistansi yang hadir dalam sumber yang dimodelkan dan bukan mewakili resistor yang berupa piranti.

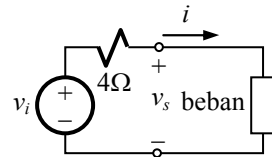


Gb.1.23. Sumber tegangan dan sumber arus praktis

CONTOH 1.27 : Sebuah sumber tegangan konstan praktis dengan resistansi 4Ω , mencatu sebuah beban. Jika diketahui bahwa beban menyerap daya konstan sebesar 100 W , dan diketahui pula bahwa arus yang mengalir padanya adalah $2,5 \text{ A}$, berapakah tegangan sumber dan arus yang keluar dari sumber? Jika sumber tidak dibebani, berapakah tegangannya?

Penyelesaian :

Rangkaian sumber praktis terdiri dari *sumber ideal* v_i dan *resistansi* sebesar 4Ω . Tegangan sumber praktis adalah v_s dan tegangan ini sama dengan tegangan pada beban.



Jika daya dan arus pada beban adalah 100 W dan $2,5 \text{ A}$, maka tegangan sumber adalah

$$v_s = \frac{p}{i} = \frac{100}{2.5} = 40 \text{ V}$$

Karena hanya ada satu beban yang dilayani oleh *sumber praktis*, maka arus yang keluar dari sumber sama dengan arus beban yaitu $2,5 \text{ A}$. Arus ini pula yang keluar dari sumber *tegangan ideal* v_i dan mengalir melalui R_i . Bagi sumber tegangan ideal v_i , daya yang diserap oleh resistansi R_i ikut menjadi bebannya, yaitu $p_{R_i} = i^2 R_i = (2.5)^2 \times 4 = 25 \text{ W}$. Dengan demikian *sumber tegangan ideal* menanggung beban $p_{tot} = 100 + 25 = 125 \text{ W}$. Dengan arus yang $2,5 \text{ A}$, maka tegangan sumber ideal adalah $v_i = 125 / 2.5 = 50 \text{ V}$.

Tegangan inilah yang akan terlihat pada sumber praktis, v_s , apabila ia tidak dibebani, karena pada saat tanpa beban tidak ada arus yang mengalir sehingga tidak ada tegangan pada R_i .

Pemahaman :

Dalam contoh di atas, sumber praktis yang merupakan sumber tegangan konstan, mempunyai resistansi R_i yang kita sebut resistansi internal. Resistansi inilah yang menyebabkan terjadinya perbedaan nilai tegangan sumber praktis pada saat berbeban dan pada saat tidak berbeban. Pada sumber praktis yang bukan tegangan konstan, misalnya tegangan sinus, tidak hanya terdapat resistansi internal saja tetapi mungkin juga induktansi internal.

CONTOH 1.28 : Sebuah accu (accumulator) 12 V , berkapasitas 40 Ah . Jika sebuah beban yang menyerap daya 10 Watt dihubungkan padanya, berapa lamakah accu tersebut dapat melayani beban yang ditanggungnya ?

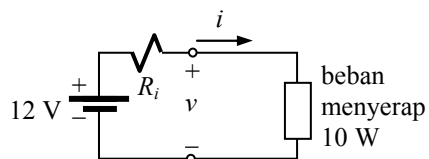
Penyelesaian :

Jika kita menganggap accu sebagai sebuah sumber tegangan ideal yang memberikan daya kepada beban dengan tegangan konstan 12 V , maka arus yang akan mengalir ke beban adalah

$$i = \frac{p}{v} = \frac{10}{12} \text{ A}$$

Karena kapasitasnya 40 Ah , accu akan mampu mencatu beban selama

$$t = \frac{40}{10/12} = 48 \text{ jam}$$



Pemahaman :

Accu mengubah energi kimia menjadi energi listrik. Dalam proses pengubahan tersebut terdapat sejumlah energi yang tidak dapat dikeluarkan melainkan berubah menjadi panas. Accu dapat dimodelkan sebagai sumber tegangan dengan resistansi

internal sebesar R_i . Jadi model rangkaian mirip dengan rangkaian pada contoh 1.27. seperti terlihat di samping ini. Dengan model ini maka energi tidak hanya diserap oleh beban tetapi juga oleh R_i . Dengan adanya resistansi internal itu tegangan pada beban akan lebih kecil dari tegangan sumber ideal. Selain dari pada itu, jika accu tidak mendapatkan tambahan energi dari luar, tegangan akan terus menurun selama proses pengaliran daya ke beban. Jika resistansi beban tidak berubah, tegangan pada beban juga akan menurun yang berarti bahawa penyerapan daya pada beban juga tidak konstan 10 watt.

Sumber Tak-Bebas (Dependent Sources)

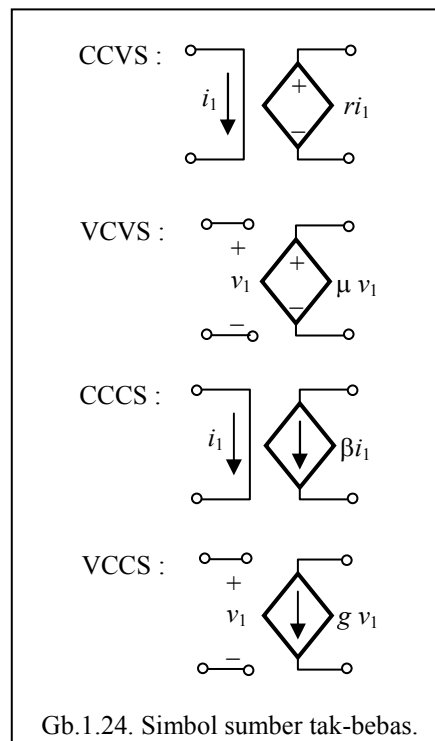
Sumber bebas yang kita ulas di atas adalah model dari suatu piranti; artinya, kita mengenalnya baik *sebagai elemen* maupun *sebagai piranti* (seperti halnya resistor, induktor dan kapasitor). Berbeda dengan elemen-elemen tersebut, *sumber tak-bebas* adalah elemen yang tidak mewakili piranti tertentu melainkan menjadi model unjuk kerja suatu piranti. Sumber tak-bebas adalah elemen aktif yang kita gunakan dalam kombinasi dengan elemen lain untuk memodelkan piranti aktif seperti misalnya transistor ataupun OP AMP. Keluaran sumber tak-bebas dikendalikan oleh (tergantung dari) tegangan atau arus di bagian lain dari rangkaian. Sumber tak-bebas yang akan kita pelajari adalah sumber tak-bebas linier, baik itu sumber tegangan maupun sumber arus.

Karena ada dua macam besaran yang dikendalikan, yaitu tegangan ataupun arus, dan ada dua macam besaran pengendali yang mungkin juga berupa arus ataupun tegangan, maka kita mengenal empat macam sumber tak-bebas, yaitu:

- Sumber tegangan dikendalikan oleh arus: *current-controlled voltage source (CCVS)*.
- Sumber tegangan dikendalikan oleh tegangan: *voltage-controlled voltage source (VCVS)*.
- Sumber arus dikendalikan oleh arus : *current-controlled current source (CCCS)*.
- Sumber arus dikendalikan oleh tegangan : *voltage-controlled current source (VCCS)*.

Gb.1.24. memperlihatkan simbol-simbol sumber tak bebas.

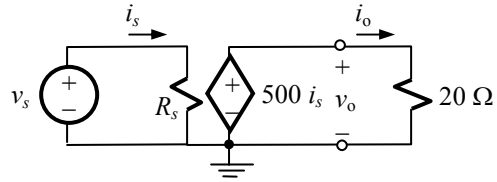
Kita ambil contoh CCCS. Arus keluaran CCCS tergantung dari arus masukan i_1 dan faktor perkalian tak berdimensi β , menjadi βi_1 . Ketergantungan seperti ini tidak kita dapatkan pada sumber bebas. Arus yang diberikan oleh sumber arus bebas, tidak tergantung dari rangkaian yang terhubung ke padanya.



Gb.1.24. Simbol sumber tak-bebas.

Masing-masing sumber tak-bebas mempunyai parameter tunggal μ , β , r , dan g sebagai cirinya. Parameter-parameter ini disebut *gain*. Dalam hal ini, μ dan β merupakan parameter yang tak berdimensi yang masing-masing disebut *voltage gain* dan *current gain*. Parameter r berdimensi ohm dan disebut *transresistance* (kependekan dari *transfer resistance*). Parameter g berdimensi siemens, disebut *transconductance*.

CONTOH 1.29 : Sebuah sumber tak-bebas CCVS seperti tergambar di bawah ini mencatu beban konstan yang mempunyai resistansi 20Ω . Rangkaian pengendali terdiri dari sumber tegangan ideal v_s dan resistansi $R_s = 60 \Omega$. Hitunglah daya yang diserap oleh beban jika sumber tegangan pengendali $v_s = 24 \text{ V}$. Hitung pula daya tersebut jika tegangan sumber pengendali dinaikkan menjadi 36 V .



Penyelesaian :

Tegangan pengendali v_s sama dengan tegangan pada resistansi R_s . Jika $v_s = 24 \text{ V}$, maka arus i_s adalah $i_s = \frac{v_s}{R_s} = \frac{24}{60} = 0,4 \text{ A}$. Tegangan keluaran $v_o = 500i_s = 500 \times 0,4 = 200 \text{ V}$.

Tegangan v_o ini sama dengan tegangan beban, sehingga daya yang diserap beban adalah $p_o = \frac{(v_o)^2}{20} = 2000 \text{ W}$.

Jika tegangan v_s dinaikkan menjadi 36 V , maka

$$i_s = \frac{36}{60} = 0,6 \text{ A} \rightarrow v_o = 500 \times 0,6 = 300 \text{ V} \rightarrow p_o = \frac{(300)^2}{20} = 4500 \text{ W}$$

Pemahaman :

Jika kita hitung, daya yang diberikan oleh sumber pengendali v_s akan kita peroleh

$$p_s = v_s i_s = 60 \times 0,4 = 24 \text{ W}$$

Daya ini jauh lebih kecil dari daya yang diserap beban, yaitu sebesar 2000 W . Hal ini berarti bahwa daya yang diterima oleh beban bukan berasal dari sumber v_s . Dari manakah asalnya ?

Telah disebutkan di depan bahwa sumber tak-bebas adalah elemen aktif yang kita gunakan dalam kombinasi dengan elemen lain untuk memodelkan piranti aktif. Piranti aktif ini mempunyai *catu daya* yang *tidak tergambar* dalam simbol sumber tak-bebas. Dari *catu daya* inilah sesungguhnya asal daya yang diterima oleh beban. Sumber v_s dalam contoh soal ini merupakan sumber pengendali dan bukan sumber daya untuk memberikan daya ke beban.

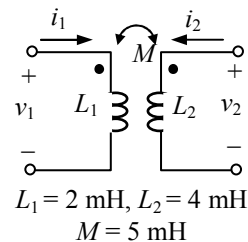
Sebagai contoh, model sumber tak-bebas ini dapat kita gunakan untuk memodelkan generator arus searah berpenguatan bebas. Sumber tegangan v_s merupakan sumber penguat untuk memberikan arus penguat sebesar i_s . Arus penguat ini menimbulkan fluksi magnet pada generator, yang jika diputar dengan kecepatan konstan akan memberikan tegangan dan daya ke beban. Dalam model generator arus searah ini, *catu daya* yang memberikan daya ke beban berupa masukan daya mekanis untuk memutar generator.

Piranti aktif lain dalam elektronika, seperti misalnya OP AMP atau transistor, dapat pula dimodelkan dengan sumber tak-bebas. *Catu daya* pada piranti-piranti ini berupa *catu daya listrik*, bukan *daya mekanis* seperti pada pemodelan generator arus searah di atas.

SOAL-SOAL : MODEL PIRANTI

1. Pada sebuah resistor $1 \text{ k}\Omega$ diterapkan satu pulsa tegangan 10 V , dengan lebar pulsa 100 ms . Hitung arus yang mengalir melalui resistor serta daya yang diserap resistor selama tegangan diterapkan. Hitung pula energi yang diserap resistor, dan jumlah muatan yang dipindahkan melalui resistor.
2. Pada sebuah resistor $10 \text{ }\Omega$ diterapkan tegangan eksponensial yang amplitudonya 200 V dan konstanta waktunya 200 ms . Hitunglah arus dan daya pada resistor. Perkirakanlah energi yang diserap resistor dan jumlah muatan yang dipindahkan melalui resistor.
3. Suatu arus sambaran petir dimodelkan sebagai bentuk gelombang eksponensial ganda yang terdiri dari gelombang positif beramplitudo $+100 \text{ kA}$ dengan konstanta waktu $200 \text{ }\mu\text{s}$ dan gelombang negatif beramplitudo -100 kA dengan konstanta waktu $20 \text{ }\mu\text{s}$. Arus sambaran petir ini melalui resistor $1 \text{ }\Omega$; hitunglah tegangan pada resistor dan jumlah muatan dalam sambaran petir ini.
4. Berapakah nilai maksimum arus yang melalui kapasitor $50 \text{ }\mu\text{F}$, jika diketahui bahwa tegangan pada kapasitor berbentuk sinus dengan amplitudo 100 V dan frekuensinya 100 rad/s ?
5. Tegangan pada kapasitor 100 pF berubah sebagai $v_C = 10 e^{-3000t} u(t) \text{ V}$. Berapa muatan kapasitor pada $t = 0^+$? Berapa muatannya pada $t = 1 \text{ ms}$?
6. Berapakah nilai maksimum tegangan pada induktor 2 H , jika diketahui bahwa arus yang mengalir berbentuk gelombang sinus dengan amplitudo 2 A dan frekuensinya 300 rad/s ?
7. Tegangan pada induktor 4 mH adalah $v_L = 40e^{-2000t} u(t) \text{ V}$. Bagaimanakah bentuk gelombang arusnya? Bagaimanakah dayanya?

8. Arus pada induktor 5 mH adalah $i_L(t) = [100 t e^{-1000t}] u(t) \text{ A}$. Carilah tegangan, serta dayanya.
9. Jika arus sambaran petir pada soal nomer 3 melalui sebuah induktor $10 \text{ }\mu\text{H}$, hitunglah tegangan pada induktor.
10. Pada dua kumparan terkopel berikut ini, tegangan $v_1 = 25[\sin 1000t] u(t) \text{ V}$. Kumparan kedua terbuka. Tuliskanlah hubungan i - v kumparan terkopel ini dan carilah i_1 dan v_2 .



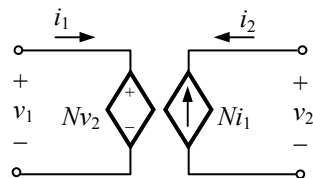
11. Jika pada soal nomer 10 yang diketahui adalah arus masukan, yaitu $i_1 = 2 [1 - e^{-2000t}] u(t) \text{ A}$, carilah v_2 . Pada $t = 1 \text{ s}$, berapakah v_2 ?
12. Jika pada soal nomer 10 tegangan masukan tidak diketahui akan tetapi diketahui $i_1 = 2\sin 1000t u(t)$, carilah v_1 dan v_2 .
13. Pada transformator ideal, berapakah perbandingan jumlah lilitan kumparan primer dan sekunder yang diperlukan untuk mengubah tegangan $380\cos 314t \text{ V}$, ke $190\cos 314t \text{ V}$?
14. Carilah nilai efektif (*rms*) tegangan primer dan sekunder pada soal nomer 13. Perbandingkanlah kedua nilai efektif ini! Bagaimanakah perbandingan nilai efektif arus? (Hasil ini selanjutnya dapat digunakan untuk menentukan nilai-nilai rms tanpa melalui pernyataan sinyal dalam fungsi t lagi).
15. Berdasarkan hasil analisis yang diperoleh pada soal nomer 14, tentukanlah perbandingan jumlah lilitan transformator ideal yang diperlukan untuk menurunkan tegangan bolak-balik sinus 240 V rms menjadi 12 V rms . Jika resistor $50 \text{ }\Omega$ dihubungkan pada sisi sekunder,

hitunglah arus dan daya masukan di sisi primer.

16. Sebuah transformator ideal dengan keluaran ganda, mempunyai jumlah lilitan primer 1000. Lilitan sekunder berjumlah 1200 lilitan terbagi menjadi 3 bagian, masing-masing 200 lilitan, 400 lilitan dan 600 lilitan. Jika tegangan primer berbentuk sinus 220 V rms, tentukanlah nilai rms dari tiga macam tegangan yang diperoleh di belitan sekunder.
17. Pada soal nomer 15, berapakah nilai resistansi yang dilihat dari sisi primer ?
18. Suatu piranti mempunyai resistansi masukan sebesar 1500Ω sehingga piranti ini dapat dimodelkan sebagai sebuah resistor 1500Ω . Piranti ini hendak dihubungkan ke penguat sinyal yang menghendaki agar bebannya mempunyai resistansi 150Ω . Untuk itu, antara keduanya dipasang transformator sehingga penguat sinyal akan merasakan adanya beban sebesar 150Ω walaupun beban sesungguhnya adalah 1500Ω . Tentukan perbandingan lilitan transformator yang diperlukan.
19. Apa yang dilakukan pada soal nomer 18 adalah penyesuaian resistansi suatu beban terhadap resistansi piranti dimana beban itu hendak dihubungkan. Penyesuaian itu dimaksudkan agar alih daya ke beban terjadi secara maksimal. Suatu penguat sinyal mempunyai resistansi keluaran 300Ω . Satu piranti lain mempunyai resistansi masukan 2200Ω hendak dihubungkan ke penguat tersebut. Tentukan perbandingan lilitan transformator yang diperlukan untuk menghubungkan dua piranti tersebut.
20. Sebuah pencatu daya dimodelkan sebagai sumber tegangan bebas 60 V dan resistansi seri R_i sebesar $0,5 \Omega$. Pada pembebanan 20 A , berapakah daya yang diberikan sumber dan yang diserap R_i ? Berapakah daya yang diterima oleh beban dan pada tegangan berapakah daya diterima.
21. Sebuah piranti pencatu daya dimodelkan sebagai sumber arus

praktis yang terdiri dari sumber arus bebas 2 A dengan resistor paralel $R_p = 100 \Omega$. Pada waktu dibebani, arus yang melalui R_p adalah $0,2 \text{ A}$. Pada tegangan berapakah sumber arus bekerja ? Berapakah daya yang diberikan oleh sumber arus ? Berapakah daya yang diserap oleh R_p ? Berapakah daya yang diterima beban ? Berapa arus beban ?

22. Sebuah piranti aktif dimodelkan sebagai CCCS dengan arus keluaran $I_o = 10I_f$ dimana I_f adalah arus pengendali. Piranti ini dibebani resistor 300Ω . Jika $I_f = 100 \text{ mA}$, berapakah daya yang diserap beban dan pada tegangan berapakah beban menyerap daya ?
23. Sebuah piranti aktif dimodelkan sebagai VCVS dengan tegangan keluaran $V_o = 100V_f$ dimana V_f adalah tegangan pengendali. Piranti ini dibebani resistor 50Ω . Jika $V_f = 2 \text{ V}$, berapakah daya yang diserap beban dan berapakah arus beban ?
24. Sebuah piranti aktif dimodelkan sebagai VCCS dengan arus keluaran $I_o = 2V_f$ dimana V_f adalah tegangan pengendali. Piranti ini dibebani resistor 50Ω . Jika $V_f = 2 \text{ V}$, berapakah daya yang diserap beban dan pada tegangan berapakah beban menyerap daya ?
25. Sebuah piranti aktif dimodelkan sebagai CCVS dengan tegangan keluaran $V_o = 100I_f$ dimana I_f adalah arus pengendali. Piranti ini dibebani resistor 300Ω . Jika $I_f = 2 \text{ A}$, berapakah daya yang diserap beban dan berapakah arus beban ?
26. Pada model sumber tak bebas berikut ini, tunjukkanlah bahwa karakteristik $i-v$ dari piranti yang dimodelkannya adalah karakteristik transformator ideal.



1.3. Spektrum Sinyal. (*Bagian ini untuk sementara dapat dilewati tanpa menimbulkan kesulitan dalam mempelajari analisis rangkaian di bab-bab selanjutnya.*)

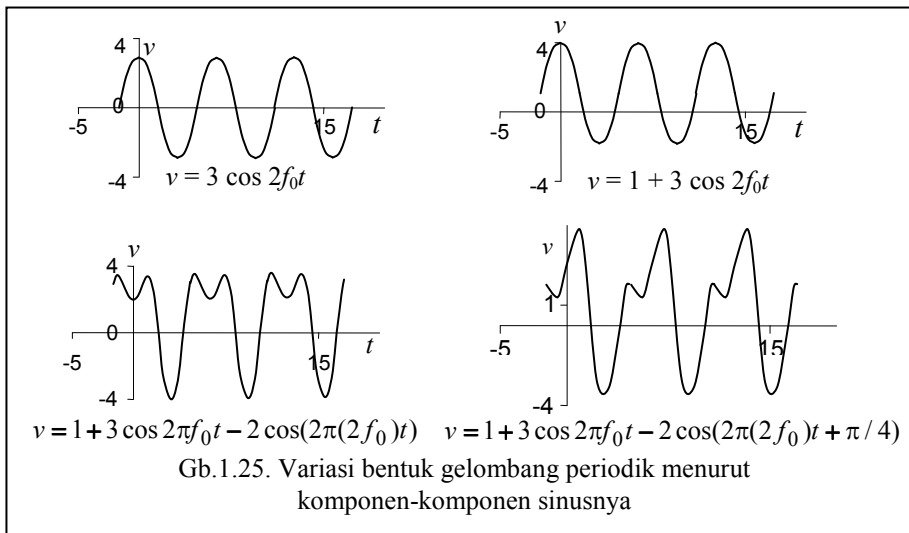
Tujuan :

- memahami bahwa sinyal periodik dapat dipandang sebagai suatu spektrum;
- mampu menggambarkan spektrum sinyal jika persamaannya diketahui;
- memahami arti lebar pita frekuensi.

Bentuk Gelombang Periodik dan Komponennya

Kita telah melihat bahwa bentuk gelombang adalah persamaan atau grafik yang menunjukkan perilaku sinyal sebagai fungsi waktu. Di samping sebagai fungsi waktu, suatu sinyal juga dapat dinyatakan sebagai suatu spektrum, yang menunjukkan perilaku sinyal sebagai fungsi frekuensi. Jadi suatu sinyal dapat dipelajari di kawasan waktu dengan memandangnya sebagai bentuk gelombang, atau di kawasan frekuensi dengan memandangnya sebagai suatu spektrum.

Suatu sinyal periodik dapat diuraikan menjadi jumlah dari beberapa komponen sinus, dengan amplitudo, sudut fasa, dan frekuensi yang berlainan. Dalam penguraian itu, sinyal akan terdiri dari komponen-komponen sinyal yang berupa komponen searah (nilai rata-rata dari sinyal), komponen sinus dengan frekuensi dasar f_0 , dan komponen sinus dengan frekuensi harmonisa nf_0 .



Frekuensi harmonisa adalah nilai frekuensi yang merupakan perkalian frekuensi dasar f_0 dengan bilangan bulat n . Frekuensi f_0 kita sebut sebagai frekuensi dasar karena frekuensi inilah yang menentukan perioda sinyal $T_0 = 1/f_0$. Frekuensi harmonisa dimulai dari harmonisa kedua ($2f_0$), harmonisa ketiga ($3f_0$), dan seterusnya yang secara umum kita katakan harmonisa ke- n mempunyai frekuensi nf_0 . Gb.1.25. memperlihatkan bagaimana bentuk gelombang akan berbeda apa-bila komponennya-komponennya berbeda.

Berikut ini kita akan melihat suatu contoh sinyal yang bentuk gelombangnya dinyatakan dengan persamaan

$$v = 10 + 30 \cos(2\pi f_0 t) + 15 \sin(2\pi(2f_0)t) - 7,5 \cos(2\pi(4f_0)t)$$

Sinyal ini merupakan jumlah dari satu komponen searah dan tiga komponen sinus yang kita sebut juga komponen bolak-balik. Komponen searah sering kita sebut komponen berfrekuensi nol karena $v(t) = V_A \cos(2\pi f t) = V_A$ jika $f = 0$. Komponen bolak-balik yang

pertama adalah komponen sinus dasar karena komponen inilah yang mempunyai frekuensi paling rendah tetapi tidak nol. Suku ketiga dan keempat adalah harmonisa ke-2 dan ke-4; harmonisa ke-3 tidak ada.

Untuk melihat spektrum sinyal, kita harus menuliskan tiap suku dengan bentuk yang sama yaitu bentuk standar seperti $V_A \cos(2\pi ft + \phi)$. Dengan menggunakan identitas $\sin(x) = \cos(x-90)$ dan $-\cos(x) = \cos(x+180)$, maka persamaan sinyal di atas dapat kita tulis

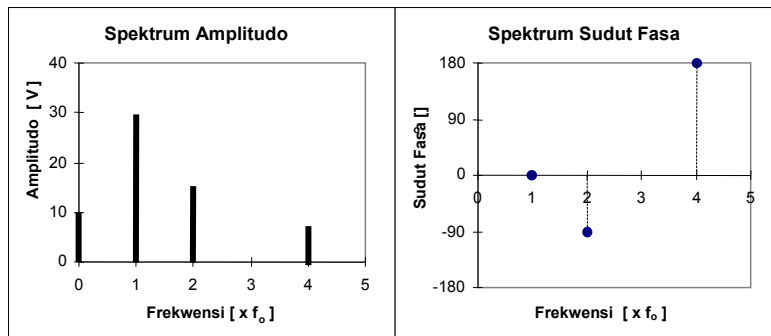
$$v = 10 + 30 \cos(2\pi f_0 t) + 15 \cos(2\pi 2 f_0 t - 90^\circ) + 7,5 \cos(2\pi 4 f_0 t + 180^\circ)$$

Dalam persamaan ini semua suku telah kita tuliskan dalam bentuk standar, dan kita dapat melihat amplitudo dan sudut fasa dari tiap komponen seperti dalam tabel berikut.

Frekuensi	0	f_0	$2f_0$	$4f_0$
Amplitudo (V)	10	30	15	7,5
Sudut fasa	-	0°	-90°	180°

Tabel ini menunjukkan spektrum dari sinyal yang sedang kita bahas karena ia menunjukkan baik amplitudo maupun sudut fasa dari semua komponen cosinus sebagai fungsi dari frekuensi. Sinyal yang kita bahas ini berisi empat macam frekuensi, yaitu : $0, f_0, 2f_0$, dan $4f_0$. Amplitudo dari setiap frekuensi secara berturut-turut adalah 10, 30, 15, dan 7,5 Volt. Sudut fasa dari komponen bolak-balik yang berfrekuensi $f_0, 2f_0$ dan $4f_0$ berturut turut adalah $0^\circ, -90^\circ$, dan 180° .

Dari tabel tersebut di atas kita dapat menggambarkan dua grafik yaitu grafik amplitudo dan grafik sudut fasa, masing-masing sebagai fungsi frekuensi. Grafik yang pertama kita sebut *spektrum amplitudo* dan grafik yang kedua kita sebut *spektrum sudut fasa*, seperti terlihat pada gambar berikut ini.



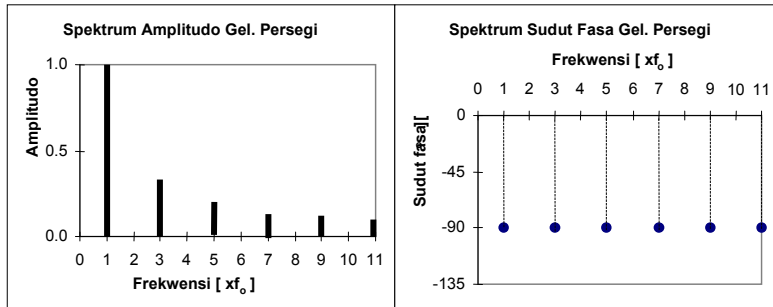
Penguraian sinyal menjadi penjumlahan harmonisa sinus, dapat diperluas untuk semua bentuk gelombang sinyal yang periodik. Bentuk gelombang persegi misalnya, yang juga merupakan suatu bentuk gelombang periodik, dapat diuraikan menjadi jumlah harmonisa sinus. Empat suku pertama dari persamaan hasil uraian gelombang persegi ini adalah sebagai berikut :

$$v = V_1 \cos(2\pi f_0 t - 90^\circ) + \frac{V_1}{3} \cos(2\pi 3 f_0 t - 90^\circ) + \frac{V_1}{5} \cos(2\pi 5 f_0 t - 90^\circ) + \frac{V_1}{7} \cos(2\pi 7 f_0 t - 90^\circ) + \dots$$

Dari persamaan untuk gelombang persegi ini, terlihat bahwa semua harmonisa mempunyai sudut fasa sama besar yaitu -90° ; amplitudonya menurun dengan meningkatnya frekuensi dengan faktor $1/n$; tidak ada komponen searah dan tidak ada harmonisa genap. Tabel amplitudo dan sudut fasa adalah seperti berikut.

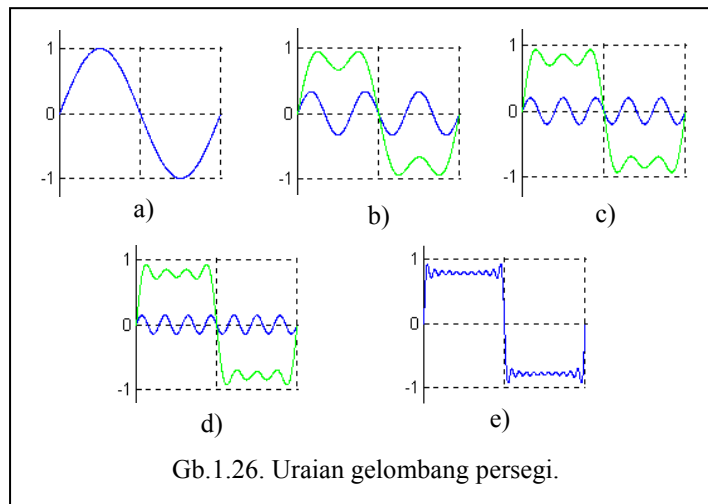
Frekuensi:	0	f_0	$2f_0$	$3f_0$	$4f_0$	$5f_0$	$6f_0$..	nf_0
Amplitudo:	0	V_1	0	$V_1/3$	0	$V_1/5$	0	..	V_1/n
Sudut Fasa:	-	-90°	-	-90°	-	-90°	-	..	-90°

Spektrum amplitudo dan spektrum sudut fasa dari gelombang persegi ini adalah seperti berikut.



Gb.1.26. berikut ini memperlihatkan bagaimana gelombang persegi dibangun dari harmonisa-harmonisanya.

- sinus dasar.
- harmonisa-3 dan sinus dasar + harmonisa-3.
- harmonisa-5 dan sinus dasar + harmonisa-3 + harmonisa-5.
- harmonisa-7 dan sinus dasar + harmonisa-3 + harmonisa-5 + harmonisa-7.
- hasil penjumlahan yang dilakukan sampai pada harmonisa ke-21.



Gb.1.26. Uraian gelombang persegi.

Lebar Pita

Dari contoh gelombang persegi di atas, terlihat bahwa dengan menambahkan harmonisa-harmonisa pada sinus dasarnya kita akan makin mendekati bentuk gelombang persegi. Penambahan ini dapat kita lakukan terus sampai ke suatu harmonisa tinggi yang memberikan bentuk gelombang yang kita anggap cukup memuaskan artinya cukup dekat dengan bentuk gelombang yang kita inginkan.

Pada spektrum amplitudo, kita juga dapat melihat bahwa makin tinggi frekuensi harmonisa akan makin rendah amplitudonya. Hal ini tidak hanya berlaku untuk gelombang persegi saja melainkan berlaku secara umum. Oleh karena itu kita dapat menetapkan suatu batas *frekuensi tertinggi* dengan menganggap amplitudo dari harmonisa-harmonisa yang frekuensinya di atas frekuensi tertinggi ini dapat diabaikan. Sebagai contoh, batas frekuensi tertinggi tersebut dapat kita ambil frekuensi harmonisa yang amplitudonya tinggal (misalnya) 2% dari amplitudo sinus dasar.

Jika batas frekuensi tertinggi dapat kita tetapkan, batas frekuensi terendah juga perlu kita tetapkan. Batas frekuensi terendah adalah frekuensi sinus dasar jika bentuk gelombang yang kita tinjau tidak mengandung komponen searah. Jika mengandung komponen searah maka frekuensi terendah adalah nol. Selisih dari frekuensi tertinggi dan terendah disebut *lebar pita* (*band width*).

Deret Fourier

Penguraian suatu sinyal periodik menjadi suatu spektrum sinyal tidak lain adalah pernyataan fungsi periodik kedalam deret Fourier yang kita pelajari dalam matematika. Jika $f(t)$ adalah fungsi periodik yang memenuhi persyaratan Dirichlet, maka $f(t)$ dapat dinyatakan sebagai deret Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$$

Persyaratan Dirichlet meminta agar $f(t)$ bernilai tunggal, integral $|f(t)|$ dalam selang satu perioda adalah berhingga, dan $f(t)$ mempunyai ketidak-kontinuitas terbatas dalam tiap perioda. Deret Fourier konvergen untuk fungsi periodik yang memenuhi persyaratan ini. Tetapi ada fungsi-fungsi yang tidak memenuhi persyaratan ini namun mempunyai deret Fourier yang konvergen. Jadi persyaratan Dirichlet ini cukup untuk terjadinya deret Fourier yang konvergen tetapi tidak harus. Persyaratan ini tidak merupakan persoalan yang serius sebab kebanyakan bentuk-bentuk gelombang sinyal yang kita temui dalam rekayasa elektro memenuhi persyaratan ini. Contoh-contoh bentuk gelombang periodik yang sering kita temui : gelombang persegi, deretan pulsa, segitiga, gigi-gergaji, sinus, cosinus, sinus setengah gelombang, sinus gelombang penuh.

Koefisien Fourier ditentukan melalui hubungan berikut

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

SOAL-SOAL : SPEKTRUM SINYAL

- Gambarkan spektrum amplitudo dan sudut fasa dari gelombang tegangan

$$v = 4 + 5 \sin 2\pi 2000t - 2 \cos 2\pi 4000t + 0,2 \sin 2\pi 8000t \text{ V}$$

Dengan mengambil batas amplitudo harmonisa tertinggi 5%, tentukan lebar pita bentuk gelombang ini.

- Ulangi soal 1 untuk gelombang berikut.

$$v = 3 \cos(2\pi 1000t - 60^\circ) - 2 \sin 2\pi 2000t + \cos 2\pi 8000t \text{ V}$$

- Suatu diferensiator mempunyai hubungan keluaran-masukan sebagai

$$v_o = \frac{1}{1000} \frac{dv_{in}}{dt}$$

Jika gelombang tegangan masukan

$$v_{in} = 10 \cos 100t + 2 \cos 300t + \cos 500t + 0,2 \cos 1500t + 0,02 \cos 5000t \text{ V}$$

gambarkan spektrum amplitudo dan

sudut fasa tegangan masukan dan keluaran, serta tentukan lebar pita masing-masing dengan batasan amplitudo harmonisa tertinggi 5%.

- Sebuah *lowpass filter* mempunyai frekuensi *cutoff* $\omega_c = 2 \text{ krad/s}$. Filter ini berfungsi seperti sebuah penguat yang memperkuat sinyal sinus dengan faktor $K = 1$ untuk sinyal dengan frekuensi $\omega \leq \omega_c$, dan dengan faktor $K = 0$ untuk sinyal dengan frekuensi $\omega > \omega_c$. Jika tegangan masukan adalah

$$v_{in} = 10 + 10 \cos 2\pi 500t + 3 \cos 2\pi 1000t + 2 \cos 2\pi 1500t + 0,2 \cos 2\pi 2000t \text{ V}$$

gambarkan spektrum amplitudo dan sudut fasa tegangan masukan dan keluaran, serta tentukan lebar pita masing-masing dengan batasan amplitudo harmonisa tertinggi 5%.

BAB 2

Dasar-Dasar Analisis Rangkaian

Pekerjaan analisis terhadap suatu rangkaian linier yang parameternya diketahui mencakup pemilihan teknik analisis dan penentuan besaran keluaran (*output*) jika besaran masukannya (*input*) diketahui, ataupun penentuan hubungan antara keluaran dan masukan. Agar kita mampu melakukan analisis kita perlu memahami beberapa hal yaitu hukum-hukum yang berlaku dalam suatu rangkaian, kaidah-kaidah rangkaian, teorema-teorema rangkaian serta metoda-metoda analisis. Empat hal tersebut akan kita bahas di bab ini dengan membaginya dalam lima pokok bahasan sebagai berikut.

Hukum-Hukum

Hukum-hukum rangkaian merupakan dasar untuk melakukan analisis. Dua hukum yang akan kita pelajari adalah Hukum Ohm dan Hukum Kirchhoff.

Kaidah-Kaidah Rangkaian

Kaidah-kaidah rangkaian merupakan konsekuensi dari hukum-hukum rangkaian. Kaidah-kaidah yang dimaksud di sini adalah kaidah rangkaian ekuivalen (rangkaiannya pengganti), kaidah pembagi arus dan kaidah pembagi tegangan.

Teorema Rangkaian

Teorema rangkaian merupakan pernyataan dari sifat-sifat dasar rangkaian linier. Proporsionalitas dan prinsip superposisi adalah dua sifat rangkaian yang merupakan konsekuensi langsung dari sifat linier rangkaian. Sifat ini juga memberikan dasar untuk berkembangnya teorema-teorema lainnya seperti teorema Thévenin dan Norton.

Metoda Analisis Dasar

Teorema rangkaian beserta hukum-hukum dan kaidah rangkaian, menjadi dasar dari metoda-metoda analisis rangkaian. Metoda analisis dasar adalah salah satu dari dua kelompok metoda analisis yang akan kita pelajari. Kelompok ini terutama digunakan pada rangkaian-rangkaian sederhana, meliputi metoda-metoda keluaran satu satuan, superposisi, reduksi rangkaian, rangkaian Thévenin dan Norton.

Metoda Analisis Umum

Untuk rangkaian yang lebih rumit kita memerlukan metoda yang lebih sistematis yang kita sebut metoda analisis umum. Metoda ini meliputi metoda tegangan simpul dan metoda arus mesh.

2.1. Hukum-Hukum Dasar

Tujuan :

- Memahami hukum Ohm.
- Mampu menghitung resistansi kawat logam jika parameternya diketahui.
- Memahami Hukum Arus Kirchoff (HAK) dan Hukum Tegangan Kirchoff (HTK).
- Mampu mengaplikasikan HAK untuk menuliskan persamaan arus / tegangan di suatu simpul.
- Mampu mengaplikasikan HTK untuk menuliskan persamaan tegangan / arus di suatu mesh ataupun loop.
- Mampu mengaplikasikan HAK untuk simpul super maupun HTK untuk mesh super.

Hukum Ohm

Salah satu hasil percobaan laboratorium yang dilakukan oleh George Simon Ohm (1787-1854) adalah hubungan arus dan tegangan yang kemudian dikenal dengan hukum Ohm. Namun hukum Ohm sendiri merupakan hasil analisis matematis dari rangkaian galvanik yang didasarkan pada analogi antara aliran listrik dan aliran panas. Formulasi Fourier untuk aliran panas adalah

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dl} \quad (2.1)$$

dengan Q adalah quantities panas dan T adalah temperatur, sedangkan k adalah konduktivitas panas, A luas penampang, dan l temperatur.

Dengan mengikuti formulasi Fourier untuk persamaan konduksi panas dan menganalogikan intensitas medan listrik dengan gradien temperatur, Ohm menunjukkan bahwa arus listrik yang mengalir pada konduktor dapat dinyatakan dengan

$$I = \frac{A}{\rho} \frac{dv}{dl} \quad (2.2)$$

Dalam hal konduktor mempunyai luas penampang A yang merata, maka persamaan arus itu menjadi

$$I = \frac{AV}{\rho l} = \frac{V}{R} \quad \text{dengan} \quad R = \frac{\rho l}{A} \quad (2.3)$$

V adalah beda potensial pada konduktor sepanjang l dengan luas penampang A , ρ adalah karakteristik material yang disebut resistivitas, sedangkan R adalah resistansi konduktor. Persamaan (2.3), dapat ditulis juga sebagai

$$V = IR \quad (2.4)$$

dan untuk tegangan yang berubah terhadap waktu menjadi

$$v = iR \quad (2.5)$$

seperti yang sudah kita kenal di Bab-1. Hukum Ohm ini sangat sederhana namun kita harus tetap ingat bahwa ia hanya berlaku untuk material homogen ataupun elemen yang linier.

CONTOH 2.1: Seutas kawat terbuat dari tembaga dengan resistivitas $0,018 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$. Jika kawat ini mempunyai penampang 10 mm^2 dan panjang 300 m , hitunglah resistansinya. Jika kawat ini dipakai untuk menyalurkan daya (searah), hitunglah tegangan jatuh pada saluran ini (yaitu beda tegangan antara ujung kirim dan ujung terima saluran) jika arus yang mengalir adalah 20 A . Jika tegangan di ujung kirim adalah 220 V , berapakah tegangan di ujung terima? Berapakah daya yang hilang pada saluran ?

Penyelesaian :

$$\text{Resistansi kawat adalah : } R = \frac{\rho l}{A} = \frac{0,018 \times 300}{10} = 0,054 \ \Omega$$

Jika kawat ini dipakai untuk saluran daya, diperlukan saluran balik sehingga resistansi total adalah : $R_{\text{saluran}} = 2 \times 0,054 = 0,108 \ \Omega$

$$\text{Tegangan jatuh pada saluran adalah : } \Delta V_{\text{saluran}} = iR_s = 20 \times 0,108 = 2,16 \ \text{V}$$

Jika tegangan ujung kirim adalah 220 V, maka tegangan di ujung terima adalah

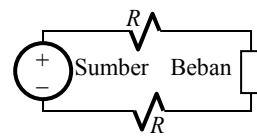
$$V_{\text{terima}} = 220 - 2,16 = 217,84 \ \text{V}$$

Daya hilang pada saluran adalah :

$$\begin{aligned} P_{\text{saluran}} &= i \times \Delta V_{\text{saluran}} = 20 \times 2,16 = 43,2 \ \text{W} \\ &= i^2 R = (20)^2 \times 0,108 = 43,2 \ \text{W} \end{aligned}$$

Pemahaman :

Sesungguhnya resistansi kawat terdistribusi sepanjang kawat. Dalam analisis rangkaian, resistansi yang terdistribusi ini kita nyatakan sebagai suatu *parameter tergumpal (lumped parameter)*. Jadi resistansi kawat itu dinyatakan sebagai satu elemen rangkaian, yaitu R , sehingga diagram rangkaian menjadi seperti di samping ini.



Hukum Kirchhoff

Kita telah mempelajari piranti dan modelnya serta bagaimana hubungan antara *arus dan tegangan* pada piranti tersebut dengan memandangnya sebagai suatu komponen yang berdiri sendiri. Berikut ini kita akan mempelajari piranti-piranti yang telah terhubung membentuk suatu rangkaian. Hubungan *arus dan tegangan pada rangkaian* menurut suatu hukum yang menyatakan *sifat-sifat rangkaian*, hasil pemikiran ilmuwan Jerman Gustav Kirchhoff (1824 - 1887), yang disebut hukum Kirchhoff.

Sebelum membahas hukum Kirchhoff ada beberapa istilah yang perlu kita fahami, yaitu :

Terminal : ujung akhir sambungan piranti atau rangkaian.

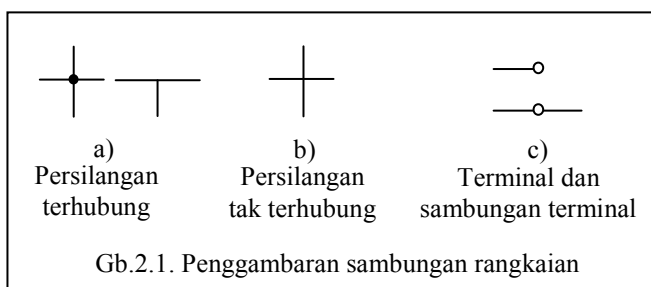
Rangkaian : beberapa piranti yang dihubungkan pada terminalnya.

Simpul (Node) : titik sambung antara dua atau lebih piranti.

Catatan : Walaupun sebuah simpul diberi pengertian sebagai sebuah titik tetapi kawat-kawat yang terhubung langsung ke titik simpul itu merupakan bagian dari simpul; jadi dalam hal ini kita mengabaikan resistansi kawat.

Simpai (Loop) : rangkaian tertutup yang terbentuk apabila kita berjalan mulai dari salah satu simpul mengikuti sederetan piranti dengan melewati tiap simpul tidak lebih dari satu kali dan berakhir pada simpul tempat kita mulai perjalanan.

Selain istilah-istilah tersebut di atas, dalam menggambarkan hubungan atau sambungan-sambungan kita akan menggunakan cara-cara seperti terlihat pada Gb.2.1.



Hukum Arus Kirchoff (HAK) - Kirchoff's Current Law (KCL). Hukum Kirchoff yang pertama ini menyatakan bahwa :

Setiap saat, jumlah aljabar dari arus di satu simpul adalah nol.

Di sini kita harus memperhatikan referensi arah arus. Bila arus yang *menuju* simpul diberi tanda *positif*, maka arus yang *meninggalkan* simpul diberi tanda *negatif* (atau sebaliknya bila arus yang *meninggalkan* bertanda *positif*, arus yang *menuju* simpul bertanda *negatif*). Perlu diingat bahwa arah arus di sini adalah arah referensi dan bukan arah arus sebenarnya.

Hukum Arus Kirchoff merupakan pernyataan *prinsip konservasi muatan*. Jumlah elektron per detik yang datang maupun yang pergi haruslah sama, di titik manapun dalam rangkaian. Oleh karena itu jumlah arus di suatu simpul harus nol. Jika tidak, akan terjadi penumpukan muatan di simpul tersebut yang menurut hukum Coulomb akan terjadi “ledakan muatan”; tetapi hal demikian tidak pernah terjadi.

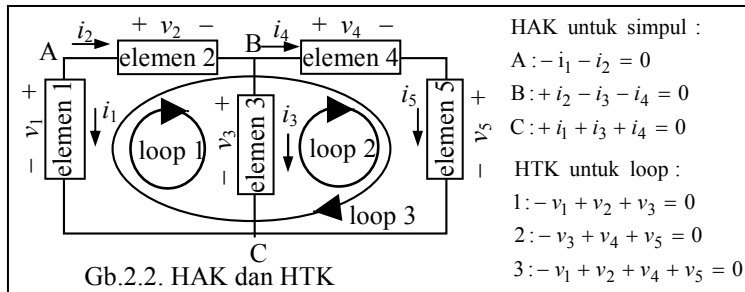
Hukum Tegangan Kirchoff (HTK) -Kirchoff's Voltage Law (KVL). Hukum Kirchoff yang kedua ini menyatakan bahwa :

Setiap saat, jumlah aljabar tegangan dalam satu loop adalah nol.

Di sinipun kita harus memperhatikan tanda referensi tegangan dalam menuliskan persamaan tegangan loop. Tegangan diberi tanda positif jika kita bergerak dari “+” ke “-” dan diberi tanda negatif bila kita bergerak dari “-” ke “+”.

Hukum Tegangan Kirchoff merupakan pernyataan kembali prinsip konservasi energi. Dalam rangkaian pada Gb.2.2., sebagian piranti mungkin berupa sumber dan sebagian yang lain berupa beban.

Menurut prinsip konservasi energi, energi yang diberikan oleh sumber dalam suatu selang waktu tertentu harus sama dengan energi yang diserap oleh beban selama selang waktu yang sama.



waktu yang sama. Mengingat konvensi pasif, hal itu berarti bahwa jumlah aljabar energi di semua piranti adalah nol, dan berarti pula bahwa jumlah aljabar daya (hasil kali tegangan dan arus tiap elemen) sama dengan nol.

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 = 0$$

Karena $i_1 = -i_2$ dan $i_2 = i_3 + i_4$ maka persamaan di atas dapat kita tulis

$$v_1(-i_3 - i_4) + v_2(i_3 + i_4) + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_4 = 0$$

atau

$$i_3(-v_1 + v_2 + v_3) + i_4(-v_1 + v_2 + v_4 + v_5) = 0$$

Karena nilai arus tidak nol maka haruslah

$$-v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad \text{dan} \quad -v_1 + v_2 + v_4 + v_5 = 0$$

Persamaan pertama adalah persamaan untuk loop-1 dan persamaan kedua adalah untuk loop-3. Dari persamaan loop-1 kita peroleh $-v_1 + v_2 = -v_3$ dan jika ini kita substitusikan ke persamaan loop-3, akan kita peroleh persamaan loop-2 yaitu:

$$-v_3 + v_4 + v_5 = 0$$

Pengembangan HTK dan HAK. Loop-1 dan loop-2 pada Gb.2.2. merupakan loop-loop terkecil yang tidak melingkupi loop lain di dalamnya. Loop semacam ini disebut *mesh*. Hal ini berbeda dengan loop-3 yang merupakan gabungan dari mesh-1 dan mesh-2 (loop-1 dan loop-2). Loop yang merupakan gabungan dari beberapa mesh disebut juga *mesh super*. Persamaan dari suatu mesh super adalah gabungan dari persamaan mesh-mesh penyusunnya sebagaimana telah ditunjukkan di atas.

Kita perhatikan sekarang simpul A dan B pada Gb.2.2. HAK untuk kedua simpul ini adalah:

$$-i_1 - i_2 = 0 \quad \text{dan} \quad +i_2 - i_3 - i_4 = 0$$

Jika kedua persamaan ini kita gabungkan akan kita peroleh :

$$-i_1 - i_3 - i_4 = 0$$

Ini adalah persamaan dari sebuah “simpul” yang merupakan gabungan dari dua simpul, yaitu simpul A dan B. Simpul gabungan dari beberapa simpul semacam ini disebut *simpul super*. Contoh lain untuk *simpul super* adalah gabungan simpul B dan C. Persamaan simpul super BC ini adalah :

$$+i_2 - i_4 + i_5 + i_1 = 0$$

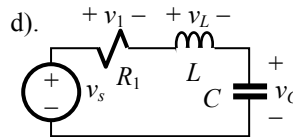
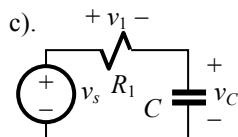
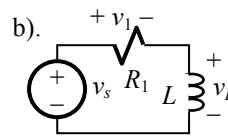
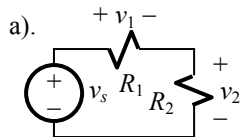
Penggabungan simpul-simpul seperti ini tidak terbatas hanya dua simpul. Jika simpul A, B, dan C kita gabungkan akan menjadi simpul super ABC yang persamaannya adalah :

$$-i_4 + i_5 = 0 .$$

Dengan demikian maka :

HAK berlaku untuk simpul tunggal maupun simpul super
dan
HTK berlaku untuk mesh tunggal maupun mesh super

CONTOH 2.2 : Aplikasikan HTK pada empat macam rangkaian di bawah ini. Nyatakan pula persamaan yang diperoleh dengan arus elemen sebagai peubah jika arus awal induktor dan tegangan awal kapasitor adalah nol.



Penyelesaian :

Aplikasi HTK untuk masing-masing rangkaian akan memberikan

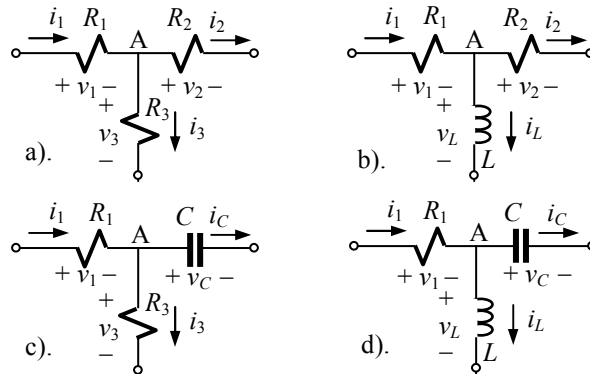
a). $-v_s + v_1 + v_2 = 0 \rightarrow v_s = i_1 R_1 + i_2 R_2$

b). $-v_s + v_1 + v_L = 0 \rightarrow v_s = v_1 + v_L = i_1 R_1 + L \frac{di_L}{dt}$

c). $-v_s + v_1 + v_C = 0 \rightarrow v_s = v_1 + v_C = i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_C dt$

d). $-v_s + v_1 + v_L + v_C = 0 \rightarrow v_s = v_1 + v_L + v_C = i_1 R_1 + L \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} \int i_C dt$

CONTOH 2.3 : Aplikasikan HAK untuk simpul A dari berbagai macam bagian rangkaian di bawah ini. Nyatakan pula persamaan yang diperoleh dengan tegangan elemen sebagai peubah jika tegangan awal kapasitor dan arus awal induktor adalah nol.



Penyelesaian :

Aplikasi HAK untuk simpul A pada bagian-bagian rangkaian tersebut di atas memberikan:

$$\begin{aligned}
 \text{a). } i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = 0 \\
 \text{b). } i_1 - i_2 - i_L &= 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{1}{L} \int v_L dt = 0 \\
 \text{c). } i_1 - i_C - i_3 &= 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} - C \frac{dv_C}{dt} - \frac{v_3}{R_3} = 0 \\
 \text{d). } i_1 - i_C - i_L &= 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} - C \frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{L} \int v_L dt = 0
 \end{aligned}$$

Pemahaman :

Pada contoh 2.2. dan 2.3. di atas terlihat bahwa persamaan rangkaian dapat berbentuk persamaan aljabar biasa, yaitu apabila elemen-elemen rangkaian hanya terdiri dari resistor saja, atau berbentuk persamaan diferensial orde satu atau persamaan integro-diferensial. Dua bentuk persamaan terakhir ini terjadi jika rangkaian mengandung elemen dinamis.

CONTOH 2.4 : Gambar di samping ini menunjukkan keadaan di sekitar simpul A dari suatu rangkaian. Tentukan i_2 dan tegangan di simpul-simpul yang bukan simpul referensi.

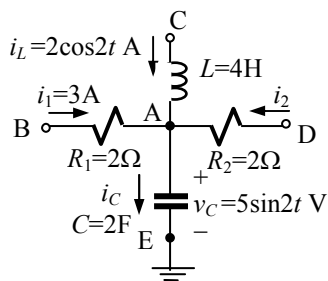
Penyelesaian :

Aplikasi HAK pada simpul A memberikan :

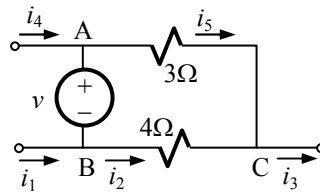
$$\begin{aligned}
 i_1 + i_L + i_2 - i_C &= 0 \rightarrow i_2 = i_C - i_L - i_1 \\
 \rightarrow i_2 &= 2 \frac{d(5 \sin 2t)}{dt} - 2 \cos 2t - 3 = 18 \cos 2t - 3 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Tegangan simpul-simpul non-referensi adalah

$$\begin{aligned}
 v_A &= v_C = 5 \sin 2t \text{ V} \\
 v_B &= v_A + i_1 R_1 = 5 \sin 2t + 6 \text{ V} \\
 v_C &= v_A + v_L = 5 \sin 2t + 4 \frac{d(2 \cos 2t)}{dt} = -11 \sin 2t \text{ V} \\
 v_D &= v_A + i_2 R_2 = 5 \sin 2t + 36 \cos 2t - 6 \text{ V}
 \end{aligned}$$



CONTOH 2.5 : Pada rangkaian di bawah ini, diketahui bahwa arus-arus $i_1 = 5\text{ A}$, $i_2 = 2\text{ A}$, dan $i_3 = 8\text{ A}$. Tentukanlah arus i_1 , i_2 , dan tegangan v .



Penyelesaian :

Jika kita gabungkan simpul A, B, dan C menjadi satu simpul super dan kita aplikasikan HAK, kita akan mendapatkan persamaan untuk simpul super ABC :

$$i_4 + i_1 - i_3 = 0 \Rightarrow i_4 = i_3 - i_1 = 8 - 5 = 3\text{ A}$$

Aplikasi HAK untuk simpul C memberikan:

$$i_2 + i_5 - i_3 = 0 \Rightarrow i_5 = i_3 - i_2 = 8 - 2 = 6\text{ A}$$

Tegangan v dapat kita cari dengan mengaplikasikan HTK untuk loop ABCA :

$$-v + 3i_5 - 4i_2 = 0 \rightarrow v = 3 \times 6 - 4 \times 2 = 10\text{ V}$$

Basis Analisis Rangkaian

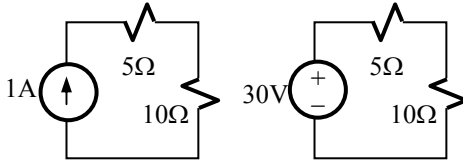
Sesungguhnya dalam contoh-contoh 2.1. sampai 2.5. kita telah melakukan analisis rangkaian. Analisis tersebut kita lakukan dengan cara menerapkan langsung hukum Kirchhoff. Secara tidak sadar, disamping hukum Kirchhoff, kita telah pula memasukkan batasan-batasan elemen yang membentuk rangkaian tersebut yaitu berupa karakteristik $i-v$ dari elemen. Pada resistor R misalnya, harus berlaku $v_R = i_R R$; untuk induktor harus berlaku $v_L = L di/dt$ dan untuk kapasitor $i_C = C dv_C / dt$.

Jadi Hukum Kirchhoff harus dipenuhi di dalam suatu rangkaian, sementara elemen-elemen yang membentuk rangkaian itu mempunyai karakteristik $i-v$ masing-masing yang juga harus dipenuhi. Kita katakan bahwa *Hukum Kirchhoff merupakan persyaratan rangkaian* sedangkan *karakteristik $i-v$ elemen merupakan persyaratan elemen*. Dalam suatu rangkaian, kedua persyaratan tersebut secara bersamaan harus dipenuhi dan hal ini menjadi basis untuk melakukan analisis rangkaian.

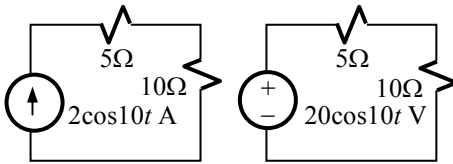
Selain daripada itu kita menganggap bahwa rangkaian-rangkaian yang kita hadapi tersusun dari elemen-elemen linier sehingga rangkaian kita merupakan rangkaian linier. Disamping linier, semua elemen juga mempunyai nilai yang tidak tergantung dari waktu sehingga kita mempunyai rangkaian yang *tidak merupakan fungsi waktu* atau *invarian waktu*. Jadi dalam analisis rangkaian yang akan kita pelajari dalam buku ini, hanyalah sinyal yang merupakan fungsi waktu sedangkan karakteristik rangkaian tidak merupakan fungsi waktu.

SOAL-SOAL : HUKUM OHM & HUKUM KIRCHHOFF

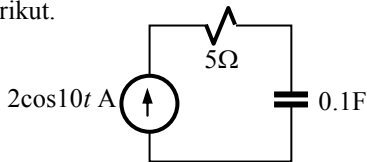
1. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen (termasuk sumber) pada dua rangkaian berikut.



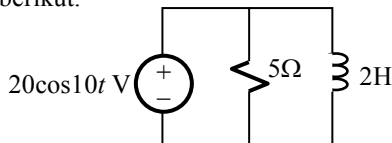
2. Ulangi soal no.1 untuk dua rangkaian berikut.



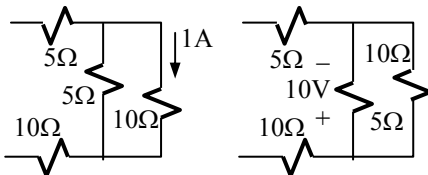
3. Ulangi soal no.1 untuk rangkaian berikut.



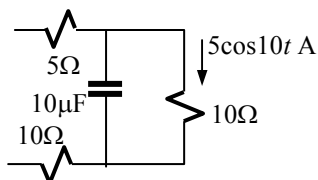
4. Ulangi soal no.1 untuk rangkaian berikut.



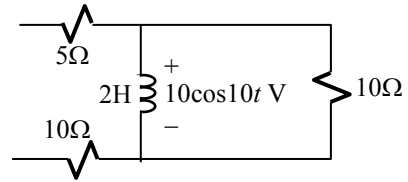
5. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen pada kedua bagian rangkaian berikut ini.



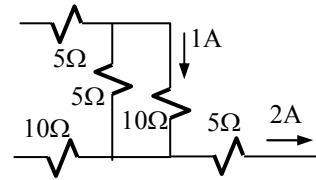
6. Ulangi soal no.5 untuk rangkaian berikut.



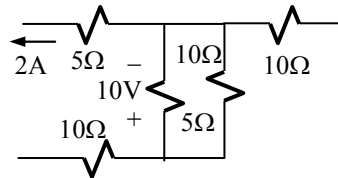
7. Ulangi soal no.5 untuk rangkaian berikut.



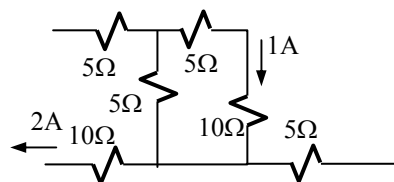
8. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen pada bagian rangkaian berikut ini.



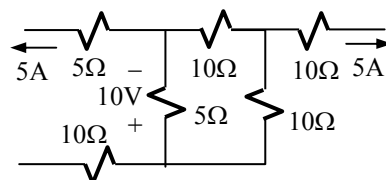
9. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen pada bagian rangkaian berikut ini.



10. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen pada bagian rangkaian berikut ini.



11. Tentukan tegangan dan arus di tiap elemen pada bagian rangkaian berikut ini.



2.2. Kaidah-Kaidah Rangkaian

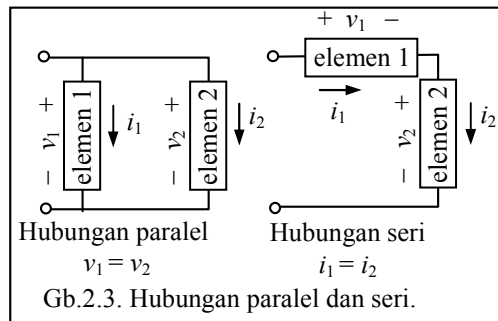
Tujuan:

- Mampu mencari nilai ekivalen dari elemen-elemen yang terhubung seri, terhubung paralel, terhubung bintang (Y) dan terhubung segitiga (Δ).
- Mampu menentukan pembagian tegangan pada elemen-elemen yang terhubung seri.
- Mampu menentukan pembagian arus pada elemen-elemen yang terhubung paralel.

Hubungan Seri dan Paralel

Dua elemen dikatakan terhubung paralel jika mereka terhubung pada dua simpul yang sama. Dengan menerapkan HTK pada loop yang dibentuk oleh dua elemen itu akan terlihat bahwa tegangan pada elemen-elemen itu harus sama.

Dua elemen dikatakan terhubung seri jika mereka hanya mempunyai satu simpul bersama dan tidak ada elemen lain yang terhubung pada simpul itu. Penerapan HAK akan memperlihatkan bahwa arus yang mengalir di kedua elemen itu sama. Hubungan paralel maupun seri tidak terbatas hanya dua elemen.



Rangkaian Ekuivalen (Rangkaian Pengganti)

Analisis terhadap suatu rangkaian sering akan menjadi lebih mudah dilaksanakan jika sebagian dari rangkaian dapat diganti dengan rangkaian lain yang ekuivalen dan yang lebih sederhana. Basis untuk terjadinya ekuivalensi antara dua macam rangkaian adalah hubungan i - v dari keduanya.

Dua rangkaian disebut ekuivalen jika antara dua terminal tertentu mereka mempunyai karakteristik i - v yang identik

Resistansi Ekuivalen. Resistansi ekuivalen dari beberapa resistor yang terhubung seri adalah resistor yang nilai resistansinya sama dengan jumlah nilai resistansi yang disambung seri tersebut.

$$\text{Resistansi Seri: } R_{ekiv} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (2.6)$$

Hal ini mudah dibuktikan jika diingat bahwa resistor-resistor yang dihubungkan seri dialiri oleh arus yang sama, sedangkan tegangan di masing-masing resistor sama dengan arus kali resistansinya.

Menurut HTK, tegangan total pada terminal dari rangkaian seri tersebut sama dengan jumlah tegangan di masing-masing resistor. Jadi

$$\begin{aligned} V_{total} &= V_{R1} + V_{R2} + \dots = R_1 i + R_2 i + \dots \\ &= (R_1 + R_2 + \dots) i = R_{ekivalen} i. \end{aligned}$$

Penggantian $(R_1 + R_2 + \dots)$ dengan R_{ekiv} , tidak mengubah karakteristik i - v di terminal ujung.

Konduktansi ekivalen dari beberapa konduktansi yang disambung paralel sama dengan jumlah konduktansi masing-masing.

$$\boxed{\text{Konduktansi Paralel: } G_{ekiv} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots} \quad (2.7)$$

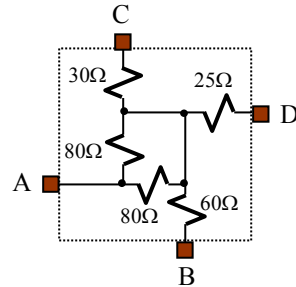
Hal ini juga mudah dibuktikan, mengingat bahwa masing-masing elemen yang dihubungkan paralel memperoleh tegangan yang sama. Sementara itu arus total sama dengan jumlah arus di masing-masing elemen yang terhubung paralel tersebut.

$$\begin{aligned} i_{total} &= i_{G1} + i_{G2} + \dots = G_1 v + G_2 v + \dots \\ &= (G_1 + G_2 + \dots) v = G_{ekivalen} v \end{aligned}$$

CONTOH 2.6 : Pada paket resistor ini carilah resistansi antara terminal A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, C-D.

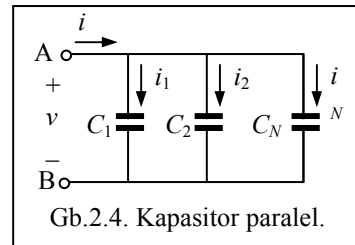
Penyelesaian :

$$\begin{aligned} R_{AB} &= 60 + 80 \parallel 80 = 100 \, \Omega ; R_{AC} = 30 + 80 \parallel 80 = 70 \, \Omega \\ R_{AD} &= 25 + 80 \parallel 80 = 65 \, \Omega ; R_{BC} = 60 + 30 = 90 \, \Omega \\ R_{BD} &= 60 + 25 = 85 \, \Omega ; R_{CD} = 30 + 25 = 55 \, \Omega \end{aligned}$$



Kapasitansi dan Induktansi Ekivalen. Pencarian nilai ekivalen dari kapasitor maupun induktor yang terhubung seri ataupun paralel dapat dilakukan dengan menggunakan cara yang sama seperti mencari resistor ekivalen. Gb.2.4. menunjukkan beberapa kapasitor terhubung paralel. Aplikasi HAK pada simpul A memberikan :

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + \dots + i_N = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \frac{dv}{dt} = C_{ek} \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$



Jadi kapasitansi ekivalen dari kapasitor yang terhubung paralel adalah

$$\boxed{\text{Kapasitor Paralel: } C_{ek} = C_1 + C_2 + \dots + C_N} \quad (2.8)$$

Untuk kapasitor yang dihubungkan seri kita mempunyai hubungan:

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_N = v_{10} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i dt + v_{20} + \frac{1}{C_2} \int_0^t i dt + \dots + v_{N0} + \frac{1}{C_N} \int_0^t i dt = v_{ek0} + \frac{1}{C_{ek}} \int_0^t i dt$$

Jadi untuk kapasitor yang dihubungkan seri maka kapasitansi ekivalennya dapat dicari dengan hubungan :

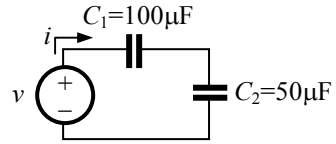
$$\boxed{\text{Kapasitor Seri: } \frac{1}{C_{ek}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}} \quad (2.9)$$

Induktansi ekivalen dari induktor yang dihubungkan seri ataupun paralel dapat dicari dengan cara yang sama, dan hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\boxed{\text{Induktor Seri: } L_{ek} = L_1 + L_2 + \dots + L_N} \quad (2.10)$$

$$\boxed{\text{Induktor Paralel: } \frac{1}{L_{ek}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}} \quad (2.11)$$

CONTOH 2.7 : Tegangan yang diterapkan pada dua kapasitor yang terhubung seri di samping ini adalah $v = 30\sin 100t$ V. a). Carilah arus yang keluar dari sumber. b). Jika kedua kapasitor dihubungkan paralel berapakah arus yang keluar dari sumber ?



Penyelesaian:

a). Dalam keadaan terhubung seri, kapasitansi total adalah

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{100} + \frac{1}{50} = \frac{50+100}{5000} = \frac{3}{100} \rightarrow C_{tot} = \frac{100}{3} \mu\text{F} = \frac{10^{-4}}{3} \text{ F}$$

$$\rightarrow i = C_{tot} \frac{dv}{dt} = \frac{10^{-4}}{3} \times 3000 \cos 100t = 0,1 \cos 100t \text{ A}$$

b). Jika kedua kapasitor dihubungkan paralel :

$$C_{tot} = 100 + 50 = 150 \mu\text{F} = 0,15 \times 10^{-3} \text{ F}$$

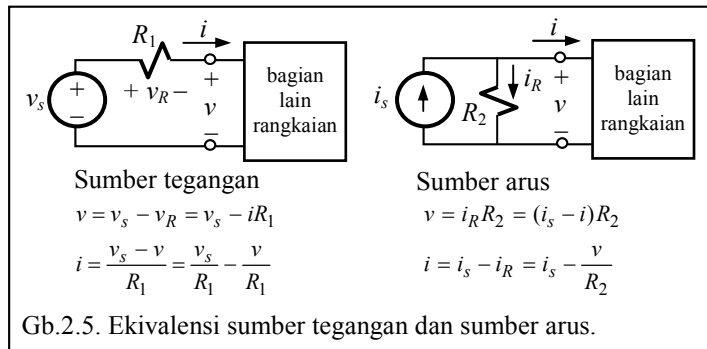
$$\rightarrow i = C_{tot} \frac{dv}{dt} = 0,15 \times 10^{-3} \times 3000 \cos 100t = 0,45 \cos 100t \text{ A}$$

Pemahaman :

Nilai total kapasitansi yang terhubung seri lebih kecil dari nilai masing-masing. Jika terhubung paralel nilainya akan lebih besar. Suatu kabel transmisi misalnya, mempunyai kapasitansi yang terdistribusi sepanjang kabel; makin panjang kabel, makin besar kapasitansi totalnya. Kapasitansi total kabel ini dapat dinyatakan sebagai parameter tergroupal. (ingat contoh 2.1. mengenai resistansi kawat penyalur daya).

Sumber Ekuivalen. Suatu sumber tegangan praktis dapat digantikan oleh sumber arus praktis ekuivalennya dan demikian juga sebaliknya. Secara umum kita katakan bahwa sumber

tegangan bebas yang terhubung seri dengan resistor dapat diganti oleh sumber arus bebas diparalelkan dengan resistor. Demikian pula sebaliknya, sumber arus bebas yang terhubung paralel dengan resistor dapat diganti oleh sumber tegangan bebas diseri-kan dengan resistor.



Perhatikan model sumber tegangan dan sumber arus serta formulasi hubungan arus dan tegangan masing-masing pada Gb.2.5. Kedua model itu akan ekuivalen apabila:

$$v_s - iR_1 = i_s R_2 - iR_2 \quad \text{dan} \quad \frac{v_s}{R_1} - \frac{v}{R_1} = i_s - \frac{v}{R_2} \tag{2.12}$$

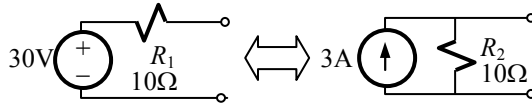
$$\rightarrow v_s = i_s R_2, \quad iR_1 = iR_2 \quad \text{dan} \quad \frac{v_s}{R_1} = i_s, \quad \frac{v}{R_1} = \frac{v}{R_2} \rightarrow R_1 = R_2$$

Jika persyaratan untuk terjadinya ekuivalensi itu terpenuhi maka bagian rangkaian yang lain tidak akan terpengaruh jika kita menggantikan model sumber tegangan dengan model sumber arus ekuivalennya ataupun sebaliknya mengganti sumber arus dengan sumber tegangan ekuivalennya. Mengganti satu model sumber dengan model sumber lainnya disebut *transformasi sumber*.

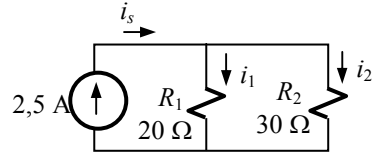
CONTOH 2.8 : Carilah sumber arus ekivalen dari sumber tegangan 30 V yang diseriikan dengan resistor 10 Ω.

Penyelesaian :

Sumber tegangan $v_s=30$ V tersambung seri dengan $R_1=10$ Ω. Sumber arus ekivalennya adalah $i_s = 30/10 = 3$ A paralel dengan resistor $R_2 = R_1 = 10$ Ω. Kedua macam rangkaian sumber ini digambarkan di samping ini.

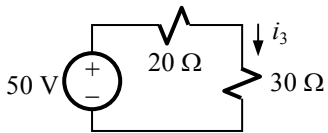


CONTOH 2.9 : Sumber arus 2,5 A pada diagram rangkaian di samping ini mencatu dua resistansi paralel. Hitunglah arus yang melalui R_2 .



Penyelesaian :

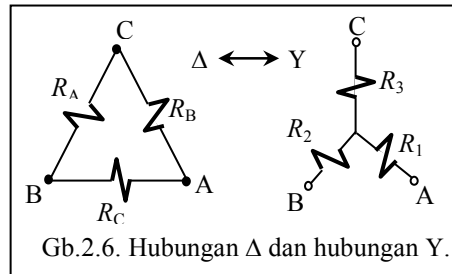
Sumber arus 2,5 A diparalel dengan resistor 20 Ω dapat kita ganti dengan sebuah sumber tegangan $(2,5 \times 20) = 50$ V diseriikan dengan resistor 20 Ω. Dengan penggantian ini maka rangkaian menjadi :



$$\rightarrow i_3 = \frac{50}{20 + 30} = 1 \text{ A} = \text{ arus yang melalui } R_2$$

(hasil yang sama akan diperoleh jika kita menggunakan kaidah pembagi arus).

Transformasi Y-Δ. Dalam beberapa rangkaian mungkin terjadi hubungan yang tidak dapat disebut sebagai hubungan seri, juga tidak paralel. Hubungan semacam ini mengandung bagian rangkaian dengan tiga terminal yang mungkin terhubung Δ (segi tiga) atau terhubung Y (bintang) seperti terlihat pada Gb.2.6.



Gb.2.6. Hubungan Δ dan hubungan Y.

Menggantikan hubungan Δ dengan hubungan Y yang ekivalen, atau sebaliknya, dapat mengubah rangkaian menjadi hubungan seri atau paralel. Kedua macam hubungan itu akan ekivalen jika dari tiap pasang terminal A-B, B-C, C-A, terlihat resistor ekivalen yang sama. Jadi kedua rangkaian itu harus memenuhi

$$R_{AB} = \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_B + R_C} = R_1 + R_2; R_{BC} = \frac{R_A(R_B + R_C)}{R_A + R_B + R_C} = R_2 + R_3; R_{CA} = \frac{R_B(R_C + R_A)}{R_A + R_B + R_C} = R_3 + R_1 \tag{2.13}$$

Dari persamaan (2.13) dapat diperoleh

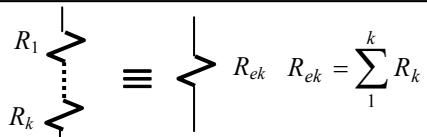
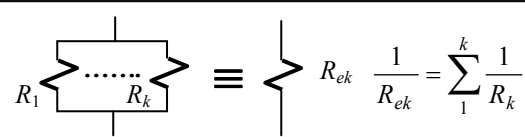
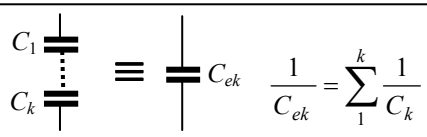
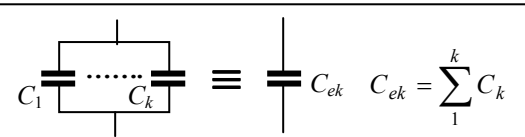
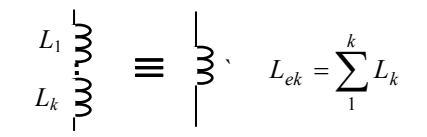
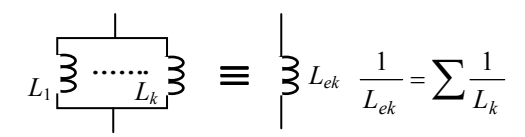
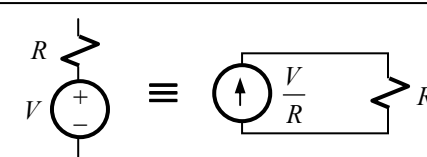
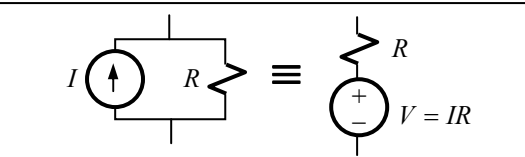
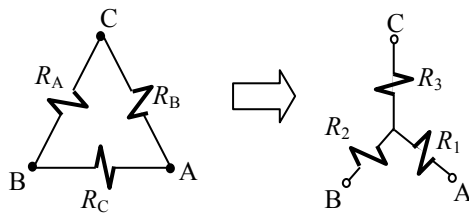
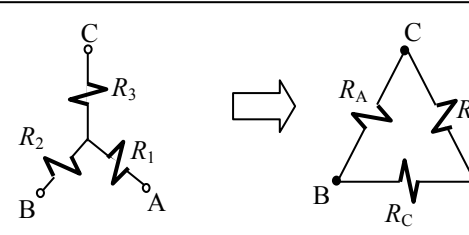
Ekivalen Y dari Δ	
$R_1 =$	$\frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$
$R_2 =$	$\frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$
$R_3 =$	$\frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$

Ekivalen Δ dari Y	
$R_A =$	$\frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}$
$R_B =$	$\frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}$
$R_C =$	$\frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$

Rangkaian Y dan Δ dikatakan **seimbang** jika $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$ dan $R_A = R_B = R_C = R_Δ$. Dalam keadaan seimbang transformasi Y - Δ menjadi sederhana, yaitu

Keadaan seimbang :	$R_Y = \frac{R_Δ}{3}$ dan $R_Δ = 3R_Y$
--------------------	--

Tabel 3.1. Ringkasan Rangkaian Ekuivalen

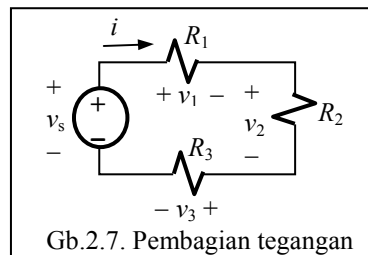
Hubungan Seri	Hubungan Paralel
 $R_{ek} = \sum_1^k R_k$	 $\frac{1}{R_{ek}} = \sum_1^k \frac{1}{R_k}$
 $\frac{1}{C_{ek}} = \sum_1^k \frac{1}{C_k}$	 $C_{ek} = \sum_1^k C_k$
 $L_{ek} = \sum_1^k L_k$	 $\frac{1}{L_{ek}} = \sum_1^k \frac{1}{L_k}$
	
	<p>Ekivalen Y dari Δ</p> $R_1 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$ $R_2 = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$ $R_3 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$
	<p>Ekivalen Δ dari Y</p> $R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1}$ $R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2}$ $R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3}$

Kaidah Pembagi Tegangan dan Pembagi Arus

Kaidah Pembagi Tegangan. Kaidah ini memberikan distribusi tegangan pada elemen yang dihubungkan seri dalam rangkaian. Dengan mengaplikasikan HTK pada loop rangkaian Gb.2.7, kita mendapatkan :

$$v_s = v_1 + v_2 + v_3 = (R_1 + R_2 + R_3) i$$

$$\rightarrow i = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{v_s}{R_{total}}$$



Tegangan pada masing-masing elemen adalah :

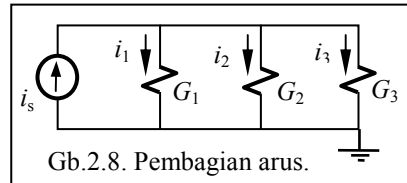
$$v_1 = R_1 i = \left(\frac{R_1}{R_{total}} \right) v_s ; v_2 = \left(\frac{R_2}{R_{total}} \right) v_s ; v_3 = \left(\frac{R_3}{R_{total}} \right) v_s \quad (2.14)$$

Secara umum dapat kita tuliskan:

$$\text{Pembagi Tegangan: } v_k = \left(\frac{R_k}{R_{total}} \right) v_{total} \quad (2.15)$$

Jadi tegangan total didistribusikan pada semua elemen sebanding dengan resistansi masing-masing dibagi dengan resistansi ekivalen.

Kaidah Pembagi Arus. Dalam rangkaian paralel, arus terbagi sebanding dengan konduktansi di masing-masing cabang. Kita ambil contoh rangkaian seperti pada Gb.2.8. Hubungan antara arus i_s dan tegangan v dapat dicari sbb.



$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 = vG_1 + vG_2 + vG_3 \rightarrow v = i_s / (G_1 + G_2 + G_3) = i_s / G_{total}$$

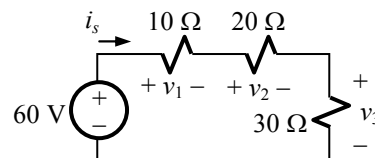
Dari v yang diperoleh dapat dihitung arus di masing-masing resistor.

$$i_1 = vG_1 = \left(\frac{G_1}{G_{total}} \right) i_s ; i_2 = \left(\frac{G_2}{G_{total}} \right) i_s ; i_3 = \left(\frac{G_3}{G_{total}} \right) i_s \quad (2.16)$$

Secara umum :

$$\text{Pembagi Arus: } i_k = \left(\frac{G_k}{G_{total}} \right) i_{total} \quad (2.17)$$

CONTOH 2.10 : Sebuah sumber tegangan konstan 60 V mencatu tiga resistor yang terhubung seri seperti terlihat pada diagram rangkaian di samping ini. Hitunglah: (a) arus yang keluar dari sumber; (b) tegangan pada masing-masing resistor; (c) daya pada masing-masing resistor; (d) daya total yang dikeluarkan oleh sumber.



Penyelesaian :

- a). Karena resistor terhubung seri, maka sumber melihat suatu resistansi ekivalen sebesar : $R_{ek} = 10 + 20 + 30 = 60 \Omega$

Arus yang keluar dari sumber sama dengan arus yang melalui resistansi ekivalen tersebut, yang besarnya adalah : $i_s = 60 / 60 = 1 \text{ A}$

- b). Tegangan pada masing-masing resistor dapat kita hitung dengan menggunakan kaidah pembagi tegangan, dengan tegangan sumber sebagai tegangan total pada tiga resistor yang terhubung seri tersebut. Tegangan masing-masing resistor adalah

$$v_1 = \frac{10}{10 + 20 + 30} \times 60 = 10 \text{ V} ; v_2 = \frac{20}{60} \times 60 = 20 \text{ V} ; v_3 = \frac{30}{60} \times 60 = 30 \text{ V}$$

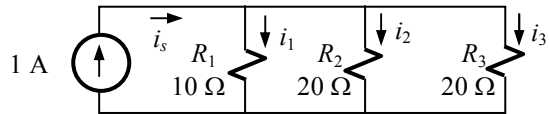
- c). Karena resistor terhubung seri, arus yang mengalir di ketiganya sama yaitu $i_s = 1 \text{ A}$. Daya pada masing-masing resistor adalah

$$p_1 = i_s v_1 = 10 \text{ W} ; p_2 = i_s v_2 = 20 \text{ W} ; p_3 = i_s v_3 = 30 \text{ W}$$

- d). Daya yang dikeluarkan oleh sumber adalah : $p_s = i_s v_s = 1 \times 60 = 60 \text{ W}$

Perhatikanlah bahwa daya ini sama dengan jumlah daya yang diserap oleh semua resistor.

CONTOH 2.11 : Sebuah sumber arus konstan 1 A mencatu tiga resistor yang terhubung paralel seperti terlihat pada diagram rangkaian di samping ini. Hitunglah:



- arus pada masing-masing resistor.
- tegangan sumber.
- daya yang diserap oleh masing-masing resistor.
- daya total yang dikeluarkan oleh sumber.

Penyelesaian :

a). Jumlah arus yang mengalir pada ketiga resistor yang terhubung paralel tersebut sama dengan arus sumber, yaitu 1 A. Arus yang melalui masing-masing resistor dapat kita cari dengan menggunakan kaidah pembagi arus, yaitu:

$$i_1 = \frac{Y_1}{Y_{tot}} i_s = \frac{(1/10)}{(1/10) + (1/20) + (1/20)} \times 1 = 0,5 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{Y_2}{Y_{tot}} i_s = 0,25 \text{ A} \quad ; \quad i_3 = \frac{Y_3}{Y_{tot}} i_s = 0,25 \text{ A}$$

b). Tegangan sumber sama dengan tegangan di masing-masing resistor karena resistor terhubung paralel.

$$v_s = R_1 i_1 = 10 \times 0,5 = 5 \text{ V}$$

Nilai yang sama akan kita peroleh jika kita menghitung v_s dengan $R_2 i_2$ ataupun $R_3 i_3$.

c). Daya yang diserap oleh masing-masing resistor adalah

$$p_1 = v_s i_1 = 5 \times 0,5 = 2,5 \text{ W} ;$$

$$p_2 = v_s i_2 = 1,25 \text{ W} \quad ; \quad p_3 = v_s i_3 = 1,25 \text{ W}$$

d). Daya yang dikeluarkan oleh sumber adalah

$$p_s = v_s i_s = 5 \times 1 = 5 \text{ W}$$

Daya yang dikeluarkan oleh sumber ini sama dengan jumlah daya yang diserap oleh ketiga resistor.

CONTOH 2.12 : Dua kapasitor, masing-masing 10 μF dan 100 μF , dihubungkan seri dan pada hubungan ini diterapkan tegangan $v_s = 220 \cos \omega t$ V. Carilah tegangan di masing-masing kapasitor.

Penyelesaian : Dalam keadaan terhubung seri, tegangan di masing-masing kapasitor adalah

$$v_{C1} = \frac{1}{C_1} \int i_s dt \quad ; \quad v_{C2} = \frac{1}{C_2} \int i_s dt$$

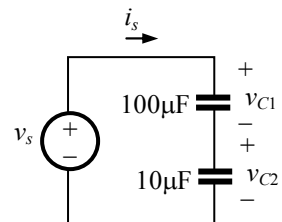
Dari sini kita peroleh

$$\frac{v_{C1}}{v_{C2}} = \frac{(1/C_1) \int i_s dt}{(1/C_2) \int i_s dt} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad v_{C2} = 10 v_{C1}$$

Aplikasi HTK memberikan

$$v_s = v_{C1} + v_{C2} = 11 v_{C1} \quad \rightarrow \quad v_{C1} = \frac{v_s}{11} = 20 \cos \omega t$$

$$\rightarrow \quad v_{C2} = 10 v_{C1} = 200 \cos \omega t$$



Pemahaman :

Dalam membahas kaidah pembagi tegangan kita hanya melihat resistor. Hal ini dilakukan agar kita lebih mudah memahaminya. Akan tetapi kaidah tersebut berlaku juga bagi elemen dinamik seperti terlihat pada contoh ini. Kalau pada resistor seri bagian tegangan yang besar terjadi pada resistor yang besar, maka pada kapasitor seri bagian tegangan yang besar justru terjadi pada kapasitor yang kecil. Hal ini terjadi karena

$$\text{pada resistor seri : } v_k = \frac{R_k}{R_{total}} \times v_{total} ;$$

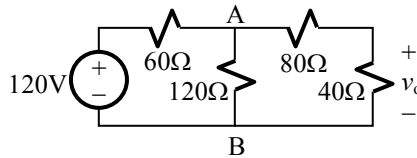
$$\text{pada kapasitor seri : } v_{Ck} = \frac{1/C_k}{1/C_{total}} \times v_{total}$$

Sesungguhnya jika tegangan sumber adalah sinyal sinus dengan frekuensi ω , kita akan melihat bahwa pembagian tegangan pada kapasitor adalah

$$v_{Ck} = \frac{1/\omega C_k}{1/\omega C_{total}} \times v_{total}$$

Untuk hal terakhir ini kita akan mempelajari dalam analisis rangkaian arus bolak-balik keadaan mantap di Bab-5. Untuk sementara ini kita memusatkan perhatian pada rangkaian-rangkaian dengan resistor.

CONTOH 2.13 : Dengan menggunakan kaidah pembagi tegangan, carilah v_o pada rangkaian berikut ini.



Penyelesaian :

Dengan kaidah pembagi tegangan kita peroleh

$$v_o = \frac{40}{40+80} v_{AB} = \frac{1}{3} v_{AB}$$

Tegangan antara simpul A dan B, v_{AB} , adalah

$$v_{AB} = \frac{R_{AB}}{R_{AB} + 60} \times 120 \text{ V}$$

Perhatikan bahwa R_{AB} bukanlah 120Ω , akan tetapi

$$R_{AB} = 120 \parallel (80 + 40) = 60 \Omega \rightarrow v_{AB} = \frac{60}{60+60} \times 120 = 60 \text{ V}$$

$$\Rightarrow v_o = \frac{1}{3} \times 60 = 20 \text{ V}$$

Tentang Elemen Dinamik

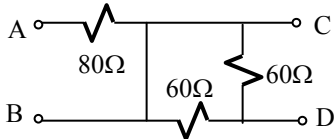
Dalam membahas kaidah pembagi tegangan dan pembagi arus maupun transformasi sumber, kita tidak melibatkan elemen-elemen dinamik. Hal ini kita lakukan agar pemahaman menjadi lebih mudah. Dengan tidak melibatkan elemen dinamis, kita hanya akan menghadapi persamaan-persamaan aljabar biasa. Pendekatan ini akan kita pakai juga dalam pembahasan teorema rangkaian serta metoda-metoda analisis.

Walaupun demikian, dalam contoh-contoh persoalan kita mencoba juga melibatkan elemen dinamik secara sangat terbatas (misalnya aplikasi hukum arus Kirchoff). Kita ingat bahwa hubungan arus dan tegangan pada kapasitor dan induktor melibatkan operasi diferensiasi dan integrasi. Oleh karena itu persamaan rangkaian yang mengandung elemen-elemen ini akan berupa persamaan diferensial ataupun integro-diferensial.

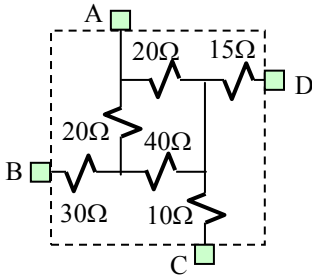
SOAL-SOAL : KAIDAH-KAIDAH RANGKAIAN

R, L, dan C Ekvivalen.

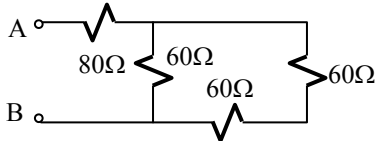
1. Carilah resistansi ekuivalen antara terminal A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, dan C-D.



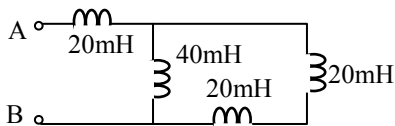
2. Ulangi soal no.7 untuk paket resistor berikut.



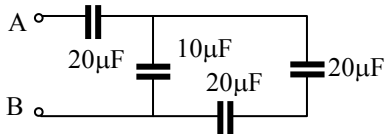
3. Carilah resistansi ekuivalen antara terminal A-B dari rangkaian berikut.



4. Carilah induktansi ekuivalen antara terminal A-B dari rangkaian berikut.

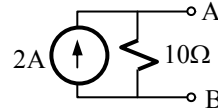


5. Carilah kapasitansi ekuivalen antara terminal A-B dari rangkaian berikut.

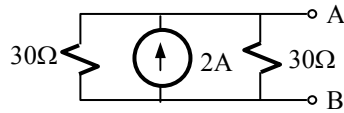


Sumber Ekvivalen.

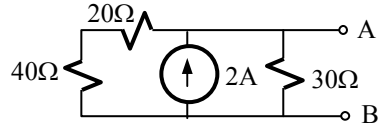
6. Dari rangkaian sumber arus berikut ini carilah rangkaian ekuivalen sumber tegangannya di terminal A-B.



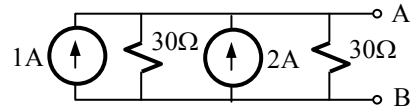
7. Ulangi soal 6 untuk rangkaian berikut.



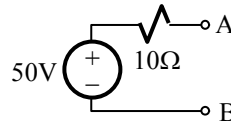
8. Dari rangkaian sumber arus berikut ini carilah rangkaian ekuivalen sumber tegangannya di terminal A-B.



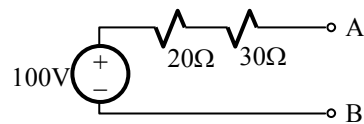
9. Ulangi soal 8 untuk rangkaian berikut.



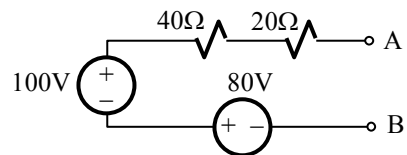
10. Dari rangkaian sumber tegangan berikut ini carilah rangkaian ekuivalen sumber arusnya di terminal A-B.



11. Ulangi soal 10 untuk rangkaian berikut.

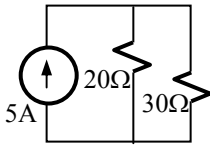


12. Ulangi soal 10 untuk rangkaian berikut.

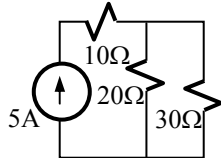


Pembagi Tegangan dan Pembagi Arus.

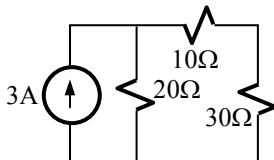
13. Carilah arus dan tegangan di masing-masing resistor pada rangkaian berikut ini.



14. Ulangi soal 13 untuk rangkaian berikut.

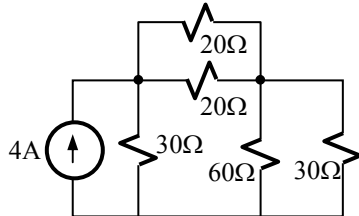


15. Ulangi soal 13 untuk rangkaian berikut

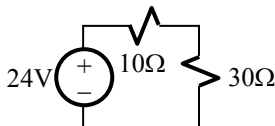


16. Hitunglah daya yang diberikan oleh sumber arus di rangkaian-rangkaian pada soal nomer 13 s/d 15 di atas.

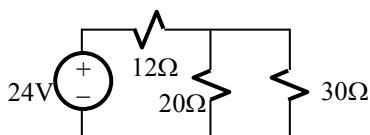
17. Carilah arus dan tegangan di masing-masing resistor pada rangkaian berikut. Hitung pula daya yang diberikan oleh sumber arus.



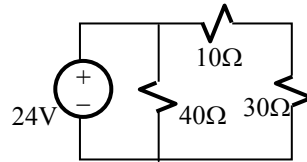
18. Carilah arus dan tegangan di masing-masing resistor pada rangkaian berikut. Hitung pula daya yang diberikan oleh sumber tegangan.



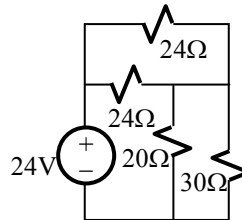
19. Ulangi soal 18 untuk rangkaian berikut.



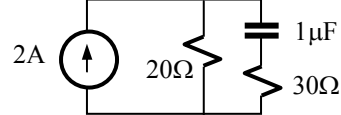
20. Ulangi soal 18 untuk rangkaian berikut.



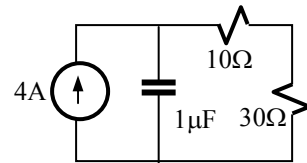
21. Ulangi soal 18 untuk rangkaian berikut.



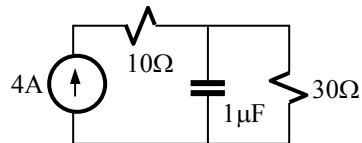
22. Carilah arus dan tegangan di masing-masing elemen rangkaian berikut ini.



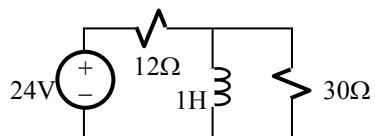
23. Ulangi soal 22 untuk rangkaian berikut.



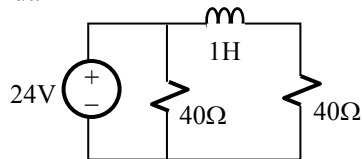
24. Ulangi soal 22 untuk rangkaian berikut.



25. Ulangi soal 22 untuk rangkaian berikut.



26. Ulangi soal 22 untuk rangkaian berikut.



2. 3. Teorema Rangkaian

Tujuan:

- Memahami prinsip proporsionalitas dan mampu menunjukkan bahwa rangkaian linier mengikuti prinsip proporsionalitas.
- Memahami prinsip superposisi dan mampu mengaplikasikan prinsip superposisi.
- Memahami teorema Millman, teorema Thévenin dan teorema Norton, dan mampu mencari rangkaian ekivalen Thévenin atau Norton.
- Memahami teorema alih daya maksimum dan mampu menentukan nilai elemen beban agar terjadi alih daya maksimum.

Sebagaimana telah disebutkan, teorema-teorema rangkaian berbasis pada sifat linier dari rangkaian. Dalam membahas teorema-teorema ini kita akan melihat pada rangkaian dengan elemen resistor saja agar pemahamannya menjadi lebih mudah. Selain prinsip proporsionalitas, prinsip superposisi, teorema Thévenin, teorema Norton, dan teorema alih daya maksimum, dibahas juga secara singkat teorema Millman, teorema substitusi dan teorema Tellegen; tiga teorema terakhir ini dapat dilewati untuk sementara tanpa memberikan kesulitan pada pembahasan pada bab-bab selanjutnya.

Proporsionalitas (Kesebandingan Lurus)

Dalam matematika kita mengenal fungsi linier yang merupakan fungsi yang memiliki dua sifat yaitu sifat **homogen** dan **aditif** yang dapat kita tuliskan

Sifat homogen: $f(Kx) = Kf(x)$, K adalah konstanta skalar.

Sifat aditif: $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

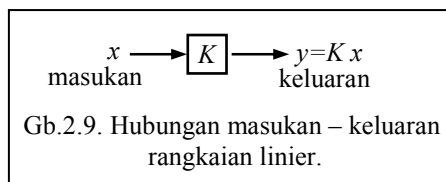
Dalam rangkaian listrik linier, sinyal keluaran merupakan fungsi linier dari sinyal masukan. Sebagai fungsi linier, sifat homogen dan aditif pun muncul. Sifat homogen itu muncul dalam bentuk kesebandingan antara keluaran (*output*) dan masukan (*input*), yang berarti bahwa keluaran dari rangkaian linier berbanding lurus dengan masukannya. Sifat homogen ini kita sebut dengan istilah **proporsionalitas**. Sementara itu sifat aditif terlihat apabila kita mempunyai rangkaian yang mengandung lebih dari satu masukan. Keluaran dari rangkaian linier semacam ini merupakan jumlah dari semua keluaran yang diperoleh jika seandainya masing-masing masukan bekerja secara terpisah. Untuk menyatakan sifat aditif ini kita menggunakan istilah **superposisi**.

Karakteristik $i-v$ dari resistor linier, $v = R i$, adalah contoh dari suatu hubungan linier. Kalau arus meningkat 2 kali maka tegangan juga meningkat 2 kali. Sementara itu daya, $p = i^2 R$, bukanlah hubungan linier sebab jika arus naik 2 kali daya tidak naik 2 kali melainkan 4 kali. Jadi dalam rangkaian linier *hanya tegangan dan arus saja yang memiliki hubungan linier*.

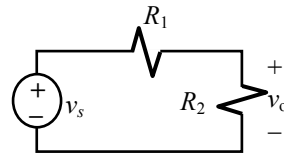
Hubungan antara masukan dan keluaran secara umum dapat ditulis :

$$y = K x \tag{2.18}$$

dengan x adalah masukan (bisa tegangan, bisa juga arus), y adalah keluaran, dan K adalah konstanta proporsionalitas. Hubungan ini dapat digambarkan dengan diagram blok seperti Gb.2.9.



CONTOH 2.14 : Tentukan hubungan antara tegangan keluaran dan tegangan masukan, yaitu v_o/v_s , pada rangkaian di samping ini.



Penyelesaian :

Dengan kaidah pembagi tegangan kita peroleh

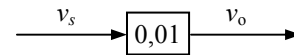
$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) v_s \rightarrow \frac{v_o}{v_s} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Pemahaman :

Di sini, faktor proporsionalitas yang menghubungkan keluaran dan masukan adalah

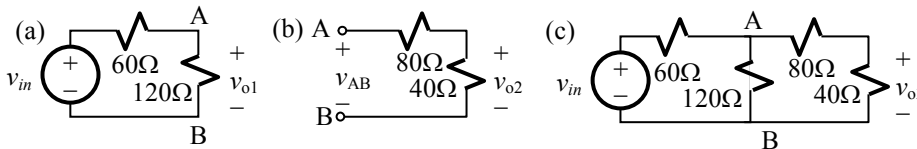
$$K = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Misalkan $R_1 = 1000 \Omega$ dan $R_2 = 10 \Omega$, maka $K = 0,01$, sehingga diagram bloknya adalah seperti di samping ini.



Selama nilai resistor R_1 dan R_2 tidak berubah, maka konstanta K tidak akan berubah. Hubungan keluaran-masukan pun tidak akan berubah. Konstanta proporsionalitas ini tidak berdimensi jika besaran keluaran dan besaran masukan sejenis (sama-sama tegangan atau sama-sama arus). Jika kedua besaran ini tidak sejenis, konstanta ini dapat berdimensi *resistansi* (Ω) ataupun *konduktansi* (S).

CONTOH 2.15 : Tentukan hubungan keluaran-masukan pada rangkaian-rangkaian berikut ini dan gambarkan diagram blok masing-masing.



Penyelesaian :

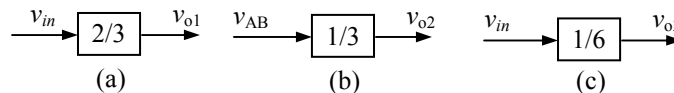
a). Rangkaian (a) : $K_1 = 120/(120 + 60) = 2/3 \rightarrow v_{o1} = (2/3) v_{in}$

b). Rangkaian (b) : $K_2 = 40/(40 + 80) = 1/3 \rightarrow v_{o2} = (1/3) v_{AB}$

c). Rangkaian (c) ini telah kita bahas pada contoh 2.13.

$$K_3 = \left(\frac{40}{40 + 80} \right) \left(\frac{120 \parallel (40 + 80)}{120 \parallel (40 + 80) + 60} \right) = (1/3) \times (1/2) = 1/6 \Rightarrow v_{o3} = (1/6) v_{in}$$

Diagram blok dari masing-masing rangkaian adalah



Pemahaman :

Rangkaian a) dan b) masing-masing mempunyai konstanta proporsionalitas $K_1=2/3$ dan $K_2=1/3$. Rangkaian c) adalah rangkaian b) yang dihubungkan ke rangkaian a). Selintas kita mengharapkan bahwa keluaran dari rangkaian a) akan menjadi masukan bagi rangkaian b) dan mengharapkan pula bahwa konstanta proporsionalitas K_3 akan bernilai

$$K_3 = K_2 \times K_1 = (1/3) \times (2/3) = 2/9$$

Dalam kenyataannya hal itu tidak terjadi. Yang kita peroleh setelah kedua rangkaian itu digabungkan adalah $K_3 = 1/6$. Hal ini disebabkan karena terjadi pembebanan pada rangkaian a) oleh rangkaian b). Sebelum rangkaian digabungkan tegangan keluaran

rangkaian a) adalah $v_{o1} = (2/3)v_{in}$. Akan tetapi setelah rangkaian b) dihubungkan ke rangkaian a), v_{o1} menjadi lebih kecil karena ada pembebanan tambahan dari rangkaian b). Suatu cara agar pembebanan seperti ini tidak terjadi adalah dengan menambahkan suatu rangkaian *antar-muka* yang menjadi penghubung antara kedua rangkaian tersebut. Rangkaian tambahan ini kita sebut *rangkaian penyangga (buffer)*. Kita akan melihat hal ini di Bab-3.

Prinsip Superposisi

Prinsip superposisi memberikan hubungan antara keluaran dengan beberapa masukan di dalam suatu rangkaian yang dapat dituliskan sebagai

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots = K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3 + \dots \quad (2.19)$$

dengan $y_i = K_ix_i$, dan y_i adalah keluaran yang diperoleh jika masing-masing masukan, x_i , bekerja sendiri-sendiri. K_i adalah konstanta yang besarnya tergantung dari rangkaian. Secara singkat dapat dikatakan bahwa *keluaran dari rangkaian resistor linier merupakan kombinasi linier dari masukan*. Dalam rangkaian yang mengandung beberapa masukan (beberapa sumber) bagaimanakah cara kita mencari keluaran yang diberikan oleh masing-masing sumber? Dari persamaan (2.19) kita dapat mengamati bahwa kita dapat memperoleh

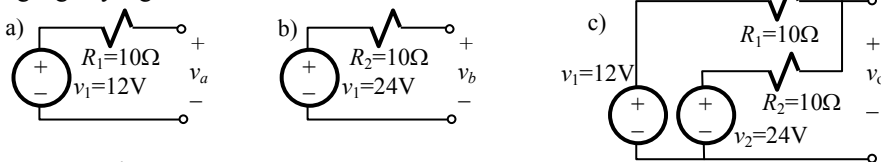
$$y_1 = K_1x_1$$

dengan cara membuat x_2, x_3, \dots dst. bernilai nol sehingga y_2, y_3, \dots dst. bernilai nol. Demikian pula halnya untuk memperoleh $y_2 = K_2x_2$ kita buat semua x bernilai nol kecuali x_2 . Dengan kata lain, kontribusi suatu sumber pada keluaran rangkaian dapat dicari dengan mematikan sumber-sumber yang lain. Jika ini kita lakukan untuk setiap sumber secara bergantian, maka kita akan mendapatkan kontribusi dari setiap sumber. Keluaran rangkaian adalah jumlah dari kontribusi masing-masing sumber. Bagaimanakah cara mematikan suatu sumber?

- Mematikan *sumber tegangan* berarti membuat tegangan sumber itu menjadi nol, artinya sumber ini menjadi *hubungan singkat*.
- Mematikan *sumber arus* adalah membuat arus sumber menjadi nol, artinya sumber ini menjadi *hubungan terbuka*.

Untuk memahami bagaimana suatu sumber berkontribusi jika ia berada dalam suatu rangkaian bersama-sama dengan sumber yang lain, kita lihat contoh berikut ini. Kita akan melihat dua buah sumber tidak bebaban yang bebas satu terhadap lainnya. Kemudian kita melihat bagaimana jika kedua sumber tersebut digabungkan dengan tetap tidak diberi beban.

CONTOH 2.16 : Tentukanlah tegangan keluaran pada rangkaian-rangkaian sumber tegangan yang tidak dibebani berikut ini



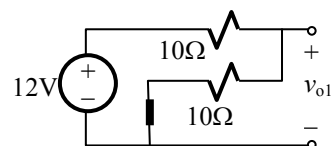
Penyelesaian :

Gambar a) dan b) adalah sumber tegangan yang tak dibebani; tidak ada arus mengalir pada resistor. Dengan demikian maka $v_a = 12 \text{ V}$ dan $v_b = 24 \text{ V}$.

Untuk mencari tegangan keluaran rangkaian c) ini, kita menggunakan prinsip superposisi.

Matikan v_2 . Rangkaian menjadi di samping ini dan

$$v_{o1} = \frac{10}{10+10} \times 12 \text{ V} = 6 \text{ V}$$

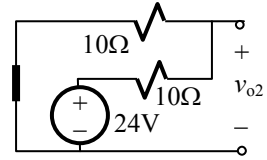


Matikan v_1 . Rangkaian menjadi seperti gambar di samping, dan

$$v_{o2} = \frac{10}{10+10} \times 24 \text{ V} = 12 \text{ V}$$

Jika kedua sumber bekerja bersama maka v_o adalah

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = 6 + 12 = 18 \text{ V}$$



Pemahaman :

Memparalelkan dua atau lebih keluaran rangkaian sumber tegangan, merupakan *penjumlahan tegangan dengan pembobotan*. Perhatikan bahwa tegangan masing-masing rangkaian sumber dalam keadaan tak dibebani adalah $v_a = 12 \text{ V}$ dan $v_b = 24 \text{ V}$. Jika kedua rangkaian sumber digabungkan, keluarannya adalah $(6+12)=18 \text{ V}$. Jadi ada *pembobotan* pada kontribusi dari masing-masing sumber.

Perhatian : Walaupun rangkaian c) tidak dibebani, kedua sumber membentuk loop tertutup sehingga mengalir arus sebesar $i = (v_1 - v_2)/(R_1 + R_2)$. Inilah arus sirkulasi yang akan mengalir walaupun tidak ada beban. Ia akan menjadi nol jika $v_1 = v_2$.

Teorema Millman

Teorema Millman menyatakan bahwa apabila beberapa sumber tegangan v_k yang masing-masing memiliki resistansi seri R_k dihubungkan paralel maka hubungan paralel tersebut dapat digantikan dengan satu sumber tegangan ekuivalen v_{ekiv} dengan resistansi seri ekuivalen

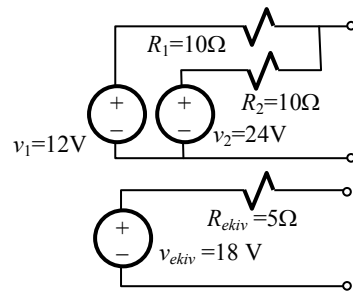
$$R_{ekiv} \text{ sedemikian sehingga } \boxed{\frac{v_{ekiv}}{R_{ekiv}} = \sum \frac{v_k}{R_k} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{R_{ekiv}} = \sum \frac{1}{R_k}} \quad (2.20)$$

CONTOH 2.17.a : Carilah rangkaian ekuivalen dari dua sumber tegangan praktis yang diparalelkan seperti pada gambar di samping ini.

Penyelesaian :

$$\frac{1}{R_{ekiv}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} \Rightarrow R_{ekiv} = 5 \Omega$$

$$v_{ekiv} = 5 \times \left(\frac{12}{10} + \frac{24}{10} \right) = 18 \text{ V}$$



Pemahaman : Jika kita bandingkan dengan contoh

2.16: terlihat bahwa v_{ekiv} di sini sama dengan v_o pada contoh 2.16.

Teorema Millman untuk sumber tegangan yang diparalel ini ada pasangannya (*dual*) yaitu untuk sumber arus yang diserikan. Apabila beberapa sumber arus i_k yang masing-masing memiliki resistansi paralel R_k dihubungkan seri maka hubungan seri tersebut dapat digantikan dengan satu sumber arus ekuivalen i_{ekiv} dengan resistansi paralel ekuivalen R_{ekiv}

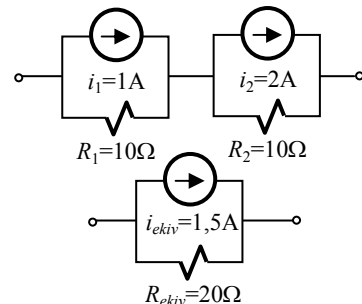
$$\text{sedemikian sehingga } \boxed{i_{ekiv} R_{ekiv} = \sum R_k i_k \quad \text{dan} \quad R_{ekiv} = \sum R_k} \quad (2.21)$$

CONTOH 2.17.b : Carilah rangkaian ekuivalen dari dua sumber tegangan praktis yang diparalelkan seperti pada gambar di samping ini.

Penyelesaian :

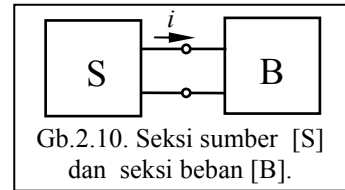
$$R_{ekiv} = 10 + 10 = 20 \Omega$$

$$i_{ekiv} = \frac{1}{20} \times (1 \times 10 + 2 \times 10) = 1,5 \text{ A}$$



Teorema Thévenin dan Teorema Norton

Kedua teorema ini dikembangkan secara terpisah akan tetapi kita akan membahasnya secara bersamaan. Secara umum, rangkaian listrik terdiri dari dua bagian rangkaian yang menjalankan fungsi berbeda, yang dihubungkan oleh terminal interkoneksi. Untuk hubungan dua terminal seperti terlihat pada Gb.2.10., satu bagian disebut *seksi sumber* dan bagian yang lain disebut *seksi beban*. Pengertian *seksi sumber* di sini adalah *bagian rangkaian yang mengandung sumber* dan bukan hanya sebuah sumber saja.



Gb.2.10. Seksi sumber [S] dan seksi beban [B].

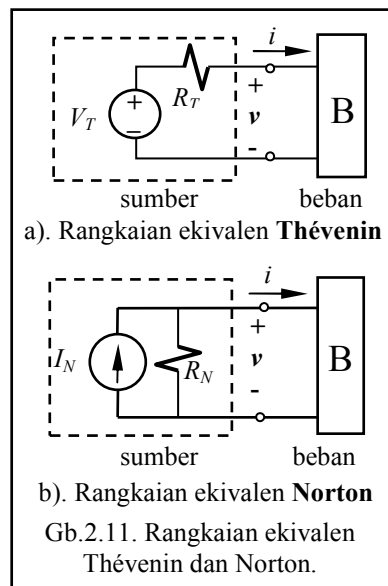
Sinyal listrik dibangkitkan di seksi sumber dan diberikan kepada seksi beban. Interaksi antara seksi sumber dan seksi beban, merupakan salah satu masalah utama yang dibahas dalam analisis dan rancangan rangkaian listrik. Rangkaian seksi sumber dapat digantikan dengan rangkaian ekuivalen Thévenin atau rangkaian ekuivalen Norton. Kondisi yang diperlukan agar rangkaian ekuivalen ini ada, dikatakan secara formal sebagai suatu teorema :

Theorema Thévenin menyatakan bahwa jika rangkaian seksi sumber pada hubungan dua-terminal adalah linier, maka sinyal pada terminal interkoneksi tidak akan berubah jika rangkaian seksi sumber itu diganti dengan rangkaian ekuivalen Thévenin.

Gb.2.11.a. menunjukkan bentuk rangkaian ekuivalen Thévenin; seksi sumber digantikan oleh *satu sumber tegangan V_T yang terhubung seri dengan resistor R_T* .

Theorema Norton menyatakan bahwa jika rangkaian seksi sumber pada hubungan dua-terminal adalah linier, maka sinyal pada terminal interkoneksi tidak akan berubah jika rangkaian seksi sumber itu diganti dengan rangkaian ekuivalen Norton.

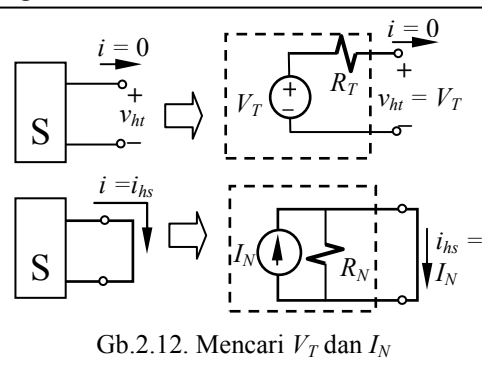
Gb.2.11.b. memperlihatkan bentuk rangkaian ekuivalen Norton; seksi sumber digantikan oleh *satu sumber arus I_N yang terhubung paralel dengan resistor R_N* .



Gb.2.11. Rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton.

V_T adalah tegangan pada terminal interkoneksi apabila beban dilepas; sedangkan I_N adalah arus hubung singkat yang mengalir apabila beban diganti dengan suatu hubung singkat. Hal ini dijelaskan pada Gb.2.12.

Perhatikan bahwa ada persyaratan yang diperlukan agar kita dapat mencari rangkaian ekuivalen Thévenin atau Norton dari seksi sumber, yaitu bahwa *rangkaian seksi sumber harus linier*.

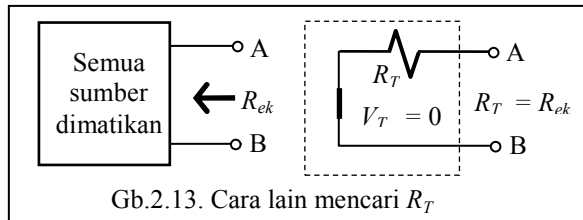


Persyaratan seperti ini tidak diperlukan untuk rangkaian beban, yang berarti bahwa *rangkaian beban boleh linier boleh pula tidak linier (non-linear)*.

Karena kedua rangkaian ekuivalen itu dapat menggantikan satu macam seksi sumber maka kedua rangkaian ekuivalen itu harus mempunyai karakteristik $i-v$ yang sama. Hal ini berarti bahwa dalam keadaan terbuka, $V_T = I_N R_N$; dan dalam keadaan hubung singkat $I_N = V_T / R_T$. Kedua hal ini mengharuskan $V_T = I_N R_N = I_N R_T$ yang berarti R_N harus sama dengan R_T . Jadi parameter rangkaian ekuivalen Thévenin maupun Norton dapat diperoleh dengan mencari tegangan hubungan-terbuka (v_{ht}) dan arus hubung-singkat (i_{hs}) di terminal seksi sumber.

$$\text{Jadi} \quad V_T = v_{ht} \quad I_N = i_{hs} \quad R_T = R_N = v_{ht} / i_{hs} \quad (2.22)$$

Cara Lain Untuk Mencari Resistor Ekuivalen Thévenin (R_T). Resistansi ekuivalen Thévenin R_T dapat diperoleh dengan cara lain yaitu dengan mencari resistansi ekuivalen yang dilihat dari terminal ke arah seksi sumber dengan seluruh sumber dimatikan. Jika resistansi tersebut besarnya adalah R_{ek} maka $R_T = R_{ek}$ (Gb.2.13.).



Gb.2.13. Cara lain mencari R_T

Dengan singkat dapat dikatakan bahwa untuk menentukan rangkaian ekuivalen Thévenin ataupun rangkaian ekuivalen Norton, dua dari tiga parameter di bawah ini dapat digunakan.

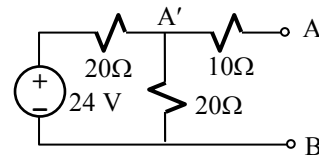
- Tegangan hubungan terbuka pada terminal
- Arus hubung singkat pada terminal
- Resistor ekuivalen sumber dilihat dari terminal dengan semua sumber dimatikan.

Ketiga parameter tersebut dihitung dengan *seksi beban tidak terhubung pada seksi sumber*. Jadi rangkaian ekuivalen Thévenin dan rangkaian ekuivalen Norton merupakan karakteristik seksi sumber dan *tidak tergantung dari beban*. Perhatikanlah bahwa rangkaian ekuivalen Thévenin menjadi suatu model *sumber praktis*.

CONTOH 2.18 : Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin pada terminal AB dari rangkaian di samping ini.

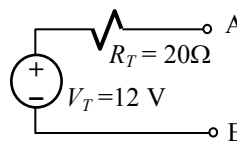
Penyelesaian :

Tegangan terminal terbuka AB sama dengan tegangan pada A'B karena tidak ada arus mengalir pada resistor 10Ω .



$$V_T = V_{A'B} = \frac{20}{20+20} \times 24 = 12 \text{ V}$$

$$R_T = 10 + \frac{20 \times 20}{20+20} = 20 \Omega$$



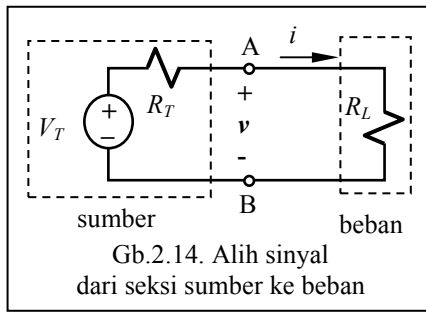
Alih Daya Maksimum

Salah satu persoalan penting dalam rangkaian yang terdiri dari seksi sumber dan seksi beban adalah pengendalian tingkat sinyal di terminal interkoneksinya. Persoalan yang akan kita lihat disini adalah mengenai tingkat sinyal maksimum yang dapat dialihkan melalui terminal interkoneksi. Hubungan antara seksi sumber dan seksi beban dapat kita bagi dalam empat macam keadaan, yaitu :

- Sumber tetap, beban bervariasi.
- Sumber bervariasi, beban tetap.
- Sumber bervariasi, beban bervariasi.
- Sumber tetap, beban tetap.

Dalam pembahasan ini, kita akan membatasi diri pada hubungan antara suatu *sumber tetap* dengan *beban yang bervariasi*. Baik seksi sumber maupun seksi beban adalah rangkaian linier. Seksi sumber dinyatakan dengan rangkaian ekuivalen Thévenin dan beban dinyatakan

dengan resistor ekivalen R_L , seperti terlihat pada Gb.2.14. Untuk sumber yang tetap, parameter V_T dan R_T sudah tertentu sehingga tingkat sinyal di terminal interkoneksi akan dipengaruhi oleh R_L saja.



Gb.2.14. Alih sinyal dari seksi sumber ke beban

Kaidah pembagi tegangan, memberikan tegangan di A-B sebagai $v = \frac{R_L}{R_L + R_T} V_T$. Jika V_T tidak

berubah, tegangan v akan maksimum bila R_L bernilai sangat besar dibanding dengan R_T . Keadaan idealnya adalah R_L bernilai tak terhingga, yang berarti rangkaian terbuka. Dalam

keadaan ini tegangan maksimum adalah $v_{\max} = V_T = v_{ht}$. Jadi tegangan maksimum yang bisa diperoleh di terminal interkoneksi adalah tegangan hubungan terbuka v_{ht} .

Arus yang mengalir ke beban adalah $i = V_T / (R_L + R_T)$. Dari hubungan ini jelas bahwa arus akan maksimum bila R_L jauh lebih kecil dibanding dengan R_T atau mendekati nol (hubung singkat). Jadi arus maksimum yang bisa diperoleh di terminal AB adalah arus hubung singkat $i_{maks} = V_T / R_T = I_N = i_{hs}$.

Daya yang diberikan oleh sumber ke beban adalah $p = vi = \frac{R_L V_T^2}{(R_L + R_T)^2}$. Dalam persamaan

daya ini terlihat bahwa kondisi untuk menghasilkan tegangan maksimum ($R_L = \infty$) maupun arus maksimum ($R_L = 0$) menyebabkan daya menjadi nol. Ini berarti bahwa besarnya R_L yang dapat menghasilkan alih daya maksimum harus terletak di antara kedua nilai ekstrem tersebut. Untuk mencarinya kita turunkan p terhadap R_L dan membuatnya bernilai 0.

$$\frac{dp}{dR_L} = \frac{[(R_L + R_T)^2 - 2R_L(R_L + R_T)]V_T^2}{(R_L + R_T)^4} = \frac{R_T - R_L}{(R_L + R_T)^3} V_T^2 = 0$$

Turunan itu akan menjadi nol bila $R_L = R_T$. Jadi *alih daya akan maksimum jika resistansi beban sama dengan resistansi Thévenin*. Jika keadaan seperti ini dicapai, dikatakan bahwa sumber dan beban *mencapai kesesuaian* atau dalam keadaan “*matched*”.

Daya maksimum yang dialihkan ke beban diperoleh dengan memasukkan kondisi $R_L = R_T$ ke persamaan untuk daya p :

$$p_{maks} = \frac{V_T^2}{4R_T} \tag{2.23}$$

Karena $V_T = I_N R_T$ maka :

$$p_{maks} = \frac{I_N^2 R_T}{4} \tag{2.24}$$

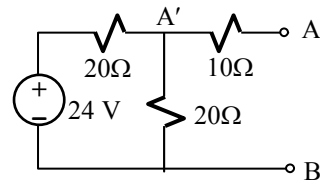
atau

$$p_{maks} = \frac{V_T I_N}{4} = \left[\frac{v_{ht}}{2} \right] \left[\frac{i_{hs}}{2} \right] \tag{2.25}$$

Dengan demikian maka teorema alih daya maksimum menyatakan

Rangkaian sumber dengan resistansi Thévenin R_T akan memberikan daya maksimum kepada resistansi beban R_L bila $R_L = R_T$.

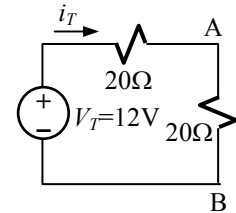
CONTOH 2.19.a : Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin dari rangkaian di samping ini dan tentukan berapa resistansi beban yang harus dihubungkan pada terminal AB agar alih daya ke beban terjadi secara maksimal. Hitung juga berapa daya yang diterima beban pada kondisi alih daya maksimum ini.



Penyelesaian :

Rangkaian ekuivalen Thevenin dari rangkaian ini telah dicari pada contoh 2.17. dan diperoleh $V_T = 12\text{ V}$ dan $R_T = 20\ \Omega$. Jadi beban yang dapat disambungkan ke terminal AB agar terjadi alih daya maksimum adalah $R_B = R_T = 20\ \Omega$.

Jika beban $R_B = 20\ \Omega$ tersebut kita hubungkan ke terminal AB, maka arus yang melalui beban sama dengan arus yang keluar dari sumber Thévenin V_T yaitu $i_B = i_T = 12 / (20 + 20) = 0,3\text{ A}$.



Sedangkan tegangan pada beban adalah

$$v_B = 12 \times 20 / (20 + 20) = 6\text{ V}.$$

Jadi daya yang diserap beban adalah $p_B = v_B \times i_B = 6 \times 0,3 = 1,8\text{ W}$.

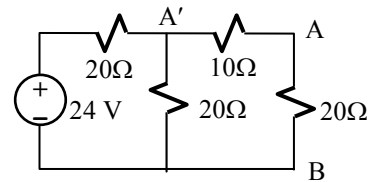
Pemahaman :

Untuk memberikan daya sebesar 1.8 W ini pada beban, berapakah daya yang dikeluarkan oleh sumber ? Kita tidak dapat menjawabnya dengan mengalikan V_T dengan i_T sebab perkalian itu memberikan daya yang dikeluarkan oleh sumber Thévenin. Sumber Thévenin bukanlah sumber sebenarnya akan tetapi merupakan sumber ekuivalen dari suatu rangkaian sumber seperti yang diberikan oleh soal ini. Oleh karena itu, untuk menjawab pertanyaan ini kita menghubungkan beban pada rangkaian aslinya seperti diuraikan dalam contoh 2.21. berikut ini.

CONTOH 2.19.b : Hubungkanlah beban $20\ \Omega$ pada terminal AB rangkaian sebenarnya (bukan rangkaian ekuivalen Thévenin-nya) pada contoh 2.18, dan carilah daya yang diberikan oleh sumber.

Penyelesaian :

Jika beban dihubungkan pada terminal AB, maka rangkaian menjadi seperti gambar di samping ini. Resistansi pada cabang A'AB menjadi $(10+20)=30\ \Omega$. Resistansi ini tersambung paralel dengan $20\ \Omega$, sehingga resistansi ekuivalen cabang A'B menjadi



$$R_{A'B} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = 12\ \Omega$$

Dengan demikian sumber tegangan melihat resistansi total sebesar $R_{tot} = 20 + 12 = 32\ \Omega$.

Arus yang keluar dari sumber adalah $i_s = v_s / R_{tot} = 24 / 32 = 0,75\text{ A}$

Daya yang dikeluarkan oleh sumber adalah $p_s = v_s i_s = 24 \times 0,75 = 18\text{ W}$

Pemahaman:

Daya yang dikeluarkan oleh sumber sebenarnya adalah sebesar $p_s=18\text{ W}$, dan daya yang diterima beban adalah 1.8 W. Jadi hanya 10% dari daya yang dikeluarkan oleh sumber yang dapat diterima oleh beban. Padahal ini terjadi dalam kondisi alih daya yang maksimum. Jadi *alih daya maksimum bukan berarti efisiensi tinggi*. Mengapa demikian ? Perhatikanlah bahwa walaupun beban R_B tidak tersambung pada terminal AB, sesungguhnya sumber tegangan telah mengeluarkan daya yaitu daya yang diserap oleh dua resistor $20\ \Omega$. Arus yang keluar dari sumber dalam keadaan tanpa beban ini adalah

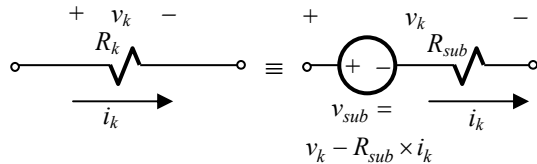
$i_{s0} = 24 / (20 + 20) = 0,6$ A dan daya yang dikeluarkan oleh sumber dalam keadaan tanpa beban adalah $p_{s0} = v_s i_{s0} = 24 \times 0,6 = 14,4$ W.

Jika kita melihat rangkaian ekuivalen Thevenin-nya, sumber tegangan V_T tidak memberikan daya jika beban tidak terhubung. Sedangkan pada rangkaian sesungguhnya, sumber tegangan memberikan daya walaupun beban tidak terhubung. Jadi selisih antara daya yang dikeluarkan oleh sumber sesungguhnya dalam keadaan beban R_L tersambung, yaitu $p_s = 18$ W, dengan daya yang dikeluarkan dalam keadaan R_L tidak tersambung, yaitu $p_{s0} = 14,4$ W, adalah daya yang dikeluarkan oleh sumber Thévenin V_T , yaitu $p_T = p_s - p_{s0} = 18 - 14,4 = 3,6$ W, dan ini tidak lain adalah $p_T = V_T i_T = 12 \times 0,3 = 3,6$ W. Daya yang diterima oleh beban adalah setengah dari p_T (karena R_T sama dengan R_{beban}) yaitu 1,8 W.

Teorema Substitusi

Teorema substitusi menyatakan bahwa suatu cabang rangkaian antara dua simpul dapat disubstitusi oleh cabang baru tanpa mengganggu arus dan tegangan di cabang-cabang yang lain asalkan tegangan dan arus antara kedua simpul tersebut tidak berubah.

Secara umum dapat kita katakan bahwa jika suatu cabang pada rangkaian berisi resistansi R_k yang bertegangan v_k dan dialiri arus i_k maka resistansi pada cabang ini dapat kita substitusi dengan $R_{sub} + v_{sub}$ di mana $v_{sub} = v_k - R_{sub} \times i_k$



sedangkan R_{sub} dapat bernilai sembarang. Mengubah isi suatu cabang dengan tetap mempertahankan nilai arus dan tegangannya tidak akan mengubah relasi hukum Kirchoff. Oleh karena itulah teorema ini berlaku. Teorema ini dapat kita manfaatkan untuk menggantikan resistansi yang berada di suatu cabang dengan suatu sumber tegangan atau sebaliknya.

Teorema Tellegen.

Berikut ini kita akan membahas perimbangan daya dari keseluruhan rangkaian, yang terdiri dari banyak elemen. Untuk menghitung daya di masing-masing elemen kita memerlukan parameter *tegangan elemen* v_k dan *arus elemen* i_k . Sesuai dengan konvensi pasif hasil kali $v_k \times i_k$ bernilai *positif jika elemen yang bersangkutan menyerap daya* dan bernilai *negatif jika memberikan daya*.

Teorema Tellegen menyatakan bahwa jika v_k mengikuti hukum tegangan Kirchoff (HTK) dan i_k mengikuti hukum arus Kirchoff (HAK), maka

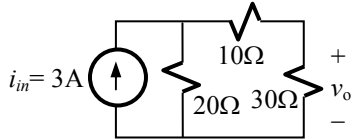
$$\sum_{k=1}^N v_k \times i_k = 0 \quad (2.26)$$

Penjumlahan tersebut meliputi seluruh elemen ($N =$ jumlah elemen). Teorema ini hanya memerlukan persyaratan bahwa HTK dan HAK dipenuhi, tanpa mempedulikan karakteristik i - v dari elemen. Dengan demikian maka teorema ini berlaku baik untuk rangkaian linier maupun non linier. Teorema ini menyatakan bahwa di setiap rangkaian listrik harus ada perimbangan yang tepat antara daya yang diserap oleh elemen pasif dengan daya yang diberikan oleh elemen aktif. Hal ini sesuai dengan prinsip konservasi energi. Lebih dari sekedar memenuhi prinsip konservasi energi, kita dapat menarik kesimpulan bahwa satu-satunya cara agar energi dapat *diserap dari* atau *disalurkan ke* suatu bagian rangkaian adalah melalui *tegangan dan arus* di terminalnya.

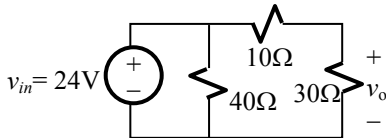
SOAL-SOAL : TEOREMA RANGKAIAN

Proporsionalitas

1. Carilah hubungan antara keluaran v_o dan masukan i_{in} rangkaian berikut, dan gambarkan diagram blok rangkaian.

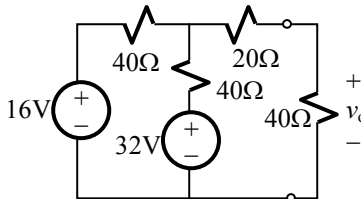


2. Carilah hubungan antara keluaran v_o dan masukan v_{in} rangkaian berikut, dan gambarkan diagram blok rangkaian.

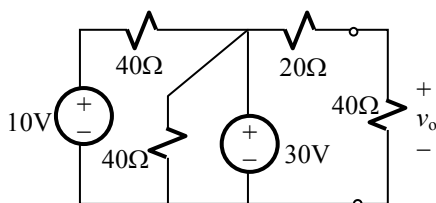


Superposisi

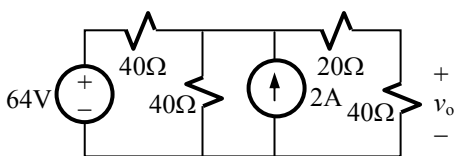
3. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut ini.



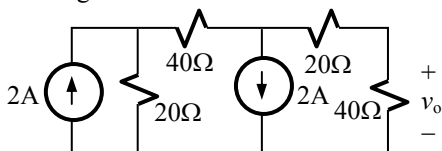
4. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut ini.



5. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut ini.

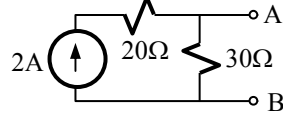


6. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut ini.

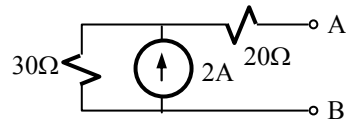


Rangkaian Ekuivalen Thévenin & Norton

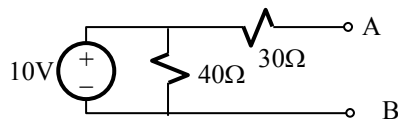
7. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton di terminal A-B dari rangkaian berikut ini.



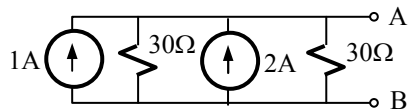
8. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton di terminal A-B dari rangkaian berikut ini.



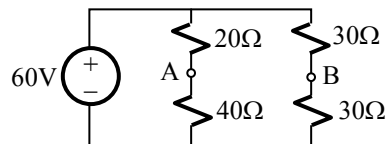
9. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton di terminal A-B rangkaian berikut ini.



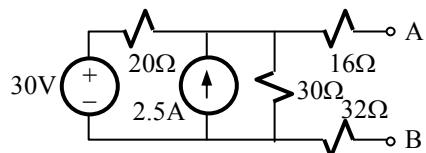
10. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton di terminal A-B rangkaian berikut ini.



11. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin di terminal A-B rangkaian berikut ini.

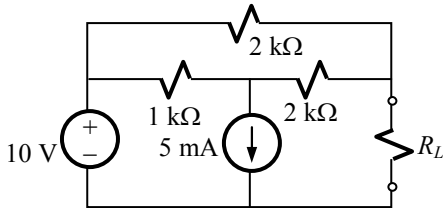


12. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin di terminal A-B rangkaian berikut ini.

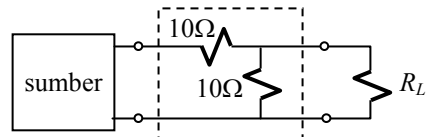


Alih Daya Maksimum

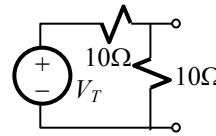
13. Pada rangkaian berikut ini tentukanlah nilai resistansi beban R_L sehingga terjadi alih daya maksimum pada beban dan carilah besarnya daya maksimum tersebut.



14. Gambar berikut ini menunjukkan antar-muka dua port, yang terminal keluarannya dihubungkan ke beban R_L sedangkan terminal masukannya dihubungkan ke sumber.

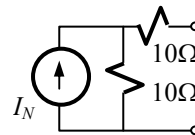


Sumber mempunyai rangkaian ekuivalen sebagai berikut.



Tentukanlah R_L agar terjadi alih daya maksimum ke beban.

15. Ulangi soal 14 jika sumber mempunyai rangkaian ekuivalen seperti berikut.



2.4. Metoda Analisis Dasar

Tujuan :

- Mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda reduksi rangkaian.
- Mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda keluaran satu satuan.
- Mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda superposisi.
- Mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda rangkaian ekuivalen Thévenin atau rangkaian ekuivalen Norton.

Secara garis besar, apa yang dimaksud dengan analisis rangkaian adalah : dari suatu rangkaian yang diketahui semua elemen dan parameternya, kita harus mencari besaran keluaran untuk suatu besaran masukan yang diketahui atau mencari hubungan antara besaran keluaran dan masukan.

Teorema rangkaian beserta hukum-hukum dan kaidah rangkaian yang telah kita pelajari, menjadi dasar dari metoda-metoda analisis rangkaian yang kita sebut sebagai *metoda analisis dasar*. Dalam menggunakan metoda ini kita melakukan perhitungan-perhitungan dengan mengamati bentuk rangkaian yang kita hadapi. Metoda ini terutama digunakan pada rangkaian-rangkaian yang sederhana. Untuk rangkaian yang lebih rumit kita memerlukan metoda yang lebih sistematis yang kita sebut *metoda analisis umum*.

Metoda analisis dasar yang akan kita pelajari di sini mencakup:

- metoda reduksi rangkaian
- metoda keluaran satu satuan
- metoda superposisi
- metoda rangkaian Thévenin dan rangkaian Norton.

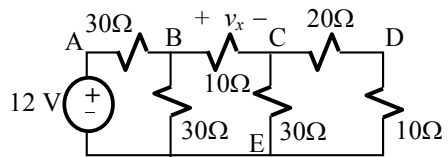
Masing-masing metoda mempunyai kegunaan tertentu. Kekhususan masing-masing metoda itulah yang mendorong kita untuk mempelajari semua metoda dan tidak terpaku pada salah satu metoda saja. Pemilihan metoda analisis lebih ditentukan oleh apa yang ingin kita capai dalam melakukan analisis.

Dalam metoda-metoda analisis dasar, kita melakukan perhitungan-perhitungan langsung pada model rangkaian. Melalui latihan yang cukup, kita akan mampu menentukan metoda dan urutan kerja yang singkat serta dapat memahami perilaku rangkaian listrik dengan baik. Metoda-metoda ini sangat praktis selama rangkaian yang kita hadapi cukup sederhana. Contoh-contoh yang akan kita lihat untuk memahami metoda-metoda analisis ini mencakup rangkaian pasif (terutama dengan elemen R) dan rangkaian aktif (dengan sumber tak-bebas).

Metoda Reduksi Rangkaian

Strategi metoda ini adalah mereduksi bentuk rangkaian sedemikian rupa sehingga menjadi rangkaian yang lebih sederhana; dengan rangkaian yang lebih sederhana ini besaran yang dicari dapat dihitung dengan lebih mudah. Konsep ekivalensi seri-paralel dan transformasi sumber dapat kita gunakan untuk menyederhanakan rangkaian.

CONTOH 2.20 : Carilah tegangan v_x pada rangkaian di samping ini.

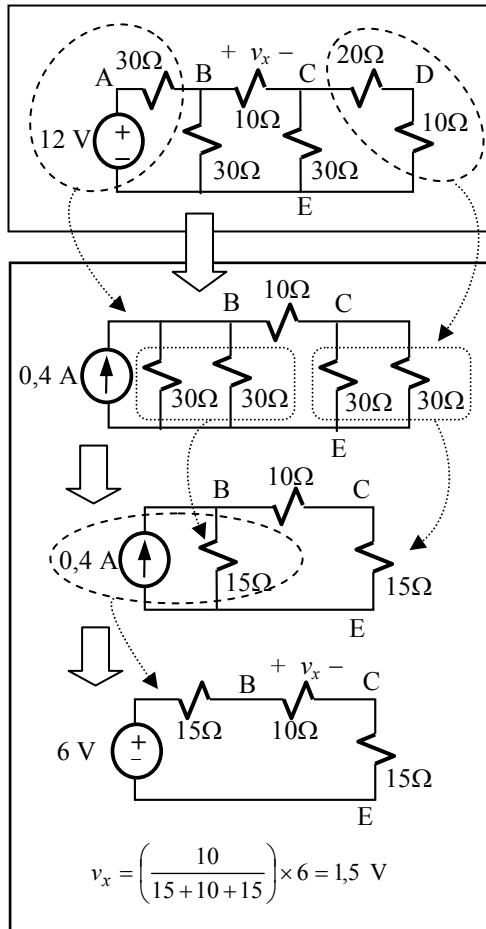


Penyelesaian:

Rangkaian ini mengandung beberapa bagian yang berupa hubungan seri dan hubungan paralel elemen-elemen. Bagian-bagian tersebut dapat kita ganti dengan rangkaian ekivalennya, dengan memanfaatkan kaidah-kaidah rangkaian yang telah kita pelajari.

Sumber tegangan yang tersambung seri dengan resistor $30\ \Omega$ dapat diganti dengan sebuah sumber arus yang di-paralel dengan resistor, sedang sambungan seri resistor $10\ \Omega$ & $20\ \Omega$ di cabang CDE dapat diganti dengan sebuah resistor. Penggantian ini menghasilkan rangkaian dengan dua pasang resistor paralel $30\ \Omega$, yang masing-masing dapat diganti dengan satu resistor $15\ \Omega$. Dengan langkah ini sumber arus terparalel dengan resistor $15\ \Omega$, yang kemudian dapat diganti dengan sebuah sumber tegangan yang disambung seri dengan sebuah resistor $15\ \Omega$; bagian lain berupa dua resistor 10 dan $15\ \Omega$ yang tersambung seri.

Rangkaian kita menjadi sebuah sumber tegangan dengan sambungan seri tiga buah resistor, dan tegangan yang kita cari dapat kita peroleh dengan memanfaatkan kaidah pembagi tegangan; hasilnya $v_x = 1,5\ \text{V}$.



Pemahaman:

Untuk mengaplikasikan metoda ini kita harus dengan seksama memperhatikan bagian-bagian yang dapat disederhanakan. Pada dasarnya kita melakukan ekivalensi bagian-bagian yang berada di antara dua simpul. Bagian yang telah digantikan oleh rangkaian ekivalennya, masih dapat digabungkan dengan bagian lain yang juga telah digantikan oleh rangkaian ekivalennya.

Metoda Keluaran Satu Satuan (Unit Output Method)

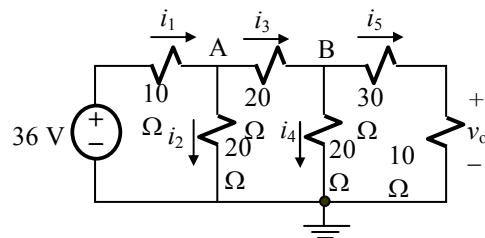
Metoda “unit output” adalah suatu teknik analisis yang berbasis pada proporsionalitas dari rangkaian linier. Metoda ini pada dasarnya adalah mencari konstanta K yang menentukan hubungan antara masukan dan keluaran, dengan menganggap bahwa keluarannya adalah satu unit. Atas dasar itu ditentukan berapa besarnya masukan yang diperlukan untuk menghasilkan satu unit keluaran tersebut. Teknik ini dapat diaplikasikan pada *rangkaian berbentuk tangga*. Langkah-langkahnya adalah sbb:

1. Misalkan keluarannya adalah satu unit (tegangan ataupun arus)
2. Secara berurutan gunakan HAK, HTK, dan hukum Ohm untuk mencari masukan.
3. Sifat proporsional dari rangkaian linier mengharuskan

$$K = \frac{(\text{keluaran})}{(\text{masukan})} = \frac{1}{(\text{masukan untuk satu unit keluaran})} \quad (2.27)$$

4. Keluaran untuk sembarang masukan adalah $K \times \text{masukan}$.

CONTOH 2.21 : Carilah tegangan keluaran v_o dari rangkaian di samping ini.



Penyelesaian :

Kita misalkan tegangan $v_o = 1$ V.

Kemudian secara berturut turut kita hitung i_5 , v_C , i_4 , i_3 , v_B , i_2 , i_1 , dan akhirnya v_s yaitu tegangan sumber jika keluarannya 1 V. Dari sini kemudian kita hitung faktor proporsionalitas K , dan dengan nilai K yang diperoleh ini kita hitung v_o yang besarnya adalah K kali tegangan sumber sebenarnya (yaitu 36 V).

$$\text{Misalkan } v_o = 1 \text{ V} \rightarrow i_5 = \frac{v_o}{10} = 0,1 \text{ A}$$

$$v_B = 0,1(30 + 10) = 4 \text{ V} \rightarrow i_4 = \frac{v_B}{20} = \frac{4}{20} = 0,2 \text{ A} \rightarrow i_3 = i_4 + i_5 = 0,3 \text{ A}$$

$$v_A = v_B + i_3 \times 20 = 10 \text{ V} \rightarrow i_2 = \frac{v_A}{20} = 0,5 \text{ A} \rightarrow i_1 = i_2 + i_3 = 0,8 \text{ A}$$

$$v_s = v_A + i_1 \times 20 = 10 + 0,8 \times 20 = 26 \text{ V}$$

$$K = \frac{1}{v_s} = \frac{1}{26} \rightarrow v_o(\text{seharusnya}) = K \times 36 = 2 \text{ V}$$

Metoda Superposisi

Prinsip superposisi dapat kita manfaatkan untuk melakukan analisis rangkaian yang mengandung lebih dari satu sumber. Langkah-langkah yang harus diambil adalah sebagai berikut:

1. *Matikan* semua sumber (masuk) kecuali salah satu di antaranya, dan hitung keluaran rangkaian yang dihasilkan oleh satu sumber ini.
2. Ulangi langkah 1, sampai semua sumber mendapat giliran.
3. Keluaran yang dicari adalah kombinasi linier (jumlah aljabar) dari kontribusi masing-masing sumber.

CONTOH 2.22 : Rangkaian di samping ini mengandung dua sumber. Carilah tegangan keluaran V_o .

Penyelesaian :

Matikan sumber arus. Rangkaian menjadi seperti gambar di samping ini.

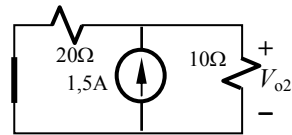
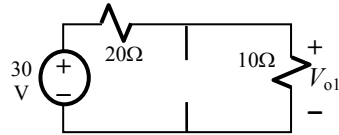
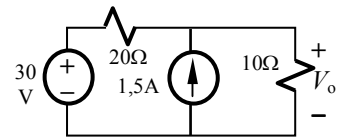
$$V_{o1} = \frac{10}{10 + 20} \times 30 = 10 \text{ V}$$

Matikan sumber tegangan. Rangkaian menjadi seperti gambar di samping ini.

$$V_{o2} = \left(\frac{20}{20 + 10} \times 1.5 \right) \times 10 = 10 \text{ V}$$

Tegangan keluaran apabila kedua sumber bekerja bersama-sama adalah

$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = 20 \text{ V}$$



Metoda Rangkaian Ekuivalen Thévenin ataupun Norton

Berikut ini akan kita lihat aplikasi teorema Thévenin dalam analisis rangkaian.

CONTOH 2.23 : Gunakanlah metoda rangkaian ekuivalen Thévenin untuk menghitung tegangan keluaran v_o pada rangkaian di samping ini.

Penyelesaian :

Untuk mencari tegangan sumber Thévenin V_T di terminal AB, kita lepaskan beban di AB, sehingga AB terbuka, $i_3 = 0$, dan

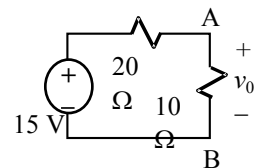
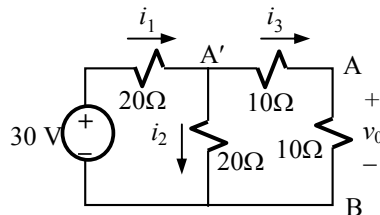
$$V_T = v_{AB \text{ ht}} = v_{A'B} = \frac{20}{20 + 20} \times 30 = 15 \text{ V}$$

Resistansi Thévenin R_T adalah resistansi yang dilihat dari terminal AB ke arah sumber dengan sumber dimatikan (dalam hal ini hubung singkat). Maka R_T berupa resistor 10Ω yang terhubung seri dengan dua resistor 20Ω yang tersambung paralel. Jadi

$$R_T = 10 + \frac{20 \times 20}{20 + 20} = 20 \Omega$$

Rangkaian ekuivalen Thévenin adalah seperti gambar di samping ini dan kita peroleh

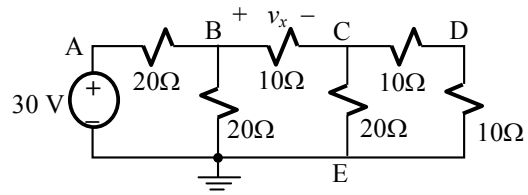
$$v_o = \frac{10}{10 + 20} \times 15 = 5 \text{ V}$$



CONTOH 2.24 : Gunakan rangkaian ekuivalen Thévenin untuk menghitung tegangan v_x pada rangkaian di samping ini.

Penyelesaian :

Rangkaian ini telah kita analisis dengan menggunakan metoda reduksi rangkaian. Kita akan mencoba melakukan analisis dengan metoda rangkaian ekuivalen Thévenin.



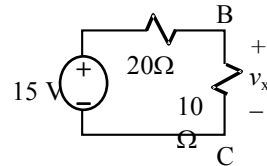
Jika resistor $10\ \Omega$ (yang harus kita cari tegangannya) kita lepaskan, maka tidak ada arus mengalir pada cabang-cabang CE, CD, dan DE sehingga tegangan simpul C sama dengan D sama pula dengan E yaitu nol. Tegangan simpul B dapat kita cari dengan kaidah pembagi tegangan $v_B = \frac{20}{20+20} \times 30 = 15\ \text{V}$.

Tegangan Thévenin $V_T = v_B - v_C = 15\ \text{V}$.

Resistansi Thévenin adalah resistansi yang dilihat dari terminal BC setelah resistor $10\ \Omega$ dilepas.

$$R_T = (20 \parallel 20) + \{20 \parallel (10 + 10)\} = 10 + 10 = 20\ \Omega$$

Rangkaian ekuivalen Thévenin dengan bebannya menjadi seperti gambar di samping ini. Tegangan v_x mudah dihitung,



yaitu : $v_x = \frac{10}{10+20} \times 15 = 5\ \text{V}$

Hasil ini sama dengan hasil yang kita peroleh sebelumnya dengan menggunakan metoda reduksi rangkaian.

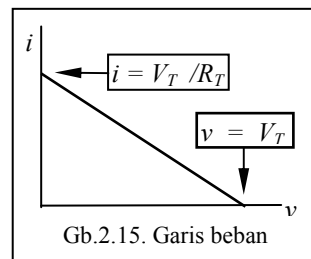
Beban non linier. Parameter rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton (V_T , R_T , dan I_N) dihitung dengan beban dilepas. Ini berarti bahwa *rangkaian ekuivalen tersebut merupakan karakteristik sumber dan tidak dipengaruhi oleh beban*. Oleh karena itu kita dapat memanfaatkan rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton untuk menentukan tegangan, arus, maupun daya pada *beban non linier dua terminal*. Ini merupakan salah satu hal penting yang dapat kita peroleh dari rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton.

Bagaimana interaksi antara sumber (yang dinyatakan dengan rangkaian ekuivalen Théveninnya) dengan beban yang non-linier, akan kita lihat berikut ini. Kita lihat lebih dahulu karakteristik $i-v$ dari suatu rangkaian ekuivalen Thévenin. Perhatikan hubungan rangkaian ekuivalen Thévenin dengan bebannya. Bagaimanapun keadaan beban, linier atau non-linier, hubungan antara tegangan di terminal beban, yaitu v , dengan tegangan V_T dapat dinyatakan sebagai

$$-V_T + iR_T + v = 0 \quad \rightarrow \quad i = \left(\frac{V_T}{R_T}\right) - \left(\frac{1}{R_T}\right)v \quad (2.28)$$

Persamaan (2.28) ini memberikan hubungan antara arus i dan tegangan v dari rangkaian ekuivalen Thévenin dan merupakan karakteristik $i-v$ dari rangkaian sumber. Jika kita gambarkan kurva i terhadap v maka akan terlihat bahwa persamaan ini merupakan persamaan garis lurus di bidang $i-v$ seperti tampak pada Gb.2.15. di samping ini. Perhatikan bahwa garis lurus ini ditentukan oleh dua titik yaitu:

$$i = \frac{V_T}{R_T} = i_{hs} \quad \text{dan} \quad v = V_T = v_{ht}$$

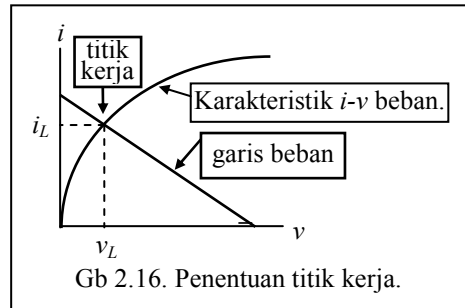


Garis lurus itu disebut *garis beban* (*load line*) (sebenarnya ia ditentukan oleh parameter-parameter rangkaian sumber dan bukan oleh parameter beban akan tetapi sudah sejak lama nama "*load line*" itu disandanginya). Sementara itu beban mempunyai karakteristik *i-v*-nya sendiri, yang secara matematis dapat dituliskan sebagai: $i = f(v)$.

Dengan demikian kita mempunyai dua persamaan yaitu persamaan untuk *arus rangkaian sumber* yaitu $i = \left(\frac{V_T}{R_T}\right) - \left(\frac{1}{R_T}\right)v$ dan persamaan untuk *arus beban* yaitu $i = f(v)$. Dalam

analisis rangkaian, kita harus menyelesaikan dua persamaan itu secara simultan. Jika $f(v)$ diketahui maka penyelesaian persamaan dapat dilakukan secara analitis. Tetapi pada umumnya penyelesaian secara grafis sudah cukup memadai. Berikut ini dipaparkan bagaimana cara grafis tersebut dilaksanakan.

Misalkan karakteristik *i-v* beban mempunyai bentuk tertentu, yang jika dipadukan dengan grafik *i-v* sumber (yaitu garis beban) akan terlihat seperti pada Gb.2.16. Kedua kurva akan berpotongan di suatu titik. Titik potong tersebut memberikan nilai arus *i* dan tegangan *v* yang memenuhi karakteristik sumber maupun beban. Titik ini disebut *titik kerja*, atau dalam elektronika disebut *Q-point*.

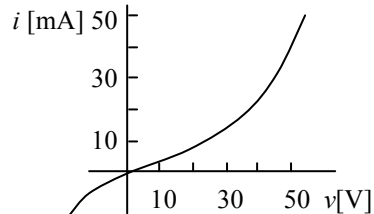
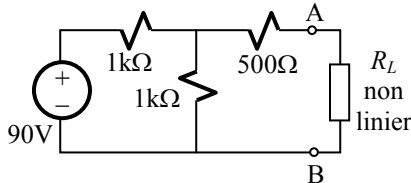


Gb 2.16. Penentuan titik kerja.

Arus dan tegangan beban adalah i_L dan v_L

Perhatikan bahwa apabila rangkaian mengandung **elemen non linier prinsip proporsionalitas dan superposisi tidak berlaku**. Sebagai contoh, apabila tegangan sumber naik dari 15 menjadi 30 V, arus dan tegangan beban *tidak* dua kali lebih besar.

CONTOH 2.25 : Rangkaian berikut ini, mempunyai beban resistor non-linier dengan karakteristik *i-v* seperti yang diberikan di sampingnya. Hitunglah daya yang diserap oleh beban.

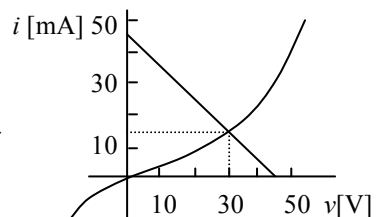
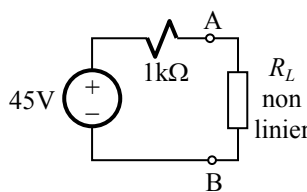


Penyelesaian :

Beban dilepas untuk mencari rangkaian ekuivalen Thévenin.

$$V_T = v_{AB \text{ ht}} = \frac{1}{1+1} \times 60 = 45 \text{ V} \quad ; \quad R_T = 500 + 1000 \parallel 1000 = 1000 \text{ } \Omega$$

Rangkaian ekuivalen dan garis beban yang diplot bersama dengan karakteristik *i-v* beban adalah seperti di samping ini. Dari grafik ini kita temukan titik-kerja yang

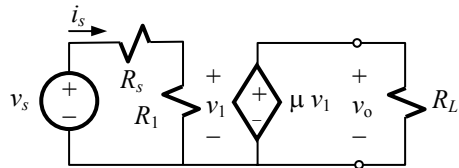


menyatakan bahwa arus yang mengalir adalah 15 mA pada tegangan 30 V. Jadi daya yang diserap beban adalah : $p_L = v_L i_L = 30 \times 15 = 450 \text{ mW}$

Rangkaian Dengan Sumber Tak-Bebas Tanpa Umpan Balik

Contoh-contoh persoalan yang kita ambil dalam membahas metoda-metoda analisis dasar yang telah kita lakukan, adalah rangkaian dengan elemen aktif yang berupa sumber bebas. Berikut ini kita akan melihat rangkaian-rangkaian dengan sumber tak-bebas *tanpa umpan balik*.

CONTOH 2.26 : Tentukanlah tegangan keluaran v_o serta daya yang diserap oleh beban R_L pada rangkaian dengan sumber tak-bebas VCVS di samping ini.



Penyelesaian :

Tegangan v_1 pada loop pengendali dapat diperoleh melalui kaidah pembagi tegangan

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_s} v_s.$$

Dengan demikian maka keluaran VCVS adalah : $v_o = \mu v_1 = \frac{\mu R_1}{R_1 + R_s} v_s$

Daya yang diserap oleh beban adalah : $p_L = \frac{v_o^2}{R_L} = \frac{1}{R_L} \times \left(\frac{\mu R_1 v_s}{R_1 + R_s} \right)^2$

Pemahaman :

Tegangan keluaran VCVS berbanding lurus dengan masukannya. Jika nilai $\mu > 1$ maka rangkaian ini berfungsi sebagai *penguat (amplifier)*. Jika $\mu < 1$ rangkaian ini menjadi *peredam (attenuator)*, dan jika $\mu = 1$ maka ia menjadi *penyangga (buffer atau follower)*.

Kelebihan dari rangkaian dengan VCVS ini dibandingkan dengan rangkaian pasif dapat kita lihat sebagai berikut. Jika kita menghubungkan R_L langsung ke terminal v_1 (berarti paralel dengan R_1) maka tegangan keluaran pada beban adalah

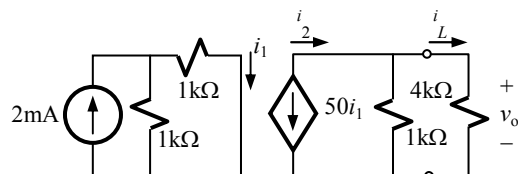
$$v_o(\text{pasif}) = \frac{R_1 \parallel R_L}{R_s + (R_1 \parallel R_L)} \times v_s$$

Jika kita bandingkan formulasi v_o untuk kedua keadaan tersebut akan terlihat bahwa pada rangkaian pasif tegangan keluaran tergantung dari resistansi beban, sedangkan pada rangkaian aktif tegangan keluaran tergantung dari μ tetapi tidak tergantung dari resistansi beban.

Daya yang diberikan oleh sumber tegangan v_s adalah : $p_s = v_s i_s = \frac{v_s^2}{R_s + r_1}$

Daya ini tidak tergantung dari R_L , yang berarti bahwa bertambahnya daya yang diserap oleh beban (p_L) tidak mempengaruhi sumber tegangan v_s . Keadaan ini mencegah terjadinya interaksi antara beban dan sumber, artinya tersambungannya R_L tidak menjadi beban bagi v_s . Daya yang diserap oleh beban berasal dari catu daya pada piranti aktif yang diwakili oleh VCVS, yang tidak diperlihatkan pada diagram rangkaian. Sumber tak-bebas memberikan alih daya yang sifatnya *unilateral*.

Contoh 2.27: Tentukan hubungan keluaran-masukan pada rangkaian dengan CCCS di samping ini.



Penyelesaian:

Untuk mencari v_o kita memerlukan i_1 yang dapat dicari dengan kaidah pembagi arus.

$$i_1 = \frac{1}{1+1} \times 2 = 1 \text{ mA}$$

Dari sini kita mendapatkan i_2 yaitu $i_2 = -50 \times i_1 = -50 \text{ mA}$

Tanda “-” diperlukan karena referensi arah arus i_2 berlawanan dengan arah arus positif sumber arus tak-bebas CCCS. Dari sini kita dapatkan $i_L = \frac{1}{1+4} i_2 = -10 \text{ mA}$.

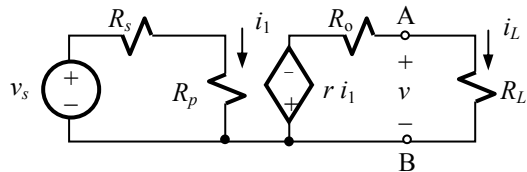
Tegangan keluaran: $v_o = -10 \times 10^{-3} \times 4000 = -40 \text{ V}$

Hubungan keluaran-masukan menjadi: $\frac{v_o}{i_s} = \frac{-40}{0,002} = -20000$

Pemahaman:

Hasil diatas mengandung tanda negatif. Ini berarti bahwa sinyal keluaran berlawanan dengan sinyal masukan. Dengan kata lain terjadi proses pembalikan sinyal pada rangkaian di atas, dan kita sebut *inversi sinyal*.

Contoh 2.28: CONTOH 2.28 : Carilah rangkaian ekivalen Thévenin dilihat di terminal AB, dari rangkaian dengan CCCS di samping ini.



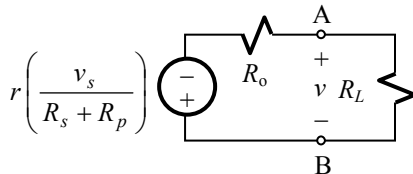
Penyelesaian :

Tegangan Thévenin V_T adalah tegangan terminal AB terbuka (jika beban R_L dilepas), yaitu :

$$V_T = v_{AB \text{ ht}} = -r i_1 = -r \left(\frac{v_s}{R_s + R_p} \right)$$

Tanda “-” ini karena arah referensi tegangan CCCS berlawanan dengan referensi tegangan v_{AB} . Arus hubung singkat di terminal AB jika beban diganti dengan hubung singkat adalah : $i_{AB \text{ hs}} = \frac{-r i_1}{R_o} = \frac{-r v_s}{R_o (R_s + R_p)}$

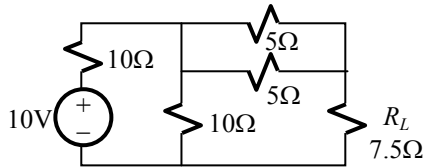
$$\text{Resistansi Thévenin } R_T \text{ adalah : } R_T = \frac{v_{AB \text{ ht}}}{i_{AB \text{ hs}}} = \left(\frac{-r v_s}{R_p + R_s} \right) / \left(\frac{-r v_s}{R_o (R_s + R_p)} \right) = R_o$$



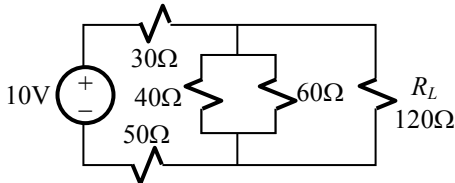
Rangkaian Thévenin yang kita cari adalah seperti gambar di samping ini. Perhatikan polaritas dari tegangan $V_T = -r i_1$.

SOAL-SOAL : METODA ANALISIS DASAR

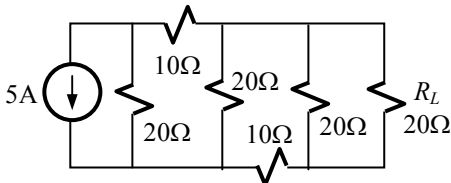
1. Carilah arus yang melalui beban R_L dan daya yang diberikan oleh sumber pada rangkaian berikut.



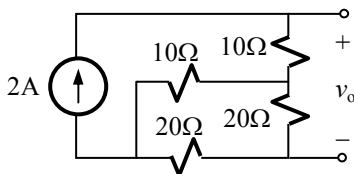
2. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



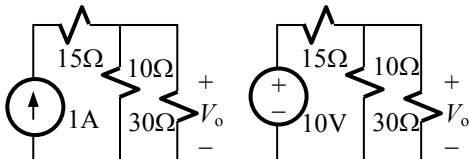
3. Carilah tegangan beban R_L dan daya yang diberikan oleh sumber pada rangkaian berikut.



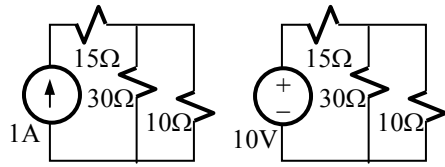
4. Carilah tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut ini. Berapakah resistansi beban yang harus dihubungkan ke terminal keluaran agar terjadi alih daya maksimum?



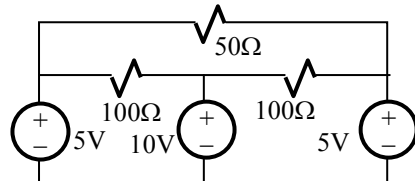
5. Gunakan metoda *unit output* untuk mencari tegangan keluaran V_o pada dua rangkaian berikut ini



6. Gunakan metoda rangkaian ekivalen Thévenin atau Norton untuk menentukan tegangan dan arus di resistor 10 Ω pada kedua rangkaian berikut ini.

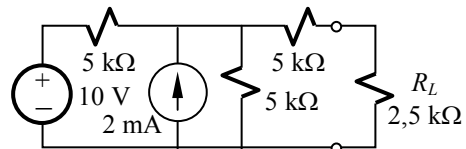


7. Carilah tegangan dan arus tiap resistor pada rangkaian berikut.

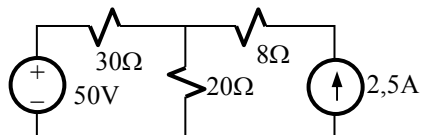


8. Hitunglah daya yang dikeluarkan oleh masing-masing sumber pada soal 7.

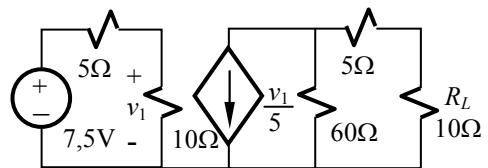
9. Pada rangkaian berikut ini hitunglah arus yang melalui resistor beban R_L .



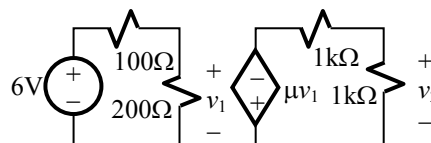
10. Pada rangkaian berikut ini hitunglah daya yang diserap resistor 5 Ω dan daya masing-masing sumber.



11. Pada rangkaian berikut ini, hitunglah arus yang melalui beban R_L .



12. Berapa μ agar rangkaian berikut ini mempunyai keluaran $v_2 = -10$ V.



13. Selidiki apakah terjadi alih daya maksimum pada soal 11 dan 12.

2.5. Metoda Analisis Umum

Tujuan :

- Memahami dasar-dasar metoda tegangan simpul dan mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda tegangan simpul.
- Memahami dasar-dasar metoda arus mesh dan mampu melakukan analisis rangkaian dengan menggunakan metoda arus mesh.

Metoda analisis umum yang akan kita pelajari mencakup *metoda tegangan simpul* dan *metoda arus mesh*. Pada dasarnya kedua metoda ini dapat kita terapkan pada sembarang rangkaian listrik, walaupun dalam hal-hal tertentu metoda tegangan simpul lebih baik dibandingkan dengan metoda arus mesh, terutama dalam menangani rangkaian-rangkaian elektronik.

Metoda tegangan simpul dan metoda arus mesh pada dasarnya adalah mencari suatu persamaan linier yang merupakan deskripsi lengkap dari suatu rangkaian dan kemudian memecahkan persamaan itu dengan memanfaatkan aljabar linier. Metoda ini lebih abstrak dibandingkan dengan metoda-metoda analisis dasar karena kita tidak menangani langsung rangkaian yang kita hadapi melainkan mencari pemecahan dari satu set persamaan-persamaan yang mewakili rangkaian tersebut. Dengan metoda ini kita tidak terlibat dalam upaya untuk mencari kemungkinan penyederhanaan rangkaian ataupun penerapan teorema rangkaian. Kita lebih banyak terlibat dalam usaha mencari pemecahan persamaan linier, sehingga agak “kehilangan sentuhan” dengan rangkaian listrik yang kita hadapi. Namun demikian kerugian itu mendapat kompensasi, yaitu berupa lebih luasnya aplikasi dari metoda tegangan simpul dan metoda arus mesh ini.

Metoda Tegangan Simpul (Node Voltage Method – Nodal Analysis)

Dasar. Jika salah satu simpul dalam suatu rangkaian ditetapkan sebagai simpul referensi yang dianggap bertegangan nol, maka tegangan pada simpul-simpul yang lain dapat dinyatakan secara relatif terhadap simpul referensi tersebut. Jika dalam suatu rangkaian terdapat n simpul, sedangkan salah satu simpul ditetapkan sebagai simpul referensi, maka masih ada $(n - 1)$ simpul yang harus dihitung tegangannya. Jadi untuk menyatakan rangkaian secara lengkap dengan menggunakan tegangan simpul sebagai peubah, diperlukan $(n - 1)$ buah persamaan. Jika persamaan ini dapat dipecahkan, berarti kita dapat memperoleh nilai tegangan di setiap simpul, yang berarti pula bahwa kita dapat menghitung arus di setiap cabang.

Basis untuk memperoleh persamaan tegangan simpul adalah persyaratan-persyaratan yang harus dipenuhi dalam analisis rangkaian, yaitu persyaratan elemen dan persyaratan rangkaian. Persyaratan elemen menyatakan bahwa karakteristik $i-v$ dari setiap elemen dalam rangkaian harus dipenuhi. Hal ini berarti bahwa hubungan antara *arus cabang* (arus yang melalui elemen di cabang tersebut), dengan *tegangan simpul* (tegangan kedua simpul yang mengapit elemen / cabang yang bersangkutan) ditentukan oleh karakteristik $i-v$ elemen yang ada di cabang tersebut. Ini berarti pula bahwa arus cabang dapat dinyatakan dengan tegangan simpul. Sebagai contoh, bila sebuah resistor dengan konduktansi G berada di antara simpul X dan Y, maka arus cabang tempat resistor itu berada dapat ditulis sebagai

$$i_{XY} = G(v_X - v_Y) \quad (2.29)$$

dengan i_{XY} adalah arus yang mengalir dari X ke Y, v_X dan v_Y masing-masing adalah tegangan simpul X dan simpul Y. Sementara itu persyaratan rangkaian, yaitu hukum arus Kirchhoff (HAK), juga harus dipenuhi. Oleh karena itu untuk suatu simpul M yang terhubung ke k titik simpul lain melalui konduktansi G_i ($i = 1$ sampai k), berlaku

$$\sum i_M = 0 = \sum_{i=1}^k G_i(v_M - v_i) = v_M \sum_{i=1}^k G_i - \sum_{i=1}^k G_i v_i \quad (2.30)$$

dengan v_M adalah tegangan simpul M, v_i adalah tegangan simpul-simpul lain yang terhubung ke M melalui konduktansi masing-masing sebesar G_i .

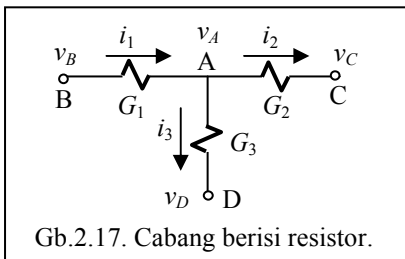
Persamaan (2.30) adalah persamaan tegangan untuk satu simpul. Jika persamaan ini kita terapkan untuk $(n - 1)$ simpul yang bukan simpul referensi maka kita akan memperoleh $(n-1)$ persamaan yang kita inginkan. Jadi untuk memperoleh persamaan tegangan simpul dari suatu rangkaian, kita lakukan langkah-langkah berikut:

1. Tentukan simpul referensi umum.
2. Aplikasikan persamaan (2.30) untuk simpul-simpul yang bukan simpul referensi.
3. Cari solusi persamaan yang diperoleh pada langkah 2.

Kasus-Kasus Dalam Mencari Persamaan Tegangan Simpul

Persamaan tegangan simpul untuk suatu simpul diperoleh melalui aplikasi HAK untuk simpul tersebut. Jika terdapat suatu cabang yang mengandung sumber tegangan bebas (yang merupakan elemen dengan arus dan resistansi tak diketahui), kita akan menemui sedikit kesulitan dalam penurunan persamaan tegangan simpul. Berikut ini kita akan mempelajari penurunan persamaan tegangan untuk suatu simpul dengan melihat beberapa kasus jenis elemen yang berada pada cabang-cabang rangkaian yang terhubung ke simpul tersebut.

Kasus 1: Cabang-Cabang Berisi Resistor. Dalam kasus ini persamaan (2.30) dapat kita aplikasikan tanpa kesulitan. Perhatikan hubungan simpul-simpul seperti terlihat pada Gb.2.17. Walaupun referensi arah arus tidak semuanya meninggalkan simpul A namun hal ini tidak akan mengganggu aplikasi persamaan (2.30) untuk simpul A yang memberikan persamaan tegangan simpul



Gb.2.17. Cabang berisi resistor.

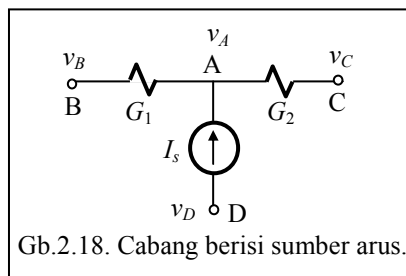
$$v_A(G_1 + G_2 + G_3) - G_1v_B - G_2v_C - G_3v_D = 0 \quad (2.31)$$

Sekiranya kita menuruti referensi arus pada Gb.2.17. kita akan memperoleh persamaan arus untuk simpul A sebagai $i_1 - i_2 - i_3 = 0$, yang akan memberikan persamaan tegangan simpul

$$G_1(v_B - v_A) - G_2(v_A - v_C) - G_3(v_A - v_D) = 0 \quad \text{atau} \quad -v_A(G_1 + G_2 + G_3) + v_BG_1 + v_CG_2 + v_DG_3 = 0$$

yang tidak lain adalah persamaan (2.31) yang diperoleh sebelumnya.

Kasus 2: Cabang Berisi Sumber Arus. Perhatikan Gb.2.18. Dalam kasus ini kita tidak mengetahui konduktansi yang ada antara simpul A dan D yang berisi sumber arus bebas. Tetapi hal ini tidak memberikan kesulitan dalam aplikasi (2.30) untuk simpul A, karena sesungguhnya persamaan (2.30) itu berangkat dari persamaan arus untuk suatu simpul. Dengan demikian maka nilai arus yang ditunjukkan oleh sumber arus itu dapat kita masukkan dalam persamaan tanpa mengubahnya menjadi hasil kali antara konduktansi dengan beda tegangan simpul. Yang perlu diperhatikan adalah arah referensi arusnya, yang harus *bertanda positif apabila ia meninggalkan simpul yang sedang ditinjau*, sesuai dengan persyaratan persamaan (2.30). Untuk simpul A pada Gb.2.18. persamaan yang diperoleh adalah:



Gb.2.18. Cabang berisi sumber arus.

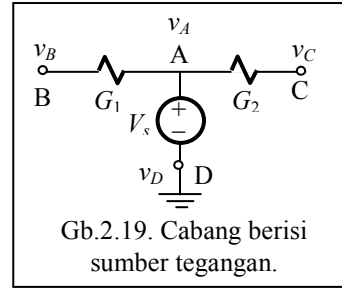
$$v_A(G_1 + G_2) - I_s - v_BG_1 - v_CG_2 = 0 \quad (2.32)$$

Kasus 3: Cabang Berisi Sumber Tegangan. Dalam kasus ini terdapat dua kemungkinan. Kemungkinan pertama : salah satu simpul sumber tegangan menjadi simpul referensi seperti

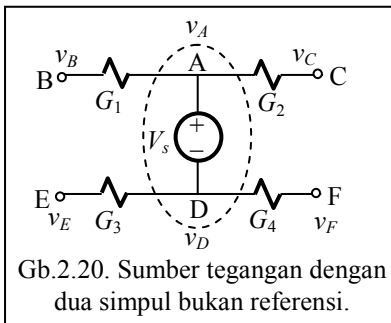
terlihat pada Gb.2.19. Simpul A menjadi simpul terikat, artinya tegangannya ditentukan oleh tegangan sumber; jadi dalam hal ini tegangan simpul A tidak perlu lagi dihitung, $v_A = V_s$.

Kemungkinan yang kedua : simpul-simpul yang mengapit sumber tegangan bukan merupakan simpul referensi seperti terlihat pada Gb.2.20. Dalam hal terakhir ini, sumber tegangan beserta kedua simpul yang mengapitnya kita jadikan sebuah *simpul-super* (*super-node*). Jadi simpul A, D, dan sumber tegangan pada Gb.2.20. kita pandang sebagai *satu* simpul-super. Hukum Arus Kirchoff berlaku juga untuk simpul-super ini. Persamaan tegangan untuk simpul-super ini tidak hanya satu melainkan dua persamaan, karena ada dua simpul yang disatukan, yaitu:

- persamaan tegangan simpul yang diturunkan dari persamaan arus seperti halnya persamaan (2.30), ditambah dengan
- persamaan tegangan internal simpul-super yang memberikan hubungan tegangan antara simpul-simpul yang digabungkan menjadi simpul-super tersebut.



Gb.2.19. Cabang berisi sumber tegangan.



Gb.2.20. Sumber tegangan dengan dua simpul bukan referensi.

Perhatikan Gb.2.20. : Simpul-super terdiri dari simpul A, D dan sumber tegangan V_s . Simpul-super ini terhubung ke simpul-simpul B dan C melalui A dengan konduktansi G_1 dan G_2 ; ia juga terhubung ke simpul-simpul E dan F melalui D dengan konduktansi G_3 dan G_4 . Persamaan tegangan untuk simpul-super ini adalah :

$$v_A(G_1 + G_2) + v_D(G_3 + G_4) - v_B G_1 - v_C G_2 - v_E G_3 - v_F G_4 = 0$$

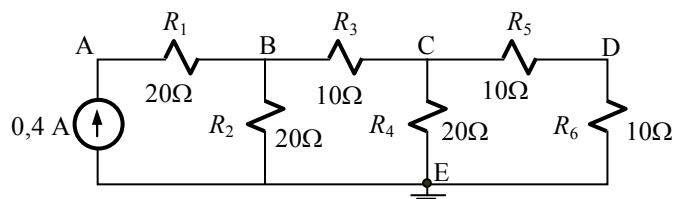
dan

$$v_A - v_D = V_s \tag{2.33}$$

Demikianlah tiga kasus yang mungkin kita hadapi dalam mencari persamaan tegangan pada suatu simpul. Dalam peninjauan kasus-kasus tersebut di atas, kita hanya melihat rangkaian resistor. Walaupun demikian metoda ini dapat kita gunakan untuk rangkaian dengan elemen dinamis yang akan kita lihat kemudian.

Berikut ini kita akan melihat aplikasi metoda tegangan simpul untuk rangkaian resistor. Rangkaian yang akan kita lihat masih termasuk sederhana, yang juga dapat dipecahkan dengan menggunakan metoda analisis dasar. Akan tetapi yang kita tekankan di sini adalah melihat bagaimana metoda tegangan simpul ini diaplikasikan.

CONTOH 2.34 : Carilah tegangan simpul A, B, C, dan D pada rangkaian di bawah ini.



Penyelesaian :

Rangkaian ini berbentuk tangga dan perhatikan bahwa di sini kita mempunyai sumber arus, bukan sumber tegangan.

Langkah pertama adalah menentukan simpul referensi umum, yang dalam hal ini kita tetapkan simpul E. Dengan demikian kita mempunyai empat simpul yang bukan simpul referensi yaitu A, B, C dan D.

Langkah kedua adalah mencari persamaan tegangan simpul dengan mengaplikasikan persamaan (2.30) pada ke-empat simpul non-referensi tersebut di atas. Persamaan tegangan simpul yang kita peroleh adalah :

$$\begin{aligned} v_A(G_1) - 0.4 - v_B(G_1) &= 0 \\ v_B(G_1 + G_2 + G_3) - v_A(G_1) - v_C(G_3) &= 0 \\ v_C(G_3 + G_4 + G_5) - v_B(G_3) - v_D(G_5) &= 0 \\ v_D(G_5 + G_6) - v_C(G_5) &= 0 \end{aligned}$$

dengan G_1, G_2, \dots, G_6 adalah konduktansi elemen-elemen yang besarnya adalah $G_i = 1/R_i$. Dalam bentuk matriks, dengan memasukkan nilai-nilai G , persamaan ini menjadi

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nilai elemen matriks ini kita perbaiki agar perhitungan selanjutnya menjadi lebih mudah. Jika baris pertama sampai ke-tiga kita kalikan 20 sedangkan baris ke-empat kita kalikan 10, akan kita peroleh

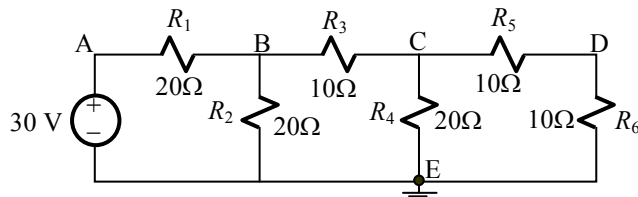
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eliminasi Gauss} \\ \text{memberikan:} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian maka kita dapat menghitung tegangan-tegangan simpul mulai dari simpul D sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \rightarrow v_D &= \frac{16}{16} = 1 \text{ V} & \rightarrow v_C &= \frac{16 + 6 \times v_D}{11} = \frac{16 + 6}{11} = 2 \text{ V} \\ \rightarrow v_B &= \frac{8 + 2 \times v_C}{3} = \frac{8 + 4}{3} = 4 \text{ V} & \rightarrow v_A &= 8 + v_B = 12 \text{ V} \end{aligned}$$

Dengan diperolehnya nilai tegangan simpul, arus-arus cabang dapat dihitung.

CONTOH 2.35 : Carilah tegangan pada simpul $A, B, C,$ dan D pada rangkaian berikut.



Penyelesaian :

Simpul A terhubung ke simpul referensi melalui sumber tegangan. Dengan demikian simpul A merupakan *simpul terikat* yang nilai tegangannya ditentukan oleh sumber tegangan, yaitu 30 V. Persamaan tegangan simpul yang dapat kita peroleh adalah:

$$\begin{aligned} v_A &= 30 \\ v_B(G_1 + G_2 + G_3) - v_A(G_1) - v_C(G_3) &= 0 \\ v_C(G_3 + G_4 + G_5) - v_B(G_3) - v_D(G_5) &= 0 \\ v_D(G_5 + G_6) - v_C(G_5) &= 0 \end{aligned}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai konduktansi dan menuliskannya dalam bentuk matriks, kita memperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

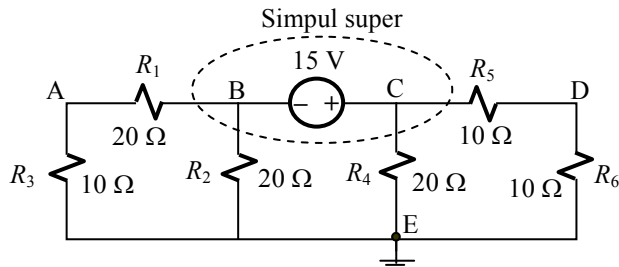
Kita ubah nilai elemen matriks untuk mempermudah perhitungan seperti yang kita lakukan pada contoh sebelumnya dengan mengalikan baris ke-2 dan ke-3 dengan 20 dan mengalikan baris ke-4 dengan 10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eliminasi Gauss} \\ \text{memberikan :} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Maka :

$$\begin{aligned} \rightarrow v_D &= \frac{30}{16} = 2,5 \text{ V} & \rightarrow v_C &= \frac{30+10}{8} = 5 \text{ V} \\ \rightarrow v_B &= \frac{30+10}{4} = 10 \text{ V} & \rightarrow v_A &= 30 \text{ V} \end{aligned}$$

CONTOH 2.36 : Carilah tegangan pada simpul A, B, C, dan D di rangkaian berikut.



Penyelesaian :

Berbeda dengan contoh sebelumnya, dalam rangkaian ini sumber tegangan tidak terhubung langsung ke titik referensi umum. Sumber tegangan dan simpul-simpul yang mengapitnya dijadikan satu simpul-super. Persamaan yang dapat kita peroleh adalah :

$$\text{Simpul-super} \begin{cases} v_A(G_3 + G_1) - v_B G_1 = 0 \\ v_B(G_1 + G_2) + v_C(G_4 + G_5) - v_A G_1 - v_D G_5 = 0 \\ v_B - v_C = -15 \\ v_D(G_5 + G_6) - v_C G_5 = 0 \end{cases}$$

Kita masukkan nilai G dan persamaan ini kita tuliskan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) & -\frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20}\right) & \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kita kalikan baris pertama dan ke-dua dengan 20 serta baris ke-empat dengan 10 sehingga kita peroleh matriks dengan elemen-elemen bilangan bulat. Setelah itu kita lakukan eliminasi Gauss yang akan memberikan :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -14 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -75 \\ 75 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan inilah tegangan-tegangan simpul dapat kita tentukan, seperti yang kita lakukan pada contoh sebelumnya. Pembaca diharapkan untuk mencoba sendiri.

Dengan uraian dan contoh-contoh di atas dapat kita katakan secara singkat bahwa :

- Untuk simpul M yang terhubung ke k simpul lain melalui konduktansi G_i berlaku:

$$\sum_1^k (v_M - v_i)G_i = 0 \quad \text{atau} \quad \sum_1^k v_M G_i - \sum_1^k v_i G_i = 0$$

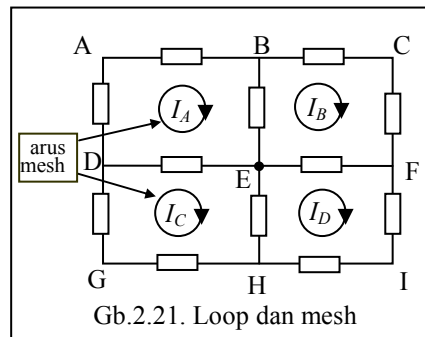
Aplikasi formula ini untuk seluruh simpul yang bukan simpul referensi menghasilkan persamaan tegangan simpul rangkaian.

- Simpul M yang terhubung ke simpul referensi melalui sumber tegangan, merupakan simpul-terikat yang tegangannya ditentukan oleh tegangan sumber.
- Sumber tegangan dan simpul-simpul yang mengapitnya dapat menjadi simpul-super yang mempunyai suatu hubungan internal yang ditentukan oleh tegangan sumber.
- Sumber arus di suatu cabang memberikan kepastian nilai arus di cabang tersebut dan nilai arus ini langsung masuk dalam persamaan tegangan simpul.

Metoda Arus Mesh (Mesh Current Method)

Metoda ini sangat bermanfaat untuk analisis rangkaian yang mengandung banyak elemen terhubung seri. Pengertian mengenai *mesh* telah kita peroleh di Bab-2, yaitu loop yang tidak melingkupi elemen atau cabang lain.

Dalam Gb.2.21. loop ABEDA, BCDEF, DEHGD, EFIHE, adalah mesh, sedangkan loop ABCFEDA bukan mesh. Dengan pengertian ini maka kita menurunkan pengertian *arus mesh*, yaitu arus yang kita bayangkan mengalir di suatu mesh. Dalam Gb.2.21., I_A, I_B, I_C, I_D adalah arus-arus mesh dengan arah anak panah menunjukkan arah positif. Arus di suatu cabang adalah jumlah aljabar dari arus mesh di mana cabang itu menjadi anggota. Arus di cabang AB misalnya, adalah sama dengan arus mesh I_A . Arus di cabang BE adalah $(I_A - I_B)$, arus di cabang EH adalah $(I_C - I_D)$, dan seterusnya. Secara umum kita dapat mengatakan bahwa



Gb.2.21. Loop dan mesh

Jika cabang ke- k hanya merupakan anggota dari mesh X yang mempunyai arus mesh I_X maka arus i_k yang melalui cabang itu adalah $i_k = I_X$ dengan arah referensi arus i_k sesuai dengan I_X .

Jika cabang ke- k merupakan anggota dari mesh X dan mesh Y yang masing-masing mempunyai arus mesh I_X dan I_Y , maka arus i_k yang melalui cabang tersebut adalah $i_k = I_X - I_Y$ dengan X adalah mesh yang mempunyai arah referensi arus yang sesuai dengan arah referensi arus i_k .

Perhatikan :

- Arus mesh bukanlah pengertian yang berbasis pada sifat fisis rangkaian melainkan suatu peubah yang kita gunakan dalam analisis rangkaian.
- Kita hanya membicarakan rangkaian planar; referensi arus mesh di semua mesh mempunyai arah yang sama (dalam hal ini kita pilih searah putaran jarum jam).

Metoda arus mesh pada dasarnya adalah mencari persamaan linier dengan *arus mesh sebagai peubah*, yang secara lengkap merupakan diskripsi dari rangkaian. Seperti halnya pada pembahasan metoda tegangan simpul, kita akan melihat lebih dulu bagaimana persamaan arus mesh tersebut dapat diperoleh.

Dasar

Metoda arus mesh, seperti halnya metoda tegangan simpul, berbasis pada persyaratan elemen dan persyaratan rangkaian yang harus dipenuhi dalam analisis rangkaian listrik. Perbedaan hanya terletak pada persyaratan rangkaian; pada metoda tegangan simpul digunakan hukum arus Kirchhoff (HAK) sedangkan pada metoda arus mesh digunakan hukum tegangan Kirchhoff (HTK). Suatu mesh tidak lain adalah bentuk loop yang paling sederhana. Oleh karena itu hukum Kirchhoff untuk tegangan juga berlaku pada mesh. Untuk suatu mesh X yang terbentuk dari m cabang yang masing-masing berisi resistor, sedang sejumlah n dari m cabang ini menjadi anggota dari mesh lain, berlaku

$$\sum_{x=1}^m v_x = 0 = \sum_{x=1}^{m-n} v_x + \sum_{y=1}^n v_y = I_X \sum_{x=1}^{m-n} R_x + \sum_{y=1}^n R_y (I_X - I_y) \quad (2.33)$$

Di sini v_x adalah tegangan pada elemen di cabang yang hanya menjadi anggota mesh X; v_y adalah tegangan pada elemen di cabang yang menjadi anggota mesh X dan mesh lain; I_X adalah arus mesh X; I_y adalah arus mesh lain yang berhubungan dengan mesh X; R_x menunjukkan resistor pada cabang-cabang yang hanya menjadi anggota mesh X; R_y menunjukkan resistor pada cabang-cabang yang menjadi anggota mesh X dan mesh lain.

Persamaan (2.33) dapat ditulis:

$$I_X \left(\sum_{x=1}^{m-n} R_x + \sum_{y=1}^n R_y \right) - \sum_{y=1}^n I_y R_y = 0 \quad (2.34)$$

Atau secara umum

$$I_X \sum R_X - \sum I_Y R_Y = 0 \quad (2.35)$$

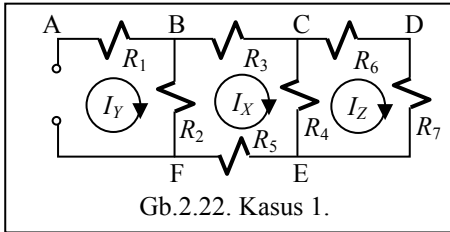
dengan I_X adalah arus mesh X, R_X adalah resistor pada cabang-cabang yang membentuk mesh X, I_Y adalah arus mesh lain yang berhubungan dengan mesh X melalui cabang yang berisi resistor R_Y . Persamaan (2.35) adalah persamaan arus mesh untuk suatu mesh tertentu. Jika persamaan ini kita aplikasikan untuk semua mesh pada suatu rangkaian kita akan mendapatkan persamaan arus mesh untuk rangkaian tersebut. Jadi langkah-langkah dalam analisis dengan menggunakan metoda arus mesh adalah :

1. Tentukan arah referensi arus mesh di setiap mesh dan juga tegangan referensi pada tiap elemen.
2. Aplikasikan persamaan (2.35) untuk setiap mesh. Dengan langkah ini kita memperoleh persamaan arus mesh dari rangkaian.
3. Hitung arus mesh dari persamaan yang diperoleh pada langkah kedua.

Kasus-Kasus Dalam Mencari Persamaan Arus Mesh

Berikut ini kita akan melihat beberapa kasus yang mungkin kita jumpai dalam mencari persamaan arus mesh untuk satu mesh tertentu. Kasus-kasus ini sejajar dengan kasus-kasus yang kita jumpai pada pembahasan mengenai metoda tegangan simpul.

Kasus 1 : Mesh Mengandung Hanya Resistor. Pada Gb.2.22. mesh BCEFB dan CDEC, terdiri hanya dari elemen resistor saja. Aplikasi persamaan (2.35) untuk kedua mesh ini tidak menimbulkan kesulitan, dan kita akan memperoleh



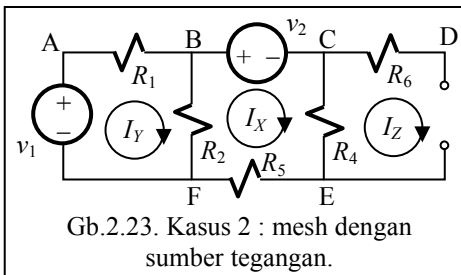
Mesh BCEFB :

$$I_X (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - I_Y R_2 - I_Z R_4 = 0$$

Mesh CDEC :

$$I_Z (R_4 + R_6 + R_7) - I_X R_4 = 0 \tag{2.36}$$

Kasus 2 : Mesh Mengandung Sumber Tegangan. Mesh ABFA dan BCEFB pada Gb.2.23. mengandung sumber tegangan. Hal ini tidak akan menimbulkan kesulitan karena metoda arus mesh berbasis pada Hukum Tegangan Kirchhoff. Nilai tegangan sumber dapat langsung dimasukkan dalam persamaan, dengan memperhatikan tandanya. Untuk mesh ABFA dan BCEFB persamaan arus mesh yang dapat kita peroleh adalah :



Mesh ABFA :

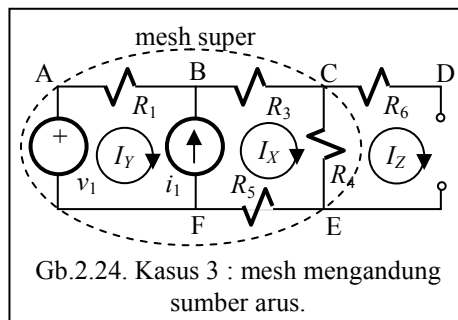
$$I_Y (R_1 + R_2) - I_X R_2 - v_1 = 0$$

Mesh BCEFB:

$$I_X (R_2 + R_4 + R_5) - I_Y R_2 - I_Z R_4 + v_2 = 0 \tag{2.37}$$

Kasus 3 : Mesh Mengandung Sumber Arus. Pada Gb.2.24. di cabang BF terdapat sumber arus yang menjadi anggota mesh ABFA dan BCEFB. Tegangan suatu sumber arus tidak tertentu sehingga tidak mungkin diperoleh persamaan arus mesh untuk ABFA dan BCEFB. Untuk mengatasi kesulitan ini maka kedua mesh itu digabung menjadi satu yang kita sebut *mesh- super*.

Pernyataan dari mesh-super ini harus terdiri dari dua persamaan yaitu persamaan untuk loop gabungan dari dua mesh, ABCEFA, dan persamaan yang memberikan hubungan antara arus-arus di kedua mesh, yaitu I_X dan I_Y . Persamaan yang dimaksud adalah:

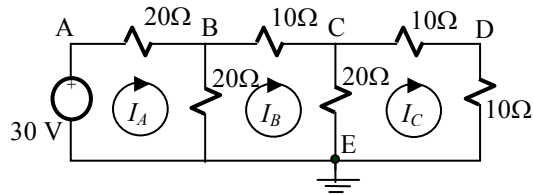


loop ABCEFA : $I_Y R_1 + I_X (R_3 + R_4 + R_5) - v_1 - I_Z R_4 = 0$

cabang BF : $I_X - I_Y = i_1$ (2.38)

Jadi rangkaian tiga mesh itu kita pandang sebagai terdiri dari dua mesh saja, yaitu satu mesh biasa CDEC dan satu mesh-super ABCEFA.

CONTOH 2.37 : Gunakan metoda arus mesh untuk analisis rangkaian dalam contoh 3.12. Rangkaian tersebut digambar lagi di bawah ini.



Penyelesaian :

Langkah pertama adalah menentukan referensi arus mesh, I_A , I_B , I_C . *Langkah kedua* adalah menuliskan persamaan arus mesh untuk setiap mesh. Perlu kita perhatikan bahwa mesh ABEA mengandung sumber tegangan. Persamaan yang kita peroleh adalah:

$$\text{Mesh ABEA: } I_A(20 + 20) - I_B 20 - 30 = 0$$

$$\text{Mesh BCEB: } I_B(20 + 10 + 20) - I_A 20 - I_C 20 = 0$$

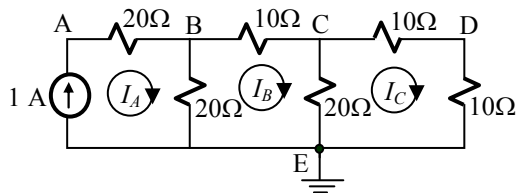
$$\text{Mesh CDEC: } I_C(20 + 10 + 10) - I_B 20 = 0$$

Dalam bentuk matriks persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 40 & -20 & 0 \\ -20 & 50 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eliminasi Gauss} \\ \text{memberikan: } \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh $I_C = 0,25$ A; $I_B = 0,5$ A; $I_A = 1$ A. Selanjutnya tegangan-tegangan simpul dan arus-arus cabang dapat ditentukan

CONTOH 2.38 : Tentukan arus-arus mesh pada rangkaian di samping ini. Perhatikanlah : ada sumber arus pada rangkaian ini.



Penyelesaian :

Dalam kasus ini arus mesh I_A ditentukan oleh sumber, yaitu sebesar 1 A. Persamaan yang dapat kita peroleh adalah :

$$\text{Mesh ABEA: } I_A = 1$$

$$\text{Mesh BCEB: } I_B(20 + 10 + 20) - I_A(20) - I_C(20) = 0$$

$$\text{Mesh CDEC: } I_C(20 + 10 + 10) - I_B(20) = 0$$

yang dalam bentuk matriks dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -20 & 50 & -20 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss memberikan :

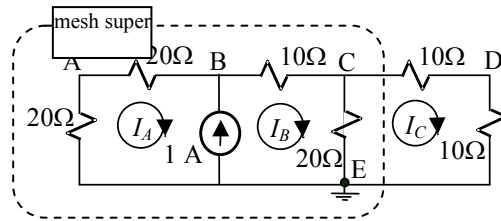
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian maka nilai arus-arus mesh adalah :

$$I_C = 0,25 \text{ A; } I_B = 0,5 \text{ A; } I_A = 1 \text{ A.}$$

Selanjutnya arus cabang dan tegangan simpul dapat dihitung.

CONTOH 2.39 : Tentukan arus mesh pada rangkaian di samping ini. Perhatikan bahwa ada sumber arus yang menjadi anggota dari dua mesh yang berdampingan.



Penyelesaian:

Kedua mesh berdampingan yang sama-sama mengandung sumber arus itu kita jadikan satu mesh-super. Persamaan arus mesh yang dapat kita peroleh adalah :

$$\text{mesh super} \begin{cases} I_A(20+20)+I_B(10+20)-I_C(20)=0 \\ I_A-I_B=-1 \\ I_C(20+10+10)-I_B(20)=0 \end{cases}$$

Dalam bentuk matriks persamaan arus mesh tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} 40 & 30 & -20 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

yang akhirnya memberikan

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jadi $I_C = 1/3$ A, $I_B = 2/3$ A, dan $I_A = -1/3$ A.

Selanjutnya arus cabang dan tegangan simpul dapat dihitung.

Dengan uraian dan contoh-contoh di atas dapat kita katakan secara singkat bahwa :

- Untuk suatu mesh X dengan arus mesh I_x yang terdiri dari m cabang dan n dari m cabang ini menjadi anggota dari mesh lain yang masing-masing mempunyai arus mesh I_y , berlaku

$$I_X \sum_{x=1}^{m-n} R_x + \sum_{y=1}^n R_y (I_X - I_y) = 0 \quad \text{atau} \quad I_X \left(\sum_{x=1}^{m-n} R_x + \sum_{y=1}^n R_y \right) - \sum_{y=1}^n I_y R_y = 0$$

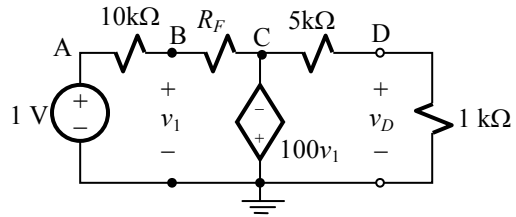
Aplikasi formula ini untuk seluruh mesh menghasilkan persamaan arus mesh rangkaian.

- Mesh X yang mengandung sumber arus yang tidak menjadi anggota dari mesh lain, arus mesh I_x ditentukan oleh sumber arus tersebut.
- Sumber arus dan mesh-mesh yang mengapitnya dapat menjadi mesh-super dengan suatu hubungan internal yaitu beda arus mesh dari kedua mesh sama dengan arus sumber.
- Sumber tegangan di suatu cabang memberikan kepastian nilai tegangan antara dua simpul di cabang tersebut dan nilai tegangan ini langsung masuk dalam persamaan arus mesh.

Rangkaian Sumber Tak-Bebas Dengan Umpan Balik

Analisis rangkaian yang mengandung sumber tak-bebas dengan *umpan balik* hendaklah dilakukan dengan menggunakan metoda tegangan simpul atau metoda arus mesh. Umpan balik terjadi jika ada aliran sinyal dari sisi keluaran ke sisi pengendali.

CONTOH 2.40 : Tentukanlah R_F pada rangkaian di bawah ini agar pada beban $1\text{ k}\Omega$ terdapat tegangan -10 V .



Penyelesaian :

Persamaan tegangan simpul di simpul-simpul A, B, C, dan D pada rangkaian ini adalah

$$A: v_A = 1\text{ V} \quad ; \quad B: \frac{v_B - v_A}{10} + \frac{v_B - v_C}{R_F} = 0 \quad ; \quad C: v_C = -100v_1 \quad ; \quad D: \frac{v_D - v_C}{5} + \frac{v_D}{1} = 0$$

Karena disyaratkan agar $v_D = -10\text{ V}$, maka dari persamaan simpul C dan D kita dapat memperoleh nilai v_1 .

$$v_1 = -\frac{v_C}{100} = \frac{-5v_D - v_D}{100} = \frac{60}{100} = 0,6\text{ V}$$

Kalau kita masukkan nilai v_1 ini ke persamaan simpul B akan kita peroleh

$$\frac{0,6 - 1}{10} + \frac{0,6 + 100 \times 0,6}{R_F} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_F = 60,6 \times \frac{10}{0,4} = 1515\text{ k}\Omega \approx 1,5\text{ M}\Omega$$

2.6. Resume

Analisis rangkaian berbasis pada dua hukum pokok yaitu Hukum Ohm dan Hukum Kirchhoff. Kedua hukum ini mempunyai konsekuensi-konsekuensi yang akhirnya menjadi kaidah-kaidah yang mempermudah dilakukannya suatu analisis rangkaian. Kaidah-kaidah itu pada dasarnya menyatakan bahwa suatu susunan rangkaian elemen tertentu dapat digantikan oleh susunan lain yang setara tanpa mengganggu perilaku rangkaian secara keseluruhan. Selain dari pada itu sifat-sifat kelinieran dari rangkaian membangun teorema-teorema rangkaian, meliputi prinsip proporsionalitas dan prinsip superposisi yang selanjutnya memberikan dasar untuk berkembangnya teorema-teorema lain yaitu rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton. Pemahaman kaidah-kaidah serta teorema-teorema ini memberikan dasar-dasar kemampuan untuk melakukan analisis.

Metoda-metoda analisis seperti metoda reduksi rangkaian, metoda unit keluaran, superposisi dan Thévenin / Norton, merupakan metoda-metoda dasar yang dapat diterapkan pada rangkaian-rangkaian yang sederhana. Metoda ini dapat memberikan pemahaman yang baik mengenai perilaku rangkaian karena dalam metoda-metoda tersebut kita melakukan pengolahan rangkaian untuk mencari tanggapan arus maupun tegangan. Untuk rangkaian yang lebih rumit, kita memerlukan metoda dengan pendekatan yang lebih sistematis, yaitu metoda tegangan simpul dan metoda arus mesh. Dalam dua metoda terakhir ini, kita memformulasikan suatu persamaan linier yang secara lengkap merupakan dikripsi rangkaian yang kita hadapi; kemudian kita memecahkan persamaan itu menggunakan matematika aljabar linier. Dengan demikian metoda ini menjadi lebih abstrak karena kita lebih bergelut dengan persamaan linier dibanding dengan rangkaiannya sendiri dan hal ini menyebabkan kita agak kehilangan intuisi dalam pengamatan rangkaian.

Kita perlu mempelajari berbagai macam metoda dan tidak terkonsentrasi hanya pada salah satu metoda saja, karena masing-masing metoda menjanjikan sisi pandang yang berbeda atas perilaku rangkaian. Di samping itu, pemilihan suatu metoda ditentukan pula oleh apa yang kita tuju dalam suatu analisis. Sebagai gambaran, jika kita ingin mengetahui karakteristik umum dari suatu rangkaian, maka metoda tegangan simpul mungkin lebih disukai dibanding dengan metoda arus mesh. Tetapi kalau yang diinginkan dalam analisis

adalah mengetahui arus di sesuatu cabang, metoda arus mesh akan lebih cocok. Apabila kita bertujuan untuk mencari resistansi beban agar terjadi alih daya maksimum, kita menggunakan metoda Thévenin atau Norton. Dalam rangkaian yang mengandung lebih dari satu masukan, jika tujuan analisis adalah untuk mengetahui pengaruh sesuatu masukan terhadap rangkaian maka kita memerlukan metoda superposisi. Demikianlah pada akhirnya kita harus memilih metoda apa yang sebaiknya kita pakai, sesuai dengan tujuan analisis kita.

Beberapa Catatan Tentang Metoda Tegangan Simpul dan Metoda Arus Mesh

Pada metoda tegangan simpul kita menggunakan salah satu simpul sebagai simpul referensi yang kita anggap bertegangan nol, sedangkan tegangan simpul-simpul yang lain dihitung terhadap simpul referensi ini. Simpul referensi tersebut dapat kita pilih dengan bebas sehingga perbedaan pemilihan simpul referensi dalam menyelesaikan persoalan satu rangkaian tertentu dapat menghasilkan nilai-nilai tegangan simpul yang berbeda. Namun demikian tegangan cabang-cabang rangkaian akan tetap sama hanya memang kita harus melakukan perhitungan lagi untuk memperoleh nilai tegangan cabang-cabang tersebut (yaitu mencari selisih tegangan antara dua simpul).

Pada rangkaian listrik yang besar, seperti misalnya jaringan kereta rel listrik ataupun jaringan PLN, orang melakukan pengukuran tegangan bukan terhadap simpul referensi umum seperti dalam pengertian metoda tegangan simpul melainkan terhadap titik netral atau *ground* di masing-masing lokasi pengukuran. Pengukuran ini belum tentu sesuai dengan perhitungan dalam analisis menggunakan metoda tegangan simpul karena *ground* di lokasi pengukuran tidaklah selalu sama dengan titik referensi umum dalam analisis. Akan tetapi karena jaringan-jaringan penyalur energi tersebut dapat dilihat sebagai berbentuk rangkaian tangga, maka permasalahan ini dengan mudah dapat diatasi dan akan dibahas di Bab-3.

Metoda arus mesh dapat diterapkan pada rangkaian planar yaitu suatu rangkaian yang diagramnya dapat digambarkan pada satu bidang datar tanpa terjadi persilangan antar cabang rangkaian. Untuk rangkaian nonplanar metoda arus mesh tak dapat diterapkan dan kita perlu menggunakan metoda arus loop.

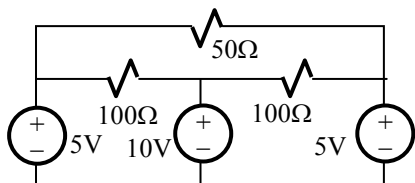
Metoda Analisis Berbantuan Komputer

Untuk rangkaian-rangkaian yang rumit, analisis secara manual tidaklah efektif bahkan hampir tidak mungkin lagi dilakukan. Untuk itu kita memerlukan bantuan komputer. Metoda ini tidak dibahas dalam buku ini. Pembahasan akan dilakukan dengan menggunakan buku-buku referensi lain yang berkaitan dengan metoda tersebut dalam praktikum.

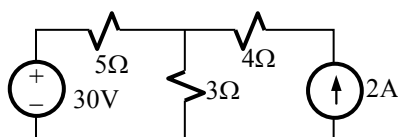
Sebagai gambaran, metoda analisis berbantuan komputer yang banyak dipakai adalah program SPICE. SPICE adalah akronim dari Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis, pertama kali dikembangkan di University of California pada tahun tujuh-puluhan. Sejak itu berbagai usaha dilakukan untuk menambah kemampuan program dasar SPICE untuk membangun program-program baru berbasis SPICE baik untuk penggunaan komputer mainframe maupun komputer pribadi (personal). Selain program SPICE kita kenal juga program analisis rangkaian yang lain misalnya MICRO-CAP. Untuk keperluan kita dalam analisis rangkaian yang tak terlalu rumit terdapat versi evaluasi PSpice yang dapat diperoleh secara bebas dan murah.

SOAL-SOAL : METODA ANALISIS UMUM

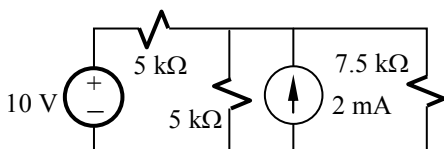
1. Carilah tegangan dan arus di masing-masing elemen pada rangkaian berikut ini dan hitunglah daya yang diberikan oleh sumber.



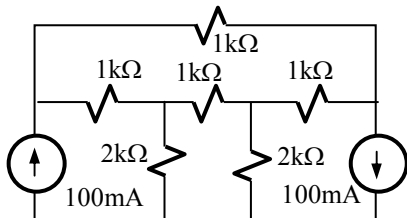
2. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



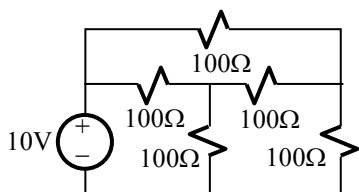
3. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



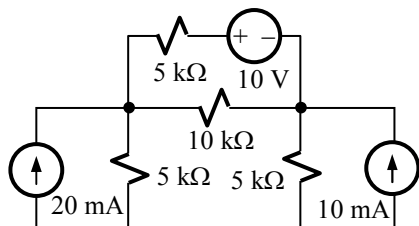
4. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



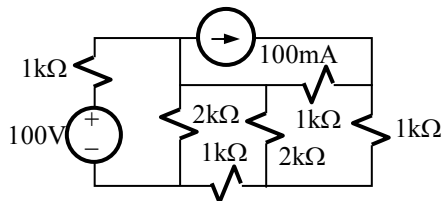
5. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



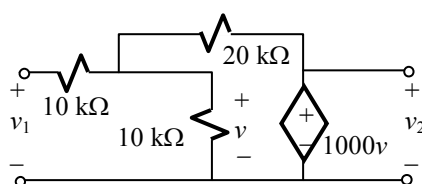
6. Tentukan daya yang diberikan masing-masing sumber pada rangkaian berikut.



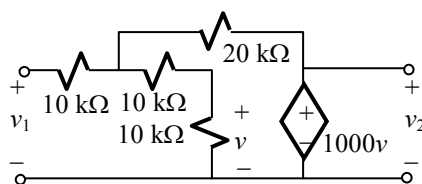
7. Carilah tegangan dan arus di dua resistor 2 kΩ dan daya yang diberikan oleh ke-dua sumber pada rangkaian berikut.



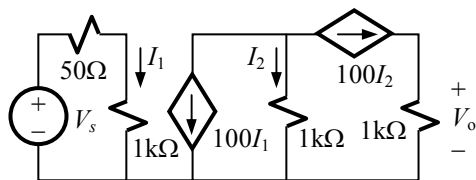
8. Tentukanlah v_2 pada rangkaian berikut.



9. Tentukanlah v_2 pada rangkaian berikut.



10. Pada rangkaian berikut ini, tentukan hubungan masukan-keluaran $V_o = KV_s$.



BAB 3

Contoh Aplikasi Rangkaian Pemroses Energi dan Pemroses Sinyal

Dalam Bab ini kita akan melihat beberapa contoh aplikasi analisis rangkaian, dengan contoh-contoh yang dapat memberikan gambaran keadaan nyata. Rangkaian yang akan kita bahas meliputi rangkaian-rangkaian pemrosesan energi dan pemrosesan sinyal di mana kita akan mengenal dua piranti yang belum pernah kita singgung sebelumnya, yaitu *dioda* dan *OP AMP*.

Pemrosesan energi listrik pada umumnya dilakukan dengan tiga macam cara, yaitu teknologi arus searah, teknologi arus bolak-balik, dan teknologi pulsa. Mengenai teknologi yang terakhir ini, tidak termasuk dalam cakupan buku ini; kita akan mempelajarinya pada pelajaran lain. Teknologi arus bolak-balik dengan sinyal sinus merupakan teknologi yang sangat luas dipakai dalam pembangkitan maupun penyaluran energi listrik. Rangkaian-rangkaian arus bolak-balik ini akan kita pelajari di Bab-5 sedangkan di bab ini kita hanya akan melihat rangkaian pemroses energi dengan tegangan dan arus searah, yang kita sebut rangkaian arus searah. Dalam rekayasa praktis, rangkaian pemroses energi yang pada umumnya merupakan rangkaian berbentuk tangga, di gambarkan dengan cara yang lebih sederhana yaitu dengan menggunakan diagram satu garis. Bagaimana diagram ini dikembangkan, akan kita lihat pula di bab ini.

Dalam pembahasan rangkaian dengan dioda dan OP AMP ini, kita memandang kedua piranti tersebut sebagai piranti yang mempunyai karakteristik tertentu, tanpa membahas apa yang sebenarnya terjadi di dalam piranti ini. OP AMP misalnya, merupakan rangkaian elektronika yang tersusun dari banyak komponen yang semuanya terangkai dalam satu chip. Walaupun rangkaianannya rumit, OP AMP dapat dimodelkan dengan suatu karakteristik $i-v$ yang agak sederhana, dan dengan karakteristik inilah kita bekerja.

Cakupan bahasan dalam bab ini akan meliputi:

Rangkaian Arus Searah

Alat ukur dan pengukuran arus searah, saluran dan jaringan distribusi daya arus searah, penyediaan batere. Di sub-bab ini akan kita kembangkan representasi rangkaian dengan diagram satu garis.

Rangkaian Dengan Dioda

Penyearah setengah gelombang dan gelombang penuh, pemotong gelombang, pengikat tegangan.

Rangkaian OP AMP

Rangkaian OP AMP resistif : penguat non-inversi, rangkaian penyangga, penguat inversi, penguat diferensial, penjumlah, hubungan bertingkat. Rangkaian OP AMP dinamis : integrator, diferensiator.

3.1. Rangkaian Arus Searah

Tujuan:

- Memahami rangkaian alat ukur arus searah dan pengukuran arus searah.
- Memahami dan mampu menghitung parameter penyalur daya arus searah.
- Memahami dan mampu melakukan perhitungan penyaluran daya arus searah.
- Memahami diagram satu garis dan mampu melakukan analisis rangkaian arus searah yang diberikan dalam bentuk diagram satu garis.
- Memahami susunan batere dan mampu melakukan perhitungan dalam susunan batere.

Pengukur Tegangan dan Arus Searah

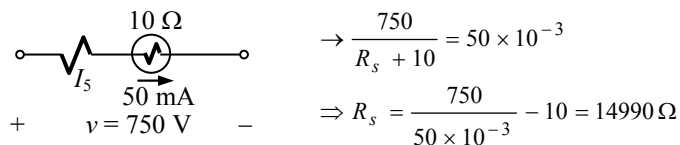
Salah satu jenis alat pengukur tegangan dan arus searah adalah jenis kumparan berputar yang terdiri dari sebuah kumparan yang berada dalam suatu medan magnet permanen. Kumparan yang disangga oleh sumbu dan dilengkapi dengan pegas ini akan berputar apabila ia dilirai arus. Perputaran akan mencapai kedudukan tertentu pada saat momen putar yang timbul akibat adanya interaksi medan magnet dan arus kumparan, sama dengan momen lawan yang diberikan oleh pegas. Sudut pada kedudukan seimbang ini kita sebut sudut defleksi. Defleksi maksimum terjadi pada arus maksimum yang diperbolehkan mengalir pada kumparan. Karena kumparan harus ringan, ia harus dibuat dari kawat yang halus sehingga arus yang mengalir padanya sangat terbatas. Kawat kumparan ini mempunyai resistansi yang kita sebut resistansi internal alat ukur.

Walaupun arus yang melalui kumparan sangat terbatas besarnya, namun kita dapat membuat alat ukur ini mampu mengukur arus sampai ratusan amper dengan cara menambahkan resistor paralel (*shunt*). Terbatasnya arus yang diperbolehkan melalui kumparan juga berarti bahwa tegangan pada terminal kumparan juga sangat terbatas; dengan menambahkan resistansi seri terhadap kumparan, kita dapat membuat alat ukur ini mampu mengukur tegangan sampai beberapa ratus volt.

CONTOH 3.1 : Sebuah alat ukur kumparan berputar mempunyai resistansi internal 10Ω dan berdefleksi maksimum jika arus yang mengalir pada kumparan adalah 50 mA . Tentukan resistansi seri yang harus ditambahkan agar alat ini mampu mengukur tegangan sampai 750 V .

Penyelesaian :

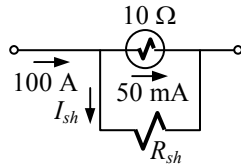
Dengan penambahan resistor seri R_s terjadi pembagian tegangan antara R_s dengan kumparan sehingga dengan memilih nilai R_s yang tepat tegangan pada kumparan tetap pada batas yang diijinkan. Rangkaian alat ukur menjadi seperti gambar berikut. Dengan arus pada kumparan dibatasi pada 50 mA , maka:



CONTOH 3.2 : Alat ukur kumparan berputar pada contoh 3.1. (resistansi internal 10Ω dan defleksi maksimum terjadi jika arus kumparan 50 mA) hendak digunakan untuk mengukur arus sampai 100 A . Tentukan nilai resistansi shunt yang diperlukan.

Penyelesaian:

Dengan penambahan shunt R_{sh} akan terjadi pembagian arus antara R_{sh} dengan kumparan. Dengan memilih nil R_{sh} yang tepat, arus yang mengalir pada kumparan tetap dalam batas yang diijinkan. Rangkaian alat ukur dengan shunt adalah sebagai berikut. Dengan arus kumparan 50 mA, maka :

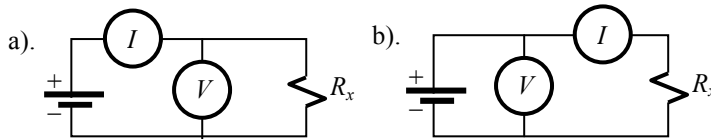


$$\begin{aligned} \rightarrow I_{sh} + 50 \times 10^{-3} &= 100 \\ \rightarrow I_{sh} R_{sh} &= 10 \times 50 \times 10^{-3} \\ \Rightarrow R_{sh} &= \frac{10 \times 50 \times 10^{-3}}{100 - 50 \times 10^{-3}} = 0,005 \Omega \end{aligned}$$

Pengukuran Resistansi

Salah satu metoda untuk mengukur resistansi adalah metoda voltmeter-ampere-meter. Dalam metoda ini nilai resistansi dapat dihitung dengan mengukur tegangan dan arus secara simultan. Dalam contoh berikut ini diberikan dua macam rangkaian yang biasa digunakan untuk mengukur resistansi dengan metoda voltmeter-ampere-meter.

CONTOH 3.3 : Resistansi R_x hendak diukur dengan menggunakan dua macam rangkaian berikut ini. Jika resistansi internal voltmeter dan ampere-meter masing-masing adalah R_V dan R_I dan penunjukan voltmeter dan ampere-meter adalah V dan I , hitunglah R_x pada kedua macam cara pengukuran tersebut.



Penyelesaian :

Untuk rangkaian a), tegangan pada R_x adalah V sedangkan arus yang melalui R_x adalah

$$I_x = I - \frac{V}{R_V} \quad \text{sehingga} \quad R_x = \frac{V}{I_x} = \frac{V}{I - (V/R_V)}$$

Jika pengukuran dilakukan dengan menggunakan rangkaian b), arus yang melalui R_x adalah I sedangkan tegangan pada R_x adalah

$$V_x = V - IR_I \quad \text{sehingga} \quad R_x = \frac{V}{I_x} = \frac{V - IR_I}{I} = \frac{V}{I} - R_I$$

Pemahaman :

Kesalahan pengukuran akan kecil dan nilai R_x dapat dinyatakan dengan $R_x = V/I$ jika R_V cukup besar pada rangkaian a) atau R_I cukup kecil pada rangkaian b).

Resistansi Kabel Penyalur Daya

Kabel digunakan sebagai penyalur daya dari sumber ke beban. Setiap ukuran dan jenis kabel mempunyai batas kemampuan pengaliran arus yang tidak boleh dilampaui. Di samping itu, resistansi konduktor kabel akan menyebabkan terjadinya beda tegangan antara sumber dan beban. Oleh karena itu pemilihan ukuran kabel harus disesuaikan dengan besarnya beban. Selain resistansi konduktor, resistansi isolasi kabel juga merupakan parameter yang harus diperhatikan; menurunnya resistansi isolasi akan menyebabkan kenaikan arus bocor.

CONTOH 3.4 : Resistansi konduktor suatu kabel sepanjang 500 m pada 20°C adalah 0.58 Ω dan resistansi isolasinya adalah 975 M Ω . Carilah resistansi konduktor dan isolasinya per kilometer.

Penyelesaian :

Resistansi konduktor sebanding dengan panjangnya sesuai dengan relasi $R = \rho l/A$, maka resistansi konduktor per kilometer adalah

$$R_{konduktor} = 2 \times 0,58 = 1,16 \Omega \text{ per km.}$$

Resistansi isolasi adalah resistansi antara konduktor dan tanah (selubung kabel). Luas penampang isolasi, yaitu luas penampang yang dilihat oleh konduktor ke arah selubung, berbanding terbalik terhadap panjang kabel; makin panjang kabel, makin kecil resistansi isolasinya. Resistansi isolasi kabel per kilometer adalah

$$R_{isolasi} = (1/2) \times 975 = 488 \text{ M}\Omega \text{ per km.}$$

CONTOH 3.5 : Dua penggalan kabel, masing masing mempunyai resistansi konduktor $0,7 \Omega$ dan $0,5 \Omega$ dan resistansi isolasi $300 \text{ M}\Omega$ dan $600 \text{ M}\Omega$. Jika kedua penggalan kabel itu disambungkan untuk memperpanjang saluran, berapakah resistansi konduktor dan isolasi saluran ini ?

Penyelesaian :

Karena disambung seri, resistansi total adalah : $R_{konduktor} = 0,7 + 0,5 = 1,2 \Omega$

Sambungan seri kabel, menyebabkan resistansi isolasinya terhubung paralel. Jadi

$$\text{resistansi isolasi total adalah : } R_{isolasi} = \frac{300 \times 600}{300 + 600} = 200 \text{ M}\Omega$$

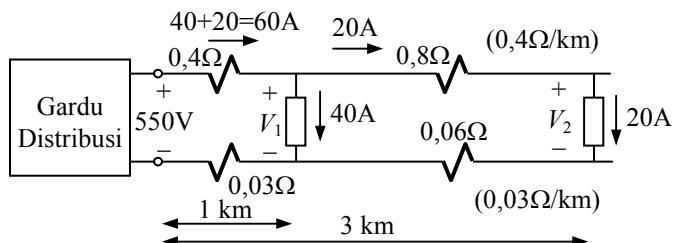
Penyaluran Daya Melalui Saluran Udara

Selain kabel, penyaluran daya dapat pula dilakukan dengan menggunakan saluran di atas tanah yang kita sebut saluran udara. Saluran udara ini dipasang dengan menggunakan tiang-tiang yang dilengkapi dengan isolator penyangga atau isolator gantung yang biasanya terbuat dari keramik atau gelas. Konduktornya sendiri dapat merupakan konduktor tanpa isolasi (telanjang) dan oleh karena itu permasalahan arus bocor terletak pada pemilihan isolator penyangga di tiang-tiang dan hampir tidak terkait pada panjang saluran sebagaimana yang kita jumpai pada kabel.

CONTOH 3.6 : Dari suatu gardu distribusi dengan tegangan kerja 550 V disalurkan daya ke dua rangkaian kereta listrik. Dua rangkaian kereta tersebut berada masing-masing pada jarak 1 km dan 3 km dari gardu distribusi. Kereta pertama mengambil arus 40 A dan yang ke-dua 20 A . Resistansi kawat saluran udara adalah $0,4 \Omega$ per km, sedangkan resistansi rel sebagai saluran balik adalah $0,03 \Omega$ per km. Tentukanlah (a) tegangan kerja di masing-masing kereta, (b). Daya hilang pada saluran (daya hilang di saluran udara + rel).

Penyelesaian :

Diagram rangkaian listrik dari sistem yang dimaksudkan dapat digambarkan seperti di samping ini.



a). Tegangan kerja kereta pertama (V_1) dan kereta kedua (V_2) adalah:

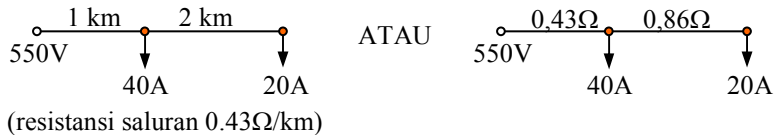
$$V_1 = 550 - 60(0,4 + 0,03) = 524,2 \text{ V} \quad ; \quad V_2 = V_1 - 20(0,8 + 0,06) = 507 \text{ V}$$

b). Daya hilang pada saluran adalah

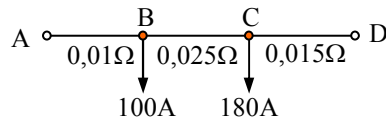
$$P_{saluran} = 60^2(0,4 + 0,03) + 20^2(0,8 + 0,06) = 1892 \text{ W} = 1,89 \text{ kW}$$

Diagram Satu Garis

Penggambaran saluran distribusi seperti pada contoh 3.6. di atas dapat dilakukan dengan lebih sederhana, yaitu menggunakan *diagram satu garis*. Cara inilah yang sering dilakukan dalam praktek. Satu saluran digambarkan dengan hanya satu garis saja, beban dinyatakan dengan kebutuhan daya atau besar arusnya. Posisi gardu dan beban-beban dinyatakan dalam panjang saluran ataupun resistansi saluran. Resistansi saluran dinyatakan sebagai resistansi total yaitu jumlah resistansi kawat kirim dan resistansi kawat balik. Sebagai contoh, diagram satu garis dari sistem penyaluran daya pada contoh 3.6. dapat kita gambarkan sebagai berikut.



CONTOH 3.7 : Suatu saluran distribusi 2 kawat dicatu dari kedua ujungnya (A dan D) dengan tegangan 255 V dan 250 V. Beban sebesar 100 A dan 180 A berada di titik simpul B dan C seperti terlihat pada diagram satu garis berikut. Resistansi yang tertera pada gambar adalah resistansi satu kawat. Tentukanlah tegangan di tiap titik beban (B dan C) serta arus di tiap-tiap bagian saluran.



Penyelesaian :

Dengan memperhitungkan saluran balik, resistansi saluran menjadi dua kali lipat. Persamaan tegangan simpul untuk “simpul” B dan C adalah

$$\frac{V_B - V_A}{2 \times 0,01} + 100 + \frac{V_B - V_C}{2 \times 0,025} = 0 \rightarrow V_B \left(\frac{1}{0,02} + \frac{1}{0,05} \right) + 100 - \frac{255}{0,02} - \frac{V_C}{0,05} = 0$$

$$\frac{V_C - V_B}{2 \times 0,025} + 180 + \frac{V_C - V_D}{2 \times 0,015} = 0 \rightarrow V_C \left(\frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,03} \right) + 180 - \frac{250}{0,03} - \frac{V_B}{0,05} = 0$$

atau

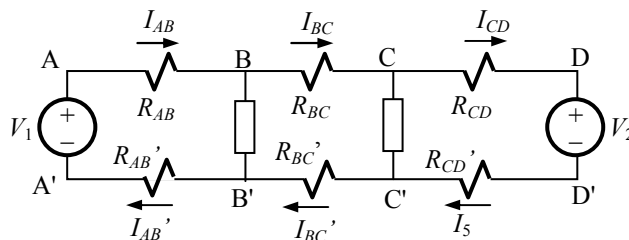
$$\left. \begin{aligned} 70V_B - 20V_C &= 12650 \\ 53,3V_C - 20V_B &= 8153,3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_B = \frac{12650 \times 53,3 + 8153,3 \times 20}{53,3 \times 70 - 400} = 251,3 \text{ V}$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{8153,3 + 20 \times 251,3}{53,3} = 247,1 \text{ V}$$

Arus pada segmen AB, BC dan CD adalah :

$$I_{AB} = \frac{V_A - V_B}{R_{AB}} = \frac{255 - 251,3}{0,02} = 185 \text{ A}; \quad I_{BC} = I_{AB} - 100 = 85 \text{ A}; \quad I_{DC} = 180 - I_{BC} = 95 \text{ A}$$

Penurunan Diagram Satu Garis. Bagaimana mungkin metoda tegangan simpul dapat kita aplikasikan pada rangkaian yang digambarkan dengan diagram satu garis? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita lihat diagram rangkaian sebenarnya (dua kawat) sebagai berikut.



Jika simpul B dan B' serta C dan C' kita pandang sebagai dua simpul super, maka untuk keduanya berlaku

$$I_{AB} - I_{BC} + I_{BC'} - I_{AB'} = 0 \quad \text{dan} \quad I_{BC} - I_{CD} + I_{CD'} - I_{BC'} = 0$$

Karena $I_{AB} = I_{AB'}$ (hubungan seri), maka haruslah

$$I_{BC} = I_{BC'} \quad \text{dan oleh karenanya} \quad I_{CD} = I_{CD'}$$

Dengan kesamaan arus-arus ini maka aplikasi HTK untuk setiap mesh pada rangkaian di atas akan memberikan

$$V_{AA'} + I_{AB}R_{AB} + V_{BB'} + I_{AB'}R_{AB'} = 0$$

$$V_{B'B} + I_{BC}R_{BC} + V_{CC'} + I_{BC'}R_{BC'} = 0$$

$$V_{C'C} + I_{CD}R_{CD} + V_{DD'} + I_{CD'}R_{CD'} = 0$$

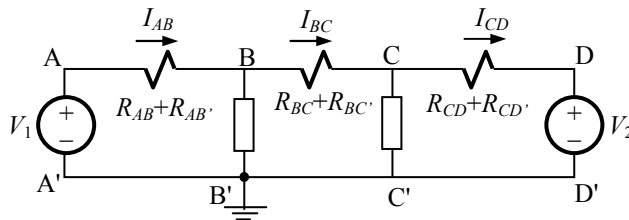
yang dapat ditulis sebagai

$$V_{AA'} + I_{AB}(R_{AB} + R_{AB'}) + V_{BB'} = 0$$

$$V_{B'B} + I_{BC}(R_{BC} + R_{BC'}) + V_{CC'} = 0$$

$$V_{C'C} + I_{CD}(R_{CD} + R_{CD'}) + V_{DD'} = 0$$

Tiga persamaan terakhir ini tidak lain adalah persamaan rangkaian yang berbentuk :

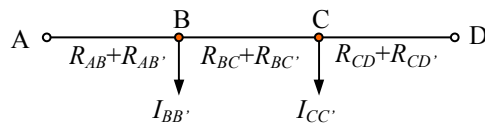


Dengan mengambil simpul B' sebagai simpul referensi kita dapat memperoleh persamaan tegangan untuk simpul B dan C sebagai

$$V_B \left(\frac{1}{R_{AB} + R_{AB'}} + \frac{1}{R_{BC} + R_{BC'}} \right) + I_{BB'} - \frac{V_A}{R_{AB} + R_{AB'}} - \frac{V_C}{R_{BC} + R_{BC'}} = 0$$

$$V_C \left(\frac{1}{R_{BC} + R_{BC'}} + \frac{1}{R_{CD} + R_{CD'}} \right) + I_{CC'} - \frac{V_B}{R_{BC} + R_{BC'}} - \frac{V_D}{R_{CD} + R_{CD'}} = 0$$

Inilah persamaan tegangan simpul B dan C yang dapat kita peroleh langsung dari diagram satu garis :



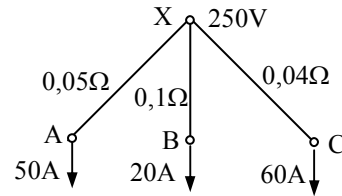
Jadi, dengan *menambahkan* resistansi saluran balik pada saluran kirim, maka saluran balik tidak lagi mengandung resistansi. Dengan demikian saluran balik ini dapat kita pakai sebagai simpul referensi yang bertegangan nol untuk seluruh panjang saluran balik tersebut.

Dengan cara demikian ini, maka kita dapat memperoleh persamaan “tegangan simpul” langsung dari diagram satu garis tanpa harus menggambarkan diagram rangkaian sebenarnya, dengan catatan bahwa yang dimaksud dengan “tegangan simpul” adalah tegangan antara saluran pengirim dan saluran balik di lokasi yang sama.

Jaringan Distribusi Daya

Penyaluran daya listrik dapat bermula dari satu sumber ke beberapa titik beban ataupun dari beberapa sumber ke beberapa titik beban. Jaringan penyaluran daya ini, disebut jaringan distribusi daya, dapat berbentuk jaringan *radial*, *mesh*, atau *ring*. Ke-tiga bentuk jaringan tersebut akan kita lihat secara berturut-turut dalam contoh berikut.

CONTOH 3.8 : Tiga beban di A, B, dan C, masing-masing memerlukan arus 50, 20, dan 60 A dicatu dengan jaringan radial dari sumber X yang tegangannya 250 V. Penyaluran daya dari sumber ke beban dilakukan melalui saluran yang resistansi totalnya (saluran pengirim dan saluran balik) diperlihatkan pada gambar. Carilah tegangan masing-masing beban dan besarnya daya hilang pada tiap cabang saluran.

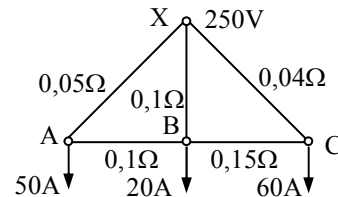


Penyelesaian :

$$V_A = V_X - 0,05 \times 50 = 247,5 \text{ V}; \quad V_B = 250 - 0,1 \times 20 = 248 \text{ V}; \quad V_C = 250 - 0,04 \times 60 = 247,6 \text{ V}$$

$$p_{XA} = (50)^2 \times 0,05 = 125 \text{ W}; \quad p_{XB} = (20)^2 \times 0,1 = 40 \text{ W}; \quad p_{XC} = (60)^2 \times 0,04 = 144 \text{ W}$$

CONTOH 3.9 : Titik beban A dan B serta B dan C pada contoh 3.8, dihubungkan dengan suatu interkoneksi (*interconnector*) yang resistansi masing-masing terlihat pada gambar berikut ini. Carilah tegangan masing-masing beban dan besarnya daya hilang pada tiap cabang saluran dan interconnector, serta arus saluran.



Penyelesaian :

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A, B, dan C adalah

$$V_A \left(\frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,1} \right) + 50 - \frac{V_B}{0,1} - \frac{V_X}{0,05} = 0$$

$$V_B \left(\frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,15} \right) + 20 - \frac{V_A}{0,1} - \frac{V_C}{0,15} - \frac{V_X}{0,1} = 0$$

$$V_C \left(\frac{1}{0,04} + \frac{1}{0,15} \right) + 60 - \frac{V_B}{0,15} - \frac{V_X}{0,04} = 0$$

$$\text{atau :} \quad 30V_A + 50 - 10V_B - 5000 = 0$$

$$\frac{80}{3}V_B + 20 - 10V_A - \frac{20}{3}V_C - 2500 = 0$$

$$\frac{95}{3}V_C + 60 - \frac{20}{3}V_B - 6250 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 30 & -10 & 0 \\ -30 & 80 & -20 \\ 0 & -20 & 95 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4950 \\ 7440 \\ 18570 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 125 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 495 \\ 1239 \\ 30954 \end{vmatrix}$$

Dari sini kita peroleh

$$V_C = 247,63 \text{ V}; \quad V_B = \frac{1239 + 2 \times 247,64}{7} = 247,75 \text{ V}; \quad V_A = \frac{495 + 247,75}{3} = 247,58 \text{ V}$$

Daya hilang pada saluran adalah

$$p_{XA} = \frac{(V_X - V_A)^2}{R_{XA}} = \frac{(250 - 247,58)^2}{0,05} = 117 \text{ W} ; p_{XB} = \frac{(250 - 247,75)^2}{0,1} = 50,6 \text{ W}$$

$$p_{XC} = \frac{(250 - 247,63)^2}{0,04} = 146,4 \text{ W} ; p_{AB} = \frac{(V_A - V_B)^2}{0,1} = \frac{(247,58 - 247,75)^2}{0,1} = 0,3 \text{ W}$$

$$p_{BC} = \frac{(247,75 - 247,63)^2}{0,15} = 0,1 \text{ W}$$

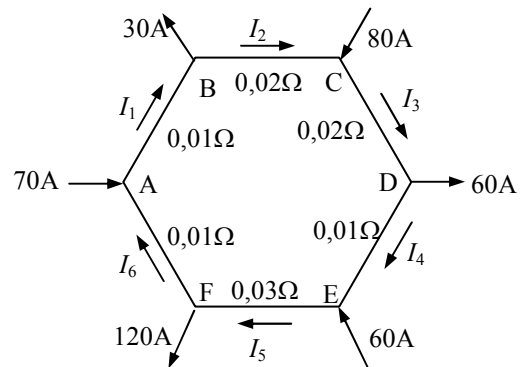
Arus pada saluran

$$I_{XA} = \frac{(V_X - V_A)}{R_{XA}} = \frac{(250 - 247,58)}{0,05} = 48,4 \text{ A}$$

$$I_{XB} = \frac{(250 - 247,75)}{0,1} = 22,5 \text{ A}$$

$$I_{XC} = \frac{(250 - 247,63)}{0,04} = 59,3 \text{ A}$$

CONTOH 3.10 : Gambar di samping ini adalah diagram satu garis jaringan distribusi dengan sumber-sumber yang dinyatakan sebagai arus masuk ke jaringan dan beban-beban dinyatakan dengan arus keluar dari jaringan. Carilah besarnya arus-arus pada tiap cabang saluran.



Penyelesaian :

Aplikasi HTK untuk loop dan HAK untuk lima “simpul” memberikan persamaan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,02 & 0,01 & 0,03 & 0,01 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -70 \\ 30 \\ -80 \\ 60 \\ -60 \end{vmatrix}$$

Eliminasi Gauss memberikan :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -70 \\ -150 \\ -390 \\ -450 \\ -81 \end{vmatrix}$$

Dari sini kita peroleh :

$$I_6 = -81 \text{ A} ; I_5 = 39 \text{ A} ; I_4 = -21 \text{ A} ; I_3 = 39 \text{ A} ; I_2 = -41 \text{ A} ; I_1 = -11 \text{ A}$$

Tanda negatif arus menunjukkan bahwa arah arus berlawanan dengan arah referensi.

Batere

Batere merupakan sumber daya arus searah yang banyak digunakan, terutama untuk daya yang tidak terlalu besar serta keadaan darurat. Untuk daya besar, susunan batere dicatu oleh sumber arus searah yang diperoleh dari penyearahan arus bolak-balik. Berikut ini kita akan melihat penyediaan batere, sedangkan penyearahan arus bolak-balik akan kita lihat pada sub-bab berikutnya mengenai rangkaian dengan dioda.

Suatu batere tersusun dari *sel-sel* yang merupakan sumber daya searah melalui konversi energi kimia. Setiap sel mempunyai tegangan yang tidak besar dan oleh karena itu untuk memperoleh tegangan sumber yang kita inginkan, kita harus menyusun *sel-sel* itu menjadi suatu susunan batere. Sebagai contoh, sumber daya untuk mobil merupakan sumber dengan tegangan 12 V yang tersusun dari 6 *sel* terhubung seri dan masing-masing *sel* bertegangan 2 volt.

Penyediaan batere haruslah diusahakan optimal baik dilihat dari pertimbangan ekonomis maupun teknis. Berikut ini suatu contoh perhitungan penyediaan batere.

CONTOH 3.11 : Suatu susunan batere diperlukan untuk memberikan arus sebesar 6 A pada beban resistif sebesar $0,7 \Omega$. Jika sel-sel yang tersedia mempunyai ggl (emf) 2,1 V dengan resistansi internal $0,5 \Omega$, tentukanlah jumlah sel dan susunannya.

Penyelesaian :

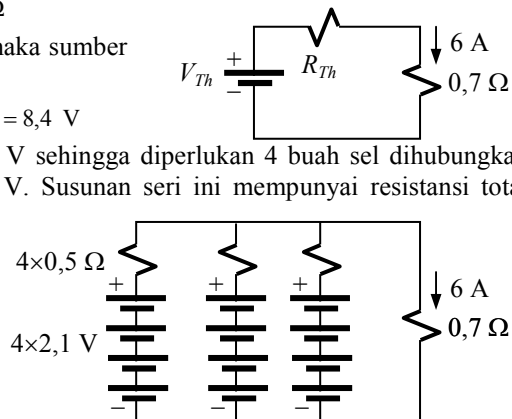
Jika kita anggap susunan batere kita sebagai suatu sumber Thévenin, maka untuk mencapai transfer daya maksimum resistansi Thévenin harus sama dengan resistansi beban, yaitu

$$R_{Th} = R_{beban} = 0,7 \Omega$$

Karena arus ditetapkan sebesar 6 A, maka sumber tegangan Thévenin, V_{Th} , haruslah

$$V_{Th} = 6 \times (0,7 + 0,7) = 8,4 \text{ V}$$

Sel yang tersedia mempunyai ggl 2,1 V sehingga diperlukan 4 buah sel dihubungkan seri untuk memperoleh tegangan 8,4 V. Susunan seri ini mempunyai resistansi total sebesar $4 \times 0,5 = 2 \Omega$. Untuk memperoleh R_{Th} sebesar $0,7 \Omega$ (atau mendekati) diperlukan tiga susunan paralel, yang akan memberikan $R_{ekivalen} = 0,66 \Omega$. Jadi kita memerlukan $4 \times 3 = 12$ sel, yang tersusun menjadi 4 seri 3 paralel seperti terlihat pada gambar di samping ini.



Pemahaman :

Jika susunan seri kita kurangi jumlah sel-nya, menjadi hanya 3, maka tegangan total menjadi $3 \times 2,1 = 6,3 \text{ V}$, dan resistansinya menjadi $3 \times 0,5 = 1,5 \Omega$. Dengan mempertahankan susunan tetap 3 paralel, resistansi ekivalen menjadi $0,5 \Omega$. Arus beban akan menjadi

$$6,3 / (0,5 + 0,7) = 5,025 \text{ A, kurang dari yang diharapkan yaitu } 6 \text{ A.}$$

Jika kita coba menambah jumlah cabang paralelnya menjadi 4, resistansi ekivalen menjadi $1,5 / 4 = 0,375 \Omega$. Arus beban menjadi $6,3 / (0,375 + 0,7) = 5,86 \text{ A}$; tetap masih kurang dari 6 A. Jadi susunan 12 sel menjadi 4 seri terparalel 3, adalah yang optimal dengan arus beban $8,4 / (0,66 + 0,7) = 6,17 \text{ A}$.

Sel-sel Ujung (Sel Akhir). Pada umumnya pembebanan pada batere tidaklah selalu tetap. Jika arus beban bertambah, maka tegangan batere akan menurun karena ada resistansi internal. Tegangan batere juga akan menurun pada beban konstan, seiring dengan berjalannya waktu. Oleh karena itu jika diperlukan suatu tegangan keluaran yang tertentu besarnya, maka diperlukan *sel ujung* yang akan dimasukkan ataupun dikeluarkan dari susunan batere agar perubahan tegangan keluaran masih dalam batas-batas yang diperbolehkan.

CONTOH 3.12 : Dari suatu susunan batere diperlukan tegangan keluaran sebesar 220 V. Jika tegangan maksimum tiap sel adalah 2,5 V sedangkan tegangan minimum yang masih diperkenankan adalah 1,85 V, berapakah jumlah sel (terhubung seri) yang diperlukan, dan berapakah jumlah sel ujung.

Penyelesaian :

Jumlah sel yang diperlukan harus dihitung dengan memperhatikan tegangan minimum sel agar pada tegangan minimum ini tegangan keluaran batere masih bernilai 220 V. Jadi jumlah sel yang diperlukan adalah

$$N = \frac{220}{1,85} = 119 \text{ buah}$$

Pada saat sel bertegangan maksimum, jumlah sel yang diperlukan hanyalah

$$N_0 = \frac{220}{2,5} = 88 \text{ buah}$$

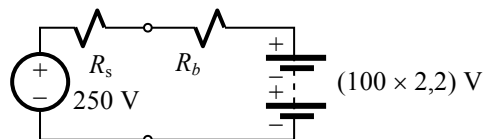
Jadi jumlah sel ujung adalah $N_u = 119 - 88 = 31$ buah.

Pengisian Batere . Dalam proses pengisian batere, daya dari sumber ditransfer ke batere. Daya yang dikeluarkan oleh sumber, selain untuk mengisi batere sebagian akan hilang menjadi panas dalam batere (karena adanya resistansi internal batere), hilang pada saluran, dan juga hilang pada sumber itu sendiri karena adanya resistansi internal sumber. Kita lihat contoh berikut ini.

CONTOH 3.13 : Sebuah sumber tegangan searah 250 V dengan resistansi internal sebesar 0,5 Ω digunakan untuk mengisi batere yang terdiri dari 100 sel, masing-masing dengan ggl 2,2 V dan resistansi internal 0,01 Ω. Hitunglah a) arus pengisian. b) daya pengisian batere, c) daya hilang sebagai panas dalam batere, d) daya hilang sebagai panas pada sumber.

Penyelesaian :

Rangkaian pengisian batere adalah seperti gambar di samping ini.



Ggl total batere dan resistansi internalnya adalah :

$$GGL = 100 \times 2,2 = 220 \text{ V} ; \quad R_b = 100 \times 0,01 = 1 \text{ } \Omega$$

a). Arus pengisian adalah :
$$I = \frac{V_{sumber} - GGL}{R_s + R_b} = \frac{250 - 220}{0,5 + 1} = 20 \text{ A}$$

b). Daya untuk pengisian batere adalah :
$$p_{pengisian} = GGL \times I = 220 \times 20 = 4400 \text{ W .}$$

c). Daya hilang sebagai panas dalam batere adalah ;

$$p_{panas} = I^2 R_b = 20^2 \times 1 = 400 \text{ W}$$

d). Daya hilang pada sumber :
$$p_{panas \ sumber} = I^2 R_{sumber} = 20^2 \times 0,5 = 200 \text{ W}$$

SOAL-SOAL : RANGKAIAN ARUS SEARAH

Rangkaian Arus Searah

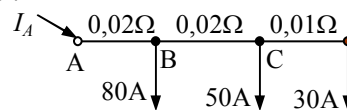
1. Tegangan pada sebuah resistor R yang sedang dialiri arus searah diukur dengan menggunakan sebuah voltmeter yang mempunyai resistansi internal $20\text{ k}\Omega$. Voltmeter menunjuk 200 V . Jika arus total adalah $0,05\text{ A}$, hitunglah nilai R .
2. Arus yang melalui sebuah resistor R diukur menggunakan amperemeter yang mempunyai resistansi internal $0,1\ \Omega$ (resistor R dihubungkan seri dengan amperemeter). Jika tegangan yang diberikan adalah 10 V dan amperemeter menunjuk 50 A . Hitung R .
3. Sebuah voltmeter jika dihubungkan langsung ke sumber tegangan menunjuk 240 V , jika melalui resistor seri $50\text{ k}\Omega$, ia menunjukkan 90 V . Berapakah resistansi internalnya ?
4. Sebuah voltmeter jika diserikan dengan resistor $50\text{ k}\Omega$ menunjuk 90 V pada tegangan sumber 240 V . Jika resistor $50\text{ k}\Omega$ diganti dengan suatu resistansi R_x maka voltmeter menunjuk 3 V . Dengan membandingkan dua pengukuran tersebut, hitunglah R_x .
5. Dua buah voltmeter masing-masing mempunyai resistansi internal $20\text{ k}\Omega$ dan $30\text{ k}\Omega$. Jika mereka dihubungkan seri dan pada hubungan seri ini diberikan tegangan 300 V , berapakah penunjukkan masing-masing ?
6. Suatu baterai terdiri dari 10 buah sel masing-masing mempunyai emf $1,8\text{ V}$ dan resistansi internal $0,02\ \Omega$. Jika sepuluh sel itu dihubungkan seri untuk mencatu beban resistor $2,8\ \Omega$, berapakah daya yang diserap beban ? Jika sepuluh sel tersebut dihubungkan paralel untuk mencatu beban yang sama, berapa daya diserap beban ?
7. Dua buah baterai 120 V mempunyai resistansi internal berbeda, masing-masing $0,2\ \Omega$ dan $0,25\ \Omega$. Kedua baterai diparalelkan untuk mencatu

daya pada resistor $60\ \Omega$. Hitunglah arus yang diberikan oleh masing-masing baterai.

8. Sebuah beban memerlukan arus 100 mA pada tegangan 5 V . Sumber yang tersedia bertegangan 24 V . Untuk memenuhi keperluan itu digunakan potensiometer yang resistansi totalnya $10\text{ k}\Omega$. Berapa daya diserap beban dan berapa daya diberikan oleh sumber ?
9. Dua alat pemanas digunakan secara bersamaan pada tegangan 240 V . Arus total yang mereka ambil adalah 15 A . Salah satu pemanas diketahui menyerap daya 1200 W . Berapa daya yang diserap pemanas yang lain dan hitunglah resistansi masing-masing pemanas.
10. Resistansi konduktor suatu jenis kabel adalah $0,014\ \Omega$ per 100 m . Kabel jenis ini digunakan untuk menyalurkan daya searah ke sebuah beban 100 A pada jarak 250 m dari pusat pencatu daya. Hitung perbedaan tegangan antara ujung kirim dan ujung terima kabel dan hitung daya hilang pada saluran ini.
11. Tiga buah beban masing-masing 50 A , dihubungkan pada satu pusat pencatu daya searah melalui kabel-kabel yang terpisah. Resistansi kabel (saluran kirim + saluran balik) ke beban A, B, dan C berturut-turut adalah $0,05$, $0,1$, dan $0,02\ \Omega$. Jika tegangan di pusat daya adalah 250 V , hitung tegangan di masing-masing beban.

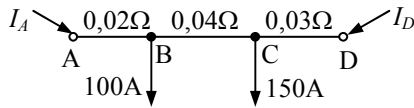
Rangkaian dengan Diagram Satu Garis

12. Diagram satu garis berikut ini menunjukkan penyaluran daya searah ke tiga beban menggunakan satu saluran kabel.



Pusat pencatu daya di A bekerja pada tegangan 250 V . Tentukan pada tegangan berapa masing-masing beban beroperasi.

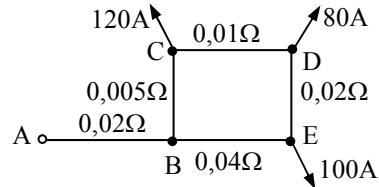
13. Suatu kabel penyalur daya dicatu di kedua ujungnya untuk memberi daya pada dua beban seperti terlihat pada diagram satu garis berikut.



Jika tegangan di A 255 V, dan di D 250 V, hitunglah tegangan di B dan C. Hitung pula arus masuk di A dan D, dan arus di segmen B-C.

14. Gambarkan diagram satu garis untuk sistem pada soal 11. Jika beban A dan B dihubungkan dengan kabel konektor yang resistansinya $0,1 \Omega$, dan beban B dan C dengan kabel konektor $0,015 \Omega$. hitung tegangan di masing-masing beban.

15. Diagram satu garis suatu jaringan distribusi daya searah dengan konfigurasi cincin adalah sebagai berikut.



Jika sumber di A bekerja pada 250 V, hitung tegangan masing-masing beban dan arus di segmen-segmen jaringan distribusi.

16. Sebuah beban 100 A berada pada jarak 250 m dari pusat pencatu daya. Jika tegangan jatuh pada beban tidak boleh lebih dari 5 V dan jika resistivitas bahan konduktor kabel adalah $0,018 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$, hitunglah penampang konduktor kabel yang diperlukan.

3.2. Rangkaian-Rangkaian Dengan Dioda

Tujuan :

- Memahami rangkaian penyearah, pemotong gelombang, pengikat gelombang.
- Mampu melakukan analisis rangkaian-rangkaian dengan dioda (ideal).

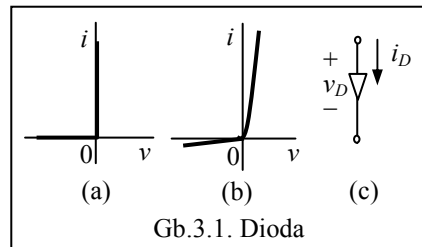
Dioda Ideal

Kita akan mempelajari rangkaian dengan dioda dengan memandang dioda sebagai piranti yang memiliki karakteristik $i-v$ tertentu. Tentang bagaimana karakteristik ini terbentuk dapat dipelajari pada pelajaran lain.

Dioda merupakan piranti dua terminal yang meloloskan aliran arus ke satu arah dan menahan aliran arus pada arah sebaliknya. Perilaku ini mirip dengan saklar yang tertutup untuk arah arus tertentu tetapi terbuka untuk arah yang berlawanan, dan dapat dinyatakan dengan karakteristik $i-v$ seperti terlihat pada Gb.3.1.a. Karakteristik ini adalah karakteristik dioda ideal, yang pada kenyataannya mempunyai karakteristik tak-linier seperti terlihat pada Gb.3.1.b. Simbol dari dioda beserta referensi arus dan tegangan ditunjukkan pada Gb.3.1.c. Karakteristik dioda ideal, dapat kita nyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \text{Dioda konduksi} &: i_D > 0, v_D = 0 \\ \text{Dioda tak konduksi} &: i_D = 0, v_D < 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dalam praktek, kita perlu memperhatikan tegangan balik dioda, yaitu v_D yang negatif pada saat dioda tak-konduksi. Tegangan balik ini tidak diperkenankan melebihi suatu nilai tertentu. Setiap jenis dioda mempunyai ketahanan untuk menahan tegangan balik tertentu dan batas kemampuan arus tertentu yang tidak boleh dilampaui.



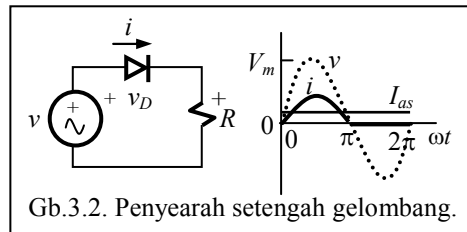
Gb.3.1. Dioda

Penyearah

Penyearah adalah rangkaian listrik yang memproses sinyal bolak-balik (misalnya sinyal sinus) menjadi sinyal searah. Sinyal searah yang dihasilkannya biasanya bukan merupakan sinyal konstan, melainkan sinyal yang berubah terhadap waktu tetapi selalu positif. Jika sinyal yang disearahkan (sinyal masukan) berupa sinyal sinus yang mempunyai nilai rata-rata nol, hasil penyearahan (sinyal keluaran) mempunyai nilai rata-rata tidak nol. Berikut ini kita akan membahas dua jenis penyearah yaitu penyearah setengah gelombang dan penyearah gelombang penuh.

Penyearah Setengah Gelombang

Rangkaian penyearah beserta bentuk gelombang masukan dan keluarannya diperlihatkan pada Gb.3.2. Tegangan sumber berupa sinyal sinus $v = V_m \sin \omega t$. Karena sifat dioda yang hanya meloloskan arus ke satu arah saja maka arus yang melalui resistor R hanya berlangsung setiap setengah periode saja.



Gb.3.2. Penyearah setengah gelombang.

Aplikasi HTK pada rangkaian ini memberikan persamaan rangkaian :

$$-v + v_D + v_R = 0 \quad \text{atau} \quad v_D + iR = v = V_m \sin \omega t \quad (3.2.a)$$

Jika dioda konduksi maka $v_D = 0$ dan $i_D > 0$, jadi

$$i = i_D = \frac{v}{R} = \frac{V_m \sin \omega t}{R} > 0 \quad \text{yang akan terjadi hanya jika } \sin \omega t > 0 \text{ yaitu jika } 0 \leq \omega t \leq \pi. \quad (3.2.b)$$

Hal ini berarti bahwa pada $\pi \geq \omega t \leq 2\pi$, dioda tidak konduksi.

$$\rightarrow v_D = V_m \sin \omega t < 0 \quad (3.2.c)$$

Jadi pada penyearah setengah gelombang, arus hanya mengalir pada periode positif. Besarnya arus searah (harga rata-rata arus) adalah :

$$\begin{aligned} I_{as} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{V_m \sin \omega t}{R_L} d(\omega t) + 0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{V_m}{R_L} [\cos \omega t]_0^{\pi} = \frac{V_m}{\pi R_L} = \frac{I_m}{\pi} \end{aligned} \quad (3.2.d)$$

Persamaan (3.2.d) memperlihatkan bahwa penyearah setengah gelombang menghasilkan arus searah yaitu arus rata-rata yang besarnya kira-kira 30% dari nilai arus maksimum. Arus maksimum sendiri sebanding dengan tegangan maksimum masukan seperti ditunjukkan oleh (3.2.b). Tegangan balik maksimum dioda sama dengan tegangan puncak negatif masukan; hal ini ditunjukkan oleh (3.2.c).

CONTOH 3.14 : Jika pada Gb.3.2. $v = 220 \sin \omega t$ sedangkan $R = 5k\Omega$, berapakah komponen arus searah (arus rata-rata) yang melalui R ?

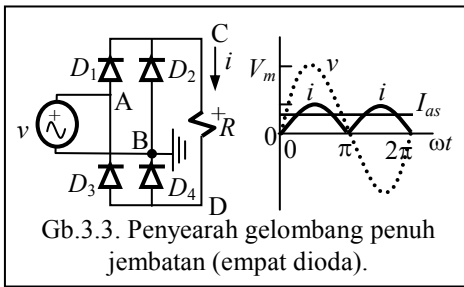
Penyelesaian : Pada waktu dioda konduksi $i_R = \frac{v}{R} = \frac{220 \sin \omega t}{5000} = 110 \sin \omega t \text{ mA}$
 $\Rightarrow I_{as} = I_m / \pi = 110 / \pi = 35 \text{ mA}$

Penyearah Gelombang Penuh

Kalau pada penyearah setengah gelombang arus yang melalui beban berlangsung setiap setengah periode, maka pada penyearah gelombang penuh arus yang mengalir berlangsung pada seluruh periode. Kita akan melihat dua macam rangkaian penyearah gelombang penuh. Yang pertama adalah rangkaian dengan menggunakan empat dioda yang biasa disebut

rangkaian jembatan, dan yang kedua adalah rangkaian yang menggunakan transformator ber-titik-tengah (*center-tapped*).

Penyearah Jembatan. Rangkaian penyearah jembatan serta sinyal hasil pemrosesannya terlihat pada Gb.3.3. Dengan mudah dapat dihitung nilai arus searah



$$I_{as} = \frac{2 V_m}{\pi R_L} = \frac{2 I_m}{\pi} \quad (3.3.a)$$

Bagaimana penyearah ini bekerja dapat kita terangkan sebagai berikut. Kita perhatikan tegangan di simpul-simpul A, B, C dan D.

Kita ambil simpul B sebagai simpul referensi dan misalkan pada $0 \leq \omega t \leq \pi$ $v_A > 0$. Jika D_1 konduksi $v_{D1} = 0$ dan $v_C = v_A > 0$ yang berarti D_2 tidak konduksi. Arus i mengalir dari simpul A ke C melalui beban R ke simpul D. Tegangan di simpul D menjadi $v_D = (v_C - iR) = (v_A - iR) < v_A$ yang berarti D_3 tidak akan konduksi sedangkan D_4 akan konduksi sehingga terbentuk loop tertutup ACDBA.

Hal ini hanya akan terjadi pada selang $0 \leq \omega t \leq \pi$ karena hanya dalam selang inilah $V_m \sin \omega t > 0$. Sementara itu di loop yang mengandung dioda yang tidak konduksi yaitu loop ADCBA (yang mengandung D_2 dan D_3) kita peroleh persamaan

$$-v_A - v_{D3} - iR - v_{D2} = 0 \quad \text{atau} \quad v_{D3} + v_{D2} = -v_A - iR = -2V_m \sin \omega t \quad (3.3.b)$$

Jika dioda-3 dan dioda-2 identik maka masing-masing memperoleh tegangan negatif sebesar $-V_m \sin \omega t$

Dalam setengah periode berikutnya, $\pi \leq \omega t \leq 2\pi$, terjadi situasi yang berbalikan; $v_A < 0$. D_1 dan D_4 tidak konduksi sedangkan D_2 dan D_3 konduksi. Jadi dalam seluruh periode arus i bernilai positif walaupun dioda-dioda hanya konduksi dalam setengah periode. Dengan demikian terjadilah penyearahan dalam seluruh periode, atau dengan kata lain kita memperoleh penyearah gelombang penuh. Tegangan balik maksimum dioda yang diderita oleh dioda dapat dilihat dari persamaan (3.3.b). Jika semua dioda identik maka tegangan balik maksimum itu sama dengan V_m .

CONTOH 3.15 : Jika pada Gb.3.3. $v = 220 \sin \omega t$ sedangkan $R = 5k\Omega$, berapakah komponen arus searah (arus rata-rata) yang melalui R ?

Penyelesaian :

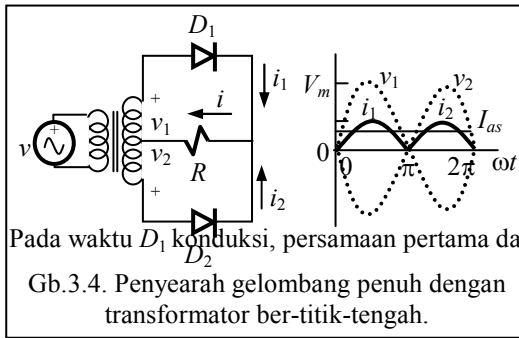
Arus yang melalui R setiap setengah periode tegangan masukan adalah

$$i_R = \frac{v}{R} = \frac{220 \sin \omega t}{5000} = 110 \sin \omega t \text{ mA}$$

Nilai rata-ratanya adalah : $I_{as} = 2I_m / \pi = 70 \text{ mA}$

Penyearah Dengan Transformator ber-titik-tengah. Diagram rangkaian penyearah ini terlihat pada Gb.3.4. Rangkaian ini menggunakan transformator dengan belitan sekunder terbagi dua sama besar (belitan sekunder mempunyai titik tengah) sehingga dapat memberikan dua macam tegangan sekunder sama besar. Perbandingan lilitan transformator untuk keperluan ini disesuaikan dengan besarnya tegangan keluaran yang diinginkan.

Aplikasi HTK untuk kedua loop di sekunder transformator memberikan



Pada waktu D_1 konduksi, persamaan pertama dari (3.4.a) memberikan

Gb.3.4. Penyearah gelombang penuh dengan transformator ber-titik-tengah.

$$\left. \begin{aligned} v_1 - v_{D1} - iR &= 0 \\ \rightarrow i &= \frac{v_1 - v_{D1}}{R} = \frac{V_{1m} \sin \omega t - v_{D1}}{R} \\ v_2 - v_{D2} - iR &= 0 \\ \rightarrow i &= \frac{v_2 - v_{D2}}{R} = \frac{-V_{1m} \sin \omega t - v_{D2}}{R} \end{aligned} \right\} (3.4.a)$$

$$i = \frac{V_{1m} \sin \omega t}{R} \quad (3.4.b)$$

yang hanya akan bernilai positif pada selang $0 \leq \omega t \leq \pi$. Dalam selang ini persamaan kedua dari (3.4.a) menjadi

$$\frac{V_{1m} \sin \omega t}{R} = \frac{-V_{1m} \sin \omega t - v_{D2}}{R} \rightarrow v_{D2} = -2V_{1m} \sin \omega t \quad (3.4.c)$$

Jadi pada saat D_1 konduksi, D_2 tidak konduksi karena $v_{D2} < 0$.

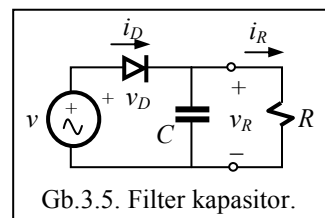
Pada setengah perioda berikutnya, D_2 konduksi sedangkan D_1 tidak konduksi. Arus yang mengalir pada R akan tetap sama seperti yang diberikan oleh (3.4.b). Tegangan balik maksimum yang diderita oleh dioda adalah $-2V_{1m}$ seperti terlihat pada persamaan (3.4.c).

Filter (Tapis)

Tujuan dari penyearahan adalah memperoleh arus searah. Dalam penyearah yang kita bahas di atas, kita tidak memperoleh arus searah murni melainkan arus searah yang berubah secara periodik; jadi arus searah ini mengandung komponen arus bolak-balik. Variasi tegangan ini disebut riak tegangan. Riak tegangan pada penyearah gelombang penuh lebih kecil dari riak tegangan pada penyearah setengah gelombang. Untuk lebih memperkecil riak tegangan ini digunakan filter yang bertugas untuk meloloskan komponen searah dan mencegah komponen bolak-balik.

Filter Kapasitor. Dengan menambahkan kapasitor paralel dengan beban R pada rangkaian penyearah setengah gelombang, maka riak tegangan akan sangat ditekan. Sebagaimana kita ketahui, kapasitor dapat menyimpan energi. Pada saat tegangan sumber naik, kapasitor akan terisi sampai mencapai tegangan maksimum. Pada saat tegangan sumber menurun, kapasitor akan melepaskan energi yang disimpannya melalui beban (karena pada saat ini dioda tidak konduksi). Dengan demikian beban akan tetap memperoleh aliran energi walaupun dioda tidak konduksi. Selanjutnya bila dioda konduksi lagi, kapasitor akan terisi dan energi yang tersimpan ini akan dilepaskan lagi pada waktu dioda tidak konduksi; dan demikian seterusnya. Filter semacam ini tentu saja dapat pula digunakan pada penyearah gelombang penuh.

Gb.3.5. di samping ini memperlihatkan rangkaian penyearah setengah gelombang dengan filter kapasitor. Jika $v = V_m \sin \omega t$, bagaimanakah bentuk tegangan keluaran pada beban R ?



Gb.3.5. Filter kapasitor.

Pada waktu dioda konduksi, kapasitor terisi sampai tegangan maksimum. Pada waktu v menurun tegangan sumber menjadi lebih kecil dari tegangan kapasitor dan dioda tidak konduksi, $v_C = v_R$. Kapasitor melepaskan muatannya melalui R dan selama pelepasan muatan ini, kita mempunyai loop tertutup RC seri. Untuk loop ini berlaku

$$v_R = v_C = Ri_R = R(-i_C) = -RC \frac{dv_C}{dt} \rightarrow RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

Persamaan diferensial ini memberikan

$$\frac{dv_C}{v_C} = -\frac{1}{RC} dt \rightarrow \ln v_C = -\frac{1}{RC} t + K \Rightarrow v_C = K_1 e^{-(1/RC)t}$$

Nilai K_1 ditentukan oleh nilai awal tegangan kapasitor yaitu pada saat ia mulai melepaskan energinya yang sama besar dengan tegangan maksimum yang dicapai sesaat sebelum dioda berhenti konduksi, yaitu V_m . Jadi $v_C = V_m e^{-(1/RC)t}$.

Dioda akan kembali konduksi manakala $v > v_C$.

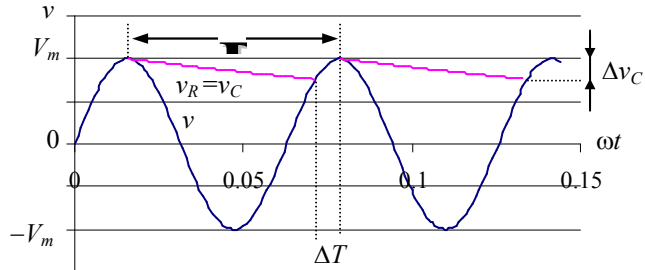
Maka,

pada waktu dioda konduksi :

$$v_R = v_C = V_m \sin \omega t \text{ V}$$

pada waktu dioda tak konduksi :

$$v_R = v_C = V_m e^{-(1/RC)t} \text{ V}$$



Dengan menambahkan kapasitor, riak tegangan dapat diperkecil. Kita dapat melihat bahwa tegangan kapasitor menurun sebesar Δv_C . Penurunan tegangan ini menunjukkan adanya pelepasan muatan sebesar $C \Delta v_C$ dan ini sama dengan jumlah muatan yang ditransfer melalui R dalam selang waktu $(T - \Delta T)$, yaitu sebesar $I_{as}(T - \Delta T)$. Dengan relasi ini kita dapat memperkirakan besarnya C yang diperlukan untuk membatasi tingkat riak tegangan (membatasi Δv_C).

$$\Delta q_C = C \Delta v_C = I_{as}(T - \Delta T) \approx I_{as}T \Rightarrow C = \frac{I_{as}T}{\Delta v_C} = \frac{I_{as}}{f \Delta v_C} = \frac{V_{as}}{R f \Delta v_C}$$

CONTOH 3.16 : Pada penyearah dengan filter Gb.3.5. , $R = 5 \text{ k}\Omega$, dan diinginkan tegangan dan arus di R adalah $I_{as} = 10 \text{ mA}$ dan $V_{as} = 50 \text{ V}$, sedangkan riak tegangan tak lebih dari $1\% \times V_{as}$, berapakah nilai C dan berapa tegangan masukan v jika frekuensinya 50 Hz ?

Penyelesaian :

$$\Delta v_C = 0,01 V_{as} \rightarrow \frac{V_{as}}{\Delta v_C} = 0,1 \rightarrow C = \frac{V_{as}}{R f \Delta v_C} = \frac{1}{5000 \times 50} \times \frac{1}{0,01} = 400 \text{ }\mu\text{F}$$

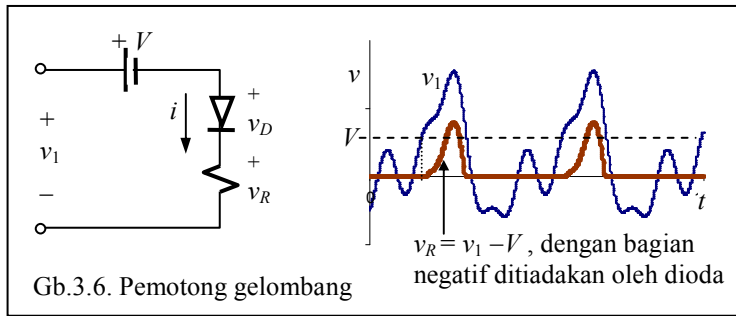
$$V_{as} = 50 \text{ V} \rightarrow V_m \approx 50 \text{ V} \rightarrow v = 50 \sin(100\pi t) \text{ V}$$

(Jika misalnya sumber yang tersedia 220 V , 50 Hz , maka kita memerlukan transformator penurun tegangan).

Pemotong Gelombang

Rangkaian pemotong gelombang digunakan untuk menghilangkan bagian gelombang sinyal yang tidak diinginkan. Pada penyearah setengah gelombang kita lihat bahwa dioda meniadakan arus negatif ; dengan kata lain ia memotong bagian negatif dari gelombang masukan. Jika sebuah sumber tegangan konstan V dihubungkan seri dengan dioda dan dengan polaritas yang berlawanan, seperti terlihat pada Gb.3.6., maka arus hanya akan mengalir jika tegangan masukan v_1 lebih besar dari tegangan konstan ini. Dengan cara ini, tegangan pada resistor R hanya akan ada jika tegangan v_1 lebih besar dari V . Aplikasi HTK memberikan persamaan rangkaian ini, yaitu :

$$-v_1 + V + v_D + v_R = 0 \rightarrow i = \frac{v_1 - V - v_D}{R}$$



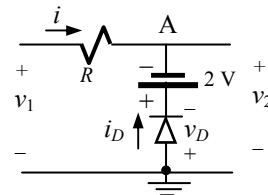
Jika dioda konduksi ($v_D = 0$), haruslah $i = i_D > 0$,

$$\rightarrow i = i_D = \frac{v_1 - V}{R} > 0 \text{ berarti } v_1 > V \rightarrow v_R = iR = v_1 - V.$$

$$\rightarrow \text{Jika } v_1 < V \rightarrow i = i_D < 0 \rightarrow \text{dioda tidak konduksi.} \rightarrow i = 0 \rightarrow v_R = 0.$$

Jadi rangkaian ini meniadakan bagian tegangan masukan yang lebih kecil dari V , atau dengan kata lain ia memotong gelombang masukan v_1 . Tegangan v_R akan muncul jika $v_1 > V$ sedangkan bagian lain dari v_1 akan dihilangkan seperti terlihat pada Gb.3.6.

CONTOH 3.17 : Pada rangkaian di samping ini, $v_1 = 8\sin\omega t$, gambarkanlah v_1 dan v_2 dan gambarkan pula karakteristik transfer, yaitu v_2 sebagai fungsi dari v_1 .



Penyelesaian :

Aplikasi HTK pada rangkaian ini memberikan

$$-v_1 + iR - 2 - v_D = 0 \rightarrow i = \frac{v_1 + 2 + v_D}{R}$$

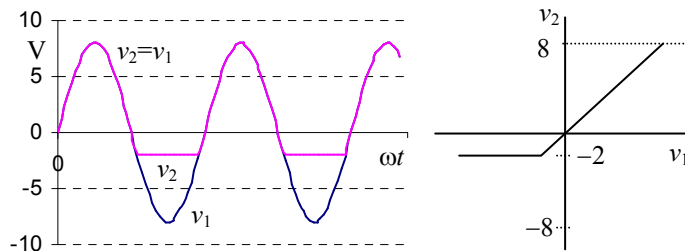
Jika dioda konduksi $v_D = 0 \rightarrow V_A = v_2 = -2 \text{ V}$

$$i_D = -i = -\frac{v_1 + 2}{R} > 0 \rightarrow v_1 < -2 \text{ V}$$

Jadi dioda konduksi jika $v_1 < -2 \text{ V}$. Pada waktu itu tegangan $v_2 = -2 \text{ V}$.

Karena dioda konduksi jika $v_1 < -2 \text{ V}$, maka jika $v_1 > -2 \text{ V}$ dioda tidak akan konduksi dan pada waktu itu $i = 0$, dan $v_2 = v_1$.

Gambar v_1 dan v_2 serta karakteristik transfer adalah seperti di samping ini.

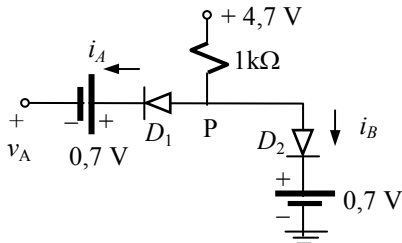


Dalam kenyataan, dioda semikonduktor memerlukan suatu *pra-tegangan* agar terjadi konduksi arus. Besarnya pra-tegangan ini 0,3 V untuk germanium dan 0,7 V untuk silikon. Oleh karena itu model rangkaian dioda akan memberikan hasil yang lebih memuaskan jika dinyatakan sebagai kombinasi seri dari sebuah dioda ideal dan sumber tegangan berpolaritas berlawanan dengan polaritas dioda ideal tersebut. Berikut ini adalah sebuah contoh rangkaian dengan dioda silikon.

CONTOH 3.18 : Rangkaian di samping ini merupakan rangkaian pensaklaran yang dibangun dari dua dioda silikon. Tentukan i_A dan i_B jika $v_A = 1$ V.

Penyelesaian :

Model rangkaian dioda silikon ini adalah sebagai berikut.



Untuk simpul P berlaku

$$i_A + (v_P - 4,7)/1 + i_B = 0$$

$$v_P = v_A + 0,7 + v_{D1} = 0,7 + v_{D2}$$

Jika D_1 dan D_2 konduksi $v_{D1} = v_{D2} = 0$

$$v_P = v_A + 0,7 = 0,7 \rightarrow v_A = 0$$

\Rightarrow tidak sesuai dengan yang diketahui.

Situasi ini tidak terjadi.

Jika D_1 konduksi dan D_2 tak konduksi,

$$i_B = 0 \rightarrow v_P = v_A + 0,7 = 1,7$$

$$\Rightarrow v_P > 0,7 \rightarrow D_2 \text{ harus konduksi}$$

Situasi ini tidak terjadi.

Jika D_1 tak konduksi dan D_2 konduksi,

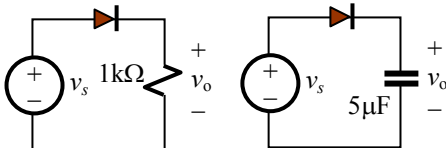
$$i_A = 0 \rightarrow v_P = 0,7 < (v_A + 0,7) \rightarrow D_1 \text{ tak konduksi}$$

$$\Rightarrow i_B = (4,7 - v_P)/1 = (4,7 - 0,7)/1 = 4 \text{ mA}$$

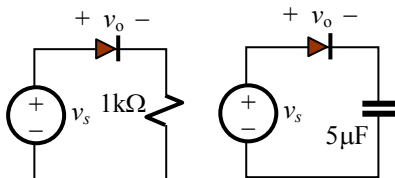
Situasi inilah yang terjadi.

SOAL-SOAL : RANGKAIAN DENGAN DIODA

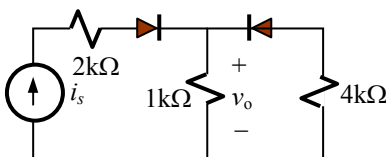
1. Carilah tegangan v_o rangkaian berikut ini, jika $v_s = 10\cos 10t$ V, dioda ideal.



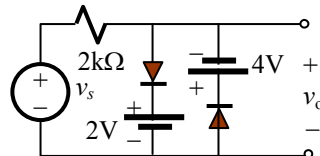
2. Carilah tegangan v_o rangkaian berikut ini, jika $v_s = 10\cos 10t$ V, dioda ideal.



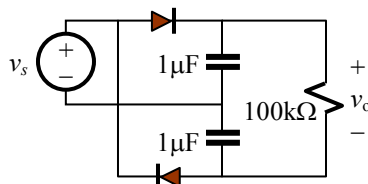
3. Carilah tegangan v_o rangkaian berikut ini, jika $i_s = 0,1\cos 10t$ A, dioda ideal.



4. Carilah tegangan v_o rangkaian berikut ini, jika $v_s = 10\cos 10t$ V, dioda ideal.



5. Carilah tegangan v_o rangkaian berikut ini, jika $v_s = 380\cos 314t$ V, dioda ideal.



6. Sebuah dioda mempunyai resistansi balik $200 \text{ k}\Omega$ dan karakteristik $i-v$ linier $I = 0,005V$, digunakan sebagai penye-arah setengah gelombang untuk mencatu resistor $10 \text{ k}\Omega$. Tentukan tegangan pada resistor jika tegangan masukan adalah $v_s = 10\cos 300t$ V.

7. Sebuah penyearah setengah gelombang digunakan untuk mengisi baterai. Berapa jam-kah diperlukan waktu untuk mengisi muatan 40 Ah jika arus efektif (rms) pengisian adalah 10 A.
8. Sebuah penyearah gelombang penuh digunakan untuk mengisi baterai. Berapa jam-kah diperlukan waktu untuk mengisi muatan 50 Ah jika arus efektif (rms) pengisian adalah 10A.

9. Pada sebuah resistor 10 kΩ diperlukan tegangan searah agar mengalir arus 20 mA. Tegangan searah diberikan dari penyearah setengah gelombang yang masukannya adalah tegangan bolak-balik 220 V, 50 Hz. Tentukan kapasitor filter yang harus diparalelkan dengan resistor agar riak gelombang tegangan tidak lebih dari 10%.

3.3. Rangkaian Dengan OP AMP

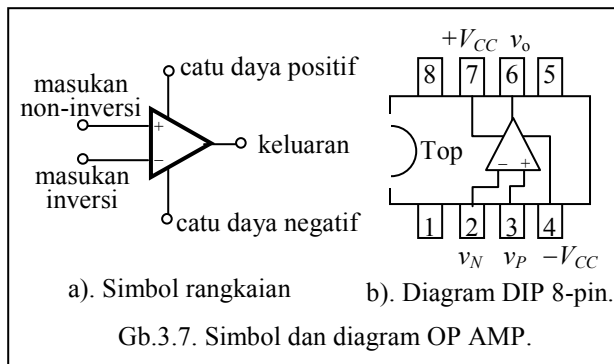
Tujuan :

- Memahami karakteristik OP AMP ideal.
- Memahami rangkaian-rangkaian dasar OP AMP.
- Mampu melakukan analisis rangkaian-rangkaian OP AMP dengan resistor.
- Mampu melakukan analisis rangkaian-rangkaian OP AMP dengan elemen dinamis.
- Memahami hubungan-hubungan bertingkat rangkaian OP AMP.

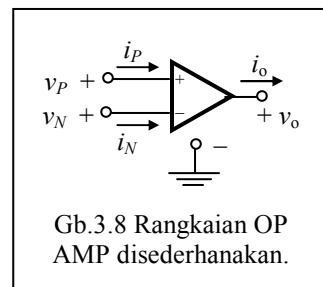
Penguat Operasional (OP AMP)

OP AMP adalah suatu piranti berbentuk rangkaian terintegrasi yang cukup rumit, terdiri dari transistor, resistor, dioda, kapasitor, yang semuanya terangkai dalam satu chip. Walaupun rangkaiannya rumit, OP AMP dapat dimodelkan dengan suatu karakteristik $i-v$ yang agak sederhana. Kita tidak akan membahas apa yang sebenarnya terjadi dalam piranti ini, tetapi akan memandang OP AMP sebagai elemen rangkaian dengan hubungan-hubungan arus dan tegangan tertentu.

Notasi. OP AMP merupakan piranti lima terminal dengan simbol seperti pada Gb.3.7.



$+V_{CC}$: catu daya positif
 $-V_{CC}$: catu daya negatif



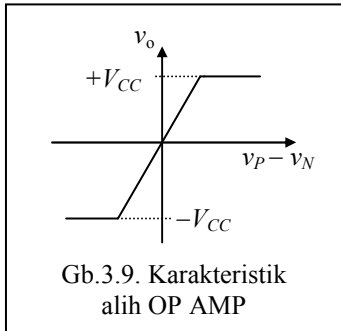
Tegangan catu menentukan batas atas dan batas bawah tegangan keluaran. Walaupun sesungguhnya penguat ini beroperasi karena ada tegangan catu, namun terminal tegangan catu ini sering tidak digambarkan sehingga kita mempunyai diagram yang disederhanakan, seperti terlihat pada Gb.3.8. Perhatikan notasi serta referensi arus dan tegangannya. Notasi-notasi yang kita gunakan adalah :

- | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|
| v_P = tegangan masukan non-inversi; | i_P = arus masukan non-inversi; |
| v_N = tegangan masukan inversi; | i_N = arus masukan inversi; |
| v_o = tegangan keluaran; | i_o = arus keluaran; |

Tegangan dihitung terhadap titik referensi umum (bertanda “-”).

Perlu kita perhatikan bahwa dalam diagram rangkaian yang disederhanakan seperti pada pada Gb.3.8., banyak bagian rangkaian yang tidak digambarkan. Oleh karena itu kita tidak boleh sembarangan mengaplikasikan HAK untuk rangkaian tersebut; sebagai contoh kita harus menyadari bahwa $i_o \neq i_P + i_N$.

Karakteristik Alih. Karakteristik alih OP AMP memberikan hubungan antara v_P , v_N , dan v_o , yang diperlihatkan pada Gb.3.9. Karakteristik ini terbagi dalam tiga daerah operasi, yaitu daerah jenuh negatif, daerah linier, dan daerah jenuh positif.



Dalam pembahasan rangkaian dengan OP AMP di sini, kita hanya akan meninjau daerah operasi yang linier saja. Dalam daerah ini terdapat hubungan linier antara v_o dan $(v_P - v_N)$, yang dapat dinyatakan dengan

$$v_o = \mu(v_P - v_N) \quad (3.6)$$

Konstanta μ disebut *gain loop terbuka (open loop gain)*, yang dalam Gb.3.9. adalah kemiringan kurva di daerah linier.

Tabel 3.1.

Parameter	Rentang nilai	Nilai ideal
μ	$10^5 \div 10^8$	∞
R_i	$10^6 \div 10^{13} \Omega$	$\infty \Omega$
R_o	$10 \div 100 \Omega$	0Ω
$\pm V_{CC}$	$\pm 12 \div \pm 24 \text{ V}$	

Nilai μ sangat besar, biasanya lebih dari 10^5 . Selama nilai netto $(v_P - v_N)$ cukup kecil, v_o akan proporsional terhadap masukan. Akan tetapi jika $\mu(v_P - v_N) > V_{CC}$ OP AMP akan jenuh; tegangan keluaran tidak akan melebihi tegangan catu $\pm V_{CC}$.

Model Ideal OP AMP. OP AMP yang beroperasi di daerah linier dapat dimodelkan sebagai rangkaian sumber tak-bebas seperti pada Gb.3.10. Model ini melibatkan resistansi masukan R_i , resistansi keluaran R_o , dan VCVS dengan *gain* μ . Rentang nilai parameter-parameter ini diberikan dalam Tabel 3.1.

Dengan bekerja di daerah linier, tegangan keluaran v_o tidak akan melebihi $\pm V_{CC}$.

$$|v_o| \leq |V_{CC}|$$

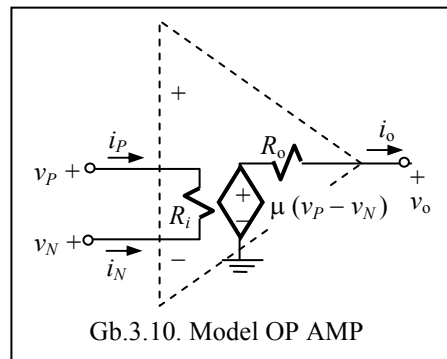
atau

$$|\mu(v_P - v_N)| \leq |V_{CC}| \Rightarrow |(v_P - v_N)| \leq \left| \frac{V_{CC}}{\mu} \right|$$

Karena μ sangat besar, yang untuk OP AMP ideal dapat dianggap $\mu = \infty$, sedangkan V_{CC} tidak lebih dari 24 Volt, maka dapat dikatakan bahwa $(V_{CC} / \mu) = 0$ sehingga kita dapat menganggap bahwa $v_P = v_N$. Sementara itu untuk OP AMP ideal $R_i = \infty$ sehingga arus masuk di kedua terminal masukan dapat dianggap nol. Jadi untuk OP AMP ideal kita mendapatkan :

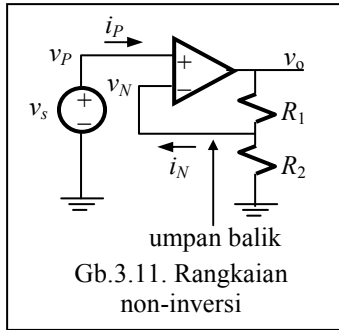
$$\begin{aligned} v_P &= v_N \\ i_P &= i_N = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Karakteristik inilah yang akan kita pergunakan dalam analisis rangkaian dengan OP AMP.



Penguat Non-Inversi

Perhatikan diagram rangkaian pada Gb.3.11. Pada terminal masukan non-inversi diberikan tegangan masukan v_s , sedang terminal masukan inversi dihubungkan ke rangkaian keluaran. Hubungan keluaran dengan masukan ini kita sebut *umpan balik (feed back)* dan rangkaian seperti ini kita sebut rangkaian dengan umpan balik. Dengan adanya umpan balik terjadi interaksi antara masukan dan keluaran.



Gb.3.11. Rangkaian non-inversi

Model ideal OP AMP mengharuskan $i_p = i_N = 0$; oleh karena itu tegangan v_N dapat dicari dengan kaidah pembagi tegangan, yaitu

$$v_N = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_o \tag{3.8}$$

Pada terminal masukan non-inversi $v_p = v_s$. Karena model ideal OP AMP juga mengharuskan $v_p = v_N$ maka

$$v_p = v_N = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_o = v_s$$

sehingga

$$v_o = \frac{R_1 + R_2}{R_2} v_s \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) menyatakan hubungan antara keluaran dan masukan dengan konstanta proporsionalitas sebesar

$$K = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \tag{3.10}$$

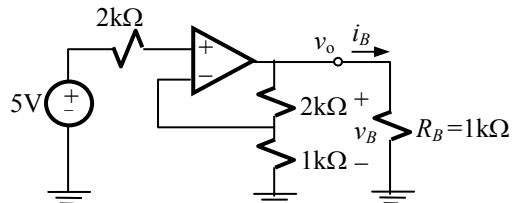
Konstanta K ini kita sebut *gain loop tertutup* karena gain ini diperoleh pada rangkaian dengan umpan balik. Dengan demikian kita mempunyai dua macam gain, yaitu gain loop terbuka (μ) dan gain loop tertutup (K). Gain loop terbuka sangat besar nilainya namun ketidak pastiannya juga besar. Gain loop tertutup lebih kecil namun nilainya dapat kita kendalikan dengan lebih cermat; ketelitiannya tergantung dari kualitas resistor yang kita gunakan. Jadi dengan membuat umpan balik, kita memperoleh gain yang lebih kecil tetapi dengan ketelitian lebih baik.

Dalam menghitung K di atas, kita menggunakan model ideal dengan μ yang tak hingga besarnya. Dalam kenyataan, μ mempunyai nilai terhingga yang besar. Berapa besar pengaruh nilai μ yang terhingga ini terhadap nilai K dapat kita analisis dengan menggunakan rangkaian model sumber tak-bebas seperti pada Gb.3.10. yang dilengkapi dengan umpan balik seperti pada Gb.3.11. Analisisnya tidak kita lakukan di sini namun hasil yang akan diperoleh adalah berbentuk

$$K^* = \frac{K}{1 + (K/\mu)}$$

dengan K^* adalah gain loop tertutup jika μ mempunyai nilai yang terhingga. Model ideal akan memberikan hasil yang baik selama $K \ll \mu$.

CONTOH 3.19 : Pada rangkaian penguat non-inversi di samping ini tentukan tegangan, arus dan daya pada beban R_B . Hitung pula resistansi masukan.



Penyelesaian :

Dengan OP AMP ideal, $i_N = i_p = 0$, $v_p = v_N$, tegangan di kedua terminal masukan dengan mudah dapat dicari

$$\left. \begin{aligned} i_N = 0 = \frac{5 - v_N}{2000} \rightarrow v_N = 5 \text{ V} \\ v_p = \frac{1}{1+2} v_o = \frac{v_o}{3} \end{aligned} \right\} \frac{1}{3} v_o = 5 \text{ V} \rightarrow v_o = 15 \text{ V}$$

Jadi : $v_B = v_o = 15 \text{ V}$; $i_B = \frac{v_B}{R_B} = 15 \text{ mA}$; $p_B = v_B i_B = 225 \text{ mW}$.

Resistansi masukan : $R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{5}{i_{in}} = \infty$ karena $i_{in} = i_P = 0$

Pemahaman :

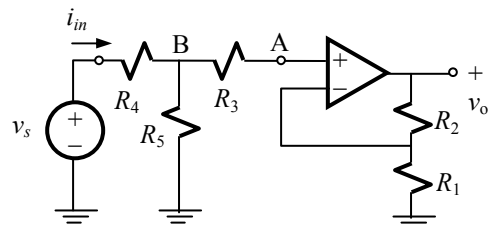
Arus dari sumber 5 V adalah nol. Sumber ini tidak terbebani. Daya yang diserap oleh beban berasal dari catu daya pada OP AMP, yang tidak tergambarkan dalam rangkaian ini. OP AMP mempunyai batas maksimum arus yang dapat ia berikan. Jika kita misalkan arus maksimum yang dapat diberikan oleh OP AMP dalam rangkaian di atas adalah $\pm 10 \text{ mA}$ maka arus ini harus dibagi antara beban dan rangkaian umpan balik. Karena $i_N = 0$,

maka arus yang melalui rangkaian umpan balik adalah : $i_f = \frac{v_o}{1+2} = \frac{15}{3} = 5 \text{ mA}$

Arus yang melalui beban maksimum $i_{maks} = 10 - 5 = 5 \text{ mA}$. Agar tidak terjadi pembebanan berlebihan, resistansi beban paling sedikit adalah : $R_{B \text{ min}} = \frac{v_o}{5} = 3 \text{ k}\Omega$

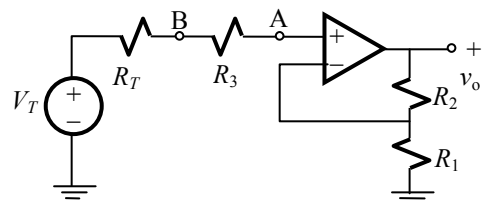
Daya maksimum yang bisa diberikan ke beban adalah : $p_{B \text{ maks}} = v_o i_{maks} = 15 \times 5 = 45 \text{ mW}$

CONTOH 3.20 : Carilah hubungan keluaran-masukan dari penguat non inversi di samping ini, dan cari pula resistansi masukannya.



Penyelesaian :

Kita dapat memandang rangkaian ini sebagai terdiri dari seksi sumber di sebelah kiri simpul B dan seksi beban di sebelah kanan simpul B. Jika seksi sumber kita ganti dengan rangkaian ekuivalen Thevenin, maka rangkaian akan menjadi seperti di samping kiri ini, dengan



$$V_T = \frac{R_5}{R_4 + R_5} v_s ; R_T = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

Dalam rangkaian ini, dengan OP AMP ideal, maka

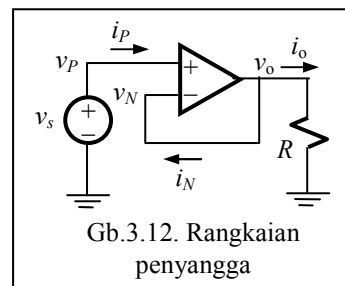
$$\left. \begin{aligned} v_P = V_T = \frac{R_5}{R_4 + R_5} v_s \\ v_N = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rightarrow \frac{R_5}{R_4 + R_5} v_s &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \\ \rightarrow \frac{v_o}{v_s} &= \frac{R_5}{R_4 + R_5} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1} \end{aligned}$$

Resistansi masukan adalah resistansi yang dilihat oleh sumber v_s , yaitu $R_{in} = \frac{v_s}{i_{in}}$

Karena $i_P = 0$, maka $i_{in} = v_s / (R_4 + R_5)$ sehingga $R_{in} = \frac{v_s}{i_{in}} = R_4 + R_5$

Rangkaian Penyangga (buffer, voltage follower)

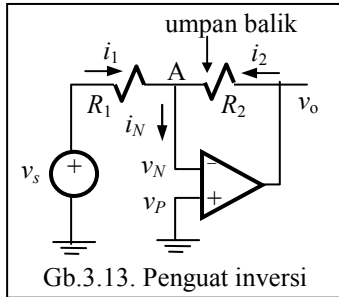
Rangkaian penyangga digunakan sebagai antar-muka untuk “meng-isolasi” beban terhadap sumber. Rangkaian umpan balik merupakan hubungan langsung dari terminal keluaran ke terminal masukan inversi (Gb.3.12). Dengan hubungan ini maka $v_N = v_o$. Sinyal masukan dihubungkan ke terminal non-inversi yang akan memaksa $v_P = v_s$. Model ideal mengharuskan $v_P = v_N$, sehingga $v_o = v_s$. Jadi dalam rangkaian ini gain loop tertutup $K = 1$. Besarnya tegangan keluaran mengikuti tegangan masukan.



Gb.3.12. Rangkaian penyangga

Penguat Inversi

Diagram rangkaian penguat inversi terlihat pada Gb.3.13. Sinyal masukan dan umpan balik, keduanya dihubungkan ke terminal masukan inversi. Terminal non-inversi dihubungkan ke titik pentanahan, sehingga $v_P = 0$. Persamaan tegangan simpul untuk simpul A adalah



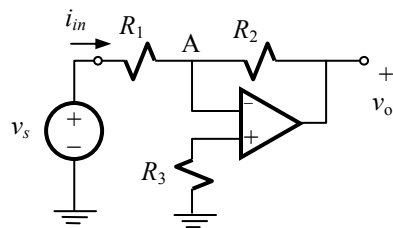
$$v_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + i_N - \frac{v_s}{R_1} - \frac{v_o}{R_2} = 0 \quad (3.11)$$

Oleh karena $v_N = v_P = 0$ dan $i_N = i_P = 0$, maka

$$\frac{v_s}{R_1} + \frac{v_o}{R_2} = 0 \quad \text{sehingga} \quad v_o = - \left(\frac{R_2}{R_1} \right) v_s \quad (3.12)$$

Kita lihat bahwa *gain* loop tertutup adalah $K = - (R_2 / R_1)$. Tanda negatif menunjukkan terjadinya pembalikan polaritas sinyal. Oleh karena itu rangkaian ini disebut penguat inversi.

CONTOH 3.21 : Di samping ini adalah salah satu variasi rangkaian penguat inversi. Tentukanlah hubungan keluaran-masukan dan resistansi masukan.



Penyelesaian :

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A (terminal inversi) :

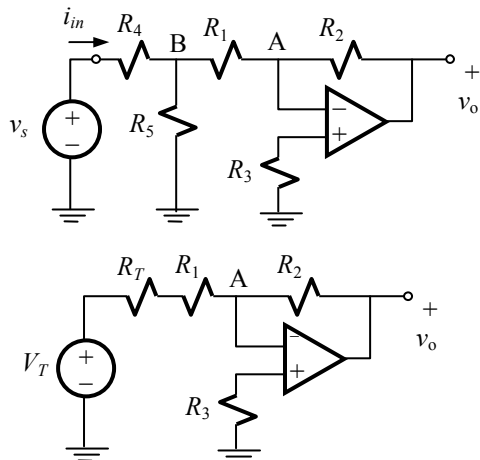
$$v_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + i_N - \frac{v_s}{R_1} - \frac{v_o}{R_2} = 0$$

Untuk OP AMP ideal $i_N = i_P = 0$, dan $v_N = v_P = 0$ maka $\frac{-v_s}{R_1} + \frac{-v_o}{R_2} = 0 \rightarrow \frac{v_o}{v_s} = \frac{-R_2}{R_1}$

Karena $v_A = v_P = 0$ maka $i_{in} = v_s / R_1$. Resistansi masukan adalah

$$R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{v_s}{v_s / R_1} = R_1$$

CONTOH 3.22 : Pada variasi rangkaian penguat inversi di samping ini, tentukanlah hubungan keluaran-masukan dan resistansi masukan.



Penyelesaian :

Kita pandang rangkaian ini terdiri dari seksi sumber, yaitu rangkaian sebelah kiri dari simpul B, dan seksi beban yaitu rangkaian di sebelah kanan simpul B (rangkaian penguat inversi). Jika seksi sumber kita ganti dengan rangkaian ekuivalen Thévenin-nya, maka rangkain menjadi seperti di samping kanan ini dengan

$$V_T = \frac{R_5}{R_4 + R_5} v_s \quad ; \quad R_T = R_4 \parallel R_5$$

Dengan cara seperti pada contoh sebelumnya, kita akan memperoleh

$$\frac{v_o}{V_T} = - \frac{R_2}{R_1 + R_T} = - \frac{R_2}{R_1 + R_4 \parallel R_5}$$

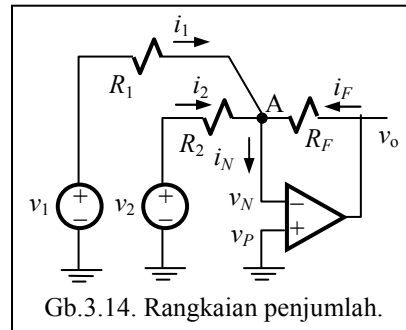
Maka :
$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{v_o}{V_T} \times \frac{V_T}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1 + R_4 \parallel R_5} \times \frac{R_5}{R_4 + R_5} = -\frac{R_2 R_5}{(R_1 R_5 + R_1 R_4 + R_4 R_5)}$$

Resistansi masukan adalah $R_{in} = v_s / i_{in}$. Karena $v_A = v_N = v_P = 0$, maka $i_{in} = v_s / (R_4 + R_1 \parallel R_5)$, sehingga

$$R_{in} = \frac{v_s}{i_{in}} = R_4 + R_1 \parallel R_5 = \frac{R_4(R_1 + R_5) + R_1 R_5}{R_1 + R_5}$$

Penjumlah

Diagram rangkaian penjumlah atau *adder* terlihat pada Gb.3.14. Rangkaian ini mempunyai dua masukan dan keduanya dihubungkan ke terminal masukan yang sama, yang disebut titik penjumlah. Terminal masukan non-inversi ditanahkan, sehingga $v_P = 0 = v_N$ dan $i_N = 0$ (model ideal).



Gb.3.14. Rangkaian penjumlah.

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A adalah

$$v_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_F} \right) + i_N - \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_o}{R_F} = 0 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_o}{R_F} = 0 \quad (3.13)$$

Dari (3.13) dapat diperoleh hubungan antara keluaran dan masukan yaitu

$$v_o = -R_F \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) = -\frac{R_F}{R_1} v_1 - \frac{R_F}{R_2} v_2 = K_1 v_1 + K_2 v_2 \quad (3.14)$$

Jadi, tegangan keluaran merupakan jumlah dari tegangan masukan yang masing-masing dikalikan dengan gain yang berkaitan. Jumlah masukan sudah barang tentu tidak terbatas hanya dua. Jika terdapat N masukan dengan tegangan masukan masing-masing v_n dan resistansi R_n maka

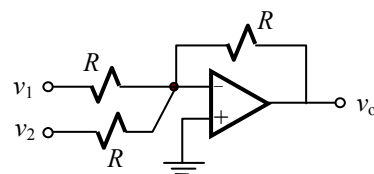
$$v_o = \sum_n K_n v_n \quad \text{dengan} \quad K_n = -\frac{R_F}{R_n} \quad (3.15)$$

CONTOH 3.23 : Carilah tegangan keluaran dari rangkaian di samping ini.

Penyelesaian :

$$v_o = -\frac{R}{R} v_1 - \frac{R}{R} v_2 = -(v_1 + v_2)$$

Tegangan keluaran merupakan inversi dari jumlah tegangan masukan.



CONTOH 3.24 : Carilah tegangan keluaran dari rangkaian di samping ini.

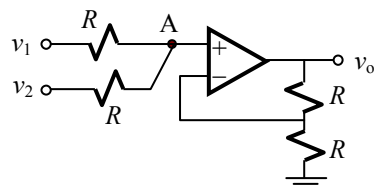
Penyelesaian :

Persamaan tegangan untuk simpul A adalah

$$v_P \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) + i_P - \frac{v_1}{R} - \frac{v_2}{R} = 0 \rightarrow v_P = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Karena $v_N = v_o/2$, maka : $\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_o}{2} \rightarrow v_o = v_1 + v_2$

Tegangan keluaran merupakan jumlah tegangan masukan.



Pemahaman :

Masing-masing sumber pada rangkaian ini mengeluarkan arus :

$$i_1 = \frac{v_1 - v_P}{R} = \frac{v_1 - v_2}{2R} ; i_2 = \frac{v_2 - v_P}{R} = \frac{v_2 - v_1}{2R}$$

Sumber-sumber terbebani secara tidak merata (tidak sama). Pembebanan sumber tidak terjadi apabila $v_1 = v_2$. Hal ini berbeda dengan rangkaian pada contoh 3.7.

Pada contoh 3.23. masing-masing sumber mengeluarkan arus

$$i_1 = \frac{v_1 - v_N}{R} = \frac{v_1}{R} ; i_2 = \frac{v_2 - v_N}{R} = \frac{v_2}{R}$$

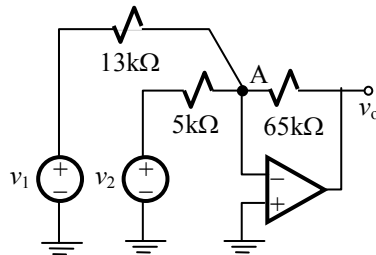
Jadi pada rangkaian penjumlah inversi, sumber akan tetap terbebani walaupun $v_1 = v_2$.

CONTOH 3.25 : Carilah tegangan keluaran v_o dari rangkaian penjumlah di samping ini.

Penyelesaian :

Rangkaian penjumlah ini mempunyai keluaran

$$v_o = -\frac{65}{13} v_1 - \frac{65}{5} v_2 = -(5v_1 + 13v_2)$$



Pemahaman :

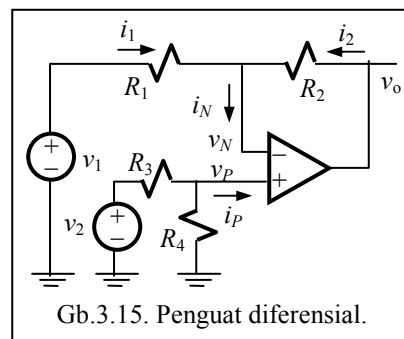
Apabila kita diminta untuk merancang penjumlah dengan formulasi v_o seperti di atas, kita tidak akan memperoleh nilai resistor seperti apa yang tertera dalam diagram di atas. Dalam kenyataan nilai-nilai resistansi pada rangkaian ini tidak ada di pasaran. Oleh karena itu kita harus melakukan modifikasi dengan memilih nilai resistor yang ada di pasaran yang mendekati nilai-nilai ini. Misalkan resistor 65 kΩ kita ganti dengan 56 kΩ. Penggantian ini mengharuskan dua resistor yang lain bernilai masing-masing 11.2 kΩ dan 4.31 kΩ. Dengan toleransi $\pm 5\%$ kita dapat memilih resistor 11 kΩ dan 4.3 kΩ. Pemilihan nilai-nilai resistor yang ada di pasaran ini akan memberikan formulasi tegangan keluaran

$$v_o = -\frac{56}{11} v_1 - \frac{56}{4.3} v_2 = -(5,09v_1 + 13,02v_2)$$

Dalam perancangan, kita harus melakukan kompromi seperti ini. Tegangan keluaran yang kita peroleh akan mempunyai kesalahan jika dibandingkan terhadap formulasi ideal yang semula diinginkan. Namun dengan pemilihan komponen yang tepat, kesalahan ini dapat dibatasi tidak lebih dari sesuatu nilai yang ditetapkan; dalam contoh ini kesalahan tersebut tidak lebih dari 2 %.

Pengurang atau Penguat Diferensial

Diagram rangkaian pengurang atau penguat diferensial ini terlihat pada Gb.3.15. Salah satu tegangan masukan dihubungkan ke terminal masukan inversi dengan rangkaian inversi, sedangkan tegangan masukan yang lain dihubungkan ke terminal masukan non-inversi dengan rangkaian non inversi. Hubungan masukan – keluaran dapat dicari dengan menggunakan prinsip superposisi. Jika v_2 dimatikan maka terminal non inversi terhubung melalui resistor ke titik pentanahan, jadi $v_p = 0$ karena $i_p = 0$. Dalam keadaan ini rangkaian bekerja sebagai penguat inversi; maka



Gb.3.15. Penguat diferensial.

$$v_{o1} = -\frac{R_2}{R_1}v_1 \quad (3.16)$$

Jika v_1 dimatikan maka terminal inversi mendapat tegangan yang besarnya adalah

$$v_N = \frac{R_1}{R_1 + R_2}v_{o2} \quad (3.17)$$

Tegangan di terminal non-inversi

$$v_P = \frac{R_4}{R_3 + R_4}v_2 \quad (3.18)$$

Karena $v_N = v_P$ maka dari (3.17) dan (3.18) kita peroleh

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2}v_{o2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}v_2 \quad \text{atau} \quad v_{o2} = \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4}\right)\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)v_2 \quad (3.19)$$

Keluaran total adalah

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right)v_1 + \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4}\right)\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)v_2 = -K_1v_1 + K_2v_2 \quad (3.20)$$

Dalam keadaan khusus, jika kita buat $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ maka

$$v_o = v_2 - v_1.$$

CONTOH 3.26 : Carilah v_o pada rangkaian di samping ini.

Penyelesaian :

Persamaan tegangan untuk simpul A dan B memberikan

$$v_N\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) + i_N - \frac{v_1}{R} - \frac{v_o}{2R} = 0 \rightarrow \frac{3v_N}{2R} = \frac{v_1}{R} + \frac{v_o}{2R} \rightarrow v_N = \frac{2v_1}{3} + \frac{v_o}{3}$$

$$v_P\left(\frac{2}{R} + \frac{1}{R}\right) + i_P - \frac{2v_2}{R} = 0 \rightarrow v_P = \frac{2v_2}{3}$$

Karena $v_N = v_P$ maka $\frac{2v_1}{3} + \frac{v_o}{3} = \frac{2v_2}{3} \rightarrow v_o = 2v_2 - 2v_1$

Pemahaman :

Dalam rangkaian di atas, arus yang keluar dari masing-masing sumber adalah

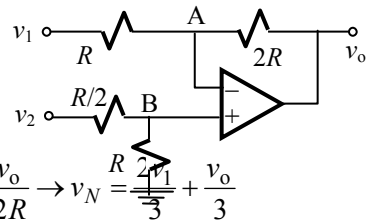
$$i_1 = \frac{v_1 - v_N}{R} = \frac{v_1 - v_P}{R} = \frac{v_1 - 2v_2/3}{R} = \frac{3v_1 - 2v_2}{3R} \quad ; \quad i_2 = \frac{v_2}{R + R/2} = \frac{2v_2}{3R}$$

Terlihat di sini bahwa masing-masing sumber mendapat beban yang berbeda. Kejadian seperti ini harus diperhatikan agar jangan terjadi pembebanan berlebihan pada salah satu sumber. Pembebanan pada sumber akan tetap terjadi walaupun $v_1 = v_2$.

Pembebanan pada sumber dapat dihindari dengan menghubungkan sumber langsung ke terminal masukan OP AMP sehingga sumber akan melihat resistansi masukan yang tak-hingga besarnya. Rangkaian yang kita bangun akan memerlukan lebih dari satu OP AMP yang terangkai secara bertingkat, suatu bentuk hubungan yang akan kita bahas berikut ini.

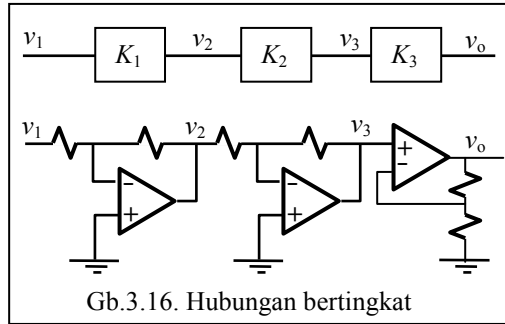
Hubungan Bertingkat Rangkaian OP AMP

Hubungan bertingkat adalah hubungan dari dua atau lebih unit rangkaian dimana keluaran dari satu unit rangkaian menjadi masukan bagi unit rangkaian berikutnya. Suatu contoh hubungan bertingkat diberikan pada Gb.3.16.



Keunggulan rangkaian OP AMP adalah bah-wa mereka dapat dihu-bungkan secara ber-tingkat tanpa menye-babkan perubahan hu-bungan masukan-kelu-aran dari masing-ma-sing rangkaian.

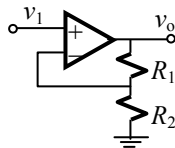
Jika masing-masing rangkaian (masing-masing tingkat) dalam contoh ini mempunyai gain K_1 , K_2 , dan K_3 , maka gain keseluruhannya menjadi $K_1 \times K_2 \times K_3$.



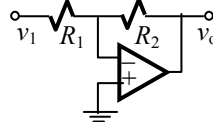
Gb.3.16. Hubungan bertingkat

Rangkaian OP AMP mempunyai resistansi keluaran nol. Oleh karena itu pada hubungan bertingkat tidak terjadi pengaruh pembebanan pada rangkaian OP AMP dan dengan demikian tidak mengubah hubungan masukan-keluaran. Walaupun demikian, daya yang diperlukan oleh suatu tingkat harus masih dalam batas kemampuan daya tingkat di depannya. Oleh karena itu kita perlu mengetahui resistansi masukan rangkaian OP AMP agar kita dapat melakukan evaluasi apakah keperluan daya suatu tingkat tidak melampaui kemampuan daya tingkat di depannya.

Secara umum resistansi masukan dapat dinyatakan sebagai $R_{in} = v_{in} / i_{in}$. Pada penguat non-inversi, $i_{in} = i_p = 0$, sehingga penguat non-inversi mempunyai resistansi masukan $R_{in} = \infty$.



Penguat Non-Inversi



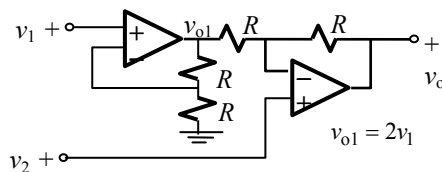
Penguat Inversi

Pada penguat inversi, $i_{in} = (v_{in} - v_N) / R_1$; karena $v_N = v_P = 0$ maka $i_{in} = v_{in} / R_1$, sehingga untuk penguat inversi $R_{in} = R_1$. Dalam hubungan bertingkat, resistansi masukan **penguat inversi yang nilainya berhingga ini akan membebani rangkaian tingkat di depannya**. Dalam perancangan, kita cenderung untuk membuat R_1 besar untuk memperkecil pembebanan ini. Tetapi gain loop tertutup dari penguat ini berbanding terbalik dengan R_1 , yaitu $K = -(R_2 / R_1)$; jadi jika R_1 diperbesar gain akan mengecil. Menghadapi hal demikian ini kita harus melakukan kompromi dalam memilih nilai R_1 .

CONTOH 3.27 : Tentukan tegangan keluaran v_o dari hubungan bertingkat di samping ini.

Penyelesaian :

Tingkat pertama rangkaian ini berupa penguat non-inversi dengan keluaran



Keluaran ini menjadi masukan di tingkat ke dua yang berupa sebuah penguat diferensial dengan keluaran yang dapat diturunkan sebagai berikut.

$$v_N \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) + i_N - \frac{v_{o1}}{R} - \frac{v_o}{R} = 0 \rightarrow v_o = 2v_N - v_{o1} = 2v_2 - 2v_1$$

Pemahaman :

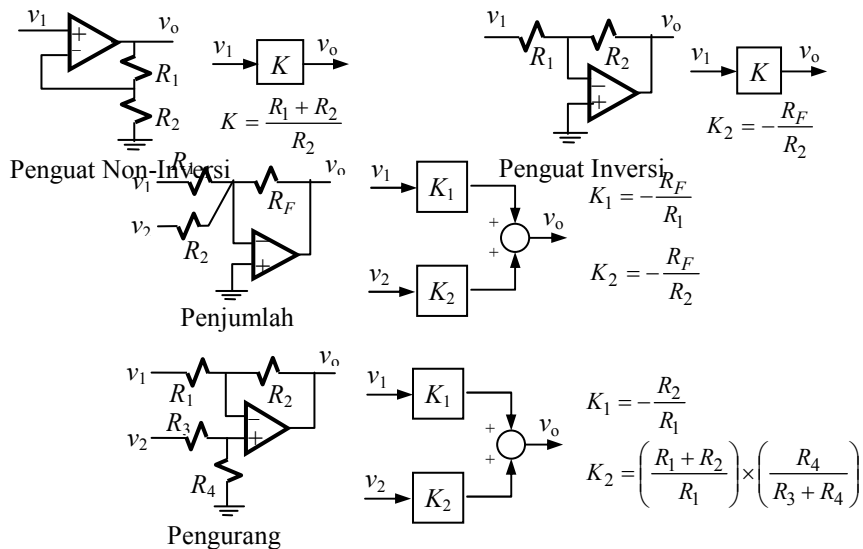
Keluaran dari rangkaian ini sama dengan rangkaian pada contoh 3.26. Jelaslah bahwa suatu formulasi keluaran dapat dipenuhi oleh lebih dari satu macam rangkaian. Rangkaian mana yang dipilih dalam suatu perancangan tergantung dari berbagai pertimbangan, baik teknis maupun ekonomis dan bahkan juga estetika.

Jika kita bandingkan rangkaian pada contoh 3.26 dan 3.27. akan terlihat bahwa sumber-sumber pada contoh 3.26. terbebani sedangkan pada contoh 3.27. sumber-sumber tidak terbebani karena mereka terhubung pada penguat non-inversi yang resistansi masukannya tak-hingga. Jika daya sumber sangat terbatas, rangkaian pada contoh 3.27. akan menjadi pilihan walaupun untuk itu diperlukan biaya lebih besar karena perlu dua OP AMP.

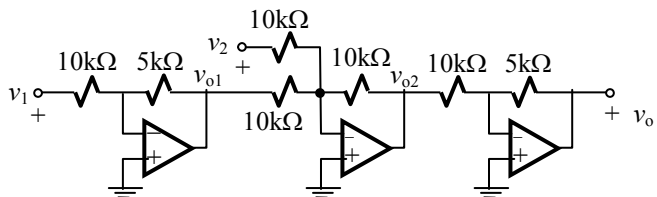
Diagram Blok

Dalam rangkaian-rangkaian OP AMP yang kita bahas di atas (penguat inversi, non-inversi, penjumlah, pengurang), terdapat hubungan linier antara keluaran dan masukan. Oleh karena itu kita dapat melihat setiap rangkaian sebagai suatu unit pemroses sinyal yang mengandung suatu konstanta tertentu yang menetapkan hubungan antara masukan dan keluarannya. Unit itu dapat digambarkan dengan suatu blok saja dengan menyebutkan konstanta proporsionalitasnya. Cara penggambaran seperti ini kita sebut diagram blok.

Berikut ini adalah rangkaian, diagram blok, dan konstanta proporsionalitas dari empat macam rangkaian OP AMP dasar yang telah kita pelajari.

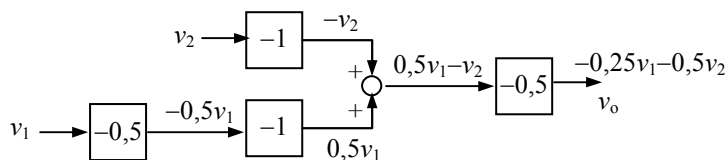


CONTOH 3.28 : Gambarkan diagram blok rangkaian di samping ini dan tentukan tegangan keluaran v_o .



Penyelesaian :

Tingkat pertama adalah penguat inversi dengan $K_1 = -0,5$.
 Tingkat ke-dua adalah penjumlah inversi dengan $K_2 = -1$ untuk masukan v_{o1} dan v_2 .
 Tingkat ke-tiga adalah penguat inversi dengan $K_3 = -0,5$.
 Diagram blok rangkaian ini dan keluarannya v_o adalah:



Integrator

Integrator adalah salah satu rangkaian OP AMP dinamik. Rangkaian integrator mirip dengan rangkaian penguat inversi tetapi resistor pada saluran umpan balik diganti dengan kapasitor, seperti terlihat pada Gb.3.17. Bagaimana rangkaian ini berfungsi dapat kita analisis sebagai berikut.

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A adalah:

$$v_N \left(\frac{1}{R} \right) - C \frac{d}{dt} (v_o - v_N) - \frac{v_s}{R} = 0$$

Untuk OP AMP ideal $v_N = v_P = 0 = v_A$, sehingga persamaan di atas menjadi

$$\frac{v_s}{R} = -C \frac{d}{dt} (v_o) \quad \text{atau} \quad \int_{v_o(0)}^{v_o(t)} d(v_o) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s dt$$

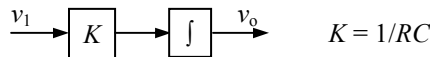
Dari persamaan ini kita peroleh

$$v_o = v_o(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t v_s dt \quad (3.21.a)$$

Karena $v_A = 0$, maka $v_o = v_C$; dan jika tegangan awal kapasitor adalah nol, maka $v_o(0) = v_C(0) = 0$, dan persamaan (3.21.a) menjadi

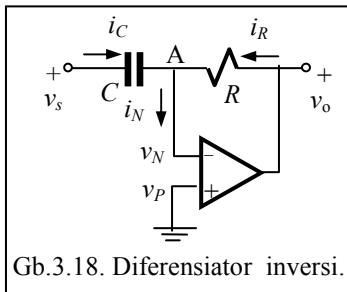
$$v_o = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s dt \quad (3.21.b)$$

Jadi tegangan keluaran v_o merupakan integrasi dari tegangan masukan v_s . Rangkaian ini merupakan rangkaian integrator inversi karena konstanta proporsionalitasnya negatif. Diagram blok dari integrator adalah sebagai berikut:



Diferensiator

Rangkaian diferensiator diperoleh dengan menukar posisi resistor dan kapasitor pada rangkaian integrator, seperti terlihat pada Gb.3.18.



Gb.3.18. Diferensiator inversi.

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A dalam rangkaian ini adalah:

$$\frac{v_N}{R} - C \frac{d}{dt} (v_s - v_N) - \frac{v_o}{R} = 0$$

Karena $v_A = v_N = v_P = 0$, maka

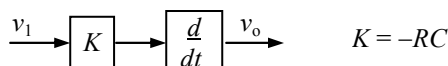
$$\frac{v_o}{R} = -C \frac{d}{dt} (v_s) \quad \text{atau} \quad \int_{v_s(0)}^{v_s(t)} d(v_s) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_o dt$$

Di sini v_s merupakan tegangan kapasitor, dan jika tegangan awal kapasitor adalah nol maka

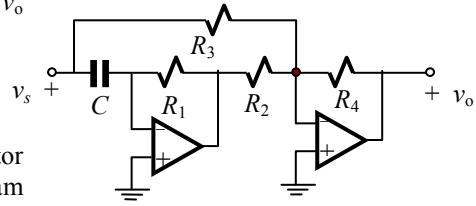
$$v_s = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_o dt \quad \text{atau} \quad v_o = -RC \frac{dv_s}{dt} \quad (3.22)$$

Jadi tegangan keluaran merupakan diferensiasi dari tegangan masukan. Rangkaian ini disebut diferensiator inversi karena konstanta proporsionalitasnya negatif.

Diagram blok dari diferensiator adalah sebagai berikut:

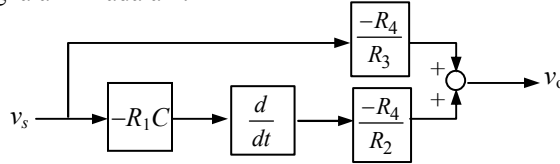


CONTOH 3.29 : Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian di samping ini.



Penyelesaian :

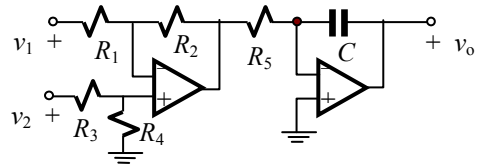
Rangkaian ini terdiri dari diferensiator inversi dan penjumlah inversi. Diagram blok dari rangkaian ini adalah :



Tegangan keluaran adalah

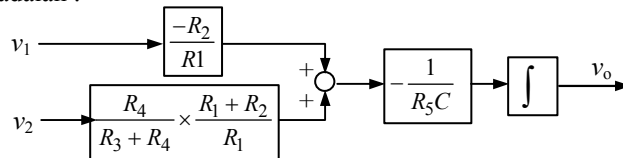
$$v_o = \left(-R_1 C \frac{dv_s}{dt}\right) \left(\frac{-R_4}{R_2}\right) + \left(\frac{-R_4}{R_3}\right) v_s = \left(\frac{R_1 R_4 C}{R_2}\right) \frac{dv_s}{dt} - \left(\frac{R_4}{R_3}\right) v_s$$

CONTOH 3.30 : Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian di samping ini.



Penyelesaian :

Rangkaian ini terdiri dari penguat diferensial dan integrator. Diagram blok dari rangkaian ini adalah :



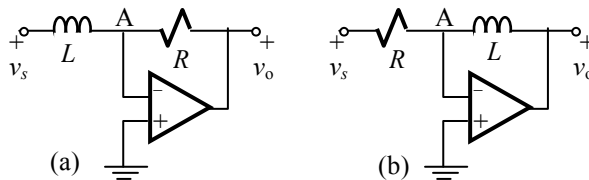
Tegangan keluaran adalah
$$v_o(t) = -\frac{1}{R_5 C} \int_0^t \left\{ \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) v_2 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right) v_1 \right\} dt + v_o(0)$$

Pemahaman :

Jika kita buat semua resistor bernilai sama, R , maka keluaran dari rangkaian di atas adalah

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t \{v_2 - v_1\} dt + v_o(0)$$

CONTOH 3.31 : Tunjukkanlah bahwa keluaran rangkaian OP AMP dengan induktor di bawah ini masing-masing merupakan integrasi dan diferensiasi tegangan masukannya.



Penyelesaian :

Rangkaian a) : $v_N = v_P = 0 \rightarrow v_L = v_s = L \frac{di_L}{dt} \rightarrow \int_0^t v_s dt = L \int_{i_L(0)}^{i_L(t)} di_L$

$i_L(0)$ adalah arus awal induktor. Jika arus awal ini nol maka

$$\int_0^t v_s dt = L \int_0^t i_L dt \rightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_s dt$$

Untuk terminal masukan inversi berlaku

$$i_L + \frac{v_o}{R} + 0 = 0 \rightarrow \frac{1}{L} \int_0^t v_s dt + \frac{v_o}{R} = 0 \text{ sehingga } v_o = -\frac{R}{L} \int_0^t v_s dt$$

Rangkaian b) : Jika arus awal induktor adalah nol maka $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_o dt$

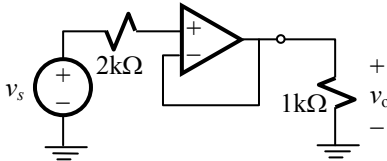
Untuk terminal masukan inversi berlaku

$$i_L + \frac{v_s}{R} + 0 = 0 \rightarrow \frac{1}{L} \int_0^t v_o dt + \frac{v_s}{R} = 0$$

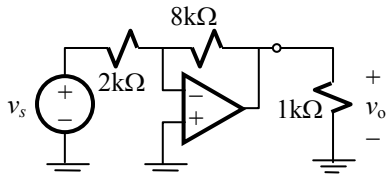
Dari sini diperoleh : $\int_0^t v_o dt = -\frac{L}{R} v_s$ sehingga $v_o = -\frac{L}{R} \frac{dv_s}{dt}$

SOAL-SOAL : RANGKAIAN DENGAN OP AMP

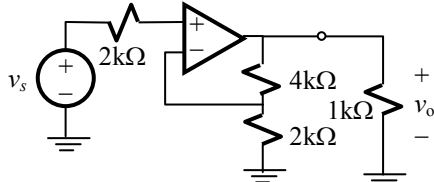
1. Carilah hubungan antara tegangan keluaran v_o dan tegangan masukan v_s pada rangkaian berikut dan gambarkan diagram bloknya.



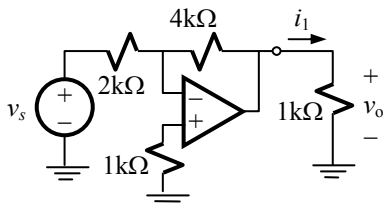
2. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut,



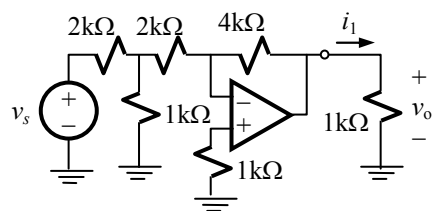
3. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



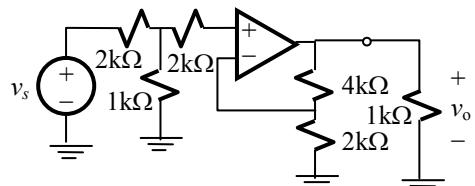
4. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut,



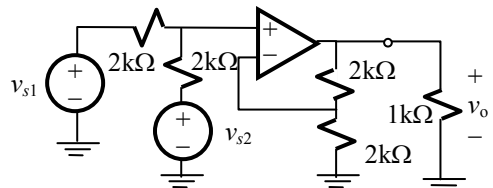
5. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut,



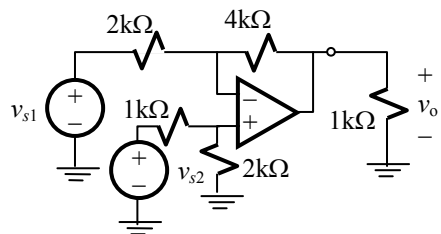
6. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



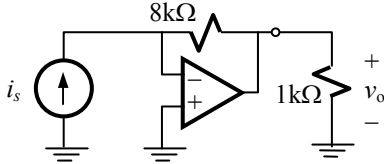
7. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



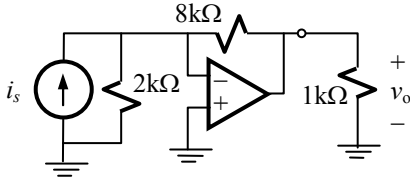
8. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



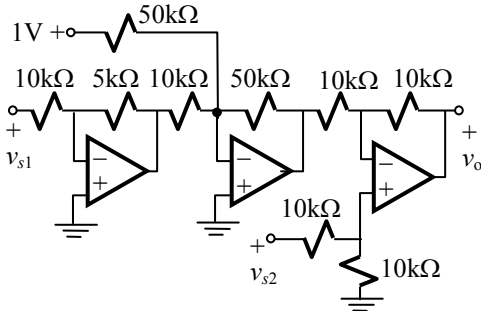
9. Carilah hubungan antara v_o dan i_s .



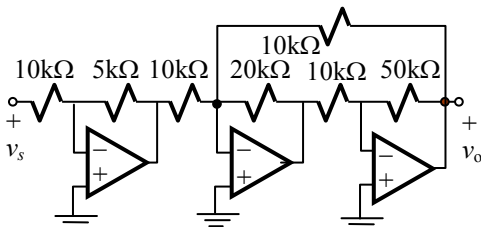
10. Carilah hubungan antara v_o dan i_s .



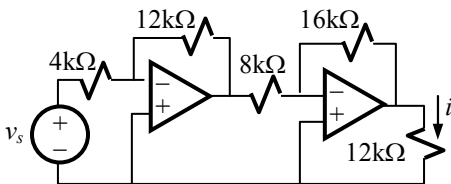
11. Gambarkan diagram blok dari rangkaian berikut ini dan dengan diagram blok tersebut tentukan tegangan keluaran v_o .



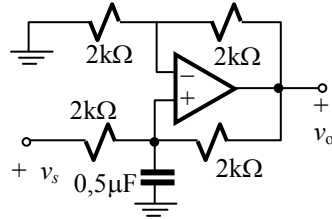
12. Ulangi soal 11 untuk rangkaian berikut.



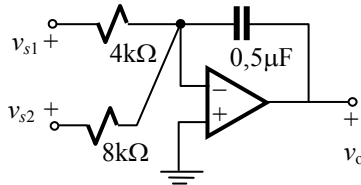
13. Carilah arus i pada rangkaian berikut ini jika $v_s = 4\sin 3000t$ V.



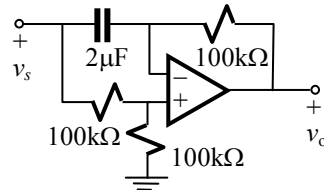
14. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut dinyatakan dalam v_s dan gambarkan diagram bloknya.



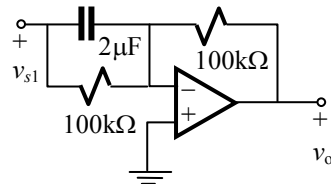
15. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut dinyatakan dalam v_{s1} dan v_{s2} .



16. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut dinyatakan dalam v_s .



17. Tentukan tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut dinyatakan dalam v_s .



BAB 4

Analisis Transien Sistem Orde Pertama dan Orde Kedua

Yang dimaksud dengan analisis transien adalah analisis rangkaian yang sedang dalam keadaan peralihan atau keadaan transien. Gejala transien atau gejala peralihan merupakan salah satu peristiwa dalam rangkaian listrik yang perlu kita perhatikan. Peristiwa ini biasanya berlangsung hanya beberapa saat namun jika tidak ditangani secara baik dapat menyebabkan terjadinya hal-hal yang sangat merugikan berupa kerusakan peralatan.

Dalam sistem penyaluran energi, pemutusan dan penyambungan rangkaian merupakan hal yang sering terjadi. Operasi-operasi tersebut dapat menyebabkan terjadinya lonjakan tegangan yang biasa disebut *tegangan lebih*. Tegangan lebih pada sistem juga terjadi manakala ada sambaran petir yang mengimbaskan tegangan pada saluran transmisi. Tegangan lebih seperti ini akan merambat sepanjang saluran transmisi berbentuk gelombang berjalan dan akan sampai ke beban-beban yang terhubung pada sistem tersebut. Piranti-piranti elektronik akan menderita karenanya. Di samping melalui saluran transmisi, sambaran petir juga mengimbaskan tegangan secara induktif maupun kapasitif pada peralatan-peralatan. Semua kejadian itu merupakan peristiwa-peristiwa peralihan.

Kita mengetahui bahwa kapasitor dan induktor adalah piranti-piranti dinamis dan rangkaian yang mengandung piranti-piranti jenis ini kita sebut rangkaian dinamis. Piranti dinamis mempunyai kemampuan untuk menyimpan energi dan melepaskan energi yang telah disimpan sebelumnya. Hal demikian tidak terjadi pada resistor, yang hanya dapat menyerap energi. Oleh karena itu, pada waktu terjadi operasi penutupan ataupun pemutusan rangkaian, perilaku rangkaian yang mengandung kapasitor maupun induktor berbeda dengan rangkaian yang hanya mengandung resistor saja.

Karena hubungan antara arus dan tegangan pada induktor maupun kapasitor merupakan hubungan linier diferensial, maka persamaan rangkaian yang mengandung elemen-elemen ini juga merupakan persamaan diferensial. Persamaan diferensial ini dapat berupa persamaan diferensial orde pertama dan rangkaian yang demikian ini disebut rangkaian atau sistem orde pertama. Jika persamaan rangkaian berbentuk persamaan diferensial orde kedua maka rangkaian ini disebut rangkaian atau sistem orde kedua. Perilaku kedua macam sistem tersebut akan kita pelajari berikut ini.

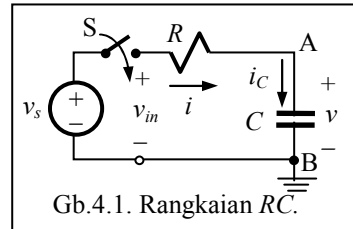
4.1. Sistem Orde Pertama

Tujuan :

- Mampu menurunkan persamaan rangkaian yang merupakan rangkaian orde pertama.
- Memahami bahwa tanggapan rangkaian terdiri dari tanggapan paksa dan tanggapan alami.
- Mampu melakukan analisis transien pada rangkaian orde pertama.

Contoh Rangkaian Orde Pertama

Rangkaian RC Seri. Salah satu contoh rangkaian orde pertama dalam keadaan peralihan adalah rangkaian RC seri seperti pada Gb.4.1. Pada awalnya saklar S pada rangkaian ini terbuka; kemudian pada saat $t = 0$ ia ditutup sehingga terbentuk rangkaian tertutup terdiri dari sumber v_s dan hubungan seri resistor R dan kapasitor C . Jadi mulai pada $t = 0$ terjadilah perubahan status pada sistem tersebut dan gejala yang timbul selama terjadinya perubahan itulah yang kita sebut *gejala perubahan* atau *gejala transien*. Gejala transien ini merupakan tanggapan rangkaian seri RC ini setelah saklar ditutup, yaitu pada $t > 0$. Aplikasi HTK pada pada rangkaian untuk $t > 0$ memberikan



Gb.4.1. Rangkaian RC.

$$-v_s + iR + v = -v_s + RC \frac{dv}{dt} + v = 0 \quad \text{atau} \quad RC \frac{dv}{dt} + v = v_s \quad (4.1)$$

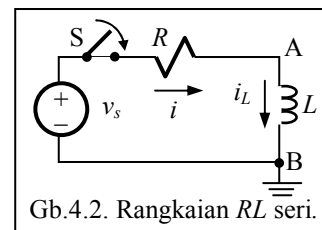
Persamaan (4.1) adalah persamaan rangkaian seri RC dengan menggunakan tegangan kapasitor sebagai peubah. Alternatif lain untuk memperoleh persamaan rangkaian ini adalah menggunakan arus i sebagai peubah. Tetapi dalam analisis transien, kita memilih peubah yang merupakan peubah status dalam menyatakan persamaan rangkaian. Untuk rangkaian RC ini peubah statusnya adalah tegangan kapasitor, v . Pemilihan peubah status dalam melakukan analisis transien berkaitan dengan ada tidaknya simpanan energi dalam rangkaian yang sedang dianalisis, sesaat sebelum terjadinya perubahan. Hal ini akan kita lihat pada pembahasan selanjutnya.

Persamaan (4.1) merupakan persamaan diferensial orde pertama tak homogen dengan koefisien konstan. Tegangan masukan v_s merupakan sinyal sembarang, yang dapat berbentuk fungsi-fungsi yang pernah kita pelajari di Bab-1. Tugas kita dalam analisis rangkaian ini adalah mencari tegangan kapasitor, v , untuk $t > 0$.

Rangkaian RL Seri. Contoh lain rangkaian orde pertama adalah rangkaian RL seri seperti pada Gb.4.2. Saklar S ditutup pada $t = 0$ sehingga terbentuk rangkaian tertutup RL seri. Aplikasi HTK pada rangkaian ini untuk $t > 0$

memberikan : $v_s - Ri - v_L = v_s - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$ atau

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_s \quad (4.2)$$



Gb.4.2. Rangkaian RL seri.

Persamaan (4.2) adalah persamaan rangkaian RL seri dengan arus i sebagai peubah. Sebagaimana kita ketahui, arus merupakan peubah status untuk induktor dan kita pilih ia sebagai peubah dalam analisis rangkaian RL.

Rangkaian Orde Pertama yang Lain. Persamaan rangkaian RC dan RL merupakan persamaan diferensial orde pertama dan oleh karena itu rangkaian itu disebut rangkaian orde pertama atau sistem orde pertama. Sudah barang tentu sistem orde pertama bukan hanya rangkaian RC dan RL saja, akan tetapi setiap rangkaian yang persamaannya berupa persamaan diferensial orde pertama adalah sistem orde pertama.

Tinjauan Umum Tanggapan Rangkaian Orde Pertama

Secara umum, persamaan rangkaian orde pertama berbentuk

$$a \frac{dy}{dt} + by = x(t) \quad (4.3)$$

Peubah y adalah keluaran atau tanggapan dari rangkaian yang dapat berupa tegangan ataupun arus sedangkan nilai a dan b ditentukan oleh nilai-nilai elemen yang membentuk rangkaian. Fungsi $x(t)$ adalah masukan pada rangkaian yang dapat berupa tegangan ataupun arus dan disebut *fungsi pemaksa* atau *fungsi penggerak*.

Kita mengetahui bahwa persamaan diferensial seperti (4.3) mempunyai *solusi total* yang merupakan jumlah dari *solusi khusus* dan *solusi homogen*. Solusi khusus adalah fungsi yang dapat memenuhi persamaan (4.3) sedangkan solusi homogen adalah fungsi yang dapat memenuhi persamaan homogen

$$\boxed{a \frac{dy}{dt} + by = 0} \quad (4.4)$$

Hal ini dapat difahami karena jika fungsi x_1 memenuhi (4.3) dan fungsi x_2 memenuhi (4.4), maka $y = (x_1 + x_2)$ akan memenuhi (4.3) sebab

$$a \frac{dy}{dt} + by = a \frac{d(x_1 + x_2)}{dt} + b(x_1 + x_2) = a \frac{dx_1}{dt} + bx_1 + a \frac{dx_2}{dt} + bx_2 = a \frac{dx_1}{dt} + bx_1 + 0$$

Jadi $y = (x_1 + x_2)$ adalah solusi dari (4.3), dan kita sebut *solusi total*.

Tanggapan Alami, Tanggapan Paksa, Tanggapan Lengkap

Dalam rangkaian listrik, solusi total persamaan diferensial (4.3) merupakan *tanggapan lengkap (complete response) rangkaian*, yang tidak lain adalah keluaran (tanggapan) rangkaian dalam kurun waktu setelah terjadi perubahan, atau kita katakan untuk $t > 0$. Tanggapan lengkap ini terdiri dua komponen yaitu *tanggapan alami* dan *tanggapan paksa*, sesuai dengan adanya *solusi homogen* dan *solusi khusus* dari (4.3). Tanggapan alami adalah solusi homogen dari persamaan homogen (4.4); disebut demikian karena ia merupakan tanggapan yang tidak ditentukan oleh fungsi pemaksa $x(t)$ karena $x(t) = 0$. Komponen ini ditentukan oleh elemen rangkaian dan keadaannya sesaat setelah terjadinya perubahan atau kita katakan ditentukan oleh keadaan pada $t = 0^+$. Tanggapan paksa adalah solusi khusus dari persamaan rangkaian (4.3); disebut demikian karena tanggapan ini merupakan tanggapan rangkaian atas adanya fungsi pemaksa $x(t)$.

Tanggapan Alami. Banyak cara untuk mencari solusi persamaan (4.4). Salah satu cara adalah memisahkan peubah dan kemudian melakukan integrasi. Di sini kita tidak menggunakan cara itu, tetapi kita akan menggunakan cara pendugaan. Persamaan (4.4) menyatakan bahwa y ditambah dengan suatu koefisien konstan kali dy/dt , sama dengan nol untuk semua nilai t . Hal ini hanya mungkin terjadi jika y dan dy/dt berbentuk sama. Fungsi yang turunannya mempunyai bentuk sama dengan fungsi itu sendiri adalah fungsi eksponensial. Jadi kita dapat menduga bahwa solusi dari (4.4) mempunyai bentuk eksponensial $y = K_1 e^{st}$. Jika solusi dugaan ini kita masukkan ke (4.4), kita peroleh

$$aK_1 s e^{st} + bK_1 e^{st} = 0 \quad \text{atau} \quad yK_1(as + b) = 0 \quad (4.5)$$

Peubah y tidak mungkin bernilai nol untuk seluruh t dan K_1 juga tidak boleh bernilai nol karena hal itu akan membuat y bernilai nol untuk seluruh t . Satu-satunya cara agar persamaan (4.5) terpenuhi adalah

$$\boxed{as + b = 0} \quad (4.6)$$

Persamaan (4.6) ini disebut *persamaan karakteristik* sistem orde pertama. Persamaan ini hanya mempunyai *satu* akar yaitu $s = -(b/a)$. Jadi tanggapan alami yang kita cari adalah

$$\boxed{y_a = K_1 e^{st} = K_1 e^{-(b/a)t}} \quad (4.7)$$

Nilai K_1 masih harus kita tentukan melalui penerapan suatu persyaratan tertentu yang kita sebut *kondisi awal* yaitu kondisi pada $t = 0^+$. Yang dimaksud dengan $t = 0^+$ adalah sesaat setelah terjadinya perubahan keadaan; dalam kasus penutupan saklar S pada rangkaian Gb.4.1, $t = 0^+$ adalah sesaat setelah saklar ditutup. Ada kemungkinan bahwa y telah mempunyai nilai tertentu pada $t = 0^+$ sehingga nilai K_1 haruslah sedemikian rupa sehingga nilai y pada $t = 0^+$ tersebut dapat dipenuhi. Akan tetapi kondisi awal ini tidak dapat kita terapkan pada tanggapan alami karena tanggapan ini baru merupakan sebagian dari tanggapan rangkaian. Kondisi awal harus kita terapkan pada tanggapan lengkap dan bukan hanya untuk tanggapan alami saja. Oleh karena itu kita harus mencari tanggapan paksa lebih dulu agar tanggapan lengkap dapat kita peroleh untuk kemudian menerapkan kondisi awal tersebut.

Tanggapan Paksa. Tanggapan paksa dari (4.3) tergantung dari bentuk fungsi pemaksa $x(t)$. Seperti halnya dengan tanggapan alami, kita dapat melakukan pendugaan pada tanggapan paksa. *Bentuk tanggapan paksa haruslah sedemikian rupa sehingga jika dimasukkan ke persamaan rangkaian (4.3) maka ruas kiri dan ruas kanan persamaan itu akan berisi bentuk fungsi yang sama.* Jika tanggapan paksa kita sebut y_p , maka y_p dan turunannya harus mempunyai bentuk sama agar hal tersebut terpenuhi. Untuk berbagai bentuk fungsi pemaksa $x(t)$, tanggapan paksa dugaan y_p adalah sebagai berikut.

Jika $x(t) = 0$, maka $y_p = 0$	(4.8)
Jika $x(t) = A = \text{konstan}$, maka $y_p = \text{konstan} = K$	
Jika $x(t) = Ae^{\alpha t}$ = eksponensial, maka $y_p = \text{eksponensial} = Ke^{\alpha t}$	
Jika $x(t) = A \sin \omega t$, maka $y_p = \text{fungsi sinus} = K_c \cos \omega t + K_s \sin \omega t$	
Jika $x(t) = A \cos \omega t$, maka $y_p = \text{fungsi cosinus} = K_c \cos \omega t + K_s \sin \omega t$	
Perhatikan : $y = K_c \cos \omega t + K_s \sin \omega t$ adalah bentuk umum fungsi sinus maupun cosinus.	

Tanggapan Lengkap. Jika tanggapan paksa kita sebut y_p , maka tanggapan lengkap adalah

$$\boxed{y = y_p + y_a = y_p + K_1 e^{st}} \quad (4.9)$$

Pada solusi lengkap inilah kita dapat menerapkan kondisi awal yang akan memberikan nilai K_1 .

Kondisi Awal. Peubah y adalah peubah status, bisa berupa tegangan kapasitor v_C atau arus induktor i_L . Kondisi awal adalah nilai y pada $t = 0^+$. Sebagaimana telah kita pelajari di Bab-1, peubah status harus merupakan fungsi kontinyu. Jadi, sesaat sesudah dan sesaat sebelum terjadi perubahan pada $t = 0$, y harus bernilai sama. Dengan singkat dituliskan

$$\boxed{\text{Kondisi awal : } v_C(0^+) = v_C(0^-) \text{ ataupun } i_L(0^+) = i_L(0^-)} \quad (4.10)$$

Jika kondisi awal ini kita sebut $y(0^+)$ dan kita masukkan pada dugaan solusi lengkap (4.9) akan kita peroleh nilai K_1 .

$$y(0^+) = y_p(0^+) + K_1 \rightarrow K_1 = y(0^+) - y_p(0^+) \quad (4.11)$$

Nilai $y(0^+)$ dan $y_p(0^+)$ adalah tertentu (yaitu nilai pada $t=0^+$). Jika kita sebut

$$y(0^+) - y_p(0^+) = A_0 \quad (4.12)$$

maka tanggapan lengkap menjadi

$$y = y_p + A_0 e^{st} \quad (4.13)$$

Komponen Mantap dan Komponen Transien

Tanggapan lengkap rangkaian seperti yang ditunjukkan oleh (4.13), terdiri dari dua komponen. Komponen yang pertama (ditunjukkan oleh suku pertama) kita sebut *komponen mantap*. Komponen yang kedua (ditunjukkan oleh suku kedua) kita sebut *komponen transien* atau *komponen peralihan*. Komponen transien ini berbentuk eksponensial dengan konstanta waktu yang besarnya ditentukan oleh parameter rangkaian, yaitu $\tau = a/b$. Dengan pengertian konstanta waktu ini tanggapan rangkaian dapat kita tulis

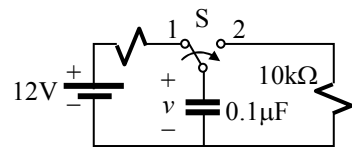
$$y = y_p + A_0 e^{-t/\tau} \quad (4.14)$$

Sebagaimana kita ketahui, fungsi eksponensial dapat kita anggap hanya berlangsung selama 5 kali konstanta waktunya karena pada saat itu nilainya sudah tinggal kurang dari 1% dari amplitudo awalnya. Jadi komponen transien boleh kita anggap hanya berlangsung selama 5τ , sedangkan komponen mantap tetap berlangsung walau komponen transien telah hilang (oleh karena itulah disebut komponen mantap). Komponen transien tidak lain adalah tanggapan alami, yang merupakan reaksi alamiah dari rangkaian terhadap adanya perubahan. Berikut ini kita akan melihat beberapa contoh analisis transien sistem orde pertama.

Tanggapan Rangkaian Tanpa Fungsi Pemaksa, $x(t) = 0$

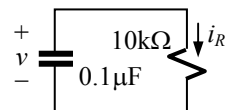
Persamaan rangkaian tanpa fungsi pemaksa ini berasal dari rangkaian *tanpa masukan*. Perubahan tegangan dan arus dalam rangkaian bisa terjadi karena ada pelepasan energi yang semula tersimpan dalam rangkaian dan tanggapan rangkaian yang akan kita peroleh hanyalah tanggapan alami saja. Walaupun demikian, dalam melakukan analisis kita akan menganggap bahwa fungsi pemaksa tetap ada, akan tetapi bernilai nol. Hal ini kita lakukan karena *kondisi awal harus diterapkan pada tanggapan lengkap*, sedangkan tanggapan lengkap harus terdiri dari tanggapan alami dan tanggapan paksa (walaupun mungkin bernilai nol). Kondisi awal tidak dapat diterapkan hanya pada tanggapan alami saja atau tanggapan paksa saja.

CONTOH 4.1 : Saklar S pada rangkaian di samping ini telah lama berada pada posisi 1. Pada $t = 0$, saklar S dipindahkan ke posisi 2. Carilah tegangan kapasitor, v , untuk $t > 0$.



Penyelesaian :

Karena S telah lama pada posisi 1, maka kapasitor telah terisi penuh, arus kapasitor tidak lagi mengalir, dan tegangan kapasitor sama dengan tegangan sumber, yaitu 12 V; jadi $v(0^-) = 12$ V. Setelah saklar dipindahkan ke posisi 2, kita mempunyai rangkaian *tanpa sumber (masukan)* seperti di samping ini, yang akan memberikan persamaan rangkaian *tanpa fungsi pemaksa*. Aplikasi HTK pada rangkaian ini



memberikan : $-v + i_R R = 0$. Karena $i_R = -i_C = -C \frac{dv}{dt}$ maka kita dapat menuliskan persamaan rangkaian sebagai :

$$-v - RC \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}v = 0$$

Dengan nilai elemen seperti diperlihatkan pada gambar, maka persamaan rangkaian menjadi :

$$\frac{dv}{dt} + 1000v = 0$$

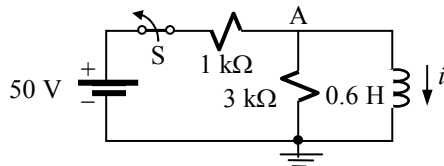
Ini adalah persamaan rangkaian untuk $t > 0$. Pada rangkaian ini tidak ada fungsi pemaksa. Ini bisa dilihat dari gambar rangkaian ataupun dari persamaan rangkaian yang ruas kanannya bernilai nol.

<p>Persamaan karakteristik : $s + 1000 = 0 \rightarrow s = -1000$</p> <p>Dugaan tanggapan alami : $v_a = A_0 e^{-1000t}$</p> <p>Dugaan tanggapan paksa : $v_p = 0$ (karena tidak ada fungsi pemaksa)</p> <p>Dugaan tanggapan lengkap : $v = v_p + A_0 e^{st} = 0 + A_0 e^{-1000t}$</p> <p>Kondisi awal : $v(0^+) = v(0^-) = 12 \text{ V}$.</p> <p>Penerapan kondisi awal pada dugaan tanggapan lengkap memberikan :</p> $12 = 0 + A_0 \rightarrow A_0 = 12$ <p>Tanggapan lengkap menjadi : $v = 12 e^{-1000t} \text{ V}$</p>
--

Pemahaman :

Rangkaian tidak mengandung fungsi pemaksa. Jadi sesungguhnya yang ada hanyalah tanggapan alami. Tanggapan paksa dinyatakan sebagai $v_p = 0$. Kondisi awal harus diterapkan pada tanggapan lengkap $v = v_p + v_a = 0 + v_a$ walaupun kita tahu bahwa hanya ada tanggapan alami dalam rangkaian ini.

CONTOH 4.2 : Saklar S pada rangkaian berikut ini telah lama tertutup. Pada $t = 0$ saklar dibuka. Carilah arus dan tegangan induktor untuk $t > 0$.



Penyelesaian :

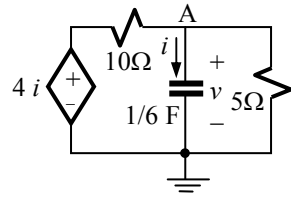
Saklar S telah lama tertutup, berarti keadaan mantap telah tercapai. Pada keadaan mantap ini tegangan induktor harus nol, karena sumber berupa sumber tegangan konstan. Jadi resistor 3 kΩ terhubung singkat melalui induktor. Arus pada induktor dalam keadaan mantap ini (sebelum saklar dibuka) sama dengan arus yang melalui resistor 1 kΩ yaitu $i(0^-) = \frac{50}{1000} = 50 \text{ mA}$. Setelah saklar dibuka, rangkaian tinggal induktor yang terhubung seri dengan resistor 3 kΩ. Untuk simpul A berlaku

$$\frac{v_A}{3000} + i = 0. \text{ Karena } v_A = v_L = L \frac{di}{dt}, \text{ maka persamaan ini menjadi } \frac{1}{3000} \left(0,6 \frac{di}{dt} \right) + i = 0$$

atau
$$0,6 \frac{di}{dt} + 3000 i = 0$$

<p>Persamaan karakteristik : $0,6s + 3000 = 0 \rightarrow s = -5000$</p> <p>Dugaan tanggapan alami : $i_a = A_0 e^{-5000t}$</p> <p>Dugaan tanggapan paksa : $i_p = 0$ (tak ada fungsi pemaksa)</p> <p>Dugaan tanggapan lengkap : $i = i_p + A_0 e^{-5000t} = 0 + A_0 e^{-5000t}$</p> <p>Kondisi awal : $i(0^+) = i(0^-) = 50 \text{ mA}$.</p> <p>Penerapan kondisi awal pada dugaan tanggapan lengkap memberikan : $50 = A_0$</p> <p>Tanggapan lengkap menjadi : $i = 50 e^{-5000t} \text{ mA}$</p>
--

CONTOH 4.3 : Tentukanlah tegangan kapasitor, v , dan arus kapasitor i untuk $t > 0$ pada rangkaian di samping ini jika diketahui bahwa kondisi awalnya adalah $v(0^+) = 10$ V.



Penyelesaian :

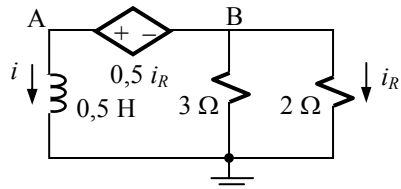
Dalam soal ini tidak tergambar jelas mengenai terjadinya perubahan keadaan (penutupan saklar misalnya). Akan tetapi disebutkan bahwa kondisi awal $v(0^+) = 10$ V. Jadi kita memahami bahwa rangkaian ini adalah rangkaian untuk keadaan pada $t > 0$ dengan kondisi awal sebagaimana disebutkan.

Persamaan tegangan untuk simpul A adalah $v_A \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) + i - \frac{4i}{10} = 0$ atau $3v + 6i = 0$.

Karena $i = C \, dv/dt = (1/6) \, dv/dt$ maka persamaan tersebut menjadi $\frac{dv}{dt} + 3v = 0$

Persamaan karakteristik : $s + 3 = 0 \rightarrow s = -3$
 Dugaan tanggapan alami: $v_a = A_0 e^{-3t}$
 Dugaan tanggapan paksa: $v_p = 0$
 Dugaan tanggapan lengkap : $v = v_p + A_0 e^{-3t}$
 Kondisi awal : $v(0^+) = 10$ V
 Penerapan kondisi awal memberikan: $10 = 0 + A_0$
 Tanggapan lengkap (tegangan kapasitor) menjadi : $v = 10 e^{-3t}$ V
 Arus kapasitor : $i = C \frac{dv}{dt} = \frac{1}{6} \times 10 \times (-3) e^{-3t} = -5 e^{-3t}$ A

CONTOH 4.4 : Tentukanlah arus induktor $i(t)$ untuk $t > 0$ pada rangkaian di samping ini jika diketahui bahwa $i(0^+) = 2$ A.



Penyelesaian :

Sumber tegangan tak-bebas berada di antara dua simpul yang bukan simpul referensi A dan B, dan kita jadikan simpul super. Dengan mengambil i sebagai peubah sinyal, kita peroleh:

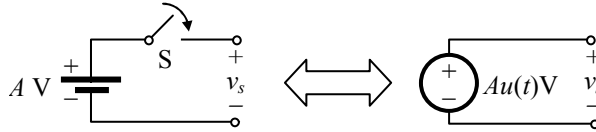
$$\left. \begin{aligned} \text{Simpul Super AB : } i + v_B \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) &= 0 & \rightarrow 6i + 5v_B &= 0 \\ v_A - v_B &= 0,5 i_R = 0,5 \frac{v_B}{2} & \rightarrow v_B &= \frac{4}{5} v_A \end{aligned} \right\} 3i + 2v_A = 0$$

Karena $v_A = L \, di/dt = 0,5 \, di/dt$ maka persamaan di atas menjadi $\frac{di}{dt} + 3i = 0$

Persamaan karakteristik : $s + 3 = 0 \rightarrow s = -3$
 Dugaan tanggapan alami: $i_a = A_0 e^{-3t}$
 Dugaan tanggapan paksa : $i_p = 0$
 Dugaan tanggapan lengkap : $i = v_p + A_0 e^{-3t} = 0 + A_0 e^{-3t}$
 Kondisi awal $i(0^+) = 2$ A
 Penerapan kondisi awal memberikan: $2 = 0 + A_0$
 Tanggapan lengkap menjadi : $i = 2 e^{-3t}$ A

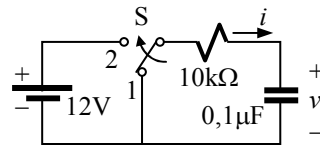
Tanggapan Rangkaian Orde Pertama Terhadap Sinyal Anak Tangga

Fungsi anak tangga, $Au(t)$, adalah fungsi yang bernilai 0 untuk $t < 0$ dan bernilai konstan A untuk $t > 0$. Masukan yang berupa tegangan dengan bentuk gelombang sinyal anak tangga dapat digambarkan dengan sebuah sumber tegangan konstan A V seri dengan saklar S yang ditutup pada $t=0$ yang akan memberikan tegangan masukan $v_s=Au(t)$. Rangkaian sumber ini dapat juga kita nyatakan dengan sebuah sumber tegangan bebas $v_s=Au(t)$. Kedua cara ini sering digunakan dalam menyatakan persoalan-persoalan rangkaian.



Jika kita hanya meninjau keadaan untuk $t > 0$ saja, maka masukan sinyal anak tangga $v_s = Au(t)$ dapat kita tuliskan sebagai $v_s = A$ (konstan) tanpa menuliskan faktor $u(t)$ lagi.

CONTOH 4.5 : Saklar S pada rangkaian di samping ini telah lama pada posisi 1. Pada $t = 0$, S dipindahkan ke posisi 2. Tentukan v (tegangan kapasitor) untuk $t > 0$.



Penyelesaian :

Saklar S telah lama pada posisi 1 dan hal ini berarti bahwa tegangan kapasitor sebelum saklar dipindahkan ke posisi 2 adalah $v(0^-) = 0$. Setelah saklar pada posisi 2, aplikasi HTK memberikan persamaan rangkaian

$$-12 + 10^4 i + v = 0.$$

Karena $i = i_C = C dv/dt$, maka persamaan tersebut menjadi

$$-12 + 10^4 \times 0,1 \times 10^{-6} \frac{dv}{dt} + v = 0 \quad \text{atau} \quad 10^{-3} \frac{dv}{dt} + v = 12$$

$$\text{Persamaan karakteristik : } 10^{-3} s + 1 = 0 \rightarrow s = -1/10^{-3} = -1000$$

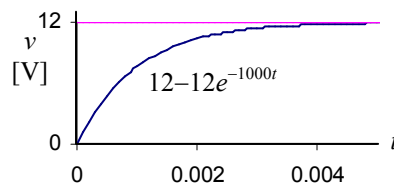
$$\text{Dugaan tanggapan alami : } v_a = A_0 e^{-1000t}$$

Fungsi pemaksa bernilai konstan (=12). Kita dapat menduga bahwa tanggapan paksa akan bernilai konstan juga karena turunannya akan nol sehingga kedua ruas persamaan rangkaian tersebut di atas dapat berisi suatu nilai konstan.

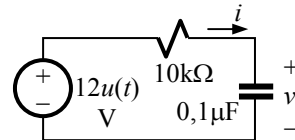
<p>Dugaan tanggapan paksa : $v_p = K$</p> <p>Masukkan v_p dugaan ini ke persamaan rangkaian : $0 + K = 12 \Rightarrow v_p = 12$</p> <p>Dugaan tanggapan lengkap : $v = 12 + A_0 e^{-1000t}$ V</p> <p>Kondisi awal : $v(0^+) = v(0^-) = 0$.</p> <p>Penerapan kondisi awal memberikan : $0 = 12 + A_0 \rightarrow A_0 = -12$</p> <p>Tanggapan lengkap menjadi : $v = 12 - 12 e^{-1000t}$ V</p>

Pemahaman :

a). Persamaan tegangan kapasitor ini menunjukkan perubahan tegangan pada waktu ia diisi, sebagaimana terlihat pada gambar di samping ini.



b). Pemasukan suatu tegangan konstan ke suatu rangkaian dengan menutup saklar pada $t = 0$ sama dengan memberikan bentuk gelombang tegangan anak tangga pada rangkaian. Pernyataan persoalan diatas dapat dinyatakan dengan rangkaian seperti tergambar di samping ini dengan tambahan keterangan bahwa $v_C(0^-) = 0$.



CONTOH 4.6 : Tentukanlah tegangan kapasitor v untuk $t > 0$ pada rangkaian di samping ini jika $v(0^-) = 4$ V.

Penyelesaian :

Aplikasi HTK pada rangkaian ini memberikan

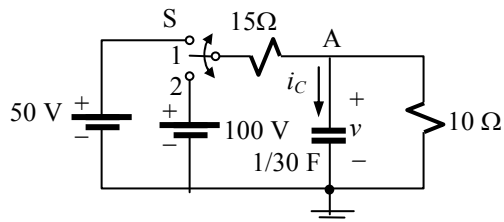
$$-12u(t) + 10^4 i + v = 0 \Rightarrow 10^{-3} \frac{dv}{dt} + v = 12u(t)$$

Jika kita hanya meninjau keadaan untuk $t > 0$ saja, maka fungsi anak tangga dapat kita tuliskan sebagai suatu nilai konstan tanpa menuliskan $u(t)$ lagi. Jadi persamaan rangkaian di atas menjadi

$$10^{-3} \frac{dv}{dt} + v = 12$$

Persamaan karakteristik : $10^{-3} s + 1 = 0 \rightarrow s = -10^3$
 Dugaan tanggapan alami: $v_a = A_0 e^{-1000t}$
 Dugaan tanggapan paksa : $v_p = K$ (fungsi pemaksa konstan) $\rightarrow 0 + K = 12 \rightarrow v_p = 12$
 Dugaan tanggapan lengkap : $v = v_p + A_0 e^{-1000t} = 12 + A_0 e^{-1000t}$
 Kondisi awal : $v(0^+) = v(0^-) = 4$ V.
 Penerapan kondisi awal memberikan : $4 = 12 + A_0 \rightarrow A_0 = -8$
 Tanggapan lengkap menjadi : $v = 12 - 8 e^{-1000t}$ V

CONTOH 4.7 : Semula, rangkaian berikut ini tidak mempunyai simpanan energi awal dan saklar S terbuka (tidak pada posisi 1 maupun 2). Kemudian saklar S ditutup pada posisi 1 selama beberapa milidetik sampai arus yang mengalir pada resistor 15Ω mencapai $2,6$ A. Segera setelah nilai arus ini dicapai, saklar dipindah ke posisi 2. Carilah tegangan kapasitor mulai saat saklar pada posisi 2.



Penyelesaian :

Persoalan menutup saklar ke posisi 1 adalah persoalan pengisian kapasitor. Kita tidak membahasnya lagi, dan selain itu berapa lama saklar ada di posisi 1 juga tidak dipermasalahkan. Informasi bahwa saklar ditutup pada posisi 1 sampai arus mencapai $2,6$ A menunjukkan bahwa sesaat sebelum saklar dipindahkan ke posisi 2, tegangan di simpul A (yang berarti pula tegangan pada kapasitor v), telah mencapai nilai tertentu yaitu $v(0^-) = 50 - 15 \times 2,6 = 11$ V.

Setelah saklar ada di posisi 2, yaitu pada $t > 0$, persamaan tegangan untuk simpul A

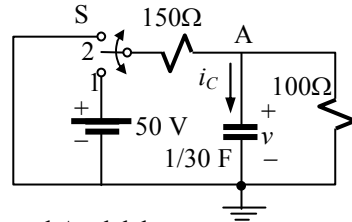
adalah: $v_A \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right) + i_C - \frac{100}{15} = 0$ atau $\frac{1}{6} v + i_C = \frac{20}{3}$

Karena $i_C = C dv/dt$, maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{1}{6}v + \frac{1}{30} \frac{dv}{dt} = \frac{20}{3} \quad \text{atau} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + 5v = 200}$$

Persamaan karakteristik : $s + 5 = 0 \rightarrow s = -5$ Dugaan tanggapan alami: $v_a = A_0 e^{-5t}$ Dugaan tanggapan paksa : $v_p = K \rightarrow 0 + 5K = 200 \rightarrow v_p = 40$ Dugaan tanggapan lengkap : $v = v_p + A_0 e^{-5t} = 40 + A_0 e^{-5t}$ Kondisi awal $v(0^+) = v(0^-) = 11 \text{ V}$ Penerapan kondisi awal memberikan: $11 = 40 + A_0 \rightarrow A_0 = -29$ Tanggapan lengkap menjadi : $v = 40 - 29 e^{-5t} \text{ V}$.
--

CONTOH 4.8 : Semula, rangkaian di samping ini tidak mempunyai simpanan energi awal. Pada $t = 0$ saklar S ditutup pada posisi 1 selama satu detik kemudian dipindah ke posisi 2. Carilah tegangan kapasitor untuk $t > 0$.



Penyelesaian :

Pada waktu saklar di posisi 1, persamaan tegangan simpul A adalah

$$v_A \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{100} \right) + i_C - \frac{50}{150} = 0 \rightarrow v \left(\frac{5}{300} \right) + \frac{1}{30} \frac{dv}{dt} - \frac{100}{300} = 0 \Rightarrow \boxed{v + 2 \frac{dv}{dt} = 20}$$

Persamaan karakteristik : $1 + 2s = 0 \rightarrow s = -0,5$ Dugaan tanggapan alami: $v_a = A_0 e^{-0,5t}$ Dugaan tanggapan paksa : $v_p = K \rightarrow K + 0 = 20$ Dugaan tanggapan lengkap : $v_1 = v_p + A_0 e^{-0,5t} = 20 + A_0 e^{-0,5t}$ Kondisi awal : $v_1(0^+) = 0$ Penerapan kondisi awal $\rightarrow 0 = 20 + A_0 \rightarrow A_0 = -20$ Tanggapan lengkap menjadi : $v_1 = 20 - 20 e^{-0,5t} \text{ V}$ untuk $0 < t \leq 1$ atau dapat dituliskan sebagai : $v_1 = [20 - 20 e^{-0,5t}] [u(t) - u(t-1)] \text{ V}$

Tanggapan ini berlangsung selama 1 detik, yaitu sampai saat saklar S dipindahkan ke posisi 2. Pada saat $t = 1$, tegangan kapasitor adalah

$$\boxed{v_1 = 20 - 20 e^{-0,5} = 20 - 12,1 = 7,9 \text{ V}}$$

Untuk $t > 1$, persamaan tegangan simpul A adalah

$$v_A \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{100} \right) + i_C = 0 \rightarrow v \left(\frac{5}{300} \right) + \frac{1}{30} \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{v + 2 \frac{dv}{dt} = 0}$$

Persamaan karakteristik : $1 + 2s = 0 \rightarrow s = -0,5$ Dugaan tanggapan alami: $v_a = A_{01} e^{-0,5t}$, untuk $t \geq 1$ $v_a = 0$, untuk $t < 1$ atau dapat dituliskan sebagai: $v_a = A_{01} e^{-0,5(t-1)} u(t-1)$

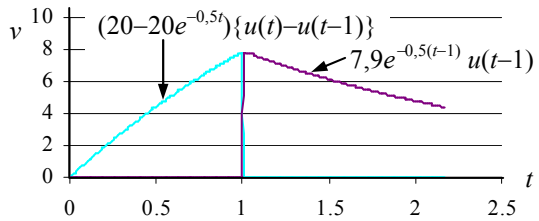
Tanggapan paksa : $v_{p1} = 0$
Tanggapan lengkap : $v_2 = [v_{p1} + A_{01}e^{-0,5(t-1)}]u(t-1) = [0 + A_{01}e^{-0,5(t-1)}]u(t-1)$
Kondisi awal : $v_2(1^+) = v_1(1^-) = 7,9$ V
Penerapan kondisi awal ($t = 1^+$) : $7,9 = 0 + A_{01} \rightarrow A_{01} = 7,9$
Tanggapan lengkap menjadi : $v_2 = 7,9 e^{-0,5(t-1)}u(t-1)$

Pernyataan tanggapan lengkap untuk seluruh selang waktu adalah

$$v = v_1 + v_2 = (20 - 20e^{-0,5t})(u(t) - u(t-1)) + 7,9 e^{-0,5(t-1)}u(t-1)$$

Pemahaman :

Gambar dari perubahan tegangan kapasitor adalah seperti di samping ini.



Prinsip Superposisi

Prinsip superposisi berlaku juga pada analisis transien. Jika rangkaian mengandung beberapa fungsi pemaksa, maka tanggapan total rangkaian adalah jumlah dari tanggapan lengkap dari masing-masing fungsi pemaksa yang ditinjau secara terpisah.

CONTOH 4.9 : Masukan pada rangkaian contoh 4.8. dapat dinyatakan sebagai sebuah sinyal impuls yang muncul pada $t = 0$ dengan amplitudo 50 V dan durasinya 1 detik. Carilah v untuk $t > 0$.

Penyelesaian :

Sinyal impuls ini dapat dinyatakan dengan fungsi anak tangga sebagai

$$v_s = 50u(t) - 50u(t-1) \text{ V}$$

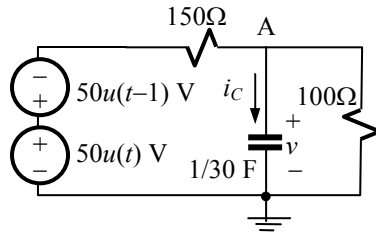
Kita dapat memandang masukan ini sebagai terdiri dari dua sumber yaitu

$$v_{s1} = 50u(t) \text{ V dan } v_{s2} = -50u(t-1) \text{ V}$$

Rangkaian ekivalennya dapat digambarkan seperti di samping ini.

Untuk v_{s1} persamaan rangkaian adalah

$$v_A \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{100} \right) + i_C - \frac{50}{150} = 0 \Rightarrow v + 2 \frac{dv}{dt} = 20u(t)$$



Tanggapan lengkap dari persamaan ini telah diperoleh pada contoh 4.8. yaitu

$$v_{o1} = (20 - 20 e^{-0,5t})u(t) \text{ V}$$

Untuk v_{s2} dengan peninjauan hanya pada $t > 1$, persamaan rangkaian adalah

$$v_A \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{100} \right) + i_C + \frac{50}{150} = 0 \Rightarrow v + 2 \frac{dv}{dt} = -20u(t-1)$$

Persamaan karakteristik : $2s + 1 = 0 \rightarrow s = -0,5$ Dugaan tanggapan alami : $v_a = A_{01}e^{-0,5(t-1)}u(t-1)$ Dugaan tanggapan paksa : $v_{p2} = K_2 \rightarrow K_2 + 0 = -20$ Dugaan tanggapan lengkap : $v_{o2} = -20 + A_{01}e^{-0,5(t-1)}u(t-1)$ Kondisi awal : $v(1^+) = 0 \rightarrow 0 = -20 + A_{01} \rightarrow A_{01} = 20$ Tanggapan lengkap menjadi : $v_{o2} = (-20 + 20e^{-0,5(t-1)})u(t-1)$ V

Tanggapan total : $v = v_{o1} + v_{o2}$ $= (20 - 20e^{-0,5t})u(t) + (-20 + 20e^{-0,5(t-1)})u(t-1)$ V

Hasil ini sama dengan apa yang telah diperoleh pada contoh 4.8.

Tanggapan Rangkaian Orde Pertama Terhadap Sinyal Sinus

Berikut ini kita akan melihat tanggapan rangkaian terhadap sinyal sinus. Karena tanggapan alami tidak tergantung dari bentuk fungsi pemaksa, maka pencarian tanggapan alami dari rangkaian ini sama seperti apa yang kita lihat pada contoh-contoh sebelumnya. Jadi dalam hal ini perhatian kita lebih kita tujukan pada pencarian tanggapan paksa.

Bentuk umum dari fungsi sinus yang muncul pada $t = 0$ adalah

$$y = A \cos(\omega t + \theta)u(t) \tag{4.15.a}$$

Jika kita hanya meninjau keadaan untuk $t > 0$ saja, maka $u(t)$ pada (4.15.a) tidak perlu dituliskan lagi, sehingga pernyataan fungsi sinus menjadi

$$y = A \cos(\omega t + \theta) \tag{4.15.b}$$

Fungsi sinus umum ini dapat kita tuliskan sebagai berikut.

$$y = A \cos(\omega t + \theta) = A \{ \cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta \}$$

$y = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$ dengan $A_c = A \cos \theta$ dan $A_s = -A \sin \theta$	(4.16)
--	--------

Dengan pernyataan umum seperti (4.16), kita terhindar dari perhitungan sudut fasa θ , karena sudut fasa ini tercakup dalam koefisien A_c dan A_s . Dalam analisis rangkaian yang melibatkan sinyal sinus, kita akan menggunakan bentuk umum sinyal sinus seperti (4.16). Koefisien A_c dan A_s tidak selalu ada. Jika sudut fasa $\theta = 0$ maka $A_s = 0$ dan jika $\theta = 90^\circ$ maka $A_c = 0$. Jika kita memerlukan nilai sudut fasa dari fungsi sinus yang dinyatakan dengan persamaan umum (4.16), kita menggunakan hubungan

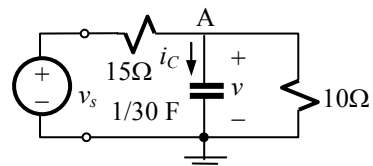
$$\tan \theta = \frac{A_s}{A_c} \tag{4.17}$$

Turunan fungsi sinus akan berbentuk sinus juga.

$y = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t ; \frac{dy}{dt} = -A_c \omega \sin \omega t + A_s \omega \cos \omega t ; \frac{d^2y}{dt^2} = -A_c \omega^2 \cos \omega t - A_s \omega^2 \sin \omega t$	(4.18)
---	--------

Oleh karena itu, penjumlahan y dan turunannya akan berbentuk fungsi sinus juga dan hal inilah yang membawa kita pada persamaan (4.8).

CONTOH 4.10 : Carilah tegangan dan arus kapasitor untuk $t > 0$ pada rangkaian di bawah ini, jika diketahui bahwa $v_s = 50 \cos 10t$ u(t) V dan $v(0^+) = 0$.



Penyelesaian :

Persamaan tegangan simpul untuk simpul A adalah

$$v\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right) + i_C - \frac{v_s}{15} = 0 \rightarrow \frac{1}{6}v + i_C = \frac{v_s}{15}$$

Karena $i_C = C dv/dt$, persamaan di atas dapat kita tulis

$$\frac{1}{6}v + \frac{1}{30} \frac{dv}{dt} = \frac{v_s}{15} \quad \text{atau} \quad \frac{dv}{dt} + 5v = 100 \cos 10t$$

Faktor $u(t)$ tak dituliskan lagi karena kita hanya melihat keadaan pada $t > 0$.

$$\text{Persamaan karakteristik : } s + 5 = 0 \rightarrow s = -5$$

$$\text{Dugaan tanggapan alami : } v_a = A_0 e^{-5t}$$

Fungsi pemaksa berbentuk sinus. Tanggapan paksa kita duga akan berbentuk $A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$.

$$\text{Dugaan tanggapan paksa : } v_p = A_c \cos 10t + A_s \sin 10t$$

Substitusi tanggapan dugaan ini ke persamaan rangkaian memberikan:

$$-10A_c \sin 10t + 10A_s \cos 10t + 5A_c \cos 10t + 5A_s \sin 10t = 100 \cos 10t$$

$$\rightarrow -10A_c + 5A_s = 0 \quad \text{dan} \quad 10A_s + 5A_c = 100$$

$$\rightarrow A_s = 2A_c \rightarrow 20A_c + 5A_c = 100 \Rightarrow A_c = 4 \quad \text{dan} \quad A_s = 8$$

$$\text{Tanggapan paksa : } v_p = 4 \cos 10t + 8 \sin 10t$$

$$\text{Dugaan tanggapan lengkap : } v = 4 \cos 10t + 8 \sin 10t + A_0 e^{-5t}$$

$$\text{Kondisi awal } v(0^+) = 0$$

$$\text{Penerapan kondisi awal : } 0 = 4 + A_0 \rightarrow A_0 = -4$$

$$\text{Jadi tegangan kapasitor : } v = 4 \cos 10t + 8 \sin 10t - 4e^{-5t} \text{ V}$$

$$\text{Arus kapasitor : } i_C = C \frac{dv}{dt} = \frac{1}{30} \left(-40 \sin 10t + 80 \cos 10t + 20 e^{-5t} \right)$$

$$= -1,33 \sin 10t + 2,66 \cos 10t + 0,66 e^{-5t} \text{ A}$$

CONTOH 4.11 : Carilah tegangan dan arus kapasitor pada contoh 4.10. jika kondisi awalnya adalah $v(0^+) = 10 \text{ V}$.

Penyelesaian :

Tanggapan lengkap yang diperoleh pada 4.10.

$$\text{Tanggapan lengkap : } v = 4 \cos 10t + 8 \sin 10t + A_0 e^{-5t}$$

$$\text{Kondisi awal } v(0^+) = 10 \rightarrow 10 = 4 + A_0 \rightarrow A_0 = 6$$

$$\text{Jadi : } v = 4 \cos 10t + 8 \sin 10t + 6 e^{-5t} \text{ V}$$

$$\text{Arus kapasitor : } i_C = C \frac{dv}{dt} = \frac{1}{30} \left(-40 \sin 10t + 80 \cos 10t - 30 e^{-5t} \right)$$

$$= -1,33 \sin 10t + 2,33 \cos 10t - e^{-5t} \text{ A}$$

CONTOH 4.12 : Carilah tegangan kapasitor pada contoh 4.10. jika $v_s = 50 \cos(10t + \theta)u(t)$ V dan kondisi awalnya adalah $v(0^+) = 10 \text{ V}$.

Penyelesaian :

$$\text{Persamaan rangkaian : } \frac{dv}{dt} + 5v = 100 \cos(10t + \theta) = 100 \cos \theta \cos 10t - 100 \sin \theta \sin 10t$$

$$\text{Tanggapan alami : } v_a = A_0 e^{-5t} \quad (\text{sama seperti contoh 4.10.})$$

Dugaan tanggapan paksa : $v_p = A_c \cos 10t + A_s \sin 10t$

Substitusi tanggapan paksa dugaan ini ke persamaan rangkaian memberikan :

$$-10A_c \sin 10t + 10A_s \cos 10t + 5A_c \cos 10t + 5A_s \sin 10t = 100 \cos \theta \cos 10t - 100 \sin \theta \sin 10t$$

$$\rightarrow -10A_c + 5A_s = -100 \sin \theta \quad \text{dan} \quad 10A_c + 5A_s = 100 \cos \theta$$

$$\rightarrow A_s = -20 \sin \theta + 2A_c \quad \text{dan} \quad -200 \sin \theta + 20A_c + 5A_c = 100 \cos \theta$$

$$\Rightarrow A_c = 4 \cos \theta + 8 \sin \theta \quad \text{dan} \quad A_s = -4 \sin \theta + 8 \cos \theta$$

Tanggapan paksa menjadi: $v_p = (4 \cos \theta + 8 \sin \theta) \cos 10t + (-4 \sin \theta + 8 \cos \theta) \sin 10t$

$$= 4 \cos(10t + \theta) + 8 \sin(10t + \theta)$$

Tanggapan lengkap : $v = 4 \cos(10t + \theta) + 8 \sin(10t + \theta) + A_0 e^{-5t}$

Kondisi awal $v(0^+) = 10 \rightarrow 10 = 4 \cos \theta + 8 \sin \theta + A_0 \rightarrow A_0 = 10 - (4 \cos \theta + 8 \sin \theta)$

Jadi : $v = 4 \cos(10t + \theta) + 8 \sin(10t + \theta) + (10 - 4 \cos \theta - 8 \sin \theta) e^{-5t}$

Tanggapan Masukan Nol dan Tanggapan Status Nol

Jika suatu rangkaian tidak mempunyai masukan, dan yang ada hanyalah simpanan energi dalam rangkaian, maka tanggapan rangkaian dalam peristiwa ini kita sebut *tanggapan masukan nol*. Bentuk tanggapan ini secara umum adalah

$$y_{m0} = y(0^+) e^{-(b/a)t} \quad (4.19)$$

Sebagaimana kita ketahui $y(0^+)$ adalah kondisi awal, yang menyatakan adanya simpanan energi pada rangkaian pada $t = 0^-$. Jadi tanggapan masukan nol merupakan pelepasan energi yang semula tersimpan dalam rangkaian.

Jika rangkaian tidak mempunyai simpanan energi awal, atau kita katakan ber-*status-nol*, maka tanggapan rangkaian dalam peristiwa ini kita sebut *tanggapan status nol*. Bentuk tanggapan ini ditunjukkan oleh (4.13) yang kita tuliskan lagi sebagai

$$y_{s0} = y_f - y_f(0^+) e^{-(b/a)t} \quad (4.20)$$

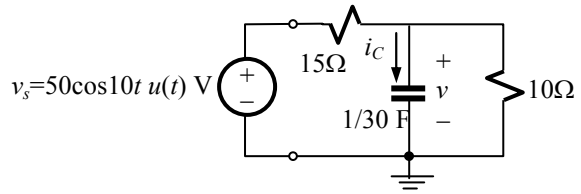
dengan y_f adalah *tanggapan keadaan mantap* atau *keadaan final*, yang telah kita sebut pula sebagai tanggapan paksa. Suku kedua adalah *negatif dari nilai tanggapan mantap pada $t = 0$* yang menurun secara eksponensial. Ini merupakan reaksi alamiah rangkaian yang mencoba mempertahankan *status-nol-nya* pada saat muncul fungsi pemaksa pada $t = 0$. Jadi suku kedua ini tidak lain adalah tanggapan alamiah dalam status nol.

Tanggapan lengkap rangkaian seperti ditunjukkan oleh (4.12) dapat kita tuliskan kembali sebagai

$$y = y_{s0} + y_{m0} = y_f(t) - y_f(0^+) e^{-(b/a)t} + y(0^+) e^{-(b/a)t}$$

Pengertian mengenai tanggapan status nol dan tanggapan masukan nol tersebut di atas, mengingatkan kita pada prinsip superposisi. Rangkaian dapat kita pandang sebagai mengandung dua macam masukan; masukan yang pertama adalah sumber yang membangkitkan fungsi pemaksa $x(t)$, dan masukan yang kedua adalah simpanan energi awal yang ada pada rangkaian. Dua macam masukan itu masing-masing dapat kita tinjau secara terpisah. Jika hanya ada fungsi pemaksa, kita akan mendapatkan tanggapan status nol y_{s0} , dan jika hanya ada simpanan energi awal saja maka kita akan mendapatkan tanggapan masukan nol y_{m0} . Tanggapan lengkap adalah jumlah dari tanggapan status nol dan tanggapan masukan nol, $y = y_{s0} + y_{m0}$. Sebagai contoh kita akan melihat lagi persoalan pada contoh 4.11. yang akan kita selesaikan dengan menggunakan pengertian tanggapan status nol dan tanggapan masukan nol.

CONTOH 4.13 : Carilah tegangan dan arus kapasitor untuk $t > 0$ pada rangkaian di samping ini, jika diketahui bahwa $v(0^+) = 10$ V.



Penyelesaian :

Persamaan rangkaian ini telah kita dapatkan untuk peninjauan pada $t > 0$, yaitu

$$\frac{dv}{dt} + 5v = 100 \cos 10t$$

Persamaan karakteristik : $s + 5 = 0 \rightarrow s = -5$

Tanggapan masukan nol : $v_{m0} = K_{m0} e^{-5t}$

Kondisi awal : $v_{m0}(0^+) = v(0^+) = 10 \Rightarrow K_{m0} = 10 \Rightarrow v_{m0} = 10e^{-5t}$

Dugaan tanggapan mantap : $v_f = A_c \cos 10t + A_s \sin 10t$

$\Rightarrow -10A_c \sin 10t + 10A_s \cos 10t + 5A_c \cos 10t + 5A_s \sin 10t = 100 \cos 10t$

$\Rightarrow -10A_c + 5A_s = 0 \rightarrow A_s = 2A_c$

$10A_s + 5A_c = 100 \rightarrow 20A_c + 5A_c = 100 \Rightarrow A_c = 4 \Rightarrow A_s = 8$

Tanggapan mantap : $v_f = 4 \cos 10t + 8 \sin 10t \rightarrow v_f(0^+) = 4$

Tanggapan status nol : $v_{s0} = v_f - v_f(0^+) e^{st} = 4 \cos 10t + 8 \sin 10t - 4e^{-5t}$

Tanggapan lengkap : $v = v_{s0} + v_{m0} = 4 \cos 10t + 8 \sin 10t + 6e^{-5t}$

Ringkasan Mengenai Tanggapan Rangkaian Orde Pertama

Tanggapan rangkaian terdiri dari tanggapan paksa dan tanggapan alami. Tanggapan alami merupakan komponen transien dengan konstanta waktu yang ditentukan oleh nilai-nilai elemen rangkaian. Tanggapan paksa merupakan tanggapan rangkaian terhadap fungsi pemaksa dari luar dan merupakan komponen mantap atau kondisi final.

$$y = y_p(t) + A_0 e^{-t/\tau}$$

Tanggapan Paksa :

- ditentukan oleh fungsi pemaksa.
- merupakan komponen mantap; tetap ada untuk $t \rightarrow \infty$.

Tanggapan Alami :

- tidak ditentukan oleh fungsi pemaksa.
- merupakan komponen transien; hilang pada $t \rightarrow \infty$.
- konstanta waktu $\tau = a/b$

Tanggapan rangkaian juga dapat dipandang sebagai terdiri dari tanggapan status nol dan tanggapan masukan nol. Tanggapan status nol adalah tanggapan rangkaian tanpa simpanan energi awal. Tanggapan masukan nol adalah tanggapan rangkaian tanpa masukan atau dengan kata lain tanggapan rangkaian tanpa pengaruh fungsi pemaksa.

$$y = y_p(t) - y_p(0^+) e^{-t/\tau} + y(0^+) e^{-t/\tau}$$

Tanggapan Status Nol :

- tanggapan rangkaian dengan menganggap tidak ada simpanan energi awal dalam rangkaian.

Tanggapan Masukan Nol :

- tanggapan rangkaian dengan menganggap tidak ada masukan.
- merupakan upaya rangkaian untuk melepaskan simpanan energinya.

SOAL-SOAL : ANALISIS TRANSIEN SISTEM ORDE PERTAMA

1. Carilah bentuk gelombang tegangan yang memenuhi persamaan diferensial berikut.

a). $\frac{dv}{dt} + 10v = 0$, $v(0^+) = 10$ V
 b). $\frac{dv}{dt} + 15v = 0$, $v(0^+) = 5$ V

2. Carilah bentuk gelombang arus yang memenuhi persamaan diferensial berikut.

a). $\frac{di}{dt} + 8i = 0$, $i(0^+) = 2$ A
 b). $\frac{di}{dt} + 10^4 i = 0$, $i(0^+) = -5$ mA

3. Carilah bentuk gelombang tegangan yang memenuhi persamaan diferensial berikut.

a). $\frac{dv}{dt} + 10v = 10u(t)$, $v(0^+) = 0$
 b). $\frac{dv}{dt} + 10v = 10u(t)$, $v(0^+) = 5$ V

4. Carilah bentuk gelombang arus yang memenuhi persamaan diferensial berikut.

a). $\frac{di}{dt} + 10^4 i = 100u(t)$, $i(0^+) = 0$
 b). $\frac{di}{dt} + 10^4 i = 100u(t)$, $i(0^+) = -20$ mA

5. Carilah bentuk gelombang tegangan yang memenuhi persamaan diferensial berikut.

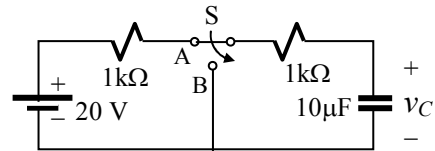
a). $\frac{dv}{dt} + 5v = 10\cos(5t)u(t)$, $v(0^+) = 0$
 b). $\frac{dv}{dt} + 10v = 10\cos(5t)u(t)$, $v(0^+) = 5$ V

6. Carilah bentuk gelombang arus yang memenuhi persamaan diferensial berikut.

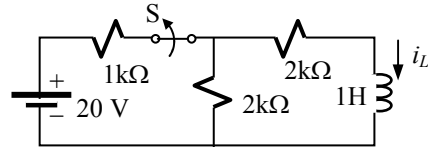
a). $\frac{di}{dt} + 10^4 i = 100[\sin 100t]u(t)$, $i(0^+) = 0$
 b). $\frac{di}{dt} + 10^4 i = 100[\sin 100t]u(t)$, $i(0^+) = 0,5$ A

7. Saklar S pada rangkaian di bawah ini, telah lama berada pada posisi A. Pada $t = 0$,

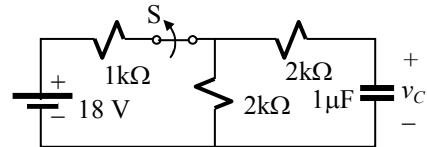
$t = 0$, ia dipindahkan ke posisi B. Carilah v_C untuk $t > 0$.



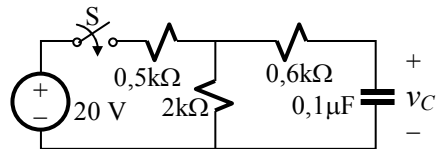
8. Saklar S pada rangkaian di bawah ini, telah lama tertutup. Pada $t = 0$, ia dibuka. Carilah i_L untuk $t > 0$.



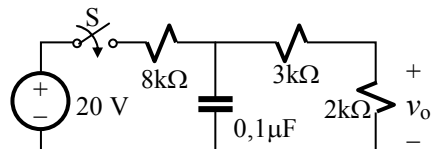
9. Saklar S pada rangkaian di bawah ini, telah lama tertutup. Pada $t = 0$, ia dibuka. Carilah v_C untuk $t > 0$.



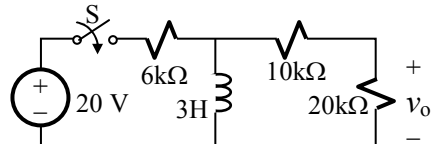
10. Saklar S pada rangkaian di bawah ini, telah lama terbuka. Pada $t = 0$, ia ditutup. Carilah v_C untuk $t > 0$.



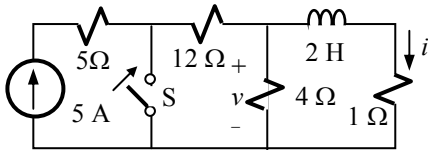
11. Saklar S pada rangkaian di bawah ini, telah lama terbuka. Pada $t = 0$, ia ditutup. Carilah v_o untuk $t > 0$.



12. Saklar S pada rangkaian di bawah ini, telah lama terbuka. Pada $t = 0$, ia ditutup. Carilah v_o untuk $t > 0$.



13. Rangkaian di bawah ini telah lama dalam keadaan mantap dengan saklar dalam keadaan terbuka. Pada $t = 0$ saklar S ditutup. Tentukan i dan v untuk $t > 0$.



14. Sebuah kumparan mempunyai induktansi 10 H dan resistansi 10 Ω . Pada $t = 0$, kumparan ini diberi tegangan 100 V. Berapa lama dibutuhkan waktu untuk mencapai arus setengah dari nilai akhirnya ?
15. Sebuah rele mempunyai kumparan dengan induktansi 1,2 H yang resistansinya 18 Ω . Jangkar rele akan terangkat jika arus di kumparannya mencapai 50 mA. Rele ini dioperasikan dari jauh melalui kabel yang resistansi totalnya 45 Ω dan dicatu oleh batere 12 V dengan resistansi internal 1 Ω . Hitunglah selang waktu antara saat ditutupnya rangkaian dengan saat mulai beroperasinya rele.
16. Sebuah mesin mobil 6 silinder menggunakan sistem penyalan dengan kumparan (coil) yang dicatu oleh accu 12 V. Rangkaian primer sistem penyalan ini mempunyai resistansi 4 Ω dan induktansi 0,01 H. (a) Tentukan konstanta waktu rangkaian primer. (b) Anggaplah waktu-kontak dan waktu-buka interuptor (platina) sama besar. Jika perioda kontak dari platina sama dengan konstanta waktu rangkaian primer, berapakah kecepatan perputaran mesin ? (c) Hitunglah besarnya arus di rangkaian primer pada saat terbukanya platina. (d) Jika accu menurun tegangannya, bagaimanakah pengaruhnya pada rangkaian penyalan ini ?

17. Sebuah kapasitor 20 μF terhubung paralel dengan resistor R . Rangkaian ini diberi tegangan searah 500 V dan setelah cukup lama sumber tegangan dilepaskan. Tegangan kapasitor menurun mencapai 300 V dalam waktu setengah menit. Hitunglah berapa M Ω resistor yang terparalel dengan kapasitor ?

18. Pada kabel penyalur daya, konduktor dan pelindung metalnya membentuk suatu kapasitor. Suatu kabel penyalur daya searah sepanjang 10 km mempunyai kapasitansi 2,5 μF dan resistansi isolasinya 80 M Ω . Jika kabel ini dipakai untuk menyalurkan daya searah pada tegangan 20 kV, kemudian beban dilepaskan dan tegangan sumber juga dilepaskan, berapakah masih tersisa tegangan kabel 5 menit setelah dilepaskan dari sumber ?

19. Pada soal 10 s/d 12 di atas, penutupan saklar pada $t = 0$ menunjukkan bahwa sinyal masukan pada rangkaian muncul pada $t = 0$ sehingga sinyal masukan pada soal tersebut dapat dinyatakan sebagai $v_s = v_{in} u(t)$ V.

Ulangi soal 10 jika masukannya adalah $v_s = [10 \cos 5000t] u(t)$ V.

20. Ulangi soal 11 jika masukannya adalah $v_s = [10 \cos 5000t] u(t)$ V.

21. Ulangi soal 12 jika masukannya adalah $v_s = [10 \cos 5000t] u(t)$ V.

22. Tegangan bolak-balik sinus dengan amplitudo 400 V dan frekuensi 50 Hz, diterapkan pada sebuah kumparan yang mempunyai induktansi 0,1 H dan resistansinya 10 Ω . Bagaimanakah persamaan arus yang melalui kumparan itu beberapa saat setelah tegangan diterapkan ? Dihitung dari saat tegangan diterapkan, berapa lamakah keadaan mantap tercapai ?

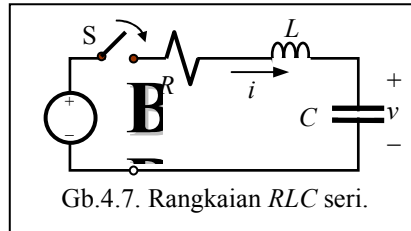
4.2. Sistem Orde Kedua

Tujuan :

- Mampu menurunkan persamaan rangkaian yang merupakan rangkaian orde kedua.
- Memahami bahwa tanggapan rangkaian terdiri dari tanggapan paksa dan tanggapan alami yang mungkin beresilasi.
- Mampu melakukan analisis transien pada rangkaian orde kedua.

Contoh Rangkaian Orde Kedua

Rangkaian RLC Seri. Kita lihat rangkaian seri RLC seperti pada Gb.4.7. Saklar S ditutup pada $t = 0$. Langkah pertama dalam mencari tanggapan rangkaian ini adalah mencari persamaan rangkaian. Karena rangkaian mengandung C dan L , maka ada dua peubah status, yaitu *tegangan kapasitor* dan *arus induktor*, yang dapat kita pilih untuk digunakan dalam mencari persamaan rangkaian. Kita akan mencoba lebih dulu menggunakan tegangan kapasitor sebagai peubah rangkaian, kemudian melihat apa yang akan kita dapatkan jika arus induktor yang kita pilih.



Gb.4.7. Rangkaian RLC seri.

Aplikasi HTK untuk $t > 0$ pada rangkaian ini memberikan :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + v = v_{in} \quad (4.21)$$

Karena $i = i_C = C dv/dt$, maka persamaan (4.21) menjadi :

$$LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = v_{in} \quad (4.22)$$

Persamaan (4.22) adalah persamaan diferensial orde kedua, yang merupakan diskripsi lengkap rangkaian, dengan tegangan kapasitor sebagai peubah. Untuk memperoleh persamaan rangkaian dengan arus induktor i sebagai peubah, kita manfaatkan hubungan arus-tegangan kapasitor, yaitu

$$i = i_C = C \frac{dv}{dt} \rightarrow v = \frac{1}{C} \int idt$$

sehingga (4.21) menjadi:

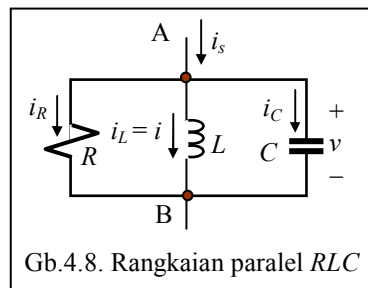
$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt + v(0) = v_{in} \quad \text{atau} \quad LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{dv_{in}}{dt} = i_{in} \quad (4.23)$$

Persamaan (4.22) dan (4.23) sama bentuknya, hanya peubah sinyalnya yang berbeda. Hal ini berarti bahwa *tegangan kapasitor* ataupun *arus induktor* sebagai peubah akan memberikan persamaan rangkaian yang setara. Kita cukup mempelajari salah satu di antaranya.

Rangkaian RLC Paralel. Perhatikan rangkaian RLC paralel seperti pada Gb.4.8. Aplikasi HAK pada simpul A memberikan $i_R + i_L + i_C = i_s$

Hubungan ini dapat dinyatakan dengan arus induktor $i_L = i$ sebagai peubah, dengan memanfaatkan hubungan $v = v_L = L di/dt$, sehingga $i_R = v/R$ dan $i_C = C dv/dt$.

$$\frac{v}{R} + i + C \frac{dv}{dt} = i_s \quad \text{atau} \quad LC \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = i_s \quad (4.24)$$



Gb.4.8. Rangkaian paralel RLC

Persamaan rangkaian paralel RLC juga merupakan persamaan diferensial orde kedua.

Tinjauan Umum Tanggapan Rangkaian Orde Kedua

Secara umum rangkaian orde kedua mempunyai persamaan yang berbentuk

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = x(t) \quad (4.25)$$

Pada sistem orde satu kita telah melihat bahwa tanggapan rangkaian terdiri dari dua komponen yaitu *tanggapan alami* dan *tanggapan paksa*. Hal yang sama juga terjadi pada sistem orde kedua yang dengan mudah dapat ditunjukkan secara matematis seperti halnya pada sistem orde pertama. Perbedaan dari kedua sistem ini terletak pada kondisi awalnya. Karena rangkaian orde kedua mengandung dua elemen yang mampu menyimpan energi yaitu L dan C , maka dalam sistem ini baik arus induktor maupun tegangan kapasitor harus merupakan fungsi kontinyu. Oleh karena itu ada dua kondisi awal yang harus dipenuhi, yaitu

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) \quad \text{dan} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

Dalam penerapannya, kedua kondisi awal ini harus dijadikan satu, artinya v_C dinyatakan dalam i_L atau sebaliknya i_L dinyatakan dalam v_C , tergantung dari apakah peubah y pada (4.25) berupa tegangan kapasitor ataukah arus induktor.

Sebagai contoh, pada rangkaian RLC seri hubungan antara v_C dan i_L adalah

$$i(0^+) = i_L(0^+) = i_C(0^+) = C \frac{dv_C}{dt}(0^+) \quad \text{atau} \quad \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i(0^+)}{C}$$

Dengan demikian jika peubah y adalah tegangan kapasitor, dua kondisi awal yang harus diterapkan, adalah: $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ dan $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{i_L(0^+)}{C}$.

Contoh lain adalah rangkaian paralel RLC ; hubungan antara v_C dan i_L adalah

$$v_C(0^+) = v_L(0^+) = L \frac{di_L}{dt}(0^+) \quad \text{atau} \quad \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{L}$$

Dengan demikian jika peubah y adalah arus induktor, dua kondisi awal yang harus diterapkan, adalah: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ dan $\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{L}$.

Secara umum, dua kondisi awal yang harus kita terapkan pada (4.25) adalah

$$\boxed{y(0^+) = y(0^-) \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt}(0^+) = y'(0^+)} \quad (4.26)$$

dengan $y'(0^+)$ dicari dari hubungan rangkaian

Tanggapan Alami. Tanggapan alami diperoleh dari persamaan rangkaian dengan memberikan nilai nol pada ruas kanan dari persamaan (4.25), sehingga persamaan menjadi

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0 \quad (4.27)$$

Agar persamaan ini dapat dipenuhi, y dan turunannya harus mempunyai bentuk sama sehingga dapat diduga y berbentuk fungsi eksponensial $y_a = Ke^{st}$ dengan nilai K dan s yang masih harus ditentukan. Kalau solusi ini dimasukkan ke (4.27) akan diperoleh :

$$aKs^2 e^{st} + bKs e^{st} + cK e^{st} = 0 \quad \text{atau} \quad Ke^{st}(as^2 + bs + c) = 0 \quad (4.28)$$

Fungsi e^{st} tidak boleh nol untuk semua nilai t . Kondisi $K = 0$ juga tidak diperkenankan karena hal itu akan berarti $y_a = 0$ untuk seluruh t . Satu-satunya jalan agar persamaan ini dipenuhi adalah

$$\boxed{as^2 + bs + c = 0} \quad (4.29)$$

Persamaan ini adalah persamaan karakteristik rangkaian orde kedua. Secara umum, persamaan karakteristik yang berbentuk persamaan kwadrat itu mempunyai dua akar yaitu :

$$s_1, s_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.30)$$

Akar-akar persamaan ini mempunyai tiga kemungkinan nilai, yaitu: dua akar riil berbeda, dua akar sama, atau dua akar kompleks konjugat. Konsekuensi dari masing-masing kemungkinan nilai akar ini terhadap bentuk gelombang tanggapan rangkaian akan kita lihat lebih lanjut. Untuk sementara ini kita melihat secara umum bahwa persamaan karakteristik mempunyai dua akar.

Dengan adanya dua akar tersebut maka kita mempunyai dua tanggapan alami, yaitu:

$$y_{a1} = K_1 e^{s_1 t} \quad \text{dan} \quad y_{a2} = K_2 e^{s_2 t}$$

Jika y_{a1} merupakan solusi dan y_{a2} juga merupakan solusi, maka jumlah keduanya juga merupakan solusi. Jadi tanggapan alami yang kita cari akan berbentuk

$$y_a = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (4.31)$$

Konstanta K_1 dan K_2 kita cari melalui *penerapan kondisi awal pada tanggapan lengkap*.

Tanggapan Paksa. Tanggapan paksa kita cari dari persamaan (4.25). Tanggapan paksa ini ditentukan oleh bentuk fungsi masukan. Cara menduga bentuk tanggapan paksa sama dengan apa yang kita pelajari pada rangkaian orde pertama, yaitu relasi (4.8). Untuk keperluan pembahasan di sini, tanggapan paksa kita umpamakan sebagai $y_{paksa} = y_p$.

Tanggapan Lengkap. Dengan pemisalan tanggapan paksa tersebut di atas maka tanggapan lengkap (tanggapan rangkaian) menjadi

$$y = y_p + y_a = y_p + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (4.32)$$

Tiga Kemungkinan Bentuk Tanggapan

Sebagaimana disebutkan, akar-akar persamaan karakteristik yang bentuk umumnya adalah $as^2 + bs + c = 0$ dapat mempunyai tiga kemungkinan nilai akar, yaitu:

- Dua akar riil berbeda, $s_1 \neq s_2$, jika $\{b^2 - 4ac\} > 0$;
- Dua akar sama, $s_1 = s_2 = s$, jika $\{b^2 - 4ac\} = 0$;
- Dua akar kompleks konjugat $s_1, s_2 = \alpha \pm j\beta$ jika $\{b^2 - 4ac\} < 0$.

Tiga kemungkinan nilai akar tersebut akan memberikan tiga kemungkinan bentuk tanggapan yang akan kita lihat berikut ini, dengan contoh tanggapan rangkaian tanpa fungsi pemaksa.

Dua Akar Riil Berbeda. Kalau kondisi awal $y(0^+)$ dan $dy/dt(0^+)$ kita terapkan pada tanggapan lengkap (4.32), kita akan memperoleh dua persamaan yaitu

$$y(0^+) = y_p(0^+) + K_1 + K_2 \quad \text{dan} \quad y'(0^+) = y_p'(0^+) + s_1 K_1 + s_2 K_2$$

yang akan menentukan nilai K_1 dan K_2 . Jika kita sebut

$$A_0 = y(0^+) - y_p(0^+) \quad \text{dan} \quad B_0 = y'(0^+) - y_p'(0^+) \quad (4.33)$$

maka kita peroleh $K_1 + K_2 = A_0$ dan $s_1 K_1 + s_2 K_2 = B_0$ dan dari sini kita memperoleh

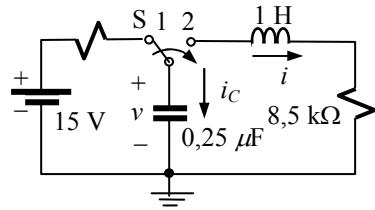
$$K_1 = \frac{s_2 A_0 - B_0}{s_2 - s_1} \quad \text{dan} \quad K_2 = \frac{s_1 A_0 - B_0}{s_1 - s_2}$$

sehingga tanggapan lengkap menjadi

$$y = y_p + \frac{s_2 A_0 - B_0}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{s_1 A_0 - B_0}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \quad (4.34)$$

Berikut ini kita lihat suatu contoh. Seperti halnya pada rangkaian orde pertama, pada rangkaian orde kedua ini kita juga mengartikan tanggapan rangkaian sebagai tanggapan lengkap. Hal ini didasari oleh pengertian tentang kondisi awal, yang hanya dapat diterapkan pada tanggapan lengkap. Rangkaian-rangkaian yang hanya mempunyai tanggapan alami kita fahami sebagai rangkaian dengan tanggapan paksa yang bernilai nol.

CONTOH 4.14 : Saklar S pada rangkaian di samping ini telah lama berada pada posisi 1. Pada $t = 0$ saklar dipindahkan ke posisi 2. Tentukan tegangan kapasitor, v , untuk $t > 0$.



Penyelesaian :

Kondisi mantap yang telah tercapai pada waktu saklar di posisi 1 membuat kapasitor bertegangan sebesar tegangan sumber, sementara induktor tidak dialiri arus. Jadi

$$v(0^-) = 15 \text{ V} \quad ; \quad i(0^-) = 0$$

Setelah saklar di posisi 2, persamaan rangkaian adalah : $-v + L \frac{di}{dt} + iR = 0$

Karena $i = -i_c = -C \frac{dv}{dt}$, maka persamaan tersebut menjadi

$$-v + L \frac{d}{dt} \left(-C \frac{dv}{dt} \right) + R \left(-C \frac{dv}{dt} \right) = 0 \rightarrow LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = 0$$

Jika nilai-nilai elemen dimasukkan dan dikalikan dengan 4×10^6 maka persamaan rangkaian menjadi

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + 8,5 \times 10^3 \frac{dv}{dt} + 4 \times 10^6 v = 0}$$

Persamaan karkteristik : $s^2 + 8,5 \times 10^3 s + 4 \times 10^6 = 0$

→ akar - akar : $s_1, s_2 = -4250 \pm 10^3 \sqrt{(4,25)^2 - 4} = -500, -8000$ (dua akar riil berbeda).

Dugaan tanggapan lengkap : $v = 0 + K_1 e^{-500t} + K_2 e^{-8000t}$ (tanggapan paksa nol)

Kondisi awal : a). $v(0^+) = v(0^-) = 15 \text{ V} \rightarrow 15 = K_1 + K_2 \Rightarrow K_2 = 15 - K_1$

b). $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 = -i_c(0^+) = -C \frac{dv}{dt}(0^+) \rightarrow \frac{dv}{dt}(0^+) = 0$

$$\rightarrow 0 = K_1 s_1 + K_2 s_2 = K_1 s_1 + (15 - K_1) s_2 \Rightarrow K_1 = \frac{-15 s_2}{s_1 - s_2} = \frac{-15(-8000)}{-500 + 8000} = 16$$

$$\Rightarrow K_2 = 15 - K_1 = -1$$

Tanggapan lengkap menjadi : $v = 16e^{-500t} - e^{-8000t} \text{ V}$ (hanya terdiri dari tanggapan alami).

Dua Akar Riil Sama Besar. Kedua akar yang sama besar tersebut dapat kita tuliskan sebagai

$$s_1 = s \quad \text{dan} \quad s_2 = s + \delta \quad ; \quad \text{dengan} \quad \delta \rightarrow 0 \tag{4.35}$$

Dengan demikian maka tanggapan lengkap (4.32) dapat kita tulis sebagai

$$y = y_p + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} = y_p + K_1 e^{s t} + K_2 e^{(s+\delta)t} \tag{4.36}$$

Kalau kondisi awal pertama $y(0^+)$ kita terapkan, kita akan memperoleh

$$y(0^+) = y_p(0^+) + K_1 + K_2 \rightarrow K_1 + K_2 = y(0^+) - y_p(0^+) = A_0$$

Jika kondisi awal kedua $dy/dt(0^+)$ kita terapkan, kita peroleh

$$y'(0^+) = y'_p(0^+) + K_1 s + K_2 (s + \delta) \rightarrow (K_1 + K_2) s + K_2 \delta = y'(0^+) - y'_p(0^+) = B_0$$

Dari kedua persamaan ini kita dapatkan

$$A_0 s + K_2 \delta = B_0 \rightarrow K_2 = \frac{B_0 - A_0 s}{\delta} \rightarrow K_1 = A_0 - \frac{B_0 - A_0 s}{\delta} \tag{4.37}$$

Tanggapan lengkap menjadi

$$\begin{aligned}
 y &= y_p + \left(A_0 - \frac{B_0 - A_0 s}{\delta} \right) e^{st} + \frac{B_0 - A_0 s}{\delta} e^{(s+\delta)t} \\
 &= y_p + \left[\left(A_0 - \frac{B_0 - A_0 s}{\delta} \right) + \frac{B_0 - A_0 s}{\delta} e^{\delta t} \right] e^{st} \\
 &= y_p + \left[A_0 + (B_0 - A_0 s) \left(-\frac{1}{\delta} + \frac{e^{\delta t}}{\delta} \right) \right] e^{st}
 \end{aligned} \tag{4.38.a}$$

Karena $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\delta} + \frac{e^{\delta t}}{\delta} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta} \right) = t$ maka tanggapan lengkap (4.40.a) dapat kita tulis

$$y = y_p + [A_0 + (B_0 - A_0 s)t] e^{st} \tag{4.38.b}$$

Tanggapan lengkap seperti dinyatakan oleh (4.38.b) merupakan bentuk khusus yang diperoleh jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar sama besar. A_0 dan B_0 mempunyai nilai tertentu yang ditetapkan oleh kondisi awal. Dengan demikian kita dapat menuliskan (4.38.b) sebagai

$$y = y_p + [K_a + K_b t] e^{st} \tag{4.38.c}$$

dengan nilai K_a yang ditentukan oleh kondisi awal, dan nilai K_b ditentukan oleh kondisi awal dan s . Nilai s sendiri ditentukan oleh nilai elemen-elemen yang membentuk rangkaian dan tidak ada kaitannya dengan kondisi awal. Dengan kata lain, jika kita mengetahui bahwa persamaan karakteristik rangkaian mempunyai akar-akar yang sama besar (akar kembar) maka bentuk tanggapan rangkaian akan seperti yang ditunjukkan oleh (4.38.c).

CONTOH 4.15 : Persoalan sama dengan contoh 4.14. akan tetapi resistor 8,5 k Ω diganti dengan 4 k Ω .

Penyelesaian :

Persamaan rangkaian adalah : $\frac{d^2 v}{dt^2} + 4 \times 10^3 \frac{dv}{dt} + 4 \times 10^6 v = 0$

Persamaan karakteristik : $s^2 + 4000s + 4 \times 10^6 = 0$

akar - akar : $s_1, s_2 = -2000 \pm \sqrt{4 \times 10^6 - 4 \times 10^6} = -2000 = s$

Di sini terdapat dua akar sama besar oleh karena itu tanggapan lengkap akan berbentuk :

$v = v_p + (K_a + K_b t) e^{st} = 0 + (K_a + K_b t) e^{st}$, karena $v_p = 0$.

Aplikasi kondisi awal pertama pada tanggapan lengkap ini memberikan $v(0^+) = 15 = K_a$.

Aplikasi kondisi awal kedua $\frac{dv}{dt}(0^+) = 0$ pada tanggapan lengkap memberikan

$\frac{dv}{dt} = K_b e^{st} + (K_a + K_b t) s e^{st} \rightarrow \frac{dv}{dt}(0^+) = 0 = K_b + K_a s \rightarrow K_b = -K_a s = 30000$

Jadi : $v = (15 + 30000t) e^{-2000t} \text{ V}$

Akar-Akar Kompleks Konjugat. Dua akar kompleks konjugat dapat dituliskan sebagai $s_1 = \alpha + j\beta$ dan $s_2 = \alpha - j\beta$

Tanggapan lengkap dari situasi ini, menurut (4.32) adalah

$$y = y_p + K_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + K_2 e^{(\alpha - j\beta)t} = y_p + (K_1 e^{+j\beta t} + K_2 e^{-j\beta t}) e^{\alpha t} \tag{4.39}$$

Aplikasi kondisi awal yang pertama, $y(0^+)$, pada (4.41) memberikan

$$y(0^+) = y_p(0^+) + (K_1 + K_2) \rightarrow K_1 + K_2 = y(0^+) - y_p(0^+) = A_0$$

Aplikasi kondisi awal yang kedua, $\frac{dy}{dt}(0^+) = y'(0^+)$, pada (4.41) memberikan

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_p}{dt} + (j\beta K_1 e^{j\beta t} - j\beta K_2 e^{-j\beta t}) e^{\alpha t} + (K_1 e^{j\beta t} + K_2 e^{-j\beta t}) \alpha e^{\alpha t} \\ \frac{dy}{dt}(0^+) &= y'(0^+) = y'_p(0^+) + (j\beta K_1 - j\beta K_2) + (K_1 + K_2) \alpha \\ &\rightarrow j\beta(K_1 - K_2) + \alpha(K_1 + K_2) = y'(0^+) - y'_p(0^+) = B_0 \end{aligned}$$

Dari sini kita peroleh

$$\left. \begin{aligned} K_1 + K_2 &= A_0 \\ j\beta(K_1 - K_2) + \alpha(K_1 + K_2) &= B_0 \rightarrow K_1 - K_2 = \frac{B_0 - \alpha A_0}{j\beta} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} K_1 &= \frac{A_0 + (B_0 - \alpha A_0) / j\beta}{2} \\ K_2 &= \frac{A_0 - (B_0 - \alpha A_0) / j\beta}{2} \end{aligned}$$

Tanggapan lengkap menjadi

$$\begin{aligned} y &= y_p + \left(\frac{A_0 + (B_0 - \alpha A_0) / j\beta}{2} e^{+j\beta t} + \frac{A_0 - (B_0 - \alpha A_0) / j\beta}{2} e^{-j\beta t} \right) e^{\alpha t} \\ &= y_p + \left(A_0 \frac{e^{+j\beta t} + e^{-j\beta t}}{2} + \frac{(B_0 - \alpha A_0)}{\beta} \frac{e^{+j\beta t} - e^{-j\beta t}}{2j} \right) e^{\alpha t} \quad (4.40) \\ &= y_p + \left(A_0 \cos \beta t + \frac{(B_0 - \alpha A_0)}{\beta} \sin \beta t \right) e^{\alpha t} \end{aligned}$$

A_0 dan B_0 mempunyai nilai tertentu yang ditetapkan oleh kondisi awal sedangkan α dan β ditentukan oleh nilai elemen rangkaian. Dengan demikian tanggapan lengkap (4.53) dapat kita tuliskan sebagai

$$y = y_p + (K_a \cos \beta t + K_b \sin \beta t) e^{\alpha t} \quad (4.41)$$

dengan K_a dan K_b yang masih harus ditentukan melalui penerapan kondisi awal. Ini adalah bentuk tanggapan lengkap khusus untuk rangkaian dengan persamaan karakteristik yang mempunyai dua akar kompleks konjugat.

CONTOH 4.16 : Persoalan sama dengan contoh 4.14. akan tetapi resistor 8,5 k Ω diganti dengan 1 k Ω .

Penyelesaian :

Dengan penggantian ini persamaan rangkaian menjadi $\frac{d^2 v}{dt^2} + 10^3 \frac{dv}{dt} + 4 \times 10^6 v = 0$

$$\text{Persamaan karakteristik : } s^2 + 1000 \frac{dv}{dt} + 4 \times 10^6 = 0$$

$$\text{akar - akar : } s_1, s_2 = -500 \pm \sqrt{500^2 - 4 \times 10^6} = -500 \pm j500\sqrt{15}$$

Di sini terdapat dua akar kompleks konjugat : $\alpha \pm j\beta$ dengan $\alpha = -500$; $\beta = 500\sqrt{15}$

Tanggapan lengkap diduga akan berbentuk

$$v = v_p + (K_a \cos \beta t + K_b \sin \beta t) e^{\alpha t} = 0 + (K_a \cos \beta t + K_b \sin \beta t) e^{\alpha t}$$

Aplikasi kondisi awal pertama memberikan : $v(0^+) = 15 = K_a$

Aplikasi kondisi awal kedua

$$\frac{dv}{dt} = (-K_a\beta \sin \beta t + K_b\beta \cos \beta t)e^{\alpha t} + (K_a \cos \beta t + K_b \sin \beta t)\alpha e^{\alpha t}$$

$$\frac{dv}{dt}(0^+) = 0 = K_b\beta + \alpha K_a \rightarrow K_b = \frac{-\alpha K_a}{\beta} = \frac{500 \times 15}{500\sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

Jadi tanggapan lengkap adalah:

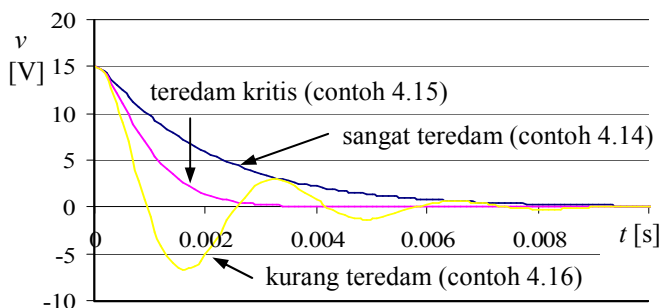
$$v = (15 \cos(500\sqrt{15} t) + \sqrt{15} \sin(500\sqrt{15} t))e^{-500t} \text{ V}$$

Contoh 4.14., 4.15., dan 4.16. menunjukkan tiga kemungkinan bentuk tanggapan, yang ditentukan oleh akar-akar persamaan karakteristik.

a). Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar yang berbeda, tanggapan alami akan merupakan jumlah dari dua suku yang masing-masing merupakan fungsi eksponensial. Dalam kasus seperti ini, tanggapan rangkaian merupakan *tanggapan amat teredam*.

b). Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar yang sama besar, maka tanggapan alami akan merupakan jumlah dari fungsi eksponensial dan ramp teredam. Tanggapan ini merupakan tanggapan teredam kritis.

c). Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar kompleks konjugat, maka tanggapan alami merupakan jumlah dari fungsi-fungsi sinus teredam. Jadi tanggapan rangkaian berosilasi terlebih dulu sebelum akhirnya mencapai nol, dan disebut *tanggapan kurang teredam*. Bagian riil dari akar persamaan karakteristik menentukan peredaman; sedangkan bagian imajinerinya menentukan frekuensi osilasi. (Gambar di samping ini menunjukkan perubahan v pada contoh 4.14, 4.15, dan 4.16.)



Tanggapan Rangkaian Orde Kedua Terhadap Sinyal Anak Tangga

Bentuk umum sinyal anak tangga adalah $Au(t)$. Jika kita hanya meninjau keadaan pada $t > 0$, maka faktor $u(t)$ tidak perlu dituliskan lagi.

CONTOH 4.17 : Jika $v_s = 10u(t)$ V, bagaimanakah keluaran v_o rangkaian di samping ini pada $t > 0$ untuk berbagai nilai μ ?

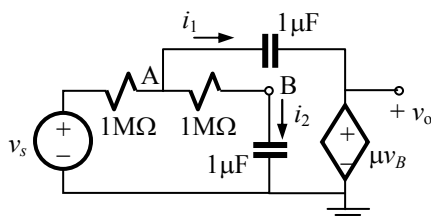
Penyelesaian :

Karena $v_o = \mu v_B$ maka kita mencari persamaan rangkaian dengan tegangan simpul B, yaitu v_B , sebagai peubah. Persamaan tegangan simpul untuk simpul A dan B adalah

$$v_A \left(\frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^6} \right) + i_1 - \frac{v_s}{10^6} - \frac{v_B}{10^6} = 0 \Rightarrow 2v_A + \frac{d}{dt}(v_A - \mu v_B) - v_s - v_B = 0$$

$$v_B \left(\frac{1}{10^6} \right) + i_2 - \frac{v_A}{10^6} = 0 \Rightarrow v_B + \frac{dv_B}{dt} - v_A = 0 \Rightarrow v_A = v_B + \frac{dv_B}{dt}$$

Dua persamaan diferensial orde satu ini jika digabungkan akan memberikan persamaan diferensial orde kedua.



$$2v_B + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_B}{dt} + \frac{d^2v_B}{dt^2} - \mu\frac{dv_B}{dt} - v_B = v_s = 10 \quad \text{atau} \quad \frac{d^2v_B}{dt^2} + (3-\mu)\frac{dv_B}{dt} + v_B = 10$$

Pers. karakteristik : $s^2 + (3-\mu)s + 1 = 0 \rightarrow s_1, s_2 = \frac{-(3-\mu) \pm \sqrt{(3-\mu)^2 - 4}}{2}$

Dugaan tanggapan lengkap : $v_B = v_{Bp} + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$

Dugaan tanggapan paksa : $v_{Bp} = K_3 \rightarrow 0 + 0 + K_3 = 10 \Rightarrow v_{Bp} = 10$

Tanggapan lengkap : $v_B = 10 + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \Rightarrow v_0 = \mu(10 + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t})$

Jika $(3-\mu)^2 > 4 \rightarrow \mu < 1 \rightarrow s_1 \neq s_2 \Rightarrow v_0$ sangat teredam.

Jika $(3-\mu)^2 < 4 \rightarrow \mu > 1 \rightarrow s_1, s_2$ kompleks $\Rightarrow v_0$ kurang teredam.

Jika $(3-\mu)^2 = 4 \rightarrow \mu = 1 \rightarrow s_1 = s_2 \Rightarrow v_0$ teredam kritis.

Pemahaman : Bentuk tegangan keluaran ditentukan oleh nilai μ dan nilai elemen-elemen rangkaian. Kita dapat memilih nilai-nilai yang sesuai untuk memperoleh tanggapan rangkaian yang kita inginkan.

Perhatian : Untuk $\mu > 3$ akan terjadi keadaan tak stabil karena akar-akar bernilai riil positif; peredaman tidak terjadi dan sinyal membesar tanpa batas.

CONTOH 4.18 : Carilah v_0 pada contoh 4.17 jika $\mu = 2$ dan tegangan awal kapasitor masing-masing adalah nol.

Penyelesaian : Persamaan rangkaian, dengan $\mu = 2$, adalah

$$\frac{d^2v_B}{dt^2} + (3-\mu)\frac{dv_B}{dt} + v_B = 10 \Rightarrow \frac{d^2v_B}{dt^2} + \frac{dv_B}{dt} + v_B = 10$$

Pers. karakteristik : $s^2 + s + 1 = 0 \rightarrow s_1, s_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -0,5 \pm j0,5\sqrt{3}$

(dua akar kompleks konjugat : $\alpha \pm j\beta$; $\alpha = -0,5$ dan $\beta = 0,5\sqrt{3}$)

Tanggapan lengkap diduga berbentuk : $v_B = v_{Bp} + (K_a \cos \beta t + K_b \sin \beta t) e^{\alpha t}$

Tanggapan paksa : $v_{Bp} = K \rightarrow 0 + 0 + K = 10 \Rightarrow v_{Bp} = 10$

Tanggapan lengkap : $v_B = 10 + (K_a \cos \beta t + K_b \sin \beta t) e^{\alpha t}$

Kondisi awalnya adalah : kedua kapasitor bertegangan nol.

$\rightarrow v_B(0^+) = 0$ dan $v_A(0^+) - v_0(0^+) = 0 \rightarrow v_B(0^+) + 10^5 i_2(0^+) - 2v_B(0^+) = 0$

$\rightarrow 0 + 10^5 \frac{dv_B}{dt}(0^+) - 0 = 0 \rightarrow \frac{dv_B}{dt}(0^+) = 0$

Penerapan dua kondisi awal ini ke tanggapan lengkap memberikan :

$v_B(0^+) = 0 = 10 + K_a \Rightarrow K_a = -10$

$\frac{dv_B}{dt} = (-K_a \beta \sin \beta t + K_b \beta \cos \beta t) e^{\alpha t} + (K_a \cos \beta t + K_b \sin \beta t) \alpha e^{\alpha t}$

$\frac{dv_B}{dt}(0^+) = 0 = K_b \beta + \alpha K_a \rightarrow K_b = \frac{-\alpha K_a}{\beta} = \frac{0,5 \times (-10)}{0,5\sqrt{3}} = \frac{-10}{\sqrt{3}}$

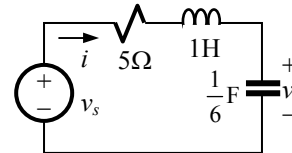
$\Rightarrow v_B = 10 - \left(10 \cos(0,5\sqrt{3} t) + \frac{10}{\sqrt{3}} \sin(0,5\sqrt{3} t) \right) e^{-0,5t}$

Tanggapan Rangkaian Orde Kedua Terhadap Sinyal Sinus

Masukan sinyal sinus secara umum dapat kita nyatakan dengan $x(t) = A\cos(\omega t + \theta) u(t)$. Untuk peninjauan pada $t > 0$ faktor $u(t)$ tak perlu ditulis lagi. Dengan demikian persamaan umum rangkaian orde kedua dengan masukan sinyal sinus akan berbentuk

$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = A\cos(\omega t + \theta)$. Persamaan karakteristik serta akar-akarnya tidak berbeda dengan apa yang telah kita bahas untuk sumber tegangan konstan, dan memberikan tanggapan alami yang berbentuk $v_a = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$. Untuk masukan sinus, tanggapan paksa diduga akan berbentuk $v_p = A_c \cos \omega t + A_s \sin \omega t$.

CONTOH 4.19 : Carilah v dan i untuk $t > 0$ pada rangkaian di samping ini jika $v_s = 26\cos 3t$ u(t) V sedangkan $i(0) = 2$ A dan $v(0) = 6$ V.



Penyelesaian :

Aplikasi HTK untuk rangkaian ini akan memberikan

$$-v_s + 5i + \frac{di}{dt} + v = 0 \rightarrow \frac{5}{6} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{6} \frac{d^2 v}{dt^2} + v = 26 \cos 3t \quad \text{atau} \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = 156 \cos 3t$$

Persamaan karakteristik : $s^2 + 5s + 6 = 0 = (s+2)(s+3)$; akar - akar : $s_1, s_2 = -2, -3$

Dugaan tanggapan lengkap : $v = v_p + K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t}$

Dugaan tanggapan paksa : $v_p = A_c \cos 3t + A_s \sin 3t$

$$\rightarrow (-9A_c + 15A_s + 6A_c) \cos 3t + (-9A_s - 15A_c + 6A_s) \sin 3t = 156 \cos 3t$$

$$\rightarrow -3A_c + 15A_s = 156 \quad \text{dan} \quad -15A_c - 3A_s = 0 \Rightarrow A_c = \frac{156+0}{-3-75} = -2 ; A_s = \frac{5 \times 156 - 0}{75+3} = 10$$

Tanggapan lengkap : $v = -2 \cos 3t + 10 \sin 3t + K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t}$

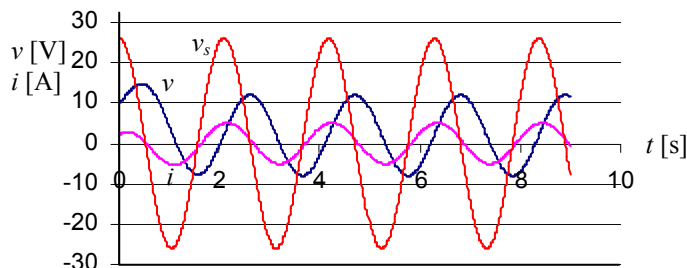
Kondisi awal : $v(0^+) = 6$ dan $i(0^+) = 2 = \frac{1}{6} \frac{dv}{dt}(0^+) \rightarrow \frac{dv}{dt}(0^+) = 12$

Aplikasi kondisi awal pertama : $6 = -2 + K_1 + K_2 \rightarrow K_2 = 8 - K_1$

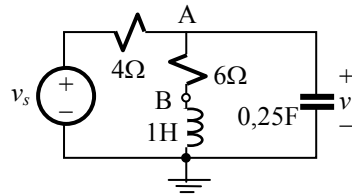
Aplikasi kondisi awal kedua : $12 = 30 - 2K_1 - 3K_2 \Rightarrow K_1 = 6 \Rightarrow K_2 = 2$

Tanggapan lengkap : $v = -2 \cos 3t + 10 \sin 3t + 6e^{-2t} + 2e^{-3t}$ V

$$\Rightarrow i = \frac{1}{6} \frac{dv}{dt} = \sin 3t + 5 \cos 3t - 2e^{-2t} - e^{-3t} \text{ A}$$



CONTOH 4.20 : Pada rangkaian di samping ini, $v_s = 10\cos 5t$ u(t) V. Tentukanlah tegangan kapasitor v untuk $t > 0$, jika tegangan awal kapasitor dan arus awal induktor adalah nol.



Penyelesaian :

$$\text{Simpul A : } v\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4} \frac{dv}{dt} - \frac{v_s}{4} - \frac{v_B}{6} = 0 \rightarrow v_B = 2,5v + 1,5 \frac{dv}{dt} - 1,5v_s$$

$$\text{Simpul B : } \frac{v_B}{6} + \frac{1}{L} \int v_B dt + i_L(0) - \frac{v}{6} = 0 \rightarrow v_B + 6 \int v_B dt - v = 0 \rightarrow \frac{dv_B}{dt} + 6v_B - \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(2,5v + 1,5 \frac{dv}{dt} - 1,5v_s \right) + 6 \left(2,5v + 1,5 \frac{dv}{dt} - 1,5v_s \right) - \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\rightarrow 1,5 \frac{d^2v}{dt^2} + 10,5 \frac{dv}{dt} + 15v = 9v_s + 1,5 \frac{dv_s}{dt} \quad \text{atau}$$

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + 7 \frac{dv}{dt} + 10v = 6v_s + \frac{dv_s}{dt}}$$

Dengan tegangan masukan $v_s = 10\cos 5t$ maka persamaan rangkaian menjadi

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + 7 \frac{dv}{dt} + 10v = 60\cos 5t - 50\sin 5t}$$

Persamaan karakteristik : $s^2 + 7s + 10 = 0 \rightarrow s_1, s_2 = -3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 10} = -2, -5$.

Dugaan tanggapan lengkap : $v = v_p + K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-5t}$

Dugaan tanggapan paksa : $v_p = A_c \cos 5t + A_s \sin 5t$

$$\rightarrow (-25A_c + 35A_s + 10A_c) \cos 6t + (-25A_s - 35A_c + 10A_s) \sin 6t = 60\cos 6t - 50\sin 6t$$

$$\rightarrow -15A_c + 35A_s = 60 \quad \text{dan} \quad -15A_s - 35A_c = -50 \Rightarrow A_s = 0,93; A_c = -1,83$$

$$\Rightarrow v_p = -1,83 \cos 5t + 0,93 \sin 5t$$

Tanggapan lengkap : $v = -1,83 \cos 5t + 0,93 \sin 5t + K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-5t}$

Kondisi awal : $v(0^+) = 0$

$$i_L(0^+) = 0 \rightarrow i_C(0^+) = \frac{v_s(0^+)}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 = \frac{1}{4} \frac{dv}{dt}(0^+) \Rightarrow \frac{dv}{dt}(0^+) = 10$$

Aplikasi kondisi awal ini pada tanggapan lengkap :

$$v(0^+) = 0 = -1,83 + K_1 + K_2 \quad \rightarrow K_2 = 1,83 - K_1$$

dan $\frac{dv}{dt}(0^+) = 10 = 4,65 - 2K_1 - 5K_2 \quad \rightarrow 5,35 = -2K_1 - 5(1,83 - K_1)$

$$\Rightarrow K_1 = 4,83$$

$$\Rightarrow K_2 = -3$$

Tanggapan lengkap : $v = -1,83 \cos 5t + 0,93 \sin 5t + 4,83e^{-2t} - 3e^{-5t}$

4.3. Penentuan Persamaan Rangkaian dan Kondisi Awal Dengan Menggunakan Operator Diferensial D

Langkah-langkah dalam analisis transien, baik untuk rangkaian orde pertama maupun orde kedua, dapat kita ringkaskan sebagai berikut :

1. menentukan persamaan rangkaian untuk $t > 0$.
2. mencari solusi dari persamaan rangkaian (tanggapan alami, tanggapan paksa, kemudian tanggapan lengkap).
3. menerapkan kondisi awal untuk menentukan konstanta yang masih harus ditentukan pada solusi persamaan rangkaian.

Jadi ada dua hal yang harus secara seksama kita lakukan, yaitu menentukan persamaan rangkaian dan menentukan kondisi awal. Dalam contoh-contoh persoalan pada sub-bab sebelumnya kita menggunakan *Metoda Tegangan Simpul* untuk mencari persamaan rangkaian. Untuk rangkaian orde pertama yang hanya mengandung satu macam elemen dinamik, hal ini biasanya tidak sulit untuk dilakukan karena kita hanya menghadapi satu pilihan peubah status (tegangan kapasitor atau arus induktor) sebagai peubah dalam persamaan rangkaian yang kita cari. Untuk rangkaian orde kedua yang mengandung baik induktor maupun kapasitor, kita harus menentukan pilihan karena ada dua peubah status yaitu arus induktor dan tegangan kapasitor. Kondisi awal yang harus dipenuhi juga ada dua, yaitu arus awal induktor dan tegangan awal kapasitor. Karena persamaan rangkaian dinyatakan dengan salah satu peubah status, maka dua kondisi awal yang harus dipenuhi tersebut harus kita gabungkan untuk memperoleh kondisi awal yang sesuai.

Operator D

Operator deferensiasi, D , didefinisikan sebagai : $D = \frac{d}{dt}$ (4.55)

Dengan definisi ini maka pernyataan diferensial menjadi lebih sederhana penulisannya, seperti terlihat pada contoh-contoh berikut.

$$\frac{dy}{dt} = Dy; \quad 2 \frac{dy}{dt} = 2Dy; \quad \frac{dy}{dt} + 6y = (D + 6)y; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = D(Dy) = D^2y;$$

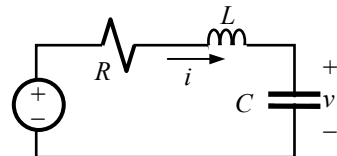
$$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} + 5y = (2D^2 + 7D + 5)y \text{ dan seterusnya.}$$

Perhatikan bahwa kita bekerja dengan operator yang berarti operator bekerja pada y . Kita menuliskan y sesudah pernyataan operator. Dengan menggunakan operator diferensial ini maka pernyataan tegangan induktor dan arus kapasitor dapat dinyatakan dengan lebih sederhana, yaitu

$$\text{tegangan induktor : } v_L = L \frac{di_L}{dt} = LDi_L \quad ; \quad \text{arus kapasitor : } i_C = C \frac{dv_C}{dt} = CDv_C \quad (4.56)$$

Contoh-contoh berikut ini memperlihatkan bagaimana operator D kita manfaatkan untuk mencari persamaan rangkaian.

CONTOH 4.21 : Carilah persamaan rangkaian RLC seri di samping ini: (a) dengan v sebagai peubah (b) dengan i sebagai peubah.



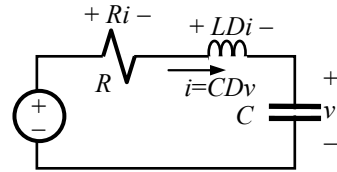
Penyelesaian :

Dengan hubungan tegangan dan arus elemen seperti (4.56) maka rangkaian dapat kita gambarkan seperti di bawah ini.

a). Aplikasi HTK pada rangkaian ini memberikan

$$v_s = Ri + LDi + v \text{ atau } v_s = RCDv + LCD^2v + v$$

$$\Rightarrow LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = v_s$$



b). Aplikasi HTK pada rangkaian memberikan

$v_s = Ri + LDi + v$. Jika operator D diaplikasikan pada persamaan ini akan diperoleh :

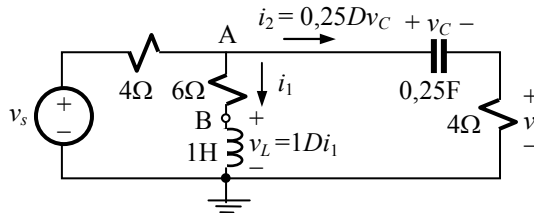
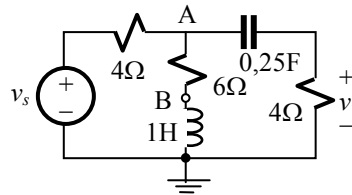
$$Dv_s = D(Ri + LDi + v) = RD i + LD^2 i + Dv = RD i + LD^2 i + \frac{i}{C}$$

$$\rightarrow CDv_s = RCDi + LCD^2i + i \Rightarrow LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{dv_s}{dt}$$

CONTOH 4.22 : Tentukan persamaan rangkaian di samping ini untuk menghitung v .

Penyelesaian :

Perhatikan bahwa tegangan v bukanlah peubah status melainkan tegangan di resistor. Persamaan rangkaian yang kita cari harus tetap menggunakan salah satu peubah status, v_C atau i_L . Kita gambar sekali lagi rangkaian ini dengan menyatakan tegangan induktor dan arus kapasitor memakai operator D . Rangkaian tersebut menjadi seperti di samping ini.



Karena v berelasi dengan v_C melalui hubungan $v = 4i_2 = Dv_C$ maka kita akan mencari persamaan rangkaian dengan v_C sebagai peubah.

$$\text{Simpul A : } \frac{v_A}{4} - \frac{v_s}{4} + i_1 + i_2 = 0 \rightarrow \frac{v_C + 4i_2}{4} - \frac{v_s}{4} + i_1 + \frac{1}{4} Dv_C = 0 \rightarrow i_1 = \frac{-v_C - 2Dv_C + v_s}{4}$$

$$\text{Simpul B : } \frac{v_L}{6} - \frac{v_A}{6} + i_1 = 0 \rightarrow Di_1 - (v_C + 4i_2) + 6i_1 = 0 \rightarrow Di_1 - v_C - Dv_C + 6i_1 = 0$$

Substitusi i_1 dari simpul A ke persamaan simpul B menghasilkan :

$$\rightarrow -Dv_C - 2D^2v_C + Dv_s - 4v_C - 4Dv_C - 6v_C - 12Dv_C + 6v_s = 0$$

$$\rightarrow (2D^2 + 17D + 10)v_C = (D + 6)v_s$$

$$\Rightarrow 2 \frac{d^2v_C}{dt^2} + 17 \frac{dv_C}{dt} + 10v_C = \frac{dv_s}{dt} + 6v_s. \text{ Untuk menghitung } v \text{ kita gunakan } v = Dv_C = \frac{dv_C}{dt}$$

Gabungan Persamaan Tegangan Simpul dan Persamaan Loop. Pada contoh 4.22. kita mencari persamaan tegangan untuk simpul A dan simpul B. Persamaan tegangan untuk simpul B dapat kita ganti dengan persamaan arus untuk loop yang dibentuk oleh induktor dan kapasitor; aplikasi HTK untuk loop ini memberikan

$$-Di_1 - 6i_1 + v_C + 4(0,25Dv_C) = 0 \rightarrow Di_1 + 6i_1 - (D+1)v_C = 0$$

Substitusi i_1 yang diperoleh dari persamaan tegangan simpul A ke persamaan ini akan memberikan persamaan rangkaian yang dicari.

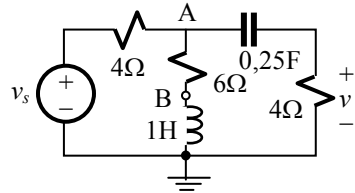
Menentukan Kondisi Awal

Kondisi awal rangkaian yang mengandung induktor dan kapasitor adalah

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) \quad \text{dan} \quad v_C(0^+) = v_C(0^-)$$

Karena persamaan rangkaian dinyatakan dengan menggunakan salah satu peubah saja (v atau i), maka kondisi awalpun harus kita nyatakan dalam salah satu peubah tersebut. Berikut ini satu contoh dalam menentukan kondisi awal.

CONTOH 4.23 : Pada rangkaian berikut ini $v_C(0^-) = 10$ V, dan $i_L(0^-) = 2$ A. Tentukan kondisi awal yang harus diterapkan pada persamaan rangkaian yang mengambil tegangan kapasitor sebagai peubah!



Penyelesaian :

Rangkaian ini adalah rangkaian pada contoh 4.22. yang persamaan rangkaiannya telah diperoleh dengan menggunakan v_C sebagai peubah. Kondisi awal yang pertama adalah $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10$ V. Kondisi awal yang kedua harus kita turunkan dari $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2$ A = $i_1(0^+)$. Untuk itu kita aplikasikan HAK untuk simpul A yang akan memberikan

$$\begin{aligned} i_1(0^+) &= \frac{v_s(0^+) - v_A(0^+)}{4} - i_2(0^+) = \frac{v_s(0^+)}{4} - \frac{4i_2(0^+) + v_C(0^+)}{4} - 0,25Dv_C(0^+) \\ \rightarrow 4i_1(0^+) &= v_s(0^+) - Dv_C(0^+) - v_C(0^+) - Dv_C(0^+) \rightarrow 8 = v_s(0^+) - 2Dv_C(0^+) - 10 \\ \Rightarrow Dv_C(0^+) &= \frac{v_s(0^+) - 18}{2} \end{aligned}$$

Dari sini kita dapatkan kondisi awal yang kedua, yaitu : $\frac{dv_C}{dt}(0^+) = 0,5v_s(0^+) - 9$ V/s

Pemahaman :

Perhatikanlah bahwa kondisi awal yang pertama adalah kondisi awal kapasitor. Kondisi awal yang kedua berasal dari kondisi awal induktor. Kondisi awal yang kedua ini ternyata dipengaruhi oleh nilai awal tegangan masukan yaitu $v_s(0^+)$. Hal ini dapat kita fahami karena seandainya $v_C(0^-) = 0$ dan $i_L(0^-) = 0$, maka pada $t = 0^+$ tegangan kapasitor harus nol sedangkan kapasitor terhubung seri dengan resistor 4 Ω . Hal ini menyebabkan tegangan induktor pada $t = 0^+$ harus sama dengan tegangan pada resistor 4 Ω yaitu tegangan di simpul A karena arus induktor $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$. Tegangan di simpul A ini adalah setengah dari tegangan masukan $v_s(0^+)$ karena pada $t = 0$ ada dua resistor 4 Ω terhubung seri pada v_s .

SOAL-SOAL : ANALISIS TRANSIEN SISTEM ORDE KEDUA

1. Carilah bentuk gelombang tegangan yang memenuhi persamaan diferensial berikut.

a). $\frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 10v = 0$,

$$v(0^+) = 0, \frac{dv}{dt}(0^+) = 15 \text{ V/s}$$

b). $\frac{d^2v}{dt^2} + 4\frac{dv}{dt} + 4v = 0$,

$$v(0^+) = 0 \text{ V}, \frac{dv}{dt}(0^+) = 10 \text{ V/s}$$

c). $\frac{d^2v}{dt^2} + 4\frac{dv}{dt} + 5v = 0$,

$$v(0^+) = 0 \text{ V}, \frac{dv}{dt}(0^+) = 5 \text{ V/s}$$

2. Ulangi soal 1 untuk persamaan berikut.

a). $\frac{d^2v}{dt^2} + 10\frac{dv}{dt} + 24v = 100u(t)$,

$$v(0^+) = 5, \frac{dv(0)}{dt} = 25 \text{ V/s}$$

b). $\frac{d^2v}{dt^2} + 10\frac{dv}{dt} + 25v = 100u(t)$,

$$v(0^+) = 5 \text{ V}, \frac{dv(0)}{dt} = 10 \text{ V/s}$$

c). $\frac{d^2v}{dt^2} + 8\frac{dv}{dt} + 25v = 100u(t)$,

$$v(0^+) = 5 \text{ V}, \frac{dv(0)}{dt} = 10 \text{ V/s}$$

3. Ulangi soal 1 untuk persamaan berikut.

a). $\frac{d^2v}{dt^2} + 6\frac{dv}{dt} + 8v = 100[\cos 1000t]u(t)$,

$$v(0^+) = 0, \frac{dv}{dt}(0^+) = 0 \text{ V/s}$$

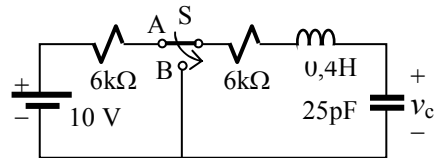
b). $\frac{d^2v}{dt^2} + 6\frac{dv}{dt} + 9v = 100[\cos 1000t]u(t)$,

$$v(0^+) = 0 \text{ V}, \frac{dv}{dt}(0^+) = 0 \text{ V/s}$$

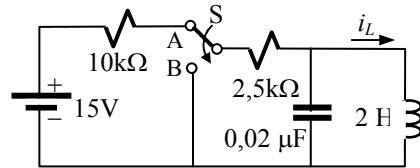
c). $\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 10v = 100[\cos 1000t]u(t)$,

$$v(0^+) = 0 \text{ V}, \frac{dv}{dt}(0^+) = 0 \text{ V/s}$$

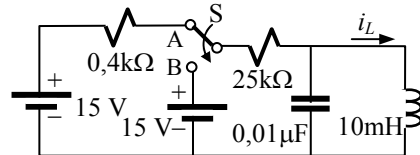
4. Saklar S pada rangkaian di bawah ini, telah berada pada posisi A dalam waktu yang lama. Pada $t = 0$, ia dipindahkan ke posisi B. Carilah v_C untuk $t > 0$



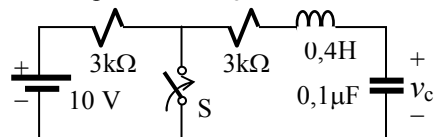
5. Saklar S pada rangkaian di bawah ini telah berada di posisi A dalam waktu yang lama. Pada $t = 0$, saklar dipindahkan ke posisi B. Tentukan $i_L(t)$ untuk $t > 0$.



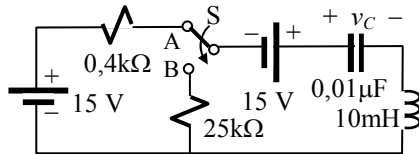
6. Saklar S pada rangkaian di bawah ini telah berada di posisi A dalam waktu yang lama. Pada $t = 0$, saklar dipindahkan ke posisi B. Tentukan $i_L(t)$ untuk $t > 0$.



7. Saklar S pada rangkaian di bawah ini, telah lama terbuka. Pada $t = 0$, ia ditutup. Carilah v_C untuk $t > 0$



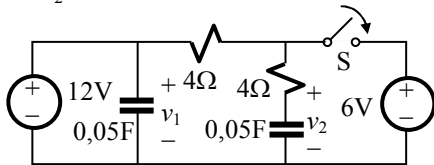
8. Saklar S pada rangkaian di bawah ini telah berada di posisi A dalam waktu yang lama. Pada $t = 0$, saklar dipindahkan ke posisi B. Tentukan v_C untuk $t > 0$.



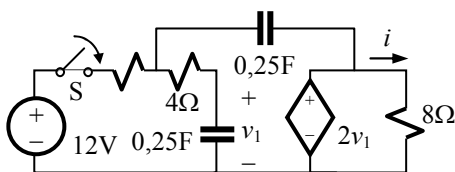
9. Tegangan masukan v_s pada rangkaian di bawah ini adalah $v_s = 100u(t)$ V. Tentukan tegangan kapasitor untuk $t > 0$.



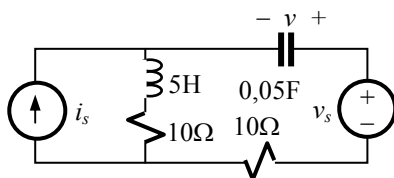
10. Setelah terbuka dalam waktu cukup lama, saklar S pada rangkaian berikut ini ditutup pada $t = 0$. Tentukan v_1 dan v_2 untuk $t > 0$.



11. Rangkaian berikut tidak mempunyai simpanan energi awal. Saklar S pada rangkaian berikut ditutup pada $t = 0$. Carilah i untuk $t > 0$.



12. Rangkaian berikut tidak memiliki simpanan energi awal. Tentukan v untuk $t > 0$ jika $i_s = [2\cos 2t] u(t)$ A dan $v_s = [6\cos 2t] u(t)$ V.

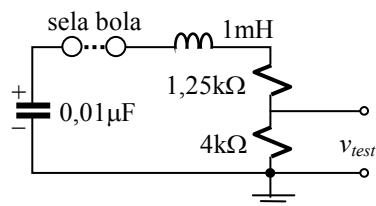


13. Sebuah kapasitor $1 \mu\text{F}$ dimuati sampai mencapai tegangan 200 V. Muatan kapasitor ini kemudian dilepaskan melalui hubungan seri induktor $100 \mu\text{H}$ dan resistor 20Ω . Berapa lama

waktu diperlukan untuk menurunkan jumlah muatan kapasitor hingga tinggal 10% dari jumlah muatan semula?

14. Sebuah kumparan mempunyai induktansi 9 H dan resistansi $0,1 \Omega$, dihubungkan paralel dengan kapasitor $100 \mu\text{F}$. Hubungan paralel ini diberi tegangan searah sehingga di kumparan mengalir arus sebesar 1 A . Jika sumber tegangan diputus secara tiba-tiba, berapakah tegangan maksimum yang akan timbul di kapasitor dan pada frekuensi berapa arus berosilasi?

15. Sebuah pembangkit tegangan impuls tegangan tinggi dimodelkan dengan rangkaian seperti berikut.



Kapasitor dimuati dengan tegangan searah yang tinggi sampai terjadi tembus pada sela bola. Pada saat sela bola tembus, muatan kapasitor dilepaskan melalui rangkaian seri induktor dan resistor, dan timbullah tegangan di resistor yang dimanfaatkan sebagai tegangan pengujian, v_{test} .

Pada rangkaian pembangkit pulsa di atas, sela bola tembus pada saat kapasitor dimuati sampai 200 kV . Tentukan bentuk tegangan pulsa keluaran v_{test} . Berapakah waktu dibutuhkan oleh v_{test} untuk mencapai nilai puncaknya?

16. Kabel sepanjang 2 km digunakan untuk mencatu beban pada tegangan searah 20 kV . Resistansi beban 200Ω dan induktansinya 1 H (seri). Kabel ini mempunyai resistansi total $0,2 \Omega$ sedangkan konduktor dan pelindung metalnya membentuk kapasitor dengan kapasitansi total $0,5 \mu\text{F}$. Bagaimanakah perubahan tegangan beban apabila tiba-tiba sumber terputus? (Kabel dimodelkan sebagai kapasitor; resistansi konduktor kabel diabaikan terhadap resistansi beban).

BAB 5

Analisis Rangkaian di Kawasan Fasor

(Rangkaian Arus Bolak-Balik Keadaan Mantap)

Di bab-4 kita mempelajari rangkaian dalam keadaan transien. Keadaan transien tersebut berlangsung hanya dalam beberapa saat. Kondisi operasi normal rangkaian pada umumnya adalah kondisi mantap; artinya pemrosesan dan pemanfaatan energi maupun sinyal listrik dilaksanakan dalam kondisi mantap.

Dalam teknik energi listrik, tenaga listrik dibangkitkan, ditransmisikan, serta dimanfaatkan dalam bentuk sinyal sinus dengan frekuensi 50 atau 60 Hz. Dalam teknik telekomunikasi, sinyal sinus dimanfaatkan dalam selang frekuensi yang lebih lebar, mulai dari beberapa Hz sampai jutaan Hz. Sejalan dengan itu, kita memerlukan suatu cara analisis khusus untuk menanggapi persoalan rangkaian listrik yang melibatkan sinyal sinus dalam keadaan mantap, yang kita sebut analisis arus bolak-balik keadaan mantap.

Analisis rangkaian dengan sinyal sinus telah pernah kita lakukan dengan menyatakan sinyal sinus sebagai fungsi waktu atau dengan kata lain kita melakukan analisis di *kawasan waktu*. Dalam bab ini sinyal sinus kita nyatakan dengan *fasor* dan kita melakukan analisis rangkaian di *kawasan fasor*. Untuk itu kita memerlukan pengetahuan mengenai bilangan kompleks (lihat Lampiran A). Dengan sinyal sinus dinyatakan dalam fasor, pernyataan-pernyataan elemen rangkaian pun menjadi khusus pula. Teorema rangkaian serta metoda-metoda analisis yang telah kita pelajari akan kita ulang lagi dalam kaitannya dengan pengertian fasor, dan kemudian dilanjutkan dengan analisis daya, serta sistem tiga fasa. Bab ini terdiri dari 4 sub-bab, yaitu :

Fasor, Impedansi, dan Analisis Rangkaian

Pembahasan dalam sub-bab ini meliputi fasor dan operasi fasor, impedansi elemen, kaidah rangkaian, teorema rangkaian, metoda-metoda analisis.

Analisis Daya

Pembahasan di sini meliputi pengertian daya rata-rata, daya reaktif, daya kompleks, faktor daya, serta analisis daya.

Rangkaian Resonansi

Resonansi seri dan paralel, faktor kualitas, lebar pita resonansi.

Sistem Tiga Fasa

Di sini akan dibahas sumber tiga fasa, hubungan-hubungan beban, serta analisis daya, akan tetapi terbatas pada sistem dalam keadaan seimbang.

5.1. Fasor, Impedansi, dan Analisis Rangkaian Sistem Satu Fasa

Tujuan :

- Memahami dan mampu menyatakan sinyal sinus ke dalam bentuk fasor.
- Memahami konsep impedansi di kawasan fasor.
- Memahami bagaimana aplikasi hukum-hukum, kaidah-kaidah, teorema rangkaian dan metoda analisis rangkaian di kawasan fasor.
- Mampu melakukan analisis rangkaian di kawasan fasor.

Pernyataan Fasor dari Sinyal Sinus dan Operasi Fasor

Kita mengenal pernyataan suatu bilangan kompleks yang berbentuk

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (5.1)$$

Dengan menggunakan hubungan ini maka *sinyal sinus* dapat dinyatakan sebagai fungsi eksponensial kompleks, yaitu

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{jx} \quad \text{dan} \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{jx} \quad (5.2)$$

dengan Re dan Im masing-masing menunjukkan bahwa yang dimaksudkan adalah bagian riil dan bagian imajiner dari bilangan kompleks e^{jx} . *Jika kita tetapkan bahwa hanya bagian riil dari bilangan kompleks e^{jx} saja yang kita ambil untuk menyatakan sinyal sinus* maka sinyal $y = A \cos(\omega t + \theta)$ dapat kita tulis sebagai

$$y = A \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re} A e^{j(\omega t + \theta)} = \operatorname{Re} A e^{j\theta} e^{j\omega t} = A e^{j\theta} e^{j\omega t} \quad (5.3)$$

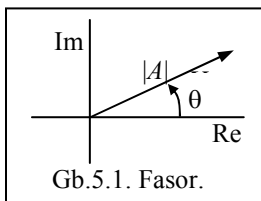
tanpa harus menuliskan keterangan Re lagi.

Jika kita bekerja pada suatu frekuensi ω tertentu untuk seluruh sistem, maka faktor $e^{j\omega t}$ pada pernyataan fungsi sinus (5.3) tidak perlu dituliskan lagi. Kita dapat menyatakan fungsi sinus cukup dengan mengambil *besar* dan *sudut fasanya* saja. Jadi

$$\text{sinyal sinus } v = A \cos(\omega t + \theta) \text{ dinyatakan dengan } \mathbf{V} = A e^{j\theta} \quad (5.4)$$

Pernyataan sinyal sinus dengan bilangan kompleks ini kita sebut *fasor* (dalam buku ini ditulis dengan huruf besar dan tebal). Jadi dengan notasi fasor, kita hanya memperhatikan amplitudo dan sudut fasanya saja dengan pengertian bahwa frekuensinya sudah tertentu. Karena kita hanya memperhatikan amplitudo dan sudut fasa saja, maka fasor dapat kita tuliskan dengan menyebutkan *besar*nya dan *sudut fasanya*. Jadi penulisan fasor dalam bentuk yang kita sebut bentuk polar adalah

$$\mathbf{V} = A e^{j\theta} \quad \text{ditulis sebagai} \quad \mathbf{V} = A \angle \theta \quad (5.5)$$



Fasor $\mathbf{V} = A \angle \theta$ dapat kita gambarkan dalam bidang kompleks, seperti terlihat pada Gb.5.1. Panjang fasor adalah nilai mutlak dari amplitudo A .

Penulisan fasor dalam bentuk polar, dapat diubah ke bentuk sudut-siku, yaitu :

$$\mathbf{V} = A \angle \theta = A (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (5.6)$$

Sebaliknya, dari pernyataan dalam bentuk sudut-siku dapat diubah ke bentuk polar

$$\mathbf{V} = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (5.7)$$

Transformasi timbal balik antara pernyataan dalam bentuk sudut-siku dan bentuk polar, memudahkan kita dalam melakukan operasi-operasi fasor yang akan kita lihat berikut ini.

Perkalian Fasor. Perkalian fasor mudah dilakukan bila fasor dituliskan dalam bentuk polar.

$$\text{Jika } \mathbf{A} = A\angle\theta_1 \text{ dan } \mathbf{B} = B\angle\theta_2 \text{ maka } \mathbf{C} = \mathbf{AB} = AB\angle(\theta_1 + \theta_2) \quad (5.8)$$

Hal ini mudah difahami, karena jika kita menuliskan $\mathbf{A} = Ae^{j\theta_1}$ dan $\mathbf{B} = Be^{j\theta_2}$ maka $\mathbf{C} = Ae^{j\theta_1}Be^{j\theta_2} = ABe^{j(\theta_1+\theta_2)} = AB\angle(\theta_1 + \theta_2)$

Pembagian Fasor. Pembagian fasor mudah dilakukan bila fasor dituliskan dalam bentuk polar.

$$\text{Jika } \mathbf{A} = A\angle\theta_1 \text{ dan } \mathbf{B} = B\angle\theta_2 \text{ maka } \mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{A\angle\theta_1}{B\angle\theta_2} = \frac{A}{B}\angle(\theta_1 - \theta_2) \quad (5.9)$$

Hal ini juga mudah difahami. Jika kita menuliskan $\mathbf{A} = Ae^{j\theta_1}$ dan $\mathbf{B} = Be^{j\theta_2}$ maka $\mathbf{D} = \frac{Ae^{j\theta_1}}{Be^{j\theta_2}} = \frac{A}{B}e^{j\theta_1}e^{-j\theta_2} = \frac{A}{B}e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{A}{B}\angle(\theta_1 - \theta_2)$

Penjumlahan dan Pengurangan Fasor. Operasi penjumlahan ataupun pengurangan lebih mudah dilakukan jika kita menuliskan fasor dalam bentuk sudut-siku.

$$\begin{aligned} \text{Jika } \mathbf{A} &= a_1 + jb_1 \text{ dan } \mathbf{B} = a_2 + jb_2 \\ \text{maka } \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}\right) \\ \mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} &= (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}\right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Jika } \mathbf{A} &= A\angle\theta_1 \text{ dan } \mathbf{B} = B\angle\theta_2 \\ \text{maka } \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A\cos\theta_1 + B\cos\theta_2) + j(A\sin\theta_1 + B\sin\theta_2) \\ \mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} &= (A\cos\theta_1 - B\cos\theta_2) + j(A\sin\theta_1 - B\sin\theta_2) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Fasor Negatif dan Fasor Konjugat. Jika dituliskan dalam bentuk sudut-siku, nilai negatif fasor adalah negatif dari masing-masing komponen riil dan imajiner.

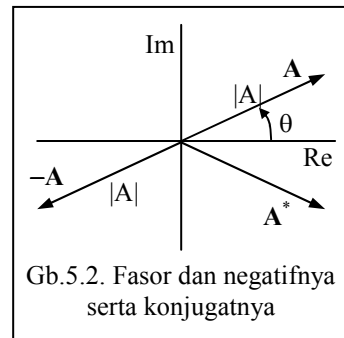
$$\text{Jika } \mathbf{A} = a_1 + jb_1 \text{ maka } -\mathbf{A} = -a_1 - jb_1$$

Fasor konjugat dari \mathbf{A} ditulis \mathbf{A}^* .

$$\text{Jika } \mathbf{A} = a_1 + jb_1 \text{ maka } \mathbf{A}^* = a_1 - jb_1$$

Jika ditulis dalam bentuk polar,

$$\begin{aligned} \text{Jika } \mathbf{A} &= A\angle\theta \\ \text{maka } -\mathbf{A} &= A\angle(\theta + 180^\circ) = A\angle(\theta - 180^\circ) \text{ dan } \mathbf{A}^* = A\angle-\theta \end{aligned} \quad (5.12)$$



Gb.5.2. Fasor dan negatifnya serta konjugatnya

Fasor Dengan Sudut Fasa 90° dan 0°. Bentuk sudut-siku dari fasor dengan sudut 90° dan 0° adalah

$$\mathbf{A} = A\angle 90^\circ = jA \quad ; \quad \mathbf{B} = B\angle -90^\circ = -jB \quad ; \quad \mathbf{C} = C\angle 0^\circ = C \quad (5.13)$$

CONTOH 5.1 : Ubahlah pernyataan sinyal sinus berikut ini ke dalam fasor dengan bentuk polar maupun bentuk sudut-siku dan lakukanlah operasi-operasi fasor yang diminta.

a). $v_1(t) = 10\cos(500t - 45^\circ)$ b). $v_2(t) = 15\cos(500t + 30^\circ)$

c). $i_1(t) = -4\cos 1000t$ d). $i_2(t) = 3\cos(1000t - 90^\circ)$

e). $I_3 = I_1 + I_2$ f). $S_1 = V_1 I_1^*$; $S_2 = V_2 I_2^*$ g). $Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$; $Z_2 = \frac{V_2}{I_2}$

Penyelesaian :

a). Pernyataan fasor sinyal sinus ini dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$V_1 = 10\angle -45^\circ \quad \text{atau} \quad V_1 = 10\cos(-45^\circ) + j10\sin(-45^\circ) = 7,07 - j7,07$$

b). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$V_2 = 15\angle 30^\circ \quad \text{atau} \quad V_2 = 15\cos(30^\circ) + j15\sin(30^\circ) = 12,99 + j7,5$$

c). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$I_1 = -4\angle 0^\circ \quad \text{atau} \quad I_1 = -4\cos(0^\circ) - j4\sin(0^\circ) = -4$$

d). Pernyataan fasor dalam bentuk polar dan bentuk sudut siku adalah

$$I_2 = 3\angle -90^\circ \quad \text{atau} \quad I_2 = 3\cos(-90^\circ) + j3\sin(-90^\circ) = -j3$$

e). Fasor hanya dapat dijumlahkan jika frekuensinya sama. Karena kedua arus dalam soal e) ini berfrekuensi sama maka fasornya dapat kita jumlahkan $I_3 = I_1 + I_2 = -4 - j3$. Hasil penjumlahan ini dapat kita ubah kembali dalam bentuk

polar menjadi $I_3 = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-4}\right) = 5\angle 216,9^\circ$

f). $S_1 = V_1 I_1^* = (10\angle -45^\circ) \times (-4\angle 0^\circ) = -40\angle -45^\circ$

$S_2 = V_2 I_2^* = (15\angle 30^\circ) \times (3\angle 90^\circ) = 45\angle 120^\circ$

g). $Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{10\angle -45^\circ}{-4\angle 0^\circ} = -2,5\angle -45^\circ$; $Z_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{15\angle 30^\circ}{3\angle 90^\circ} = 5\angle -60^\circ$

CONTOH 5.2 : Ubahlah pernyataan fasor dari sinyal sinus berikut ini ke pernyataan sinus di kawasan waktu.

a). $V_1 = 150\angle -45^\circ$ V, pada frekuensi siklus 50 Hz

b). $V_2 = 30 + j40$ V, pada frekuensi sudut $\omega = 1000$ rad/detik.

c). $I = 15 + j5 + 10\angle 180^\circ$ mA, pada $\omega = 1000$ rad/detik.

Penyelesaian :

a). Sinyal ini mempunyai amplitudo 150 V, dan sudut fasa -45° . Frekuensi siklusnya 50 Hz yang berarti frekuensi sudutnya $\omega = 2\pi \times 50 = 314$ rad/detik. Jadi di kawasan waktu sinyal ini adalah $v_1(t) = 150\cos(314t - 45^\circ)$ V

b). Amplitudo sinyal ini adalah $V_m = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ V dan sudut fasanya $\theta = \tan^{-1} \frac{40}{30} = 53,1^\circ$. Karena $\omega = 1000$ rad/detik, maka pernyataan sinyal ini di

kawasan waktu adalah $v_2(t) = 50\cos(1000t + 53,1^\circ)$

c). Sinyal ini dinyatakan dalam fasor dan merupakan jumlah dari dua sinyal, satu dalam bentuk sudut siku dan yang lain dalam bentuk polar. Jika dinyatakan dalam bentuk sudut siku, sinyal ini menjadi

$$I = 15 + j5 + 10\cos 180^\circ + j10\sin 180^\circ = 15 + j5 - 10 + j0 = 5 + j5 \text{ mA}$$

Amplitudo dan sudut fasanya adalah $I_m = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7,07 \text{ mA}$; $\phi = \tan^{-1} \frac{5}{5} = 45^\circ$

Karena diketahui $\omega = 1000$ rad/detik, maka $i(t) = 7,07\cos(1000t + 45^\circ)$

Resistansi, Reaktansi, Impedansi Elemen

Dengan fungsi sinus dinyatakan dalam fasor, maka kita akan mendapatkan hubungan-hubungan tegangan dan arus pada elemen-elemen pasif sebagai berikut.

Resistor. Jika arus pada resistor adalah

$$i_R(t) = I_{Rm} \cos(\omega t + \theta) = I_{Rm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

maka tegangannya adalah

$$v_R(t) = R i_R(t) = R I_{Rm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

Jika dinyatakan dalam fasor maka

$$\boxed{\mathbf{V}_R = R \mathbf{I}_R} \quad (5.14)$$

Hubungan arus dan tegangan resistor tetap seperti yang telah kita kenal selama ini, dengan faktor proporsionalitas R yang kita sebut *resistansi*.

Induktor. Untuk induktor, jika arus induktor adalah

$$i_L(t) = I_{Lm} \cos(\omega t + \theta) = I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

maka tegangan induktor adalah

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d(I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)})}{dt} = j\omega L (I_{Lm} e^{j(\omega t + \theta)})$$

Dalam bentuk fasor,

$$\boxed{\mathbf{V}_L = j\omega L \mathbf{I}_L = jX_L \mathbf{I}_L = Z_L \mathbf{I}_L} \quad (5.15)$$

dengan: $X_L = \omega L$ dan $Z_L = j\omega L$

Jadi dengan pernyataan sinyal dalam fasor, hubungan tegangan dan arus induktor tidak lagi berbentuk hubungan diferensial, melainkan berbentuk linier dengan faktor proporsionalitas sebesar $Z_L = jX_L$; X_L kita sebut *reaktansi induktif*, Z_L kita sebut *impedansi induktor*

Kapasitor. Untuk kapasitor, jika tegangan kapasitor adalah

$$v_C(t) = V_{Cm} \cos(\omega t + \theta) = V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)}$$

maka arus kapasitor adalah

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{d(V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)})}{dt} = j\omega C (V_{Cm} e^{j(\omega t + \theta)})$$

yang dalam bentuk fasor dapat kita tuliskan sebagai

$$\boxed{\mathbf{I}_C = j\omega C \mathbf{V}_C \text{ atau } \mathbf{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I}_C = -\frac{j}{\omega C} \mathbf{I}_C = jX_C \mathbf{I}_C = Z_C \mathbf{I}_C} \quad (5.16)$$

dengan: $|X_C| = \frac{1}{\omega C}$ dan $Z_C = -\frac{j}{\omega C}$

Seperti apa yang kita peroleh pada induktor, hubungan tegangan dan arus kapasitor tidak lagi berupa hubungan integral, melainkan berupa hubungan linier dengan faktor proporsionalitas sebesar $Z_C = jX_C$; X_C kita sebut *reaktansi kapasitif*, Z_C kita sebut *impedansi kapasitor*.

Kaidah-Kaidah Rangkaian Impedansi

Hubungan Seri dan Kaidah Pembagi Tegangan. Tegangan total pada R dan L yang terhubung seri dengan $i(t)=I_m e^{j(\omega t+\theta)}$ adalah

$$v_{RL}(t) = v_R(t) + v_L(t) = RI_m e^{j(\omega t+\theta)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t+\theta)} = (R + j\omega L)I_m e^{j(\omega t+\theta)}$$

Dalam bentuk fasor,

$$\mathbf{V}_{RL \text{ seri}} = (R + j\omega L)\mathbf{I} \quad (5.17)$$

Perbandingan antara tegangan dan arus pada resistor dan induktor yang terhubung seri disebut *impedansi* dari hubungan seri ini, yaitu

$$\mathbf{Z}_{RL \text{ seri}} = R + j\omega L \quad (5.18)$$

Dengan cara yang sama kita dapat memperoleh impedansi hubungan seri RC dan LC sebagai

$$\mathbf{V}_{RC \text{ seri}} = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{Z}_{RC \text{ seri}} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{V}_{LC \text{ seri}} = \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{Z}_{LC \text{ seri}} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (5.20)$$

Hubungan seri tidak terbatas hanya dua elemen tetapi bisa lebih, sehingga terbentuklah hubungan seri beberapa impedansi. Secara umum impedansi total dari beberapa impedansi yang terhubung seri adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{total \text{ seri}} &= \mathbf{Z}_{total \text{ seri}} \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}_{total \text{ seri}} &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dalam hubungan seri dari beberapa impedansi, tegangan pada impedansi ke k adalah $\mathbf{V}_k = \mathbf{I} Z_k$; sedangkan $\mathbf{I} Z_{total \text{ seri}} = \mathbf{V}_{total \text{ seri}}$. Dengan demikian maka berlaku kaidah pembagi tegangan

$$\mathbf{V}_k = \frac{Z_k}{Z_{total \text{ seri}}} \times \mathbf{V}_{total} \quad (5.22)$$

Hubungan Paralel dan Kaidah Pembagi Arus. Dua atau lebih impedansi yang terhubung paralel akan bertegangan sama. Jika tegangan ini adalah \mathbf{V} maka arus pada impedansi ke k adalah

$$\mathbf{I}_k = \frac{\mathbf{V}}{Z_k} = Y_k \mathbf{V} \quad (5.23)$$

dengan $Y_k = 1/Z_k$ disebut *admitansi*.

Arus total dalam hubungan paralel adalah

$$\mathbf{I}_{total} = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_k = \sum_{k=1}^n Y_k \mathbf{V} = Y_{total} \mathbf{V} \quad (5.24)$$

dengan

$$Y_{total} = \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad (5.25)$$

Dari (5.23) dan (5.24) diturunkan kaidah pembagi arus

$$\mathbf{I}_k = Y_k \mathbf{V} = \frac{Y_k}{Y_{total}} \mathbf{I}_{total} \quad (5.26)$$

Impedansi Secara Umum. Secara umum impedansi dapat kita tuliskan

$$Z = R(\omega) + jX(\omega) \quad (5.27)$$

Bagian riil adalah *resistansi* dan bagian imajiner adalah *reaktansi*. Kedua bagian ini mungkin merupakan fungsi dari frekuensi ω . Reaktansi yang bernilai positif merupakan *reaktansi induktif*, sedang yang bernilai negatif merupakan *reaktansi kapasitif*. Sebagai contoh, impedansi dari induktor yang terhubung seri dengan kapasitor yang terparalel dengan resistor adalah

$$Z_{L+R//C} = j\omega L + \frac{R(1/j\omega C)}{R+(1/j\omega C)} = \frac{R}{(\omega RC)^2 + 1} + j\left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{(\omega RC)^2 + 1}\right)$$

Perhatikan bahwa bagian riil maupun bagian imajiner merupakan fungsi dari frekuensi ω . Jadi baik resistansi maupun reaktansi dari impedansi secara umum merupakan fungsi frekuensi.

Perhatian : Walaupun impedansi merupakan pernyataan yang berbentuk kompleks, akan tetapi *impedansi bukanlah fasor*. Impedansi dan fasor merupakan dua pengertian dari dua konsep yang berbeda.

- *Fasor adalah pernyataan dari sinyal sinus*
- *Impedansi adalah pernyataan elemen.*

Walaupun impedansi bukan fasor, namun karena keduanya berupa pernyataan kompleks, maka operasi-operasi fasor dapat diterapkan pada keduanya. Sebagai contoh kita ambil hubungan seri *RL* :

$$Z_{RL \text{ seri}} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} = Z_1 \angle \lambda_1$$

Jika fasor tegangan $\mathbf{V}_s = V_1 \angle \theta_1$ diterapkan pada hubungan seri *RL* ini, maka arus yang mengalir adalah

$$\mathbf{I}_{RL} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_{RL \text{ seri}}} = \frac{V_1 \angle \theta_1}{Z_1 \angle \lambda_1} = \frac{V_1}{Z_1} \angle (\theta_1 - \lambda_1) \quad (5.28)$$

Secara singkat, impedansi elemen dan hubungan arus-tegangan elemen adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Z_R = R \quad ; \quad Z_L = j\omega L \quad ; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} \\ \mathbf{V}_R = R\mathbf{I}_R \quad ; \quad \mathbf{V}_L = j\omega L\mathbf{I}_L \quad ; \quad \mathbf{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}_C = \frac{-j}{\omega C}\mathbf{I}_C \end{aligned} \quad (5.29)$$

Secara singkat dapat kita katakan bahwa : dengan menyatakan sinyal sinus ke dalam bentuk fasor, maka perbandingan antara tegangan elemen dan arus elemen merupakan suatu besaran kompleks yang kita sebut impedansi di kawasan fasor. Dengan menyatakan elemen dalam impedansinya maka hubungan antara tegangan dan arus elemen menjadi mirip dengan relasi hukum Ohm di kawasan waktu. Kaidah-kaidah rangkaian di kawasan waktu berlaku juga di kawasan fasor.

CONTOH 5.3 : Arus yang melalui induktor 0,5 H adalah $i_L(t)=0,4\cos(1000t)$ A. Tentukanlah: a) impedansi induktor; b) Fasor tegangan pada induktor; c) bentuk gelombang tegangan pada induktor.

Penyelesaian :

a). Impedansi induktor adalah $Z_L = j\omega L$. Dalam contoh ini $\omega = 1000$, jadi

$$Z_L = j \times 1000 \times 0,5 = j500 \Omega$$

b). Fasor tegangan induktor adalah fasor arus kali impedansinya. Karena arus dinyatakan di kawasan waktu, kita ubah dulu pernyataan arus ini ke kawasan fasor menjadi $\mathbf{I}_L = 0,4 \angle 0^\circ$ A. Tegangan induktor adalah

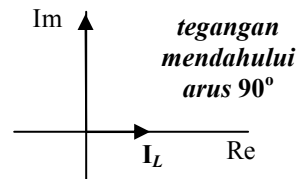
$$\mathbf{V}_L = Z_L \mathbf{I}_L = (j500) \times 0,4 \angle 0^\circ = 500 \angle 90^\circ \times 0,4 \angle 0^\circ = 200 \angle 90^\circ \text{ V}$$

c). Bentuk gelombang tegangan pada induktor yang dimaksudkan di sini adalah pernyataan di kawasan waktu dari tegangan induktor. Dari hasil b) dengan mudah kita nyatakan

$$v_L(t) = 200 \cos(1000t + 90^\circ) \text{ V}$$

Pemahaman:

Fasor tegangan dan fasor arus pada induktor berbeda fasa sebesar 90° . *Tegangan mendahului arus dengan sudut 90° .*



CONTOH 5.4 : Arus yang melalui kapasitor sebesar 50 pF adalah $i_C(t)=0,5\cos(10^6 t)$ mA. Tentukanlah: a) impedansi kapasitor; b) fasor tegangan pada kapasitor; c) bentuk gelombang tegangan pada kapasitor.

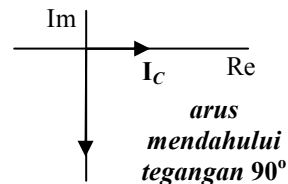
Penyelesaian : a). $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{10^6 \times (50 \times 10^{-12})} = -j20 \text{ k}\Omega$

b). $\mathbf{V}_C = Z_C \mathbf{I}_C = (20 \times 10^3 \angle -90^\circ) \times (0,5 \times 10^{-3} \angle 0^\circ) = 10 \angle -90^\circ \text{ V}$

c). $v_C(t) = 10 \cos(10^6 t - 90^\circ) \text{ V}$.

Pemahaman:

Fasor tegangan dan fasor arus pada induktor berbeda fasa sebesar 90° . *Tegangan mendahului arus dengan sudut 90° .*



CONTOH 5.5 : Suatu beban diberi tegangan $v(t)=120\cos(314t+10^\circ)$ V. Arus yang mengalir adalah $i(t) = 5\cos(314t+40^\circ)$ A. Carilah impedansi beban tersebut.

Penyelesaian :

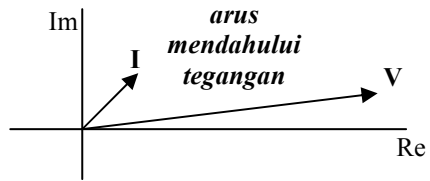
Tegangan dan arus dalam fasor adalah $\mathbf{V} = 120 \angle 10^\circ \text{ V}$ dan $\mathbf{I} = 5 \angle 40^\circ \text{ A}$
Impedansi beban adalah:

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{120 \angle 10^\circ}{5 \angle 40^\circ} = 24 \angle -30^\circ \Omega \\ &= 24 \cos(-30) + j24 \sin(-30) = 20,8 - j12 \Omega \end{aligned}$$

Pemahaman :

Kita mengetahui bahwa impedansi induktor adalah $Z_L=j\omega L$ dan impedansi kapasitor adalah $Z_C = -j/\omega C$. Dari sini kita lihat bahwa sesuatu impedansi yang komponen imajineranya positif akan bersifat *induktif* sedangkan jika komponen imajineranya negatif akan bersifat *kapasitif*.

Dalam contoh 5.5. ini impedansi beban mempunyai komponen imajiner negatif. Jadi beban bersifat kapasitif. Pada beban kapasitif ini sudut fasa arus lebih besar dari sudut fasa tegangan. Kita katakan bahwa *arus mendahului tegangan* atau *arus leading terhadap tegangannya*. Gambar fasor arus dan tegangan pada beban adalah seperti di samping ini.



CONTOH 5.6 : Suatu beban diberi tegangan $v(t)=120\cos(314t+20^\circ)$ V. Arus yang mengalir adalah $i(t)=5\cos(314t-40^\circ)$ A. Carilah impedansi beban tersebut.

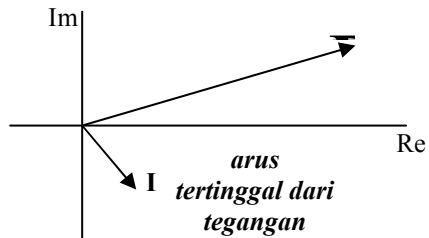
Penyelesaian :

$$Z_B = \frac{V}{I} = \frac{120\angle 20^\circ}{5\angle -40^\circ} = 24\angle 60^\circ \Omega$$

$$= 24\cos(60^\circ) + j24\sin(60^\circ) = 12 + j20,8 \Omega$$

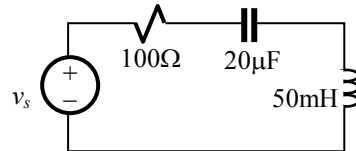
Pemahaman :

Dalam contoh ini komponen imajiner impedansi beban bernilai positif. Beban bersifat induktif. Pada beban yang bersifat induktif sudut fasa arus lebih kecil dari sudut fasa tegangan. Fasor arus *ketinggalan* dari tegangan atau *arus lagging terhadap tegangan*. Fasor tegangan dan fasor arus dalam contoh ini digambarkan seperti di samping ini.



CONTOH 5.7 : Tegangan sumber pada rangkaian berikut ini adalah $v_s(t)=250\cos 500t$ V.

- Tentukan fasor arus pada rangkaian.
- Tentukan fasor tegangan di tiap elemen.
- Gambarkan fasor tegangan sumber dan elemen.
- Nyatakan bentuk gelombang arus dan tegangan elemen.



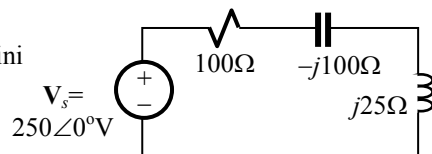
Penyelesaian :

Untuk bekerja di kawasan fasor, rangkaian ini kita transformasikan menjadi rangkaian impedansi dan sumbernya dinyatakan dalam fasor. Impedansi elemen dan tegangan sumber menjadi

$$Z_R = 100 \Omega ; Z_C = -\frac{j}{500 \times 20 \times 10^{-6}} = -j100 \Omega ; Z_L = j500 \times 50 \times 10^{-3} = j25 \Omega$$

$$V_s = 250\angle 0^\circ$$

Rangkaian di atas menjadi seperti di samping ini



- Impedansi total rangkaian adalah

$$Z_{tot} = 100 - j100 + j25 = 100 - j75 \Omega$$

$$= \sqrt{(100)^2 + (75)^2} \angle \tan^{-1} \frac{-75}{100} = 125 \angle -36,87^\circ \Omega$$

Arus pada rangkaian adalah

$$I = \frac{V_s}{Z_{tot}} = \frac{250\angle 0^\circ}{125 \angle -36,87^\circ} = 2\angle 36,87^\circ \text{ A}$$

- b). Dengan menggunakan kaidah pembagi tegangan, tegangan di tiap elemen dapat dengan mudah dihitung.

$$\mathbf{V}_R = \frac{Z_R}{Z_{tot}} \mathbf{V}_s = \frac{100}{125 \angle -36,87^\circ} 250 \angle 0^\circ = 200 \angle 36,87^\circ \text{ V}$$

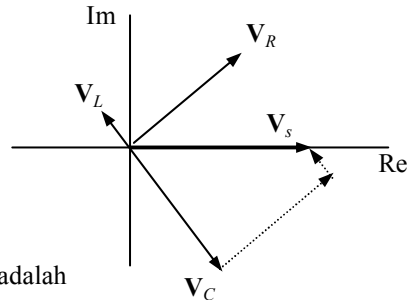
$$\mathbf{V}_C = \frac{Z_C}{Z_{tot}} \mathbf{V}_s = \frac{100 \angle -90^\circ}{125 \angle -36,87^\circ} 250 \angle 0^\circ = 200 \angle -53,13^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_L = \frac{Z_L}{Z_{tot}} \mathbf{V}_s = \frac{25 \angle 90^\circ}{125 \angle -36,87^\circ} 250 \angle 0^\circ = 50 \angle 126,87^\circ \text{ V}$$

- c). Gambar fasor tegangan sumber dan tegangan-tegangan elemen adalah seperti gambar di samping ini.

Perhatikanlah bahwa fasor-fasor tegangan ini memenuhi HTK

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L$$



- d). Bentuk gelombang arus dan tegangan elemen adalah

$$i(t) = 2 \cos(500t + 36,87^\circ) \text{ A} ; v_R(t) = 200 \cos(500t + 36,87^\circ) \text{ V}$$

$$v_C(t) = 200 \cos(500t - 53,13^\circ) \text{ V} ; v_L(t) = 50 \cos(500t + 126,87^\circ) \text{ V}$$

Pemahaman :

Tegangan di setiap elemen dapat pula dicari dengan mengalikan arus dan impedansinya.

$$\mathbf{V}_R = Z_R \mathbf{I} = 100 \times 2 \angle 36,87^\circ = 200 \angle 36,87^\circ \text{ V}$$

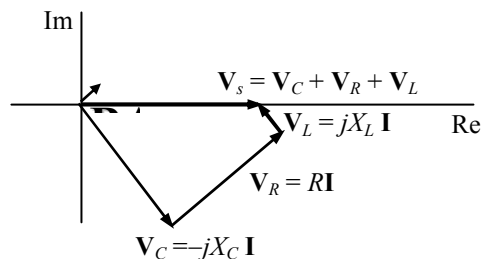
$$\mathbf{V}_C = Z_C \mathbf{I} = 100 \angle -90^\circ \times 2 \angle 36,87^\circ = 200 \angle -53,13^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_L = Z_L \mathbf{I} = 25 \angle 90^\circ \times 2 \angle 36,87^\circ = 50 \angle 126,87^\circ \text{ V}$$

Sesuai dengan HTK,
 $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L$

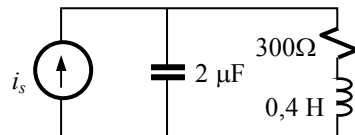
Diagram fasornya adalah seperti di samping ini. Perhatikanlah bahwa

- fasor $\mathbf{V}_R = R \mathbf{I}$ sejajar fasor \mathbf{I}
- fasor $\mathbf{V}_C = -jX_C \mathbf{I}$ tegak lurus pada fasor \mathbf{I} dengan pergeseran sudut fasa -90° .
- fasor $\mathbf{V}_L = jX_L \mathbf{I}$ tegak lurus pada fasor \mathbf{I} dengan pergeseran sudut fasa $+90^\circ$.



CONTOH 5.8. : Arus sumber pada rangkaian berikut ini adalah $i_s(t) = 50 \cos 1000t$ mA.

- a). Tentukan fasor tegangan kapasitor.
- b). Tentukan fasor arus di tiap cabang.
- c). Gambarkan fasor arus sumber dan arus cabang dan tegangan kapasitor.
- d). Gambarkan fasor tegangan kapasitor, tegangan resistor dan induktor.

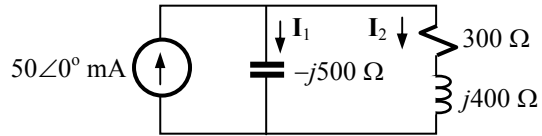


Penyelesaian :

Dengan $\omega = 1000$, maka impedansi elemen dan fasor arus sumber adalah

$$Z_R = 300 \Omega ; Z_C = -\frac{j}{1000 \times 2 \times 10^{-6}} = -j500 \Omega ; Z_L = j1000 \times 0,4 = j400 \Omega ; \mathbf{I}_s = 50 \angle 0^\circ.$$

Transformasi rangkaian ke kawasan fasor adalah seperti di samping ini:



a). Admitansi dari kedua cabang yang diparalel masing-masing adalah

$$Y_C = \frac{1}{-j500} = j2 \times 10^{-3} \text{ S}; \quad Y_{RL} = \frac{1}{300 + j400} = \frac{1}{500 \angle \tan^{-1}(4/3)} = 12 \times 10^{-4} - j16 \times 10^{-4} \text{ S}$$

Admitansi total :

$$Y_{tot} = Y_C + Y_{RL} = j2 \times 10^{-3} + 12 \times 10^{-4} - j16 \times 10^{-4} \text{ S} \\ = 12 \times 10^{-4} + j4 \times 10^{-4} = 12,65 \times 10^{-4} \angle 18,4^\circ \text{ S}$$

Tegangan pada kapasitor (yang sama dengan tegangan pada R dan L seri) adalah

$$V_C = \frac{I_s}{Y_{tot}} = \frac{50 \times 10^{-3} \angle 0^\circ}{12,65 \times 10^{-4} \angle 18,4^\circ} = 39,5 \angle -18,4^\circ \text{ V}$$

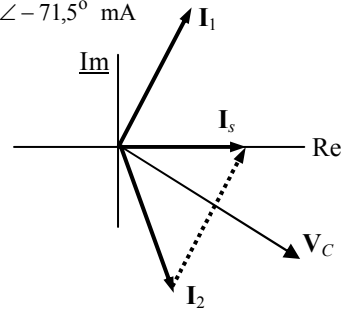
b). Arus di tiap cabang adalah

$$I_1 = \frac{V_C}{Z_C} = \frac{39,5 \angle -18,4^\circ}{-j500} = \frac{39,5 \angle -18,4^\circ}{500 \angle -90^\circ} = 79 \angle 61,6^\circ \text{ mA}$$

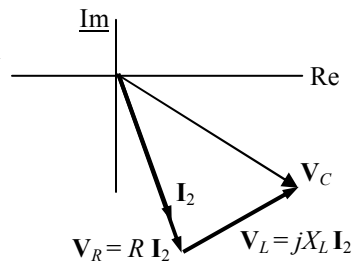
$$I_2 = \frac{V_{RL}}{Z_{RL}} = \frac{V_C}{Z_{RL}} = \frac{39,5 \angle -18,4^\circ}{300 + j400} = \frac{39,5 \angle -18,4^\circ}{500 \angle 53,1^\circ} = 79 \angle -71,5^\circ \text{ mA}$$

c). Gambar fasor arus sumber dan arus cabang adalah :

Perhatikan bahwa $I_s = I_2 + I_1$
 I_1 90° mendahului V_C
 I_2 tertinggal dari V_C .



d). Gambar fasor tegangan kapasitor, resistor dan induktor adalah :



Teorema Rangkaian di Kawasan Fasor

Prinsip Proporsionalitas. Prinsip proporsionalitas menyatakan bahwa fasor keluaran sebanding dengan fasor masukan, yang secara matematis dapat dinyatakan dengan

$$\mathbf{Y} = K\mathbf{X} \quad (5.30)$$

\mathbf{Y} adalah fasor keluaran, \mathbf{X} adalah fasor masukan, dan K adalah konstanta proporsionalitas. Dalam kawasan fasor, K pada umumnya merupakan bilangan kompleks. Lihat misalnya penyelesaian b) dari contoh 5.7.

Prinsip Superposisi. Kita harus berhati-hati dalam menerapkan prinsip superposisi di kawasan fasor. Fasor merupakan representasi sinyal sinus dengan frekuensi tertentu. Oleh

karena itu prinsip superposisi hanya berlaku jika seluruh sistem yang kita tinjau mempunyai *frekuensi sama*. Jika memang demikian halnya, maka tanggapan rangkaian yang mengandung beberapa masukan dapat kita cari dengan memandang masing-masing masukan secara terpisah. Tanggapan keseluruhan adalah jumlah dari tanggapan terhadap masing-masing masukan.

Jika masukan-masukan mempunyai frekuensi yang berbeda, kita tidak dapat serta-merta menerapkan prinsip superposisi. Kita ingat bahwa impedansi tergantung dari frekuensi; oleh karena itu walaupun nilai-nilai elemen sama, nilai impedansi akan berbeda jika frekuensi berbeda. Jadi jika kita ingin mencari tanggapan rangkaian terhadap masing-masing masukan, kita harus mencari nilai impedansi rangkaian untuk masing-masing masukan. Tanggapan rangkaian dalam bentuk fasor dari masing-masing masukan tidak dapat langsung dijumlahkan melainkan harus kita transformasikan dulu ke kawasan t , dan barulah hasil di kawasan t untuk masing-masing masukan ini dijumlahkan untuk memperoleh tanggapan keseluruhan. Singkat kata, *prinsip superposisi berlaku di kawasan waktu untuk setiap rangkaian linier*, tetapi *berlaku di kawasan fasor hanya apabila masukan-masukan mempunyai frekuensi sama*. Agar lebih jelas kita akan melihat tiga kasus berikut.

Kasus 1: Sebuah rangkaian mengandung dua sumber yang mempunyai frekuensi sama. Rangkaian ini kita pecah menjadi dua rangkaian, masing-masing mengandung satu sumber. Masing-masing rangkaian kita transformasikan menjadi rangkaian fasor dan kemudian kita melakukan analisis di kawasan fasor.

Hasil yang kita peroleh dari dua kali analisis tersebut tentulah merupakan besaran-besaran fasor. Kedua hasil itu dapat langsung kita jumlahkan untuk memperoleh hasil total, tanpa mentransformasikan lebih dulu ke kawasan t . Mengapa? Karena seluruh sistem mempunyai frekuensi sama. Jadi *apabila seluruh sistem berfrekuensi sama prinsip superposisi dapat diterapkan dalam analisis fasor*.

Kasus 2: Sebuah rangkaian mengandung dua sumber yang frekuensinya tidak sama. Kita memisahkan lebih dulu rangkaian tersebut menjadi dua rangkaian yang masing-masing mengandung hanya satu sumber. Setelah dipisahkan, masing-masing rangkaian ditransformasikan menjadi rangkaian fasor kemudian dilakukan analisis di kawasan fasor. Hal ini dapat dilakukan karena *masing-masing rangkaian mempunyai frekuensi sendiri yang sama di seluruh rangkaian*. Hasil analisis dari kedua rangkaian ini tentulah berbentuk fasor akan tetapi mereka tidak dapat langsung dijumlahkan *karena frekuensinya berbeda*. Oleh karena itu masing-masing hasil kita transformasikan kembali ke kawasan t , dan hasil transformasi inilah yang dapat kita jumlahkan untuk memperoleh hasil total. Jadi *prinsip superposisi berlaku di kawasan fasor hanya apabila masukan-masukan mempunyai frekuensi sama*.

Kasus 3 : Sebuah rangkaian mengandung *tiga sumber*, dua diantaranya mempunyai frekuensi sama dan sumber yang ke-tiga frekuensinya berbeda. Jika rangkaian ini kita pecah menjadi tiga rangkaian yang masing-masing mengandung hanya satu sumber untuk dianalisis di kawasan fasor, maka hasil fasor untuk dua sumber yang frekuensinya sama dapat kita jumlahkan langsung dalam bentuk fasor. Akan tetapi kita tidak dapat menjumlahkannya dengan hasil analisis rangkaian ke-tiga yang frekuensinya berbeda. Oleh karena itu hasil yang diperoleh harus ditransformasi ke kawasan t lebih dulu sebelum penjumlahan dilakukan.

Selanjutnya lihat contoh 5.11.

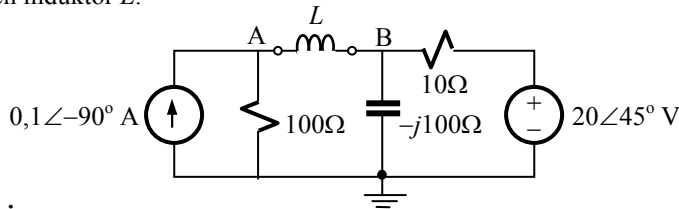
Rangkaian Ekuivalen Thévenin dan Norton. Konsep umum mengenai teorema Thévenin dan Norton di bidang fasor, sama dengan apa yang kita pelajari untuk rangkaian di kawasan waktu. Perbedaan yang perlu kita perhatikan adalah bahwa sinyal-sinyal dinyatakan dalam fasor dengan impedansi dan admitansi yang berupa bilangan kompleks.

Tegangan ekivalen Thévenin adalah tegangan hubungan terbuka pada terminal beban. Arus ekivalen Norton adalah arus hubung singkat pada terminal beban. Semua peubah ini dinyatakan dalam fasor. Relasi peubah ini dengan impedansi ekivalen Thévenin, Z_T , dan admitansi ekivalen Norton, Y_N , adalah seperti berikut.

$$\boxed{V_T = Z_T I_N \ ; \ I_N = Y_N V_T \ ; \ Y_N = \frac{1}{Z_T}} \quad (5.31)$$

Hubungan (5.31) memberikan ketentuan untuk transformasi sumber di kawasan fasor. Seperti yang telah kita lihat pada rangkaian di kawasan waktu, transformasi sumber dapat menyederhanakan perhitungan-perhitungan dalam analisis rangkaian.

CONTOH 5.9 : Dari rangkaian dibawah ini, carilah rangkaian ekivalen Thévenin yang dilihat oleh induktor L .



Penyelesaian:

Jika induktor dilepaskan maka untuk simpul A dan B berlaku

$$V_A = 100 \times 0,1 \angle -90^\circ = 10 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$V_B = \frac{-j100}{10 - j100} \times 20 \angle 45^\circ = 0,995 \angle -5,7 \times 20 \angle 45^\circ = 19,9 \angle 39,3^\circ \text{ V}$$

Tegangan Thévenin :

$$\begin{aligned} V_T &= V_A - V_B = 10 \angle -90^\circ - 19,9 \angle 39,3^\circ \\ &= -j10 - (15,4 + j12,6) = -15,6 - j22,6 \text{ V} \end{aligned}$$

Impedansi Thévenin Z_{Th} , dihitung dengan melihat impedansi dari terminal AB dengan semua sumber dimatikan.

$$Z_T = 100 + \frac{10 \times (-j100)}{10 - j100} = 109,9 - j0,99 \ \Omega$$

Metoda-Metoda Analisis di Kawasan Fasor

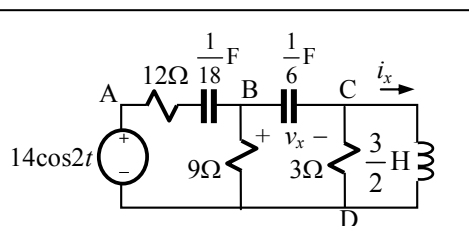
Metoda-metoda analisis yang telah kita pelajari untuk rangkaian di kawasan waktu, dapat kita terapkan untuk rangkaian di kawasan fasor dengan mengingat bahwa peubah sinyal dinyatakan dalam fasor dan elemen-elemen dinyatakan dalam impedansi atau admitansinya yang pada umumnya berupa bilangan kompleks.

Metoda Keluaran Satu Satuan. Metoda ini dapat kita aplikasikan pada rangkaian berbentuk tangga, seperti contoh berikut.

CONTOH 5.10 : Carilah i_x pada rangkaian Gb.5.3.

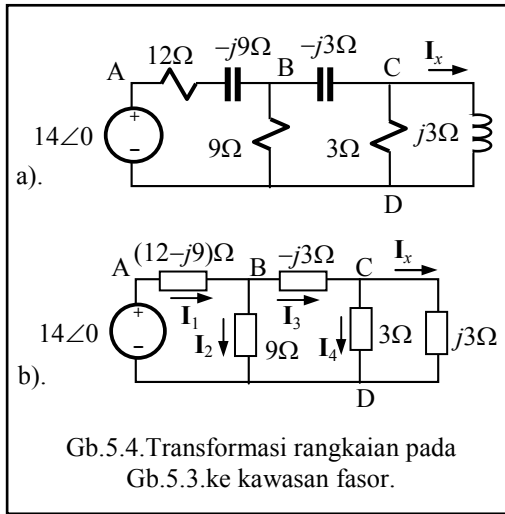
Penyelesaian :

Untuk bekerja di kawasan fasor, rangkaian ini kita transformasikan sehingga berbentuk rangkaian impedansi seperti



Gb.5.3. Rangkaian dengan masukan sinus.

terlihat pada Gb.5.4.a. atau dengan simbol seperti pada Gb.5.4.b. Dari sinilah kita mulai bekerja.



Misalkan $I_x = 1 \angle 0^\circ$ A.

$$V_C = j3 \text{ V}$$

$$I_4 = \frac{V_C}{3} = j1 \text{ A}$$

$$I_3 = I_x + I_4 = (1 + j1) \text{ A}$$

$$\begin{aligned} V_B &= V_C + (-j3)I_3 \\ &= j3 - j3(1 + j1) \\ &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{V_B}{9} = \frac{1}{3} \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = \left(\frac{4}{3} + j1\right) \text{ A}$$

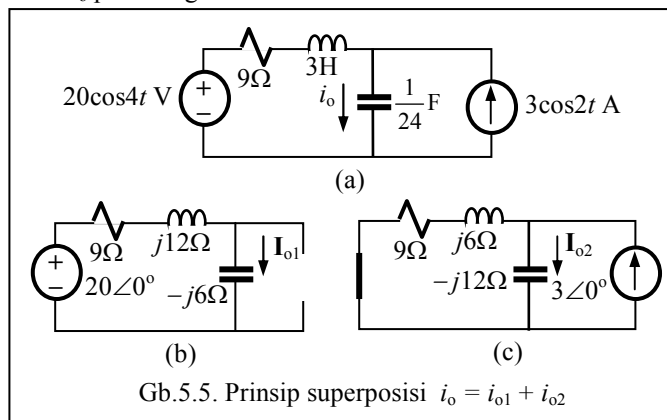
$$\begin{aligned} V_A &= V_B + \left(\frac{4}{3} + j1\right)(12 - j9) \\ &= 28 \text{ V} \end{aligned}$$

Gb.5.4. Transformasi rangkaian pada Gb.5.3. ke kawasan fasor.

$$K = \frac{I_x}{V_A} = \frac{1}{28} \rightarrow I_x = \frac{1}{28} V_A = \frac{14 \angle 0^\circ}{28} = 0,5 \angle 0^\circ \rightarrow i_x = 0,5 \cos 2t$$

Metoda Superposisi. Metoda superposisi sangat bermanfaat untuk menganalisis rangkaian yang mengandung lebih dari dua masukan, terutama jika kita ingin mengetahui bagaimana kontribusi dari masing-masing masukan terhadap tanggapan keseluruhan. Sebagaimana telah disebutkan di sub-bab sebelumnya, kita harus berhati-hati dalam menerapkan metoda superposisi di kawasan fasor. Prinsip superposisi dapat diterapkan langsung di kawasan fasor hanya jika masukan-masukan mempunyai frekuensi sama. Jika tidak, kontribusi dari masing-masing masukan harus kita transformasikan ke kawasan waktu lebih dahulu, baru kemudian dapat kita jumlahkan.

CONTOH 5.11 : Carilah i_o pada rangkaian Gb.5.5.a.



Gb.5.5. Prinsip superposisi $i_o = i_{o1} + i_{o2}$

Penyelesaian :

Rangkaian dalam Gb.5.5.a. mengandung dua sumber yang mempunyai frekuensi berbeda. Oleh karena itu transformasi rangkaian ke kawasan fasor untuk masing-masing sumber juga berbeda, seperti terlihat pada Gb.5.5.b. dan Gb.5.5.c. Dari masing-masing

rangkaian fasor ini, kita mencari tanggapan rangkaian di kawasan fasor kemudian ditransformasikan ke kawasan t . Hasil di kawasan t inilah yang dapat dijumlahkan.

Jika sumber arus dimatikan, kita mempunyai rangkaian di kawasan fasor seperti pada Gb.5.5.b. dengan frekuensi $\omega = 4$. Untuk rangkaian ini, aplikasi HTK memberikan

$$I_{o1} = \frac{20\angle 0^\circ}{8 + j12 - j6} = \frac{20\angle 0^\circ}{8 + j6} = \frac{20\angle 0^\circ}{10\angle 36,9^\circ} = 2\angle -36,9^\circ \text{ A}$$

Jika sumber tegangan dimatikan, kita mempunyai rangkaian Gb.5.5.c. dengan frekuensi $\omega = 2$. Kaidah pembagi arus memberikan :

$$I_{o2} = \frac{1/(-j12)}{\frac{1}{-j12} + \frac{1}{8 + j6}} \times 3\angle 0^\circ = \frac{-j12(8 + j6)}{8 + j6 - j12} = \frac{8 + j6}{8 - j6} \times 3\angle 0^\circ$$

$$= \frac{10\angle 36,9^\circ}{10\angle -36,9^\circ} \times 3\angle 0^\circ = 3\angle 73,8^\circ \text{ A}$$

I_{o1} dan I_{o2} tidak dapat dijumlahkan karena fasor ini diperoleh dari sumber dengan frekuensinya yang tidak sama. Oleh karena itu kita harus mengembalikannya ke kawasan waktu sebelum dijumlahkan. Dengan cara itu kita peroleh

$$i_{o1} = 2\cos(4t - 36,9^\circ) \text{ A} \quad \text{dan} \quad i_{o2} = 3\cos(2t + 73,8^\circ) \text{ A}$$

sehingga $i_o = i_{o1} + i_{o2}$

$$= 2\cos(4t - 36,9^\circ) + 3\cos(2t + 73,8^\circ) \text{ A}$$

Metoda Rangkaian Ekuivalen Thévenin dan Norton. Contoh berikut ini menunjukkan bagaimana metoda rangkaian ekuivalen Thévenin kita gunakan di kawasan fasor.

CONTOH 5.12 : Carilah i pada rangkaian Gb.5.6.a.

Penyelesaian :

Rangkaian Gb.5.6.a. setelah ditransformasi ke kawasan fasor menjadi seperti pada Gb.5.6.b. Fasor tegangan terminal AB yang terbuka, sesuai kaidah pembagi tegangan, adalah

$$V_T = V_{ht} = \frac{2}{2 + 6 + j4} \times 18\angle 0^\circ = \frac{9}{2 + j1} \text{ V}$$

$$Z_T = 2 + \frac{2(6 + j4)}{2 + 6 + j4} = \frac{16 + j8 + 12 + j8}{8 + j4}$$

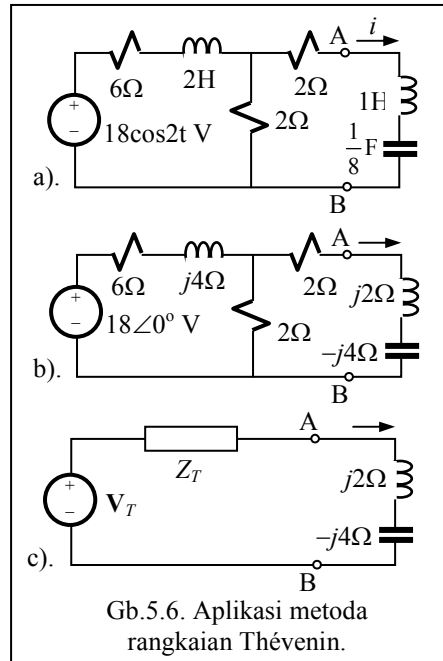
$$= \frac{7 + j4}{2 + j1} \Omega$$

$$I = \frac{V_T}{Z_T + j2 - j4}$$

$$= \frac{9}{(2 + j1)(7 + j4) - j2(2 + j1)}$$

$$= 1\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\Rightarrow i = 1\cos 2t \text{ A}$$



Gb.5.6. Aplikasi metoda rangkaian Thévenin.

Metoda Reduksi Rangkaian. Contoh persoalan berikut ini memperlihatkan penggunaan metoda reduksi rangkaian.

CONTOH 5.13 : Carilah i_x pada rangkaian Gb.5.7.a.

Penyelesaian :

Rangkaian Gb.5.7.a. mengandung sumber tegangan dan sumber arus yang berfrekuensi sama, yaitu $\omega = 100$. Akan tetapi sumber tegangannya dinyatakan dalam sinus sedangkan sumber arusnya dalam cosinus. Kita perlu mengubahnya dalam bentuk standar, yaitu bentuk cosinus, dengan kesamaan

$$\sin x = \cos(90-x) = \cos(x-90)$$

Transformasi rangkaian ke kawasan fasor menjadi seperti pada Gb.5.7.b. Untuk menghitung I_x kita dapat menggunakan metoda superposisi; akan tetapi di sini kita akan menggunakan transformasi sumber.

Dalam rangkaian ini sumber tegangan tersambung seri dengan resistor 50Ω yang diparalel dengan induktor $j100 \Omega$. Sumber ini dapat kita ganti dengan sumber arus ekuivalen I_2 , yang besarnya adalah

$$I_2 = V \left(\frac{1}{j100} + \frac{1}{50} \right) = (-j10) \frac{(50 + j100)}{j5000} = -0,1 - j0,2 \text{ A}$$

seperti terlihat pada Gb.5.7.c.

Perhatikan bahwa dengan transformasi sumber ini kita menghilangkan simpul B. Arus I_y yang sekarang mengalir melalui resistor 50Ω , bukanlah arus I_x yang kita cari; jika I_y dikalikan 50Ω , kita mendapatkan tegangan simpul A, dan bukan tegangan simpul B tempat I_x keluar.

Sumber I_1 dan I_2 terhubung paralel, sehingga dapat digantikan oleh satu sumber arus saja yaitu I , seperti terlihat pada Gb.5.7.d.

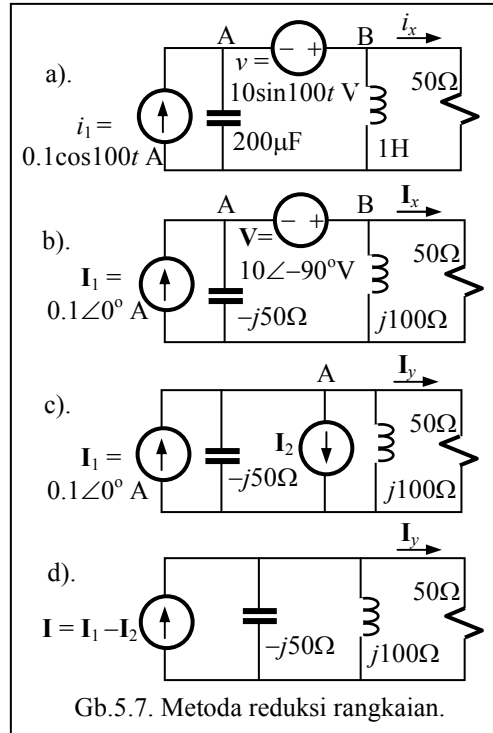
$$I = I_1 - I_2 = 0,1 - (-0,1 - j0,2) = 0,2 + j0,2 \text{ A}$$

Untuk menghitung arus I_y kita memanfaatkan kaidah pembagi arus.

$$I_y = \frac{\frac{1}{50}(0,2 + j0,2)}{\frac{1}{50} + \frac{1}{j100} + \frac{1}{-j50}} = \frac{0,2 + j0,2}{1 + j0,5} \text{ A} \rightarrow V_A = 50 \times I_y = \frac{10 + j10}{1 + j0,5} \text{ V}$$

$$V_B = V_A + V = \frac{10 + j10}{1 + j0,5} - j10 = \frac{15}{1 + j0,5} = 13,4 \angle -26,6^\circ \text{ V}$$

$$I_x = \frac{V_B}{50} = 0,27 \angle -26,6 \text{ A} \rightarrow i_x = 0,27 \cos(100t - 26,6) \text{ A.}$$

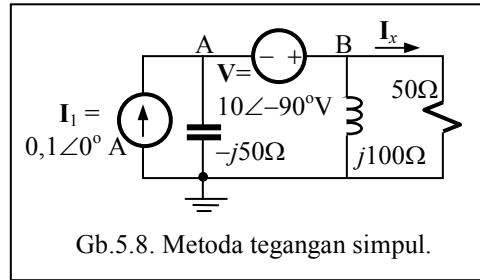


Metoda Tegangan Simpul. Aplikasi metoda ini, kita lihat dalam contoh berikut.

CONTOH 5.14 : Gunakan metoda tegangan simpul untuk menyelesaikan persoalan pada contoh 5.12.

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan persoalan ini rangkaian fasor dari contoh 5.12 digambar lagi pada Gb.5.8. Simpul referensi kita tentukan seperti terlihat pada gambar tersebut. Simpul A, B, dan sumber tegangan menjadi simpul-super karena A dan B keduanya bukan simpul referensi. Persamaan tegangan simpul dapat kita peroleh dengan cara yang sama seperti untuk rangkaian di kawasan waktu, akan tetapi di sini kita bekerja di kawasan fasor dengan impedansi-impedansi.



Gb.5.8. Metoda tegangan simpul.

$$A : -I_1 + \frac{V_A}{-j50} + \frac{V_B}{j100} + \frac{V_B}{50} = 0$$

$$B : V_A - V_B = -V$$

Untuk persamaan yang sederhana ini tentu dapat kita selesaikan dengan metoda substitusi biasa. Namun di sini kita akan menuliskannya dalam bentuk matriks, dengan memasukkan nilai I_1 dan V .

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{-j50} & \frac{1}{j100} + \frac{1}{50} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1\angle 0^\circ \\ 10\angle 90^\circ \end{bmatrix}$$

Untuk menyederhanakan bilangan, baris pertama dari matriks ini kita kalikan 100, dan menuliskan fasor dalam bentuk sudut-siku.

$$\begin{bmatrix} j2 & 2-j1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ j10 \end{bmatrix} \rightarrow \text{eliminasi Gauss: } \begin{bmatrix} j2 & 2-j1 \\ 0 & -2-j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Dari sini kita peroleh

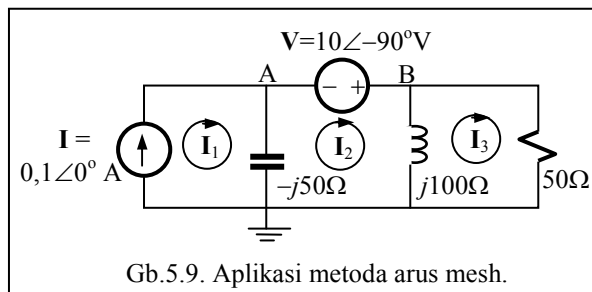
$$V_B = \frac{-30}{-2-j1} = \frac{-30(-2+j1)}{5} = 12-j6 = 13,4\angle -26,6^\circ \text{ V}$$

$$\rightarrow v_B = 13,4 \cos(100t - 26,6^\circ) \text{ V} \rightarrow i_x = \frac{v_B}{50} = 0,268 \cos(100t - 26,6^\circ) \text{ A}$$

$$\left(V_A = j10 + V_B = j10 + \frac{j15}{-0,5+j1} = \frac{j10-10}{-0,5+j1} = 12,6\angle 18,4^\circ \text{ V} \right)$$

Metoda Arus Mesh. Penggunaan metoda ini di kawasan fasor juga akan kita lihat melalui sebuah contoh.

CONTOH 5.15 : Tentukanlah arus di semua cabang rangkaian pada persoalan contoh 5.12. dengan menggunakan metoda arus mesh.



Gb.5.9. Aplikasi metoda arus mesh.

Penyelesaian :

Persamaan fasor arus mesh dalam bentuk matriks adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ j50 & -j50 + j100 & -j100 \\ 0 & -j100 & 50 + j100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -j10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ j5 & j5 & -j10 \\ 0 & -j2 & 1 + j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -j1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss memberikan
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j5 & -j10 \\ 0 & 0 & 5 - j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -j1.5 \\ -j3 \end{bmatrix}$$

Dari sini kita dapatkan

$$\mathbf{I}_1 = 0,1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{-j3}{5 - j10} = \frac{3 \angle -90^\circ}{5\sqrt{5} \angle -63,4^\circ} = 0,27 \angle -26,6^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{-j1,5 + j10\mathbf{I}_3}{j5} = -0,3 + 2 \frac{-j3}{5 - j10} = \frac{-1,5 - j3}{5 - j10} = 0,3 \angle -53,2^\circ \text{ A}$$

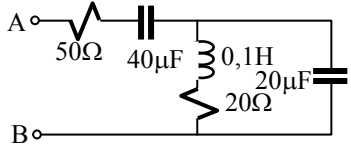
SOAL-SOAL : FASOR, IMPEDANSI, ANALISIS RANGKAIAN SISTEM SATU FASA

- | | |
|---|---|
| <p>1. Nyatakanlah sinyal-sinyal sinus berikut ini kedalam fasor dan gambarkanlah diagram fasornya.</p> <p>a). $v_1 = 100 \cos \omega t$</p> <p>b). $v_2 = 75 \cos(\omega t - 90^\circ)$</p> <p>c). $v_3 = 50 \cos(\omega t + 45^\circ)$</p> <p>d). $v_4 = v_1 + v_2$</p> <p>e). $v_5 = v_1 - v_3$</p> <p>f). $v_6 = v_1 + v_3$</p> <p>2. Nyatakanlah fasor-fasor berikut ini kedalam sinyal di kawasan waktu, jika frekuensi adalah 300 rad/s.</p> <p>a). $\mathbf{V}_1 = 60 \angle 30^\circ$; b). $\mathbf{V}_2 = 30 \angle -60^\circ$</p> <p>c). $\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$; d). $\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$</p> <p>3. Tuliskanlah fasor-fasor pada soal 2 ke dalam bentuk sudut siku $\mathbf{V} = a + jb$.</p> <p>4. Tuliskanlah fasor-fasor berikut ke dalam bentuk polar $\mathbf{V} = A \angle \theta$.</p> <p>a). $\mathbf{V}_1 = 3 + j6$; b). $\mathbf{V}_2 = 4 - j4$</p> <p>c). $\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$; d). $\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$</p> | <p>5. Jika $\mathbf{V} = 3 + j4$ dan $\mathbf{I} = 2 + j2$, berapakah</p> <p>a). $S = \mathbf{V}\mathbf{I}^*$</p> <p>b). $Z = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$</p> <p>Tuliskan S maupun Z dalam bentuk polar maupun bentuk sudut siku.</p> <p>6. Sebuah resistor 50 Ω dihubungkan seri dengan induktor 20 mH.</p> <p>a). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1000 rad/s.</p> <p>b). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 4000 rad/s.</p> <p>c). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1 kHz.</p> <p>7. Sebuah resistor 50 Ω dihubungkan seri dengan kapasitor 1 μF. (a) Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1000 rad/s; (b) Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 4000 rad/s; (c) Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1 kHz.</p> <p>8. Sebuah resistor 50 Ω dihubungkan paralel dengan kapasitor 200 nF.</p> |
|---|---|

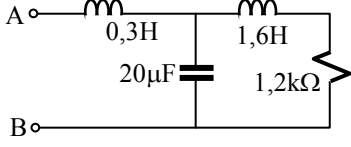
- a). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1000 rad/s.
 b). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 4000 rad/s.
 c). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1 kHz.
9. Sebuah resistor 50Ω dihubungkan paralel dengan induktor 50 mH.
- a). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1000 rad/s.
 b). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 4000 rad/s.
 c). Berapakah impedansinya jika frekuensi kerja adalah 1 kHz.

10. Pada hubungan seri antara resistor 50Ω dengan induktor 50 mH diterapkan tegangan $10\cos 1000t$ V. Berapakah arus yang mengalir ?
11. Pada hubungan paralel antara resistor 1 k Ω dengan kapasitor 0,2 μ F diterapkan tegangan $40\cos 1000t$ V. Berapakah arus yang mengalir di masing-masing elemen ?
12. Pada hubungan seri antara resistor 400 Ω dengan induktor 2 H, diterapkan tegangan $380\cos 300t$ V. Berapakah tegangan di masing-masing elemen ?
13. Gambarkan diagram fasor soal 10.
 14. Gambarkan diagram fasor soal 11.
 15. Gambarkan diagram fasor soal 12.

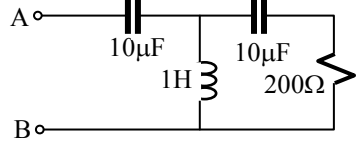
16. Pada rangkaian berikut, hitunglah impedansi yang terlihat dari terminal A-B, jika frekuensi adalah 1000 rad/s.



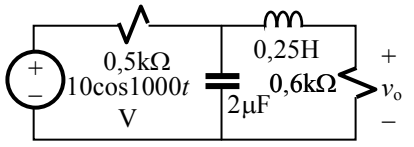
17. Pada rangkaian berikut, hitunglah impedansi yang terlihat dari terminal A-B, jika frekuensi adalah 1000 rad/s.



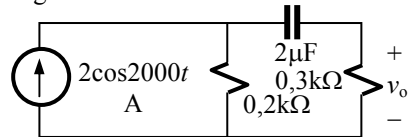
18. Pada rangkaian berikut, hitunglah impedansi yang terlihat dari terminal A-B, jika frekuensi adalah 50Hz.



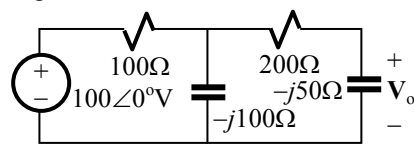
19. Jika pada terminal A-B rangkaian pada soal 16 diberi tegangan $20\cos 1000t$ V berapakah tegangan di resistor 20 Ω .
20. Jika pada terminal A-B rangkaian pada soal 17 diberi tegangan $20\cos 1000t$ V berapa tegangan di resistor 1,2 k Ω ?
21. Jika pada terminal A-B rangkaian pada soal 18 diberi tegangan $100\cos 314t$ V berapa tegangan di resistor 1,2 k Ω ?
22. Hitunglah tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut ini.



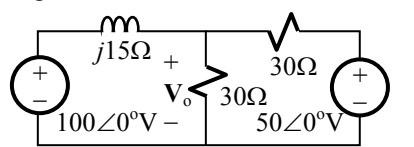
23. Hitunglah tegangan keluaran v_o pada rangkaian berikut ini.



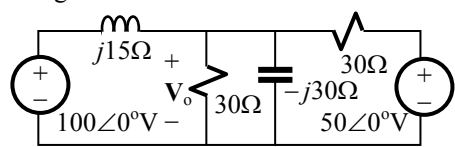
24. Hitunglah tegangan keluaran V_o pada rangkaian berikut ini.



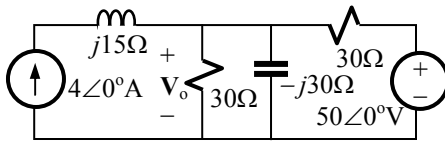
25. Hitunglah tegangan keluaran V_o pada rangkaian berikut ini.



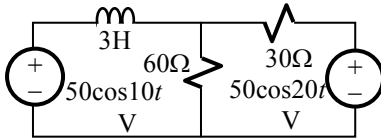
26. Hitunglah tegangan keluaran V_o pada rangkaian berikut ini.



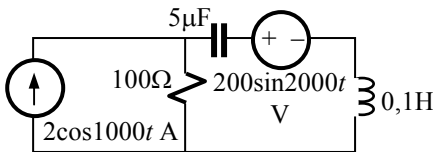
27. Hitunglah tegangan keluaran V_o pada rangkaian berikut ini.



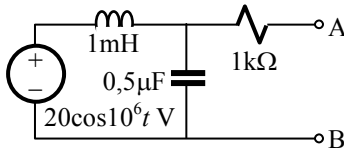
28. Hitunglah tegangan pada resistor 60 Ω pada rangkaian berikut ini.



29. Hitunglah tegangan di resistor 100 Ω pada rangkaian berikut ini.

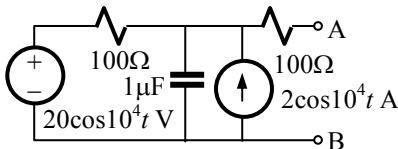


30. Ulangi soal 29 dengan mengganti kapasitor menjadi 2,5 μF.
 31. Ulangi soal 29 dengan mengganti induktor menjadi 0,2 H.
 32. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin di terminal A-B dari rangkaian berikut.



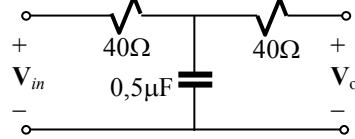
33. Berapakah impedansi beban yang harus dihubungkan di terminal A-B pada rangkaian soal 32 agar terjadi alih daya maksimum ke beban? Hitung pula berapa besar daya maksimum tersebut.

34. Carilah rangkaian ekuivalen Thévenin di terminal A-B dari rangkaian berikut.



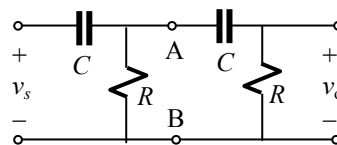
35. Berapakah impedansi beban yang harus dihubungkan di terminal A-B pada rangkaian soal 34 agar terjadi alih daya maksimum ke beban? Hitung pula berapa besar daya maksimum tersebut.

36. Rangkaian di bawah ini adalah rangkaian T. Carilah hubungan antara V_o dan V_{in} jika frekuensi operasi adalah 2400 Hz.



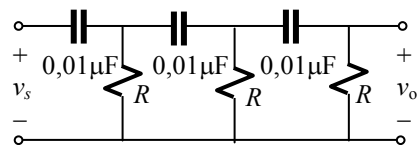
37. Tiga rangkaian T seperti pada soal 36 disambungkan secara bertingkat. Di salah satu ujung rangkaian bertingkat ini diberi beban resistor 50 Ω. Agar pada beban mengalir arus $1∠0°$ A, berapakah tegangan yang harus diberikan pada ujung yang lain, jika frekuensi operasi tetap 2400 Hz.

38. Tegangan di terminal masukan pada rangkaian berikut ini adalah $v_s = A\sin\omega t$ V. Tegangan keluaran dapat dinyatakan sebagai $v_o = \beta \sin(\omega t + \phi)$ V. Berapakah β dan ϕ jika $\omega RC = 1$.

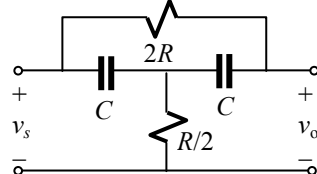


39. Jika di terminal A-B antara dua bagian rangkaian itu ditempatkan buffer dengan *gain* 1 dan tanpa pergeseran fasa, berapakah β dan ϕ .

40. Tentukan nilai R pada rangkaian di bawah ini sehingga pada frekuensi 1kHz terjadi perbedaan fasa 180° antara v_o dan v_s .



41. Tegangan di terminal masukan pada rangkaian berikut ini adalah $v_s = A\sin\omega t$ V. Bagaimanakah bentuk tegangan keluaran v_o ? Bagaimanakah jika $\omega = 0$, $\omega \rightarrow \infty$, dan $\omega = 1/RC$?



5.2. Analisis Daya Pada Sistem Satu Fasa

Tujuan :

- Mampu menghitung kebutuhan daya dan faktor daya beban.
- Mampu menghitung penyediaan daya sumber dan tegangan sumber untuk mencatu beban.
- Mampu menentukan keperluan perbaikan faktor daya.

Umum

Dalam analisis rangkaian arus bolak-balik keadaan mantap pada sub-bab sebelumnya, kita lebih berkonsentrasi pada besaran arus dan tegangan dan belum mempersoalkan masalah daya. Di sub-bab ini masalah daya tersebut akan kita bahas.

Analisis daya pada sistem arus bolak-balik, tertuju pada pemecahan tiga macam persoalan yaitu:

- a. Mencari tanggapan rangkaian dengan rangkaian beban dan sumber yang diketahui. Persoalan semacam inilah yang kita bahas pada sub-bab sebelumnya, dengan penekanan pada perhitungan tegangan dan arus. Oleh karena itu persoalan ini masih akan kita lihat lagi, dengan penekanan pada masalah dayanya.
- b. Mencari kondisi rangkaian beban agar terjadi alih daya maksimum apabila rangkaian sumber diketahui. Persoalan ini banyak kita jumpai dalam sistem pemroses sinyal, yang merupakan suatu rangkaian dengan sumber yang terbatas kemampuannya. Kita harus berusaha melakukan penyesuaian-penyesuaian pada rangkaian beban agar alih daya ke beban menjadi maksimum, dengan kata lain kita berusaha agar daya yang tersedia digunakan sebaik-baiknya.
- c. Mencari rangkaian sumber agar kebutuhan daya pada beban terpenuhi dan sumber bekerja sesuai dengan kemampuannya. Persoalan ini kita jumpai dalam sistem tenaga listrik yang bertujuan memasok kebutuhan energi listrik pada suatu tingkat tegangan tertentu. Rangkaian seksi beban tidak mudah disesuaikan terhadap sisi sumber bahkan sebaliknya sisi sumber yang harus disesuaikan terhadap kebutuhan beban. Kebutuhan daya selalu berubah dari waktu ke waktu, sesuai keperluan konsumen, yang berarti bahwa sisi sumber harus disesuaikan pula dari waktu ke waktu.

Sebelum membahas persoalan-persoalan tersebut di atas, kita akan membahas lebih dulu mengenai daya itu sendiri. Selama ini kita mengenal pernyataan daya di kawasan t sebagai hasil kali antara tegangan dan arus. Oleh karena dalam analisis rangkaian arus bolak-balik kita bekerja di kawasan *fasor*, maka kita memerlukan pengertian mengenai pernyataan daya di kawasan fasor, yang akan kita kenal sebagai *daya kompleks*.

Tinjauan Daya di Kawasan t : Daya Rata-Rata dan Daya Reaktif

Daya Rata-Rata. Misalkan tegangan dan arus pada terminal suatu beban adalah

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad \text{dan} \quad i = I_m \cos \omega t \quad (5.32)$$

Persamaan (5.32) ini merupakan pernyataan umum dari tegangan dan arus yang berbentuk sinus, dengan mengambil referensi sudut fasa nol untuk arus dan perbedaan fasa antara arus dan tegangan sebesar θ .

Daya sesaat yang dialihkan melalui terminal ini ke beban adalah

$$\begin{aligned} p = vi &= V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos \omega t = V_m I_m \{ \cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta \} \cos \omega t \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta + \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \cos 2\omega t - \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (5.33)$$

Persamaan (5.33) memperlihatkan bahwa daya sesaat terdiri dari dua komponen, yaitu :

- Komponen searah, ditunjukkan oleh suku pertama ruas kanan (5.33) yang bernilai konstan. Komponen ini ditentukan oleh nilai maksimum dari tegangan dan arus serta beda sudut fasanya.
- Komponen bolak-balik, ditunjukkan oleh suku kedua dan ketiga yang berbentuk sinyal sinus dengan frekuensi 2ω .

Jika kita menghitung nilai rata-rata daya dari (5.33) dalam selang antara 0 sampai 2π , akan kita peroleh

$$p_{rr} = P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p d\omega t = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \quad (5.34)$$

yang tidak lain adalah komponen searah dari (5.33) karena nilai rata-rata dari suku kedua dan ke-tiga adalah nol.

Daya Reaktif. Pada persamaan (5.33) amplitudo suku ke-dua sama dengan daya rata-rata sehingga suku pertama dan ke-dua dapat kita gabung dan (5.33) menjadi

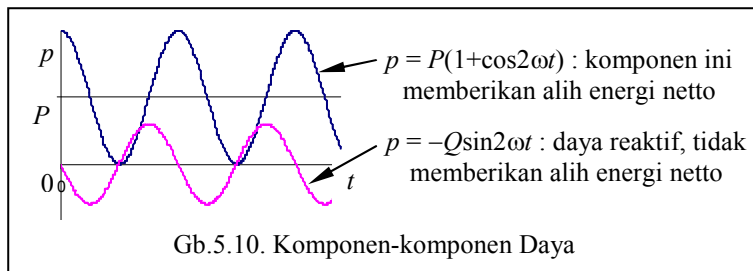
$$p = \left[\frac{V_m I_m}{2} \cos \theta \right] (1 + \cos 2\omega t) - \left[\frac{V_m I_m}{2} \sin \theta \right] \cos 2\omega t \quad (5.35)$$

$$= P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t \quad \text{dengan} \quad Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta$$

Nilai suku pertama (5.35) *selalu positif* atau *selalu negatif*, tergantung dari nilai P tetapi tidak pernah berubah tanda karena faktor $(1 + \cos 2\omega t)$ selalu lebih besar dari 0 (minimal 0). Sedangkan suku kedua berbentuk sinus yang berubah nilai dari positif ke negatif dan sebaliknya secara periodik. Kalau kita melakukan integrasi p dalam satu perioda untuk mendapatkan alih energi, maka akan kita dapatkan bahwa hanya suku pertama yang memberikan suatu nilai netto; sedangkan suku kedua memberikan nilai alih energi nol.

$$w = \int_0^T p dt = \int_0^T P(1 + \cos 2\omega t) dt - \int_0^T (Q \sin 2\omega t) dt = PT - 0 \quad (5.36)$$

Jadi daya sesaat seperti ditunjukkan oleh (5.35) mengandung dua komponen daya. Komponen daya yang pertama memberikan alih energi netto yang besarnya sama dengan alih energi yang diberikan oleh daya rata-rata. Komponen daya yang kedua tidak memberikan alih energi netto, dan disebut *daya reaktif*. Perhatikan Gb.5.10.



Tinjauan Daya di Kawasan Fasor : Daya Kompleks, Faktor Daya

Dalam analisis rangkaian di kawasan fasor, kita perlu mencari hubungan antara komponen-komponen daya yang kita bahas di atas dengan besaran-besaran fasor. Dalam pembahasan mengenai fasor yang telah kita lakukan, *besarnya fasor* menyatakan *nilai puncak* dari sinyal sinus. Akan tetapi dalam analisis rangkaian arus bolak-balik, yang pada umumnya melibatkan analisis daya, pernyataan fasor tegangan dan fasor arus lebih baik dinyatakan dalam nilai *rms*-nya, sehingga pernyataan fasor tegangan dan arus adalah

$$\mathbf{V} = V_{rms} e^{j\theta_v} \quad \text{dan} \quad \mathbf{I} = I_{rms} e^{j\theta_i} \quad (5.37)$$

Dengan pernyataan ini, keterkaitan antara besaran fasor dengan daya rata-rata menjadi lebih sederhana. Besarnya daya rata-rata menjadi

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \theta = V_{rms} I_{rms} \cos \theta \quad (5.38)$$

dengan $\theta = \theta_v - \theta_i$, yaitu perbedaan sudut fasa antara fasor tegangan dan fasor arus; dan besarnya daya reaktif menjadi

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin \theta = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sin \theta = V_{rms} I_{rms} \sin \theta \quad (5.39)$$

Daya Kompleks. Selanjutnya, dengan menggunakan fasor *rms*, kita mendefinisikan *daya kompleks* sebagai

$$S = \mathbf{VI}^* \quad (5.40)$$

yang merupakan *perkalian fasor tegangan* dengan *konjugat dari fasor arus*. Dengan menggunakan definisi ini dan persamaan (5.37), maka daya kompleks pada terminal beban menjadi

$$\begin{aligned} S = \mathbf{VI}^* &= V_{rms} e^{j\theta_v} I_{rms} e^{-j\theta_i} \\ &= V_{rms} I_{rms} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = V_{rms} I_{rms} e^{j\theta} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Pernyataan S bentuk polar (5.41) dapat kita tuliskan dalam bentuk sudut siku

$$\begin{aligned} S = V_{rms} I_{rms} e^{j\theta} &= [V_{rms} I_{rms}] \cos \theta + j[V_{rms} I_{rms}] \sin \theta \\ &= P + jQ \end{aligned} \quad (5.42)$$

Jadi, bagian riil dari daya kompleks S adalah daya rata-rata atau kemudian disebut juga *daya nyata*, sedangkan bagian imajinerinya adalah *daya reaktif*. Perlu kita fahami bahwa *daya kompleks bukanlah fasor*, tetapi ia merupakan besaran kompleks. Pengertian daya kompleks ini sangat bermanfaat jika tegangan dan arus dinyatakan dalam fasor.

Segitiga Daya. Dengan pengertian daya kompleks, kita dapat menggambarkan *segitiga daya*, seperti terlihat pada Gb.5.11. Pada gambar ini P adalah positif, artinya *alih daya terjadi dari arah sumber ke beban* atau *beban menyerap daya*. Segitiga daya ini bisa terletak di kuadran pertama atau kuadran keempat, tergantung apakah Q positif atau negatif.

Besarnya daya kompleks S adalah

$$|S| = V_{rms} I_{rms} \quad (5.43)$$

yang kita sebut *daya tampak* dan mempunyai satuan volt-ampere (VA).

Hubungan antara daya kompleks dan daya rata-rata serta daya reaktif adalah

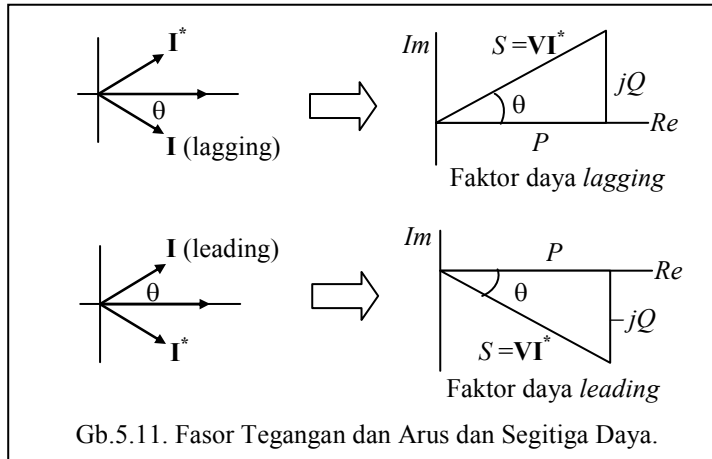
$$\begin{aligned} S &= P + jQ \\ P &= |S| \cos \theta = V_{rms} I_{rms} \cos \theta \\ Q &= |S| \sin \theta = V_{rms} I_{rms} \sin \theta \end{aligned} \quad (5.44)$$

Daya rata-rata P mempunyai satuan watt (W), sedangkan daya reaktif Q mempunyai satuan volt-ampere-reaktif (VAR).

Faktor Daya. Beda sudut fasa antara fasor tegangan dan arus adalah θ , dan $\cos \theta$ disebut *faktor daya*.

$$\text{faktor daya} = \cos \theta = \frac{P}{|S|} \quad (5.45)$$

Sudut θ mempunyai rentang nilai antara -90° sampai $+90^\circ$. Tetapi karena faktor daya adalah $\cos\theta$, maka nilainya *selalu positif*. Walaupun demikian faktor daya ini bisa *lagging* atau *leading*. Faktor daya disebut *lagging* jika segitiga daya berada di kwadran pertama yang berarti bahwa daya reaktif Q bernilai positif; hal ini terjadi jika fasor arus berada di *belakang* fasor tegangan atau arus *lagging* terhadap tegangan. Beban-beban industri dan juga perumahan pada umumnya mempunyai faktor daya *lagging*, jadi daya reaktif bernilai positif. Perhatikan Gb.5.11. berikut.



Faktor daya disebut *leading* jika segitiga daya berada di kwadran ke-empat yang berarti daya reaktif Q bernilai negatif; hal ini terjadi jika fasor arus *mendahului* fasor tegangan atau arus *leading* terhadap tegangan.

Daya Kompleks dan Impedansi Beban

Impedansi beban adalah perbandingan antara tegangan beban dan arus beban. Jika tegangan beban adalah \mathbf{V} , arus beban \mathbf{I} , dan impedansi beban adalah Z_B , maka

$$Z_B = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad \text{atau} \quad \mathbf{V} = Z_B \mathbf{I} \quad (5.46)$$

Dengan hubungan ini maka daya kompleks yang dialihkan ke beban dapat diuraikan sebagai

$$S = \mathbf{V} \mathbf{I}^* = Z_B \mathbf{I} \mathbf{I}^* = Z_B |\mathbf{I}|^2 = (R_B + jX_B) I_{rms}^2 = R_B I_{rms}^2 + jX_B I_{rms}^2 \quad (5.47)$$

dengan R_B dan X_B masing-masing adalah resistansi dan reaktansi beban.. Persamaan (5.47) dapat kita uraikan menjadi

$$S = P + jQ = R_B I_{rms}^2 + jX_B I_{rms}^2 \quad (5.48)$$

Dari (5.48) kita dapat mengambil kesimpulan bahwa

$$P = R_B I_{rms}^2 \quad \text{dan} \quad Q = X_B I_{rms}^2 \quad (5.49)$$

Persamaan pertama (5.49) menunjukkan bahwa daya rata-rata terkait dengan resistansi beban. Nilai P yang positif menunjukkan bahwa seluruh daya rata-rata diserap oleh resistansi beban atau dengan kata lain resistansi bebanlah yang menyerap daya rata-rata.

Persamaan kedua (5.49) menunjukkan bahwa daya reaktif terkait dengan reaktansi beban. Jika daya reaktif Q bernilai positif, maka reaktansi beban juga bernilai positif, yang berarti beban bersifat induktif. Jika Q negatif berarti beban negatif dan ini berarti bahwa beban bersifat kapasitif.

Jika beban berupa resistor murni, maka tidak terdapat perbedaan sudut fasa antara tegangan dan arus beban. Seluruh daya yang dialihkan ke beban adalah daya rata-rata. Untuk keadaan ini,

$$S_R = \mathbf{VI}^* = Z_B \mathbf{II}^* = (R_B + j0) |\mathbf{I}|^2 = (R_B) |\mathbf{I}|^2 = (R_B) I_{rms}^2 \quad (5.50)$$

Jika beban berupa kapasitor, perbedaan sudut fasa antara tegangan dan arus beban adalah -90° dan daya yang dialihkan ke beban hanya berupa daya reaktif yang negatif. Untuk keadaan ini,

$$S_C = \mathbf{VI}^* = Z_B \mathbf{II}^* = (0 + jX_C) |\mathbf{I}|^2 = (jX_C) |\mathbf{I}|^2 = (jX_C) I_{rms}^2 = \left(-j \frac{1}{\omega C}\right) I_{rms}^2 \quad (5.51)$$

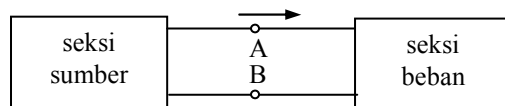
Jika beban berupa induktor, perbedaan sudut fasa antara tegangan dan arus beban adalah $+90^\circ$ dan daya yang dialihkan ke beban hanya berupa daya reaktif yang positif. Untuk keadaan ini,

$$S_L = \mathbf{VI}^* = Z_B \mathbf{II}^* = (0 + jX_L) |\mathbf{I}|^2 = (jX_L) |\mathbf{I}|^2 = (jX_L) I_{rms}^2 = (j\omega L) I_{rms}^2 \quad (5.52)$$

Persamaan (5.51) dan (5.52) menunjukkan bahwa daya yang diserap oleh kapasitor maupun induktor merupakan daya reaktif akan tetapi berlawanan tanda. Kapasitor menyerap daya reaktif negatif sedangkan induktor menyerap daya reaktif positif. Jika suatu beban mengandung baik kapasitor maupun induktor, maka daya reaktif yang diserap beban ini adalah jumlah dari dua daya reaktif yang dalam keadaan tertentu akan saling meniadakan. Hal ini akan kita lihat dalam sub-bab mengenai rangkaian resonansi.

Jika suatu beban bersifat terlalu induktif, artinya terlalu banyak menyerap daya reaktif positif, kebutuhan daya reaktif tersebut dapat dikurangi dengan memasang kapasitor paralel dengan beban. Kapasitor yang diparalelkan itu akan menyerap daya reaktif negatif, sehingga daya reaktif total akan berkurang. Inilah yang dilakukan orang untuk memperbaiki faktor daya beban yang juga akan kita lihat kemudian.

CONTOH 5.16. : Pada terminal hubung AB antara seksi sumber dan seksi beban dari suatu rangkaian listrik terdapat tegangan dan arus sebesar



$$\mathbf{V} = 480 \angle +75^\circ \text{ V(rms)} \quad \text{dan} \quad \mathbf{I} = 8,75 \angle +105^\circ \text{ A(rms)}$$

Tentukan daya kompleks, daya rata-rata, daya reaktif, faktor daya, serta impedansi beban.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \text{Daya kompleks adalah} \quad S &= \mathbf{VI}^* = 480 \angle +75^\circ \times 8,75 \angle -105^\circ = 4200 \angle -30^\circ \\ &= 4200 \cos 30^\circ - j4200 \sin 30^\circ = 3640 - j2100 \text{ VA} \end{aligned}$$

Daya rata-rata dan daya reaktif masing-masing adalah

$$P = 3640 \text{ W} \quad \text{dan} \quad Q = 2100 \text{ VAR}$$

Daya rata-rata ini positif, jadi beban menyerap daya.

Daya reaktif bernilai negatif, jadi faktor daya leading.

$$\text{faktor daya} = \cos(-30) = 0,866$$

Bahwa faktor daya ini leading sebenarnya telah terlihat dari pernyataan fasor arus dan tegangan. Sudut fasa arus, yaitu 105° , lebih besar dari sudut fasa tegangan yang 75° ; jadi arus mendahului tegangan.

Resistansi beban adalah $R_B = \frac{P}{I_{rms}^2} = \frac{3640}{(8,75)^2} = 47,5 \Omega$

Reaktansi beban adalah $X_B = \frac{Q}{I_{rms}^2} = \frac{-2100}{(8,75)^2} = -27,4 \Omega$

Jadi impedansi beban adalah $Z_B = (47,5 - j27,4) \Omega$

Impedansi beban ini bersifat kapasitif. Nilai kapasitansi beban dapat kita cari jika kita mengetahui berapa nilai frekuensi kerja dari sistem ini. Misalkan frekuensinya adalah 50 Hz, maka

$$X_C = \frac{-1}{\omega C} = -27,4 \Omega \rightarrow C = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 27,4} = 116 \mu\text{F}$$

Alih Daya

Teorema Tellegen menyatakan bahwa jika v_k mengikuti hukum tegangan Kirchhoff (HTK) dan i_k mengikuti hukum arus Kirchhoff (HAK), maka $\sum_{k=1}^N v_k \times i_k = 0$

Teorema ini menyatakan bahwa di setiap rangkaian listrik harus ada perimbangan yang tepat antara daya yang diserap oleh elemen pasif dan daya yang diberikan oleh elemen aktif. Hal ini sesuai dengan prinsip konservasi energi.

Dalam analisis di kawasan fasor, kita mengenal daya rata-rata, daya reaktif dan daya kompleks. Sementara itu kita juga mengetahui bahwa kapasitor dan induktor merupakan elemen pasif yang mampu menyerap dan mampu memberikan daya. Bagaimanakah perimbangan daya antara semua elemen yang ada dalam rangkaian di kawasan fasor ?

Dalam pembahasan alih daya antara sumber dan beban, kita melihat bahwa daya rata-rata P terkait dengan resistansi beban, sedangkan daya reaktif Q terkait dengan reaktansi beban. Jika kita mempersempit tinjauan kita, tidak ke suatu beban besar tetapi hanya ke satu elemen, kita harus mendapatkan hal yang serupa yaitu bahwa daya rata-rata pada elemen berkaitan dengan resistansi elemen, sedangkan daya reaktif pada elemen berkaitan dengan reaktansi elemen. Ini berarti bahwa resistor hanya menyerap daya rata-rata, sedangkan kapasitor dan induktor hanya menyerap daya reaktif.

Catatan: Kita menggunakan istilah “menyerap daya” untuk kapasitor dan induktor sesuai dengan konvensi pasif yang kita anut; daya yang diserap ini boleh positif ataupun negatif. Jika daya positif berarti elemen sedang menyerap daya, jika daya negatif berarti elemen sedang memberikan daya.

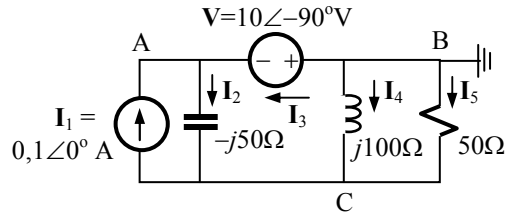
Jadi daya rata-rata yang diberikan oleh sumber akan diserap oleh resistor-resistor sedangkan daya reaktif yang diberikan oleh sumber diserap oleh kapasitor dan induktor. Penyerapan daya oleh kapasitor dan induktor ini bisa saja tidak serempak; artinya pada suatu saat tertentu sebagian elemen sedang menyerap sementara yang lain sedang memberikan daya.

Jelaslah sekarang, kemana mengalirnya daya rata-rata dan kemana pula mengalirnya daya reaktif. Oleh karena itu daya rata-rata dan daya reaktif dapat digabungkan kedalam pengertian daya kompleks, dan muncullah *prinsip konservasi daya kompleks (principle of conservation of complex power)*, yang berbunyi

Dalam rangkaian linier arus bolak-balik keadaan mantap, jumlah daya kompleks yang diberikan oleh sumber bebas, sama dengan jumlah daya kompleks yang diserap oleh elemen-elemen dalam rangkaian.

Prinsip konservasi daya kompleks dalam analisis di kawasan fasor ini mengingatkan kita pada teorema Tellegen yang berlaku di kawasan waktu.

CONTOH 5.17 : (a) Carilah daya kompleks yang diberikan oleh masing-masing sumber serta daya totalnya pada rangkaian berikut ini.
 (b) Tentukan pula daya yang diserap oleh resistor, kapasitor dan induktor.



Penyelesaian :

Dengan mengambil simpul B sebagai simpul referensi, simpul A menjadi terikat dan tinggalah simpul C yang perlu kita cari tegangannya.

$$\mathbf{V}_C \left[\frac{1}{50} + \frac{1}{j100} + \frac{1}{-j50} \right] - \mathbf{V}_A \left[\frac{1}{-j50} \right] + 0,1\angle 0^\circ = 0 \text{ atau}$$

$$\mathbf{V}_C [2 + j1] - \mathbf{V}_A [j2] = -10\angle 0^\circ$$

Karena $\mathbf{V}_A = -\mathbf{V} = -10\angle -90^\circ = 10\angle 90^\circ \text{ V}$, maka

$$\mathbf{V}_C [2 + j1] - 2 \times 10\angle (90^\circ + 90^\circ) = -10\angle 0^\circ$$

$$\Rightarrow \mathbf{V}_C = \frac{-30}{2 + j1} = -12 + j6 \text{ V}$$

Daya kompleks yang “*diserap*” oleh sumber arus adalah

$$S_i = (\mathbf{V}_C - \mathbf{V}_A) \mathbf{I}_1^* = [-12 + j6 - j10] \times 0,1\angle 0^\circ$$

$$= -1,2 - j0,4 \text{ VA}$$

(Kita menggunakan istilah “*diserap*” untuk sumber sesuai dengan konvensi pasif).

Untuk menghitung daya kompleks yang diberikan oleh sumber tegangan kita harus menghitung arus yang melalui sumber ini yaitu \mathbf{I}_3 .

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_C}{-j50} = \frac{10\angle 90^\circ - (-12 + j6)}{-j50} = \frac{j10 + 12 - j6}{-j50} = -0,08 + j0,24 \text{ A}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = -0,08 + j0,24 - 0,1\angle 0^\circ = -0,18 + j0,24 \text{ A}$$

Daya kompleks yang “*diserap*” oleh sumber tegangan adalah

$$S_v = \mathbf{V} \mathbf{I}_3^* = 10\angle -90^\circ \times (-0,18 - j0,24) = -j10 \times (-0,18 - j0,24)$$

$$= -2,4 + j1,8 \text{ VA}$$

Daya kompleks total yang “*diserap*” oleh kedua sumber adalah

$$S_{tot} = S_i + S_v = -1,2 - j0,4 - 2,4 + j1,8$$

$$= -3,6 + j1,4 \text{ VA}$$

Daya kompleks total ini mengandung komponen rata-rata sebesar 3,6 W ; dan sebagaimana telah kita bahas, daya rata-rata ini harus diserap oleh resistor yang ada pada rangkaian ini yaitu resistor 50 Ω. Kita dapat memastikan hal ini dengan menghitung arus yang melalui resistor, yaitu \mathbf{I}_5 .

$$\mathbf{I}_5 = \frac{-\mathbf{V}_C}{50} = \frac{12 - j6}{50} = 0,24 - j0,12 = 0,268 \angle 26,6^\circ \text{ A}$$

$$\Rightarrow P_R = R I_{rms}^2 = R |\mathbf{I}_5|^2 = 50 \times (0,268)^2 = 3,6 \text{ W}$$

Daya reaktif yang diserap oleh kapasitor adalah

$$Q_C = X_C I_{rms}^2 = (-50) |\mathbf{I}_5|^2 = -50(0,08^2 + 0,24^2) = -3,2 \text{ VAR}$$

Arus yang melalui induktor adalah

$$\mathbf{I}_4 = -\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_5 = -(-0,18 + j0,24 + 0,24 - j0,12) = -0,06 - j0,12 \text{ A}$$

dan daya reaktif yang diserap induktor adalah

$$Q_L = X_L |\mathbf{I}_4|^2 = 100(0,06^2 + 0,12^2) = 1,8 \text{ VAR}$$

Total daya kompleks yang diserap oleh resistor, kapasitor, dan induktor adalah

$$S_{tot \text{ beban}} = P_R + jQ_C + jQ_L = 3,6 - j3,2 + j1,8 = 3,6 - j1,4 \text{ VA}$$

Nilai ini sesuai dengan daya yang *diberikan* oleh kedua sumber, yaitu

$$S_{tot \text{ dari sumber}} = -S_{tot} = -(-3,6 + j1,4) \text{ VA}$$

Dengan ini terbukti pula konservasi daya kompleks yang dikemukakan di depan.

Alih Daya Maksimum

Telah disebutkan di depan bahwa persoalan alih daya maksimum banyak dijumpai dalam sistem komunikasi. Kita berusaha untuk mengalihkan daya sebanyak mungkin dari sumber ke beban. Hal ini tidak berarti bahwa efisiensi alih daya menjadi tinggi, bahkan sebaliknya.

Alih Daya Maksimum Dengan Cara Penyesuaian Impedansi. Dalam cara ini kita menggunakan rangkaian ekuivalen Thévenin untuk seksi sumber sedangkan rangkaian beban kita sesuaikan sedemikian rupa sehingga terjadi kesesuaian antara impedansi beban dan impedansi Thévenin.

Rangkaian ekuivalen Thévenin untuk rangkaian arus bolak-balik terdiri dari sumber tegangan Thévenin \mathbf{V}_T (dalam bentuk fasor) yang diserikan dengan impedansi $Z_T = R_T + jX_T$. Sementara itu seksi beban dinyatakan oleh impedansi beban $Z_B = R_B + jX_B$ dengan R_B dan X_B yang harus kita sesuaikan untuk memperoleh alih daya maksimum. Lihat Gb.5.12.

Daya rata-rata yang dialihkan melalui terminal hubung AB (daya pada beban) adalah

$$P_B = |\mathbf{I}|^2 R_B \quad (5.53.a)$$

Karena Z_T dan Z_B terhubung seri, arus \mathbf{I} dapat dengan mudah kita peroleh yaitu

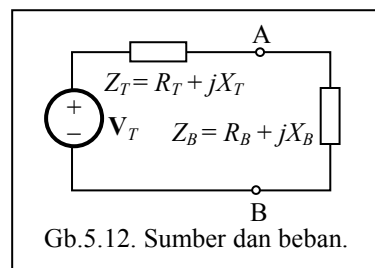
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_T}{Z_T + Z_B} = \frac{\mathbf{V}_T}{(R_T + R_B) + j(X_T + X_B)}$$

$$|\mathbf{I}| = \frac{|\mathbf{V}_T|}{|(R_T + R_B) + j(X_T + X_B)|} = \frac{|\mathbf{V}_T|}{\sqrt{(R_T + R_B)^2 + (X_T + X_B)^2}}$$

sehingga daya pada beban adalah

$$P_B = |\mathbf{I}|^2 R_B = \frac{|\mathbf{V}_T|^2 R_B}{(R_T + R_B)^2 + (X_T + X_B)^2} \quad (5.53.b)$$

Jika kita anggap bahwa resistansi beban konstan, maka apabila kita ingin agar P_B menjadi tinggi, kita harus mengusahakan agar $X_B = -X_T$ pada persamaan (5.53.b). Hal ini selalu



Gb.5.12. Sumber dan beban.

mungkin kita lakukan karena reaktansi dapat dibuat bernilai negatif ataupun positif. Dengan menyesuaikan reaktansi beban, maka kita dapat membuat impedansi beban merupakan konjugat dari impedansi Thévenin. Dengan penyesuaian impedansi beban demikian ini kita dapat memperoleh alih daya yang tinggi. Langkah ini akan membuat impedansi keseluruhan yang dilihat oleh sumber tegangan Thévenin tinggalah resistansi ($R_T + R_B$) saja.

Dengan membuat $X_B = -X_T$, maka besarnya daya rata-rata pada beban adalah

$$P_B = \frac{|\mathbf{V}_T|^2 R_B}{(R_T + R_B)^2} \quad (5.54)$$

Inilah daya pada beban paling tinggi yang dapat diperoleh jika R_B bernilai konstan. Jika R_B dapat diubah nilainya, maka dengan menerapkan persyaratan untuk alih daya maksimum pada rangkaian resistif yang kita bahas di Bab-2 yaitu bahwa resistansi beban harus sama dengan resistansi Thévenin, maka persyaratan agar terjadi alih daya maksimum pada rangkaian arus bolak-balik haruslah

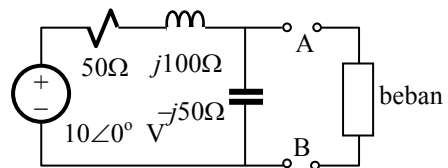
$$R_B = R_T \quad \text{dan} \quad X_B = -X_T \quad (5.55.a)$$

Jika kondisi ini dicapai maka besarnya daya maksimum yang dialihkan adalah

$$P_{BMAX} = \frac{|\mathbf{V}_T|^2 R_B}{(2R_B)^2} = \frac{|\mathbf{V}_T|^2}{4R_B} \quad (5.55.b)$$

Perhatikanlah bahwa formula untuk terjadinya alih daya maksimum ini diperoleh dengan kondisi sumber yang tetap sedangkan impedansi beban disesuaikan untuk memperoleh kondisi yang kita sebut sebagai *kesesuaian konjugat*.

CONTOH 5.18 : Terminal AB pada rangkaian berikut ini merupakan terminal hubung untuk menyambungkan beban ke seksi sumber. Hitunglah berapa daya maksimum yang dapat diperoleh dari rangkaian seksi sumber ini.



Penyelesaian :

Untuk memecahkan persoalan ini, kita mencari lebih dulu rangkaian ekuivalen Thévenin dari seksi sumber tersebut. Tegangan dan impedansi Thévenin masing-masing adalah

$$\mathbf{V}_T = \frac{-j50}{50 + j100 - j50} \times 10\angle 0^\circ = \frac{-j1}{1 + j1} \times 10 = -5 - j5 \text{ V}$$

$$Z_T = \frac{-j50(50 + j100)}{-j50 + 50 + j100} = 25 - j75 \text{ } \Omega$$

Agar terjadi alih daya maksimum maka impedansi beban haruslah $Z_B = 25 + j75 \text{ } \Omega$. Daya maksimum yang dapat diperoleh dari terminal AB adalah

$$P_{MAX} = \frac{|\mathbf{V}_T|^2}{4R_B} = \frac{|-5 - j5|^2}{4 \times 25} = 0,5 \text{ W}$$

Pemahaman :

Arus yang melalui beban sama dengan arus yang diberikan oleh sumber ekuivalen Thévenin, yaitu

$$\mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_T}{Z_T + Z_B} = \frac{-5 - j5}{50} = -0,1 - j0,1 = \sqrt{0,02} \angle -135^\circ \text{ A}$$

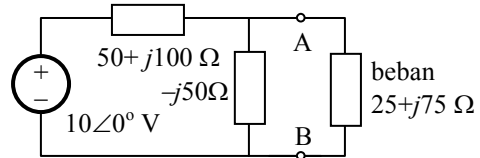
Arus yang dikeluarkan oleh sumber sesungguhnya, dapat dihitung dari rangkaian aslinya jika Z_B dihubungkan ke terminal AB yaitu,

$$\mathbf{I}_s = \frac{10\angle 0^\circ}{50 + j100 + \frac{(-j50)(25 + j75)}{-j50 + 25 + j75}} = \frac{10}{50 + j100 + \frac{-j50 + 150}{1 + j1}} = 0,1\angle 0^\circ \text{ A}$$

Daya yang diberikan oleh sumber adalah

$$S = \mathbf{V}_s \mathbf{I}_s^* = 10 \angle 0^\circ \times 0,1 \angle 0^\circ = 1 + j0 \text{ VA}$$

Daya rata-rata $P_s = 1 \text{ W}$ yang dikeluarkan oleh sumber ini diserap oleh resistor 50Ω di rangkaian sumber dan resistor 25Ω di rangkaian beban.



$$P_s = 50|\mathbf{I}_s|^2 + 25|\mathbf{I}_B|^2 = 50 \times (0,1)^2 + 25 \times (\sqrt{0,02})^2 = 1 \text{ W}$$

Untuk memungkinkan penyesuaian impedansi seksi beban kepada impedansi seksi sumber, seksi beban harus mengandung resistansi, kapasitansi ataupun induktansi yang dapat diubah nilainya. Oleh karena itu diperlukan resistor, kapasitor, dan induktor variabel di sisi beban.

Alih Daya Maksimum Dengan Sisipan Transformator. Penyesuaian impedansi beban terhadap impedansi sumber dapat dilakukan dengan menempatkan transformator antara sumber dan beban. Dalam Bab-1 kita telah membahas transformator ideal. Menurut (1.65)

dan (1.66), berlaku
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{dan} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

Di kawasan fasor, relasi tersebut menjadi

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{dan} \quad \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (5.56.a)$$

Konsekuensi dari (5.56) adalah bahwa impedansi yang terlihat di sisi primer adalah

$$Z_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{(N_1 / N_2) \mathbf{V}_2}{(N_2 / N_1) \mathbf{I}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_2 = a^2 Z_2 \quad (5.56.b)$$

Jika impedansi beban adalah $Z_B = R_B + jX_B$, maka dengan menempatkan transformator antara seksi sumber dan seksi beban seksi sumber akan melihat impedansi sebesar $Z_1 = R_1 + jX_1 = a^2(R_B + jX_B)$. Dengan sisipan transformator ini kita tidak dapat membuat penyesuaian hanya pada reaktansi X_1 melainkan penyesuaian pada impedansi Z_1 . Kita tidak melakukan perubahan apapun pada impedansi beban. Jika beban bersifat kapasitif ataupun induktif ia akan tetap sebagaimana adanya sehingga penyesuaian konjugat tidak dapat kita lakukan. Jika \mathbf{V}_T dan Z_T adalah tegangan dan impedansi Thévenin dari seksi sumber, dan Z_1 kita tuliskan sebagai $Z_1 = |Z_1| \cos \theta + j|Z_1| \sin \theta$, maka menurut (5.54) daya yang dialihkan ke beban melalui transformator adalah

$$P_B = \frac{|\mathbf{V}_T|^2 |Z_1| \cos \theta}{(R_T + |Z_1| \cos \theta)^2 + (X_T + |Z_1| \sin \theta)^2} \quad (5.57)$$

Kita harus mencari nilai $|Z_1|$ agar P_B maksimum. Kita turunkan P_B terhadap $|Z_1|$ dan kita samakan dengan nol. Jika ini kita lakukan akan kita peroleh

$$|Z_1| = \sqrt{R_T^2 + X_T^2} = |Z_T| \quad (5.58)$$

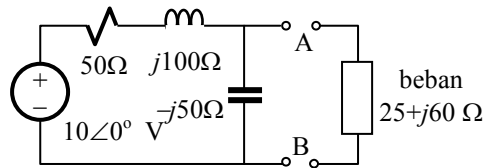
Dengan demikian maka $|Z_1| = a^2 |Z_B| = |Z_T|$ sehingga persyaratan untuk terjadinya alih daya

maksimum adalah
$$a = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{|Z_T|}{|Z_B|}} \quad (5.59)$$

Alih daya maksimum yang kita peroleh dengan cara sisipan transformator ini lebih kecil dari alih daya maksimum yang kita peroleh dengan cara penyesuaian impedansi. Hal ini dapat dimaklumi karena dalam sisipan transformator tidak terjadi penyesuaian konjugat. Walaupun daya beban maksimum lebih kecil, kita tidak memerlukan elemen-elemen variabel pada beban; kita cukup menyediakan transformator dengan rasio transformasi a

yang sesuai. Dalam cara ini yang kita peroleh bukanlah alih daya maksimum melainkan efisiensi maksimum dari alih daya.

CONTOH 5.19 : Terminal AB pada rangkaian berikut ini merupakan terminal hubung untuk menyambungkan beban ke seksi sumber. Hitunglah rasio transformasi transformator yang harus disisipkan pada terminal AB agar alih daya terjadi dengan efisiensi maksimum dan hitunglah berapa daya yang dapat diperoleh beban pada kondisi ini.



Penyelesaian :

Tegangan dan impedansi Thévenin telah dihitung pada contoh sebelumnya, yaitu

$$\mathbf{V}_T = -5 - j5 \text{ V} \quad \text{dan} \quad \mathbf{Z}_T = 25 - j75 \Omega$$

Agar alih daya terjadi dengan efisiensi maksimum maka rasio transformasi dari transformator yang diperlukan adalah

$$a = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{|Z_T|}{|Z_B|}} = \sqrt{\frac{\sqrt{25^2 + 75^2}}{\sqrt{25^2 + 60^2}}} = 1,1028$$

Daya maksimum yang dapat diperoleh dari terminal AB adalah

$$P_B = \frac{|\mathbf{V}_T|^2 |Z_1| \cos \theta}{(R_T + |Z_1| \cos \theta)^2 + (X_T + |Z_1| \sin \theta)^2} = \frac{|\mathbf{V}_T|^2 a^2 R_B}{(R_T + a^2 R_B)^2 + (X_T + a^2 X_B)^2}$$

$$= \frac{50 \times 1,216 \times 25}{(25 + 1,216 \times 25)^2 + (-75 + 1,216 \times 60)^2} = 0,49 \text{ W}$$

Pemahaman:

Perhatikanlah bahwa resistansi beban dalam contoh ini sama dengan resistansi beban dalam contoh sebelumnya. Seandainya digunakan cara penyesuaian impedansi, reaktansi beban dapat dibuat menjadi $j75$ dan daya beban menjadi $0,5 \text{ W}$. Dengan cara sisipan transformator, daya yang dapat diserap beban sedikit lebih kecil dibanding dengan daya maksimum beban jika cara penyesuaian impedansi digunakan.

Bagaimanakah jika impedansi beban pada contoh ini bukan $(25 + j60) \Omega$ melainkan $(25 - j60) \Omega$? Dalam hal ini $|Z_B|$ tidak berubah sehingga nilai a tetap seperti yang telah dihitung yaitu $a = 1,1028$ atau $a^2 = 1,216$. Daya yang diserap beban menjadi

$$P_B = \frac{50 \times 1,216 \times 25}{(25 + 1,216 \times 25)^2 + (-75 - 1,216 \times 60)^2} = 0,06 \text{ W}$$

Seandainya tidak disisipkan transformator, daya pada beban hampir sama besar yaitu

$$P_B = \frac{50 \times 25}{(25 + 25)^2 + (-75 - 60)^2} = 0,06 \text{ W}$$

Jadi dalam hal terakhir ini, di mana impedansi beban bersifat kapasitif sedangkan impedansi Thévenin juga kapasitif, penyisipan transformator tidaklah memperbaiki alih daya. Penyisipan transformator akan memperbaiki alih daya jika impedansi Thévenin dan impedansi beban memiliki sifat yang berlawanan; jika yang satu kapasitif yang lain haruslah induktif. Rasio transformasi dari transformator akan membuat impedansi beban mendekati konjugat dari impedansi Thévenin, walaupun tidak dapat persis sama.

Transformator Linier

Hubungan tegangan dan arus belitan primer dan sekunder transformator secara umum sama dengan hubungan arus dan tegangan kumparan terkopel magnetik seperti diberikan pada persamaan (1.58) yaitu $v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$; $v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$

Di kawasan fasor hubungan ini menjadi menjadi

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 \pm j\omega M \mathbf{I}_2 \quad ; \quad \mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 \pm j\omega M \mathbf{I}_1 \quad (5.60)$$

Untuk transformator ideal yang kopling magnetiknya kita anggap sempurna dan medium magnetiknya linier; menurut (1.63) $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Dengan nilai M ini kita mendapatkan

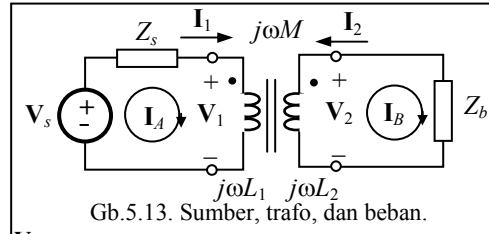
hubungan tegangan primer-sekunder $\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$ dan $\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$ yang kemudian

menghasilkan persamaan (5.56.b). Jika kopling magnetik tidak sempurna, akan tetapi medium magnetiknya tetap linier, maka nilai M seperti dinyatakan oleh (1.57), yaitu

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad \text{atau} \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1.$$

Faktor k menunjukkan seberapa besar kopling antara kumparan primer dan sekunder, dan kita sebut *koefisien kopling*. Koefisien kopling ini lebih kecil dari satu karena terjadi kebocoran fluksi magnet di belitan primer maupun sekunder. Transformator yang akan kita bahas berikut ini adalah transformator dengan $k < 1$, dengan medium magnet yang tetap linier, yang kita sebut *transformator linier*. Pada transformator ini kita tetap menganggap bahwa tidak terjadi rugi-rugi daya.

Impedansi Masukan. Gb.5.13 menunjukkan suatu impedansi (beban) dihubungkan ke sekunder transformator yang belitan primernya dihubungkan ke sumber. Kita akan melihat bagaimana impedansi masukan yang dilihat oleh sumber di sisi primer. Persamaan rangkaian ini adalah



$$\begin{aligned} Z_s \mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 &= \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_2 + Z_b \mathbf{I}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

Hubungan tegangan dan arus belitan transformator menurut (5.60) dengan kopling aditif adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 & \text{atau} & \quad \mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_A + j\omega M (-\mathbf{I}_B) \\ \mathbf{V}_2 &= j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1 & & \quad \mathbf{V}_2 = j\omega L_2 (-\mathbf{I}_B) + j\omega M \mathbf{I}_A \end{aligned} \quad (5.62)$$

Kegunaan dari dua macam persamaan ini akan kita lihat kemudian.

Impedansi masukan ke beban yang dilihat di sisi primer transformator adalah *perbandingan antara tegangan masukan dengan arus masukan*, yang dapat kita peroleh dari persamaan pertama (5.62) yaitu

$$Z_{in} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \quad (5.63)$$

Sedangkan di rangkaian sekunder transformator berlaku

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1 = -Z_b \mathbf{I}_2 \quad \text{atau} \quad \mathbf{I}_2 = \frac{-j\omega M \mathbf{I}_1}{Z_b + j\omega L_2} \quad (5.64)$$

Bila kita memasukkan (5.64) ke (5.63) akan kita peroleh

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{Z_b + j\omega L_2} \quad (5.65)$$

Persamaan (5.65) memperlihatkan bahwa impedansi masukan terdiri dari impedansi belitan primer (suku pertama) dan impedansi yang disebabkan oleh adanya kopling magnetik antara belitan primer dan sekunder (suku ke-dua). Suku ke-dua ini merupakan impedansi di rangkaian sekunder yang dilihat dari belitan primer :

$$Z'_2 = \frac{(\omega M)^2}{Z_b + j\omega L_2} \quad (5.66)$$

Jika impedansi beban dinyatakan dengan $Z_b = R_b + jX_b$, maka (5.66) dapat ditulis

$$\begin{aligned} Z'_2 &= \frac{(\omega M)^2}{R_b + j(\omega L_2 + X_b)} = \frac{(\omega M)^2}{R_b^2 + (\omega L_2 + X_b)^2} [R_b - j(\omega L_2 + X_b)] \\ &= \left(\frac{\omega M}{|Z_2|} \right)^2 \times Z_2^* \end{aligned} \quad (5.67)$$

dengan Z_2 adalah impedansi total rangkaian sekunder, dan Z_2^* adalah konjugatnya.

Pada persamaan (5.67), $(\omega M)^2$ selalu positif walaupun M dapat bernilai negatif, yaitu apabila kopling antara belitan primer dan sekunder bersifat melemahkan (substraktif). Oleh karena itu hubungan (5.67) bersifat umum untuk transformator.

Dengan hubungan (5.67), maka impedansi masukan menjadi

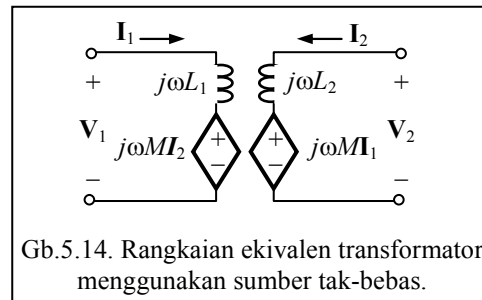
$$Z_{in} = j\omega L_1 + \left(\frac{\omega M}{|Z_2|} \right)^2 \times Z_2^* = \left(\frac{\omega M}{|Z_2|} \right)^2 R_b + j \left[\omega L_1 - \left(\frac{\omega M}{|Z_2|} \right)^2 (\omega L_2 + X_b) \right] \quad (5.68)$$

Rangkaian Ekuivalen Transformator Linier. Dalam analisis rangkaian, transformator sering kita ganti dengan rangkaian ekuivalennya. Rangkaian ekuivalen transformator memberikan hubungan tegangan dan arus belitan primer maupun belitan sekunder. Kita akan melihat dua macam rangkaian ekuivalen untuk transformator dengan *kopling aditif*. Yang pertama adalah rangkaian ekuivalen dengan sumber tak-bebas, dan yang ke-dua adalah rangkaian ekuivalen dengan induktor tanpa kopling magnetik.

Persamaan pertama (5.62) memberikan $\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1$$

Suku pertama dari kedua persamaan tegangan ini adalah tegangan pada masing-masing belitan oleh adanya induktansi sendiri. Suku ke-dua adalah tegangan akibat adanya kopling magnetik yang dapat kita ganti dengan sumber terkendali, masing-masing dengan *gain* $j\omega M$. Rangkaian ekuivalen yang pertama ini diperlihatkan pada Gb.5.14.



Rangkaian ekuivalen yang ke-dua kita peroleh dari persamaan kedua (5.62), yaitu

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_A - j\omega M \mathbf{I}_B$$

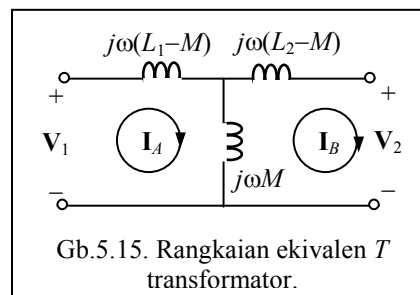
$$\mathbf{V}_2 = -j\omega L_2 \mathbf{I}_B + j\omega M \mathbf{I}_A$$

yang masing-masing dapat kita tuliskan

$$\mathbf{V}_1 = j\omega(L_1 - M) \mathbf{I}_A + j\omega M \mathbf{I}_A - j\omega M \mathbf{I}_B$$

$$-\mathbf{V}_2 = j\omega(L_2 - M) \mathbf{I}_B + j\omega M \mathbf{I}_B - j\omega M \mathbf{I}_A$$

Persamaan terakhir ini memberikan rangkaian ekuivalen seperti terlihat pada Gb.5.15. yang kita



sebut rangkaian ekuivalen T dengan induktor tidak terkopling. Rangkaian ekuivalen ini hanya mengandung induktor, tidak ada resistor karena kita tetap menganggap transformator tanpa rugi daya.

CONTOH 5.20 : Dengan menggunakan rangkaian ekuivalen, tentukan impedansi masukan transformator jika di sisi sekundernya terdapat impedansi beban sebesar $Z_B = R_B + jX_B$.

Penyelesaian :

Dengan menghubungkan $Z_B = R_B + jX_B$ pada terminal sekunder Gb.5.15, kita peroleh

$$\begin{aligned} Z_{in} &= j\omega(L_1 - M) + j\omega M // [j\omega(L_2 - M) + (R_B + jX_B)] \\ &= j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega M [R_B + j(\omega L_2 - \omega M + X_B)]}{j\omega M + R_B + j(\omega L_2 - \omega M + X_B)} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_B + j(\omega L_2 + X_B)} \end{aligned}$$

Hasil ini telah kita peroleh sebelumnya, yaitu persamaan (5.65).

Transformator Nyata. Transformator ini (yang memperhitungkan kehilangan daya) akan kita bahas di Bab-7, yaitu bab yang mengenalkan kita pada mesin-mesin listrik.

Penyediaan Daya dan Perbaikan Faktor Daya

Pada pembahasan mengenai alih daya maksimum dikatakan bahwa persoalan tersebut sering dijumpai pada sistem pemroses sinyal. Pembahasan mengenai aliran daya berikut ini merupakan persoalan yang dijumpai pada sistem tenaga listrik. Dalam sistem tenaga listrik, beban tidak mudah untuk disesuaikan dengan sumber karena beban tergantung dari keperluan konsumen yang sangat bervariasi. Daya yang diperlukan konsumen selalu berubah dari waktu ke waktu, yang kita kenal sebagai *kurva beban*. Walaupun demikian perubahan kebutuhan daya itu masih jauh lebih lambat jika dibandingkan dengan perubahan tegangan yang berfrekuensi 50 Hz (atau 60 Hz di Amerika). Oleh karena itu analisis aliran daya dapat dilakukan dalam keadaan mantap dengan menggunakan konsep fasor. Dalam analisis ini, kita harus mencari kondisi sumber agar dapat memenuhi permintaan beban. Dalam memenuhi kebutuhan beban itu, kondisi kerja sumber belum tentu baik; misalnya faktor daya terlalu rendah. Oleh karena itu kita harus melakukan usaha untuk memperbaiki faktor daya tersebut. Perbaikan faktor daya ini dilakukan dengan menambahkan kapasitor paralel dengan beban sehingga daya reaktif yang harus diberikan oleh sumber menurun tetapi daya rata-rata yang diperlukan beban tetap dipenuhi. Untuk menjelaskan persoalan ini kita akan langsung melihat pada suatu contoh.

CONTOH 5.21 : Dua buah beban dihubungkan paralel. Beban pertama memerlukan daya 10 kW pada faktor daya 0,8 lagging. Beban kedua memerlukan 8 kW pada faktor daya 0,75 lagging. Tegangan yang diberikan oleh sumber adalah 380 V rms. Jika impedansi saluran dapat diabaikan, berapakah daya kompleks yang harus disediakan oleh sumber ?

Penyelesaian :

Daya kompleks yang diperlukan oleh masing-masing beban adalah

$$\begin{aligned} S_1 &= P_1 + jQ_1 = P_1 + j|S_1| \sin \theta_1 = P_1 + j \frac{P_1}{\cos \theta_1} \sin \theta_1 = P_1 + jP_1 \tan \theta_1 \\ &= 10 + j10 \tan(\cos^{-1} 0,8) = 10 + j7,5 \text{ kVA} \end{aligned}$$

$$S_2 = P_2 + jP_2 \tan \theta_2 = 8 + j8 \tan(\cos^{-1} 0,75) = 8 + j7 \text{ kVA}$$

Daya total beban adalah

$$S_{12} = S_1 + S_2 = 10 + j7,5 + 8 + j7 = 18 + j14,5 \text{ kVA}$$

Jika digambarkan segitiga dayanya, daya kompleks ini akan berada di kuadran pertama karena daya reaktifnya sebesar 14,5 kVAR bernilai positif. Jadi beban total ini bersifat induktif, dengan faktor daya *lagging*.

Karena tidak ada beban lain, seperti misalnya daya untuk mengatasi rugi-rugi di saluran, maka daya kompleks total yang harus disediakan oleh sumber sama dengan kebutuhan total beban, yaitu

$$S_s = S_{12} = 18 + j14,5 \text{ kVA} \quad ; \quad \cos\theta = \cos\left(\tan^{-1}\frac{Q_s}{P_s}\right) = 0,78 \text{ lagging}$$

CONTOH 5.22 : Dalam contoh 5.20. di atas, hasil perhitungan menunjukkan bahwa daya kompleks yang diberikan oleh sumber serta faktor dayanya adalah

$$S_s = 18 + j14,5 \text{ kVA} \quad ; \quad \cos\theta = 0,78 \text{ lagging}$$

Untuk memperbaiki faktor daya menjadi 0,95 lagging, tentukanlah kapasitor yang harus diparalelkan dengan beban, jika diketahui bahwa sumber beroperasi pada 50 Hz.

Penyelesaian :

Dengan menghubungkan kapasitor paralel dengan beban, akan terjadi *penambahan beban daya reaktif*. Karena kapasitor *menyerap daya reaktif negatif*, maka tambahan beban oleh kapasitor ini akan memperkecil daya reaktif total beban. Perhatikanlah bahwa beban semula tidak berubah; yang berubah adalah beban total setelah ada penambahan kapasitor. Jadi beban total yang semula adalah

$$S_{12} = S_s = 18 + j14,5 \text{ kVA}$$

setelah ditambahkan kapasitor akan menjadi

$$S_{12C} = S_{12} + jQ_c = 18 + j(14,5 + Q_c) \text{ kVA}$$

dengan Q_c adalah daya reaktif yang diserap kapasitor.

Beban total baru S_{12C} ini harus mempunyai faktor daya 0,95 lagging. Jadi haruslah

$$S_{12C} = 18 + j(14,5 + Q_c) = 18 + j18 \tan(\cos^{-1}0,95)$$

Dari persamaan ini kita dapat mencari Q_c , yaitu

$$14,5 + Q_c = 18 \tan(\cos^{-1}0,95) \quad \text{atau}$$

$$Q_c = 18 \tan(\cos^{-1}0,95) - 14,5 = 5,92 - 14,5 = -8,58 \text{ kVAR}$$

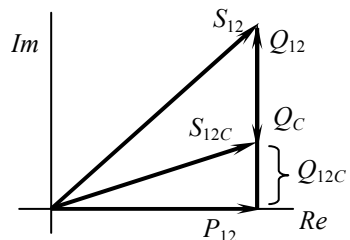
Perhatikanlah segitiga daya yang digambarkan di samping ini.

$$S_{12} = P_{12} + jQ_{12} = \text{daya total semula}$$

$$Q_c = \text{daya reaktif kapasitor (negatif)}$$

$$S_{12C} = P_{12} + jQ_{12C}$$

$$= \text{daya total setelah penambahan kapasitor.}$$



Kebutuhan daya total setelah penambahan kapasitor menjadi

$$S_{12C} = 18 + j(14,5 + Q_c) = 18 + j5,92 \text{ kVA}$$

Nilai kapasitor yang diperlukan dapat dicari karena tegangan kerja maupun frekuensi kerjanya diketahui. Arus yang melalui kapasitor adalah

$$I_c = \frac{V_c}{jX_c} = j\omega C V_c$$

Daya reaktif kapasitor dapat ditulis sebagai

$$Q_c = |I_c|^2 X_c = |j\omega C V_c|^2 \left(\frac{-1}{\omega C}\right) = |V_c|^2 (-\omega C)$$

Dengan $Q_c = -8,58 \text{ kVAR}$, $V_{Crms} = 380 \text{ V}$, dan $f = 50 \text{ Hz}$, maka

$$-8580 = 380^2 (-2\pi \times 50 C) \quad \text{atau} \quad C = \frac{8580}{100\pi \times 380^2} = 190 \mu\text{F}$$

CONTOH 5.23 : Pada contoh 5.22. impedansi saluran antara sumber dan beban diabaikan. Jika impedansi ini tidak dapat diabaikan, dan besarnya untuk setiap kawat adalah $Z_k = (0,2 + j1) \Omega$, tentukanlah daya kompleks dan tegangan kerja sumber. Perhatikan bahwa saluran terdiri dari dua kawat.

Penyelesaian :

Dengan adanya impedansi saluran, daya kompleks yang dikeluarkan oleh sumber harus lebih besar dari keperluan beban karena sumber harus mengatasi susut daya yang terjadi pada saluran. Dengan adanya perbedaan daya kompleks yang dikeluarkan oleh sumber dan daya kompleks yang sampai ke beban, maka tegangan sumber dan tegangan beban juga berbeda. Daya yang harus sampai ke beban (setelah penambahan kapasitor) adalah

$$S_{12C} = 18 + j5,92 \text{ kVA}$$

Dengan menggunakan tegangan beban sebagai referensi, arus beban dapat dihitung.

$$I_B^* = \frac{S_{12C}}{V_B} = \frac{(18 + j5,92) \times 1000}{380 \angle 0^\circ} = 47,37 + j15,58 \text{ A}$$

$$I_B = 47,37 - j15,58 \text{ A} = 49,87 \angle -18,2^\circ \text{ A}$$

Arus beban ini mengalir melalui saluran yang terdiri dari dua kawat. Daya yang diserap oleh impedansi pada saluran adalah

$$S_k = 2 \times Z_k \times |I_B|^2 = 2 \times (0,2 + j1) \times 49,87^2 = 0,99 + j4,97 \text{ kVA}$$

Total daya yang harus dikeluarkan oleh sumber adalah

$$S_s = S_{12C} + S_k = 18 + j5,92 + 0,99 + j4,97 = 18,99 + j10,89 \text{ kVA}$$

Tegangan kerja sumber haruslah

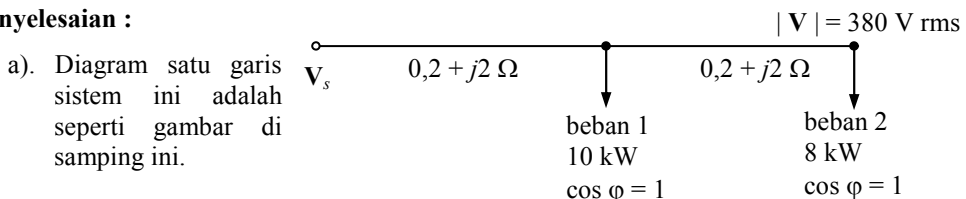
$$V_s = \frac{S_s}{I_s^*} = \frac{S_s}{I_B^*} = \frac{(18,99 + j10,89) \times 1000}{49,87 \angle 18,2^\circ} = \frac{21891 \angle 29,8^\circ}{49,87 \angle 18,2^\circ} = 439 \angle 11,6^\circ \text{ V}$$

Diagram Satu Garis

Diagram satu garis untuk menyatakan rangkaian penyaluran energi arus searah yang telah kita kembangkan di Bab-3, dapat kita perluas untuk rangkaian penyaluran energi arus bolak-balik. Pada sistem satu fasa, impedansi saluran balik ditambahkan pada impedansi saluran kirim untuk digambarkan dalam diagram satu garis.

CONTOH 5.24 : Dua buah beban dicatu dari satu sumber. Beban pertama memerlukan daya 10 kW pada faktor daya 1, dicatu melalui saluran yang impedansinya $0,1 + j1 \Omega$. Dari lokasi beban pertama, saluran diteruskan untuk mencatu beban kedua memerlukan 8 kW pada faktor daya 1, dengan saluran yang impedansinya $0,1 + j1 \Omega$. Tegangan kerja beban kedua harus 380 V rms. (a) Gambarkan diagram satu garis sistem ini, (b) tentukan daya yang diberikan sumber dan tegangan sumber.

Penyelesaian :



a). Diagram satu garis sistem ini adalah seperti gambar di samping ini.

b). Beban 1 dan beban 2 masing-masing adalah

$$S_1 = 10 + j0 \text{ kVA} \quad ; \quad S_2 = 8 + j0 \text{ kVA}$$

Arus untuk beban 2, dengan mengambil tegangannya sebagai referensi, adalah

$$I_2^* = \frac{8000 + j0}{380 \angle 0^\circ} = 21 \angle 0^\circ \text{ A} \quad \rightarrow \quad I_2 = 21 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Daya yang diserap saluran antara beban 1 dan beban 2 adalah

$$S_{sal2} = (0,2 + j2) \times |I_2|^2 = (0,2 + j2) \times |I_2|^2 = 0,09 + j0,9 \text{ kVA}$$

Daya beban 2 + saluran 2 adalah

$$S_{tot2} = S_{sal2} + S_2 = 8,09 + j0,9 \text{ kVA}$$

Tegangan di beban 1 adalah

$$V_1 = \frac{S_{tot2}}{I_2^*} = \frac{8090 + j900}{21 \angle 0^\circ} = 385,2 + j42,9 \text{ V} = 387,6 \angle 6,4^\circ \text{ V}$$

Arus untuk beban 1 adalah

$$I_1 = \frac{S_1}{V_1^*} = \frac{10000 + j0}{387,6 \angle -6,4^\circ} = 25,8 \angle 6,4^\circ \text{ A}$$

Arus sumber sama dengan arus di saluran antara sumber dan beban 1, yaitu

$$I_s = I_1 + I_2 = 25,8 \angle 6,4^\circ + 21 \angle 0^\circ = 46,64 + j2,88 = 46,73 \angle 3,5^\circ \text{ A}$$

Daya yang diserap saluran antara sumber dan beban 1 adalah

$$S_{sal1} = (0,2 + j2) \times |I_s|^2 = (0,2 + j2) \times 46,73^2 = 0,44 + j4,37 \text{ kVA}$$

Daya yang diberikan oleh sumber adalah

$$S_s = S_{sal1} + S_1 + S_{sal2} + S_2 = 0,44 + j4,37 + 10 + 8,09 + j0,9 = 18,53 + j5,27 \text{ kVA}$$

Tegangan sumber adalah

$$V_s = \frac{S_s}{I_s^*} = \frac{18530 + j5270}{46,73 \angle -3,5^\circ} = \frac{19265 \angle 15,9^\circ}{46,73 \angle -3,5^\circ} = 412 \angle 19,4^\circ \text{ V}$$

SOAL-SOAL : ANALISIS DAYA – SISTEM SATU FASA

- Hitunglah daya rata-rata, daya reaktif, dan faktor daya pada suatu piranti, jika tegangan dan arusnya adalah
 - $v = 100\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$
 $i = 2\sqrt{2} \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$
 - $V = 100 \angle 45^\circ \text{ V rms}$;
 $I = 2 \angle -30^\circ \text{ A rms}$
- Hitunglah faktor daya (lagging atau leading), jika diketahui daya kompleks
 - $S = 1000 + j750 \text{ VA}$
 - $S = 800 - j600 \text{ VA}$
 - $S = -600 + j800 \text{ VA}$
 - $|S| = 10 \text{ kVA}$, $Q = -8 \text{ kVAR}$, $\cos\theta > 0$.
 - $|S| = 10 \text{ kVA}$, $P = 8 \text{ kW}$, $\cos\theta > 0$.
- Hitunglah daya rata-rata, daya reaktif, arus beban, serta impedansi beban jika pada tegangan 2400 V rms, beban menyerap daya kompleks 15 kVA pada faktor daya 0,8 lagging.
- Hitunglah daya rata-rata, daya reaktif, arus beban, serta impedansi beban jika pada tegangan 2400 V rms, beban menyerap daya 10 kW pada faktor daya 0,8 lagging.
- Pada tegangan 220 V rms, sebuah beban dialiri arus 22 A rms pada faktor daya 0,9 lagging. Hitunglah daya kompleks, daya rata-rata, daya reaktif, serta impedansi beban.
- Sebuah resistor 100 Ω terhubung seri dengan induktor 100 mH. Hitunglah daya total yang diserap, faktor dayanya, daya yang diserap masing-masing elemen, jika dihubungkan pada sumber tegangan 220 V rms, 50 Hz.
- Sebuah resistor 100 Ω terhubung paralel dengan kapasitor 50 μF . Hitunglah daya yang diserap beban serta faktor dayanya jika dihubungkan pada sumber tegangan 220 V rms, 50 Hz.

8. Sebuah beban berupa hubungan paralel antara sebuah resistor dan sebuah kapasitor. Pada tegangan 220 V rms, 50 Hz, beban ini menyerap daya kompleks $S = 550 - j152$ VA. Berapakah nilai resistor dan kapasitor ?
9. Sebuah beban berupa resistor 40 Ω terhubung paralel dengan induktor yang reaktansinya 30 Ω pada frekuensi 50 Hz. Beban ini dicatu dari sebuah sumber tegangan 240 V rms, 50 Hz, melalui saluran yang memiliki impedansi $1 + j10$ Ω per saluran. Hitunglah arus di saluran (rms), daya kompleks yang diserap beban, daya kompleks yang diserap saluran.
10. Pada soal 9 berapakah faktor daya pada beban dan faktor daya di sisi sumber. Hitung pula tegangan pada beban.
11. Sebuah beban menyerap daya 2,5 kVA pada faktor daya 0,9 *lagging*. Beban ini dicatu melalui kabel dari sebuah sumber yang bekerja pada tegangan 2400 V rms. Di sisi sumber tercatat bahwa daya yang keluar adalah 2,65 kVA dengan faktor daya 0,88 *lagging*. Hitunglah arus saluran, impedansi saluran dan impedansi beban. Hitung pula pada tegangan berapa beban beroperasi.
12. Pada sumber tegangan 220 V rms, 50 Hz, dihubungkan dua buah beban (paralel). Beban pertama menyerap daya 10 kVA pada faktor daya 0,9 *lagging*. Beban kedua menyerap daya rata-rata 8 kW dan daya reaktif 6 kVAR. Jika impedansi saluran dapat diabaikan, berapakah daya total yang diberikan sumber serta faktor dayanya ?
13. Pada sumber satu fasa 220 V rms, terhubung dua macam beban. Beban pertama adalah sebuah pemanas 500 W. Beban ke-dua adalah motor pompa 0,5 HP yang bekerja pada faktor daya 0,8 *lagging*. Hitunglah: (a) daya kompleks (total); (b) faktor daya (total); (c) arus yang keluar dari sumber (rms).
14. Di satu lokasi terdapat dua beban, masing-masing menyerap daya 20 kVA pada faktor daya 0,8 *lagging*, dan 25 kVA pada faktor daya 0,9 *lagging*. Kedua beban bekerja pada tegangan 2400 V rms dan dicatu dari sumber melalui saluran yang impedansinya $0,5 + j2$ Ω per saluran. Hitunglah arus pada saluran, daya kompleks yang harus disediakan sumber untuk kedua beban, faktor daya di sisi sumber. Hitung pula tegangan sumber agar kebutuhan tegangan beban dapat dipenuhi.
15. Satu sumber mencatu dua beban di dua lokasi berbeda. Beban pertama 30 kVA dengan faktor 0,8 *lagging* dicatu dari sumber melalui saluran dengan impedansi $1 + j4$ Ω per saluran. Dari lokasi beban pertama ini, saluran disambung untuk mencatu beban kedua yang menyerap daya 15 kVA pada faktor daya 0,8 *lagging*. Impedansi saluran antara beban pertama dan beban kedua adalah $0,5 + j2$ Ω per saluran. Jika beban kedua harus beroperasi pada tegangan 2400 V rms, berapakah tegangan sumber dan berapa daya yang harus disediakan oleh sumber ?
16. Sekelompok beban beroperasi pada tegangan $|V| = 220$ V rms dan menyerap daya 40 kVA dengan faktor daya 0,8 *lagging*. Beban ini dicatu dari sumber tegangan menengah melalui sebuah transformator penurun tegangan yang mempunyai rasio 20:1 dan dapat dianggap ideal. Sumber dihubungkan ke sisi primer transformator melalui saluran yang impedansinya $0,4 + j2$ Ω per saluran. Hitunglah arus di sisi primer transformator, tegangan sumber, dan daya yang diberikan oleh sumber.
17. Sebuah motor mengambil arus 20 A pada faktor daya 0,7 *lagging*, dari sumber 220 V, 50 Hz. Tentukan nilai kapasitor yang harus diparalelkan untuk memperbaiki faktor daya menjadi 0,9 *lagging*.

5.3. Rangkaian Resonansi

Tujuan :

- Memahami bahwa pada rangkaian dengan induktor dan kapasitor terdapat suatu nilai frekuensi yang akan menyebabkan terjadinya resonansi.
- Mampu mencari frekuensi resonansi, menentukan faktor kualitas, menentukan lebar pita resonansi.

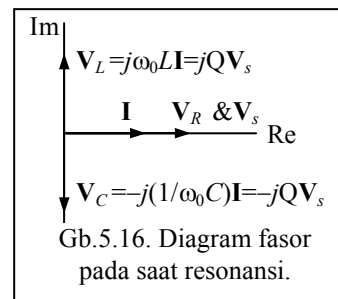
Resonansi Seri. Impedansi dari rangkaian seri RLC adalah:

$$Z_{RLC \text{ seri}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (5.69)$$

Reaktansi dari impedansi ini mengandung bagian induktif ($X_L = j\omega L$) maupun kapasitif ($X_C = 1/j\omega C$), yang keduanya merupakan fungsi dari frekuensi. Bagian induktif berbanding lurus dengan frekuensi sementara bagian kapasitifnya berbanding terbalik. Pada suatu nilai frekuensi tertentu, nilai reaktansi total menjadi nol, yaitu pada saat

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \quad \text{atau} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.70)$$

Pada saat itu dikatakan bahwa rangkaian beresonansi, dan ω_0 disebut *frekuensi resonansi*. Pada waktu terjadi resonansi, jelas bahwa impedansi rangkaian ini hanyalah R ; reaktansi induktif sama dengan reaktansi kapasitif sehingga saling meniadakan. Dalam keadaan beresonansi, arus yang mengalir dalam rangkaian hanya ditentukan oleh R ; jika tegangan sumber adalah V_s maka $I = V_s / R$. Diagram fasor tegangan dan arus terlihat seperti Gb.5.16.



Beberapa parameter digunakan untuk menyetapkan resonansi secara lebih detail. Salah satunya adalah *faktor kualitas*, Q , yang didefinisikan sebagai *perbandingan antara reaktansi induktif pada saat resonansi dengan resistansinya*. Karena pada saat resonansi $|X_L| = |X_C|$, maka

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \quad (5.71)$$

Jelaslah bahwa, walaupun definisi Q menyebut “pada saat resonansi”, Q semata-mata tergantung dari parameter rangkaian. Faktor kualitas berbanding terbalik dengan rasio redaman $Q = 1/2\zeta$.

Parameter lain adalah *lebar pita resonansi* yang didefinisikan sebagai selang frekuensi dimana impedansi tidak berbeda jauh dari nilai impedansi pada saat resonansi. Selang ini biasanya diambil selang frekuensi yang memberikan nilai $Z = R - jR$ dan $Z = R + jR$. Jika batas frekuensi rendah dan tingginya adalah ω_1 dan ω_2 , maka

$$\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right) = -R \quad \text{dan} \quad \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right) = R \quad \text{atau} \quad \omega_1^2 LC + \omega_1 RC - 1 = 0 \quad \text{dan} \quad \omega_2^2 LC - \omega_2 RC - 1 = 0$$

Karena $LC = 1/\omega_0^2$ dan $RC = 1/\omega_0 Q$, maka persamaan di atas menjadi

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) - 1 = 0 \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 - \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right) - 1 = 0 \quad (5.72)$$

Masing-masing persamaan pada (5.72) mempunyai dua akar. Namun hanya akar yang mempunyai arti fisis yang kita pakai, yaitu yang bernilai positif. Dengan pengertian itu maka

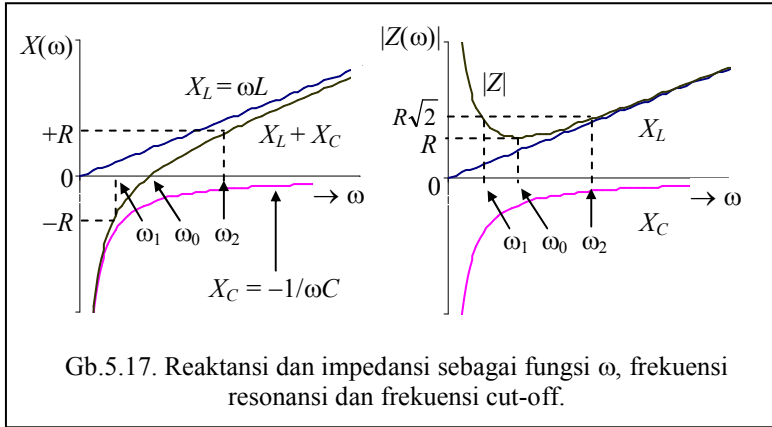
$$\omega_1 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right) \quad \text{dan} \quad \omega_2 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right) \quad (5.73)$$

Lebar pita resonansi adalah

$$BW_{res} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (5.74)$$

ω_1 dan ω_2 disebut frekuensi *cut-off* untuk resonansi.

Perubahan reaktansi dan impedansi terhadap frekuensi serta parameter-parameter resonansi dijelaskan pada Gb.5.17.



Resonansi Paralel. Admitansi rangkaian paralel *RLC* adalah

$$Y_{RLC \text{ paralel}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (5.75)$$

Bagian riil dari admitansi disebut *konduktansi* dan bagian imajineranya kita sebut suseptansi. Suseptansi dari rangkaian paralel *RLC* merupakan fungsi dari frekuensi. Seperti halnya reaktansi pada rangkaian seri *RLC*, ada satu nilai frekuensi yang membuat suseptansi pada (5.75) menjadi nol, yang kita sebut frekuensi resonansi, ω_0 .

$$\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0 \rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.76)$$

Persamaan (5.76) ini sama dengan (5.70). Jadi frekuensi resonansi rangkaian paralel *RLC* sama dengan rangkaian serinya. Sesungguhnya admitansi rangkaian paralel dapat kita peroleh dari impedansi rangkaian seri dengan penggantian : $R \leftrightarrow G$; $L \leftrightarrow C$; $C \leftrightarrow L$.

Faktor kualitas :

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 GL} = \frac{R}{\sqrt{L/C}} \quad (5.77)$$

Frekuensi cutoff :

$$\omega_1 = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right) \quad \text{dan} \quad \omega_2 = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right) \quad (5.78)$$

Lebar pita resonansi adalah

$$BW_{res} = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (5.79)$$

Frekuensi tengah :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (5.80)$$

Jika arus total dinyatakan dalam fasor \mathbf{I}_s , maka pada saat resonansi masing-masing adalah

$$\mathbf{I}_L = -jQ\mathbf{I}_s \quad \mathbf{I}_C = jQ\mathbf{I}_s \quad (5.81)$$

SOAL-SOAL : RANGKAIAN RESONANSI

1. Suatu rangkaian RLC seri dengan $R = 10 \Omega$, $L = 0,5 \text{ mH}$, dan $C = 200 \text{ nF}$. Berapakah frekuensi resonansi rangkaian ini ? Berapa faktor kualitasnya ? Berapa lebar pita resonansinya ? Berapakah nilai impedansi pada batas frekuensi (*cutoff frequency*) atas dan bawahnya ? Berapa nilai ke-dua batas frekuensi tersebut ?
2. Pada suatu rangkaian RLC seri $L = 0,5 \text{ mH}$, dan $C = 200 \text{ nF}$. Impedansi rangkaian ini pada batas frekuensi atasnya adalah $Z = 20 + j20 \Omega$. Berapakah frekuensi resonansi rangkaian ini ? Berapa faktor kualitasnya ? Berapa lebar pita resonansinya ? Berapa nilai ke-dua batas frekuensi tersebut ?
3. Sebuah rangkaian resonansi seri RLC dirancang untuk beresonansi pada 50 Mrad/s , dengan lebar pita resonansi 8 Mrad/s . Impedansi pada waktu resonansi adalah 24Ω . Tentukan faktor kualitasnya, nilai L dan C , batas frekuensi atas dan bawah.
4. Sebuah rangkaian resonansi paralel RLC beresonansi pada 100 krad/s dan lebar pita resonansinya 5 krad/s . Dalam keadaan resonansi, impedansinya bernilai $8 \text{ k}\Omega$. Tentukan L , C , faktor kualitas, batas frekuensi atas dan bawah.
5. Sebuah kapasitor variabel diparalel dengan resistor 100Ω . Rangkaian paralel ini kemudian diserikan dengan induktor 10 mH . Dengan frekuensi 5000 rad/s , pada nilai kapasitor berapakah impedansi rangkaian ini menjadi resistif ? Berapakah impedansi tersebut ?
6. Sebuah resistor 50Ω dihubungkan seri dengan induktor 10 mH . Rangkaian seri ini diparalel dengan kapasitor $10 \mu\text{F}$. Pada frekuensi berapakah impedansi totalnya menjadi resistif. Berapakah nilainya ?
7. Sebuah induktor 20 mH mempunyai resistansi internal 20Ω . Berapakah nilai kapasitor yang harus diserikan dengan induktor tersebut agar terjadi resonansi pada frekuensi 10 krad/s ? Hitung faktor kualitas rangkaian ini.

5.4. Sistem Tiga Fasa Seimbang

Tujuan :

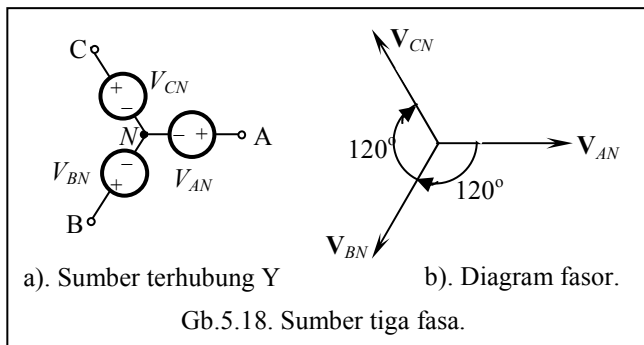
- Memahami hubungan sumber dan beban dalam sistem tiga fasa seimbang.
- Memahami dan mampu menentukan hubungan fasor-fasor arus dan tegangan pada sistem tiga fasa seimbang.
- Mampu melakukan analisis daya pada sistem tiga fasa.

Sampai tahap ini kita telah membahas rangkaian arus bolak-balik sistem satu fasa. Dengan arus bolak-balik inilah energi dalam jumlah besar dapat ditransmisikan. Namun demikian pembangkitan dan penyaluran tenaga listrik pada umumnya tidak dilakukan dengan menggunakan sistem satu fasa, melainkan dengan sistem tiga fasa. Transmisi daya dilakukan pada tegangan tinggi yang dapat diperoleh dengan menggunakan transformator penaik tegangan. Di ujung saluran, tegangan diturunkan lagi sesuai dengan kebutuhan beban. Pemilihan sistem tiga fasa untuk pembangkitan dan penyaluran energi listrik juga didasari oleh kelebihan unjuk kerja maupun kelebihan ekonomis yang dapat diperoleh dari sistem ini. Penyaluran daya dengan menggunakan sistem tiga fasa kurang berfluktuasi dibandingkan terhadap sistem satu fasa. Selain dari pada itu, untuk penyaluran daya tertentu pada tegangan tertentu akan memerlukan arus lebih kecil sehingga dimensi saluran yang diperlukan akan lebih kecil pula. Konversi elektrik-mekanis juga lebih mudah dilakukan pada sistem tiga fasa dengan menggunakan motor tiga fasa.

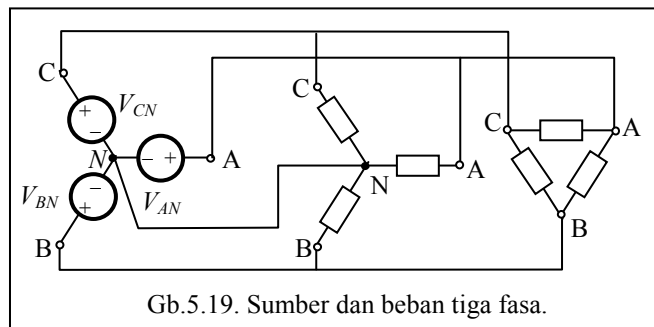
Berikut ini kita akan membahas sistem tiga fasa yang sangat luas digunakan pada pembangkitan dan penyaluran energi listrik. Namun kita tidak akan membahas tentang bagaimana pembangkitan dilakukan ataupun piranti apa yang digunakan; hal-hal ini akan kita pelajari pada mata kuliah di tingkat yang lebih tinggi. Di sini kita akan mempelajari bagaimana hubungan-hubungan elemen serta analisis rangkaian tiga fasa, dan juga terbatas hanya pada pembebanan yang seimbang.

Sumber Tiga Fasa dan Sambungan ke Beban

Suatu sumber tiga fasa membangkitkan tegangan tiga fasa, yang dapat digambarkan sebagai *tiga sumber tegangan* yang terhubung Y (bintang) seperti terlihat pada Gb.5.15.a. Dalam kenyataannya, tiga sumber tegangan ini dibangkitkan oleh *satu piranti*. Titik hubung antara ketiga tegangan itu disebut titik netral, N . Antara satu tegangan dengan tegangan yang lain berbeda fasa 120° . Jika kita mengambil tegangan V_{AN} sebagai referensi, maka kita dapat menggambarkan diagram fasor tegangan dari sistem tiga fasa ini seperti terlihat pada Gb.5.18.b. Urutan fasa dalam gambar ini disebut *urutan positif*. Bila fasor tegangan V_{BN} dan V_{CN} dipertukarkan, kita akan memperoleh urutan fasa negatif.



Sumber tiga fasa pada umumnya dihubungkan Y karena jika dihubungkan Δ akan terbentuk suatu rangkaian tertutup yang apabila ketiga tegangan tidak tepat berjumlah nol akan terjadi arus sirkulasi yang merugikan. Sumber tegangan tiga fasa ini dihubungkan ke beban tiga fasa yang terdiri dari tiga impedansi yang dapat terhubung Y ataupun Δ seperti terlihat pada Gb.5.19. Dalam kenyataan, beban tiga fasa dapat berupa satu piranti tiga fasa, misalnya motor tiga fasa, ataupun tiga piranti satu fasa yang dihubungkan secara Y atau Δ , misalnya resistor pemanas.



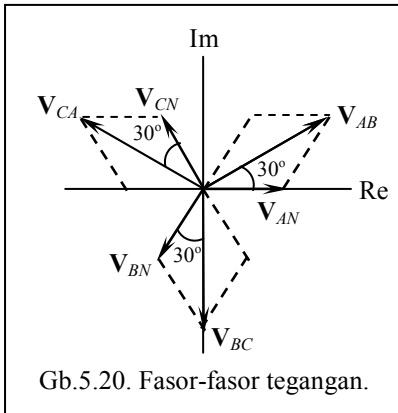
Dalam analisis rangkaian tiga fasa, kita mengenal enam macam tegangan yaitu tiga tegangan fasa-netral dan tiga tegangan fasa-fasa. Tegangan V_{AN} , V_{BN} , dan V_{CN} pada Gb.5.18. adalah tegangan-tegangan fasa-netral, masing-masing dari fasa A, B, dan C. Jika kita mengambil tegangan fasa-netral V_{AN} sebagai tegangan referensi, maka hubungan antara fasor-fasor tegangan tersebut adalah:

$$\mathbf{V}_{AN} = V_{fn} \angle 0^\circ \quad ; \quad \mathbf{V}_{BN} = V_{fn} \angle -120^\circ \quad ; \quad \mathbf{V}_{CN} = V_{fn} \angle -240^\circ \quad (5.82)$$

Tegangan antara fasa dengan fasa kita sebut tegangan fasa-fasa yaitu V_{AB} , V_{BC} , dan V_{CA} yang fasor-fasornya adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{AB} &= \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{NB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} \\ \mathbf{V}_{BC} &= \mathbf{V}_{BN} + \mathbf{V}_{NC} = \mathbf{V}_{BN} - \mathbf{V}_{CN} \\ \mathbf{V}_{CA} &= \mathbf{V}_{CN} + \mathbf{V}_{NA} = \mathbf{V}_{CN} - \mathbf{V}_{AN} \end{aligned} \quad (5.83)$$

Hubungan antara tegangan fasa-netral dan fasa-fasa adalah (Gb.5.20) :



$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{AB} &= \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = V_{fn} \angle 0^\circ - V_{fn} \angle -120^\circ \\ &= V_{fn} (1 + j0) - V_{fn} \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= V_{fn} \left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = V_{fn} \sqrt{3} \angle 30^\circ \end{aligned} \quad (5.84)$$

dan dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{BC} &= V_{fn} \sqrt{3} \angle -90^\circ \\ \mathbf{V}_{CA} &= V_{fn} \sqrt{3} \angle -210^\circ \end{aligned} \quad (5.85)$$

Jadi amplitudo tegangan fasa-fasa adalah $\sqrt{3}$ kali lebih besar dari amplitudo tegangan fasa-netral

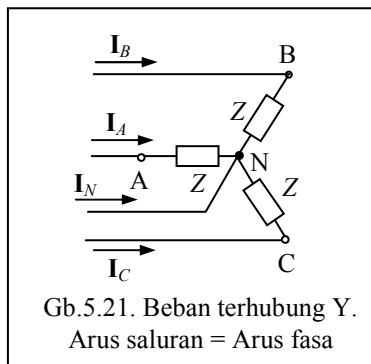
$$V_{ff} = V_{fn} \sqrt{3} \quad (5.86)$$

sedangkan sudut fasanya berbeda 30° .

CONTOH 5.26. : Jika tegangan fasa-netral adalah $\mathbf{V}_{AN} = 220 \angle 30^\circ$ V, berapakah tegangan fasa-netral dan tegangan fasa-fasa yang lain ?

Penyelesaian : $\mathbf{V}_{AN} = 220 \angle 30^\circ$ V ; $\mathbf{V}_{BN} = 220 \angle -90^\circ$ V ; $\mathbf{V}_{CN} = 220 \angle -210^\circ$ V
 $\mathbf{V}_{AB} = 380 \angle +60^\circ$ V ; $\mathbf{V}_{BC} = 380 \angle -60^\circ$ V ; $\mathbf{V}_{CA} = 380 \angle -190^\circ$ V

Beban Terhubung Y. Gb.5.21. memperlihatkan beban seimbang yang terhubung Y. Impedansi masing-masing fasa adalah Z. Dari gambar ini jelas terlihat bahwa arus yang mengalir di saluran sama dengan arus yang mengalir di masing-masing fasa. Jadi



$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{Z} \quad ; \quad \mathbf{I}_B = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{Z} \quad ; \quad \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{Z} \quad (5.87)$$

Dalam persamaan (5.87) \mathbf{V}_{AN} , \mathbf{V}_{BN} , dan \mathbf{V}_{CN} adalah tegangan-tegangan fasa yang berbeda fasa 120° satu terhadap lainnya. Karena tegangan ini dibagi oleh Z yang sama untuk mendapatkan arus fasa, jelaslah bahwa masing-masing arus fasa akan tergeser dengan sudut yang sama dari tegangan fasa yang bersangkutan.

Jika kita tetap meng-ambil \mathbf{V}_{AN} sebagai referensi maka

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_A &= \frac{\mathbf{V}_{AN}}{Z} = \frac{V_{fn} \angle 0^\circ}{|Z| \angle \theta} = \frac{V_{fn}}{|Z|} \angle -\theta = I_f \angle -\theta \\ \mathbf{I}_B &= \frac{\mathbf{V}_{BN}}{Z} = \frac{V_{fn} \angle -120^\circ}{|Z| \angle \theta} = \frac{V_{fn}}{|Z|} \angle (-120^\circ - \theta) = I_f \angle (-\theta - 120^\circ) \\ \mathbf{I}_C &= \frac{\mathbf{V}_{CN}}{Z} = \frac{V_{fn} \angle -240^\circ}{|Z| \angle \theta} = \frac{V_{fn}}{|Z|} \angle (-240^\circ - \theta) = I_f \angle (-\theta - 240^\circ) \end{aligned} \quad (5.88)$$

Persamaan (5.88) memperlihatkan bahwa arus-arus fasa mempunyai amplitudo sama, dan satu sama lain berbeda fasa 120° . Diagram fasor tegangan dan arus diperlihatkan pada Gb.5.22.

Jumlah arus-arus fasa ini adalah

$$\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C = 0 \quad (5.80)$$

Jika kita aplikasikan HAK untuk titik netral pada Gb.5.21., maka

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_N + \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C &= 0 \\ \text{sehingga} \\ \mathbf{I}_N &= -(\mathbf{I}_A + \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_C) = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

Jadi dalam keadaan beban seimbang, arus netral sama dengan nol.

Daya kompleks yang diserap oleh beban 3 fasa adalah jumlah dari daya yang diserap masing-masing fasa, yaitu:

$$\begin{aligned} S_{3f} &= \mathbf{V}_{AN} \mathbf{I}_A^* + \mathbf{V}_{BN} \mathbf{I}_B^* + \mathbf{V}_{CN} \mathbf{I}_C^* \\ &= (V_{fn} \angle 0^\circ)(I_f \angle \theta) + (V_{fn} \angle -120^\circ)(I_f \angle 120^\circ + \theta) + (V_{fn} \angle -240^\circ)(I_f \angle 240^\circ + \theta) \\ &= 3V_{fn} I_f \angle \theta = 3V_{fn} I_A \angle \theta \end{aligned} \quad (5.89)$$

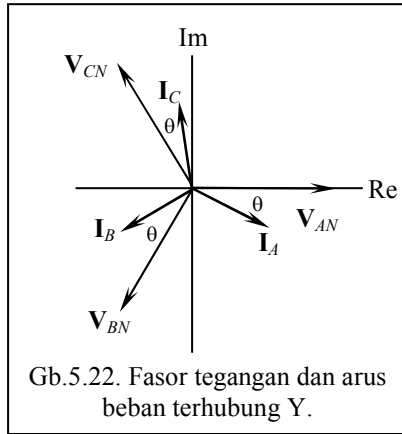
Karena hubungan antara tegangan fasa-netral dan tegangan fasa-fasa adalah $V_{ff} = V_{fn} \sqrt{3}$ (persamaan 5.84), maka kita dapat menyatakan daya kompleks dalam tegangan fasa-fasa, yaitu

$$S_{3f} = V_{ff} I_A \sqrt{3} \angle \theta \quad (5.90)$$

Daya rata-rata dan daya reaktif adalah

$$\begin{aligned} P_{3f} &= V_{ff} I_A \sqrt{3} \cos \theta = |S_{3f}| \cos \theta \\ Q_{3f} &= V_{ff} I_A \sqrt{3} \sin \theta = |S_{3f}| \sin \theta \end{aligned} \quad (5.91)$$

CONTOH 5.27 : Sebuah beban terhubung Y mempunyai impedansi di setiap fasa sebesar $Z = 4 + j3 \Omega$. Beban ini dicatu oleh sumber tiga fasa dengan tegangan fasa-fasa $V_{ff} = 380 \text{ V}$ (rms). Dengan menggunakan \mathbf{V}_{AN} sebagai fasor tegangan referensi, tentukanlah (a) arus saluran dan (b) daya kompleks, daya rata-rata, daya reaktif.



Penyelesaian :

a). Perhatikanlah bahwa yang diketahui adalah besarnya tegangan fasa-fasa, tanpa diketahui sudut fasanya. Oleh karena itu kita harus menentukan tegangan referensi lebih dulu. Dalam soal ini, kita diminta untuk menggunakan tegangan fasa-netral V_{AN} sebagai tegangan referensi. *Besarnya* tegangan fasa-netral adalah

$$V_{fn} = \frac{V_{ff}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

Tegangan-tegangan fasa-netral menjadi

$$V_{AN} = 220\angle 0^\circ \text{ V (sebagai referensi)} ; V_{BN} = 220\angle -120^\circ \text{ V} ; V_{CN} = 220\angle -240^\circ \text{ V}$$

Karena beban terhubung Y, arus saluran sama dengan arus fasa

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{3 + j4} = \frac{220\angle 0^\circ}{5\angle 36,8^\circ} = 44\angle -36,8^\circ \text{ A}$$

$$I_B = 44\angle (-36,8^\circ - 120^\circ) = 44\angle -156,8^\circ \text{ A}$$

$$I_C = 44\angle -276,8^\circ \text{ A}$$

b). Daya kompleks tiga fasa, adalah

$$S_{3f} = 3 \times V_{AN} I_A^* = 3 \times 220\angle 0^\circ \times 44\angle 36,8^\circ = 29\angle 36,8^\circ \text{ kVA}$$

$$\text{Daya rata-rata: } P_{3f} = 29 \cos 36,8^\circ = 23,2 \text{ kW}$$

$$\text{Daya reaktif: } Q_{3f} = 29 \sin 36,8^\circ = 17,4 \text{ kVAR}$$

Kita coba memastikan apakah benar P dan Q masing-masing adalah daya yang diserap oleh resistansi dan reaktansi beban, dengan mengalikan resistansi dengan pangkat dua *besarnya arus* :

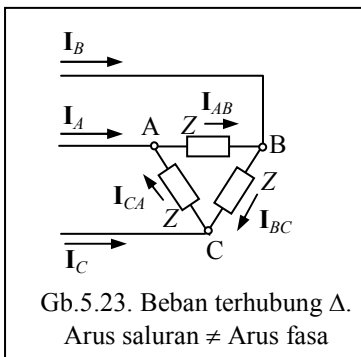
$$P_{3f} = 3 \times 44^2 = 23,2 \text{ kW dan}$$

$$Q_{3f} = 3 \times 44^2 = 17,4 \text{ kVAR}$$

Ternyata hasilnya sesuai dengan hasil sebelumnya.

Beban Terhubung Δ . Jika beban terhubung Δ (Gb.5.23), arus saluran tidak sama dengan arus fasa, akan tetapi tegangan fasa-fasa terpasang pada impedansi tiap fasa. Jika kita hanya ingin menghitung arus saluran, kita dapat memanfaatkan transformasi hubungan Y- Δ , sehingga beban yang terhubung Δ menjadi terhubung Y dengan

$$Z_Y = \frac{Z}{3} \tag{5.91}$$



dengan catatan bahwa bebannya seimbang. Setelah ditransformasikan menjadi hubungan Y arus-arus saluran serta daya total dapat kita hitung. Jika kita perlu menghitung arus maupun daya di tiap fasa dalam keadaan beban tetap terhubung Δ , kita memerlukan formulasi hubungan antara arus-arus fasa I_{AB} , I_{BC} , I_{CA} dengan tegangan-tegangan fasa V_{AB} , V_{BC} , dan V_{CA} . Dari Gb.5.23. terlihat bahwa

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{Z} ; \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{Z} ; \quad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{Z} \quad (5.93)$$

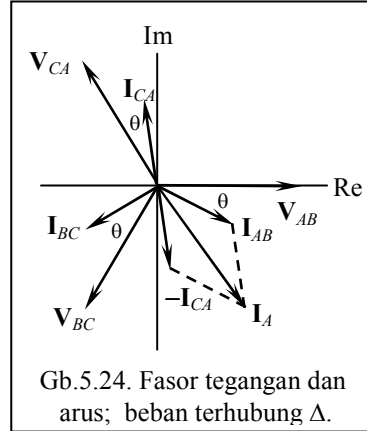
Dari gambar ini pula kita memperoleh hubungan

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} ; \quad \mathbf{I}_B = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB} ; \quad \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC} \quad (5.94)$$

Diagram fasor tegangan dan arus untuk beban yang terhubung Δ ini, dengan mengambil \mathbf{V}_{AB} sebagai referensi, terlihat pada Gb.5.24. Dengan memperhatikan gambar ini maka (5.93) menjadi

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{Z} = \frac{V_{ff} \angle 0^\circ}{|Z| \angle \theta} = \frac{V_{ff}}{|Z|} \angle -\theta \quad (5.95)$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \mathbf{I}_{AB} \angle -\theta - 120^\circ ; \quad \mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB} \angle -\theta - 240^\circ$$



Gb.5.24. Fasor tegangan dan arus; beban terhubung Δ .

Gb.5.24. memperlihatkan bahwa sudut yang dibentuk oleh fasor \mathbf{I}_{AB} dan $-\mathbf{I}_{CA}$ adalah 60° . Dengan demikian maka

$$\mathbf{I}_A = I_{AB} \sqrt{3} \angle (-\theta - 30^\circ) = I_f \sqrt{3} \angle (-\theta - 30^\circ)$$

$$\mathbf{I}_B = I_{BC} \sqrt{3} \angle (-\theta - 150^\circ) = I_f \sqrt{3} \angle (-\theta - 150^\circ) \quad (5.96)$$

$$\mathbf{I}_C = I_{CA} \sqrt{3} \angle (-\theta - 270^\circ) = I_f \sqrt{3} \angle (-\theta - 270^\circ)$$

Daya kompleks tiga fasa adalah

$$S_{3f} = 3 \times \mathbf{V}_{AB} \mathbf{I}_{AB}^* = 3 \times V_{ff} \angle 0^\circ \times I_f \angle \theta = V_{ff} I_A \sqrt{3} \angle \theta \quad (5.97)$$

Daya rata-rata dan daya reaktif adalah

$$P_{3f} = V_{ff} I_A \sqrt{3} \cos \theta = |S_{3f}| \cos \theta$$

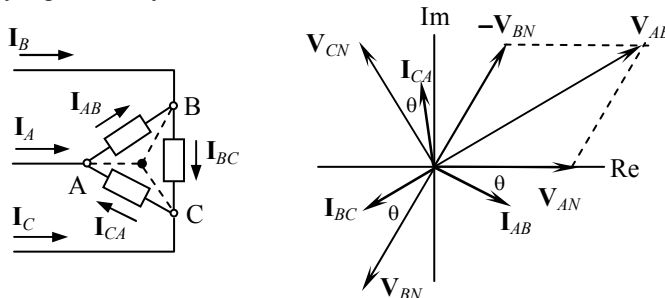
$$Q_{3f} = V_{ff} I_A \sqrt{3} \sin \theta = |S_{3f}| \sin \theta \quad (5.98)$$

CONTOH 5.28 : Sebuah beban terhubung Δ mempunyai impedansi di setiap fasa sebesar $Z = 4 + j3 \Omega$. Beban ini dicatu oleh sumber tiga fasa dengan tegangan fasa-fasa $V_{ff} = 80$ V (rms). Dengan menggunakan \mathbf{V}_{AN} sebagai fasor tegangan referensi, tentukanlah:

- a). tegangan fasa-fasa dan arus saluran; b). daya kompleks, daya rata-rata, daya reaktif.

Penyelesaian :

- a). Dalam soal ini kita diminta untuk menggunakan tegangan \mathbf{V}_{AN} sebagai referensi. Titik netral pada hubungan Δ adalah fiktif; namun perlu kita ingat bahwa sumber mempunyai titik netral yang nyata. Untuk memudahkan mencari hubungan fasor-fasor tegangan, kita menggambarkan hubungan beban sesuai dengan tegangan referensi yang diambil yaitu \mathbf{V}_{AN} .



Dengan mengambil V_{AN} sebagai referensi maka tegangan fasa-netral adalah

$$V_{AN} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ = 220 \angle 0^\circ \quad ; \quad V_{BN} = 220 \angle -120^\circ \quad ; \quad V_{CN} = 220 \angle -240^\circ$$

sedangkan tegangan-tegangan fasa-fasa adalah

$$V_{AB} = V_{AN} \sqrt{3} \angle (\theta_{AN} + 30^\circ) = 380 \angle 30^\circ \quad ; \quad V_{BC} = 380 \angle -90^\circ \quad ; \quad V_{CA} = 380 \angle -210^\circ$$

Arus-arus fasa adalah

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{380 \angle 30^\circ}{4 + j3} = \frac{380 \angle 30^\circ}{5 \angle 36,8^\circ} = 76 \angle -6,8^\circ \text{ A}$$

$$I_{BC} = 76 \angle -6,8^\circ - 120^\circ = 76 \angle -126,8^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = 76 \angle -6,8^\circ - 240^\circ = 76 \angle -246,8^\circ \text{ A}$$

dan arus-arus saluran adalah

$$I_A = I_{AB} \sqrt{3} \angle (-6,8^\circ - 30^\circ) = 76 \sqrt{3} \angle -36,8^\circ = 131,6 \angle -36,8^\circ \text{ A}$$

$$I_B = 131,6 \angle (-36,8^\circ - 120^\circ) = 131,6 \angle -156,8^\circ \text{ A}$$

$$I_C = 131,6 \angle (-36,8^\circ - 240^\circ) = 131,6 \angle -276,8^\circ \text{ A}$$

b). Daya kompleks 3 fasa adalah

$$S_{3f} = 3V_{AB}I_{AB}^* = 3 \times 380 \angle 30^\circ \times 76 \angle +6,8^\circ = 86,64 \angle 36,8^\circ = 69,3 + j52 \text{ kVA}$$

Jika kita mengkaji ulang nilai P_{3f} dan Q_{3f} , dengan menghitung daya yang diserap resistansi dan reaktansi beban, akan kita peroleh:

$$P_{3f} = 3 \times R \times |I_{AB}|^2 = 3 \times 4 \times (76)^2 = 69,3 \text{ kW} \quad ; \quad Q_{3f} = 3 \times X \times |I_{AB}|^2 = 3 \times 3 \times (76)^2 = 52 \text{ kVAR}$$

Jika kita bandingkanlah *besarnya* arus saluran, arus fasa, dan daya tiga fasa yang diserap beban pada hubungan Y dan Δ pada dua contoh 5.27 dan 5.28 kita peroleh gambaran seperti dalam tabel berikut.

	Hubungan Y	Hubungan Δ
Arus saluran I_s	$ I_A = 44 \text{ A}$	$ I_A = 131,6 \text{ A}$
Arus per fasa I_f	$ I_A = 44 \text{ A}$	$ I_{AB} = 76 \text{ A}$
Daya total $ S_{3f} $	29 kVA	86,64 kVA

Dari tabel ini terlihat bahwa pada hubungan Y arus fasa maupun arus saluran serta daya lebih rendah dari arus dan daya pada hubungan Δ . Inilah prinsip starter Y- Δ untuk motor asinkron. Motor di-start pada hubungan Y kemudian hubungan

diubah ke Δ setelah motor berjalan. Dengan demikian arus pada waktu *start* tidak terlalu tinggi.

CONTOH 5.30 : Sebuah beban seimbang terhubung Y. Arus di fasa A adalah $I_A = 100 \angle -30^\circ \text{ A rms}$, dan tegangan jala-jala $V_{AB} = 380 \angle 30^\circ \text{ V rms}$. Tentukanlah impedansi per fasa.

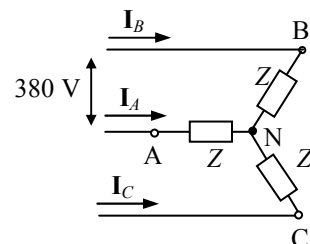
Penyelesaian :

Tegangan fasa-netral adalah

$$V_{AN} = \frac{V_{AB}}{\sqrt{3}} \angle (\theta_v - 30^\circ) = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle (30^\circ - 30^\circ) = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Impedansi per fasa adalah

$$Z = \frac{V_{AN}}{I_A} = \frac{220 \angle 0^\circ}{100 \angle -30^\circ} = 2,2 \angle 30^\circ = 1,9 + j1,1 \ \Omega$$



CONTOH 5.31 : Sebuah beban seimbang terhubung Δ . Arus di saluran fasa A adalah $I_A = 100\angle -30^\circ$ A rms, dan tegangan jala-jala $V_{AB} = 380\angle 30^\circ$ V rms. Tentukanlah impedansi per fasa.

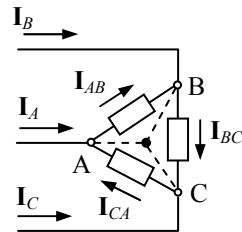
Penyelesaian :

Karena beban terhubung Δ , arus fasa tidak sama dengan arus saluran. Untuk menghitung impedansi di fasa AB, kita harus menentukan lebih dulu arus di fasa ini

$$I_{AB} = \frac{I_A}{\sqrt{3}} \angle (\theta_i + 30^\circ) = \frac{100}{\sqrt{3}} \angle (-30^\circ + 30^\circ) = 57,7\angle 0^\circ$$

Impedansi per fasa

$$Z = \frac{V_{AB}}{I_{AB}} = \frac{380\angle 30^\circ}{57,7\angle 0^\circ} = 6,6\angle 30^\circ = 5,7 + j3,3 \Omega$$



SOAL-SOAL : SISTEM TIGA FASA SEIMBANG

1. Jika tegangan fasa-netral pada suatu rangkaian tiga fasa ABC yang terhubung Y adalah 220 V rms, tuliskan fasor-fasor tegangan fasa-netral dan tegangan fasa-fasa dengan mengambil tegangan fasa-netral V_{AN} sebagai fasor referensi. Urutan fasa adalah positif. Gambarkan pula diagram fasor tegangan-tegangan tersebut.
2. Jika tegangan fasa-fasa dalam suatu rangkaian tiga fasa ABC yang terhubung Y adalah 380 V rms, tuliskan fasor-fasor tegangan fasa-netral dan tegangan fasa-fasa dengan mengambil tegangan fasa-fasa V_{AB} sebagai fasor referensi. Urutan fasa adalah positif. Gambarkan pula diagram fasor tegangan-tegangan tersebut.
3. Jika arus fasa dalam suatu rangkaian tiga fasa ABC yang terhubung Δ adalah 22 A rms, tuliskan fasor-fasor arus fasa dan arus fasa saluran dengan mengambil arus fasa I_{AB} sebagai fasor referensi. Urutan fasa adalah positif. Gambarkan pula diagram fasor arus-arus tersebut.
4. Suatu beban tiga fasa seimbang terhubung Y mempunyai impedansi per fasa $8 + j6 \Omega$, dihubungkan pada jaringan tiga fasa ABC yang bertegangan fasa-fasa 380 V rms. Urutan fasa positif. Hitung arus saluran dan gambarkan diagram fasor arus saluran dengan mengambil tegangan fasa-netral V_{AN} sebagai referensi. Berapakah daya kompleks total yang diserap beban ?
5. Suatu beban tiga fasa seimbang terhubung Δ mempunyai impedansi per fasa $20\angle 30^\circ \Omega$, dihubungkan pada jaringan tiga fasa yang bertegangan fasa-fasa 380 V rms. Urutan fasa positif. Hitung arus saluran dan gambarkan diagram fasor arus saluran dengan mengambil tegangan fasa-fasa V_{AB} sebagai referensi. Berapakah daya kompleks total yang diserap beban ?
6. Suatu saluran tiga fasa ABC mencatu sebuah beban yang terhubung Y. Arus saluran adalah $I_A = 22\angle -30^\circ$ A rms sedangkan tegangan fasa-fasa $V_{AB} = 380\angle 30^\circ$ V rms. Anggaplah urutan fasa positif. Hitunglah impedansi per fasa beban. Hitung daya kompleks (3 fasa) yang diserap beban dan faktor dayanya.

Analisis Daya Pada Sistem Tiga Fasa

Pada dasarnya analisis daya sistem tiga fasa tidak berbeda dengan sistem satu fasa. Kita akan melihat dalam contoh-contoh berikut ini.

CONTOH 5.32 : Sebuah beban tiga fasa seimbang terhubung Y, menyerap daya 50 kVA pada faktor daya 0,9 lagging. Jika tegangan fasa-fasa pada saluran adalah $V_{LL} = 480$ V rms, hitunglah: a). besarnya arus saluran; b). resistansi dan reaktansi beban per fasa.

Penyelesaian :

a). Dalam soal ini kita hanya diminta untuk menghitung *besarnya* arus saluran tanpa mempersoalkan sudut fasanya. Dengan diketahuinya tegangan fasa-fasa daya, arus ini dapat dihitung melalui hubungan daya, yaitu

$$S_{3f} = 3V_{fn} \mathbf{I}_f^* = 3 \times V_{fn} \angle \theta_v \times I_f \angle -\theta_i = 3V_{fn} I_f \angle (\theta_v - \theta_i)$$

$$\Rightarrow |S_{3f}| = 3V_{fn} I_f = V_{ff} I_f \sqrt{3}$$

Daya tiga fasa inilah yang diketahui yaitu $|S_{3f}| = 50$ kVA. Tegangan fasa-fasa juga diketahui, $V_{ff} = 480$ V. Karena beban terhubung Y, maka arus saluran sama dengan arus fasa, jadi

$$I_s = I_f = \frac{|S_{3f}|}{V_{ff} \sqrt{3}} = \frac{50000}{480 \sqrt{3}} = 60 \text{ A}$$

b). Karena faktor daya juga diketahui, maka dengan mudah kita dapat menghitung daya rata-rata P dan daya reaktif Q . Kemudian dari nilai yang didapat ini kita menghitung resistansi dan reaktansi beban.

$$P = |S_{3f}| \cos \phi = 50 \times 0,9 = 45 \text{ kW} ;$$

$$Q = |S_{3f}| \sin \phi = 50 \times 0,436 = 21,8 \text{ kVAR}$$

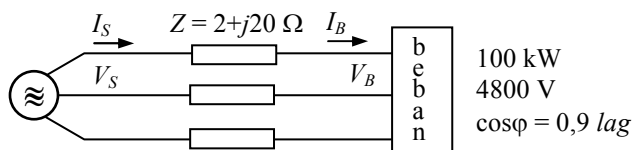
$$\Rightarrow S_{3f} = 45 + j21,8 \text{ kVA} \Rightarrow S_{per \text{ fasa}} = \frac{S_{3f}}{3} = 15 + j7,3 \text{ kVA}$$

Dari daya perfasa dan arus fasa, kita peroleh impedansi, resistansi, dan reaktansi

$$Z = \frac{S_{per \text{ fasa}}}{|I_f|^2} = \frac{(15 + j7,3) \times 1000}{(60)^2} = 4,16 + j2,03$$

$$\Rightarrow R = 4,16 \ \Omega ; \ X = 2,03 \ \Omega$$

CONTOH 5.33 : Sebuah beban 100 kW dengan faktor daya 0,8 lagging, dihubungkan ke jala-jala tiga fasa dengan tegangan fasa-fasa 4800 V rms. Impedansi saluran antara sumber dan beban per fasa adalah $2 + j20 \ \Omega$. Berapakah daya kompleks yang harus dikeluarkan oleh sumber dan pada tegangan berapa sumber harus bekerja ?



Penyelesaian :

Dalam persoalan ini, beban 100 kW dihubungkan pada jala-jala 4800 V, artinya tegangan beban harus 4800 V. Karena saluran antara sumber dan beban mempunyai impedansi, maka sumber tidak hanya memberikan daya ke beban saja, tetapi juga harus mengeluarkan daya untuk mengatasi rugi-rugi di saluran. Sementara itu, arus yang dikeluarkan oleh sumber harus sama dengan arus yang melalui saluran dan sama pula dengan arus yang masuk ke beban, baik beban terhubung Y ataupun Δ .

Daya beban :

$$P_B = 100 \text{ kW} = |S_B| \cos \varphi \rightarrow |S_B| = \frac{100}{0,8} = 125 \text{ kVA}$$

$$Q_B = |S_B| \sin \varphi = 125 \times 0,6 = 75 \text{ kVAR}$$

$$\Rightarrow S_B = P_B + jQ_B = 100 + j75 \text{ kVA}$$

Besarnya arus yang mengalir ke beban dapat dicari karena tegangan beban diketahui harus 4800 V :

$$P_B = V_B I_B \cos \varphi \sqrt{3} \rightarrow I_B = \frac{100}{4800 \times 0,8 \times \sqrt{3}} = 15 \text{ A}$$

Daya kompleks yang diserap saluran adalah tiga kali (karena ada tiga kawat saluran) tegangan jatuh di saluran kali arus saluran konjugat, atau tiga kali impedansi saluran kali pangkat dua besarnya arus :

$$S_{sal} = 3V_{sal} \mathbf{I}_{sal}^* = 3Z \mathbf{I}_{sal} \mathbf{I}_{sal}^* = 3Z |\mathbf{I}_{sal}|^2 = 3ZI_{sal}^2$$

Jadi
$$S_{sal} = 3 \times (2 + j20) \times 15^2 = 1350 + j13500 \text{ VA} = 1,35 + j13,5 \text{ kVA}$$

Jadi daya total yang harus dikeluarkan oleh sumber adalah

$$S_S = S_B + S_{sal} = 100 + j75 + 1,35 + j13,5 \text{ kVA} = 101,35 + j88,5 \text{ kVA}$$

$$|S_S| = \sqrt{101,35^2 + 88,5^2} = 134,5 \text{ kVA}$$

Dari daya total yang harus dikeluarkan oleh sumber ini kita dapat menghitung tegangan sumber karena arus yang keluar dari sumber harus sama dengan arus yang melalui saluran ke sumber.

$$|S_S| = V_S I_S \sqrt{3} = V_S I_B \sqrt{3} \Rightarrow V_S = \frac{|S_S|}{I_B \sqrt{3}} = \frac{134,5 \times 1000}{15 \sqrt{3}} = 5180 \text{ V rms}$$

SOAL-SOAL : ANALISIS DAYA PADA SISTEM TIGA FASA SEIMBANG

1. Sebuah beban tiga fasa terhubung Y menyerap daya 5 kVA dengan faktor daya 0,9 *lagging* dari saluran tiga fasa 380 V rms (fasa-fasa). Hitung arus fasa dan hitung resistansi serta reaktansi per fasa beban.
2. Sebuah beban tiga fasa terhubung Δ menyerap daya 5 kVA dengan faktor daya 0,9 *lagging* dari saluran tiga fasa 380 V rms (fasa-fasa). Hitung arus fasa, arus saluran, dan hitung resistansi serta reaktansi per fasa beban.
3. Dua buah beban tiga fasa dihubungkan paralel pada saluran tiga fasa bertegangan 380 V rms (fasa-fasa). Beban pertama terhubung Y menyerap daya 25 kVA pada faktor daya 0,8 *lagging*. Beban kedua terhubung Δ mempunyai impedansi per fasa $40 + j0 \Omega$. Hitung arus saluran, daya total serta faktor dayanya.
4. Dua beban pada soal 3 terletak di satu lokasi. Beban-beban tersebut dicatu dari sumber dengan menggunakan saluran yang impedansi per fasanya $0,6 + j4 \Omega$. Berapa daya yang diserap saluran ? Berapa daya yang harus disediakan oleh sumber ? Pada tegangan berapa sumber harus beroperasi agar tegangan pada beban dipertahankan 380 V rms (fasa-fasa).
5. Sebuah generator tiga fasa membangkitkan tegangan fasa-netral 2400 V rms. Impedansi internal generator ini adalah $j2 \Omega$ per fasa. Generator ini mencatu beban melalui saluran tiga fasa yang mempunyai impedansi $1 + j5 \Omega$ per fasa. Beban yang dicatu terhubung Y dengan impedansi per fasa $80 + j60 \Omega$. Gambarkan diagram rangkaian ini. Hitunglah : (a) arus di saluran; (b) tegangan di terminal beban; (c) daya kompleks yang diberikan oleh generator dan yang diserap oleh beban; (d) efisiensi saluran.
6. Sebuah beban tiga fasa mempunyai impedansi per fasa $9 + j21 \Omega$, beroperasi pada tegangan fasa-fasa 380 Vrms. Beban ini dicatu dari sumber melalui saluran yang impedansinya $2 + j4 \Omega$ per fasa. Hitunglah daya yang diberikan oleh sumber dan daya yang diserap beban jika: (a) beban dihubungkan Y; (b) beban dihubungkan Δ .
7. Sebuah pabrik dicatu dari jaringan tiga fasa, 380 V rms (f-f), 50 Hz. Beban terdiri dari 10 buah motor induksi, masing-masing 10 HP dengan efisiensi 85% pada beban penuh dan faktor daya 0,85 *lagging*, dan 800 buah lampu pijar masing-masing 50 W, 220 V. Dengan menganggap semua beban seimbang, dan seluruh motor beroperasi dan seluruh lampu menyala, hitunglah daya dan faktor daya total seluruh beban.
8. Sebuah beban tiga fasa menyerap daya kompleks sebesar $S = 16 + j12$ kVA dan beroperasi pada tegangan fasa-fasa 440 V rms. (a) Tentukan besarnya arus saluran. (b) Jika impedansi saluran (antara sumber dan beban) adalah $Z_s = 0,6 + j4 \Omega$ per fasa, berapakah daya yang diserap saluran ? (c) Berapakah tegangan sumber ?

BAB 6

Rangkaian Magnetik

Rangkaian magnetik merupakan basis dari sebagian terbesar peralatan listrik di industri maupun rumah tangga. Motor dan generator dari yang bekemampuan kecil sampai yang sangat besar, berbasis pada medan magnet yang memungkinkan terjadinya konversi energi listrik. Di bab ini kita akan melihat hukum-hukum dasar, perhitungan dalam rangkaian magnetik, rugi-rugi dan gaya magnetik, induktor dan induktansi bersama.

Seperti halnya analisis rangkaian listrik yang dilandasi oleh beberapa hukum saja, yaitu hukum Ohm dan Hukum Kirchhoff, analisis rangkaian magnetik juga dilandasi oleh hanya beberapa hukum saja, yaitu hukum Faraday dan hukum Ampère. Pembahasan kita akan diawali oleh kedua hukum tersebut dan setelah itu kita akan melihat rangkaian magnetik, yang sudah barang tentu melibatkan material magnetik. Walaupun demikian, di bab ini kita tidak akan membahas mengenai material magnetik itu sendiri, melainkan hanya akan melihat pada hal-hal yang kita perlukan dalam kaitannya dengan analisis rangkaian magnetik. Kita juga hanya akan melibatkan beberapa jenis material saja yang telah sejak lama digunakan walaupun material jenis baru telah dikembangkan.

6.1. Hukum-Hukum

Tujuan : • Memahami hukum-hukum yang mendasari analisis rangkaian magnetik

Hukum Faraday

Pada 1831 Faraday (1791-1867) menunjukkan bahwa listrik dapat dibangkitkan dari magnet. Dari kumpulan catatan hasil percobaan yang dilakukan oleh Faraday, suatu formulasi matematis telah diturunkan untuk menyatakan hukum Faraday, yaitu :

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} \quad (6.1)$$

dengan e menunjukkan tegangan induksi [volt] pada suatu kumparan, dan λ adalah fluksi lingkup yang dicakup oleh kumparan. Jika kumparan mempunyai N lilitan dan setiap lilitan mencakup fluksi magnet sebesar ϕ [weber], maka fluksi lingkup adalah $\lambda = N\phi$ [weber-lilitan] dan (6.1) menjadi

$$e = -N\frac{d\phi}{dt} \quad (6.2)$$

Tanda negatif pada (6.1) diberikan oleh Emil Lenz, yang setelah melanjutkan percobaan Faraday menunjukkan bahwa arah arus induksi selalu sedemikian rupa sehingga terjadi perlawanan terhadap aksi yang menimbulkannya. Reaksi demikian ini disebut ***hukum Lenz***.

Hukum Ampère

André Marie Ampère (1775 – 1836), melakukan percobaan yang terkenal dalam kaitan kemagnitan, yaitu mengenai timbulnya gaya mekanis antara dua kawat paralel yang dialiri arus listrik. Basarnya gaya F dinyatakan secara matematis sebagai

$$F = \frac{\mu l}{2\pi r} I_1 I_2 \quad (6.3)$$

dengan I_1 dan I_2 adalah arus di masing-masing konduktor, l adalah panjang konduktor, dan r menunjukkan jarak antara sumbu kedua konduktor dan besaran μ merupakan besaran yang ditentukan oleh medium dimana kedua kawat tersebut berada.

Arus I_2 dapat dipandang sebagai pembangkit suatu besaran medan magnet di sekeliling kawat yang dialirinya yang besarnya adalah

$$B = \frac{\mu I_2}{2\pi r} \quad (6.4)$$

Hasil ini juga diamati oleh dua peneliti Perancis yaitu J.B. Biot dan F. Savart. Dengan (6.4), maka (6.3) menjadi lebih sederhana yaitu

$$F = B I l_1 \quad (6.5)$$

Persamaan (6.5) ini berlaku jika kedua kawat adalah sebidang. Jika kawat ke-dua membentuk sudut θ dengan kawat pertama maka (6.5) menjadi

$$F = B I l_1 \sin \theta \quad (6.6)$$

Secara umum (6.6) dapat ditulis

$$F = K_B B I f(\theta) \quad (6.7)$$

dengan $f(\theta)$ adalah suatu fungsi sudut antara medan B dan arus I , dan K_B adalah suatu konstanta untuk memperhitungkan berbagai faktor, seperti misalnya panjang kawat. Besaran B mempunyai satuan [weber/meter²]; hal ini dapat diturunkan sebagai berikut.

Menurut (6.5), satuan B adalah : $[B] = \frac{[newton]}{[amp] \times [meter]}$

sedangkan $[newton] = \frac{[energi]}{[panjang]} = \frac{[watt] \cdot [detik]}{[meter]} = \frac{[volt][amp][detik]}{[meter]}$

sehingga $[B] = \frac{[volt][amp][detik]}{[amp][meter^2]} = \frac{[volt][detik]}{[meter^2]} = \frac{[weber]}{[meter^2]}$.

Jadi B menunjukkan kerapatan fluksi magnet dengan satuan [weber/m²] atau [tesla]. Arah B ditentukan sesuai dengan *kaidah tangan kanan* yang menyatakan bahwa : jika kawat yang dialiri arus digenggam dengan tangan kanan dengan ibu jari mengarah sejajar aliran arus maka arah B adalah sesuai dengan arah penunjukan jari-jari yang menggenggam kawat tersebut.

Permeabilitas. Dalam persamaan (6.3), μ mewakili sifat medium tempat kedua konduktor berada; besaran ini disebut *permeabilitas*. Untuk ruang hampa, permeabilitas ini adalah

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (6.8)$$

dengan satuan $\frac{[henry]}{[meter]}$. Hal ini dapat diturunkan sebagai berikut.

$$[\mu_0] = \frac{[newton]}{[amp^2]} = \frac{[volt][amp][detik]}{[amp^2][meter]} = \frac{[volt][detik]}{[amp][meter]} = \frac{[henry]}{[meter]}$$

karena $\frac{[volt][detik]}{[amp]} = [henry]$ yaitu satuan induktansi.

Dalam hal mediumnya bukan vakum maka permeabilitasnya dinyatakan sebagai

$$\mu = \mu_r \times \mu_0 \quad (6.9)$$

dengan μ_r adalah permeabilitas relatif, yang merupakan perbandingan antara permeabilitas medium terhadap vakum.

Intensitas Medan Magnet. Dalam perhitungan-perhitungan rangkaian magnetik, akan lebih mudah jika kita bekerja dengan besaran magnetik yang tidak tergantung dari medium. Hal ini terutama kita temui pada mesin-mesin listrik dimana fluksi magnet menembus berbagai macam medium. Oleh karena itu didefinisikan besaran yang disebut *intensitas medan magnet*, yaitu

$$H \equiv \frac{B}{\mu} \quad (6.10)$$

dengan satuan $[H] = \frac{[\text{newton}]/[\text{amp}][\text{meter}]}{[\text{newton}]/[\text{amp}^2]} = \frac{[\text{amp}]}{[\text{meter}]}$.

Dengan pendefinisian ini, H merupakan besaran yang tidak tergantung dari medium. Secara umum satuan H adalah $[\text{lilitan ampere}]/[\text{meter}]$ dan bukan $[\text{amp}]/[\text{meter}]$ agar tercakup pembangkitan medan magnet oleh belitan yang terdiri dari banyak lilitan.

Hukum Rangkaian Magnetik Ampère

Hukum rangkaian magnetik Ampère menyatakan bahwa integral garis tertutup dari intensitas medan magnet sama dengan jumlah arus (ampere turns) yang membangkitkannya. Hukum ini dapat dituliskan sebagai

$$\oint H dl = F_m \quad (6.11)$$

F_m dipandang sebagai besaran pembangkit medan magnet dan disebut *magnetomotive force* yang disingkat *mmf*. Besaran ini sama dengan jumlah ampere-turn yang dilingkupi oleh garis fluksi magnet yang tertutup.

Dari relasi di atas, diturunkan relasi-relasi yang sangat bermanfaat untuk perhitungan rangkaian magnetik. Jika panjang total dari garis fluksi magnet adalah L , maka total F_m yang diperlukan untuk membangkitkan fluksi tersebut adalah

$$F_m = H L = \frac{B}{\mu} L \quad (6.12)$$

Apabila kerapatan fluksi adalah B dan fluksi menembus bidang yang luasnya A , maka fluksi magnetnya adalah

$$\phi = BA \quad (6.13)$$

dan jika (6.13) dimasukkan ke (6.12) akan diperoleh

$$F_m = H L = \phi \left(\frac{L}{\mu A} \right) \quad (6.14)$$

Apa yang berada dalam tanda kurung pada (6.14) ini sangat menarik, karena sangat mirip dengan formula resistansi dalam rangkaian listrik. Persamaan (6.14) ini dapat kita tuliskan

$$\phi = \left(\frac{\mu A}{L} \right) F_m = \frac{F_m}{\mathfrak{R}} \quad (6.15)$$

Pada (6.15) ini, F_m merupakan besaran yang menyebabkan timbulnya fluksi magnet ϕ . Besarnya fluksi ini dibatasi oleh suatu besaran \mathfrak{R} yang kita sebut *reluktansi* dari rangkaian magnetik, dengan hubungan

$$\mathfrak{R} = \frac{L}{\mu A} \quad (6.16)$$

Persamaan (6.15) sering disebut sebagai hukum Ohm untuk rangkaian magnetik. Namun kita tetap harus ingat bahwa penurunan relasi ini dilakukan dengan pembatasan bahwa B adalah konstan dan A tertentu. Satuan dari reluktansi *tidak diberi nama khusus*.

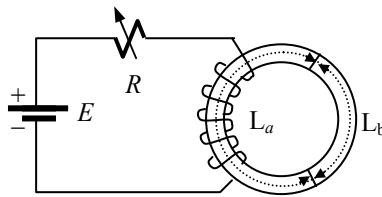
6.2. Perhitungan Pada Rangkaian Magnetik

Tujuan : • Mampu melakukan perhitungan pada rangkaian magnetik.

Perhitungan-perhitungan pada rangkaian magnetik pada umumnya melibatkan material ferromagnetik. Perhitungan ditujukan pada dua kelompok permasalahan, yaitu mencari *mmf* jika fluksi ditentukan (permasalahan ini kita jumpai pada perancangan) mencari *fluksi* ϕ apabila geometri dari rangkaian magnetik serta *mmf* diketahui (permasalahan ini kita jumpai

dalam analisis, misalnya jika kita harus mengetahui fluksi gabungan dari suatu rangkaian magnetik yang dikendalikan oleh lebih dari satu belitan). Berikut ini kita akan melihat perhitungan-perhitungan rangkaian magnetik melalui beberapa contoh.

CONTOH 6.1 : Suatu toroid terdiri dari dua macam material ferromagnetik dengan belitan pembangkit medan magnet yang terdiri dari 100 lilitan, seperti terlihat pada gambar di



samping ini. Material a adalah besi nikel (nickel iron) dengan panjang rata-rata $L_a = 0.4$ m. Material b adalah baja silikon (medium silicon sheet steel) dengan panjang rata-rata $L_b = 0.2$ m. Kedua bagian itu mempunyai luas penampang sama, yaitu 0.001 m². a). Tentukan F_m yang diperlukan untuk membangkitkan fluksi $\Phi = 6 \times 10^{-4}$ weber. b). Hitung

arus yang harus mengalir pada belitan agar nilai fluksi tersebut tercapai.

Penyelesaian :

Untuk memperoleh F_m total yang diperlukan kita aplikasikan hukum rangkaian Ampère pada rangkaian magnetik ini.

$$F_m \text{ total} = F_m a + F_m b = H_a L_a + H_b L_b$$

Fluksi yang diinginkan di kedua bagian toroid adalah 6×10^{-4} weber, sedangkan kedua bagian itu mempunyai luas penampang sama. Jadi kerapatan fluksi di kedua bagian itu

juga sama yaitu $B_a = B_b = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.0006}{0.001} = 0.6$ tesla

Untuk mencapai kerapatan fluksi tersebut, masing-masing material memerlukan intensitas medan yang berbeda. Besarnya intensitas medan yang diperlukan dapat dicari melalui kurva $B-H$ dari masing-masing material, yang dapat dilihat di buku acuan. Salah satu kurva $B-H$ yang dapat kita peroleh adalah seperti dikutip pada Gb.6.1 di halaman berikut.

Dengan menggunakan kurva $B-H$ ini, kita peroleh

Material a : untuk $B_a = 0.6$ tesla diperlukan $H_a = 10$ AT/m

Material b : untuk $B_b = 0.6$ tesla diperlukan $H_b = 65$ AT/m

Dengan demikian F_m total yang diperlukan adalah

$$F_m \text{ total} = H_a L_a + H_b L_b = 10 \times 0.4 + 65 \times 0.2 = 17 \text{ AT}$$

b). Karena jumlah lilitan adalah 100, maka besar arus yang harus mengalir di belitan untuk memperoleh $F_m \text{ total}$ sebesar 17 AT adalah

$$I = \frac{17}{100} = 0.17 \text{ A}$$

Pemahaman :

Dalam pemecahan persoalan di atas, karakteristik medium tidak dinyatakan oleh permeabilitas medium, melainkan oleh karakteristik $B-H$ dari masing-masing material. Kita lihat dari kutipan kurva $B-H$ Gb.6.1., bahwa hubungan antara B dan H adalah *tidak linier*. Apabila kita menginginkan gambaran mengenai besarnya permeabilitas masing-masing material, kita dapat menghitungnya sebagai berikut.

Permeabilitas dari material a dan b masing-masing *pada titik operasi ini* adalah

$$\mu_a = \frac{B_a}{H_a} = \frac{0.6}{10} = 0.06 \text{ henry/meter} \rightarrow \mu_{ra} = \frac{\mu_a}{\mu_0} = \frac{0.06}{4\pi \times 10^{-7}} = 47740$$

$$\mu_b = \frac{B_b}{H_b} = \frac{0.6}{65} = 0.0092 \text{ henry/meter} \rightarrow \mu_{rb} = \frac{\mu_b}{\mu_0} = \frac{0.0092}{4\pi \times 10^{-7}} = 7340$$

Reluktansi rangkaian magnetik pada bagian toroid dengan material a dan b masing-masing dapat juga kita hitung, yaitu

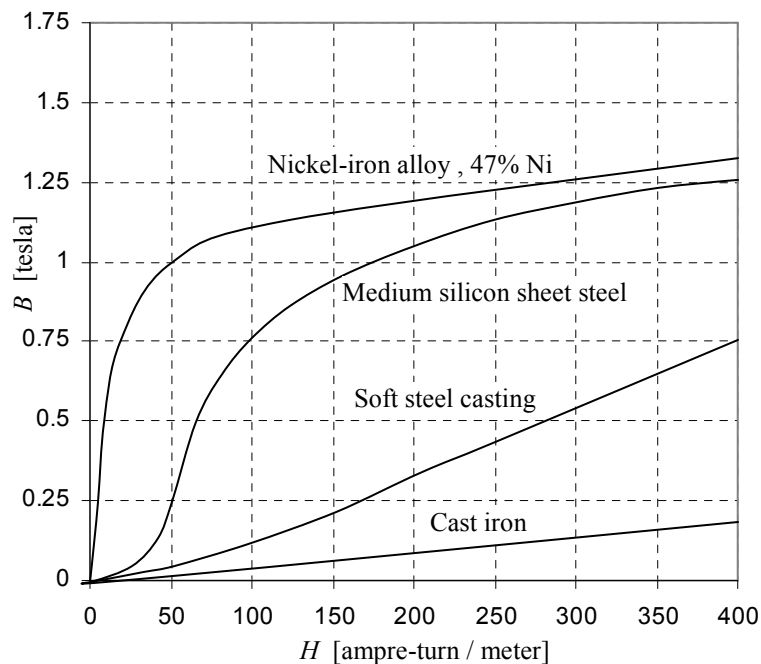
$$\mathfrak{R}_a = \frac{F_{m a}}{\phi} = \frac{4}{0.6 \times 0.001} \approx 6670 \quad ; \quad \mathfrak{R}_b = \frac{F_{m b}}{\phi} = \frac{13}{0.6 \times 0.001} \approx 21670$$

Jadi walaupun bagian b dari toroid lebih pendek dari bagian a , reluktansinya jauh lebih besar. Kedua bagian rangkaian magnetik yang terhubung seri ini mempunyai reluktansi total sebesar $\mathfrak{R}_{tot} = \mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_b \approx 6670 + 21670 = 28340$.

Untuk meyakinkan, kita hitung balik besarnya fluksi magnet

$$\phi = \frac{F_{m total}}{\mathfrak{R}_{tot}} = \frac{17}{28340} = 6 \times 10^{-4} \text{ weber}$$

dan ternyata hasilnya sesuai dengan apa yang diminta dalam persoalan ini. Hasil ini menunjukkan bahwa reluktansi magnet yang dihubungkan seri berperilaku seperti resistansi yang terhubung seri pada rangkaian listrik; reluktansi total sama dengan jumlah reluktansi yang disajikan.



Gb.6.1. Kurva $B - H$ beberapa material.

CONTOH 6.2 : Pada rangkaian magnetik dalam contoh 6.1. di atas, berapakah fluksi magnet yang akan dibangkitkan bila arus pada belitan dinaikkan menjadi 0.35 A ?

Penyelesaian :

Dengan arus 0.35 A, $F_{m total}$ menjadi $F_{m total} = 100 \times 0.35 = 35 \text{ AT}$

Untuk menghitung besarnya fluksi yang terbangkit, kita perlu mengetahui reluktansi total. Untuk itu perlu dihitung reluktansi dari masing-masing bagian toroid. Hal ini tidak dapat dilakukan karena untuk menghitung reluktansi tiap bagian perlu diketahui F_m dan B untuk masing-masing bagian sedangkan untuk menghitungnya perlu diketahui besarnya fluksi ϕ yang justru ditanyakan.

Dari apa yang diketahui, yaitu $F_{m total}$ dan ukuran toroid, kita dapatkan hubungan

$$F_{m \text{ total}} = H_a L_a + H_b L_b = 0.4H_a + 0.2H_b = 35 \Rightarrow H_a = \frac{35 - 0.2H_b}{0.4}$$

Karena luas penampang di kedua bagian toroid sama, yaitu 0.001 m^2 , maka kerapatan fluksi B juga sama. Dengan batasan ini, kita mencoba menyelesaikan persoalan dengan cara mengamati kurva B - H . Kita perkirakan suatu nilai H_b dan menghitung H_a , kemudian kita mengamati lagi kurva B - H apakah untuk nilai H_a dan H_b ini terdapat $B_a = B_b$. Jika tidak, kita koreksi nilai H_b dan dihitung lagi H_a dan dilihat lagi apakah $B_a = B_b$. Jika tidak dilakukan koreksi lagi, dan seterusnya sampai akhirnya diperoleh $B_a \approx B_b$.

Kita mulai dengan $H_b = 100 \text{ AT}$ yang memberikan $H_a = 37.5$. Kedua nilai ini terkait dengan $B_b = 0.75$ dan $B_a = 0.9$ tesla. Ternyata $B_a \neq B_b$. Kita perbesar H_b agar H_a mengecil dan akan menyebabkan B_b bertambah dan B_a berkurang. Pada nilai $H_b = 110 \text{ AT}$, maka $H_a = 32.5$; dan terdapat $B_b = 0.8$ dan $B_a = 0.85$ tesla. Kita lakukan koreksi lagi dan akan kita dapatkan $B_a \approx B_b \approx 0.825$ pada nilai $H_b = 125$ dan $H_a = 25 \text{ AT}$. Dengan nilai ini maka besarnya fluksi adalah

$$\phi = B \times A = 0.825 \times 0.001 = 8.25 \times 10^{-4} \text{ weber.}$$

Perhitungan secara grafis ini tentu mengandung ketidak-telitian. Jika kesalahan yang terjadi adalah $\pm 5\%$, maka hasil perhitungan ini dapat dianggap memadai.

Pemahaman :

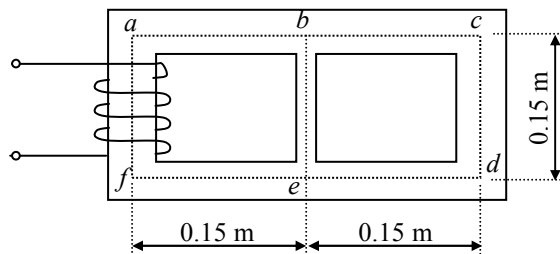
Jika kita bandingkan hasil pada contoh 6.1. dan 6.2. maka akan terlihat hal berikut.

contoh 6.1. : $I = 0.17 \text{ A} \rightarrow B = 0.6 \text{ tesla} \rightarrow \phi = 6 \times 10^{-4} \text{ weber}$

contoh 6.2. : $I = 0.35 \text{ A} \rightarrow B = 0.825 \text{ tesla} \rightarrow \phi = 8.25 \times 10^{-4} \text{ weber}$

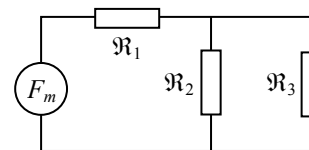
Menaikkan arus belitan menjadi dua kali lipat tidak menghasilkan fluksi dua kali. Hal ini disebabkan oleh karakteristik magnetisasi material yang tidak linier.

CONTOH 6.3 : Pada rangkaian magnetik di bawah ini, tentukanlah mmf yang diperlukan untuk membangkitkan fluksi sebesar 0.0014 weber di “kaki” sebelah kanan. Rangkaian magnetik ini mempunyai luas penampang sama yaitu 0.002 m^2 , kecuali “kaki” tengah yang luasnya 0.0008 m^2 . Material yang digunakan adalah medium silicon steel.



Penyelesaian :

Rangkaian magnetik ini mempunyai tiga cabang, yaitu cabang $efab$ dengan reluktansi \mathfrak{R}_1 ; be dengan reluktansi \mathfrak{R}_2 dan bcd dengan reluktansi \mathfrak{R}_3 .



Rangkaian ekuivalen dari rangkaian magnetik ini dapat digambarkan seperti di samping ini. Fluksi yang diminta di kaki kanan adalah $\phi_3 = 0.0014$ weber. Karena dimensi kaki ini diketahui maka kerapatan fluksi dapat dihitung,

$$\text{yaitu } B_3 = \frac{0.0014}{0.002} = 0.7 \text{ tesla.}$$

Berdasarkan kurva B - H dari material yang dipakai, kerapatan fluksi ini memerlukan H_3 sebesar 80 AT/m . Jadi mmf yang diperlukan adalah

$$F_{m3} = H_3 \times L_{bcde} = 80 \times (3 \times 0.15) = 36 \text{ AT}$$

Rangkaian ekivalen memperlihatkan bahwa \mathfrak{R}_2 terhubung paralel dengan \mathfrak{R}_3 . Hal ini berarti bahwa F_{m3} juga harus muncul pada \mathfrak{R}_2 , yaitu reluktansi kaki tengah, dengan kata lain $F_{m2} = F_{m3}$. Dengan demikian kita dapat menghitung H_2 .

$$H_2 = \frac{F_{m2}}{L_{be}} = \frac{F_{m3}}{L_{be}} = \frac{36}{0.15} = 240 \text{ AT/m}$$

Melihat lagi kurva B - H , kita dapatkan untuk H_2 ini $B_2 = 1.125$ tesla .

Luas penampang kaki tengah adalah 0.0008 m^2 . Maka

$$\phi_2 = B_2 \times 0.0008 = 1.125 \times 0.0008 = 0.0009 \text{ weber}$$

Fuksi total yang harus dibangkitkan di kaki kiri adalah

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 = 0.0014 + 0.0009 = 0.0023 \text{ weber}$$

Luas penampang kaki kiri adalah 0.002 m^2 , sama dengan kaki kanan. Kerapatan

fluksinya adalah $B_1 = \frac{\phi_1}{0.002} = \frac{0.0023}{0.002} = 1.15$ tesla

Dari kurva B - H , untuk B_1 ini diperlukan $H_1 = 240 \text{ AT/m}$, sehingga

$$F_{m1} = H_1 \times L_{efab} = 240 \times (3 \times 0.15) = 108 \text{ AT}$$

Jadi total mmf yang diperlukan untuk membangkitkan fluksi sebesar 0.0014 weber di

kaki kanan adalah $F_{mtot} = F_{m1} + F_{m2} + F_{m3} = 108 + 36 + 36 = 180 \text{ AT}$

CONTOH 6.4 : Berapakah mmf yang diperlukan pada contoh 6.3. jika kaki tengah ditiadakan?

Penyelesaian :

Dengan meniadakan kaki tengah maka fluksi di seluruh rangkaian magnetik sama dengan fluksi di kaki kanan, yaitu $\phi = \phi_3 = 0.0014$ weber. Kerapatan fluksi di seluruh rangkaian magnetik juga sama karena luas penampangnya sama, yaitu

$$B = B_3 = \frac{0.0014}{0.002} = 0.7 \text{ tesla}$$

Dari kurva B - H diperoleh $H = 80 \text{ AT/m}$, sehingga mmf yang diperlukan adalah

$$F_m = H \times L_{abcdefa} = 80 \times (6 \times 0.15) = 72 \text{ AT}$$

Pemahaman :

Dengan menghilangkan kaki tengah, mmf yang diperlukan menjadi lebih kecil. Bagaimanakah jika kaki tengah diperbesar luas penampangnya ?

Memperbesar penampang kaki tengah tidak mempengaruhi kerapatan fluksi di kaki ini sebab F_{m3} tetap harus muncul di kaki tengah. H_2 tak berubah, yaitu $H_2 = F_{m3}/L_{be} = 240 \text{ AT/m}$ dan B_2 juga tetap 1.125 tesla. Jika penampang kaki tengah diperbesar, ϕ_2 akan bertambah sehingga ϕ_1 juga bertambah. Hal ini menyebabkan naik-nya B_1 yang berarti naiknya H_1 sehingga F_{m1} akan bertambah pula. Dengan demikian $F_{m \text{ total}}$ akan lebih besar. Penjelasan ini menunjukkan seolah-olah kaki tengah berlaku sebagai “pembocor” fluksi. Makin besar kebocoran, makin besar mmf yang diperlukan.

6.3. Rugi-Rugi Dalam Rangkaian Magnetik

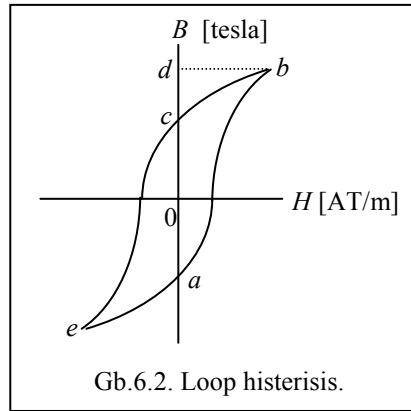
Tujuan : • Memahami dan mampu menghitung rugi-rugi dalam rangkaian magnetik.

Rugi Histerisis

Dalam rekayasa, material ferromagnetik sering dibebani dengan medan magnet yang berubah secara periodik dengan batas positif dan negatif yang sama. Pada pembebanan seperti ini terdapat kecenderungan bahwa kerapatan fluksi, B , ketinggalan dari medan magnetnya, H . Kecenderungan ini kita sebut *histerisis* dan kurva B - H tertutup seperti

terlihat pada Gb.6.2. kita sebut *loop histerisis*. Hal ini telah kita pelajari dalam fisika. Di sini kita akan membahas akibat dari karakteristik material seperti ini dalam rekayasa.

Loop histerisis ini menunjukkan bahwa untuk satu nilai H tertentu terdapat dua kemungkinan nilai B . Dalam memecahkan persoalan rangkaian magnetik pada contoh-contoh di sub-bab 6.2. kita menggunakan kurva $B-H$ yang kita sebut *kurva $B-H$ normal* atau *kurva magnetisasi normal*, dimana satu nilai H terkait dengan hanya satu nilai B , yaitu kurva $B-H$ pada Gb.6.1. Itulah sebabnya kesalahan perhitungan sebesar $\pm 5\%$ masih dapat kita terima jika kita menggunakan kurva $B-H$ normal karena sesungguhnya B tidak mempunyai nilai tunggal, melainkan tergantung dari riwayat magnetisasi material.



Gb.6.2. Loop histerisis.

Perhatikan integrasi : $\int_{B_a}^{B_b} HdB = \text{luas bidang } abda$; $\int_{B_b}^{B_c} HdB = \text{luas bidang } bdeb$

dan satuan dari HB : $[HB] = \frac{\text{ampere}}{\text{meter}} \times \frac{\text{newton}}{\text{ampere.meter}} = \frac{\text{newton}}{\text{meter}^2} = \frac{\text{newto} \cdot \text{meter}}{\text{meter}^3} = \frac{\text{joule}}{\text{meter}^3}$

Jelaslah bahwa HB mempunyai satuan kerapatan energi. Jadi luas bidang $abda$ pada Gb.6.2. menyatakan kerapatan energi, yaitu energi magnetik. Karena luas $abda$ diperoleh dari integrasi $\int HdB$ pada waktu H dan B naik, atau dengan kata lain medan magnet bertambah, maka ia menggambarkan kerapatan energi yang disimpan ke material. Luas bidang $bdeb$ yang diperoleh dari integrasi $\int HdB$ pada waktu medan magnet berkurang, menggambarkan kerapatan energi yang dilepaskan. Dari gambar loop histerisis jelas terlihat bahwa luas $bdeb <$ luas $abda$. Ini berarti bahwa kerapatan energi yang dilepaskan lebih kecil dari kerapatan energi yang disimpan. Sisa energi yang tidak dapat dilepaskan digambarkan oleh luas bidang $abca$, dan ini merupakan energi yang diserap oleh material dan tidak keluar lagi (tidak dimanfaatkan) sehingga disebut *rugi energi histerisis*.

Analisis di atas hanya memperhatikan setengah siklus saja. Untuk *satu siklus* penuh, kerapatan rugi energi histerisis adalah *luas bidang dari loop histerisis*. Jika kerapatan rugi energi histerisis per siklus (=luas loop histerisis) kita sebut w_h , dan jumlah siklus per detik (frekuensi) adalah f , maka untuk material dengan volume v m³ besarnya *rugi energi histerisis per detik* atau *rugi daya histerisis* adalah

$$P_h = w_h f v \left[\frac{\text{joule}}{\text{detik}} \right] = w_h f v \text{ [watt]} \quad (6.17)$$

Untuk menghindari perhitungan luas loop histerisis, Steinmetz memberikan formula empiris untuk *rugi daya histerisis* sebagai

$$P_h = v f (K_h B_m^n) \quad (6.18)$$

dengan B_m adalah nilai maksimum kerapatan fluksi, n mempunyai nilai antara 1.5 sampai 2.5 tergantung dari jenis material. K_h adalah konstanta yang juga tergantung dari jenis material; untuk cast steel 0.025, silicon sheet steel 0.001, permalloy 0.0001.

Rugi Arus Pusar

Jika medan magnet berubah terhadap waktu, selain rugi daya histerisis terdapat pula rugi daya yang disebut *rugi arus pusar*. Arus pusar timbul sebagai reaksi terhadap perubahan medan magnet. Jika material berbentuk blok, resistansi material menjadi kecil dan rugi arus pusar menjadi besar. Untuk memperbesar resistansi agar arus pusar kecil, rangkaian

magnetik disusun dari lembar-lembar material magnetik yang tipis (antara 0.3 ÷ 0.6 mm). Formula empiris untuk rugi arus pusar adalah

$$P_e = K_e f^2 B_m^2 \tau^2 v \text{ watt} \quad (6.19)$$

dengan K_e : konstanta yang tergantung dari jenis material; f : frekuensi (Hz); B_m : kerapatan fluksi maksimum; τ : tebal laminasi; v : volume material.

Perhatikan bahwa rugi arus pusar sebanding dengan pangkat dua dari frekuensi, sedangkan rugi histerisis sebanding dengan pangkat satu frekuensi. Rugi histerisis dan rugi arus pusar secara bersama-sama disebut *rugi-rugi inti*. Rugi-rugi inti akan menaikkan temperatur rangkaian magnetik dan akan menurunkan efisiensi peralatan.

6.4. Gaya Magnetik

Energi yang tersimpan dalam medan magnet dapat digunakan untuk melakukan kerja mekanik (misalnya menarik tuas rele). Untuk mempelajari bagaimana gaya ini dapat timbul, kurva $B-H$ normal yang tak linier seperti terlihat pada Gb.6.3.a. kita dekati dengan suatu kurva linier seperti pada Gb.6.3.b. Jika kita menaikkan H dari 0 ke H_1 , maka B naik dari 0 ke B_1 . Luas bidang $Oab0$ menyatakan kerapatan energi yang tersimpan dalam material, dan besarnya adalah

$$w_f = \frac{1}{2} B_1 H_1 \text{ joule/m}^3$$

Secara umum, dengan medan magnet sebesar H dalam suatu material akan terdapat kerapatan simpanan energi sebesar

$$w_f = \frac{1}{2} BH \text{ joule/m}^3 \quad (6.20)$$

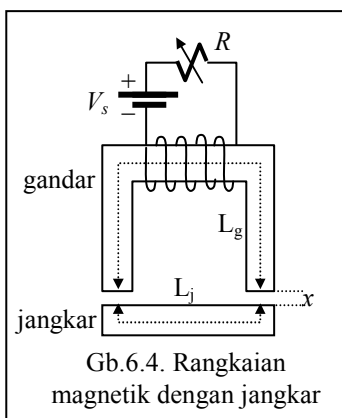
Perhatikan bahwa (6.20) kita peroleh *setelah kita melakukan linierisasi kurva B-H*.

Karena (6.20) menunjukkan kerapatan energi, maka jika kita kalikan dengan volume dari rangkaian magnetik kita akan mendapatkan energi total yang tersimpan dalam rangkaian tersebut. Misalkan luas penampang rangkaian A dan panjangnya L , maka energi total menjadi

$$W = \frac{1}{2} BHAL = \frac{1}{2} (BA)(HL) = \frac{1}{2} \phi F_m \text{ joule} \quad (6.21)$$

Antara fluksi ϕ dan F_m terdapat hubungan $\phi = F_m / \mathfrak{R}$, sehingga (6.21) dapat juga dituliskan

$$W = \frac{1}{2} \phi F_m = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{2} \phi^2 \mathfrak{R} \text{ joule} \quad (6.22)$$



Untuk memahami timbulnya gaya magnetik, kita lakukan percobaan dengan suatu rangkaian magnetik yang terdiri dari tiga bagian yaitu gandar, celah udara, dan jankar, seperti terlihat pada Gb.6.4. Rangkaian ini dicatu oleh sumber tegangan V_s yang diseriakan dengan resistor variabel R . Luas penampang gandar sama dengan luas penampang jankar. Untuk suatu kedudukan jankar tertentu, dengan V_s dan R tertentu, terjadi eksitasi sebesar F_m yang akan membuat simpanan energi dalam rangkaian magnetik ini sebesar

$$W = \frac{1}{2} (\phi_g^2 \mathfrak{R}_g + \phi_u^2 \mathfrak{R}_u + \phi_j^2 \mathfrak{R}_j) \quad (6.23)$$

Indeks g , u , dan j berturut-turut menunjukkan *gandar*, *udara* dan *jankar*. Karena ketiga bagian rangkaian

terhubung seri maka jika penyebaran fluksi di bagian pinggir (*fringing*) di celah udara di abaikan fluksi di ketiga bagian tersebut akan sama. Kerapatan fluksi juga akan sama di ketiga bagian tersebut. Dengan demikian maka persamaan (6.23) dapat kita tulis

$$W = \frac{1}{2} \phi^2 (\mathfrak{R}_g + \mathfrak{R}_u + \mathfrak{R}_j) = \frac{1}{2} \phi^2 \mathfrak{R}_{total} \quad (6.24)$$

Besarnya reluktansi total adalah

$$\mathfrak{R}_{total} = \frac{L_g}{\mu_g A} + \frac{L_j}{\mu_j A} + \frac{L_u}{\mu_0 A} \quad (6.25)$$

Karena kita melakukan linierisasi kurva $B-H$, maka permeabilitas material menjadi konstan. Hal ini ditunjukkan oleh kemiringan kurva $B-H$. Jadi μ_g dan μ_j dianggap konstan sedangkan permeabilitas udara dapat dianggap sama dengan μ_0 .

Percobaan pertama adalah memegang jangkar tetap pada tempatnya dan menambah eksitasi dengan menurunkan nilai resistor R sehingga arus catu naik. Eksitasi akan naik menjadi $(F_m + \Delta F_m)$ dan simpanan energi pada seluruh rangkaian magnetik akan naik pula. Artinya tambahan energi sebesar ΔW yang disebabkan oleh tambahan eksitasi sebesar ΔF_m tersimpan sebagai tambahan energi di semua bagian rangkaian yaitu gandar, jangkar dan celah udara.

Untuk percobaan kedua, kita kembalikan dulu eksitasi pada keadaan semula dengan mengembalikan R pada nilai semula sehingga eksitasi kembali menjadi F_m dan kita jaga konstan. Jangkar kita lepaskan sehingga celah udara menjadi $(x - \Delta x)$. Berkurangnya celah udara ini akan menyebabkan reluktansi \mathfrak{R}_u menurun sehingga secara keseluruhan \mathfrak{R}_{tot} juga menurun. Menurunnya \mathfrak{R}_{tot} akan memperbesar fluksi karena eksitasi F_m dipertahankan tetap. Ini berarti bahwa simpanan energi dalam rangkaian magnetik bertambah.

Pertambahan simpanan energi yang terjadi pada percobaan ke-dua ini berbeda dengan pertambahan energi pada percobaan pertama. Pada percobaan pertama pertambahan energi berasal dari pertambahan masukan, yaitu ΔF_m . Pada percobaan ke-dua, F_m dipertahankan tetap. Oleh karena itu satu-satunya kemungkinan pertambahan energi adalah dari gerakan jangkar. Jadi perubahan posisi jangkar memberikan tambahan simpanan energi dalam rangkaian magnetik. Penafsiran kita dalam peristiwa ini adalah bahwa perubahan posisi jangkar telah menurunkan energi potensial jangkar. Penurunan energi potensial jangkar itu diimbangi oleh naiknya simpanan energi pada rangkaian magnetik sesuai dengan prinsip konservasi energi.

Jika dx adalah perubahan posisi jangkar ($\Delta x \rightarrow 0$), F_x adalah gaya mekanik pada jangkar pada posisi x , maka perubahan energi potensial jangkar adalah

$$dW_j = F_x dx \quad (6.26)$$

Perubahan energi tersimpan dalam rangkaian magnetik adalah dW . Karena tidak ada masukan energi dari luar (sumber listrik) maka

$$dW_j + dW = F_x dx + dW = 0 \rightarrow F_x dx = -dW \quad (6.27)$$

Karena F_m kita jaga konstan, kita dapat memasukkan persamaan (6.22) bentuk yang ke-dua ke (6.27) sehingga kita peroleh

$$\begin{aligned} F_x dx = -dW &= -\frac{1}{2} d(F_m^2 \mathfrak{R}_{tot}^{-1}) \\ \rightarrow F_x &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (F_m^2 \mathfrak{R}_{tot}^{-1}) = -\frac{1}{2} \frac{F_m^2}{\mathfrak{R}_{tot}^2} \frac{d\mathfrak{R}_{tot}}{dx} = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{d\mathfrak{R}_{tot}}{dx} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dengan persamaan (6.28) ini kita dapat menghitung gaya mekanik pada jangkar rele elektromekanik, plunger, dan lain-lain peralatan listrik yang memanfaatkan gaya magnetik.

CONTOH 6.5 : Turunkanlah formulasi gaya magnetik pada rangkaian magnetik Gb.6.4 jika reluctansi inti besi, baik gandar maupun jangkar, diabaikan terhadap reluctansi celah udara.

Penyelesaian : Dengan hanya memperhitungkan reluctansi celah udara saja, maka

persamaan (6.28) menjadi
$$F_x = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{d\mathfrak{R}_u}{dx} = -\frac{1}{2}\phi^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{L_u}{\mu_0 A} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\phi^2}{\mu_0 A} \frac{dL_u}{dx}$$

Karena $\frac{dL_u}{dx} = -\frac{d(2x)}{dx} = -2$ maka $F_x = \frac{\phi^2}{\mu_0 A}$ newton

Pemahaman : Apakah pengabaian reluctansi inti besi terhadap reluctansi celah udara ini cukup wajar ? Kita akan melihatnya dengan ukuran nyata seperti berikut.

Misalkan panjang rata-rata gandar $L_g = 3 \times 15 \text{ cm} = 0.45 \text{ m}$. Panjang jangkar $L_j = 0.15 \text{ m}$. Luas penampang gandar maupun jangkar $A = (5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}) = 0.002 \text{ m}^2$. Dengan ukuran-ukuran ini maka reluctansi gandar dan jangkar adalah

$$\mathfrak{R}_g = \frac{L_g}{\mu_r \mu_0 A} = \frac{0.45}{\mu_r \mu_0 \times 0.002} = \frac{225}{\mu_r \mu_0} \quad ; \quad \mathfrak{R}_j = \frac{L_j}{\mu_r \mu_0 A} = \frac{0.15}{\mu_r \mu_0 \times 0.002} = \frac{75}{\mu_r \mu_0}$$

Dengan menganggap luas penampang sama dengan jangkar dan lebar celah 1 mm, maka

celah udara mempunyai reluctansi $\mathfrak{R}_u = \frac{L_u}{\mu_0 A} = \frac{2 \times 0.001}{\mu_0 \times 0.002} = \frac{1}{\mu_0}$

Perbandingan antara reluctansi celah udara dan jumlah reluctansi gandar dan jangkar

adalah : $\frac{\mathfrak{R}_u}{\mathfrak{R}_g + \mathfrak{R}_j} = \frac{1/\mu_0}{300/\mu_r \mu_0} = \frac{\mu_r}{300}$. Kalau kita mengambil nilai μ_r seperti pada hasil

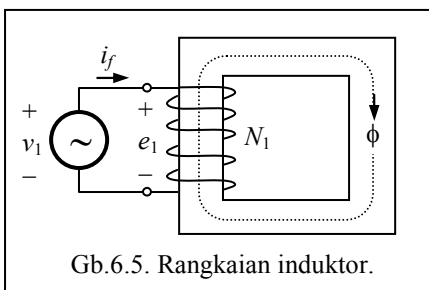
perhitungan dalam pemahaman contoh 6.1, yaitu untuk baja silikon $\mu_r = 7340$ dan untuk besi nickel $\mu_r = 47740$, maka

untuk baja silikon : $\frac{\mathfrak{R}_u}{\mathfrak{R}_g + \mathfrak{R}_j} = \frac{7340}{300} \approx 24$; untuk besi nickel : $\frac{\mathfrak{R}_u}{\mathfrak{R}_g + \mathfrak{R}_j} = \frac{47740}{300} \approx 159$.

Makin tinggi permeabilitas material yang kita pakai, reluctansi celah udara makin dominan sehingga reluctansi bagian yang lain wajar untuk tidak diperhitungkan.

6.5. Induktor

Tujuan : • Memahami dan mampu melakukan perhitungan-perhitungan pada induktor.



Perhatikan rangkaian induktor (Gb.6.5). Apabila resistansi belitan dapat diabaikan, maka menurut hukum Kirchhoff

$$-v_1 + e_1 = 0 \rightarrow v_1 = e_1 = L \frac{di_f}{dt} \quad (6.29)$$

Persamaan (6.29) adalah persamaan rangkaian listrik yang terdiri dari sumber v_1 dan beban induktor L . Tegangan e_1 adalah *tegangan jatuh pada induktor*, sesuai dengan konvensi pasif pada dalam analisis rangkaian listrik.

Sekarang kita lihat rangkaian magnetiknya dengan menganggap inti induktor ideal (luas kurva histeresis material inti sama dengan nol). Dalam rangkaian magnetik terdapat fluksi magnet ϕ yang ditimbulkan oleh arus i_f . Perubahan fluksi ϕ akan *membangkitkan* tegangan induksi pada belitan sesuai dengan hukum Faraday dan hukum Lenz.

$$e_t = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (6.30)$$

Tanda “-” pada (6.30) mempunyai arti bahwa tegangan induksi e_t harus mempunyai polaritas yang akan dapat memberikan arus pada rangkaian tertutup sedemikian rupa sehingga arus tersebut akan memberikan fluksi lawan terhadap fluksi pembangkitnya, yaitu ϕ . Menurut kaidah tangan kanan, polaritas tersebut adalah seperti polaritas e_1 pada Gb.6.5. Jadi tanda “-” pada (6.30) terpakai untuk menetapkan polaritas e_t sedangkan nilai e_t tentulah sama dengan tegangan jatuh e_1 . Jadi

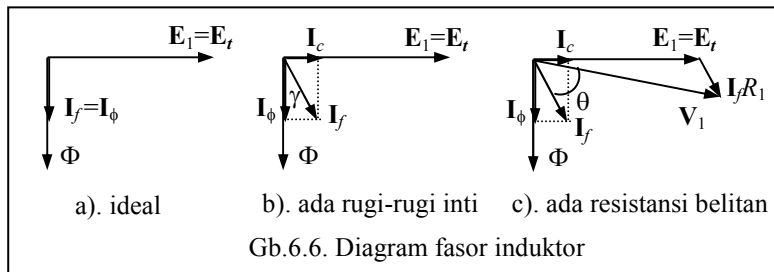
$$e_t = N_1 \frac{d\phi}{dt} = e_1 = L \frac{di_f}{dt} \quad (6.31)$$

Persamaan (6.31) menunjukkan bahwa ϕ dan i_f berubah secara bersamaan. Jika ϕ berbentuk sinus maka ia harus dibangkitkan oleh arus i_f yang juga berbentuk sinus dengan frekuensi sama dan mereka sefasa. Arus i_f sendiri berasal dari sumber tegangan yang juga harus berbentuk sinus. Jadi dalam sistem ini baik tegangan, arus maupun fluksi mempunyai frekuensi sama dan dengan demikian konsep fasor yang kita pelajari di Bab-5 dapat kita gunakan untuk melakukan analisis pada sistem ini yang terbangun dari rangkaian listrik dan rangkaian magnetik. Jika resistansi belitan diabaikan, persamaan (6.29) dan (6.31) dapat kita tulis dalam bentuk fasor sebagai

$$\mathbf{E}_1 = j\omega L \mathbf{I}_f \quad ; \quad \mathbf{E}_t = j\omega N_1 \Phi = \mathbf{E}_1 = j\omega L \mathbf{I}_f \quad (6.32)$$

dengan Φ adalah fluksi dalam bentuk fasor.

Dengan memperhatikan (6.32), diagram fasor tegangan, arus, dan fluksi dari induktor tanpa memperhitungkan rugi-rugi inti dan resistansi belitan adalah seperti pada Gb.6.6.a. dimana arus yang membangkitkan fluksi yaitu \mathbf{I}_ϕ sama dengan \mathbf{I}_f .



Dalam praktek, inti induktor tidaklah bebas dari rugi-rugi. Pada pembebanan siklis (dalam hal ini secara sinus) rugi-rugi inti menyebabkan fluksi yang dibangkitkan oleh i_f *ketinggalan* dari i_f sebesar γ yang disebut *sudut histerisis*. Keadaan ini diperlihatkan pada Gb.6.6.b. dimana arus magnetisasi \mathbf{I}_f mendahului ϕ sebesar γ . Melihat kenyataan ini, \mathbf{I}_f dapat dipandang sebagai terdiri dari dua komponen yaitu \mathbf{I}_ϕ yang diperlukan untuk membangkitkan ϕ , dan \mathbf{I}_c yang diperlukan untuk mengatasi rugi-rugi inti. Jadi arus magnetisasi menjadi $\mathbf{I}_f = \mathbf{I}_\phi + \mathbf{I}_c$. Komponen \mathbf{I}_c merupakan arus fiktif yang jika dikalikan dengan \mathbf{E}_1 akan memberikan rugi-rugi inti

$$P_c = I_c E_1 = E_1 I_f \cos(90^\circ - \gamma) \quad \text{watt} \quad (6.33)$$

Apabila resistansi belitan tidak dapat diabaikan, $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{E}_1$. Misalkan resistansi belitan adalah R_1 , maka

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{I}_f R_1 \quad (6.34)$$

Diagram fasor dari keadaan terakhir ini diperlihatkan oleh Gb.6.6.c. Dalam keadaan ini, daya masuk yang diberikan oleh sumber, selain untuk mengatasi rugi-rugi inti juga diperlukan untuk mengatasi daya pada belitan yang kita sebut *rugi-rugi tembaga*, P_{cu} .

Jadi

$$P_{in} = P_c + P_{cu} = P_c + I_f^2 R_1 = V_1 I_f \cos \theta \quad (6.35)$$

dengan V_1 dan I_f adalah nilai-nilai efektif dan $\cos \theta$ adalah faktor daya.

CONTOH 6.6 : Sebuah reaktor dengan inti besi mempunyai 400 lilitan. Reaktor ini dihubungkan pada jaringan bertegangan 115 volt, 60 Hz. Dengan mengabaikan resistansi belitan, hitung nilai maksimum fluksi magnetnya. Jika fluksi magnet dibatasi tidak boleh lebih dari 1.2 tesla, berapakah luas penampang intinya?

Penyelesaian :

Dengan mengabaikan resistansi belitan maka

$$E_1 = V_1 \rightarrow \frac{N_1 \omega \Phi_{maks}}{\sqrt{2}} = 115 \Rightarrow \Phi_{maks} = \frac{115 \sqrt{2}}{400 \times 2\pi \times 60} = 0.00108 \text{ weber}$$

Agar kerapatan fluksi tidak lebih dari 1.2 tesla maka

$$\frac{\Phi_{maks}}{A} \leq 1.2 \Rightarrow A \geq \frac{\Phi_{maks}}{1.2} = \frac{0.00108}{1.2} \text{ m}^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

Induktansi

Menurut (6.15) besarnya fluksi magnet adalah $\phi = \left(\frac{\mu A}{L}\right) F_m = \frac{F_m}{\mathfrak{R}}$.

Dengan mengabaikan fluksi bocor, $F_m = Ni$ dan jika ϕ ini dimasukkan ke (6.31) akan diperoleh

$$N_1 \frac{d\phi}{dt} = N_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{N_1 i_f}{\mathfrak{R}} \right) = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}} \frac{di_f}{dt} = L \frac{di_f}{dt}$$

sehingga
$$L = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}} = N_1^2 \left(\frac{\mu A}{L} \right) \tag{6.36}$$

Induktansi Bersama

Jika pada induktor Gb.6.5. kita tambahkan belitan kedua, maka pada belitan kedua ini akan diimbaskan tegangan oleh ϕ seperti halnya pada belitan pertama. Besarnya tegangan imbas ini adalah

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = N_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{N_1 i_f}{\mathfrak{R}} \right) = \frac{N_2 N_1}{\mathfrak{R}} \frac{di_f}{dt} \tag{6.37}$$

Jika belitan kedua ini tidak dialiri arus (dalam keadaan terbuka), kita tahu dari pembahasan di bab terdahulu mengenai induktansi bersama bahwa

$$e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_f}{dt} = M \frac{di_f}{dt}$$

sehingga kita peroleh induktansi bersama

$$M = \frac{N_2 N_1}{\mathfrak{R}} = N_2 N_1 \left(\frac{\mu A}{L} \right) \tag{6.38}$$

Pembahasan di atas memperlihatkan bahwa rangkaian induktor dapat kita analisis dari sudut pandang rangkaian listrik dengan mengaplikasikan hukum Kirchhoff yang kemudian menghasilkan persamaan (6.29). Kita dapat pula memandangnya sebagai rangkaian magnetik dan mengaplikasikan hukum Faraday dimana fluksi magnet yang berubah terhadap waktu (dibangkitkan oleh arus magnetisasi i_f) menimbulkan tegangan induksi pada belitan.

CONTOH 6.7 : Hitunglah resistansi dan induktansi selenoida (inti udara) dengan diameter rata-rata 1 cm dan panjangnya 1 m dan dengan 1000 lilitan kawat tembaga berdiameter 0,5 mm.

Penyelesaian :

$$\text{Induktansi : } L = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}} = N_1^2 \left(\frac{\mu A}{L} \right) = 10^6 \left(\frac{(4\pi \times 10^{-7}) \times (\pi 10^{-4} / 4)}{1} \right) = 98,6 \times 10^{-6} \text{ H}$$

$$\text{Resistansi : } R = \rho \frac{l}{A} = 0,0173 \times 10^{-6} [\Omega \cdot \text{m}] \frac{1000 \times \pi \times 10^{-2}}{\pi \times (0,5 \times 10^{-3})^2 / 4} = 2,77 \ \Omega$$

CONTOH 6.8 : Dua buah kumparan, masing-masing 1250 lilitan dan 140 lilitan, digulung pada *satu inti* magnetik yang mempunyai reluktansi 160 000. Hitung induktansi bersama, dengan mengabaikan fluksi bocor.

Penyelesaian :

$$\text{Induktansi bersama : } M = \frac{N_2 N_1}{\mathfrak{R}} = \frac{1250 \times 140}{160000} = 1,094 \approx 1,1 \text{ H}$$

CONTOH 6.9 : Dua kumparan (inti udara) masing-masing mempunyai 1000 lilitan diletakkan paralel sejajar sedemikian rupa sehingga 60% fluksi yang dibangkitkan oleh salah satu kumparan melingkupi kumparan yang lain. Arus sebesar 5 A di salah satu kumparan membangkitkan fluksi 0,05 mWb. Hitunglah induktansi masing-masing kumparan dan induktansi bersama.

Penyelesaian :

Arus 5 A membangkitkan fluksi 0,05 mWb. Dengan jumlah lilitan 1000 maka reluktansi dapat dihitung $\mathfrak{R} = \frac{1000 \times 5}{0,05 \times 10^{-3}} = 10^8$

$$\Rightarrow \text{Induktansi masing-masing } L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = \frac{1000^2}{10^8} = 10^{-2} \text{ H} = 10 \text{ mH.}$$

Fluksi yang melingkupi kumparan yang lain 60% dari fluksi yang dibangkitkan di salah satu kumparan. Reluktansi bersama adalah

$$\mathfrak{R}_M = \frac{\mathfrak{R}}{0,6} = \frac{10^8}{0,6} = 1,667 \times 10^8$$

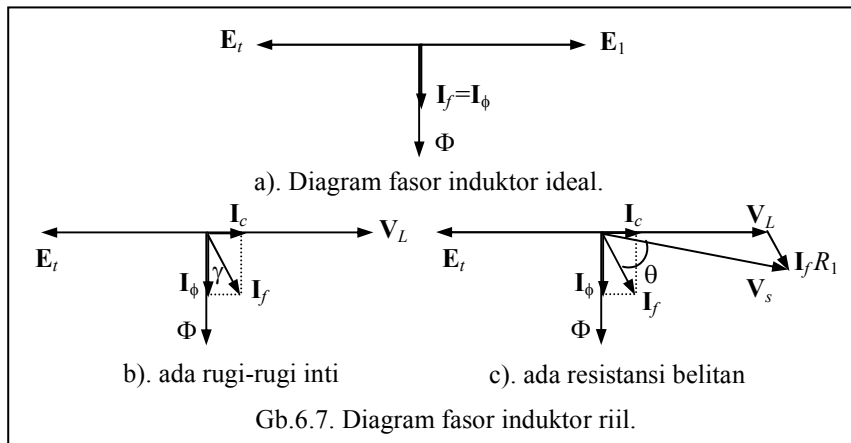
$$\Rightarrow \text{Induktansi bersama } M = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_M} = \frac{1000 \times 1000}{1,667 \times 10^8} = 0,6 \times 10^{-2} \text{ H} = 6 \text{ mH}$$

Catatan Tentang Diagram Fasor Transformator

Dalam menurunkan fasor tegangan induksi \mathbf{E}_t , kita berangkat dari persamaan (6.30) dengan mengambil tanda “-” sebagai penentu polaritas. Hasilnya adalah \mathbf{E}_t merupakan tegangan jatuh pada belitan, sama dengan \mathbf{E}_1 , dan hal ini ditunjukkan oleh persamaan (6.32). Kita dapat pula memandang tegangan terbangkit \mathbf{E}_t sebagai *tegangan naik* $\mathbf{E}_t = -\mathbf{E}_1$, dengan mengikut sertakan tanda “-” pada (6.30) dalam perhitungan dan bukan menggunakannya untuk menentukan polaritas. Jika ini kita lakukan maka

$$\mathbf{E}_t = -j\omega N_1 \Phi = -\mathbf{E}_1 = -j\omega \mathbf{L} \mathbf{I}_f \quad (6.39)$$

Dengan memperhatikan (6.39), diagram fasor tegangan, arus, dan fluksi untuk induktor ideal adalah seperti pada Gb.6.7.a. Di sini fasor tegangan terbangkit \mathbf{E}_t berada 90° dibelakang fluksi pembangkitnya yaitu Φ . Fasor Φ sefasa dengan $\mathbf{I}_\phi = \mathbf{I}_f$ dan tertinggal 90° \mathbf{E}_1 .



Gb.6.7.b. dan Gb.6.7.c. diagram fasor induktor dengan memperhitungkan rugi-rugi inti dan tembaga.

SOAL-SOAL : RANGKAIAN MAGNETIK

1. Sepotong kawat tembaga panjangnya 40 cm bergerak memotong medan magnet pada arah tegak lurus pada panjangnya. Jika kerapatan medan magnet adalah 1 Wb/m^2 , dan kecepatan gerak kawat adalah 40 m/detik dengan arah tegak lurus pada arah medan, hitunglah emf yang terinduksi pada kawat. Hitunglah emf jika arah gerak membentuk sudut 30° terhadap arah medan.
2. Sebuah kumparan terbuat dari kawat halus dan terdiri dari 500 lilitan. Luas rata-rata kumparan adalah 600 cm^2 . Kumparan ini berputar dengan kecepatan 1500 putaran per menit dalam medan magnet uniform yang kerapatannya 100 mWb/m^2 . Hitunglah nilai puncak dan nilai rata-rata dari emf yang terinduksi pada kumparan.
3. Sebuah konduktor lurus panjang 1 m dialiri arus searah 50 A. Konduktor ini berada dalam medan magnet dengan kerapatan 1 Wb/m^2 . Hitunglah gaya mekanis yang bekerja pada konduktor jika konduktor dipertahankan tetap pada tempatnya.
4. Konduktor tersebut pada soal 3 digerakkan melawan gaya yang bekerja padanya dengan kecepatan 10 m/detik. Hitunglah daya mekanis yang diperlukan untuk menggerakkan konduktor?
5. Hitunglah gaya per meter yang timbul antara dua konduktor paralel yang berjarak 5 cm dan masing-masing dialiri arus 1000 dan 5000 A.
6. Hitunglah gaya yang diperlukan untuk memisahkan dua permukaan yang bersinggungan jika luas permukaan tersebut 100 cm^2 dan kerapatan fluksi magnet dengan arah tegak lurus pada permukaan tersebut adalah 1 Wb/m^2 .
7. Sebuah rangkaian magnetik dibangun dari bahan baja silikon dengan ukuran ditunjukkan pada gambar berikut.
 - a). Untuk memperoleh fluksi sebesar 30×10^{-4} weber berapakah mmf diperlukan?
 - b). Jika jumlah lilitan adalah 100, berapakah arus pada lilitan?
8. Jika kaki kanan dari rangkaian magnetik pada soal nomer 7 dipotong sehingga terbentuk celah udara selebar 0,1 berapakah arus yang harus mengalir pada belitan untuk mempertahankan fluksi sebesar 30×10^{-4} weber.

9. Sebuah elektromagnet terbuat dari besi tuang mempunyai celah udara 2 mm dan panjang jalur besinya 30 cm. Tentukan jumlah lilitan-ampere yang diperlukan untuk memperoleh kerapatan fluksi $0,8 \text{ Wb/m}^2$. Abaikan fluksi bocor.
10. Sebuah cincin besi tuang dengan penampang bulat berdiameter 3 cm mempunyai panjang rata-rata 80 cm. Cincin ini dililit kumparan secara merata dengan jumlah lilitan 500. (a) Hitung arus yang diperlukan untuk memperoleh fluksi $0,5 \text{ mWb}$ dalam cincin. (b) Jika cincin dipotong sehingga terbentuk celah udara setebal 2 mm, berapakah fluksi magnetnya jika arus pada kumparan tetap seperti pada pertanyaan (a)? (c) Untuk mempertahankan fluksi sebesar $0,5 \text{ mWb}$, berapakah arus yang harus mengalir pada kumparan? Anggaplah kerapatan fluksi pada celah udara sama dengan kerapatan fluksi dalam cincin.
11. Sebuah cincin besi dengan panjang rata-rata 50 cm dan celah udara selebar 1 mm, diberi kumparan dengan 200 lilitan. Jika permeabilitas besi adalah 400 pada waktu kumparan dialiri arus 1 A, hitunglah kerapatan fluksi dalam cincin.
12. Fluksi magnet dalam suatu inti berubah secara sinusoidal dengan frekuensi 500 siklus per detik dan nilai maksimum kerapatan fluksinya adalah $0,5 \text{ Wb/m}^2$. Rugi-rugi arus pusar adalah 15 watt. Berapakah rugi-rugi arus pusar dalam inti ini jika frekuensinya 750 siklus per detik dan kerapatan fluksi maksimum $0,4 \text{ Wb/m}^2$.
13. Rugi-rugi total (arus pusar + histerisis) dari suatu contoh inti magnet adalah 1500 watt pada frekuensi 50 Hz. Jika kerapatan fluksi dijaga konstan sedangkan frekuensinya dinaikkan 50%, rugi-rugi total itu menjadi 2800 watt. Hitung masing-masing rugi-rugi arus pusar dan rugi-rugi histerisis pada kedua macam frekuensi tersebut.
14. Sebuah rele elektromekanik dengan bentuk magnet tapalkuda memerlukan eksitasi 1800 lilitan-ampere untuk menggerakkan jangkar dengan sela udara 1,25 mm. Jika luas tiap sepatu kutubnya adalah 2 cm^2 dan panjang jalur rangkaian magnetiknya adalah 50 cm, hitunglah : (a) gaya pada jangkar pada saat jangkar akan bergerak (anggap rangkaian magnetik tidak jenuh); (b) jika posisi akhir pada keadaan rele tertutup terdapat celah udara 0,1 mm, hitung gaya yang diperlukan untuk membuka rele tanpa mengubah eksitasi.
15. Hitunglah resistansi dan induktansi selenoida (inti udara) dengan diameter rata-rata 1 cm dan panjangnya 20 cm dan dengan 1000 lilitan kawat tembaga berdiameter 0,2 mm.
16. Hitunglah induktansi sebuah toroida (inti udara) yang berdiameter rata-rata 20 cm, diameter penampang 2 cm, dengan 1000 lilitan kawat tembaga.
17. Sebuah cincin baja mempunyai diameter rata-rata 60 cm dan luas penampang 20 cm^2 . Dengan eksitasi sebesar 40 lilitan-ampere per cm timbul fluksi dengan kerapatan $1,2 \text{ Wb/m}^2$ dalam cincin. Jika jumlah lilitan pada cincin ini adalah 500, hitunglah induktansinya.
18. Cincin baja pada soal nomor 17 dipotong sepanjang 1 cm sehingga membentuk "cincin terbuka" dengan celah udara 1 cm. Dengan jumlah lilitan tetap 500 dan kerapatan fluksi dipertahankan tetap $1,2 \text{ Wb/m}^2$, hitung arus eksitasi dan induktansinya.
19. Dua buah kumparan, masing-masing 1250 lilitan dan 140 lilitan, digulung pada *satu inti* magnetik yang mempunyai reluktansi 160 000. Hitung induktansi bersama, dengan mengabaikan fluksi bocor.
20. Dua buah kumparan, masing-masing 50 dan 500 lilitan digulung secara berdampingan pada inti magnetik yang luas penampangnya 100 cm^2 dan panjang rata-rata 150 cm. Jika permeabilitas inti adalah 4000, hitunglah induktansi bersama dengan mengabaikan fluksi bocor.

BAB 7

Pengenalan Pada Mesin-Mesin Listrik

Di bagian awal buku ini telah disebutkan bahwa salah satu komoditi yang ditawarkan oleh teknik elektro adalah pemenuhan kebutuhan energi. Energi yang tersedia di alam harus dikonversikan ke bentuk energi listrik untuk ditransmisikan ke tempat yang memerlukan. Beberapa piranti untuk menkonversikan energi itu akan kita pelajari di bab ini. Kita membatasi diri hanya akan membahas tiga macam mesin konversi energi dan dari setiap macam kita hanya akan melihat beberapa tipe saja. Macam mesin listrik yang akan kita bahas adalah:

- Mesin konversi dari energi listrik ke energi mekanik, yaitu transformator.
- Mesin konversi dari energi mekanik ke energi listrik, yaitu generator listrik.
- Mesin konversi dari energi listrik ke energi listrik, yaitu motor listrik.

7.1. Transformator Satu Fasa

Tujuan :

- Memahami cara kerja transformator.
- Mampu menggambarkan diagram fasor.
- Mampu melakukan perhitungan-perhitungan pada transformator satu fasa melalui hasil uji beban nol dan uji hubung singkat.

Transformator banyak digunakan dalam teknik elektro. Dalam sistem komunikasi, transformator digunakan pada rentang frekuensi audio sampai frekuensi radio dan video, untuk berbagai keperluan. Kita mengenal misalnya *input transformers*, *interstage transformers*, *output transformers* pada rangkaian radio dan televisi. Transformator juga dimanfaatkan dalam sistem komunikasi untuk penyesuaian impedansi agar tercapai transfer daya maksimum.

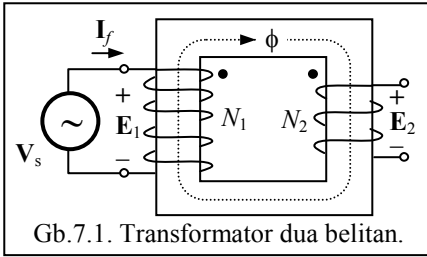
Dalam penyaluran daya listrik banyak digunakan transformator berkapasitas besar dan juga bertegangan tinggi. Dengan transformator tegangan tinggi ini penyaluran daya listrik dapat dilakukan dalam jarak jauh dan susut daya pada jaringan dapat ditekan. Di jaringan distribusi listrik banyak digunakan transformator penurun tegangan, dari tegangan menengah 20 kV menjadi 380 V untuk distribusi ke rumah-rumah dan kantor-kantor pada tegangan 220 V. Transformator daya tersebut pada umumnya merupakan transformator tiga fasa. Dalam pembahasan ini kita akan melihat transformator satu fasa lebih dulu.

Kita telah mempelajari transformator ideal pada waktu membahas rangkaian listrik. Berikut ini kita akan melihat transformator *tidak ideal* sebagai piranti pemroses daya. Akan tetapi kita hanya akan membahas hal-hal yang fundamental saja, karena transformator akan dipelajari secara lebih mendalam pada pelajaran mengenai mesin-mesin listrik.

Mempelajari perilaku transformator juga merupakan langkah awal untuk mempelajari konversi energi elektromekanik. Walaupun konversi energi elektromekanik membahas konversi energi antara sistem mekanik dan sistem listrik, sedangkan transformator merupakan piranti konversi energi listrik ke listrik, akan tetapi kopling antar sistem dalam kedua hal tersebut pada dasarnya sama yaitu kopling magnetik.

Teori Operasi Transformator. Diagram Fasor

Transformator Dua Belitan Tak Berbeban. Jika pada induktor Gb.6.5. kita tambahkan belitan ke-dua, kita akan memperoleh transformator dua belitan seperti terlihat pada Gb.7.1. Belitan pertama kita sebut belitan primer dan yang ke-dua kita sebut belitan sekunder. Jika fluksi di rangkaian magnetiknya adalah $\phi = \Phi_{maks} \sin \omega t$, maka fluksi ini akan menginduksikan tegangan di belitan primer sebesar



$$e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} = N_1 \Phi_{maks} \omega \cos \omega t \quad (7.1)$$

atau dalam bentuk fasor

$$E_1 = E_1 \angle 0^\circ = \frac{N_1 \omega \Phi_{maks}}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ ; E_1 = \text{nilai efektif} \quad (7.2)$$

Karena $\omega = 2\pi f$ maka

$$E_1 = \frac{2\pi f N_1}{\sqrt{2}} \Phi_{maks} = 4.44 f N_1 \Phi_{maks} \quad (7.3)$$

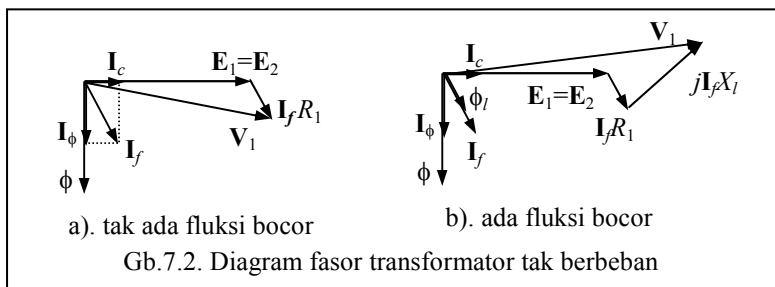
Di belitan sekunder, fluksi tersebut menginduksikan tegangan sebesar

$$E_2 = 4.44 f N_2 \Phi_{maks} \quad (7.4)$$

Dari (7.3) dan (7.4) kita peroleh

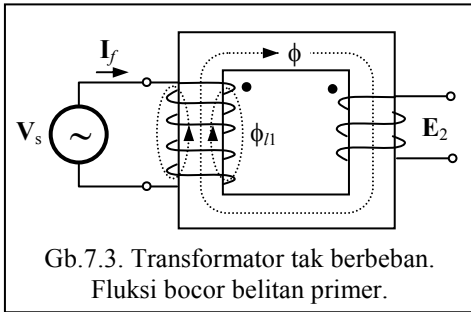
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} \equiv a = \text{rasio transformasi} \quad (7.5)$$

Perhatikanlah bahwa E_1 sefasa dengan E_2 karena dibangkitkan (diinduksikan) oleh fluksi yang sama. Karena E_1 mendahului ϕ dengan sudut 90° maka E_2 juga mendahului ϕ dengan sudut 90° . Jika rasio transformasi $a = 1$, dan resistansi belitan primer adalah R_1 , diagram fasor tegangan dan arus adalah seperti ditunjukkan oleh Gb.7.2.a. Arus I_f adalah arus magnetisasi, yang dapat dipandang sebagai terdiri dari dua komponen yaitu I_ϕ (90° dibelakang E_1) yang menimbulkan ϕ dan I_c (sefasa dengan E_1) yang mengatasi rugi-rugi inti. Resistansi belitan R_1 dalam diagram fasor ini muncul sebagai tegangan jatuh $I_f R_1$.



Fluksi Bocor. Fluksi di belitan primer transformator dibangkitkan oleh arus yang mengalir di belitan primer. Dalam kenyataan, tidak semua fluksi magnet yang dibangkitkan tersebut akan melingkupi baik belitan primer maupun sekunder. Selisih antara fluksi yang dibangkitkan oleh belitan primer dengan fluksi bersama (yaitu fluksi yang melingkupi kedua belitan) disebut fluksi bocor. Fluksi bocor ini hanya melingkupi belitan primer saja dan tidak seluruhnya berada dalam inti transformator tetapi juga melalui udara. (Lihat Gb.7.3). Oleh karena itu reluktansi yang dihadapi oleh fluksi bocor ini praktis adalah reluktansi udara. Dengan demikian fluksi bocor tidak mengalami gejala histerisis sehingga fluksi ini sefasa dengan arus magnetisasi. Hal ini ditunjukkan dalam diagram fasor Gb.7.2.b .

Fluksi bocor, secara tersendiri akan membangkitkan tegangan induksi di belitan primer (seperti halnya ϕ menginduksikan E_1). Tegangan induksi ini 90° mendahului ϕ_{l1} (seperti halnya E_1 90° mendahului ϕ) dan dapat dinyatakan sebagai suatu *tegangan jatuh ekuivalen*, E_{l1} , di rangkaian primer dan dinyatakan sebagai



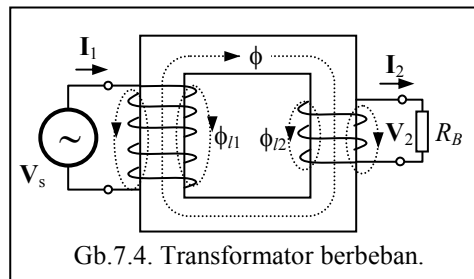
$$E_{l1} = jI_f X_1 \quad (7.6)$$

dengan X_1 disebut *reaktansi bocor* rangkaian primer. Hubungan tegangan dan arus di rangkaian primer menjadi

$$V_1 = E_1 + I_1 R_1 + E_{l1} = E_1 + I_1 R_1 + jI_1 X_1 \quad (7.7)$$

Diagram fasor dengan memperhitungkan adanya fluksi bocor ini adalah Gb.7.2.b.

Transformator Berbeban. Rangkaian transformator berbeban resistif, R_B , diperlihatkan oleh Gb.7.4. Tegangan induksi E_2 (yang telah timbul dalam keadaan transformator tidak berbeban) akan menjadi sumber di rangkaian sekunder dan memberikan arus sekunder I_2 . Arus I_2 ini membangkitkan fluksi yang berlawanan arah dengan fluksi bersama ϕ dan sebagian akan bocor (kita sebut *fluksi bocor sekunder*).



Fluksi bocor ini, ϕ_{l2} , sefasa dengan I_2 dan menginduksikan tegangan E_{l2} di belitan sekunder yang 90° mendahului ϕ_{l2} . Seperti halnya untuk belitan primer, tegangan E_{l2} ini diganti dengan suatu besaran ekuivalen yaitu *tegangan jatuh ekuivalen* pada *reaktansi bocor sekunder* X_2 di rangkaian sekunder. Jika resistansi belitan sekunder adalah R_2 , maka untuk rangkaian sekunder kita peroleh hubungan

$$E_2 = V_2 + I_2 R_2 + E_{l2} = V_2 + I_2 R_2 + jI_2 X_2 \quad (7.8)$$

dengan V_2 adalah tegangan pada beban R_B .

Sesuai dengan hukum Lenz, arus sekunder membangkitkan fluksi yang melawan fluksi bersama. Oleh karena itu fluksi bersama akan cenderung mengecil. Hal ini akan menyebabkan tegangan induksi di belitan primer juga cenderung mengecil. Akan tetapi karena belitan primer terhubung ke sumber yang tegangannya tak berubah, maka arus primer akan naik. Jadi arus primer yang dalam keadaan transformator tidak berbeban hanyalah arus magnetisasi I_f , bertambah menjadi I_1 setelah transformator berbeban. Pertambahan arus ini haruslah sedemikian rupa sehingga fluksi bersama ϕ dipertahankan dan E_1 juga tetap seperti semula. Dengan demikian maka persamaan rangkaian primer (7.7) tetap terpenuhi.

Pertambahan arus primer dari I_f menjadi I_1 adalah untuk mengimbangi fluksi lawan yang dibangkitkan oleh I_2 sehingga ϕ dipertahankan. Jadi haruslah

$$N_1(I_1 - I_f) - N_2(I_2) = 0 \quad (7.9)$$

Pertambahan arus primer ($I_1 - I_f$) disebut arus penyeimbang yang akan mempertahankan ϕ . Makin besar arus sekunder, makin besar pula arus penyeimbang yang diperlukan yang berarti makin besar pula arus primer. Dengan cara inilah terjadinya transfer daya dari primer ke sekunder. Dari (7.9) kita peroleh arus magnetisasi

$$I_f = I_1 - \frac{N_2}{N_1}(I_2) = I_1 - \frac{I_2}{a} \quad (7.10)$$

Diagram Fasor. Dengan persamaan (7.7) dan (7.8) kita dapat menggambarkan secara lengkap diagram fasor dari suatu transformator. Penggambaran kita mulai dari belitan sekunder dengan langkah-langkah:

- Gambarkan V_2 dan I_2 . Untuk beban resistif, I_2 sefasa dengan V_2 . Selain itu kita dapat gambarkan $I_2' = I_2/a$ yaitu besarnya arus sekunder jika dilihat dari sisi primer.
- Dari V_2 dan I_2 kita dapat menggambarkan E_2 sesuai dengan persamaan (7.8) yaitu

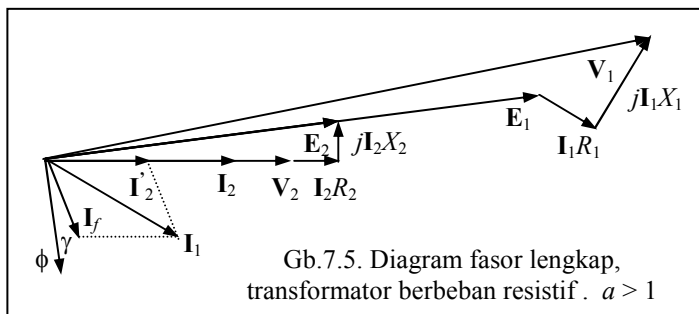
$$E_2 = V_2 + I_2 R_2 + E_{l2} = V_2 + I_2 R_2 + jI_2 X_2$$

Sampai di sini kita telah menggambarkan diagram fasor rangkaian sekunder.

- Untuk rangkaian primer, karena E_1 sefasa dengan E_2 maka E_1 dapat kita gambarkan yang besarnya $E_1 = aE_2$.
- Untuk menggambarkan arus magnetisasi I_f kita gambarkan lebih dulu ϕ yang tertinggal 90° dari E_1 . Kemudian kita gambarkan I_f yang mendahului ϕ dengan sudut histerisis γ . Selanjutnya arus belitan primer adalah $I_1 = I_f + I_2'$.
- Diagram fasor untuk rangkaian primer dapat kita lengkapi sesuai dengan persamaan (7.7), yaitu $V_1 = E_1 + I_1 R_1 + E_{l1} = E_1 + I_1 R_1 + jI_1 X_1$

Dengan demikian lengkaplah diagram fasor transformator berbeban. Gb.7.5. adalah contoh diagram fasor yang dimaksud, yang dibuat dengan mengambil rasio transformasi

$$N_1/N_2 = a > 1.$$



CONTOH 7.1 : Belitan primer suatu transformator yang dibuat untuk tegangan 220 V(rms) mempunyai jumlah lilitan 160. Belitan ini dilengkapi dengan titik tengah (*center tap*).
 a). Berapa persenkah besarnya fluksi maksimum akan berkurang jika tegangan yang kita terapkan pada belitan primer adalah 110 V(rms)?
 b). Berapa persenkah pengurangan tersebut jika kita menerapkan tegangan 55 V (rms) pada setengah belitan primer?
 c). Berapa persenkah pengurangan tersebut jika kita menerapkan tegangan 110 V (rms) pada setengah belitan primer?
 d). Jika jumlah lilitan di belitan sekunder adalah 40, bagaimanakah tegangan sekunder dalam kasus-kasus tersebut di atas?

Penyelesaian :

- a). Dengan mengabaikan resistansi belitan, fluksi maksimum Φ_m adalah

$$\Phi_m = \frac{E_1 \sqrt{2}}{N_1 \omega} = \frac{V_1 \sqrt{2}}{N_1 \omega} = \frac{220 \sqrt{2}}{160 \omega}$$

Jika tegangan 110 V diterapkan pada belitan primer, maka

$$\Phi'_m = \frac{V'_1 \sqrt{2}}{N_1 \omega} = \frac{110 \sqrt{2}}{160 \omega}$$

Penurunan fluksi maksimum adalah 50 %, $\Phi'_m = \Phi_m / 2$.

- b). Jika tegangan 55 V diterapkan pada setengah belitan primer,

$$\Phi''_m = \frac{V''_1 \sqrt{2}}{(1/2)N_1 \omega} = \frac{55 \sqrt{2}}{80 \omega} = \frac{110 \sqrt{2}}{160 \omega}$$

Penurunan fluksi maksimum adalah 50 %, $\Phi''_m = \Phi_m / 2$.

c). Jika tegangan 110 V diterapkan pada setengah belitan maka

$$\Phi''_m = \frac{V_1'' \sqrt{2}}{(1/2)N_1\omega} = \frac{110\sqrt{2}}{80\omega} = \frac{220\sqrt{2}}{160\omega}$$

Tidak terjadi penurunan fluksi maksimum, $\Phi''_m = \Phi_m$.

d). Dengan $N_1/N_2 = 160/40 = 4$ maka jika tegangan primer 220 V, tegangan sekunder adalah 55 V. Jika tegangan primer 110 V, tegangan sekundernya 27.5 V. Jika tegangan 55 V diterapkan pada setengah belitan primer, tegangan sekunder adalah 27.5 V. Jika tegangan 110 V diterapkan pada setengah belitan primer, tegangan sekunder adalah 55 V.

CONTOH 7.2 : Sebuah transformator satu fasa mempunyai belitan primer dengan 400 lilitan dan belitan sekunder 1000 lilitan. Luas penampang inti efektif adalah 60 cm^2 . Jika belitan primer dihubungkan ke sumber 500 V (rms) yang frekuensinya 50 Hz, tentukanlah kerapatan fluksi maksimum dalam inti serta tegangan di belitan sekunder.

Penyelesaian :

Dengan mengabaikan resistansi belitan dan reaktansi bocor, maka

$$V_1 = \frac{N_1\omega\Phi_m}{\sqrt{2}} = 500 \rightarrow \Phi_m = \frac{500\sqrt{2}}{400 \times 2\pi \times 50} = 0.00563 \text{ weber}$$

$$\rightarrow \text{Kerapatan fluksi maksimum : } B_m = \frac{0.00563}{0.006} = 0.94 \text{ weber/m}^2$$

Tegangan belitan sekunder adalah $V_2 = \frac{1000}{400} \times 500 = 1250 \text{ V}$

CONTOH 7.3 : Dari sebuah transformator satu fasa diinginkan suatu perbandingan tegangan primer / sekunder dalam keadaan tidak berbeban 6000/250 V. Jika frekuensi kerja adalah 50 Hz dan fluksi dalam inti transformator dibatasi sekitar 0.06 weber, tentukan jumlah lilitan primer dan sekunder.

Penyelesaian :

Pembatasan fluksi di sini adalah fluksi maksimum. Dengan mengabaikan resistansi belitan dan reaktansi bocor,

$$V_1 = \frac{N_1\omega\Phi_m}{\sqrt{2}} = 6000 \rightarrow N_1 = \frac{6000\sqrt{2}}{2\pi \times 50 \times 0.06} = 450 \Rightarrow N_2 = \frac{250}{6000} \times 450 = 18.75$$

Pembulatan jumlah lilitan harus dilakukan. Dengan melakukan pembulatan ke atas, batas fluksi maksimum Φ_m tidak akan terlampaui. Jadi dapat kita tetapkan

$$\Rightarrow N_2 = 20 \text{ lilitan} \quad \Rightarrow N_1 = \frac{6000}{250} \times 20 = 480 \text{ lilitan}$$

Rangkaian Ekuivalen

Transformator adalah piranti listrik. Dalam analisis, piranti-piranti listrik biasanya dimodelkan dengan suatu rangkaian listrik ekuivalen yang sesuai. Secara umum, rangkaian ekuivalen hanyalah penafsiran secara rangkaian listrik dari suatu persamaan matematik yang menggambarkan perilaku suatu piranti. Untuk transformator, ada tiga persamaan yang menggambarkan perilakunya, yaitu persamaan (7.7), (7.8), dan (7.10), yang kita tulis lagi sebagai satu set persamaan (7.11).

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{I}_1 R_1 + j\mathbf{I}_1 X_1 ; \mathbf{E}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{I}_2 R_2 + j\mathbf{I}_2 X_2 ; \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_f + \mathbf{I}'_2 \text{ dengan } \mathbf{I}'_2 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_2}{a} \quad (7.11)$$

Dengan hubungan $\mathbf{E}_1 = a\mathbf{E}_2$ dan $\mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}_2/a$ maka persamaan ke-dua dari (7.11) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\mathbf{E}_1}{a} = \mathbf{V}_2 + a\mathbf{I}'_2 R_2 + ja\mathbf{I}'_2 X_2 \Rightarrow \mathbf{E}_1 = a\mathbf{V}_2 + \mathbf{I}'_2 (a^2 R_2) + j\mathbf{I}'_2 (a^2 X_2) \quad (7.12)$$

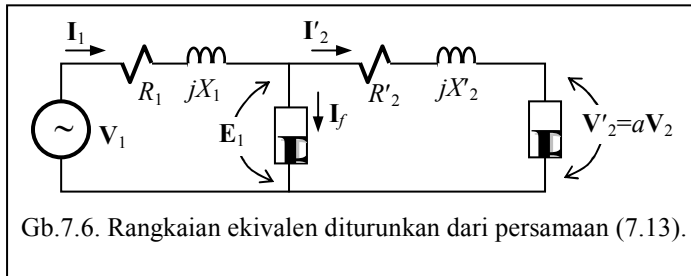
$$= \mathbf{V}'_2 + \mathbf{I}'_2 R'_2 + j\mathbf{I}'_2 X'_2$$

dengan $\mathbf{V}'_2 = a\mathbf{V}_2 ; R'_2 = a^2 R_2 ; X'_2 = a^2 X_2$

Dengan (7.12) maka (7.11) menjadi

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{I}_1 R_1 + j\mathbf{I}_1 X_1 ; \mathbf{E}_1 = a\mathbf{V}_2 + \mathbf{I}'_2 R'_2 + j\mathbf{I}'_2 X'_2 ; \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_f + \mathbf{I}'_2 \quad (7.13)$$

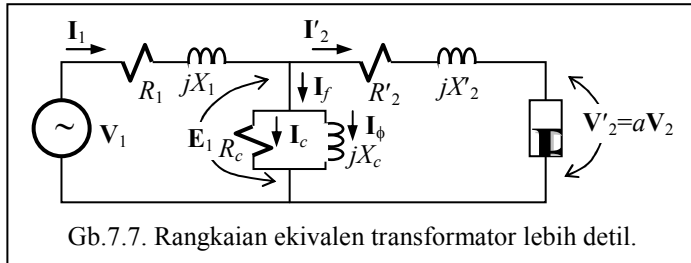
\mathbf{I}'_2 , R'_2 , dan X'_2 adalah arus, resistansi, dan reaktansi sekunder yang dilihat oleh sisi primer. Dari persamaan (7.13) dibangunlah rangkaian ekuivalen transformator seperti Gb.7.6. di samping ini.



Gb.7.6. Rangkaian ekuivalen diturunkan dari persamaan (7.13).

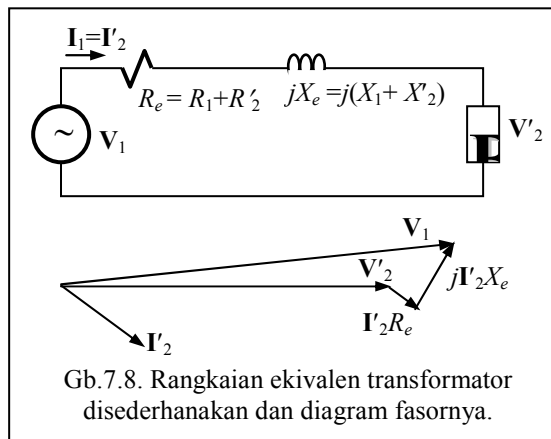
Pada diagram fasor Gb.7.5. kita lihat bahwa arus magnetisasi dapat dipandang sebagai terdiri dari dua komponen, yaitu \mathbf{I}_c dan \mathbf{I}_ϕ . \mathbf{I}_c sefasa dengan \mathbf{E}_1 sedangkan \mathbf{I}_ϕ 90°

dibelakang \mathbf{E}_1 . Dengan demikian maka impedansi Z pada rangkaian ekuivalen Gb.7.6. dapat dinyatakan sebagai hubungan paralel antara suatu resistansi R_c dan impedansi induktif jX_ϕ sehingga rangkaian ekuivalen transformator secara lebih detail menjadi seperti Gb.7.7.



Gb.7.7. Rangkaian ekuivalen transformator lebih detail.

Rangkaian Ekuivalen Yang Disederhanakan. Pada transformator yang digunakan pada tegangan bolak-balik yang konstan dengan frekuensi yang konstan pula (seperti misalnya transformator pada sistem tenaga listrik), besarnya arus magnetisasi hanya sekitar 2 sampai 5 persen dari arus beban penuh transformator. Keadaan ini bisa dicapai karena inti transformator dibangun dari material dengan permeabilitas magnetik yang tinggi. Oleh karena itu, jika \mathbf{I}_f diabaikan terhadap \mathbf{I}_1 kesalahan yang terjadi dapat dianggap cukup kecil. Pengabaian ini akan membuat rangkaian ekuivalen menjadi lebih sederhana seperti Gb.7.8.



Gb.7.8. Rangkaian ekuivalen transformator disederhanakan dan diagram fasornya.

Impedansi Masukan. Resistansi beban B adalah $R_B = V_2/I_2$. Dilihat dari sisi primer resistansi tersebut menjadi

$$R'_B = \frac{V'_2}{I'_2} = \frac{aV_2}{I_2/a} = a^2 \frac{V_2}{I_2} = a^2 R_B \quad (7.14)$$

Dengan melihat rangkaian ekivalen yang disederhanakan Gb.7.10, impedansi masukan adalah

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = R_e + a^2 R_B + jX_e \quad (7.15)$$

Penentuan Parameter Transformator

Dari rangkaian ekivalen lengkap Gb.7.7. terlihat ada enam parameter transformator yang harus ditentukan, R_1 , X_1 , R'_2 , X'_2 , R_e , dan X_ϕ . Resistansi belitan primer dan sekunder dapat diukur langsung menggunakan metoda *jembatan*. Untuk menentukan empat parameter yang lain kita memerlukan metoda khusus seperti diuraikan berikut ini.

Uji Tak Berbeban (Uji Beban Nol). Uji beban nol ini biasanya dilakukan pada sisi tegangan rendah karena catu tegangan rendah maupun alat-alat ukur tegangan rendah lebih mudah diperoleh. Sisi tegangan rendah menjadi sisi masukan yang dihubungkan ke sumber tegangan sedangkan sisi tegangan tinggi terbuka. Pada belitan tegangan rendah dilakukan pengukuran tegangan masukan V_r , arus masukan I_r , dan daya (aktif) masukan P_r . Karena sisi primer terbuka, I_r adalah arus magnetisasi yang cukup kecil sehingga kita dapat melakukan dua pendekatan. Pendekatan yang pertama adalah mengabaikan tegangan jatuh di reaktansi bocor sehingga V_r sama dengan tegangan induksi E_r . Pendekatan yang kedua adalah mengabaikan kehilangan daya di resistansi belitan sehingga P_r menunjukkan kehilangan daya pada R_{cr} (R_c dilihat dari sisi tegangan rendah) saja.

$$\text{Daya kompleks masukan: } |S_r| = V_r I_r \quad ; \quad \cos \theta = \frac{P_r}{|S_r|} = \frac{P_r}{V_r I_r} \rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{|S_r|^2 - P_r^2}}{|S_r|}$$

$$\Rightarrow I_{cr} = I_r \cos \theta \quad ; \quad I_{\phi r} = I_r \sin \theta \quad (7.16)$$

$$\Rightarrow R_{cr} = \frac{V_r}{I_{cr}} = \frac{V_r}{I_r \cos \theta} \quad ; \quad X_{\phi r} = \frac{V_r}{I_{\phi r}} = \frac{V_r}{I_r \sin \theta}$$

Uji Hubung Singkat. Uji hubung singkat dilakukan di sisi tegangan tinggi dengan sisi tegangan rendah dihubungkan-singkat. Sisi tegangan tinggi menjadi sisi masukan yang dihubungkan dengan sumber tegangan. Tegangan masukan harus cukup rendah agar arus di sisi tegangan rendah masih dalam batas nominalnya. Pengukuran di belitan tegangan tinggi dilakukan seperti halnya pada uji beban nol, yaitu tegangan masukan V_t , arus masukan I_t , dan daya (aktif) masukan P_t . Tegangan masukan yang dibuat kecil mengakibatkan rugi-rugi inti menjadi kecil sehingga kita dapat membuat pendekatan dengan mengabaikan rugi-rugi inti. Dengan demikian kita dapat menggunakan rangkaian ekivalen yang disederhanakan Gb.7.9. Daya P_t dapat dianggap sebagai daya untuk mengatasi rugi-rugi tembaga saja, yaitu rugi-rugi pada resistansi ekivalen yang dilihat dari sisi tegangan tinggi R_{et} .

$$P_t = I_t^2 R_{et} \rightarrow R_{et} = \frac{P_t}{I_t^2} \quad ; \quad V_t = I_t |Z_{et}| \rightarrow |Z_{et}| = \frac{V_t}{I_t} \rightarrow X_e = \sqrt{Z_{et}^2 - R_{et}^2} \quad (7.17)$$

Dalam perhitungan ini kita memperoleh nilai $R_{et} = R_1 + R'_2$. Nilai resistansi masing-masing belitan dapat diperoleh dengan pengukuran terpisah sebagaimana telah disebutkan di atas.

Untuk reaktansi, kita memperoleh nilai $X_{et} = X_1 + X'_2$. Kita tidak dapat memperoleh informasi untuk menentukan reaktansi masing-masing belitan. Jika sekiranya nilai reaktansi masing-masing belitan diperlukan kita dapat mengambil asumsi bahwa $X_1 = X'_2$. Kondisi ini sesungguhnya benar adanya jika transformator dirancang dengan baik.

CONTOH 7.5 : Pada sebuah transformator 25 KVA, 2400/240 volt, 50 Hz, dilakukan uji beban nol dan uji hubung singkat.

Uji beban nol pada sisi tegangan rendah memberikan hasil

$$V_r = 240 \text{ volt}, I_r = 1.6 \text{ amper}, P_r = 114 \text{ watt}$$

Uji hubung singkat yang dilakukan dengan menghubungkan-singkat belitan tegangan rendah memberikan hasil pengukuran di sisi tegangan tinggi

$$V_t = 55 \text{ volt}, I_t = 10.4 \text{ amper}, P_t = 360 \text{ watt}$$

a). Tentukanlah parameter transformator dilihat dari sisi tegangan tinggi. b). Berapakah rugi-rugi inti dan rugi-rugi tembaga pada beban penuh ?

Penyelesaian :

a). Uji beban nol dilakukan di sisi tegangan rendah. Jadi nilai R_c dan X_ϕ yang akan diperoleh dari hasil uji ini adalah dilihat dari tegangan rendah, kita sebut R_{cr} dan $X_{\phi r}$.

$$\cos \theta = \frac{P}{VI} = \frac{114}{240 \times 1.6} = 0.3 \quad ; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{(240 \times 1.6)^2 - 114^2}}{240 \times 1.6} = 0.95$$

$$R_{cr} = \frac{V}{I_c} = \frac{240}{1.6 \times 0.3} = 500 \Omega \quad ; \quad X_{\phi r} = \frac{V}{I_\phi} = \frac{240}{1.6 \times 0.95} = 158 \Omega$$

Jika dilihat dari sisi tegangan tinggi :

$$R_{ct} = a^2 R_{cr} = \left(\frac{2400}{240} \right)^2 \times 500 = 50 \text{ k}\Omega \quad ; \quad X_{\phi t} = a^2 X_{\phi r} = 15.8 \text{ k}\Omega$$

Resistansi ekivalen dan reaktansi bocor ekivalen diperoleh dari uji hubung singkat. Uji hubung singkat yang dilakukan di sisi tegangan tinggi ini memberikan

$$R_{et} = \frac{P_t}{I_t^2} = \frac{360}{(10.4)^2} = 3.33 \Omega \quad ;$$

$$|Z_{et}| = \frac{V_t}{I_t} = \frac{55}{10.4} = 5.29 \Omega \quad \rightarrow \quad X_{et} = \sqrt{5.29^2 - 3.33^2} = 4.1 \Omega$$

b). Pada pembebanan penuh fluksi bersama dalam inti transformator hampir sama dengan fluksi dalam keadaan beban nol. Jadi rugi-rugi inti pada pembebanan penuh adalah 114 Watt. Rugi-rugi tembaga tergantung dari besarnya arus. Besarnya arus primer pada beban penuh adalah sama dengan arus sisi tegangan tinggi pada percobaan hubung singkat, yaitu

$$I_1 = \frac{|S|}{V_1} = \frac{25000}{2400} = 10.4 \text{ A} \quad \rightarrow \quad P_{cu} = I_1^2 R_{et} = (10.4)^2 \times 3.33 = 360 \text{ W}$$

Karena pada uji hubung singkat arus sisi tegangan tinggi dibuat sama dengan arus beban penuh, maka rugi-rugi tembaga adalah penunjukan wattmeter pada uji hubung singkat.

Efisiensi dan Regulasi Tegangan

Efisiensi suatu piranti didefinisikan sebagai

$$\eta = \frac{\text{daya keluaran [watt]}}{\text{daya masukan [watt]}} \tag{7.18}$$

Karena daya keluaran sama dengan daya masukan dikurangi rugi-rugi daya, maka efisiensi dapat dinyatakan sebagai

$$\eta = 1 - \frac{\text{rugi - rugi daya [watt]}}{\text{daya masukan [watt]}} \tag{7.19}$$

Formulasi (7.19) ini lebih sering digunakan. Untuk transformator rugi-rugi daya dapat segera diperoleh melalui uji beban nol dan uji hubung singkat, yaitu jumlah rugi inti dan rugi tembaga.

Regulasi tegangan transformator didefinisikan sebagai perubahan besarnya tegangan sekunder bila arus berubah dari beban penuh ke beban nol dengan tegangan primer dijaga tetap. Jadi

$$\text{Regulasi Tegangan} = \frac{V_2 \text{ beban nol} - V_2 \text{ beban penuh}}{V_2 \text{ beban penuh}} = \frac{|V_1/a| - |V_2|}{|V_2|} = \frac{|V_1| - |aV_2|}{|aV_2|} = \frac{|V_1| - |V_2'|}{|V_2'|} \quad (7.25)$$

Dengan memperhatikan diagram fasor Gb.7.9. maka (7.25) menjadi

$$\text{Regulasi Tegangan} = \frac{|V_2' + I_2'(R_e + jX_e)| - |V_2'|}{|V_2'|} \quad (7.26)$$

CONTOH 7.6 : Transformator pada contoh 7.5. mencatu beban 25 KVA pada faktor daya 0.8. a). Hitunglah efisiensinya. b). Hitunglah regulasi tegangannya.

Penyelesaian :

a). Total rugi daya : $P_{c+cu} = 114 + 360 = 474 \text{ W} = 0.474 \text{ KW}$

Daya keluaran : $P_o = 25000 \times 0.8 = 20 \text{ KW}$

Efisiensi : $\eta = 1 - \frac{0.474}{20} = 0.976$ atau 97.6 %

b). Mengambil V_2 sebagai referensi : $V_2' = 10 \times 240 = 2400 \angle 0^\circ \text{ V}$.

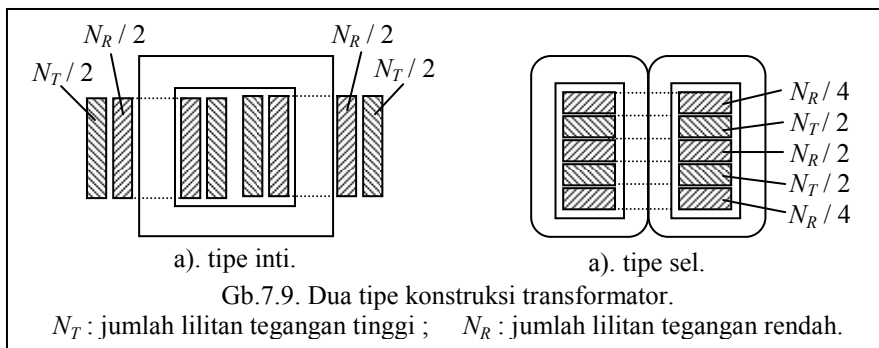
$I_2' = I_2/a = (25000/240)/10 \angle -\cos^{-1} 0.8 = 10.4 \angle -36.8^\circ$

Reg. Tegangan = $\frac{|2400 \angle 0^\circ + 10.4 \angle -36.8^\circ (3.33 + j4.1)| - 2400}{2400} = 0.022$ atau 2.2 %

Konstruksi Transformator

Dalam pembahasan transformator, kita melihat transformator dengan satu inti dua belitan. Belitan primer digulung pada salah satu kaki inti dan belitan sekunder digulung pada kaki inti yang lain. Dalam kenyataan tidaklah demikian. Untuk mengurangi fluksi bocor, belitan primer dan sekunder masing-masing dibagi menjadi dua bagian dan digulung di setiap kaki inti. Belitan primer dan sekunder digulung secara *konsentris* dengan belitan sekunder berada di dalam belitan primer. Dengan cara ini fluksi bocor dapat ditekan sampai hanya beberapa persen dari fluksi bersama. Pembagian belitan seperti ini masih mungkin dilanjutkan untuk lebih menekan fluksi bocor, dengan biaya yang sudah barang tentu lebih tinggi.

Dua tipe konstruksi yang biasa digunakan pada transformator satu fasa adalah *core type (tipe inti)* dan *shell type (tipe sel)*. Gb.7.9.a. memperlihatkan konstruksi tipe inti dengan belitan primer dan sekunder yang terbagi dua. Belitan tegangan rendah digulung dekat dengan inti yang kemudian dilingkupi oleh belitan tegangan tinggi. Konstruksi ini sesuai untuk tegangan tinggi karena masalah isolasi lebih mudah ditangani. Gb.7.9.b. memperlihatkan konstruksi tipe sel. Konstruksi ini sesuai untuk transformator daya dengan arus besar. Inti pada konstruksi ini memberikan perlindungan mekanis lebih baik pada belitan.



SOAL-SOAL : TRANSFORMATOR SATU FASA

1. Sebuah transformator satu fasa diinginkan untuk menurunkan tegangan bolak-balik 50 Hz dari 20 kV ke 250 V dalam keadaan tak berbeban. Jika fluksi magnet dalam inti transformator adalah sekitar 0.08 Wb, tentukan jumlah lilitan belitan primer dan sekundernya.
2. Sebuah transformator tipe inti hendak digunakan untuk menurunkan tegangan bolak-balik 50 Hz, dari 3000 ke 220 V. Inti berpenampang persegi dengan ukuran 20 cm × 20 cm. Hitunglah jumlah lilitan pada kedua belitan jika kerapatan fluksi pada inti dibatasi 1 Wb/m².
3. Jumlah lilitan belitan primer dan sekunder transformator satu fasa adalah 200 dan 100 lilitan dan resistansinya 0,255 Ω dan 0,074 Ω. Hitunglah resistansi belitan primer dilihat di sekunder, resistansi sekunder dilihat di primer, dan resistansi total di sisi primer.
4. Pada test transformator dengan belitan sekunder dihubung singkat, diperoleh data sebagai berikut : tegangan primer 60 V, arus 100 A, daya masukan 1,2 kW. Hitunglah resistansi dan reaktansi transformator dilihat di sisi primer.
5. Sebuah transformator 40 kVA, 2000/250 V, mempunyai resistansi belitan primer 1,15 Ω dan resistansi belitan sekunder 0,0155 Ω. Hitunglah rugi-rugi tembaga total dalam keadaan beban penuh.
6. Sebuah transformator 220/110 V, 50 Hz, mempunyai impedansi $0,3+j0,8$ Ω di belitan 220 V dan $0,1+j0,25$ Ω di belitan 110 V. Hitunglah arus di kedua belitan jika terjadi hubung singkat di sisi tegangan rendah sedangkan sisi tegangan tinggi terhubung pada tegangan 220 V.
7. Data test pada transformator 15 kVA, 2200/440 V, 50 Hz adalah sebagai berikut. Test hubung singkat : $P = 620$ W, $I = 40$ A, $V = 25$ V. Test beban nol : $P = 320$ W, $I = 1$ A, $V = 440$ V. Hitunglah regulasi tegangan pada pembebanan penuh dengan faktor daya 0,8 *lagging* (abaikan arus magnetisasi). Hitung pula efisiensi pada pembebanan tersebut.
8. Data test pada transformator 110 kVA, 4400/440 V, 50 Hz adalah sebagai berikut. Test hubung singkat : $P = 2000$ W, $I = 200$ A, $V = 18$ V. Test beban nol : $P = 1200$ W, $I = 2$ A, $V = 4400$ V. Hitunglah regulasi tegangan pada pembebanan penuh dengan faktor daya 0,8 *lagging* (abaikan arus magnetisasi). Hitung pula efisiensi pada pembebanan tersebut.
9. Data test pada transformator 30 kVA, 2400/240 V, 50 Hz adalah sebagai berikut. Test hubung singkat : $P = 1050$ W, $I = 18,8$ A, $V = 70$ V. Test beban nol : $P = 230$ W, $I = 3,0$ A, $V = 240$ V. Jika transformator ini dibebani 12,5 A dengan faktor daya 0,8 *lagging* pada sisi 240 V, hitunglah tegangan pada sisi primer dan hitung pula efisiensinya pada pembebanan tersebut.
10. Pada pembebanan penuh transformator 150 kVA, rugi-rugi tembaga adalah 1600 W dan rugi-rugi besi 1400 W. Hitung efisiensi pada pembebanan 25%, 33% dan 100% dari beban penuh untuk faktor daya 1 dan 0,8 *lagging*. Abaikan pengaruh kenaikan temperatur dan arus magnetisasi.
11. Efisiensi transformator satu fasa 400 kVA adalah 98,77% pada pembebanan penuh dengan faktor daya 0,8 dan 99,13% pada setengah beban penuh dengan faktor daya 1. Hitunglah rugi-rugi besi serta rugi-rugi tembaga pada beban penuh.

7.2. Transformator Pada Sistem Tiga Fasa

Tujuan :

- Memahami berbagai hubungan transformator untuk sistem tiga fasa.
- Mampu melakukan perhitungan-perhitungan tegangan pada berbagai hubungan transformator tiga fasa.

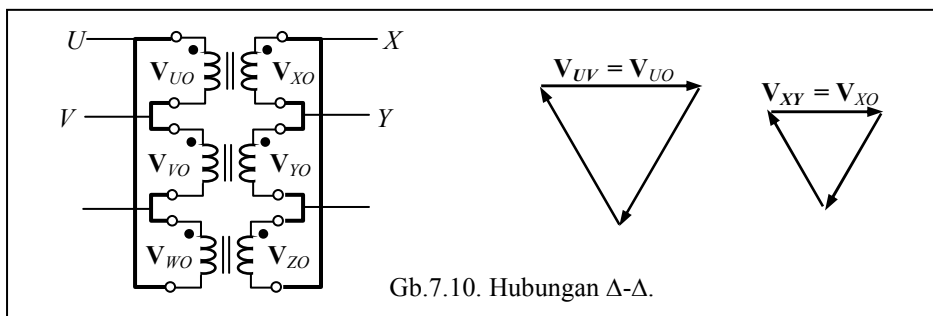
Pada sistem tiga fasa, penaikan dan penurunan tegangan dapat dilakukan dengan dua cara yaitu : (a) menggunakan tiga unit transformator satu fasa, (b) menggunakan satu unit transformator tiga fasa.

Transformator tiga fasa mempunyai inti dengan tiga kaki dan setiap kaki mendukung belitan primer dan sekunder. Untuk penyaluran daya yang sama, penggunaan satu unit transformator tiga fasa akan lebih ringan, lebih murah dan lebih efisien dibandingkan dengan tiga unit transformator satu fasa. Akan tetapi penggunaan tiga unit transformator satu fasa juga mempunyai beberapa kelebihan dibandingkan dengan satu unit transformator tiga fasa. Misalnya biaya awal yang lebih rendah, jika untuk sementara beban dapat dilayani dengan dua unit saja dan unit ketiga ditambahkan jika penambahan beban telah terjadi. Terjadinya kerusakan pada salah satu unit tidak mengharuskan pemutusan seluruh penyaluran daya. Pemilihan cara mana yang lebih baik, tergantung dari berbagai pertimbangan keadaan-khusus. Pada dasarnya kedua cara adalah sama. Berikut ini kita akan melihat hubungan primer-sekunder transformator, dengan melihat pelayanan sistem tiga fasa melalui tiga unit transformator satu fasa.

Hubungan Δ - Δ . Pada waktu menghubungkan tiga transformator satu fasa untuk melayani sistem tiga fasa, hubungan sekunder harus diperhatikan agar sistem tetap seimbang. Diagram hubungan ini diperlihatkan pada Gb.7.10. Fasa primer disebut dengan fasa U - V - W sedangkan fasa sekunder disebut fasa X - Y - Z . Fasor tegangan fasa primer kita sebut V_{UO} , V_{VO} , V_{WO} dengan nilai V_{FP} , dan tegangan fasa sekunder kita sebut V_{XO} , V_{YO} , V_{ZO} dengan nilai V_{FS} . Nilai tegangan saluran (tegangan fasa-fasa) primer dan sekunder kita sebut V_{LP} dan V_{LS} . Nilai arus saluran primer dan sekunder masing-masing kita sebut I_{LP} dan I_{LS} sedang nilai arus fasanya I_{FP} dan I_{FS} . Rasio tegangan fasa primer terhadap sekunder $V_{FP}/V_{FS} = a$.

Dengan mengabaikan rugi-rugi untuk hubungan Δ - Δ kita peroleh :

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{V_{FP}}{V_{FS}} = a ; \frac{I_{LP}}{I_{LS}} = \frac{I_{FP}\sqrt{3}}{I_{FS}\sqrt{3}} = \frac{1}{a} \quad (7.27)$$

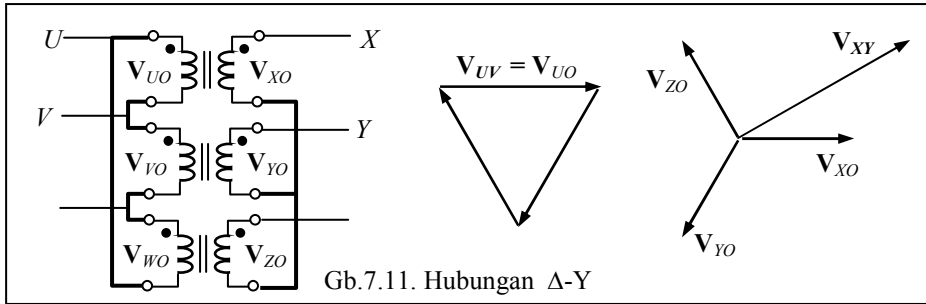


Gb.7.10. Hubungan Δ - Δ .

Hubungan Δ - Y . Hubungan ini diperlihatkan pada Gb.7.11. Tegangan fasa-fasa primer sama dengan tegangan fasa primer, sedangkan tegangan fasa-fasa sekunder sama dengan $\sqrt{3}$ kali tegangan fasa sekunder dengan perbedaan sudut fasa 30° . Dengan mengabaikan rugi-rugi kita peroleh

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{V_{FP}}{V_{FS}\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} ; \frac{I_{LP}}{I_{LS}} = \frac{I_{FP}\sqrt{3}}{I_{FS}} = \frac{\sqrt{3}}{a} \quad (7.28)$$

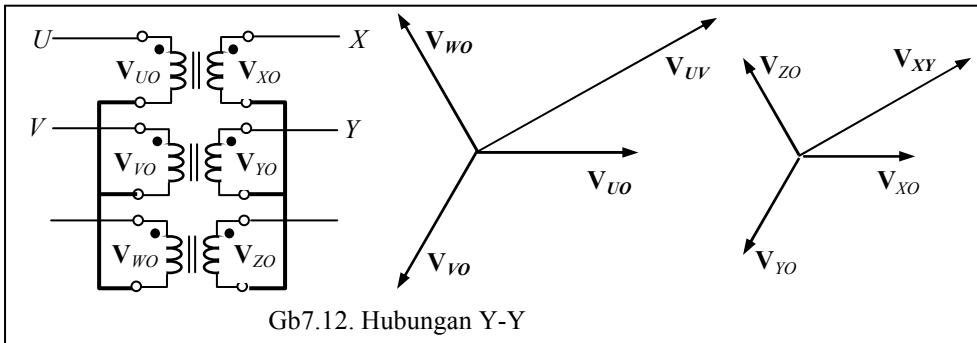
Fasor tegangan fasa-fasa sekunder mendahului primer 30° .



Hubungan Y-Y. Hubungan ini diperlihatkan pada Gb.7.12. Tegangan fasa-fasa primer sama dengan $\sqrt{3}$ kali tegangan fasa primer dengan perbedaan sudut fasa 30° , tegangan fasa-fasa sekunder sama dengan $\sqrt{3}$ kali tegangan fasa sekunder dengan perbedaan sudut fasa 30° . Perbandingan tegangan fasa-fasa primer dan sekunder adalah

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{V_{FP}\sqrt{3}}{V_{FS}\sqrt{3}} = a ; \frac{I_{LP}}{I_{LS}} = \frac{I_{FP}}{I_{FS}} = \frac{1}{a} \quad (7.29)$$

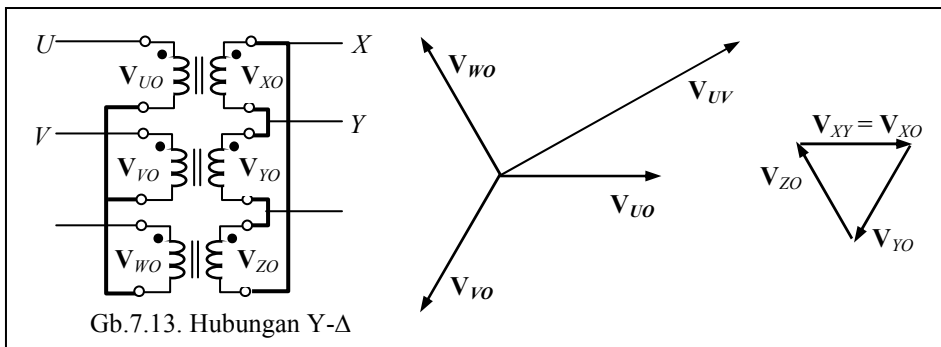
Antara fasor tegangan fasa-fasa primer dan sekunder tidak terdapat perbedaan sudut fasa.



Hubungan Y- Δ . Hubungan ini terlihat pada Gb.7.13. Tegangan fasa-fasa primer sama dengan $\sqrt{3}$ kali tegangan fasa primer dengan perbedaan sudut fasa 30° , sedangkan tegangan fasa-fasa sekunder sama dengan tegangan fasa sekunder. Dengan mengabaikan rugi-rugi diperoleh

$$\frac{V_{LP}}{V_{LS}} = \frac{V_{FP}\sqrt{3}}{V_{FS}} = a\sqrt{3} ; \frac{I_{LP}}{I_{LS}} = \frac{I_{FP}}{I_{FS}\sqrt{3}} = \frac{1}{a\sqrt{3}}. \quad (7.30)$$

Fasor tegangan fasa-fasa primer mendahului sekunder 30° .



CONTOH 7.7 : Sebuah transformator penurun tegangan 3 fasa, tegangan primernya dihubungkan pada sumber 6600 V dan mengambil arus 10 A. Jika rasio transformasi adalah 12, hitunglah tegangan saluran sekunder, arus saluran sekunder dan daya keluaran untuk hubungan-hubungan berikut : (a) Δ - Δ ; (b) Y-Y ; (c) Δ -Y ; (d) Y- Δ .

Penyelesaian :

a). Untuk hubungan Δ - Δ :

$$V_{LS} = V_{FS} = \frac{V_{FP}}{a} = \frac{V_{LP}}{a} = \frac{6600}{12} = 550 \text{ V} ;$$

$$I_{LS} = I_{FS}\sqrt{3} = aI_{FP}\sqrt{3} = a\frac{I_{LP}}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 12 \times 10 = 120 \text{ A}.$$

b). Untuk hubungan Y-Y :

$$V_{LS} = V_{FS}\sqrt{3} = \frac{V_{FP}}{a}\sqrt{3} = \frac{V_{LP}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{6600}{12} = 550 \text{ V} ;$$

$$I_{LS} = I_{FS} = aI_{FP} = aI_{LP} = 12 \times 10 = 120 \text{ A}.$$

c). Untuk hubungan Δ -Y :

$$V_{LS} = V_{FS}\sqrt{3} = \frac{V_{FP}}{a}\sqrt{3} = \frac{V_{LP}}{a}\sqrt{3} = \frac{6600}{12}\sqrt{3} = 953 \text{ V} ;$$

$$I_{LS} = I_{FS} = aI_{FP} = a\frac{I_{LP}}{\sqrt{3}} = 12\frac{10}{\sqrt{3}} = 69,3 \text{ A}.$$

d) Untuk hubungan Y- Δ :

$$V_{LS} = V_{FS} = \frac{V_{FP}}{a} = \frac{1}{a}\frac{V_{LP}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\frac{6600}{\sqrt{3}} = 318 \text{ V} ;$$

$$I_{LS} = I_{FS}\sqrt{3} = aI_{FP}\sqrt{3} = aI_{LP}\sqrt{3} = 12 \times 10 \times \sqrt{3} = 208 \text{ A}.$$

Dengan mengabaikan rugi-rugi daya keluaran sama dengan daya masukan.

$$|S_{keluaran}| = |S_{masukan}| = V_{LP}I_{LP}\sqrt{3} = 6,6 \times 10\sqrt{3} = 114,3 \text{ kVA}.$$

SOAL-SOAL : TRANSFORMATOR TIGA FASA

- | | |
|---|---|
| <p>1. Sebuah transformator 6600/440 V, 50 Hz, terhubung Δ-Y dibebani motor 50 HP, 440 V, faktor daya 0,85, dan efisiensinya 90%. Dengan mengabaikan arus magnetisasi pada transformator, hitunglah arus di belitan primer dan sekunder jika motor bekerja pada beban penuh.</p> <p>2. Tentukan jumlah lilitan per fasa di setiap belitan dari sebuah transformator 3 fasa dengan rasio tegangan 20000/2000 V, pada frekuensi 50 Hz dengan hubungan Δ-Y. Luas penampang inti 600 cm² dan kerapatan fluksi sekitar 1,2 Wb/m².</p> | <p>3. Tentukan jumlah lilitan per fasa di setiap belitan dari sebuah transformator 3 fasa dengan rasio tegangan 12000/400 V, pada frekuensi 50 Hz dengan hubungan Y-Δ. Luas penampang inti 400 cm² dan kerapatan fluksi sekitar 1,2 Wb/m².</p> <p>4. Tegangan primer transformator 3 fasa terhubung Δ-Y adalah 12000 V (fasa-fasa). Pada pembebanan dengan faktor daya 0,8 <i>lagging</i> tegangan sekunder yang terhubung Y adalah 410 V (fasa-fasa). Resistansi dan reaktansi ekuivalen adalah 1 dan 5%. Tentukan perbandingan jumlah lilitan primer/sekunder</p> |
|---|---|

7.3. Generator Sinkron

Tujuan :

- Memahami cara kerja generator sinkron.
- Memahami hubungan jumlah kutub, kecepatan perputaran, frekuensi, dan mampu menghitung tegangan imbas pada jangkar.
- Mampu menggambarkan diagram fasor dan memahami rangkaian ekuivalen mesin sinkron rotor silindris.
- Mampu melakukan perhitungan sederhana pada mesin sinkron melalui karakteristik celah udara dan karakteristik hubung singkat.

Kita telah melihat bahwa pada transformator terjadi alih energi dari sisi primer ke sisi sekunder. Energi di ke-dua sisi transformator tersebut sama bentuknya (yaitu energi listrik) akan tetapi mereka mempunyai peubah sinyal (yaitu tegangan dan arus) yang berbeda besarnya. Kita katakan bahwa transformator merupakan piranti konversi energi dari energi listrik ke energi listrik.

Kita perhatikan pula bahwa peubah-peubah sinyal di sisi sekunder transformator muncul karena fluksi di inti transformator merupakan fungsi waktu. Fluksi fungsi waktu ini dibangkitkan oleh arus di sisi primer, yang juga merupakan fungsi waktu. Fluksi fungsi waktu dapat pula dibangkitkan dengan cara lain misalnya secara mekanis; cara inilah yang dilaksanakan pada piranti konversi energi dari energi mekanis ke energi listrik atau disebut konversi energi *elektromekanik*. Konversi energi elektromekanik ini tidak hanya dari mekanis ke listrik tetapi juga dari listrik ke mekanis, dan dilandasi oleh dua hukum dasar yang kita kenal yaitu hukum Faraday dan hukum Ampere. Secara matematis kedua hukum ini dinyatakan dalam persamaan (6.1) dan (6.7)

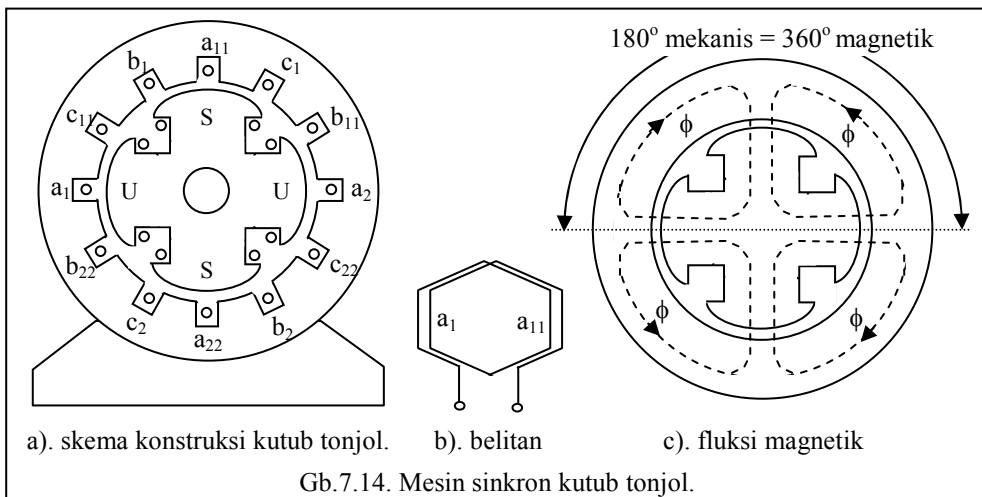
$$e = -\frac{d\lambda}{dt} = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (6.1) \quad \text{dan} \quad F = K_B B i f(\theta) \quad (6.7)$$

Persamaan (6.1) menunjukkan bagaimana tegangan dibangkitkan dan persamaan (6.7) menunjukkan bagaimana gaya mekanis ditimbulkan.

Berikut ini kita akan mempelajari mesin konversi energi yang sangat luas digunakan di pusat-pusat pembangkit listrik, yang disebut generator sinkron. Ada dua macam konstruksi yang akan kita lihat yaitu konstruksi *kutub tonjol* dan konstruksi *rotor silindris*.

Mesin Kutub Tonjol Keadaan Tak Berbeban

Skema konstruksi mesin ini adalah seperti terlihat pada Gb.7.14.a. Mesin ini terdiri dari bagian stator yang mendukung belitan-belitan a_1a_{11} sampai c_2c_{22} pada alur-alurnya, dan bagian rotor yang berputar yang mendukung kutub-kutub magnet.



Belitan pada stator tempat kita memperoleh energi disebut *belitan jangkar*. Belitan pada rotor yang dialiri arus eksitasi untuk menimbulkan medan magnet disebut *belitan eksitasi*. Pada gambar ini ada empat kutub magnet. Satu siklus kutub S-U pada rotor memiliki kisaran sudut (yang kita sebut *sudut magnetis* atau *sudut listrik*) 360° . Kisaran sudut 360° ini melingkupi tiga belitan di stator dengan posisi yang bergeser 120° antara satu dengan lainnya. Misalnya belitan a_1a_{11} dan belitan b_1b_{11} berbeda posisi 120° , belitan b_1b_{11} dan c_1c_{11} berbeda posisi 120° , dan mereka bertiga berada di bawah satu kisaran kutub S-U. Tiga belitan yang lain, yaitu a_2a_{22} , b_2b_{22} , dan c_2c_{22} berada dibawah satu kisaran kutub S-U yang lain dan mereka juga saling berbeda posisi 120° . Karena mesin ini merupakan mesin empat kutub (dua pasang kutub) maka satu perioda siklus mekanik (perputaran rotor) sama dengan dua perioda siklus magnetik. Jadi hubungan antara sudut kisaran mekanik dan sudut kisaran magnetik adalah

$$\theta_{magnetik}[\text{derajat}] = 2 \times \theta_{mekanik}[\text{derajat}]$$

atau secara umum

$$\theta_{magnetik}[\text{derajat}] = \frac{p}{2} \times \theta_{mekanik}[\text{derajat}] \quad (7.31)$$

dengan p adalah jumlah kutub.

Kecepatan sudut mekanik adalah

$$\omega_{mekanik} = \frac{d\theta_{mekanik}}{dt} = 2\pi f_{mekanik} \quad (7.32)$$

Frekuensi mekanik $f_{mekanik}$ adalah jumlah siklus mekanik per detik yang tidak lain adalah kecepatan perputaran rotor per detik. Biasanya kecepatan perputaran rotor dinyatakan dengan jumlah *rotasi per menit* (rpm). Jadi jika kecepatan perputaran rotor adalah n rpm, maka jumlah siklus per detik adalah $\frac{n}{60}$ atau $f_{mekanik} = \frac{n}{60}$ siklus per detik.

Kecepatan sudut magnetik adalah

$$\omega_{magnetik} = \frac{d\theta_{magnetik}}{dt} = 2\pi f_{magnetik} \quad (7.33)$$

Dengan hubungan (7.31) maka (7.33) menjadi

$$\omega_{magnetik} = \frac{p}{2} \omega_{mekanik} = \frac{p}{2} 2\pi f_{mekanik} = \frac{p}{2} 2\pi \frac{n}{60} = 2\pi \frac{pn}{120}$$

yang berarti

$$f_{magnetik} = \frac{pn}{120} \text{ siklus per detik} \quad (7.34)$$

Perubahan fluksi magnetik akan membangkitkan tegangan induksi di setiap belitan. Karena fluksi magnet mempunyai frekuensi $f_{magnetik} = \frac{pn}{120}$ Hz maka tegangan pada belitanpun akan mempunyai frekuensi

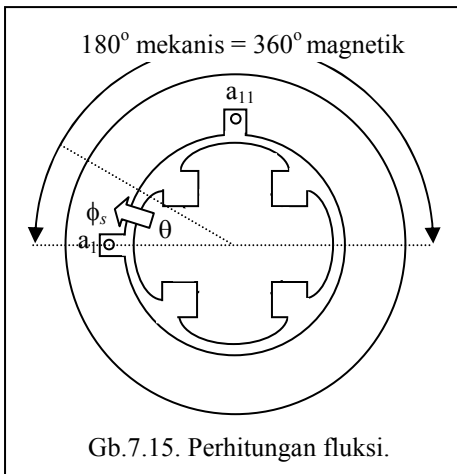
$$f_{tegangan} = \frac{pn}{120} \text{ Hz} \quad (7.35)$$

Dengan (7.35) ini jelaslah bahwa untuk memperoleh frekuensi tertentu, kecepatan perputaran rotor harus sesuai dengan jumlah kutub. Jika diinginkan $f = 50$ Hz misalnya, untuk $p = 2$ maka $n = 3000$ rpm; jika $p = 4$ maka $n = 1500$ rpm; jika $p = 6$ maka $n = 1000$ rpm, dan seterusnya. Konstruksi mesin dengan kutub menonjol seperti pada Gb.7.14. sesuai untuk mesin putaran rendah tetapi tidak sesuai untuk mesin putaran tinggi karena kendala-kendala mekanis. Untuk mesin putaran tinggi digunakan rotor dengan konstruksi silindris.

Dengan pergeseran posisi belitan 120° magnetik untuk setiap pasang kutub, maka kita mendapatkan tegangan sistem tiga fasa untuk setiap pasang kutub, yaitu e_{a1} pada belitan a_1a_{11} , e_{b1} pada b_1b_{11} , dan e_{c1} pada c_1c_{11} . Demikian pula kita memperoleh tegangan e_{a2} , e_{b2} dan e_{c2} pada belitan-belitan di bawah pasangan kutub yang lain. Jadi setiap pasang kutub akan membangkitkan tegangan sistem tiga fasa pada belitan-belitan yang berada dibawah

pengaruhnya. Tegangan yang sefasa, misalnya e_{a1} dan e_{a2} , dapat dijumlahkan untuk memperoleh tegangan yang lebih tinggi atau diparalelkan untuk memperoleh arus yang lebih besar.

Tegangan yang terbangkit di belitan pada umumnya diinginkan berbentuk gelombang sinus $v = A \cos \omega t$, dengan pergeseran 120° untuk belitan fasa-fasa yang lain. Tegangan sebagai fungsi waktu ini pada transformator dapat langsung diperoleh di belitan sekunder karena fluksinya merupakan fungsi waktu. Pada mesin sinkron, fluksi dibangkitkan oleh belitan eksitasi di rotor yang dialiri arus searah sehingga fluksi tidak merupakan fungsi waktu. Akan tetapi fluksi yang ditangkap oleh belitan stator harus merupakan fungsi waktu agar



persamaan (6.1) dapat diterapkan untuk memperoleh tegangan. Fluksi sebagai fungsi waktu diperoleh melalui putaran rotor. Jika ϕ adalah fluksi yang dibangkitkan di rotor dan memasuki celah udara antara rotor dan stator dengan nilai konstan maka, dengan mengabaikan efek pinggir, laju pertambahan fluksi yang ditangkap oleh belitan stator adalah

$$\frac{d\phi_s}{dt} = \phi \frac{d\theta_{magnetik}}{dt} = \phi \omega_{magnetik} \quad (7.36)$$

Karena $\omega_{magnetik} = 2\pi f_{magnetik} = 2\pi \frac{p n}{120}$, maka

$$\frac{d\phi_s}{dt} = \phi \pi \frac{p n}{60} \quad (7.37)$$

Dari (7.34) kita peroleh tegangan pada belitan, yaitu

$$v = -N \frac{d\phi_s}{dt} = -N \phi \pi \frac{p n}{60} \quad (7.38)$$

Jika ϕ bernilai konstan, tidaklah berarti (7.38) memberikan suatu tegangan konstan karena ϕ bernilai konstan positif untuk setengah periode dan bernilai konstan negatif untuk setengah periode berikutnya. Maka (7.38) memberikan tegangan bolak-balik yang tidak sinus. Untuk memperoleh tegangan berbentuk sinus, ϕ harus berbentuk sinus juga. Akan tetapi ia tidak dibuat sebagai fungsi sinus terhadap waktu, akan tetapi sebagai fungsi sinus posisi, yaitu terhadap $\theta_{magnetik}$. Jadi jika

$$\phi = \phi_m \cos \theta_{magnetik} \quad (7.39)$$

maka laju pertambahan fluksi yang dilingkupi belitan adalah

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_s}{dt} &= \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} (\phi_m \cos \theta_{magnetik}) = -\phi_m \sin \theta_{magnetik} \frac{d\theta_{magnetik}}{dt} \\ &= -\phi_m \omega_{magnetik} \sin \theta_{magnetik} = -\phi_m \left(2\pi \frac{p n}{120} \right) \sin \theta_{magnetik} \end{aligned} \quad (7.40)$$

sehingga tegangan belitan

$$\begin{aligned} e &= -N \frac{d\phi_s}{dt} = N \pi \phi_m \frac{p n}{60} \sin \theta_{magnetik} \\ &= 2\pi f N \phi_m \sin \theta_{magnetik} = \omega N \phi_m \sin \omega t \end{aligned} \quad (7.41)$$

Persamaan (7.41) memberikan nilai sesaat dari tegangan yang dibangkitkan di belitan stator. Nilai maksimum dari tegangan ini adalah

$$E_m = \omega N \phi_m \text{ Volt} \quad (7.42)$$

dan nilai efektifnya adalah

$$E_{rms} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{\omega N \phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} N \phi_m$$

$$= 4,44 f N \phi_m \text{ Volt} \quad (7.43)$$

Dalam menurunkan formulasi tegangan di atas, kita menggunakan perhitungan fluksi seperti diperlihatkan pada Gb.7.15. yang merupakan penyederhanaan dari konstruksi mesin seperti diperlihatkan pada Gb.7.14. a. Di sini ada beberapa hal yang perlu kita perhatikan yaitu:

1. Belitan terdiri dari hanya satu gulungan, misalnya belitan $a_1 a_{11}$, yang ditempatkan di sepasang alur stator, walaupun gulungan itu terdiri dari N lilitan. Belitan semacam ini kita sebut *belitan terpusat*.
2. Lebar belitan, yaitu kisar sudut antara sisi belitan a_1 dan a_{11} adalah 180° magnetik. Lebar belitan semacam ini kita sebut *kisar penuh*.

Dalam praktek lilitan setiap fasa tidak terpusat di satu belitan, melainkan terdistribusi di beberapa belitan yang menempati beberapa pasang alur stator. Belitan semacam ini kita sebut *belitan terdistribusi*, yang dapat menempati stator sampai $1/3$ kisaran penuh (60° magnetik). Selain dari pada itu, gulungan yang menempati sepasang alur secara sengaja dibuat tidak mempunyai lebar satu kisaran penuh; jadi lebarnya tidak 180° akan tetapi hanya 80% sampai 85% dari kisaran penuh. Pemanfaatan belitan terdistribusi dan lebar belitan tidak satu kisaran penuh dimaksudkan untuk menekan pengaruh harmonisa yang mungkin ada di kerapatan fluksi. Sudah barang tentu hal ini akan sedikit mengurangi komponen fundamental dan pengurangan ini dinyatakan dengan suatu faktor K_w yang kita sebut *faktor belitan*. Biasanya K_w mempunyai nilai antara 0,85 sampai 0,95. Dengan adanya faktor belitan ini formulasi tegangan (7.43) menjadi

$$E_{rms} = 4,44 f N K_w \phi_m \text{ Volt} \quad (7.44)$$

Pada pengenalan ini kita hanya melihat mesin sinkron kutub tonjol dalam keadaan tak berbeban; analisis dalam keadaan berbeban akan kita pelajari lebih lanjut pada pelajaran khusus mengenai mesin-mesin listrik. Selanjutnya kita akan melihat mesin sinkron rotor silindris.

CONTOH 7. 8 : Sebuah generator sinkron tiga fasa, 4 kutub, belitan jangkar terhubung Y, mempunyai 12 alur pada statornya dan setiap alur berisi 10 konduktor. Fluksi kutub terdistribusi secara sinus dengan nilai maksimumnya 0,03 Wb. Kecepatan perputaran rotor 1500 rpm. Carilah frekuensi tegangan jangkar dan nilai rms tegangan jangkar fasa-netral dan fasa-fasa.

Penyelesaian :

Frekuensi tegangan jangkar adalah

$$f = \frac{p n}{120} = \frac{4 \times 1500}{120} = 50 \text{ Hz}$$

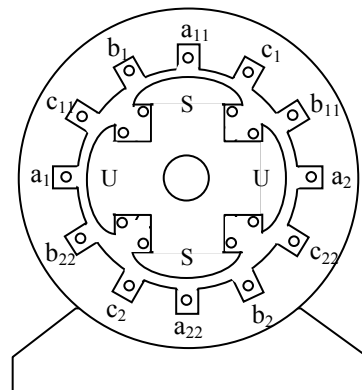
Jumlah alur per kutub adalah $\frac{12}{4} = 3$ yang berarti

setiap pasang kutub terdapat 3 belitan yang membangun sistem tegangan tiga fasa. Jadi setiap fasa terdiri dari 1 belitan yang berisi 10 lilitan. Nilai rms tegangan jangkar per fasa per pasang kutub adalah

$$E_{ak} = 4,44 f N \phi_m = 4,44 \times 50 \times 10 \times 0,03 = 66,6 \text{ V}$$

Karena ada dua pasang kutub maka tegangan per fasa adalah : $2 \times 66,6 = 133 \text{ V}$.

Tegangan fasa-fasa adalah $133 \sqrt{3} = 230 \text{ V}$.



CONTOH 7.9 : Soal seperti pada contoh 7.8. tetapi jumlah alur pada stator ditingkatkan menjadi 24 alur. Ketentuan yang lain tetap.

Penyelesaian :

Frekuensi tegangan jangkar tidak tergantung jumlah alur. oleh karena itu frekuensi tetap 50 Hz.

Jumlah alur per kutub adalah $\frac{24}{4} = 6$ yang berarti setiap pasang kutub terdapat 6 belitan

yang membangun sistem tegangan tiga fasa. Jadi setiap fasa pada satu pasang kutub terdiri dari 2 belitan yang masing-masing berisi 10 lilitan. Nilai rms tegangan jangkar untuk setiap belitan adalah $E_{a1} = 4,44 f N \phi_m V = 4,44 \times 50 \times 10 \times 0,03 = 66,6 V$.

Karena dua belitan tersebut berada pada alur yang berbeda, maka terdapat beda fasa antara tegangan imbas di keduanya. Perbedaan sudut mekanis antara dua alur yang berurutan adalah $\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$ mekanik. Karena mesin mengandung 4 kutub atau 2 pasang

kutub, maka 1° mekanik setara dengan 2° listrik. Jadi selisih sudut fasa antara tegangan di dua belitan adalah 30° listrik sehingga tegangan rms per fasa per pasang kutub adalah jumlah fasor tegangan di dua belitan yang berselisih fasa 30° tersebut.

$$E_{ak} = 66,6 + 66,6(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 124,8 + j33,3$$

Karena ada 2 pasang kutub maka $E_a = 2 \times \sqrt{(124,8)^2 + (33,3)^2} = 258 V$

Tegangan fasa-fasa adalah $258 \sqrt{3} = 447 V$

CONTOH 7.10 : Soal seperti pada contoh 7.8. tetapi jumlah alur pada stator ditingkatkan menjadi 144 alur, jumlah kutub dibuat 16 (8 pasang), kecepatan perputaran diturunkan menjadi 375 rpm. Ketentuan yang lain tetap.

Penyelesaian :

Frekuensi tegangan jangkar : $f = \frac{16 \times 375}{120} = 50 \text{ Hz}$

Jumlah alur per kutub $\frac{144}{16} = 9$ yang berarti terdapat 9 belitan per pasang kutub yang membangun sistem tiga fasa. Jadi tiap fasa terdapat 3 belitan. Tegangan di tiap belitan adalah $E_{a1} = 4,44 \times 50 \times 10 \times 0,03 = 66,6 V$; sama dengan tegangan per belitan pada contoh sebelumnya karena frekuensi, jumlah lilitan dan fluksi maksimum tidak berubah.

Perbedaan sudut mekanis antara dua alur yang berturutan adalah $\frac{360^\circ}{144} = 2,5^\circ$ mekanik.

Karena mesin mengandung 16 kutub (8 pasang) maka 1° mekanik ekivalen dengan 8° listrik, sehingga beda fasa tegangan pada belitan-belitan adalah $2,5 \times 8 = 20^\circ$ listrik. Tegangan per fasa per pasang kutub adalah jumlah fasor dari tegangan belitan yang masing-masing berselisih fasa 20° .

$$\begin{aligned} E_{ak} &= 66,6 + 66,6 \angle 20^\circ + 66,6 \angle 40^\circ \\ &= 66,6(1 + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + j(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ)) \\ &= 180,2 + j65,6 \end{aligned}$$

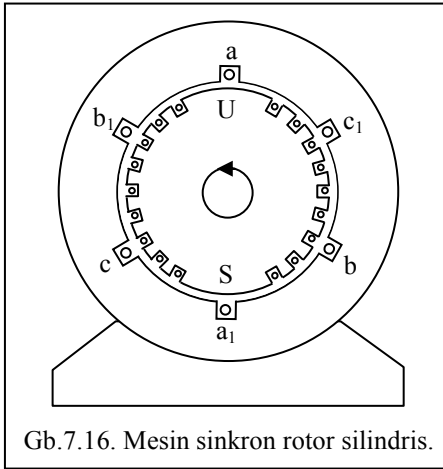
Karena ada 8 pasang kutub maka tegangan fasa adalah

$$E_a = 8 \times \sqrt{(180,2)^2 + (65,6)^2} = 8 \times 191,8 = 1534 V$$

Tegangan fasa-fasa adalah $1534 \sqrt{3} = 2657 V$

Mesin Sinkron Rotor Silindris

Sebagaimana telah disinggung di atas, mesin kutub tonjol sesuai untuk perputaran rendah. Untuk perputaran tinggi digunakan mesin rotor silindris yang skemanya diperlihatkan ada



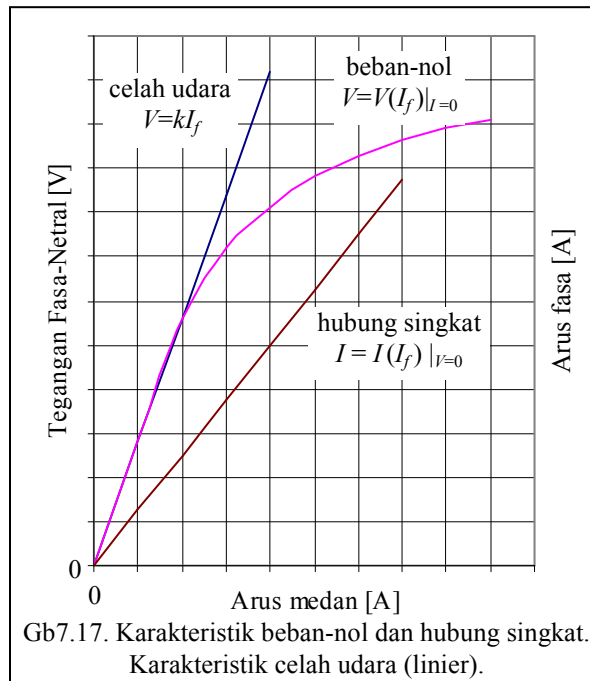
Gb.7.16. Mesin sinkron rotor silindris.

Gb.7.16. Rotor mesin ini berbentuk silinder dengan alur-alur untuk menempatkan belitan eksitasi. Dengan konstruksi ini, reluktansi magnet jauh lebih merata dibandingkan dengan mesin kutub tonjol. Di samping itu kendala mekanis untuk perputaran tinggi lebih mudah diatasi dibanding dengan mesin kutub tonjol. Belitan eksitasi pada gambar ini dialiri arus searah sehingga rotor membentuk sepasang kutub magnet U-S seperti terlihat pada gambar. Pada stator digambarkan tiga belitan terpusat aa_1 , bb_1 dan cc_1 masing-masing dengan lebar kisaran penuh agar tidak terlalu rumit, walaupun dalam kenyataan pada umumnya dijumpai belitan-belitan terdistribusi dengan lebar lebih kecil dari kisaran penuh.

Karena reluktansi magnet praktis konstan untuk berbagai posisi rotor (pada waktu rotor berputar) maka situasi yang kita hadapi mirip dengan transformator. Perbedaannya adalah bahwa pada transformator kita mempunyai fluksi konstan, sedangkan pada mesin sinkron fluksi tergantung dari arus eksitasi di belitan rotor. Kurva magnetisasi dari mesin ini dapat kita peroleh melalui *uji beban nol*. Dalam uji beban nol, mesin diputar pada perputaran sinkron (3000 rpm) dan belitan jangkar terbuka. Kita mengukur *tegangan keluaran* pada belitan jangkar sebagai fungsi *arus eksitasi* (disebut juga *arus medan*) pada belitan eksitasi di rotor. Kurva tegangan keluaran sebagai fungsi arus eksitasi seperti terlihat pada Gb.7.17. disebut *karakteristik beban nol*.

Bagian yang berbentuk garis lurus pada kurva ini disebut *karakteristik celah udara* dan kurva inilah (dengan ekstrapolasinya) yang akan kita gunakan untuk melakukan analisis mesin sinkron.

Karakterik lain yang penting adalah *karakteristik hubung singkat* yang dapat kita peroleh dari *uji hubung singkat*. Dalam uji hubung singkat ini mesin diputar pada kecepatan perputaran sinkron dan terminal belitan jangkar dihubungkan singkat (belitan jangkar terhubung Y). Kita mengukur arus fasa sebagai fungsi dari arus eksitasi. Kurva yang akan kita peroleh akan terlihat seperti pada Gb.7.17. Kurva ini berbentuk garis lurus karena untuk mendapatkan arus beban penuh pada percobaan ini,



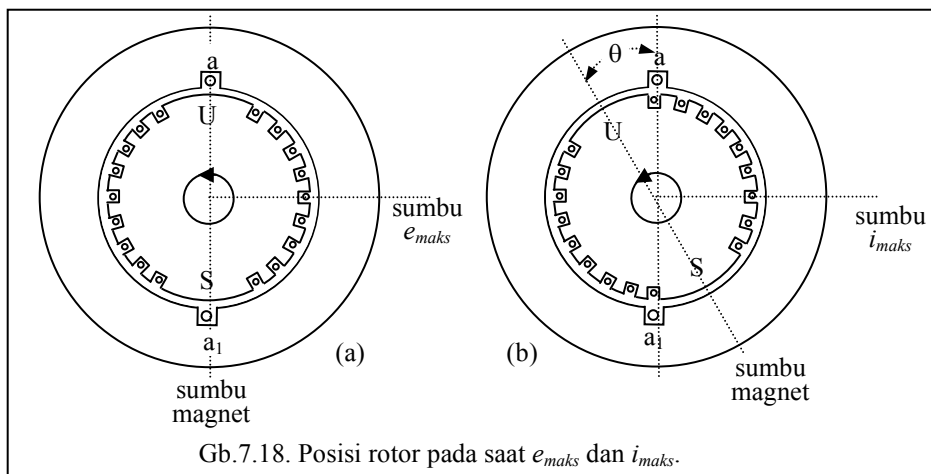
Gb.7.17. Karakteristik beban-nol dan hubung singkat. Karakteristik celah udara (linier).

arus eksitasi yang diperlukan tidak besar sehingga rangkaian magnetiknya jauh dari keadaan jenuh. Fluksi magnet yang dibutuhkan hanya sebatas yang diperlukan untuk membangkitkan tegangan untuk mengatasi tegangan jatuh di impedansi belitan jangkar.

Perhatikanlah bahwa karakteristik beban-nol dan hubung singkat memberikan tegangan maupun arus jangkar sebagai fungsi arus medan. Sesungguhnya arus medan berperan memberikan mmf (lilitan ampere) untuk menghasilkan fluksi dan fluksi inilah yang mengimbaskan tegangan pada belitan jangkar. Jadi dengan karakteristik ini kita dapat menyatakan pembangkit fluksi tidak dengan mmf akan tetapi dengan *arus medan ekuivalennya* dan hal inilah yang akan kita lakukan dalam menggambarkan diagram fasor yang akan kita pelajari berikut ini.

Diagram Fasor. Reaktansi Sinkron. Kita ingat bahwa pada transformator besaran-besaran tegangan, arus dan fluksi, semuanya merupakan besaran-besaran yang berubah secara sinusoidal terhadap waktu dengan frekuensi yang sama sehingga tidak terjadi kesulitan menyatakannya sebagai fasor. Pada mesin sinkron, hanya tegangan dan arus yang merupakan fungsi sinus terhadap waktu; fluksi rotor, walaupun ia merupakan fungsi sinus tetapi tidak terhadap waktu tetapi terhadap posisi sehingga tak dapat ditentukan frekuensinya. Menurut konsep fasor yang kita pelajari di Bab-5, kita dapat menyatakan besaran-besaran ke dalam fasor jika besaran-besaran tersebut berbentuk sinus dan sama frekuensinya. Oleh karena itu kita harus mencari cara yang dapat membuat fluksi rotor dinyatakan sebagai fasor. Hal ini mungkin dilakukan jika kita tidak melihat fluksi rotor sebagai dirinya sendiri melainkan melihatnya dari sisi belitan jangkar. Walaupun fluksi rotor hanya merupakan fungsi posisi, tetapi ia dibawa berputar oleh rotor dan oleh karena itu belitan jangkar melihatnya sebagai fluksi yang berubah terhadap waktu. Justru karena itulah terjadi tegangan imbas pada belitan jangkar sesuai dengan hukum Faraday. Dan sudah barang tentu frekuensi tegangan imbas di belitan jangkar sama dengan *frekuensi fluksi yang dilihat* oleh belitan jangkar.

Kita misalkan generator dibebani dengan beban induktif sehingga arus jangkar tertinggal dari tegangan jangkar. Gb.7.18.a. menunjukkan posisi rotor pada saat imbas tegangan di aa_1 maksimum. Hal ini dapat kita mengerti karena pada saat itu kerapatan fluksi magnet di *hadapan* sisi belitan a dan a_1 adalah maksimum. Perhatikanlah bahwa pada saat itu fluksi magnet yang *dilingkupi* oleh belitan aa_1 adalah minimum. Sementara itu arus di belitan aa_1 belum maksimum karena beban induktif. Pada saat arus mencapai nilai maksimum posisi rotor telah berubah seperti terlihat pada Gb.7.18.b.



Karena pada mesin dua kutub sudut mekanis sama dengan sudut magnetis, maka beda fasa antara tegangan dan arus jangkar sama dengan pegeseran rotasi rotor, yaitu θ . Arus jangkar memberikan mmf jangkar yang membangkitkan medan magnet lawan yang akan memperlemah fluksi rotor. Karena adanya reaksi jangkar ini maka arus eksitasi haruslah sedemikian rupa sehingga tegangan keluaran mesin dipertahankan.

Catatan : Pada mesin rotor silindris mmf jangkar mengalami reluktansi magnet yang sama dengan yang dialami oleh mmf rotor. Hal ini berbeda dengan mesin kutub tonjol yang akan membuat analisis mesin kutub tonjol memerlukan cara khusus sehingga kita tidak melakukannya dalam bab pengenalan ini.

Diagram fasor (Gb.7.19) kita gambarkan dengan ketentuan berikut

1. Diagram fasor dibuat per fasa dengan pembebanan induktif.
2. Tegangan terminal V_a dan arus jangkar I_a adalah nominal.
3. Tegangan imbas digambarkan sebagai tegangan naik; jadi tegangan imbas tertinggal 90° dari fluksi yang membangkitkannya (lihat catatan di akhir Bab-10).
4. Belitan jangkar mempunyai reaktansi bocor X_l dan resistansi R_a .
5. Mmf (fluksi) dinyatakan dalam arus ekivalen.

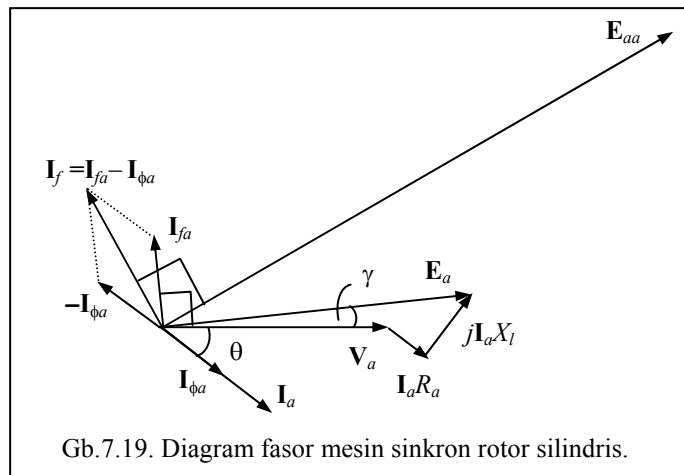
Dengan mengambil tegangan terminal jangkar V_a sebagai referensi, arus jangkar I_a tertinggal dengan sudut θ dari V_a (beban induktif). Tegangan imbas pada jangkar adalah

$$E_a = V_a + I_a(R_a + jX_l) \quad (7.45)$$

Tegangan imbas E_a ini harus dibangkitkan oleh fluksi celah udara Φ_a yang dinyatakan dengan arus ekivalen I_{fa} mendahului E_a 90° . Arus jangkar I_a memberikan fluksi jangkar Φ_a yang dinyatakan dengan arus ekivalen $I_{\phi a}$. Jadi fluksi dalam celah udara merupakan jumlah dari fluksi rotor Φ_f yang dinyatakan dengan arus ekivalen I_f dan fluksi jangkar. Jadi

$$I_{fa} = I_f + I_{\phi a} \quad \text{atau} \quad I_f = I_{fa} - I_{\phi a} \quad (7.46)$$

Dengan perkataan lain arus eksitasi rotor I_f haruslah cukup untuk membangkitkan fluksi celah udara untuk membangkitkan E_a dan mengatasi fluksi jangkar agar tegangan terbangkit E_a dapat dipertahankan. Perhatikan Gb.7.19. I_f membangkitkan tegangan E_{aa} 90° di belakang I_f dan lebih besar dari E_a .



Gb.7.19. Diagram fasor mesin sinkron rotor silindris.

Hubungan antara nilai E_a dan I_{fa} diperoleh dari karakteristik celah udara, sedangkan antara nilai I_a dan $I_{\phi a}$ diperoleh dari karakteristik hubung singkat. Dari karakteristik tersebut, seperti terlihat pada Gb.7.17., dapat dinyatakan dalam bentuk hubungan

$$E_a = k_v I_{fa} \quad \text{dan} \quad I_a = k_i I_{\phi a} \quad \text{atau} \quad I_{fa} = E_a / k_v \quad \text{dan} \quad I_{\phi a} = I_a / k_i \quad (7.47)$$

dengan k_v dan k_i adalah konstanta yang diperoleh dari kemiringan kurva. Dari (7.47) dan Gb.7.19. kita peroleh

$$\mathbf{I}_f = \mathbf{I}_{fa} - \mathbf{I}_{\phi a} = \frac{E_a}{k_v} \angle(90^\circ + \gamma) + \frac{I_a}{k_i} \angle(180^\circ - \theta) = j \frac{E_a}{k_v} \angle\gamma - \frac{I_a}{k_i} \angle -\theta \quad (7.48)$$

Dari (7.48) kita peroleh \mathbf{E}_{aa} yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{aa} &= -jk_v \mathbf{I}_f = -jk_v \left(j \frac{E_a}{k_v} \angle\gamma - \frac{I_a}{k_i} \angle -\theta \right) = E_a \angle\gamma + j \frac{k_v}{k_i} I_a \angle -\theta \\ &= \mathbf{E}_a + j \frac{k_v}{k_i} \mathbf{I}_a \end{aligned} \quad (7.49)$$

Suku kedua (7.49) dapat kita tulis sebagai $jX_{\phi a} \mathbf{I}_a$ dengan

$$X_{\phi a} = \frac{k_v}{k_i} \quad (7.50)$$

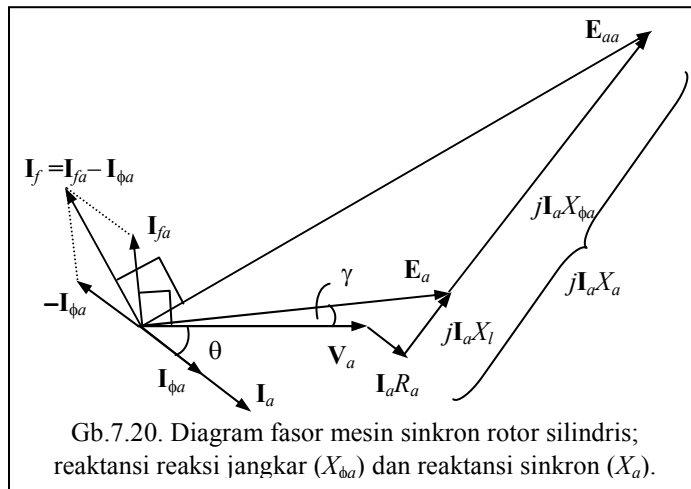
yang disebut *reaktansi reaksi jangkar* karena suku ini timbul akibat adanya reaksi jangkar. Selanjutnya (7.49) dapat ditulis

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{aa} &= \mathbf{E}_a + jX_{\phi a} \mathbf{I}_a = \mathbf{V}_a + \mathbf{I}_a (R_a + jX_l) + jX_{\phi a} \mathbf{I}_a \\ &= \mathbf{V}_a + \mathbf{I}_a (R_a + jX_a) \end{aligned} \quad (7.51)$$

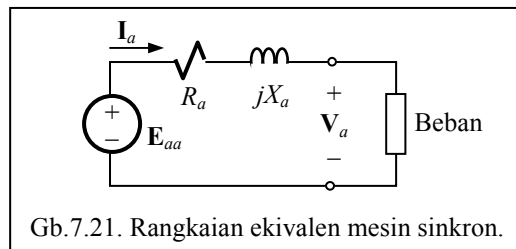
dengan $X_a = X_l + X_{\phi a}$ yang disebut *reaktansi sinkron*.

Diagram fasor Gb.7.19. kita gambarkan sekali lagi menjadi Gb.7.20. untuk memperlihatkan peran reaktansi reaksi jangkar dan reaktansi sinkron.

Perhatikanlah bahwa pengertian reaktansi sinkron kita turunkan dengan memanfaatkan karakteristik celah udara, yaitu karakteristik linier dengan mengangap rangkaian magnetik tidak jenuh. Oleh karena itu reaktansi tersebut biasa disebut *reaktansi sinkron tak jenuh*.



Rangkaian Ekuivalen. Dengan pengertian reaktansi sinkron dan memperhatikan persamaan (7.51) kita dapat menggambarkan rangkaian ekuivalen mesin sinkron dengan beban seperti terlihat pada Gb.7.21. Perhatikanlah bahwa rangkaian ekuivalen ini adalah rangkaian ekuivalen per fasa. Tegangan \mathbf{V}_a adalah tegangan fasa-netral dan \mathbf{I}_a adalah arus fasa.



CONTOH 7.11 : Sebuah generator sinkron tiga fasa 10 MVA, terhubung Y, 50 Hz, Tegangan fasa-fasa 13,8 kV, mempunyai karakteristik celah udara yang dapat dinyatakan sebagai $E_a = 53,78 I_f$ V dan karakteristik hubung singkat $I_a = 2,7 I_f$ A (I_f dalam ampere). Resistansi jangkar per fasa adalah $0,08 \Omega$ dan reaktansi bocor per fasa $1,9 \Omega$. Tentukanlah arus eksitasi (arus medan) yang diperlukan untuk membangkitkan tegangan terminal nominal jika generator dibebani dengan beban nominal seimbang pada faktor daya $0,8$ lagging.

Penyelesaian :

Tegangan per fasa adalah $V_a = \frac{13800}{\sqrt{3}} = 7967,4$ V .

Arus jangkar per fasa : $I_a = \frac{10 \times 10^6}{13800 \times \sqrt{3}} = 418,4$ A .

Reaktansi reaksi jangkar : $X_{\phi a} = \frac{k_v}{k_i} = \frac{53,78}{2,7} = 19,92 \Omega$

Reaktansi sinkron : $X_a = X_l + X_{\phi a} = 1,9 + 19,92 = 21,82 \Omega$

Dengan mengambil V_a sebagai referensi, maka $V_a = 7967,4 \angle 0^\circ$ V dan $I_a = 418,4 \angle -36,87^\circ$, dan tegangan terbangkit :

$$\begin{aligned} E_{aa} &= V_a + I_a(R_a + jX_a) = 7967,4 \angle 0^\circ + 418,4 \angle -36,87^\circ (0,08 + j21,82) \\ &\approx 7967,4 \angle 0^\circ + 9129,5 \angle 53,13^\circ = 13445,1 + j7303,6 \end{aligned}$$

$$E_{aa} = \sqrt{(13445,1)^2 + (7303,6)^2} = 15300 \text{ V}$$

Arus eksitasi yang diperlukan adalah

$$I_f = \frac{E_{aa}}{k_v} = \frac{15300}{53,78} = 284,5 \text{ A}$$

Daya. Daya per fasa yang diberikan ke beban adalah

$$P_f = V_a I_a \cos \theta \quad (7.52)$$

Pada umumnya pengaruh resistansi jangkar sangat kecil dibandingkan dengan pengaruh reaktansi sinkron. Dengan mengabaikan resistansi jangkar maka diagram fasor mesin sinkron menjadi seperti Gb.7.22.

Dari Gb.7.22. terlihat bahwa

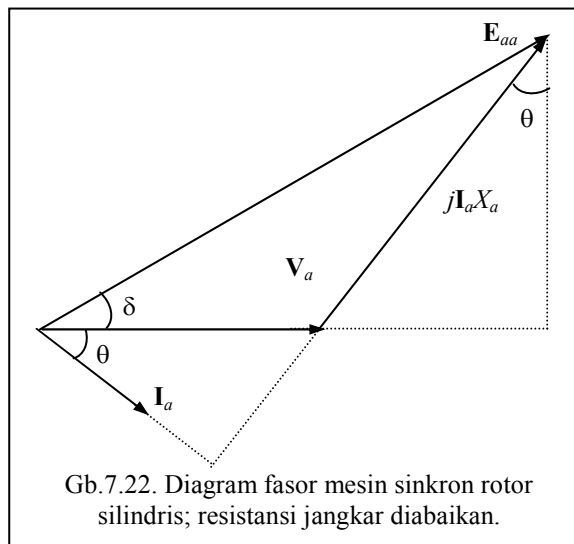
$$E_{aa} \sin \delta = I_a X_a \cos \theta \quad \text{atau}$$

$$I_a \cos \theta = \frac{E_{aa}}{X_a} \sin \delta .$$

Dengan demikian maka (7.52) dapat ditulis sebagai

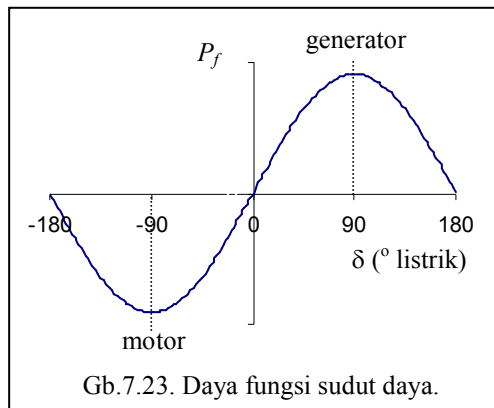
$$P_f = \frac{V_a E_{aa}}{X_a} \sin \delta \quad (7.53)$$

Persamaan (7.53) ini memberikan formulasi daya per fasa dan sudut δ menentukan besarnya daya; oleh karena itu sudut δ disebut *sudut daya* (power angle).



Gb.7.22. Diagram fasor mesin sinkron rotor silindris; resistansi jangkar diabaikan.

Daya P_f merupakan fungsi sinus dari sudut daya δ seperti terlihat pada Gb.7.23. Untuk $0 < \delta < 180^\circ$ daya bernilai positif, mesin beroperasi sebagai generator yang memberikan daya. (Jangan dikacaukan oleh konvensi pasif karena dalam menggambarkan diagram fasor untuk mesin ini kita menggunakan ketentuan *tegangan naik* dan *bukan tegangan jatuh*). Untuk $0 > \delta > -180^\circ$ mesin beroperasi sebagai motor, mesin menerima daya.



Dalam pengenalan mesin-mesin listrik ini, pembahasan mengenai mesin sikron kita cukupkan sampai di sini. Pembahasan lebih lanjut akan kita peroleh pada pelajaran khusus mengenai mesin-mesin listrik.

SOAL-SOAL : GENERATOR SINKRON

1. Sebuah generator sinkron 3 fasa, 50 Hz, 10 kutub, memiliki 90 alur di statornya. Fluksi maksimum per kutub adalah sekitar 0,2 Wb. Tentukanlah jumlah lilitan per belitan jika tegangan fasa-fasa yang diharapkan adalah 12 kV, dengan belitan jangkar terhubung Y.
2. Sebuah generator sinkron 3 fasa, 10 kutub, hubungan Y, kecepatan perputaran 600 rpm. Jumlah alur stator 120 dengan 8 konduktor tiap alur; belitan fasa terhubung seri. Jika fluksi maksimum tiap kutub adalah 0,06 Wb, hitunglah tegangan imbas fasa-netral dan fasa-fasa.
3. Sebuah generator sinkron 3 fasa, 1500 kVA, 6600 V, hubungan Y, mempunyai karakteristik celah udara sebagai $V_a = 57,14 \times I_f$ V dan karakteristik hubung singkat $I_a = 2,63 \times I_f$ A. Generator bekerja pada beban penuh pada faktor daya 0,8 *lagging*. Jika tegangan jatuh reaktif dan resistif pada jangkar adalah 8% dan 2% dari tegangan normal, tentukan eksitasi yang diperlukan.
4. Sebuah generator sinkron 3 fasa, 5000 kVA, 6600 V, hubungan Y, mempunyai karakteristik celah udara sebagai $V_a = 54,44 \times I_f$ V dan karakteristik hubung singkat $I_a = 21,87 \times I_f$ A. Generator bekerja pada beban penuh pada faktor daya 0,6 *lagging*. Jika reaktansi dan resistansi jangkar per fasa adalah 1 Ω dan 0,2 Ω , tentukan selang eksitasi yang diperlukan untuk mempertahankan tegangan jangkar tetap konstan dari beban nol sampai beban penuh.
5. Sebuah generator sinkron 3 fasa, 1500 kVA, 6600 V, hubungan Y, beroperasi pada beban penuh dengan faktor daya 0,8 *lagging*. Karakteristik celah udara menunjukkan $V_a = 217,7 \times I_f$ V. Generator ini mempunyai stator dengan 9 alur per kutub dan tiap alur berisi 6 konduktor. Jika tegangan jatuh induktif adalah 10% pada beban penuh sedangkan resistansi dapat diabaikan. Rotor adalah kutub tonjol dengan 125 lilitan tiap kutub. Tentukan arus eksitasi pada beban penuh.

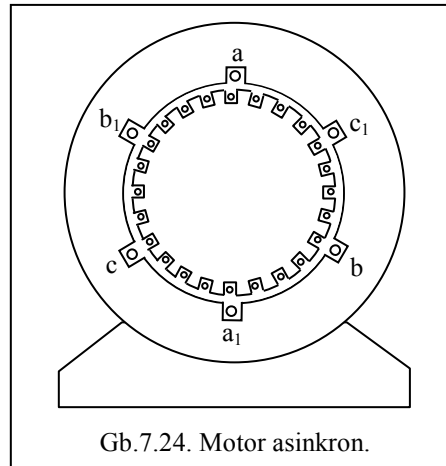
7.4. Motor Asinkron

Tujuan :

- Memahami cara kerja motor asinkron.
- Mampu melakukan perhitungan-perhitungan sederhana pada motor asinkron melalui rangkaian ekuivalen.

Konstruksi Dan Cara Kerja

Motor merupakan piranti konversi dari energi listrik ke energi mekanik. Salah satu jenis yang banyak dipakai adalah motor asinkron atau motor induksi. Di sini kita hanya akan melihat motor asinkron tiga fasa. Stator memiliki alur-alur untuk memuat belitan-belitan yang akan terhubung pada sistem tiga fasa. Gb.7.24. hanya memperlihatkan tiga belitan pada stator sebagai belitan terpusat, yaitu belitan aa_1 , bb_1 dan cc_1 yang berbeda posisi 120° mekanik. Susunan belitan ini sama dengan susunan belitan pada stator generator sinkron. Ketiga belitan ini dapat dihubungkan Y ataupun Δ untuk selanjutnya disambungkan ke sumber tiga fasa. Rotor mempunyai alur-alur yang berisi konduktor dan semua konduktor pada rotor ini dihubungkan singkat di ujung-ujungnya. Inilah salah satu konstruksi rotor yang disebut *rotor sangkar* (susunan konduktor-konduktor itu berbentuk sangkar).



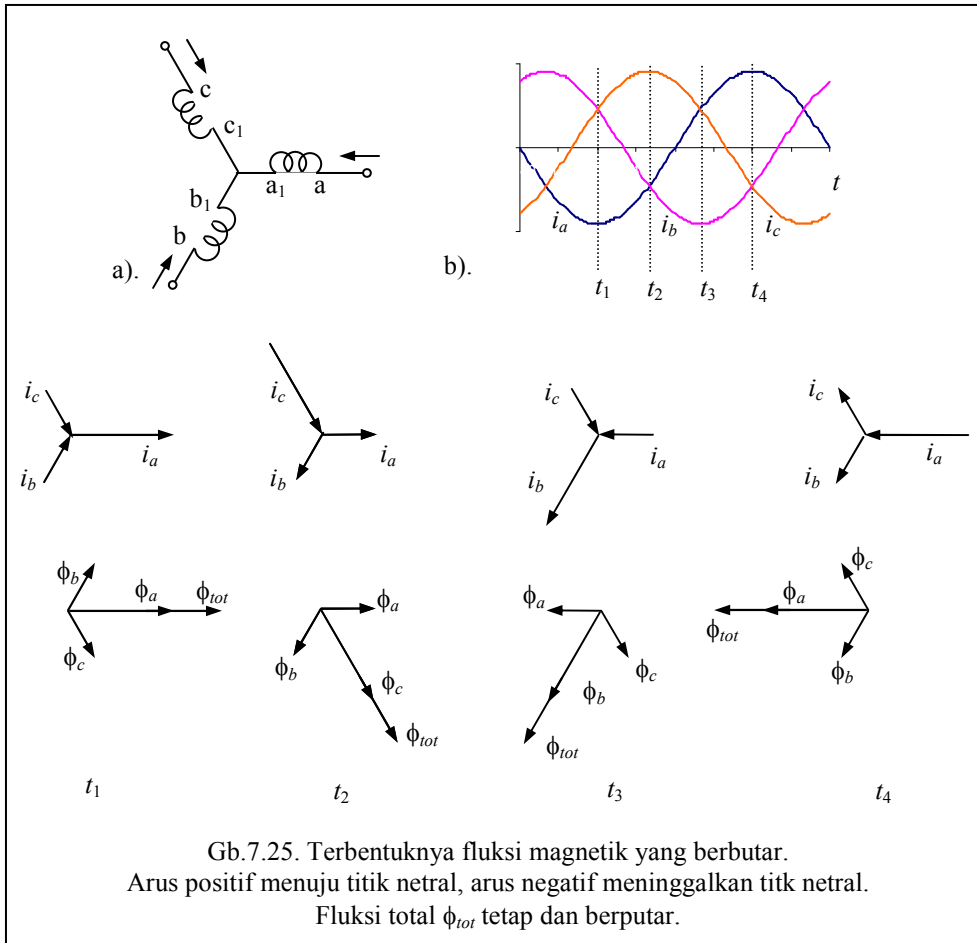
Gb.7.24. Motor asinkron.

Untuk memahami secara fenomenologis cara kerja motor ini, kita melihat kembali bagaimana generator sinkron bekerja. Rotor generator yang mendukung kutub magnet konstan berputar pada porosnya. Magnet yang berputar ini mengimbaskan tegangan pada belitan stator yang membangun sistem tegangan tiga fasa. Apabila rangkaian belitan stator tertutup, misalnya melalui pembebanan, akan mengalir arus tiga fasa pada belitan stator. Sesuai dengan hukum Lenz, arus tiga fasa ini akan membangkitkan fluksi yang melawan fluksi rotor; kejadian ini kita kenal sebagai reaksi jangkar. Karena fluksi rotor adalah konstan tetapi berputar sesuai perputaran rotor, maka fluksi reaksi jangkar juga harus berputar sesuai perputaran fluksi rotor karena hanya dengan jalan itu hukum Lenz dipenuhi. Jadi mengalirnya arus tiga fasa pada belitan rotor membangkitkan fluksi konstan yang berputar. Sekarang, jika pada belitan stator motor asinkron diinjeksikan arus tiga fasa (belitan stator dihubungkan pada sumber tiga fasa) maka akan timbul fluksi konstan berputar seperti layaknya fluksi konstan berputar pada reaksi jangkar generator sinkron. Demikianlah bagaimana fluksi berputar timbul jika belitan stator motor asikron dihubungkan ke sumber tiga fasa.

Kita akan melihat pula secara skematis, bagaimana timbulnya fluksi berputar. Untuk itu hubungan belitan stator kita gambarkan sebagai tiga belitan terhubung Y yang berbeda posisi 120° mekanis satu sama lain seperti terlihat pada Gb.7.25.a. Belitan-belitan itu masing-masing dialiri arus i_a , i_b , dan i_c yang berbeda fasa 120° listrik seperti ditunjukkan oleh Gb.7.25.b. Masing-masing belitan itu akan membangkitkan fluksi yang berubah terhadap waktu sesuai dengan arus yang mengalir padanya. Kita perhatikan situasi yang terjadi pada beberapa titik waktu.

Perhatikan Gb.7.25. Pada t_1 arus i_a maksimum negatif dan arus $i_b = i_c$ positif. Ke-tiga arus ini masing-masing membangkitkan fluksi ϕ_a , ϕ_b dan ϕ_c yang memberikan fluksi total ϕ_{tot} .

Kejadian ini berubah pada t_2 , t_3 , t_4 dan seterusnya yang dari Gb.7.25. terlihat bahwa fluksi total berputar seiring dengan perubahan arus di belitan tiga fasa. Peristiwa ini dikenal sebagai *medan putar* pada mesin asinkron.



Kecepatan perputaran dari medan putar harus memenuhi relasi antara jumlah kutub, frekuensi tegangan dan kecepatan perputaran sinkron sebagaimana telah kita kenal pada mesin sinkron yaitu

$$f_1 = \frac{p n_s}{120} \text{ Hz} \quad \text{atau} \quad n_s = \frac{120 f_1}{p} \text{ rpm} \quad (7.54)$$

dengan f_1 adalah frekuensi tegangan stator, n_s adalah kecepatan perputaran medan putar yang kita sebut perputaran sinkron. Jumlah kutub p ditentukan oleh susunan belitan stator. Pada belitan stator seperti pada contoh konstruksi mesin pada Gb.7.24. jumlah kutub adalah 2, sehingga jika frekuensi tegangan 50Hz maka perputaran sinkron adalah 3000 rpm. Untuk mempuat jumlah kutub menjadi 4, belitan stator disusun seperti pada stator mesin sinkron pada Gb.7.14.

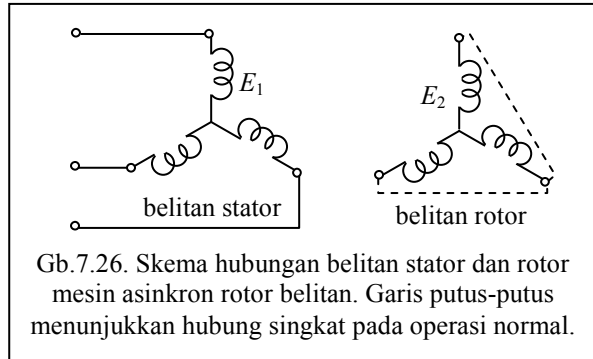
Selanjutnya medan magnet berputar yang ditimbulkan oleh stator akan mengimbaskan tegangan pada konduktor rotor. Karena konduktor rotor merupakan rangkaian tertutup, maka akan mengalir arus yang kemudian berinteraksi dengan medan magnet yang berputar dan timbullah gaya sesuai dengan hukum Ampere. Dengan gaya inilah terbangun torka yang akan membuat rotor berputar dengan kecepatan perputaran n . Perhatikanlah bahwa untuk terjadi torka, harus ada arus mengalir di konduktor rotor dan untuk itu harus ada tegangan

imbas pada konduktor rotor. Agar terjadi tegangan imbas, maka kecepatan perputaran rotor n harus lebih kecil dari kecepatan perputaran medan magnet (yaitu kecepatan perputaran sinkron n_s) sebab jika kecepatannya sama tidak akan ada fluksi yang terpotong oleh konduktor. Dengan kata lain terjadi beda kecepatan antara rotor dengan medan putar, atau

$$\text{terjadi slip yang besarnya adalah : } s = \frac{n_s - n}{n_s} \quad (7.55)$$

Nilai s terletak antara 0 dan 1.

Rotor Belitan. Pada awal pengenalan kita dengan mesin asinkron, kita melihat pada konstruksi yang disebut mesin asinkron dengan rotor sangkar. Jika pada rotor mesin asinkron dibuat alur-alur unruk meletakkan susunan belitan yang sama dengan susunan belitan stator maka kita mempunyai mesin asinkron *rotor belitan*. Terminal belitan rotor dapat dihubungkan dengan cincin geser (yang berputar bersama rotor) dan melalui cincin geser ini dapat dihubungkan pada resistor untuk keperluan pengaturan perputaran. Skema hubungan belitan stator dan rotor diperlihatkan pada Gb.7.26. ; pada waktu operasi normal belitan rotor dihubung singkat. Hubungan seperti ini mirip dengan transformator. Medan putar akan mengimbaskan tegangan baik pada belitan stator maupun rotor.



Tegangan imbas pada stator adalah :

$$E_1 = 4,44 f N_1 K_{w1} \phi_m \quad (7.56)$$

dengan K_{w1} adalah faktor belitan stator, $f = \frac{p n_s}{120}$ = frekuensi tegangan stator, ϕ_m adalah fluksi maksimum di celah udara, N_1 adalah jumlah lilitan belitan stator.

Jika belitan rotor terbuka dan rotor tidak berputar, maka tegangan imbas pada belitan rotor adalah

$$E_2 = 4,44 f N_2 K_{w2} \phi_m \quad (7.57)$$

dengan K_{w2} adalah faktor belitan rotor, $f = \frac{p n_s}{120}$ = frekuensi tegangan stator (karena rotor tidak berputar), ϕ_m adalah fluksi maksimum di celah udara sama dengan fluksi yang mengimbaskan tegangan pada belitan stator, N_2 adalah jumlah lilitan belitan rotor.

Jika rotor dibiarkan berputar dengan kecepatan perputaran n maka terdapat *slip* seperti ditunjukkan oleh (7.55). Frekuensi tegangan imbas pada rotor menjadi

$$f_2 = \frac{p(n_s - n)}{120} = \frac{p s n_s}{120} = s f \text{ Hz} \quad (7.58)$$

Jadi frekuensi tegangan rotor diperoleh dengan mengalikan frekuensi stator dengan *slip* s ; oleh karena itu ia sering disebut *frekuensi slip*. Tegangan imbas pada belitan rotor dalam keadaan berputar menjadi

$$E_{22} = s E_2 \quad (7.59)$$

Jika rotor tak berputar (belitan rotor terbuka), maka dari (7.56) dan (7.57) kita peroleh

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1 K_{w1}}{N_2 K_{w2}} = a \quad (7.60)$$

Situasi ini mirip dengan transformator tanpa beban.

CONTOH 7.12 : Tegangan seimbang tiga fasa 50 Hz diberikan kepada motor asinkron tiga fasa , 4 kutub. Pada waktu motor melayani beban penuh, diketahui bahwa *slip* yang terjadi adalah 0,05. Tentukanlah : (a) kecepatan perputaran medan putar relatif terhadap stator; (b) frekuensi arus rotor; (c) kecepatan perputaran medan rotor relatif terhadap rotor; (d) kecepatan perputaran medan rotor relatif terhadap stator; (e) kecepatan perputaran medan rotor relatif terhadap medan rotor.

Penyelesaian:

(a) Relasi antara kecepatan medan putar relatif terhadap stator (kecepatan sinkron) dengan frekuensi dan jumlah kutub adalah $f = \frac{p n_s}{120}$. Jadi kecepatan perputaran medan putar adalah

$$n_s = \frac{120f}{p} = \frac{120 \times 50}{4} = 1500 \text{ rpm}$$

(b) Frekuensi arus rotor adalah $f_2 = sf_1 = 0,05 \times 50 = 2,5 \text{ Hz}$.

(c) Karena belitan rotor adalah juga merupakan belitan tiga fasa dengan pola seperti belitan stator, maka arus rotor akan menimbulkan pula medan putar seperti halnya arus belitan stator menimbulkan medan putar. Kecepatan perputaran medan putar rotor relatif terhadap rotor adalah $n_2 = \frac{120f_2}{p} = \frac{120 \times 2,5}{4} = 75 \text{ Hz}$

(d) Relatif terhadap stator, kecepatan perputaran medan rotor harus sama dengan kecepatan perputaran medan stator, yaitu kecepatan sinkron 1500 rpm.

(e) Karena kecepatan perputaran medan rotor sama dengan kecepatan perputaran medan stator, kecepatan perputaran relatifnya adalah 0.

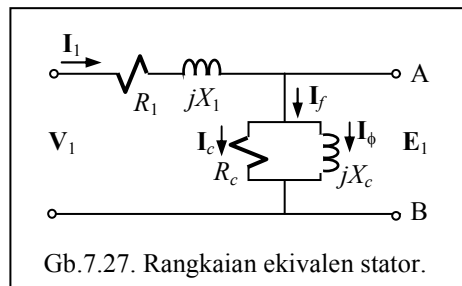
Rangkaian Ekuivalen

Rangkaian ekuivalen yang akan kita pelajari adalah rangkaian ekuivalen per fasa.

Rangkaian Ekuivalen Stator. Jika resistansi belitan primer per fasa adalah R_1 dan reaktansinya adalah X_1 , sedangkan rugi-rugi inti dinyatakan dengan rangkaian paralel suatu resistansi R_c dan reaktansi X_ϕ seperti halnya pada transformator. Jika V_1 adalah tegangan masuk per fasa pada belitan stator motor dan E_1 adalah tegangan imbas pada belitan stator oleh medan putar seperti diberikan oleh (7.56), maka kita akan mendapatkan hubungan fasor

$$V_1 = I_1(R_1 + jX_1) + E_1 \tag{7.61}$$

Fasor-fasor tegangan dan arus serta reaktansi pada persamaan (7.61) ini adalah pada frekuensi sinkron $\omega_s = 2\pi f_1$. Rangkaian ekuivalen stator menjadi seperti pada Gb.7.27. yang mirip rangkaian primer transformator. Perbedaan terletak pada besarnya I_f yang pada transformator berkisar antara 2 – 5 persen dari arus nominal, sedangkan pada motor asinkron arus ini antara 25 – 40 persen arus nominal, tergantung dari besarnya motor. Selain itu reaktansi bocor X_1 pada motor jauh lebih besar karena adanya celah udara dan belitan stator terdistribusi pada permukaan dalam stator sedangkan pada transformator belitan terpusat pada intinya. Tegangan E_1 pada terminal AB pada rangkaian ekuivalen ini haruslah merefleksikan peristiwa yang terjadi di rotor.



Gb.7.27. Rangkaian ekuivalen stator.

Rangkaian Ekuivalen Rotor. Jika rotor dalam keadaan berputar maka tegangan imbas pada rotor adalah E_{22} . Jika resistansi rotor adalah R_{22} dan reaktansinya adalah X_{22} maka arus rotor adalah :

$$I_{22} = \frac{E_{22}}{(R_{22} + jX_{22})} \quad (7.62)$$

Perhatikanlah bahwa fasor-fasor tegangan dan arus serta nilai reaktansi pada persamaan (7.62) ini adalah pada frekuensi rotor $\omega_2 = 2\pi f_2$, berbeda dengan persamaan fasor (7.61). Kita gambarkan rangkaian untuk persamaan (7.62) ini seperti pada Gb.7.28.a.

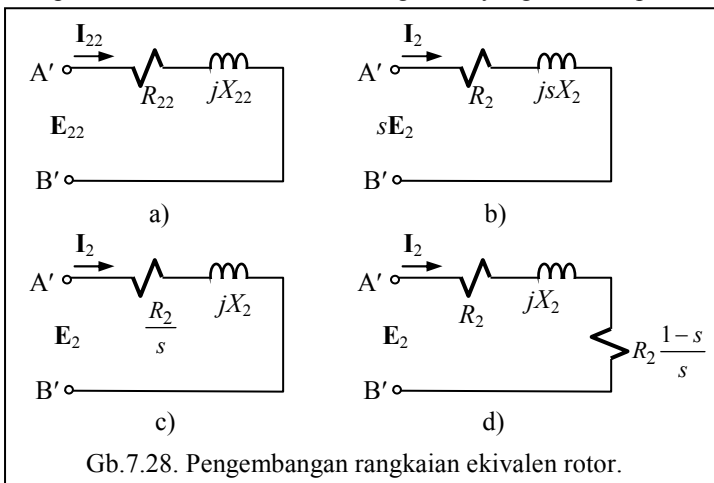
Menurut (7.59) $E_{22} = sE_2$ dimana E_2 adalah tegangan rotor dengan frekuensi sinkron ω_s . Reaktansi rotor X_{22} dapat pula dinyatakan dengan frekuensi sinkron; jika L_2 adalah induktansi belitan rotor (yang merupakan besaran konstan karena ditentukan oleh konstruksinya) maka kita mempunyai hubungan

$$X_{22} = \omega_2 L_2 = s\omega_1 L_2 = sX_2 \quad (7.63)$$

Di sini kita mendefinisikan reaktansi rotor dengan frekuensi sinkron $X_2 = \omega_1 L_2$. Karena Resistansi tidak tergantung frekuensi, kita nyatakan resistansi rotor sebagai $R_2 = R_{22}$. Dengan demikian maka arus rotor menjadi

$$I_2 = \frac{sE_2}{R_2 + jsX_2} \quad (7.64)$$

Persamaan fasor tegangan dan arus rotor (7.64) sekarang ini adalah pada frekuensi sinkron dan persamaan ini adalah dari rangkaian yang terlihat pada Gb.7.28.b. Tegangan pada terminal rotor A'B' adalah tegangan karena ada slip yang besarnya adalah sE_2 . Dari rangkaian ini kita dapat menghitung besarnya daya nyata yang diserap rotor per fasa, yaitu



terminal rotor A'B' adalah tegangan karena ada slip yang besarnya adalah sE_2 . Dari rangkaian ini kita dapat menghitung besarnya daya nyata yang diserap rotor per fasa, yaitu

$$P_{cr} = I_2^2 R_2 \quad (7.65)$$

Jika pembilang dan penyebut pada persamaan (7.64) kita bagi dengan s kita akan mendapatkan

$$I_2 = \frac{E_2}{\frac{R_2}{s} + jX_2} \quad (7.66)$$

Langkah matematis ini tidak akan mengubah nilai I_2 dan rangkaian dari persamaan ini adalah seperti pada Gb.7.28.c. Walaupun demikian ada perbedaan penafsiran secara fisik. Tegangan pada terminal rotor A'B' sekarang adalah tegangan imbas pada belitan rotor dalam keadaan rotor tidak berputar dengan nilai seperti diberikan oleh (7.57) dan bukan tegangan karena ada slip. Jika pada Gb.7.28.b. kita mempunyai rangkaian riil rotor dengan resistansi konstan R dan tegangan terminal rotor yang tergantung dari slip, maka pada Gb.7.28.c. kita mempunyai rangkaian ekuivalen rotor dengan tegangan terminal rotor tertentu dan resistansi yang tergantung dari slip. Tegangan terminal rotor pada keadaan terakhir ini kita sebut tegangan celah udara pada terminal rotor dan daya yang diserap rotor kita sebut

daya celah udara, yaitu : $P_g = I_2^2 \frac{R_2}{s} \quad (7.67)$

Daya ini jauh lebih besar dari P_{cr} pada (7.65). Pada mesin besar nilai s adalah sekitar 0,02 sehingga P_g sekitar 50 kali P_{cr} . Perbedaan antara (7.67) dan (7.65) terjadi karena kita beralih dari tegangan rotor riil yang berupa tegangan *slip* ke tegangan rotor dengan frekuensi sinkron. Daya nyata P_g tidak hanya mencakup daya hilang pada resistansi belitan saja tetapi mencakup *daya mekanis* dari motor. Daya mekanis dari rotor ini sendiri mencakup daya keluaran dari poros motor untuk memutar beban ditambah daya untuk mengatasi *rugi-rugi rotasi* yaitu rugi-rugi akibat adanya gesekan dan angin. Oleh karena itu daya P_g kita sebut daya celah udara artinya daya yang dialihkan dari stator ke rotor melalui celah udara yang meliputi daya hilang pada belitan rotor (rugi tembaga rotor) dan daya mekanis rotor. Dua komponen daya ini dapat kita pisahkan jika kita menuliskan

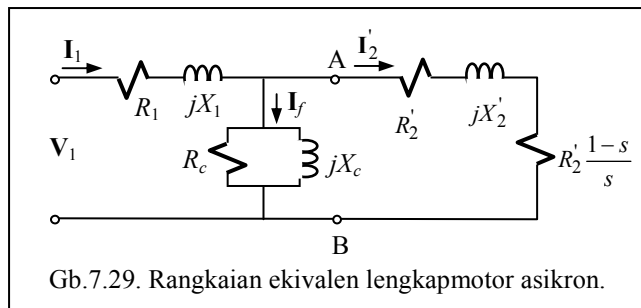
$$\frac{R_2}{s} = R_2 + R_2 \left(\frac{1-s}{s} \right) \quad (7.68)$$

Suku pertama (7.68) akan memberikan daya hilang di belitan rotor (per fasa) $P_{cr} = I_2^2 R_2$ dan suku kedua memberikan daya keluaran mekanik ekuivalen

$$P_m = I_2^2 R_2 \left(\frac{1-s}{s} \right) \quad (7.69)$$

Dengan cara ini kita akan mempunyai rangkaian ekuivalen rotor seperti pada Gb.7.28.d.

Rangkaian Ekuivalen Lengkap. Kita menginginkan satu rangkaian ekuivalen untuk mesin asinkron yang meliputi stator dan rotor. Agar dapat menghubungkan rangkaian rotor dengan rangkaian stator, kita harus melihat tegangan rotor E_2 dari sisi stator dengan memanfaatkan (7.60) yang memberikan $E_1 = aE_2$. Jika E_2 pada Gb.7.28.d. kita ganti dengan $E_1 = aE_2$, yaitu tegangan rotor dilihat dari sisi



Gb.7.29. Rangkaian ekuivalen lengkap motor asinkron.

stator, maka arus rotor dan semua parameter rotor harus pula dilihat dari sisi stator menjadi I_2' , R_2' dan X_2' . Dengan demikian kita dapat menghubungkan terminal rotor A'B' ke terminal AB dari rangkaian stator pada Gb.7.27. dan mendapatkan rangkaian ekuivalen lengkap seperti terlihat pada Gb.7.29.

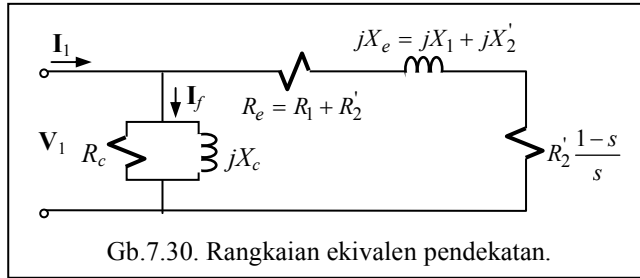
Aliran Daya. Aliran daya *per fasa* dalam motor asinkron dapat kita baca dari rangkaian ekuivalen sebagai berikut. Daya (riil) yang masuk ke stator motor melalui tegangan V_1 dan arus I_1 digunakan untuk :

- mengatasi rugi tembaga stator : $P_{cs} = I_1^2 R_1$
- mengatasi rugi-rugi inti stator : P_{inti}
- daya masuk ke rotor, disebut daya celah udara $P_g = (I_2')^2 \frac{R_2'}{s}$, yang digunakan untuk
 - mengatasi rugi-rugi tembaga rotor : $P_{cr} = (I_2')^2 R_2'$
 - memberikan daya mekanis rotor $P_m = (I_2')^2 R_2' \left(\frac{1-s}{s} \right)$, yang terdiri dari :
 - daya untuk mengatasi rugi rotasi (gesekan dan angin) : P_{rotasi}
 - daya keluaran di poros rotor : P_o .

Jadi urutan aliran daya secara singkat adalah :

$$P_o = P_m - P_{rotasi} \quad ; \quad P_m = P_g - P_{cr} \quad ; \quad P_g = P_{in} - P_{inti} - P_{cs}$$

Rangkaian Ekuivalen Pendekatan. Dalam melakukan analisis motor asinkron kita sering menggunakan rangkaian ekuivalen pendekatan yang lebih sederhana seperti pada Gb.7.30. Dalam rangkaian ini kita rugi-rugi tembaga stator dan rotor disatukan menjadi $(I_2')^2 R_e$. Bagaimana R_e dan X_e ditentukan akan kita bahas berikut ini.



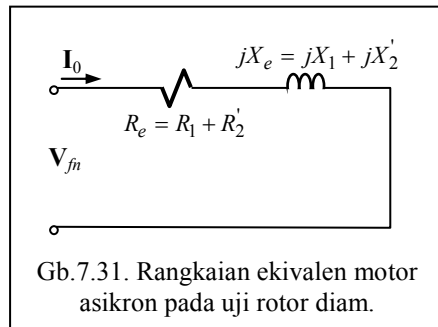
Gb.7.30. Rangkaian ekuivalen pendekatan.

Penentuan Parameter Rangkaian

Pengukuran Resistansi. Resistansi belitan stator maupun belitan rotor dapat diukur. Namun perlu diingat bahwa jika pengukuran dilakukan dengan menggunakan metoda pengukuran arus searah dan pengukuran dilakukan pada temperatur kamar, harus dilakukan koreksi-koreksi. Dalam pelajaran lebih lanjut kita akan melihat bahwa resistansi untuk arus bolak-balik lebih besar dibandingkan dengan resistansi pada arus searah karena adanya gejala yang disebut *efek kulit*. Selain dari itu, pada kondisi kerja normal, temperatur belitan lebih tinggi dari temperatur kamar yang berarti nilai resistansi akan sedikit lebih tinggi.

Uji Beban Nol. Dalam uji beban nol stator diberikan tegangan nominal sedangkan rotor tidak dibebani dengan beban mekanis. Pada uji ini kita mengukur daya masuk dan arus saluran. Daya masuk yang kita ukur adalah daya untuk mengatasi rugi tembaga pada beban nol, rugi inti, dan daya celah udara untuk mengatasi rugi rotasi pada beban nol. Dalam uji ini *slip* sangat kecil, arus rotor cukup kecil untuk diabaikan sehingga biasanya arus eksitasi dianggap sama dengan arus uji beban nol yang terukur.

Uji Rotor Diam. Uji ini analog dengan uji hubng singkat pada transformator. Dalam uji ini belitan rotor di hubung singkat tetapi rotor ditahan untuk tidak berputar. Karena *slip* $s = 1$, maka daya mekanis keluaran adalah nol. Tegangan masuk pada stator dibuat cukup rendah untuk membatasi arus rotor pada nilai yang tidak melebihi nilai nominal. Selain itu, tegangan stator yang rendah (antara 10 – 20 % nominal) membuat arus magnetisasi sangat kecil sehingga dapat diabaikan. Rangkaian ekuivalen dalam uji ini adalah seperti pada Gb.7.31. Perhatikan bahwa kita mengambil tegangan fasa-netral dalam rangkaian ekuivalen ini.



Gb.7.31. Rangkaian ekuivalen motor asinkron pada uji rotor diam.

Jika P_d adalah daya tiga fasa yang terukur dalam uji rotor diam, I_d adalah arus saluran dan V_d adalah tegangan fasa-fasa yang terukur dalam uji ini, maka

$$R_e = X_1 + jX_2' = \frac{P_d}{3I_d^2}$$

$$Z_e = \frac{V_d}{I_d \sqrt{3}} \tag{7.70}$$

$$X_e = \sqrt{Z_e^2 - R_e^2} = X_1 + X_2'$$

Jika kita menggunakan rangkaian ekuivalen pendekatan, pemisahan antara X_1 dan X_2' tidak diperlukan dan kita langsung memanfaatkan X_e .

CONTOH 7.12 : Daya keluaran pada poros rotor motor asinkron tiga fasa 50 Hz adalah 75 kW. Rugi-rugi rotasi adalah 900 W; rugi-rugi inti stator adalah 4200 W; rugi-rugi tembaga stator adalah 2700 W. Arus rotor dilihat dari sisi stator adalah 100 A.. Hitunglah efisiensi motor jika diketahui $slip\ s = 3,75\%$.

Penyelesaian:

Dari rangkaian ekivalen Gb.7.29., daya mekanik ekivalen adalah

$$P_m = (I_2')^2 R_2' \left(\frac{1-s}{s} \right).$$

P_m dalam formulasi ini meliputi daya keluaran pada poros rotor dan rugi rotasi. Daya keluaran 75 kW yang diketahui, adalah daya keluaran pada poros rotor sedangkan rugi rotasi diketahui 900 W sehingga

$$P_m = 75000 + 900 = 75900\text{ W}$$

dan rugi-rugi tembaga rotor adalah

$$P_{cr} = (I_2')^2 R_2' = \frac{P_m s}{1-s} = \frac{75900 \times 0,0375}{1-0,0375} = 2957\text{ W}$$

Efisiensi motor adalah

$$\eta = \frac{P_{keluaran}}{P_{keluaran} + \text{rugi} - \text{rugi}} \times 100\% = \frac{75000}{75000 + 4200 + 2700 + 900 + 2957} \times 100\% = 87,45\%$$

CONTOH 7.13 : Uji rotor diam pada sebuah motor asinkron tiga fasa rotor belitan, 200 HP, 380 V, hubungan Y, memberikan data berikut: daya masuk $P_d = 10\text{ kW}$, arus saluran $I_d = 250\text{ A}$, $V_d = 65\text{ V}$ dan pengukuran resistansi belitan rotor memberikan hasil $R_1 = 0,02\ \Omega$ per fasa. Tentukan resistansi rotor dilihat di stator.

Penyelesaian :

Menurut (7.70) kita dapat menghitung

$$R_e = \frac{P_d}{3I_d^2} = \frac{10000}{3 \times (250)^2} = 0,0533\ \Omega \text{ per fasa}$$

$$R_2' = R_e - R_1 = 0,0533 - 0,02 = 0,0333\ \Omega \text{ per fasa}$$

CONTOH 7.14 : Pada sebuah motor asinkron tiga fasa 10 HP, 4 kutub, 220 V, 50 Hz, hubungan Y, dilakukan uji beban nol dan uji rotor diam.

Beban nol : $V_0 = 220\text{ V}$; $I_0 = 9,2\text{ A}$; $P_0 = 670\text{ W}$

Rotor diam : $V_d = 57\text{ V}$; $I_d = 30\text{ A}$; $P_d = 950\text{ W}$.

Pengukuran resistansi belitan stator menghasilkan nilai $0,15\ \Omega$ per fasa. Rugi-rugi rotasi sama dengan rugi inti stator. Hitung: (a) parameter-parameter yang diperlukan untuk menggambarkan rangkaian ekivalen (pendekatan); (b) arus eksitasi dan rugi-rugi inti.

Penyelesaian :

a). Karena terhubung Y, tegangan per fasa adalah $V_1 = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127\text{ V}$.

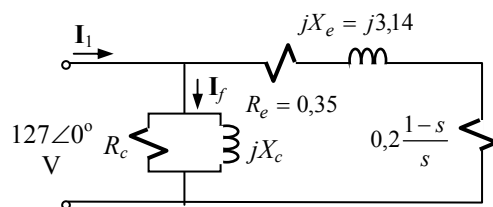
Uji rotor diam memberikan :

$$R_e = \frac{P_d}{3(I_d)^2} = \frac{950}{3 \times (30)^2} = 0,35\ \Omega.$$

$$R_2' = R_e - R_1 = 0,35 - 0,15 = 0,2\ \Omega$$

$$Z_e = \frac{V_d}{\sqrt{3} \times I_d} = \frac{57}{\sqrt{3} \times 30} = 1,1\ \Omega$$

$$X_e = \sqrt{Z_e^2 - R_e^2} = \sqrt{(1,1)^2 - (0,35)^2} = 3,14\ \Omega$$



b). Pada uji beban nol, arus rotor cukup kecil untuk diabaikan; jadi arus yang mengalir pada uji beban nol dapat dianggap arus eksitasi I_f .

$$\text{Daya pada uji beban nol } P_0 = 670 = V_0 I_f \cos \theta \sqrt{3} \Rightarrow \cos \theta = \frac{670}{220\sqrt{3} \times 9,2} = 0,19 \text{ lagging.}$$

$$\text{Jadi : } \mathbf{I}_f = 9,2 \angle \theta = 9,2 \angle -79^\circ.$$

$$\text{Rugi inti : } P_{\text{inti}} = P_0 - 3 \times I_0^2 R_1 = 670 - 3 \times 9,2^2 \times 0,15 = 632 \text{ W}$$

CONTOH 7.15 : Motor pada contoh 7.14. dikopel dengan suatu beban mekanik, dan pengukuran pada belitan stator memberikan data : daya masuk 9150 W, arus 28 A, faktor daya 0,82. Tentukanlah : (a) arus rotor dilihat dari sisi stator; (b) daya mekanis rotor; (c) slip yang terjadi; (d) efisiensi motor pada pembebanan tersebut jika diketahui rugi rotasi 500 W.

Penyelesaian :

a). Menggunakan tegangan masukan sebagai referensi, dari data pengukuran dapat kita ketahui fasor arus stator, yaitu: $\mathbf{I}_1 = 28 \angle -35^\circ$. Arus rotor dilihat dari sisi stator adalah :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}'_2 &= \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_f = 28 \angle -35^\circ - 9,2 \angle -79^\circ \\ &= 28(0,82 - j0,57) - 9,2(0,19 - j0,98) = 21,2 - j6,94 = 22,3 \angle -18^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

b). Daya mekanik rotor adalah :

$$\begin{aligned} P_m &= P_{in} - P_{\text{inti}} - P_{cs} - P_{cr} \\ &= 9150 - 632 - 3 \times 28^2 \times 0,15 - 3 \times 22,3^2 \times 0,2 = 7867 \text{ W} \end{aligned}$$

c). Slip dapat dicari dari formulasi $P_g = P_{in} - P_{\text{inti}} - P_{cs} = \frac{3 \times (I'_2)^2 R'_2}{s}$.

$$s = \frac{3(I'_2)^2 R'_2}{P_g} = \frac{3 \times 22,3^2 \times 0,2}{9150 - 632 - 3 \times 28^2 \times 0,15} = 0,0365 \text{ atau } 3,65 \%$$

e). Rugi rotasi = 500 W.

$$\text{Daya keluaran sumbu rotor : } P_o = P_m - P_{\text{rotasi}} = 7867 - 500 = 7367 \text{ W}$$

$$\text{Efisiensi motor : } \eta = \frac{P_o}{P_{in}} \times 100\% = \frac{7367}{9150} \times 100\% = 80\%$$

Torka

Pada motor asinkron terjadi alih daya dari daya listrik di stator menjadi daya mekanik di rotor. Sebelum dikurangi rugi-tembaga rotor, alih daya tersebut adalah sebesar daya celah udara P_g dan ini memberikan torka yang kita sebut torka elektromagnetik dengan perputaran sinkron. Jadi jika T adalah torka elektromagnetik maka

$$P_g = T\omega_s \quad \text{atau} \quad T = \frac{P_g}{\omega_s} \tag{7.71}$$

Torka Asut. Torka asut (*starting torque*) adalah torka yang dibangkitkan pada saat $s = 1$, yaitu pada saat perputaran masih nol. Besarnya arus rotor ekivalen berdasarkan rangkaian ekivalen Gb.7.30. dengan $s = 1$ adalah

$$I'_2 = \frac{V_1}{\sqrt{(R_1 + R'_2)^2 + (X_1 + X'_2)^2}} \tag{7.72}$$

Besarnya torka asut adalah

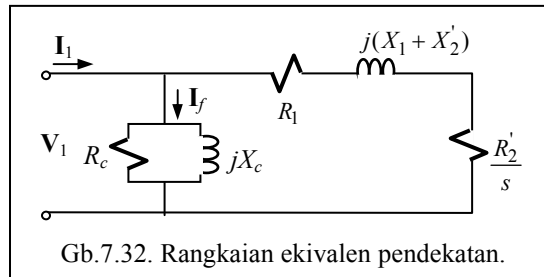
$$T_a = \frac{P_g}{\omega_s} = \frac{1}{\omega_s} \times 3(I_2')^2 \times \frac{R_2'}{s} = \frac{1}{\omega_s} \frac{3V_1^2 R_2'}{(R_1 + R_2')^2 + (X_1 + X_2')^2} \quad (7.73)$$

Pada saat $s = 1$ impedansi sangat rendah sehingga arus menjadi besar. Oleh karena itu pada waktu pengasutan tegangan direduksi dengan menggunakan cara-cara tertentu untuk membatasinya arus. Sudah barang tentu penurunan tegangan ini akan memperkecil torka asut. Persamaan (7.73) menunjukkan bahwa jika tegangan diturunkan setengahnya, torka asut akan turun menjadi seperempatnya.

Torka maksimum. Torka ini penting diketahui, bahkan menjadi pertimbangan awal pada waktu perancangan mesin dilakukan. Torka ini biasanya bernilai 2 sampai 3 kali torka nominal dan merupakan kemampuan cadangan mesin. Kemampuan ini memungkinkan motor melayani beban-beban puncak yang berlangsung beberapa saat saja. Perlu diingat bahwa torka puncak ini tidak dapat diberikan secara kontinu sebab akan menyebabkan pemanasan yang akan merusak isolasi.

Karena torka sebanding dengan daya celah udara P_g , maka torka maksimum terjadi jika alih daya ke rotor mencapai nilai maksimum. Dari rangkaian ekuivalen pendekatan Gb.7.32., teorema alih daya maksimum mensyaratkan

bahwa alih daya ke $\frac{R_2'}{s}$ akan maksimum jika



Gb.7.32. Rangkaian ekuivalen pendekatan.

$$\frac{R_2'}{s_m} = \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2} \quad \text{atau} \quad s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2}} \quad (7.74)$$

Persamaan (7.74) memperlihatkan bahwa s_m dapat diperbesar dengan memperbesar R_2' . Suatu motor dapat dirancang agar torka asut mendekati torka maksimum dengan menyesuaikan nilai resistansi rotor.

Arus rotor pada waktu terjadi alih daya maksimum adalah

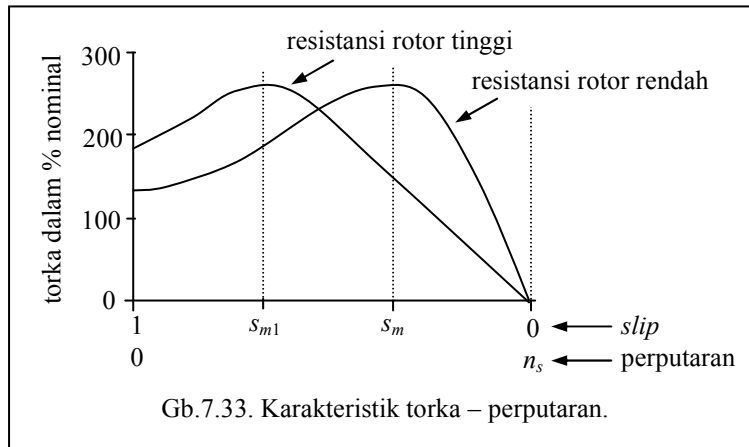
$$\begin{aligned} I_2' &= \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2'}{s_m}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2}} = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2}} \\ &= \frac{V_1}{\sqrt{2R_1^2 + 2R_1\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2} + 2(X_1 + X_2')^2}} \end{aligned} \quad (7.75)$$

Torka maksimum adalah

$$T_m = \frac{1}{\omega_s} \times 3(I_2')^2 \frac{R_2'}{s_m} = \frac{1}{\omega_s} \frac{3V_1^2}{2\left(R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2}\right)} \quad (7.76)$$

Persamaan (7.76) ini memperlihatkan bahwa torka maksimum tidak tergantung dari besarnya resistansi rotor. Akan tetapi menurut (7.74) slip maksimum s_m berbanding lurus dengan resistansi rotor. Jadi mengubah resistansi rotor akan mengubah nilai slip yang akan memberikan torka maksimum akan tetapi tidak mengubah besarnya torka maksimum itu sendiri.

Karakteristik Torka – Perputaran. GB.7.33. memperlihatkan bagaimana torka berubah terhadap perputaran ataupun terhadap *slip*.



Pada gambar ini diperlihatkan pula pengaruh resistansi belitan rotor terhadap karakterik torka-perputaran. Makin tinggi resistansi belitan rotor, makin besar *slip* tanpa mengubah besarnya torka maksimum.

Aplikasi. Motor dibagi dalam beberapa katagori menurut karakteristik spesifiknya sesuai dengan kemampuan dalam penggunaannya. Berikut ini data motor yang secara umum digunakan, untuk keperluan memutar beban dengan kecepatan konstan dimana tidak diperlukan torka asut yang terlalu tinggi. Beban-beban yang dapat dilayani misalnya kipas angin, *blower*, alat-alat pertukangan kayu, pompa sentrifugal. Dalam keadaan tertentu diperlukan pengasutan dengan tegangan yang direduksi dan jenis motor ini tidak boleh dibebani lebih secara berkepanjangan karena akan terjadi pemanasan.

HP	jumlah kutub	torka asut %	torka maks	arus asut	<i>slip</i>	faktor daya	efisiensi
sampai 200	2	150	sampai	500 %	3 %	0,87	87 %
	4	150	250 %	sampai	sampai	sampai	sampai
	6	135	tidak	1000 %	5 %	0,89	89 %
	8	125	kurang				
	10	120	dari				
	12	115	200 %				
	14	110					
	16	105					

Pengendalian. Dalam pemakaian, kita harus memperhatikan pengendaliannya. Pengendalian berfungsi untuk melakukan asut dan menghentikan motor secara benar, membalik perputaran tanpa merusakkan motor, tidak mengganggu beban lain yang tersambung pada sistem pencatu yang sama. Hal-hal khusus yang perlu diperhatikan dalam pengendalian adalah : (a) pembatasan torka asut (agar beban tidak rusak); (b) pembatasan arus asut; (c) proteksi terhadap pembebanan lebih; (d) proteksi terhadap penurunan tegangan; (e) proteksi terhadap terputusnya salah satu fasa (yang dikenal dengan *single phasing*).

Kita cukupkan sampai di sini pembahasan kita mengenai motor asinkron. Pengetahuan lebih lanjut akan kita peroleh pada pelajaran khusus mengenai mesin-mesin listrik.

SOAL-SOAL : MOTOR ASINKRON

1. Sebuah motor asinkron 3 fasa, 100 HP, 380 V, 50 Hz, mempunyai rugi-rugi inti stator 4400 W, dan rugi tembaga stator 3000 W. Rugi-rugi rotasi adalah 1100 W dan arus ekivalen rotor dilihat di stator adalah 120 A. Pada *slip* 4%, hitunglah efisiensi motor.
2. Sebuah motor asinkron 3 fasa 20 HP, 380 V, 50 Hz, 6 kutub, belitan stator terhubung Y. Pengukuran resistansi menunjukkan resistansi belitan stator $0,13 \Omega$ per fasa. Uji rotor diam memberikan resistansi ekivalen $0,22 \Omega$ dan reaktansi ekivalen $0,52 \Omega$. Uji beban nol memberikan rugi-rugi inti 600 W. Jika motor ini beroperasi dengan *slip* 3%, hitunglah : (a) arus saluran; (b) faktor daya; (c) daya keluaran (HP); (d) Torka asut.
3. Sebuah motor asinkron 3 fasa, 2200 V, 50 Hz, 12 kutub, terhubung Y. Pada uji beban nol, motor menyerap daya 14 kW pada arus saluran 20 A. Pengukuran resistansi menghasilkan resistansi belitan stator $0,4 \Omega$ per fasa. Uji rotor diam menghasilkan resistansi ekivalen $0,6 \Omega$ dan reaktansi ekivalen $2,0 \Omega$. Motor beroperasi pada *slip* 3%. Hitunglah: (a) arus masukan; (b) faktor daya; (c) besarnya torka.
4. Sebuah motor asinkron 3 fasa, 100 HP, 380 V, 50 Hz, 12 kutub, belitan stator terhubung Y. Pengukuran resistansi menghasilkan nilai resistansi belitan stator $0,06 \Omega$ per fasa. Uji beban nol menunjukkan rugi-rugi inti 4200 W. Uji rotor diam memberikan resistansi ekivalen $0,11 \Omega$ dan reaktansi ekivalen $0,26 \Omega$ per fasa. Jika motor beroperasi pada beban penuh dan rugi-rugi rotasi diketahui 1800 W, tentukanlah : (a) arus masukan; (b) faktor daya; (c) efisiensi.
5. Sebuah motor asinkron 3 fasa, rotor belitan terhubung Y, tegangan masukan 2200 V. Uji beban nol pada tegangan 2200 V memberikan data arus saluran 16,5 A, daya masuk 12,4 kW. Uji rotor diam dilakukan pada tegangan masuk 450 V memberikan data arus saluran 176 A dan daya masuk 37,5 kW. Pengukuran resistansi stator menghasilkan resistansi $0,28 \Omega$ per fasa. Jika motor beroperasi pada *slip* 2% dan diketahui rugi-rugi rotasi 2 kW, tentukan nilai parameter untuk menggambarkan rangkaian ekivalen pendekatan.
6. Pada motor soal nomer 5, tentukanlah : (a) *slip* untuk memberikan torka maksimum; (b) arus masukan dan faktor daya pada waktu terjadi torka maksimum; (c) besarnya torka maksimum.
7. Sebuah motor asinkron rotor sangkar, 400 HP, 2200 V, 6 kutub, 50 Hz, belitan stator terhubung Y, mempunyai parameter
$$R_1 = 0,2 \Omega; R_e = 0,4 \Omega; X_e = 0,25 \Omega$$
Rugi-rugi inti stator 8800 W dan rugi-rugi rotasi 4800 W. Jika motor beroperasi pada *slip* 2%, dengan menggunakan rangkaian ekivalen pendekatan hitunglah : (a) arus masukan; (b) faktor daya; (c) besarnya torka; (d) efisiensi.

BAB 8

Analisis Rangkaian di Kawasan s

Kita telah melihat di Bab-5 dan juga di Bab-7 bahwa analisis di kawasan fasor lebih sederhana dibandingkan dengan analisis di kawasan waktu karena tidak melibatkan persamaan diferensial melainkan persamaan-persamaan aljabar biasa. Akan tetapi analisis ini terbatas hanya untuk sinyal sinus dalam keadaan mantap. Berikut ini kita akan mempelajari analisis rangkaian di kawasan s , yang dapat kita terapkan pada analisis rangkaian dengan sinyal sinus maupun bukan sinus, keadaan mantap maupun keadaan peralihan.

Dalam analisis di kawasan s ini, sinyal-sinyal fungsi waktu $f(t)$, ditransformasikan ke kawasan s menjadi fungsi s , $F(s)$, dan sejalan dengan itu pernyataan elemen rangkaian juga mengalami penyesuaian yang mengantarkan kita pada *konsep impedansi di kawasan s* . Menyatakan suatu fungsi dari kawasan t ke kawasan s adalah melalui Transformasi Laplace, yang secara matematis didefinisikan sebagai suatu integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dengan s merupakan peubah kompleks, $s = \sigma + j\omega$. Batas bawah integrasi ini adalah nol yang berarti bahwa dalam analisis rangkaian di kawasan s kita hanya meninjau sinyal-sinyal kausal.

Dengan melakukan transformasi sinyal dari kawasan t ke kawasan s , karakteristik i - v elemenpun mengalami penyesuaian dan mengantarkan kita pada konsep impedansi dimana karakteristik tersebut menjadi fungsi s . Dengan sinyal dan karakteristik elemen dinyatakan di kawasan s , maka persamaan rangkaian tidak lagi berbentuk persamaan integrodiferensial melainkan berbentuk persamaan aljabar biasa sehingga penanganannya menjadi lebih mudah. Hasil yang diperoleh sudah barang tentu akan merupakan fungsi-fungsi s . Untuk memperoleh kembali sinyal di kawasan waktu, dilakukan transformasi balik yaitu transformasi dari fungsi s ke fungsi t . Pokok bahasan kita akan meliputi :

Pernyataan sinyal di kawasan s . Transformasi Laplace

Transformasi bentuk Gelombang Dasar; transformasi Laplace; sifat transformasi Laplace; pole dan zero; transformasi balik; solusi persamaan diferensial.

Analisis Rangkaian di Kawasan s

Hubungan tegangan-arus elemen di kawasan s ; konsep impedansi; transformasi rangkaian; kaidah, teorema, dan metoda analisis rangkaian di kawasan s .

Fungsi Jaringan

Fungsi alih; peran fungsi alih; hubungan bertingkat dan kaidah rantai.

8.1. Pernyataan Sinyal di Kawasan s Melalui Transformasi Laplace

Tujuan :

- Mampu melakukan transformasi berbagai bentuk gelombang sinyal dari kawasan t ke kawasan s .
- Mampu mencari transformasi balik dari pernyataan bentuk gelombang sinyal dari kawasan s ke kawasan t .

Bentuk Gelombang Dasar dan Transformasi Laplace-nya

Transformasi Laplace dari suatu fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (8.1)$$

dengan notasi :

$$\mathbb{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (8.2)$$

Dengan mengikuti langsung definisi ini, kita dapat mencari transformasi Laplace dari suatu model sinyal, atau dengan kata lain mencari pernyataan sinyal tersebut di kawasan s . Berikut ini kita akan mengaplikasikannya untuk bentuk-bentuk gelombang dasar.

Bentuk Gelombang Anak Tangga. Pernyataan sinyal anak tangga adalah $v(t) = Au(t)$. Transformasi Laplace dari bentuk gelombang ini adalah

$$\mathbb{L}[Au(t)] = \int_0^{\infty} Au(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = -\frac{Ae^{-(\sigma+j\omega)t}}{\sigma+j\omega} \Big|_0^{\infty}$$

Batas atas, dengan $\alpha > 0$, memberikan nilai 0, sedangkan batas bawah memberikan nilai A/s .

Jadi

$$\boxed{\mathbb{L}[Au(t)] = \frac{A}{s}} \quad (8.3)$$

Bentuk Gelombang Eksponensial. Transformasi Laplace bentuk gelombang eksponensial beramplitudo A , yaitu $v(t) = Ae^{-at}u(t)$, adalah

$$\mathbb{L}[Ae^{-at}u(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-at}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-(s+a)t} dt = -\frac{Ae^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_0^{\infty}$$

Dengan $a > 0$, batas atas memberikan nilai 0 sedangkan batas bawah memberikan $A/(s+a)$.

Jadi

$$\boxed{\mathbb{L}[Ae^{-at}u(t)] = \frac{A}{s+a}} \quad (8.4)$$

Bentuk Gelombang Sinus. Transformasi Laplace dari suatu bentuk gelombang sinus $v(t) = (A \cos \omega t) u(t)$ adalah :

$$\mathbb{L}[(A \cos \omega t) u(t)] = \int_0^{\infty} (A \cos \omega t) u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} (A \cos \omega t) e^{-st} dt \quad (8.5)$$

Dengan memanfaatkan hubungan Euler $\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$, ruas kanan (8.5) menjadi

$$\int_0^{\infty} A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{A}{2} e^{(j\omega-s)t} dt + \int_0^{\infty} \frac{A}{2} e^{(-j\omega-s)t} dt = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

jadi

$$\boxed{\mathbb{L}[(A \cos \omega t) u(t)] = A \frac{s}{s^2 + \omega^2}} \quad (8.6)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$\boxed{\mathbb{L}[(A \sin \omega t) u(t)] = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}} \quad (8.7)$$

Tabel Transformasi Laplace

Transformasi Laplace dari bentuk gelombang anak tangga, eksponensial, dan sinus di atas merupakan contoh bagaimana suatu transformasi dilakukan. Kita lihat bahwa amplitudo sinyal, A , selalu muncul sebagai faktor pengali dalam pernyataan sinyal di kawasan s . Transformasi dari beberapa bentuk gelombang yang lain termuat dalam Tabel-8.1. dengan mengambil *amplitudo bernilai satu satuan*. Tabel ini, walaupun hanya memuat beberapa bentuk gelombang saja, tetapi cukup untuk keperluan pembahasan analisis rangkaian di kawasan s yang akan kita pelajari di buku ini.

Untuk selanjutnya kita tidak selalu menggunakan notasi $L[f(t)]$ sebagai pernyataan dari “transformasi Laplace dari $f(t)$ ”, tetapi kita langsung memahami bahwa pasangan fungsi t dan transformasi Laplace-nya adalah seperti : $f(t) \leftrightarrow F(s)$, $v_1(t) \leftrightarrow V_1(s)$, $i_4(t) \leftrightarrow I_4(s)$ dan seterusnya. Dengan kata lain kita memahami bahwa $V(s)$ adalah pernyataan di kawasan s dari $v(t)$, $I(s)$ adalah pernyataan di kawasan s dari $i(t)$ dan seterusnya.

Tabel 8.1. Pasangan Transformasi Laplace

Bentuk Gelombang Sinyal di Kawasan t : $f(t)$	Pernyataan Bentuk Gelombang Sinyal di Kawasan s : $L[f(t)]=F(s)$
impuls : $\delta(t)$	1
anak tangga : $u(t)$	$\frac{1}{s}$
eksponensial : $[e^{-at}]u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
cosinus : $[\cos \omega t] u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
sinus : $[\sin \omega t] u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
cosinus teredam : $[e^{-at} \cos \omega t] u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
sinus teredam : $[e^{-at} \sin \omega t] u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
cosinus tergeser : $[\cos (\omega t + \theta)] u(t)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
sinus tergeser : $[\sin (\omega t + \theta)] u(t)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
ramp : $[t] u(t)$	$\frac{1}{s^2}$
ramp teredam : $[t e^{-at}] u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$

CONTOH 8.1 : Carilah transformasi Laplace dari bentuk gelombang berikut:

a). $v_1(t) = 5 \cos(10t)u(t)$ b). $v_2(t) = 5 \sin(10t)u(t)$ c). $v_3(t) = 3e^{-2t} u(t)$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan Tabel-8.1 kita peroleh :

$$\begin{aligned} \text{a). } v_1(t) &= 5 \cos(10t)u(t) \rightarrow V_1(s) = \frac{5s}{s^2 + (10)^2} = \frac{5s}{s^2 + 100} \\ \text{b). } v_2(t) &= 5 \sin(10t)u(t) \rightarrow V_2(s) = \frac{5 \times 10}{s^2 + (10)^2} = \frac{50}{s^2 + 100} \\ \text{c). } v_3(t) &= 3e^{-2t} u(t) \rightarrow V_3(s) = \frac{3}{s + 2} \end{aligned}$$

Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Sifat Unik. Sifat ini dapat dinyatakan sebagai berikut.

Jika $f(t)$ mempunyai transformasi Laplace $F(s)$ maka transformasi balik dari $F(s)$ adalah $f(t)$.

Dengan kata lain

Jika pernyataan di kawasan s suatu bentuk gelombang $v(t)$ adalah $V(s)$, maka pernyataan di kawasan t suatu bentuk gelombang $V(s)$ adalah $v(t)$.

Bukti dari pernyataan ini tidak kita bahas di sini. Sifat ini memudahkan kita untuk mencari $F(s)$ dari suatu fungsi $f(t)$ dan sebaliknya mencari fungsi $f(t)$ dari suatu fungsi $F(s)$ dengan menggunakan tabel transformasi Laplace. Mencari fungsi $f(t)$ dari suatu fungsi $F(s)$ disebut mencari *transformasi balik* dari $F(s)$, dengan notasi $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$. Hal terakhir ini akan kita bahas lebih lanjut setelah membahas sifat-sifat transformasi Laplace.

Sifat Linier. Karena transformasi Laplace adalah sebuah integral, maka ia bersifat linier.

Transformasi Laplace dari jumlah beberapa fungsi t adalah jumlah dari transformasi masing-masing fungsi.

Jika $f(t) = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$ maka transformasi Laplace-nya adalah

$$F(s) = \int_0^{\infty} [A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)] e^{-st} dt = A_1 \int_0^{\infty} f_1(t) dt + A_2 \int_0^{\infty} f_2(t) dt = A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s) \quad (8.8)$$

dengan $F_1(s)$ dan $F_2(s)$ adalah transformasi dari $f_1(t)$ dan $f_2(t)$.

CONTOH 8.2 : a). Carilah transformasi Laplace dari : $v_1(t) = (1 + 3e^{-2t}) u(t)$

b). Jika transformasi Laplace sinyal eksponensial $Ae^{-at}u(t)$ adalah $1/(s+a)$, carilah transformasi dari $v_2(t) = A \cos \omega t u(t)$.

Penyelesaian :

$$\text{a). } v_1(t) = (1 + 3e^{-2t}) u(t) \rightarrow V_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s + 2}$$

$$\text{b). } v_2(t) = A \cos(\omega t) u(t) = A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} u(t) = \frac{A}{2} (e^{j\omega t} u(t) + e^{-j\omega t} u(t))$$

$$V_2(s) = \frac{A}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{A}{2} \left(\frac{2s}{s^2 + \omega^2} \right) = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

Integrasi. Sebagaimana kita ketahui karakteristik i - v kapasitor dan induktor melibatkan integrasi dan diferensiasi. Karena kita akan bekerja di kawasan s , kita perlu mengetahui bagaimana ekivalensi proses integrasi dan diferensiasi di kawasan t tersebut. Transformasi Laplace dari integrasi suatu fungsi dapat kita lihat sebagai berikut. Misalkan

$$f(t) = \int_0^t f_1(x) dx \quad (8.9)$$

maka

$$F(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f_1(x) dx \right) e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \left(\int_0^t f_1(x) dx \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} f_1(t) dt \quad (8.10)$$

Suku pertama ruas kanan dari (8.10) akan bernilai nol untuk $t = \infty$ karena $e^{-st} = 0$ pada $t \rightarrow \infty$, dan juga akan bernilai nol untuk $t = 0$ karena integral yang di dalam tanda kurung akan bernilai nol (intervalnya nol). Tinggallah suku kedua ruas kanan; jadi

$$F(s) = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} f_1(t) dt = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt = \frac{F_1(s)}{s} \quad (8.11)$$

Jadi secara singkat dapat kita katakan bahwa :

transformasi dari suatu integrasi bentuk gelombang $f(t)$ di kawasan t dapat diperoleh dengan cara membagi $F(s)$ dengan s .

CONTOH 8.3 : Carilah transformasi Laplace dari fungsi ramp $r(t)=tu(t)$.

Penyelesaian :

Kita mengetahui bahwa fungsi ramp adalah integral dari fungsi anak tangga.

$$r(t) = tu(t) = \int_0^t u(x) dx \quad \rightarrow \quad R(s) = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t u(x) dx \right) e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

Hasil ini sudah tercantum dalam Tabel.8.1.

Diferensiasi. Transformasi Laplace dari suatu diferensiasi dapat kita lihat sebagai berikut.

Misalkan $f(t) = \frac{df_1(t)}{dt}$

maka

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{df_1(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[f_1(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f_1(t) (-s) e^{-st} dt \quad (8.14)$$

Suku pertama ruas kanan (8.14) bernilai nol untuk $t = \infty$ karena $e^{-st} = 0$ untuk $t \rightarrow \infty$, dan bernilai $-f(0)$ untuk $t = 0$. Dengan demikian (8.14) dapat kita tuliskan

$$\mathcal{L} \left[\frac{df_1(t)}{dt} \right] = s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt - f(0) = sF_1(s) - f_1(0) \quad (8.15)$$

Transformasi dari suatu fungsi t yang diperoleh melalui diferensiasi fungsi $f(t)$ merupakan perkalian dari $F(s)$ dengan s dikurangi dengan nilai $f(t)$ pada $t = 0$.

CONTOH 8.4 : Carilah transformasi Laplace dari fungsi $\cos(\omega t)$ dengan memandang fungsi ini sebagai turunan dari $\sin(\omega t)$.

Penyelesaian :

$$f(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{\omega} \frac{d \sin(\omega t)}{dt} \rightarrow F(s) = \frac{1}{\omega} \left(s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin(0) \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Penurunan di atas dapat kita kembangkan lebih lanjut sehingga kita mendapatkan transformasi dari fungsi-fungsi yang merupakan fungsi turunan yang lebih tinggi.

jika $f(t) = \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} \rightarrow F(s) = s^2 F_1(s) - s f_1(0) - f_1'(0)$

jika $f(t) = \frac{d^3 f_1(t)}{dt^3} \rightarrow F(s) = s^3 F_1(s) - s^2 f_1(0) - s f_1'(0) - f_1''(0)$

Translasi di Kawasan t . Sifat transformasi Laplace berkenaan dengan translasi di kawasan t ini dapat dinyatakan sebagai berikut

Jika transformasi Laplace dari $f(t)$ adalah $F(s)$, maka transformasi Laplace dari $f(t-a)u(t-a)$ untuk $a > 0$ adalah $e^{-as}F(s)$.

Hal ini dapat kita lihat sebagai berikut. Menurut definisi, transformasi Laplace dari $f(t-a)u(t-a)$ adalah

$$\int_0^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt$$

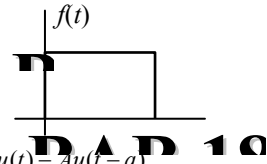
Karena $u(t-a)$ bernilai nol untuk $t < a$ dan bernilai satu untuk $t > a$, bentuk integral ini dapat kita ubah batas bawahnya serta tidak lagi menuliskan faktor $u(t-a)$, menjadi

$$\int_0^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt \quad (8.17)$$

Kita ganti peubah integrasinya dari t menjadi τ dengan suatu hubungan $\tau = (t-a)$. Dengan penggantian ini maka dt menjadi $d\tau$ dan $\tau = 0$ ketika $t = a$ dan $\tau = \infty$ ketika $t = \infty$. Persamaan (8.17) menjadi

$$\int_0^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau = e^{-as} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-as}F(s) \quad (8.18)$$

CONTOH 8.5 : Carilah transformasi Laplace dari bentuk gelombang sinyal seperti yang tergambar di samping ini.



Penyelesaian :

Model bentuk gelombang ini dapat kita tuliskan sebagai $f(t) = Au(t) - Au(t-a)$.

Transformasi Laplace-nya adalah : $F(s) = \frac{A}{s} - e^{-as} \frac{A}{s} = \frac{A(1 - e^{-as})}{s}$

Translasi di Kawasan s . Sifat mengenai translasi di kawasan s dapat dinyatakan sebagai berikut.

Jika transformasi Laplace dari $f(t)$ adalah $F(s)$, maka transformasi Laplace dari $e^{-\alpha t}f(t)$ adalah $F(s + \alpha)$.

Bukti dari pernyataan ini dapat langsung diperoleh dari definisi transformasi Laplace, yaitu

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+\alpha)t} dt = F(s + \alpha) \quad (8.19)$$

Sifat ini dapat digunakan untuk menentukan transformasi fungsi teredam jika diketahui bentuk transformasi fungsi tak teredamnya.

CONTOH 8.6 : Carilah transformasi Laplace dari fungsi-fungsi ramp teredam dan sinus teredam berikut ini : a). $v_1 = tu(t)e^{-\alpha t}$; b). $v_2 = e^{-\alpha t} \cos \omega t u(t)$

Penyelesaian :

a). Karena untuk $v(t) = tu(t) \rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2}$,

maka jika $v_1(t) = tu(t)e^{-\alpha t} \Rightarrow V_1(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$

b). Karena untuk $v(t) = \cos \omega t u(t) \rightarrow V(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$,

maka jika $v_2(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega t u(t) \Rightarrow V_2(s) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

Pen-skalaan (scaling). Sifat ini dapat dinyatakan sebagai :

Jika transformasi Laplace dari $f(t)$ adalah $F(s)$, maka untuk $a > 0$ transformasi dari $f(at)$ adalah $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$.

Bukti dari sifat ini dapat langsung diperoleh dari definisinya. Dengan mengganti peubah t menjadi $\tau = at$ maka transformasi Laplace dari $f(at)$ adalah:

$$\int_0^{\infty} f(at)e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (8.20)$$

Jadi, jika skala waktu diperbesar ($a > 1$) maka skala frekuensi s mengecil dan sebaliknya apabila skala waktu diperkecil ($a < 1$) maka skala frekuensi menjadi besar.

Nilai Awal dan Nilai Akhir. Sifat transformasi Laplace berkenaan dengan nilai awal dan nilai akhir dapat dinyatakan sebagai berikut.

Nilai awal : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$; Nilai akhir : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Jadi nilai $f(t)$ pada $t = 0^+$ di kawasan waktu (nilai awal) sama dengan nilai $sF(s)$ pada tak hingga di kawasan s . Sedangkan nilai $f(t)$ pada $t = \infty$ (nilai akhir) sama dengan nilai $sF(s)$ pada titik asal di kawasan s . Sifat ini dapat diturunkan dari sifat diferensiasi.

CONTOH 8.7 : Transformasi Laplace dari suatu sinyal adalah $V(s) = 100 \frac{s+3}{s(s+5)(s+20)}$

Carilah nilai awal dan nilai akhir dari $v(t)$.

Penyelesaian :

Nilai awal adalah : $\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sV(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[s \times 100 \frac{s+3}{s(s+5)(s+20)} \right] = 0$

Nilai akhir adalah : $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sV(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \times 100 \frac{s+3}{s(s+5)(s+20)} \right] = 3$

Tabel 8.2. di halaman berikut memuat sifat-sifat transformasi Laplace yang dibahas di atas kecuali sifat yang terakhir yaitu konvolusi. Konvolusi akan dibahas di bagian akhir dari pembahasan mengenai transformasi balik.

Transformasi Balik

Berikut ini kita akan membahas mengenai transformasi balik, yaitu mencari $f(t)$ dari suatu $F(s)$ yang diketahui. Jika $F(s)$ yang ingin dicari transformasi baliknya ada dalam tabel transformasi Laplace yang kita punyai, pekerjaan kita cukup mudah. Akan tetapi dalam analisis rangkaian di kawasan s , pada umumnya $F(s)$ berupa rasio polinomial yang bentuknya tidak sesederhana dan tidak selalu ada pasangannya seperti dalam tabel. Untuk mengatasi hal itu, $F(s)$ kita uraikan menjadi suatu penjumlahan dari bentuk-bentuk yang ada dalam tabel, sehingga kita akan memperoleh $f(t)$ sebagai jumlah dari bentuk-bentuk gelombang sederhana. Dengan perkataan lain kita membuat $F(s)$ menjadi transformasi dari suatu gelombang komposit dan kelinieran dari transformasi Laplace akan memberikan transformasi balik dari $F(s)$ yang berupa jumlah dari bentuk-bentuk gelombang sederhana. Sebelum membahas mengenai transformasi balik kita akan mengenal lebih dulu pengertian tentang *pole* dan *zero*.

Tabel 8.2. Sifat-sifat Transformasi Laplace

Pernyataan $f(t)$	Pernyataan $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
linier : $A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$	$A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$
integrasi : $\int_0^t f(x) dx$	$\frac{F(s)}{s}$
diferensiasi : $\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
$\frac{d^3 f(t)}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
linier : $A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$	$A_1 F_1(s) + A_2 F_2(s)$
translasi di t : $[f(t-a)]u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
translasi di s : $e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
penskalaan : $f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
nilai awal : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
nilai akhir : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
konvolusi : $\int_0^t f_1(x) f_2(t-x) dx$	$F_1(s) F_2(s)$

Pole dan Zero. Pada umumnya, transformasi Laplace berbentuk rasio polinom

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (8.21)$$

yang masing-masing polinom dapat dinyatakan dalam bentuk faktor menjadi

$$F(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (8.22)$$

dengan $K = b_m/a_n$ dan disebut faktor skala.

Akar-akar dari pembilang dari pernyataan $F(s)$ di atas disebut *zero* karena $F(s)$ bernilai nol untuk $s = z_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Akar-akar dari penyebut disebut *pole* karena pada nilai $s = p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) nilai penyebut menjadi nol dan nilai $F(s)$ menjadi tak-hingga. Pole dan zero disebut *frekuensi kritis* karena pada nilai-nilai itu $F(s)$ menjadi nol atau tak-hingga.

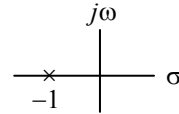
Peubah s merupakan peubah kompleks $s = \sigma + j\omega$. Dengan demikian kita dapat memetakan pole dan zero dari suatu $F(s)$ pada bidang kompleks dan kita sebut *diagram pole-zero*. Titik pole diberi tanda "x" dan titik zero diberi tanda "o". Perhatikan contoh 8.8. berikut.

CONTOH 8.8 : Gambarkan diagram pole-zero dari

$$\text{a). } F(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{b). } F(s) = \frac{A(s+a)}{(s+a)^2 + b^2} \quad \text{c). } F(s) = \frac{1}{s}$$

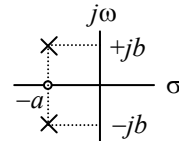
Penyelesaian :

a). Fungsi ini mempunyai pole di $s = -1$ tanpa zero tertentu.

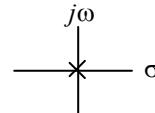


b). Fungsi ini mempunyai zero di $s = -a$. Pole dapat dicari dari

$$(s+a)^2 + b^2 = 0 \rightarrow \text{pole di } s = -a \pm jb$$



c). Fungsi ini tidak mempunyai zero tertentu sedangkan pole terletak di titik asal, $s = 0 + j0$.



Bentuk Umum F(s). Bentuk umum $F(s)$ adalah seperti (8.22) yaitu

$$F(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Jika jumlah pole lebih besar dari jumlah zero, jadi $n > m$, kita katakan bahwa fungsi ini merupakan fungsi rasional patut. Jika fungsi ini memiliki pole yang semuanya berbeda, jadi $p_i \neq p_j$ untuk $i \neq j$, maka dikatakan bahwa $F(s)$ mempunyai pole sederhana. Jika ada pole yang berupa bilangan kompleks kita katakan bahwa fungsi ini mempunyai pole kompleks. Jika ada pole-pole yang bernilai sama kita katakan bahwa fungsi ini mempunyai pole ganda.

Fungsi Dengan Pole Sederhana. Apabila fungsi rasional patut $F(s)$ hanya mempunyai pole sederhana, maka ia dapat diuraikan menjadi berbentuk

$$F(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(s-p_n)} \quad (8.23)$$

Jadi $F(s)$ merupakan kombinasi linier dari beberapa fungsi sederhana; konstanta k yang berkaitan dengan setiap fungsi pembangun $F(s)$ itu kita sebut *residu*. Kita ingat bahwa transformasi balik dari masing-masing fungsi sederhana itu berbentuk ke^{-at} . Dengan demikian maka transformasi balik dari $F(s)$ menjadi

$$f(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \cdots + k_n e^{p_n t} \quad (8.24)$$

Persoalan kita sekarang adalah bagaimana menentukan residu. Untuk mencari k_1 , kita kalikan kedua ruas (8.23) dengan $(s-p_1)$ sehingga faktor $(s-p_1)$ hilang dari ruas kiri sedangkan ruas kanan menjadi k_1 ditambah suku-suku lain yang semuanya mengandung faktor $(s-p_1)$. Kemudian kita substitusikan $s = p_1$ sehingga semua suku di ruas kanan bernilai nol kecuali k_1 dan dengan demikian diperoleh nilai k_1 . Untuk mencari k_2 , kita kalikan kedua ruas (8.23) dengan $(s-p_2)$ kemudian kita substitusikan $s = p_2$; demikian seterusnya sampai semua nilai k diperoleh, dan transformasi balik dapat dicari.

CONTOH 8.9 : Carilah $f(t)$ dari fungsi transformasi berikut.

$$\text{a). } F(s) = \frac{4}{(s+1)(s+3)} \quad \text{b). } F(s) = \frac{4(s+2)}{(s+1)(s+3)} \quad \text{c). } F(s) = \frac{6(s+2)}{s(s+1)(s+4)}$$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 \text{a). } F(s) &= \frac{4}{(s+1)(s+3)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+3} \\
 \rightarrow F(s) \times (s+1) &\rightarrow \frac{4}{(s+3)} = k_1 + \frac{k_2}{s+3}(s+1) \\
 &\rightarrow \text{substitusi } s = -1 \rightarrow \frac{4}{-1+3} = k_1 \rightarrow k_1 = 2 \\
 \rightarrow F(s) \times (s+3) &\text{ dan substitusi } s = -3 \rightarrow \frac{4}{-3+1} = k_2 \rightarrow k_2 = -2 \\
 \Rightarrow F(s) &= \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \Rightarrow f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-3t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b). } F(s) &= \frac{4(s+2)}{(s+1)(s+3)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+3} \\
 \rightarrow F(s) \times (s+1) &\text{ dan substitusi } s = -1 \rightarrow \frac{4(-1+2)}{-1+3} = k_1 \rightarrow k_1 = 2 \\
 \rightarrow F(s) \times (s+3) &\text{ dan substitusi } s = -3 \rightarrow \frac{4(-3+2)}{-3+1} = k_2 \rightarrow k_2 = 2 \\
 \Rightarrow F(s) &= \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+3} \Rightarrow f(t) = 2e^{-t} + 2e^{-3t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c). } F(s) &= \frac{6(s+2)}{s(s+1)(s+4)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+4} \\
 \text{Dengan cara seperti di a) dan b) kita peroleh} \\
 \rightarrow k_1 &= \frac{6(s+2)}{(s+1)(s+4)} \Big|_{s=0} = 3; \quad k_2 = \frac{6(s+2)}{s(s+4)} \Big|_{s=-1} = -2; \quad k_3 = \frac{6(s+2)}{s(s+1)} \Big|_{s=-4} = -1 \\
 \Rightarrow F(s) &= \frac{3}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{-1}{s+4} \rightarrow f(t) = 3 - 2e^{-t} - e^{-4t}
 \end{aligned}$$

Fungsi Dengan Pole Kompleks. Secara fisik, fungsi $F(s)$ merupakan rasio polinomial dengan koefisien riil. Jika $F(s)$ mempunyai pole kompleks yang berbentuk $p = -\alpha + j\beta$, maka ia juga harus mempunyai pole lain yang berbentuk $p^* = -\alpha - j\beta$; sebab jika tidak maka koefisien polinomial tersebut tidak akan riil. Jadi untuk sinyal yang memang secara fisik kita temui, pole kompleks dari $F(s)$ haruslah terjadi secara berpasangan konjugat. Oleh karena itu uraian $F(s)$ harus mengandung dua suku yang berbentuk

$$F(s) = \dots + \frac{k}{s + \alpha - j\beta} + \frac{k^*}{s + \alpha + j\beta} + \dots \quad (8.25)$$

Residu k dan k^* pada pole konjugat juga merupakan residu konjugat sebab $F(s)$ adalah fungsi rasional dengan koefisien rasional. Residu ini dapat kita cari dengan cara yang sama seperti mencari residu pada uraian fungsi dengan pole sederhana. Kita cukup mencari salah satu residu dari pole kompleks karena residu yang lain merupakan konjugatnya.

Transformasi balik dari dua suku dengan pole kompleks akan berupa cosinus teredam. Transformasi balik dari dua suku pada (8.26) adalah

$$\begin{aligned}
 f_k(t) &= ke^{-(\alpha-j\beta)t} + k^*e^{-(\alpha+j\beta)t} = |k|e^{j\theta}e^{-(\alpha-j\beta)t} + |k|e^{-j\theta}e^{-(\alpha+j\beta)t} \\
 &= |k|e^{-(\alpha-j(\beta+\theta))t} + |k|e^{-(\alpha+j(\beta+\theta))t} = 2|k|e^{-\alpha t} \frac{e^{j(\beta+\theta)t} + e^{-j(\beta+\theta)t}}{2} = 2|k|\cos(\beta + \theta)
 \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\text{Jadi } f(t) \text{ dari (8.25) akan berbentuk : } f(t) = \dots + 2|k|\cos(\beta + \theta) + \dots \quad (8.27)$$

CONTOH 8.10 : Carilah transformasi balik dari $F(s) = \frac{8}{s(s^2 + 4s + 8)}$

Penyelesaian :

Fungsi ini mempunyai pole sederhana di $s = 0$, dan pole kompleks yang dapat ditentukan dari faktor penyebut yang berbentuk kwadrat, yaitu

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = -2 \pm j2$$

Uraian dari $F(s)$, penentuan residu, serta transformasi baliknya adalah sebagai berikut.

$$F(s) = \frac{8}{s(s^2 + 4s + 8)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + 2 - j2} + \frac{k_2^*}{s + 2 + j2}$$

$$\rightarrow k_1 = \frac{8}{s(s^2 + 4s + 8)} \times s \Big|_{s=0} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\rightarrow k_2 = \frac{8}{s(s^2 + 4s + 8)} \times (s + 2 - j2) \Big|_{s=-2+j2} = \frac{8}{s(s + 2 + j2)} \Big|_{s=-2+j2} = \frac{8}{-8 - j8} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j(3\pi/4)}$$

$$\rightarrow k_2^* = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j(3\pi/4)}$$

$$\Rightarrow f(t) = u(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j(3\pi/4)} e^{-(2-j2)t} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j(3\pi/4)} e^{-(2+j2)t}$$

$$= u(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-2t} [e^{j(3\pi/4+2t)} + e^{-j(3\pi/4+2t)}] = u(t) + \sqrt{2} e^{-2t} \cos(2t + 3\pi/4)$$

Fungsi Dengan Pole Ganda. Pada kondisi tertentu, fungsi $F(s)$ dapat mempunyai pole ganda. Penguraian $F(s)$ yang demikian ini dilakukan dengan “memecah” faktor yang mengandung pole ganda dengan tujuan untuk mendapatkan bentuk fungsi dengan pole sederhana yang dapat diuraikan seperti biasanya. Untuk jelasnya kita ambil suatu fungsi yang mengandung pole ganda (dua pole sama) seperti pada (8.28) berikut ini.

$$F(s) = \frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)^2} \tag{8.28}$$

Dengan mengeluarkan salah satu faktor yang mengandung pole ganda kita dapatkan

$$F(s) = \frac{1}{s - p_2} \left[\frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)} \right] \tag{8.29}$$

Bagian yang didalam tanda kurung dari (8.29) mengandung pole sederhana sehingga kita dapat menguraikannya seperti biasa.

$$F_1(s) = \left[\frac{K(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)} \right] = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} \tag{8.30}$$

Residu pada (8.30) dapat ditentukan, misalnya $k_1 = A$ dan $k_2 = B$, dan faktor yang kita keluarkan kita masukkan kembali sehingga (8.29) menjadi

$$F(s) = \frac{1}{s - p_2} \left[\frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} \right] = \frac{A}{(s - p_2)(s - p_1)} + \frac{B}{(s - p_2)^2}$$

dan suku pertama ruas kanan diuraikan lebih lanjut menjadi

$$F(s) = \frac{k_{11}}{s - p_1} + \frac{k_{12}}{s - p_2} + \frac{B}{(s - p_2)^2} \tag{8.31}$$

Transformasi balik dari (8.31) adalah

$$f(t) = k_{11}e^{p_1t} + k_{12}e^{p_2t} + Bte^{p_2t} \tag{8.32}$$

CONTOH 8.11 : Tentukan transformasi balik dari fungsi : $F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)^2}$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{s}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)} \left[\frac{s}{(s+1)(s+2)} \right] = \frac{1}{(s+2)} \left[\frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} \right] \\
 &\rightarrow k_1 = \frac{s}{(s+2)} \Big|_{s=-1} = -1 \quad \rightarrow k_2 = \frac{s}{(s+1)} \Big|_{s=-2} = 2 \\
 \Rightarrow F(s) &= \frac{1}{(s+2)} \left[\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right] = \frac{-1}{(s+1)(s+2)} + \frac{2}{(s+2)^2} = \frac{k_{11}}{s+1} + \frac{k_{12}}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \\
 &\rightarrow k_{11} = \frac{-1}{s+2} \Big|_{s=-1} = -1 \quad \rightarrow k_{12} = \frac{-1}{s+1} \Big|_{s=-2} = 1 \\
 \Rightarrow F(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = -e^{-t} + e^{-2t} + 2te^{-2t}
 \end{aligned}$$

Konvolusi. Kelinieran transformasi Laplace menyatakan bahwa

$$\text{jika } f(t) = f_1(t) + f_2(t) \text{ maka } F(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

$$\text{dan sebaliknya jika } F(s) = F_1(s) + F_2(s) \text{ maka } f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Kelinieran dari transformasi Laplace ini *tidak mencakup perkalian*. Jadi

$$\text{jika } F(s) = F_1(s)F_2(s) \text{ maka } f(t) \neq f_1(t)f_2(t)$$

Mencari fungsi $f(t)$ dari suatu fungsi $F(s)$ yang merupakan hasil kali dua fungsi s yang lain, melibatkan sifat transformasi Laplace yang kita sebut *konvolusi*. Sifat ini dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\text{jika } F(s) = F_1(s)F_2(s) \text{ maka } \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau \quad (8.33)$$

Kita katakan bahwa transformasi balik dari perkalian dua $F(s)$ diperoleh dengan melakukan konvolusi dari kedua bentuk gelombang yang bersangkutan. Kedua bentuk integral pada (8.33) disebut *integral konvolusi*.

Pandanglah dua fungsi waktu $f_1(\tau)$ dan $f_2(t)$. Transformasi Laplace masing-masing adalah

$$F_1(s) = \int_0^\infty f_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad \text{dan} \quad F_2(s) = \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt$$

kita kalikan dengan $F_2(s)$ akan kita peroleh $F_1(s)F_2(s) = \int_0^\infty f_1(\tau)e^{-s\tau}F_2(s) d\tau$.

Sifat translasi di kawasan waktu menyatakan bahwa $e^{-s\tau}F_2(s)$ adalah transformasi Laplace dari $[f_2(t-\tau)]u(t-\tau)$ sehingga persamaan tersebut dapat ditulis

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^\infty f_1(\tau) \left[\int_0^\infty f_2(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt \right] d\tau$$

Karena untuk $\tau > t$ nilai $u(t-\tau) = 0$, maka integrasi yang berada di dalam kurung pada persamaan di atas cukup dilakukan dari 0 sampai t saja, sehingga

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^\infty f_1(\tau) \left[\int_0^t f_2(t-\tau)e^{-st}dt \right] d\tau = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)e^{-st}dt \right] d\tau$$

Dengan mempertukarkan urutan integrasi, kita peroleh

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \right] e^{-st}dt = \mathcal{L} \left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \right]$$

CONTOH 8.12 : Carilah $f(t)$ dari $F(s)$ berikut.

$$\text{a). } F(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{b). } F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad \text{c). } F(s) = \frac{1}{s^2(s+a)}$$

Penyelesaian :

a). Fungsi ini kita pandang sebagai perkalian dari dua fungsi.

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s)F_2(s) \quad \text{dengan} \quad F_1(s) = F_2(s) = \frac{1}{(s+a)} \rightarrow f_1(t) = f_2(t) = e^{-at} \\ \Rightarrow f(t) &= \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx = \int_0^t e^{-ax}e^{-a(t-x)}dx = \int_0^t e^{-ax-at+ax}dx \\ &= e^{-at} \int_0^t dx = te^{-at} \end{aligned}$$

b). Fungsi ini juga merupakan perkalian dari dua fungsi.

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s)F_2(s) \quad \text{dengan} \quad F_1(s) = \frac{1}{(s+a)} \quad \text{dan} \quad F_2(s) = \frac{1}{(s+b)} \\ &\rightarrow f_1(t) = e^{-at} \quad \text{dan} \quad f_2(t) = e^{-bt} \\ \Rightarrow f(t) &= \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx = \int_0^t e^{-ax}e^{-b(t-x)}dx = e^{-bt} \int_0^t e^{(-a+b)x}dx \\ &= e^{-bt} \left[\frac{e^{(-a+b)x}}{-a+b} \right]_0^t = \frac{e^{-bt}(e^{(-a+b)t} - 1)}{-a+b} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{-a+b} \end{aligned}$$

c). Fungsi ketiga ini juga dapat dipandang sebagai perkalian dua fungsi.

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s)F_2(s) \quad \text{dengan} \quad F_1(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{dan} \quad F_2(s) = \frac{1}{s+a} \\ &\rightarrow f_1(t) = t \quad \text{dan} \quad f_2(t) = e^{-at} \\ \Rightarrow f(t) &= \int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx = \int_0^t xe^{-a(t-x)}dx = e^{-at} \int_0^t xe^{ax}dx = e^{-at} \left[\frac{xe^{ax}}{a} \right]_0^t - \int_0^t \frac{e^{ax}}{a}dx \\ &= e^{-at} \left[\frac{te^{at} - 0}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} \right]_0^t = e^{-at} \left[\frac{te^{at} - 0}{a} - \frac{e^{at} - 1}{a^2} \right] = \frac{at - 1 + e^{-at}}{a^2} \end{aligned}$$

Solusi Persamaan Rangkaian Menggunakan Transformasi Laplace

Dengan menggunakan transformasi Laplace kita dapat mencari solusi suatu persamaan rangkaian, yang sering berbentuk persamaan diferensial seperti yang kita lihat di Bab-5, dengan lebih mudah. Transformasi akan mengubah persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar biasa di kawasan s yang dengan mudah dicari solusinya. Dengan mentransformasi balik solusi di kawasan s tersebut, kita akan memperoleh solusi dari persamaan diferensialnya.

CONTOH 8.13 : Gunakan transformasi Laplace untuk mencari solusi persamaan berikut.

$$\frac{dv}{dt} + 10v = 0, \quad v(0^+) = 5$$

Penyelesaian :

Transformasi Laplace persamaan diferensial ini adalah

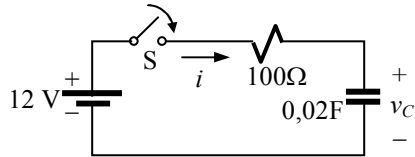
$$sV(s) - v(0^+) + 10V(s) = 0 \quad \text{atau} \quad sV(s) - 5 + 10V(s) = 0 \Rightarrow V(s) = \frac{5}{s+10}$$

Transformasi balik memberikan $v(t) = 5e^{-10t}$

Transformasi Laplace dapat kita manfaatkan untuk mencari solusi dari persamaan diferensial dalam analisis transien. Langkah-langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Menentukan persamaan diferensial rangkaian di kawasan waktu.
2. Mentransformasikan persamaan diferensial yang diperoleh pada langkah 1 ke kawasan s dan mencari solusinya.
3. Transformasi balik solusi yang diperoleh pada langkah 2 untuk memperoleh tanggapan rangkaian.

CONTOH 8.14 : Saklar S pada rangkaian di samping ini ditutup pada $t = 0$. Tentukan tegangan kapasitor untuk $t > 0$ jika sesaat sebelum S ditutup tegangan kapasitor 2 V.



Penyelesaian :

Langkah pertama adalah menentukan persamaan rangkaian untuk $t > 0$. Aplikasi HTK memberikan $-6 + 100i + v_C = 0$ atau $-6 + 2 \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$.

Langkah kedua adalah mentransformasikan persamaan ini ke kawasan s , menjadi

$$-\frac{6}{s} + 2sV_C(s) - v_C(0) + V_C(s) = 0 \quad \text{atau} \quad -\frac{6}{s} + 2sV_C(s) - 2 + V_C(s) = 0$$

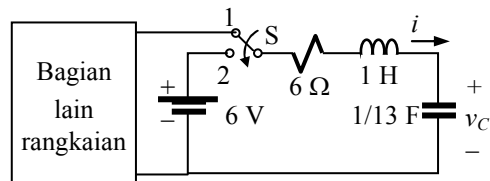
Pemecahan persamaan ini dapat diperoleh dengan mudah.

$$V_C(s) = \frac{3+s}{s(s+0,5)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+0,5} \rightarrow k_1 = \frac{3+s}{(s+0,5)} \Big|_{s=0} = 6 \quad \text{dan} \quad k_2 = \frac{3+s}{s} \Big|_{s=-0,5} = -5$$

$$\Rightarrow V_C(s) = \frac{6}{s} - \frac{5}{s+0,5}$$

Langkah terakhir adalah mentransformasi balik $V_C(s)$: $v_C(t) = 6 - 5e^{-0,5t}$ V

CONTOH 8.15 : Pada rangkaian di samping ini, saklar S dipindahkan dari posisi 1 ke 2 pada $t = 0$. Tentukan $i(t)$ untuk $t > 0$, jika sesaat sebelum saklar dipindah tegangan kapasitor 4 V dan arus induktor 2 A.



Penyelesaian :

Aplikasi HTK pada rangkaian ini setelah saklar ada di posisi 2 ($t > 0$) memberikan

$$-6 + 6i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt + v_C(0) = 0 \quad \text{atau} \quad -6 + 6i + \frac{di}{dt} + 13 \int idt + 4 = 0$$

Transformasi Laplace dari persamaan rangkaian ini menghasilkan

$$\frac{-6}{s} + 6I(s) + sI(s) - i(0) + 13 \frac{I(s)}{s} + \frac{4}{s} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{-6}{s} + 6I(s) + sI(s) - 2 + 13 \frac{I(s)}{s} + \frac{4}{s} = 0$$

Pemecahan persamaan ini adalah :

$$\rightarrow I(s) = \frac{2s+2}{s^2+6s+13} = \frac{2s+2}{(s+3-j2)(s+3+j2)} = \frac{k_1}{s+3-j2} + \frac{k_1^*}{s+3+j2}$$

$$\rightarrow k_1 = \frac{2s+2}{s+3+j2} \Big|_{s=-3+j2} = 1+j1 = \sqrt{2}e^{j45^\circ} \rightarrow k_1^* = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{s+3-j2} + \frac{\sqrt{2}e^{-j45^\circ}}{s+3+j2}$$

Transformasi balik dari $I(s)$ memberikan

$$\Rightarrow i(t) = \sqrt{2}e^{j45^\circ} e^{-(3-j2)t} + \sqrt{2}e^{-j45^\circ} e^{-(3+j2)t} = 2e^{-3t} (\cos 2t - \sin 2t) \text{ A}$$

SOAL-SOAL : TRANSFORMASI BENTUK GELOMBANG SINYAL

1. Untuk sinyal-sinyal berikut ini, carilah pernyataannya di kawasan s .

$$v_1(t) = 10[1 - e^{-2t}]u(t)$$

$$v_2(t) = 10[1 + 4t]u(t)$$

$$v_3(t) = 10[e^{-2t} - e^{-4t}]u(t)$$

$$v_4(t) = 10[2e^{-2t} - 4e^{-4t}]u(t)$$

2. Ulangi soal 1 untuk sinyal-sinyal berikut ini.

$$v_1(t) = 15[\sin(20t - 30^\circ)]u(t)$$

$$v_2(t) = 15[\cos 20t - \sin 20t]u(t)$$

$$v_3(t) = 15[\cos 20t - \cos 10t]u(t)$$

$$v_4(t) = 15[1 - 2\sin 10t]u(t)$$

3. Ulangi soal 1 untuk sinyal-sinyal berikut ini.

$$v_1(t) = 20[e^{-2t} \sin(20t - 30^\circ)]u(t)$$

$$v_2(t) = 20[e^{-2t} (\cos 20t - \sin 20t)]u(t)$$

$$v_3(t) = 20[e^{-2t} (\cos 20t - \cos 10t)]u(t)$$

$$v_4(t) = 20[e^{-2t} (1 - 2\sin 10t)]u(t)$$

4. Ulangi soal 1 untuk sinyal-sinyal berikut ini.

$$v_1(t) = 15[\cos^2 10t]u(t)$$

$$v_2(t) = 15[(\cos 20t)(\sin 20t)]u(t)$$

$$v_3(t) = 20te^{-2t}u(t)$$

$$v_4(t) = 20[e^{-2t} \sin 10t]u(t)$$

5. Berikut ini adalah pernyataan sinyal di kawasan s . Carilah pernyataannya di kawasan waktu t .

$$V_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$V_2(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)}$$

$$V_3(s) = \frac{s^2}{(s+2)(s+3)}$$

$$V_4(s) = \frac{s^2}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

6. Ulangi soal 5 untuk pernyataan sinyal di kawasan s berikut ini.

$$V_1(s) = \frac{1}{(s+2)^2 + 9}$$

$$V_2(s) = \frac{s}{(s+2)^2 + 9}$$

$$V_3(s) = \frac{s^2}{(s+2)^2 + 9}$$

7. Ulangi soal 5 untuk pernyataan sinyal di kawasan s berikut ini.

$$V_1(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

$$V_2(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

$$V_3(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

8. Ulangi soal 5 untuk pernyataan sinyal di kawasan s berikut ini.

$$V_1(s) = \frac{10}{s^2 + 10s + 16}$$

$$V_2(s) = \frac{10}{s^2 + 8s + 16}$$

$$V_3(s) = \frac{10}{s^2 + 6s + 25}$$

9. Ulangi soal 5 untuk pernyataan sinyal di kawasan s berikut ini.

$$V_1(s) = \frac{6s + 14}{(s+2)(s+3)}$$

$$V_2(s) = \frac{9s + 26}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$V_3(s) = \frac{6s^2 + 34s + 46}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

10. Ulangi soal 5 untuk pernyataan sinyal di kawasan s berikut ini

$$V_1(s) = \frac{s+2}{s(s^2 + 2s + 1)(s+3)}$$

$$V_2(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{s^2(s^2 + 2s + 4)}$$

$$V_3(s) = \frac{(s+10)(s+200)}{(s+20)(s+100)}$$

8.2. Analisis Rangkaian di Kawasan s

Tujuan :

- Memahami konsep impedansi di kawasan s .
- Mampu melakukan transformasi rangkaian ke kawasan s .
- Mampu melakukan analisis rangkaian di kawasan s .

Pada contoh 8.13 dan 8.14. transformasi Laplace digunakan untuk memecahkan persamaan rangkaian. Jadi kita harus mencari terlebih dahulu persamaan rangkaian di kawasan t sebelum perhitungan-perhitungan di kawasan s dilakukan. Berikut ini kita akan mempelajari konsep impedansi dan dengan konsep ini kita akan dapat melakukan transformasi rangkaian ke kawasan s . Dengan transformasi rangkaian ini, kita langsung bekerja di kawasan s , artinya persamaan rangkaian langsung dicari di kawasan s tanpa mencari persamaan rangkaian di kawasan t lebih dulu.

Sebagaimana kita ketahui, elemen dalam analisis rangkaian listrik adalah model dari piranti yang dinyatakan dengan karakteristik i - v -nya. Jika analisis dilakukan di kawasan s dimana $v(t)$ dan $i(t)$ ditransformasikan menjadi $V(s)$ dan $I(s)$, maka pernyataan elemenpun harus dinyatakan di kawasan s .

Hubungan Tegangan-Arus Elemen di Kawasan s

Resistor. Hubungan arus dan tegangan resistor di kawasan t adalah $v_R(t) = Ri_R(t)$

Transformasi Laplace dari v_R adalah $V_R(s) = \int_0^\infty v_R(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty Ri_R(t)e^{-st} dt = RI_R(s)$

Jadi hubungan arus-tegangan resistor di kawasan s adalah

$$V_R(s) = R I_R(s) \quad (8.34)$$

Induktor. Hubungan antara arus dan tegangan induktor di kawasan t adalah $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$

Transformasi Laplace dari v_L adalah (ingat sifat diferensiasi dari transformasi Laplace) :

$$V_L(s) = \int_0^\infty v_L(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty \left[L \frac{di_L(t)}{dt} \right] e^{-st} dt = sLI_L(s) - Li_L(0)$$

Jadi hubungan tegangan-arus induktor adalah

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0) \quad (8.35)$$

dengan $i_L(0)$ adalah arus induktor pada saat awal integrasi dilakukan atau dengan kata lain adalah arus pada $t = 0$. Kita ingat pada analisis transien di Bab-4, arus ini adalah kondisi awal dari induktor, yaitu $i(0^+) = i(0^-)$.

Kapasitor. Hubungan antara tegangan dan arus kapasitor di kawasan t adalah

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + v_C(0)$$

Transformasi Laplace dari tegangan kapasitor adalah

$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0)}{s} \quad (8.36)$$

dengan $v_C(0)$ adalah tegangan kapasitor pada $t = 0$. Inilah hubungan tegangan dan arus kapasitor di kawasan s .

Konsep Impedansi di Kawasan s

Impedansi merupakan suatu konsep di kawasan s yang didefinisikan sebagai berikut.

Impedansi adalah rasio tegangan terhadap arus di kawasan s dengan kondisi awal nol.

Sesuai dengan definisi ini, maka impedansi elemen dapat kita peroleh dari (8.34), (8.35), dan (8.36) dengan $i_L(0) = 0$ maupun $v_C(0) = 0$,

$$Z_R = \frac{V_R(s)}{I_R(s)} = R ; \quad Z_L = \frac{V_L(s)}{I_L(s)} = sL ; \quad Z_C = \frac{V_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC} \quad (8.37)$$

Dengan konsep impedansi ini maka hubungan tegangan-arus untuk resistor, induktor, dan kapasitor menjadi sederhana, mirip dengan relasi hukum Ohm.

$$V_R(s) = RI_R(s) ; \quad V_L(s) = sLI_L(s) ; \quad V_C = \frac{1}{sC} I_C(s) \quad (8.38)$$

Sejalan dengan pengertian impedansi, dikembangkan pengertian *admitansi*, yaitu $Y = 1/Z$ sehingga untuk resistor, induktor, dan kapasitor kita mempunyai

$$Y_R = \frac{1}{R} ; \quad Y_L = \frac{1}{sL} ; \quad Y_C = sC \quad (8.39)$$

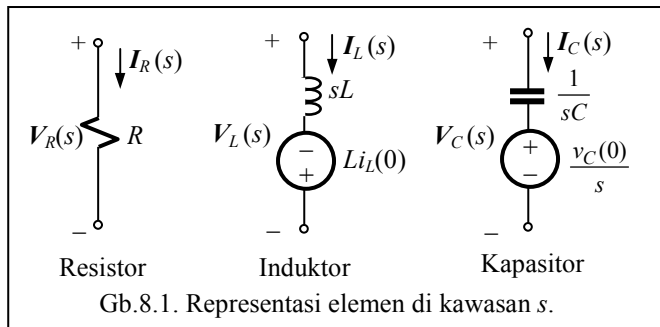
Representasi Elemen di Kawasan s

Dengan pengertian impedansi seperti dikemukakan di atas, dan hubungan tegangan-arus elemen di kawasan s yaitu persamaan (8.34), (8.35), dan (8.36), maka elemen-elemen dapat direpresentasikan di kawasan s dengan impedansinya, sedangkan kondisi awal (untuk induktor dan kapasitor) dinyatakan dengan sumber tegangan yang terhubung seri dengan impedansi tersebut, seperti terlihat pada Gb. 8.1.

$$V_R(s) = R I_R(s)$$

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0)$$

$$V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{v_C(0)}{s}$$

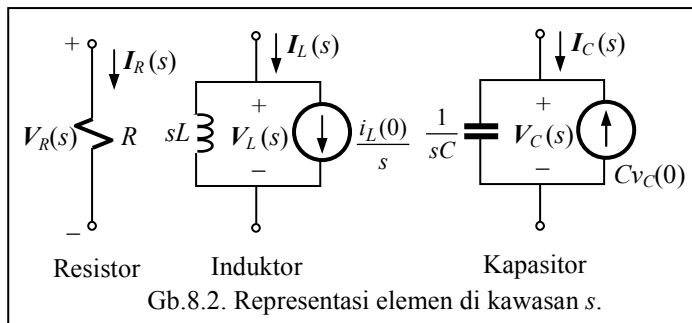


Representasi elemen di kawasan s dapat pula dilakukan dengan menggunakan sumber arus untuk menyatakan kondisi awal induktor dan kapasitor seperti terlihat pada Gb.8.2.

$$V_R(s) = R I_R(s)$$

$$V_L(s) = sL \left(I_L(s) - \frac{i_L(0)}{s} \right)$$

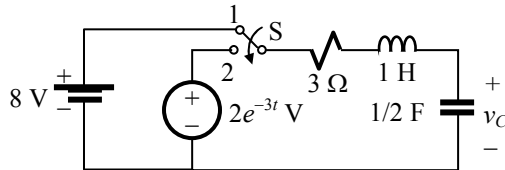
$$V_C(s) = \frac{1}{sC} (I_C(s) + C v_C(0))$$



Transformasi Rangkaian

Representasi elemen ini dapat kita gunakan untuk mentransformasi rangkaian ke kawasan s . Dalam melakukan transformasi rangkaian perlu kita perhatikan juga apakah rangkaian yang kita transformasikan mengandung simpanan energi awal atau tidak. *Jika tidak ada, maka sumber tegangan ataupun sumber arus pada representasi elemen tidak perlu kita gambarkan.*

CONTOH 8.16 : Saklar S pada rangkaian berikut telah lama ada di posisi 1. Pada $t = 0$ saklar dipindahkan ke posisi 2 sehingga rangkaian RLC seri terhubung ke sumber tegangan $2e^{-3t}$ V. Transformasikan rangkaian ke kawasan untuk $t > 0$.



Penyelesaian :

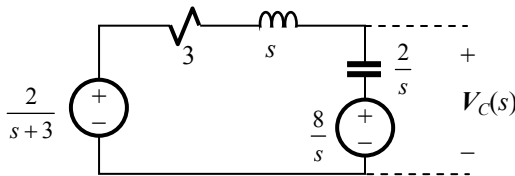
Pada $t < 0$, keadaan telah mantap. Arus induktor nol dan tegangan kapasitor sama dengan tegangan sumber 8 V.

Untuk $t > 0$, sumber tegangan adalah $v_s = 2e^{-3t}$ yang transformasinya adalah

$$V_s(s) = \frac{2}{s+3}$$

Representasi kapasitor adalah impedansinya $1/sC = 2/s$ seri dengan sumber tegangan $8/s$ karena tegangan kapasitor pada $t = 0$ adalah 8 V. Representasi induktor impedansinya $sL = s$ tanpa disertai dengan sumber tegangan karena arus induktor pada $t = 0$ adalah nol.

Transformasi rangkaian ke kawasan s untuk $t > 0$ adalah



Perhatikan bahwa tegangan kapasitor $V_C(s)$ mencakup sumber tegangan $(8/s)$ dan bukan hanya tegangan pada impedansi $(2/s)$ saja.

Setelah rangkaian ditransformasikan, kita mengharapkan dapat langsung mencari persamaan rangkaian di kawasan s . Apakah hukum-hukum, kaidah, teorema rangkaian serta metoda analisis yang telah kita pelajari dapat kita terapkan? Hal tersebut kita bahas di bawah ini.

Hukum Kirchhoff

Hukum arus Kirchhoff menyatakan bahwa untuk suatu simpul $\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$

Jika kita lakukan transformasi, akan kita peroleh

$$\int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n i_k(t) \right] e^{-st} dt = \sum_{k=1}^n \left[\int_0^{\infty} i_k(t) e^{-st} dt \right] = \sum_{k=1}^n I_k(s) = 0 \quad (8.40)$$

Jadi hukum arus Kirchhoff (HAK) berlaku di kawasan s . Hal yang sama terjadi juga pada hukum tegangan Kirchhoff. Untuk suatu loop

$$\sum_{k=1}^n v_k(t) = 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n v_k(t) \right] e^{-st} dt = \sum_{k=1}^n \left[\int_0^{\infty} v_k(t) e^{-st} dt \right] = \sum_{k=1}^n V_k(s) = 0 \quad (8.41)$$

Kaidah-Kaidah Rangkaian

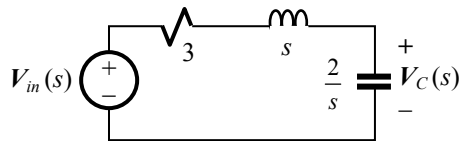
Kaidah-kaidah rangkaian, seperti rangkaian ekivalen seri dan paralel, pembagi arus, pembagi tegangan, sesungguhnya merupakan konsekuensi hukum Kirchhoff. Karena hukum ini berlaku di kawasan s maka kaidah-kaidah rangkaian juga harus berlaku di kawasan s . Dengan mudah kita akan mendapatkan impedansi ekivalen maupun admitansi ekivalen

$$Z_{ekiv\ seri} = \sum Z_k \quad ; \quad Y_{ekiv\ paralel} = \sum Y_k \quad (8.42)$$

Demikian pula dengan pembagi arus dan pembagi tegangan.

$$I_k(s) = \frac{Y_k}{Y_{ekiv\ paralel}} I_{total}(s) \quad ; \quad V_k(s) = \frac{Z_k}{Z_{ekiv\ seri}} V_{total}(s) \quad (8.43)$$

CONTOH 8.17 : Carilah $V_C(s)$ pada rangkaian impedansi seri RLC berikut ini.



Penyelesaian :

Kaidah pembagi tegangan pada rangkaian ini memberikan

$$V_R(s) = \frac{2/s}{3+s+\frac{2}{s}} V_{in}(s) = \frac{2}{s^2+3s+2} V_{in}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} V_{in}(s)$$

Pemahaman :

Jika $V_{in}(s) = 10/s$ maka

$$V_C(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}$$

$$\rightarrow k_1 = \frac{20}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = 10 \quad ; \quad k_2 = \frac{20}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = -20 \quad ;$$

$$k_3 = \frac{20}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = 10$$

$$\Rightarrow V_C(s) = \frac{10}{s} + \frac{-20}{s+1} + \frac{10}{s+2} \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = 10 - 20e^{-t} + 10e^{-2t}$$

Inilah tanggapan rangkaian rangkaian RLC seri (dengan $R = 3\Omega$, $L = 1H$, $C = 0,5 F$) dengan masukan sinyal anak tangga yang amplitudonya 10 V.

Teorema Rangkaian

Prinsip Proporsionalitas. Prinsip proporsionalitas merupakan pernyataan langsung dari sifat rangkaian linier. Di kawasan t , pada rangkaian dengan elemen-elemen resistor, sifat ini dinyatakan oleh hubungan

$$y(t) = Kx(t)$$

dengan $y(t)$ dan $x(t)$ adalah keluaran dan masukan dan K adalah suatu konstanta yang ditentukan oleh nilai-nilai resistor yang terlibat. Transformasi Laplace dari kedua ruas hubungan diatas akan memberikan

$$Y(s) = KX(s)$$

dengan $Y(s)$ dan $X(s)$ adalah sinyal keluaran dan masukan di kawasan s . Untuk rangkaian impedansi,

$$Y(s) = K_s X(s) \quad (8.44)$$

Perbedaan antara prinsip proporsionalitas pada rangkaian-rangkaian resistor dengan rangkaian impedansi terletak pada faktor K_s . Dalam rangkaian impedansi nilai K_s , merupakan fungsi rasional dalam s . Sebagai contoh kita lihat rangkaian seri RLC dengan masukan $V_{in}(s)$. Jika tegangan keluaran adalah tegangan pada resistor $V_R(s)$, maka

$$V_R(s) = \frac{R}{R + sL + (1/sC)} V_{in}(s) = \left[\frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1} \right] V_{in}(s)$$

Besaran yang berada dalam tanda kurung adalah faktor proporsionalitas. Faktor ini, yang merupakan fungsi rasional dalam s , memberikan hubungan antara masukan dan keluaran dan disebut *fungsi jaring*.

Prinsip Superposisi. Prinsip superposisi menyatakan bahwa untuk rangkaian linier besarnya sinyal keluaran dapat dituliskan sebagai

$$y_o(t) = K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t) + K_3 x_3(t) + \dots$$

dengan $x_1, x_2, x_3 \dots$ adalah sinyal masukan dan $K_1, K_2, K_3 \dots$ adalah konstanta proporsionalitas yang besarnya tergantung dari nilai-nilai elemen dalam rangkaian. Sifat linier dari transformasi Laplace menjamin bahwa prinsip superposisi berlaku pula untuk rangkaian linier di kawasan s dengan perbedaan bahwa konstanta proporsionalitas berubah menjadi fungsi rasional dalam s dan sinyal-sinyal dinyatakan dalam kawasan s .

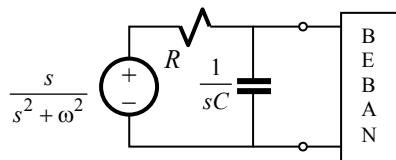
$$Y_o(s) = K_{s1} X_1(s) + K_{s2} X_2(s) + K_{s3} X_3(s) + \dots \quad (8.45)$$

Teorema Thévenin dan Norton. Konsep umum mengenai teorema Thévenin dan Norton pada rangkaian-rangkaian impedansi, sama dengan apa yang kita pelajari untuk rangkaian dengan elemen-elemen resistor. Cara mencari rangkaian ekuivalen Thévenin dan Norton sama seperti dalam rangkaian resistor, hanya di sini kita mempunyai impedansi ekuivalen Thévenin, Z_T , dan admitansi ekuivalen Norton, Y_N , dengan hubungan sbb:

$$V_T(s) = V_{ht}(s) = I_N(s) Z_T \quad ; \quad I_N(s) = I_{hs}(s) = \frac{V_T(s)}{Z_T} \quad ; \quad (8.46)$$

$$Z_T = \frac{1}{Y_N} = \frac{V_T(s)}{I_N(s)}$$

CONTOH 8.18 : Carilah rangkaian ekuivalen Thevenin dari rangkaian impedansi berikut ini.

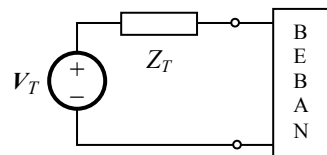


Penyelesaian :

$$V_T(s) = V_{ht}(s) = \frac{1/sC}{R + (1/sC)} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s/RC}{(s + 1/RC)(s^2 + \omega^2)} \quad ;$$

$$I_N(s) = I_{hs}(s) = \frac{1}{R} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$Z_T = R \parallel (1/RC) = \frac{R/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{C(s + 1/RC)}$$

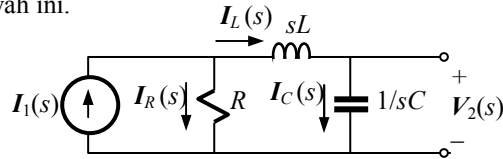


Metoda-Metoda Analisis

Metoda-metoda analisis, baik metoda dasar (metoda reduksi rangkaian, *unit output*, superposisi, rangkaian ekuivalen Thevenin dan Norton) maupun metoda umum (metoda tegangan simpul, arus mesh) yang telah kita pelajari di Bab-2 untuk rangkaian-rangkaian resistor dapat kita gunakan untuk analisis di kawasan s . Hal ini mudah dipahami mengingat hukum-hukum, kaidah-kaidah maupun teorema rangkaian yang berlaku di kawasan t berlaku pula di kawasan s . Berikut ini kita akan melihat contoh-contoh penggunaan metoda analisis tersebut di kawasan s .

Metoda Unit Output

CONTOH 8.19 : Dengan menggunakan **metoda unit output**, carilah $V_2(s)$ pada rangkaian impedansi di bawah ini.



Penyelesaian : Misalkan: $V_2(s) = 1$

$$\rightarrow V_C(s) = V_2(s) = 1 \rightarrow I_C(s) = \frac{1}{1/sC} = sC$$

$$\rightarrow I_L(s) = I_C(s) = sC \rightarrow V_L(s) = sL \times sC = LCs^2$$

$$\rightarrow V_R(s) = V_L(s) + V_C(s) = LCs^2 + 1 \rightarrow I_R(s) = \frac{LCs^2 + 1}{R}$$

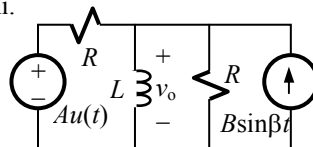
$$\Rightarrow I_1^*(s) = I_R(s) + I_L(s) = \frac{LCs^2 + 1}{R} + sC = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{R}$$

$$\Rightarrow K_s = \frac{1}{I_1^*(s)} = \frac{R}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\Rightarrow V_2(s) = K_s I_1(s) = \frac{R}{LCs^2 + RCs + 1} I_1(s)$$

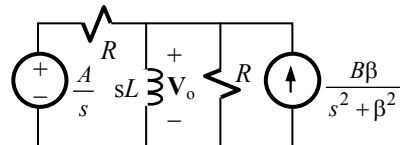
Metoda Superposisi

CONTOH 8.20 : Dengan menggunakan **metoda superposisi**, carilah tegangan induktor $v_o(t)$ pada rangkaian berikut ini.

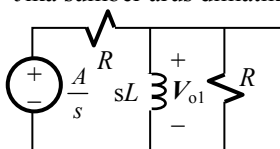


Penyelesaian :

Kita transformasikan ke kawasan s menjadi



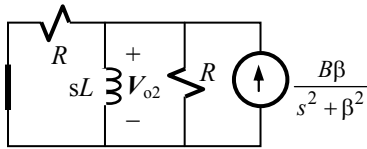
Jika sumber arus dimatikan, maka rangkaian menjadi :



$$\rightarrow Z_{L//R} = \frac{RLs}{R + sL}$$

$$\Rightarrow V_{o1}(s) = \frac{RLs}{R + sL} \cdot \frac{A}{s} = \frac{L}{R + 2sL} A = \frac{A/2}{s + R/2L}$$

Jika sumber tegangan dimatikan, rangkaian menjadi :



$$V_{o2}(s) = sL \times I_L(s) = sL \times \frac{1/sL}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL}} \times \frac{B\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{sRL}{2sL + R} \times \frac{B\beta}{s^2 + \beta^2} = \frac{RB\beta}{2} \frac{s}{(s + R/2L)(s^2 + \beta^2)}$$

$$\Rightarrow V_o(s) = V_{o1}(s) + V_{o2}(s) = \frac{A/2}{s + R/2L} + \frac{RB\beta}{2} \left[\frac{k_1}{s + R/2L} + \frac{k_2}{s + j\beta} + \frac{k_3}{s - j\beta} \right]$$

$$\rightarrow k_1 = \left. \frac{s}{(s^2 + \beta^2)} \right|_{s=-R/2L} = -\frac{(R/2L)}{(R/2L)^2 + \beta^2}$$

$$\rightarrow k_2 = \left. \frac{s}{(s + R/2L)(s - j\beta)} \right|_{s=-j\beta} = \frac{1}{R/L - j2\beta} = \frac{1}{\sqrt{(R/L)^2 + 4\beta^2}} e^{j\theta}, \theta = \tan^{-1} \left(\frac{+2\beta}{R/L} \right)$$

$$\rightarrow k_3 = \frac{1}{\sqrt{(R/L)^2 + 4\beta^2}} e^{-j\theta}$$

$$\Rightarrow v_o(t) = \frac{A}{2} e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{RB\beta}{2} \left[-\frac{(R/2L)}{(R/2L)^2 + \beta^2} e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{1}{\sqrt{(R/L)^2 + 4\beta^2}} (e^{-j(\beta t - \theta)} + e^{j(\beta t - \theta)}) \right]$$

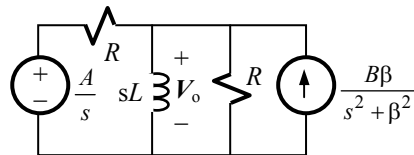
$$= \left[\frac{A}{2} - \frac{R^2 B\beta}{R^2 + 4L\beta^2} \right] e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{RB\beta}{\sqrt{(R/L)^2 + 4\beta^2}} \cos(\beta t - \theta)$$

Metoda Reduksi Rangkaian

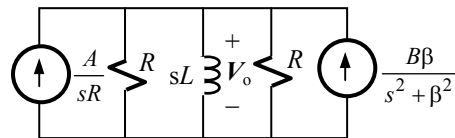
CONTOH 8.21 : Dengan menggunakan **metoda reduksi rangkaian** selesaikanlah persoalan pada contoh 8.20.

Penyelesaian :

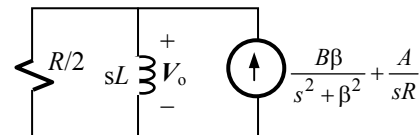
Rangkaian yang ditransformasikan ke kawasan s kita gambar lagi seperti di samping ini.



Jika sumber tegangan ditransformasikan menjadi sumber arus, kita mendapatkan rangkaian dengan dua sumber arus dan dua resistor diparalel.

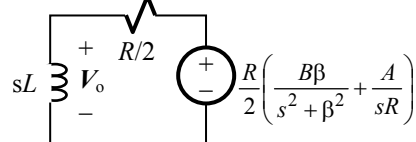


Rangkaian tersebut dapat disederhanakan menjadi rangkaian dengan satu sumber arus, dan kemudian menjadi rangkaian dengan sumber tegangan. Dari rangkaian terakhir kita diperoleh :



$$V_o(s) = \frac{sL}{sL + R/2} \times \frac{R}{2} \left(\frac{B\beta}{s^2 + \beta^2} + \frac{A}{sR} \right)$$

$$= \frac{A/2}{s + R/2L} + \frac{(RB\beta/2)s}{(s + R/2L)(s^2 + \beta^2)}$$



Hasil ini sama dengan apa yang telah kita peroleh dengan metoda superposisi pada contoh 8.20. Selanjutnya transformasi balik ke kawasan t dilakukan sebagaimana telah dilakukan pada contoh 8.20.

Metoda Rangkaian Ekuivalen Thévenin

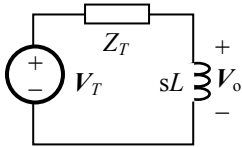
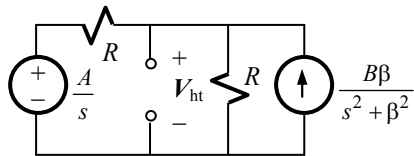
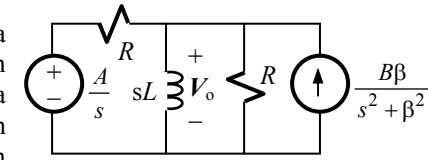
CONTOH 8.22 : Dengan menggunakan **rangkaian ekuivalen Thévenin** selesaikanlah persoalan pada contoh 8.20.

Penyelesaian :

Kita akan menggunakan gabungan metoda superposisi dengan rangkaian ekuivalen Thévenin. Tegangan hubungan terbuka pada waktu induktor dilepas, adalah jumlah tegangan yang diberikan oleh sumber tegangan dan sumber arus secara terpisah, yaitu

$$V_T(s) = V_{ht}(s) = \frac{R}{R+R} \times \frac{A}{s} + R \times \frac{1}{2} \times \frac{B\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{A/2}{s} + \frac{RB\beta/2}{s^2 + \beta^2}$$



Dilihat dari terminal induktor, impedansi Z_T hanyalah berupa dua resistor paralel, yaitu

$$Z_T = \frac{R}{2}$$

Dengan demikian maka tegangan induktor menjadi

$$V_o(s) = \frac{sL}{sL + Z_T} V_T(s) = \frac{sL}{sL + R/2} \left(\frac{A/2}{s} + \frac{RB\beta/2}{s^2 + \beta^2} \right)$$

$$= \frac{A/2}{s + R/2L} + \frac{(RB\beta/2)s}{(s + R/2L)(s^2 + \beta^2)}$$

Persamaan ini telah kita peroleh sebelumnya, baik dengan metoda superposisi maupun metoda reduksi rangkaian.

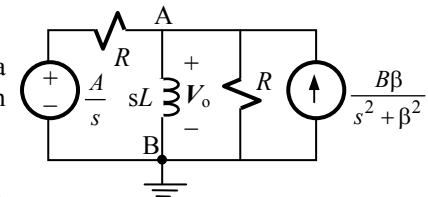
Metoda Tegangan Simpul

CONTOH 8.23 : Selesaikan persoalan pada contoh 8.20. dengan menggunakan **metoda tegangan simpul**.

Penyelesaian :

Dengan referensi tegangan seperti terlihat pada gambar di samping ini, persamaan tegangan simpul untuk simpul A adalah:

$$V_o(s) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} \right) - \frac{1}{R} \frac{A}{s} - \frac{B\beta}{s^2 + \beta^2} = 0$$



Dari persamaan tersebut di atas kita peroleh

$$V_o(s) \left(\frac{2Ls + R}{RLs} \right) = \frac{A}{Rs} + \frac{B\beta}{s^2 + \beta^2} \quad \text{atau}$$

$$V_o(s) = \frac{RLs}{2Ls + R} \left(\frac{A}{Rs} + \frac{B\beta}{s^2 + \beta^2} \right) = \frac{A/2}{s + R/2L} + \frac{(RB\beta/2)s}{(s + R/2L)(s^2 + \beta^2)}$$

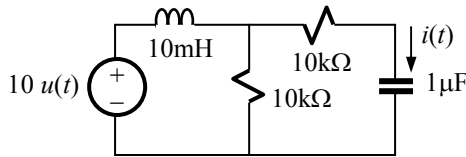
Hasil yang kita peroleh sama seperti sebelumnya.

Pemahaman :

Dalam analisis di kawasan s , metoda tegangan simpul untuk rangkaian dengan beberapa sumber yang mempunyai *frekuensi berbeda*, dapat langsung digunakan. Hal ini sangat berbeda dari analisis di kawasan fasor, dimana kita tidak dapat melakukan superposisi fasor dari sumber-sumber yang mempunyai frekuensi berbeda.

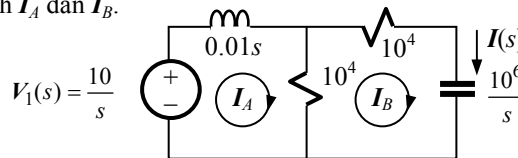
Metoda Arus Mesh

CONTOH 8.24 : Pada rangkaian berikut ini tidak terdapat simpanan energi awal. Gunakan metoda arus mesh untuk menghitung $i(t)$.



Penyelesaian :

Transformasi rangkaian ke kawasan s adalah seperti gambar berikut ini. Kita tetapkan referensi arus mesh I_A dan I_B .



Persamaan arus mesh adalah
$$-\frac{10}{s} + I_A(s)(0.01s + 10^4) - I_B(s) \times 10^4 = 0$$

$$I_B(s) \left(10^4 + 10^4 + \frac{10^6}{s} \right) - I_A(s) \times 10^4 = 0$$

$$\rightarrow I_A(s) = \frac{(2s + 10^2)}{s} I_B(s) \Rightarrow -\frac{10}{s} + (0.01s + 10^4) \frac{(2s + 10^2)}{s} I_B(s) - I_B(s) \times 10^4 = 0$$

$$\Rightarrow I(s) = I_B(s) = \frac{10}{0,02s^2 + 2 \times 10^4 s + s + 10^6 - 10^4 s} \approx \frac{10}{0,02s^2 + 10^4 s + 10^6} = \frac{10}{(s - \alpha)(s - \beta)}$$

dengan $\alpha = \frac{-10^4 + \sqrt{10^8 - 8 \times 10^4}}{0,04} \approx -100$; $\beta = \frac{-10^4 - \sqrt{10^8 - 8 \times 10^4}}{0,04} \approx -500000$

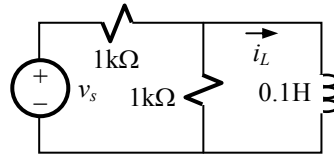
$$\Rightarrow I(s) = \frac{10}{(s + 100)(s + 500000)} = \frac{k_1}{s + 100} + \frac{k_2}{s + 500000}$$

$$k_1 = \frac{10}{s + 500000} \Big|_{s=-100} = 2 \times 10^{-5} ; k_2 = \frac{10}{s + 100} \Big|_{s=-500000} = -2 \times 10^{-5}$$

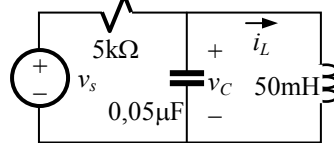
$$\Rightarrow i(t) = 0,02 \left[e^{-100t} - e^{-500000t} \right] \text{ mA}$$

SOAL-SOAL : ANALISIS RANGKAIAN DI KAWASAN s

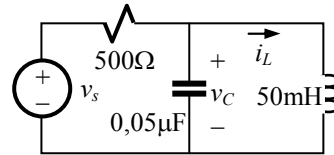
1. Sebuah resistor $2\text{ k}\Omega$ dihubungkan seri dengan sebuah induktor 2 H ; kemudian pada rangkaian ini diterapkan sinyal tegangan $v(t)=10u(t)\text{ V}$. Bagaimanakah bentuk tegangan pada induktor dan pada resistor ? Bagaimanakah tegangannya setelah keadaan mantap tercapai?
2. Ulangi soal 1 jika tegangan yang diterapkan $v(t) = [20\sin 300t] u(t)\text{ V}$.
3. Ulangi soal 1 jika tegangan yang diterapkan $v(t) = [20\cos 300t] u(t)\text{ V}$.
4. Rangkaian seri resistor dan induktor soal 1 diparalelkan kapasitor $0.5\text{ }\mu\text{F}$. Jika kemudian pada rangkaian ini diterapkan tegangan $v(s)=10u(t)\text{ V}$ bagaimanakah bentuk arus induktor ? Bagaimanakah arus tersebut setelah keadaan mantap tercapai?
5. Ulangi soal 4 dengan tegangan masukan $v(t)=[20\sin 300t]u(t)\text{ V}$.
6. Ulangi soal 4 dengan tegangan masukan $v(t)=[20\cos 300t]u(t)\text{ V}$.
7. Sebuah kapasitor 2 pF diserikan dengan induktor $0,5\text{ H}$ dan pada hubungan seri ini diparalelkan resistor $5\text{ k}\Omega$. Jika kemudian pada hubungan seri-paralel ini diterapkan sinyal tegangan $v(t)=10u(t)\text{ V}$, bagaimanakah bentuk tegangan kapasitor ?
8. Ulangi soal 7 dengan tegangan masukan $v(t) = [20\sin 300t] u(t)\text{ V}$.
9. Sebuah resistor $100\text{ }\Omega$ diparalelkan dengan induktor 10 mH dan pada hubungan paralel ini diserikan kapasitor $0,25\text{ }\mu\text{F}$. Jika kemudian pada hubungan seri-paralel ini diterapkan tegangan $v(t) = 10u(t)\text{ V}$, carilah bentuk tegangan kapasitor.
10. Ulangi soal 9 dengan tegangan masukan $v(t) = [20\sin 300t] u(t)\text{ V}$.
11. Carilah tanggapan status nol (tidak ada simpanan energi awal pada rangkaian) dari i_L pada rangkaian berikut jika $v_s=10u(t)\text{ V}$.



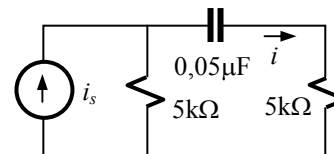
12. Carilah tanggapan status nol dari v_C dan i_L pada rangkaian berikut jika $v_s=100u(t)\text{ V}$.



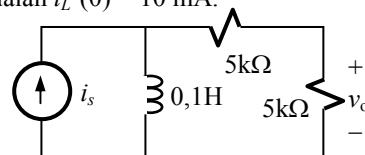
13. Carilah tanggapan status nol dari v_C dan i_L pada rangkaian berikut jika $v_s=[10\cos 20000t]u(t)\text{ V}$.



14. Carilah i pada rangkaian berikut, jika $i_s=100u(t)\text{ mA}$ dan tegangan awal kapa-sitor adalah $v_C(0) = 10\text{ V}$.

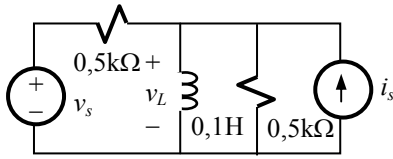


15. Ulangi soal 14 untuk $i_s=[100\cos 400t] u(t)\text{ mA}$.
16. Carilah v_o pada rangkaian berikut, jika $i_s=100u(t)\text{ mA}$ dan arus awal induktor adalah $i_L(0) = 10\text{ mA}$.

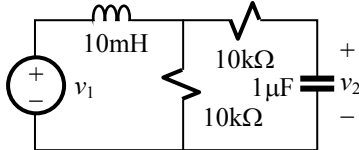


17. Ulangi soal 16 untuk $i_s=[100\cos 400t] u(t)\text{ mA}$.

18. Carilah tanggapan status nol dari v_L pada rangkaian berikut, jika $v_s = 10u(t)$ V, $i_s = [10\sin 400t]u(t)$ mA.

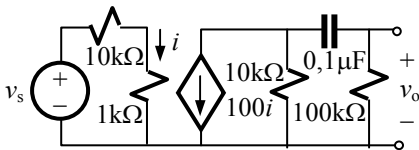


19. Carilah tanggapan status nol dari v_2 pada rangkaian berikut jika $v_s = [10\cos(900t+30^\circ)]u(t)$ V.

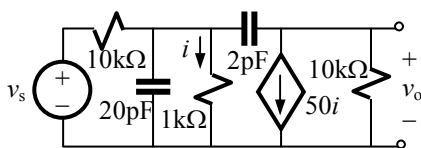


20. Ulangi soal 17 jika tegangan awal kapasitor 5 V sedangkan arus awal induktor nol.

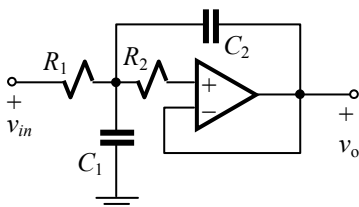
21. Pada rangkaian berikut carilah tanggapan status nol dari tegangan keluaran $v_o(t)$ jika tegangan masukan $v_s(t) = 10u(t)$ mV.



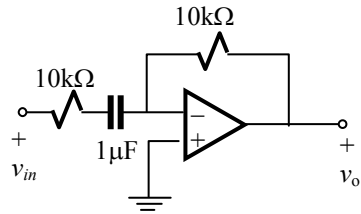
22. Pada rangkaian berikut carilah tanggapan status nol dari tegangan keluaran $v_o(t)$ jika tegangan masukan $v_s(t) = 10u(t)$ mV.



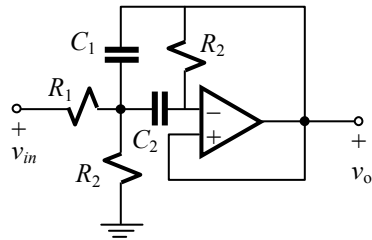
23. Untuk rangkaian berikut, tentukanlah v_o dinyatakan dalam v_{in} .



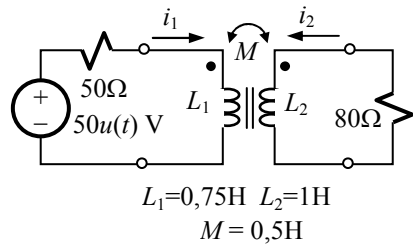
24. Tentukan v_o dinyatakan dalam v_{in} pada rangkaian berikut ini.



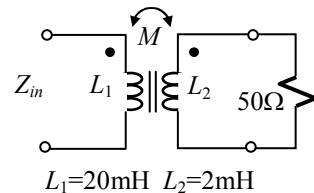
25. Tentukan v_o dinyatakan dalam v_{in} pada rangkaian berikut ini.



26. Untuk rangkaian transformator linier berikut ini tentukanlah i_1 dan i_2 .



27. Pada hubungan beban dengan transformator berikut ini, nyatakanlah impedansi masukan Z_{in} sebagai fungsi dari M .



28. Berapakah M agar Z_{in} pada soal 27 menjadi

$$Z_{in} = \frac{0,02s(0,2s + 25000)}{s + 25000}$$

29. Jika tegangan masukan pada transformator soal 28 adalah

$$v_{in} = 10\cos 300t \text{ V}$$

tentukan arus pada beban 50Ω .

8.3. Fungsi Jaringan

Tujuan :

- Memahami makna fungsi jaringan, fungsi masukan, dan fungsi alih.
- Mampu mencari fungsi alih dari suatu rangkaian melalui analisis rangkaian.
- Memahami peran *pole* dan *zero* dalam tanggapan rangkaian.
- Mampu mencari fungsi alih rangkaian jika tanggapan terhadap sinyal impuls ataupun terhadap sinyal anak tangga diketahui.

Pengertian dan Macam Fungsi Jaringan

Sebagaimana kita ketahui, prinsip proporsionalitas berlaku di kawasan s . Faktor proporsionalitas yang menghubungkan keluaran dan masukan berupa fungsi rasional dalam s yang disebut *fungsi jaringan (network function)*. Secara formal, fungsi jaringan di kawasan s didefinisikan sebagai perbandingan antara tanggapan status nol dan sinyal masukan.

$$\text{Fungsi Jaringan} = \frac{\text{Tanggapan Status Nol } (s)}{\text{Sinyal Masukan } (s)} \quad (8.47)$$

Definisi ini mengandung dua pembatasan, yaitu a) *kondisi awal harus nol* dan b) sistem hanya mempunyai *satu masukan*.

Fungsi jaringan yang sering kita hadapi ada dua bentuk, yaitu *fungsi masukan (driving-point function)* dan *fungsi alih (transfer function)*. Fungsi masukan adalah perbandingan antara tanggapan di suatu gerbang (*port*) dengan masukan di gerbang yang sama. Fungsi alih adalah perbandingan antara tanggapan di suatu gerbang dengan masukan pada gerbang yang berbeda.

Fungsi Masukan. Contoh fungsi masukan adalah impedansi masukan dan admitansi masukan, yang merupakan perbandingan antara tegangan dan arus di terminal masukan.

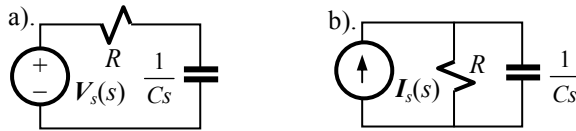
$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad ; \quad Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} \quad (8.48)$$

Fungsi Alih. Dalam rangkaian pemroses sinyal, pengetahuan mengenai fungsi alih sangat penting karena fungsi ini menentukan bagaimana suatu sinyal masukan akan mengalami modifikasi dalam pemrosesan. Karena sinyal masukan maupun sinyal keluaran dapat berupa tegangan ataupun arus, maka kita mengenal empat macam fungsi alih, yaitu

$$\begin{aligned} \text{Fungsi Alih Tegangan: } T_V(s) &= \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} \\ \text{Fungsi Alih Arus : } T_I(s) &= \frac{I_o(s)}{I_{in}(s)} \\ \text{Admitansi Alih : } T_Y(s) &= \frac{I_o(s)}{V_{in}(s)} \\ \text{Impedansi Alih : } T_Z(s) &= \frac{V_o(s)}{I_{in}(s)} \end{aligned} \quad (8.49)$$

$T_V(s)$ dan $T_I(s)$ tidak berdimensi. $T_Y(s)$ mempunyai satuan siemens dan $T_Z(s)$ mempunyai satuan ohm. Fungsi alih suatu rangkaian dapat diperoleh melalui penerapan kaidah-kaidah rangkaian serta analisis rangkaian di kawasan s . Fungsi alih memberikan hubungan antara sinyal masukan dan sinyal keluaran di kawasan s . Berikut ini kita akan melihat beberapa contoh pencarian fungsi alih.

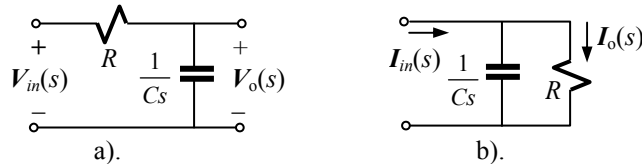
CONTOH 8.25 : Carilah impedansi masukan yang dilihat oleh sumber pada rangkaian-rangkaian berikut ini.



Penyelesaian :

$$\text{a). } Z_{in} = R + \frac{1}{Cs} = \frac{RCs + 1}{Cs} \quad ; \quad \text{b). } Y_{in} = \frac{1}{R} + Cs = \frac{1 + RCs}{R} \Rightarrow Z_{in} = \frac{R}{1 + RCs}$$

CONTOH 8.26 : Carilah fungsi alih rangkaian-rangkaian berikut.

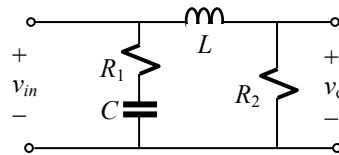


Penyelesaian :

Kaidah pembagi tegangan untuk rangkaian a) dan kaidah pembagi arus untuk rangkaian b) akan memberikan :

$$\text{a). } T_V(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} = \frac{1}{RCs + 1} \quad ; \quad \text{b). } T_I(s) = \frac{I_o(s)}{I_{in}(s)} = \frac{1/R}{1/R + sC} = \frac{1}{1 + sRC}$$

CONTOH 8.27 : Tentukan impedansi masukan dan fungsi alih rangkaian di samping ini.



Penyelesaian :

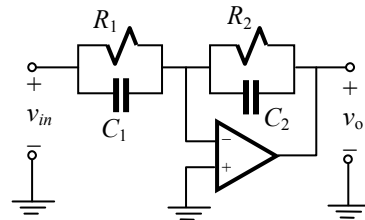
Transformasi rangkaian ke kawasan s memberikan

$$Z_{in} = (R_1 + 1/Cs) \parallel (Ls + R_2) = \frac{(R_1 + 1/Cs)(Ls + R_2)}{R_1 + 1/Cs + R_2 + Ls}$$

$$= \frac{(R_1Cs + 1)(Ls + R_2)}{LCs^2 + (R_1 + R_2)Cs + 1}$$

$$T_V(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_2}{Ls + R_2}$$

CONTOH 8.28 : Tentukan impedansi masukan dan fungsi alih rangkaian di samping ini.



Penyelesaian :

Transformasi rangkaian ke kawasan s memberikan :

$$Z_{in} = R_1 \parallel (1/C_1s) = \frac{R_1/C_1s}{R_1 + 1/C_1s} = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1}$$

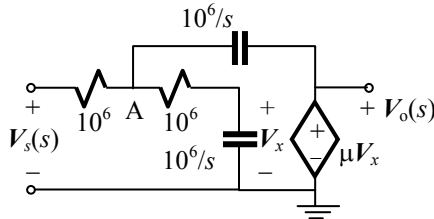
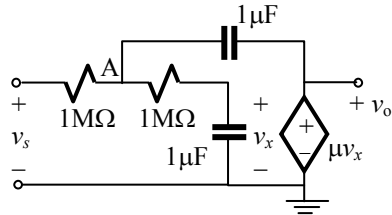
$$T_V(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2 \parallel (1/C_2s)}{R_1 \parallel (1/C_1s)}$$

$$= -\frac{R_2}{R_2C_2s + 1} \times \frac{R_1C_1s + 1}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{R_1C_1s + 1}{R_2C_2s + 1}$$

CONTOH 8.29 : Tentukan fungsi alih rangkaian di samping ini.

Penyelesaian :

Transformasi rangkaian ke kawasan s memberikan



Persamaan tegangan untuk simpul A :

$$V_A(10^{-6} + 10^{-6} + 10^{-6}/s) - V_{in}10^{-6} - V_x10^{-6} - 10^{-6}s\mu V_x = 0$$

$$\text{sedangkan : } V_x = \frac{10^6/s}{10^6 + 10^6/s} V_A = \frac{1}{s+1} V_A \rightarrow V_A = (s+1)V_x$$

$$\Rightarrow (s+1)(2+s)V_x - V_{in} - V_x - s\mu V_x = 0 \quad \text{atau} \quad (2s + 2 + s^2 + s - 1 - \mu s)V_x = V_{in}$$

$$\Rightarrow \frac{V_x}{V_{in}} = \frac{1}{s^2 + (3-\mu)s + 1}$$

$$\text{Fungsi alih : } T_V(s) = \frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{\mu V_x(s)}{V_s(s)} = \frac{\mu}{s^2 + (3-\mu)s + 1}$$

Peran Fungsi Alih

Dengan pengertian fungsi alih seperti didefinisikan pada (8.47), keluaran dari suatu rangkaian di kawasan s dapat dituliskan sebagai

$$Y(s) = T(s)X(s) ; \text{ dengan } T(s) : \text{ fungsi alih}$$

$$X(s) : \text{ pernyataan sinyal masukan di kawasan } s \quad (8.50)$$

$$Y(s) : \text{ keluaran (tanggapan status nol) di kawasan } s.$$

Fungsi alih $T(s)$ berupa fungsi rasional yang dapat dituliskan dalam bentuk rasio dari dua polinom $a(s)$ dan $b(s)$:

$$T(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + a_0} \quad (8.51)$$

Nilai koefisien polinom-polinom ini berupa bilangan riil, karena ditentukan oleh parameter rangkaian yang riil yaitu R , L , dan C . Fungsi alih (8.51) dapat dituliskan dalam bentuk

$$T(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (8.52)$$

Dengan bentuk ini jelas terlihat bahwa fungsi alih akan memberikan *zero* di $z_1 \dots z_m$ dan *pole* di $p_1 \dots p_n$. *Pole* dan *zero* dapat mempunyai nilai riil ataupun kompleks konjugat karena koefisien dari $b(s)$ dan $a(s)$ adalah riil. Sementara itu sinyal masukan $X(s)$ juga mungkin mengandung *zero* dan *pole* sendiri. Oleh karena itu, sesuai dengan persamaan (8.50), sinyal keluaran $Y(s)$ akan mengandung *pole* dan *zero* yang dapat berasal dari $T(s)$ ataupun $X(s)$. *Pole* dan *zero* yang berasal dari $T(s)$ disebut *pole alami* dan *zero alami*, karena mereka ditentukan semata-mata oleh parameter rangkaian dan bukan oleh sinyal masukan; sedangkan yang berasal dari $X(s)$ disebut *pole paksa* dan *zero paksa* karena mereka ditentukan oleh fungsi pemaksa (masukan).

CONTOH 8.30 : Jika sinyal masukan pada rangkaian dalam contoh 8.29 adalah $v_{in} = \cos 2t u(t)$, carilah *pole* dan *zero* sinyal keluaran $V_o(s)$ untuk $\mu = 0,5$.

Penyelesaian :

Pernyataan sinyal masukan di kawasan s adalah : $V_{in}(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$

Fungsi alih rangkaian telah diperoleh pada contoh 8.29; dengan $\mu = 0,5$ maka

$$T_V(s) = \frac{\mu}{s^2 + (3-\mu)s + 1} = \frac{0,5}{s^2 + 2,5s + 1}$$

Dengan demikian sinyal keluaran menjadi

$$V_o(s) = T_V(s)V_{in}(s) = \frac{0,5}{s^2 + 2,5s + 1} \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{0,5}{(s+2)(s+0,5)} \frac{s}{(s+j2)(s-j2)}$$

Pole dan *zero* adalah :

$$\begin{array}{ll} s = -2 & : \text{pole alami riil} \\ s = -0,5 & : \text{pole alami riil} \\ s = 0 & : \text{satu zero paksa riil} \\ s = -j2 & : \text{pole paksa imajiner} \\ s = +j2 & : \text{pole paksa imajiner} \end{array}$$

Rangkaian Dengan Masukan Sinyal Impuls. Sinyal masukan yang berbentuk gelombang impuls dinyatakan dengan $x(t) = \delta(t)$. Pernyataan sinyal ini di kawasan s adalah $X(s) = 1$. Dengan masukan ini maka bentuk sinyal keluaran $V_o(s)$ akan sama dengan bentuk fungsi alih $T(s)$.

$$V_o(s) = T(s)X(s) = T(s) \times 1 = H(s) \quad (8.53)$$

$V_o(s)$ yang diperoleh dengan $X(s) = 1$ ini kita sebut $H(s)$ agar tidak rancu dengan $T(s)$. Karena $X(s) = 1$ tidak memberikan *pole* paksa, maka $H(s)$ hanya akan mengandung *pole* alami.

Kembali ke kawasan t , keluaran $v_o(t) = h(t)$ diperoleh dengan transformasi balik $H(s)$. Bentuk gelombang $h(t)$ terkait dengan *pole* yang dikandung oleh $H(s)$. *Pole* riil akan memberikan komponen eksponensial pada $h(t)$; *pole* kompleks konjugat (dengan bagian riil negatif) akan memberikan komponen sinus teredam pada $h(t)$ dan *pole-pole* yang lain akan memberikan bentuk-bentuk $h(t)$ tertentu yang akan kita lihat melalui contoh berikut.

CONTOH 8.31 : Jika sinyal masukan pada rangkaian dalam contoh 8.29 adalah $v_{in} = \delta(t)$, carilah *pole* dan *zero* sinyal keluaran untuk nilai $\mu = 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$.

Penyelesaian :

Fungsi alih rangkaian ini adalah : $T_V(s) = \frac{\mu}{s^2 + (3-\mu)s + 1}$

Dengan masukan $v_{in} = \delta(t)$ yang berarti $V_{in}(s) = 1$, maka keluaran rangkaian adalah :

$$H(s) = \frac{\mu}{s^2 + (3-\mu)s + 1}$$

$$\mu = 0,5 \Rightarrow H(s) = \frac{0,5}{s^2 + 2,5s + 1} = \frac{0,5}{(s+2)(s+0,5)} \Rightarrow \text{dua pole riil di } s = -2 \text{ dan } s = -0,5$$

$$\mu = 1 \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{0,5}{(s+1)^2} \Rightarrow \text{dua pole riil di } s = -1$$

$$\begin{aligned} \mu = 2 \Rightarrow H(s) &= \frac{2}{s^2 + s + 1} = \frac{2}{(s+0,5-j\sqrt{3}/2)(s+0,5+j\sqrt{3}/2)} \\ &\Rightarrow \text{dua pole kompleks konjugat di } s = -0,5 \pm j\sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

$$\mu = 3 \Rightarrow H(s) = \frac{3}{s^2 + 1} = \frac{3}{(s + j1)(s - j1)} \Rightarrow \text{dua pole imajiner di } s = \pm j1$$

$$\mu = 4 \Rightarrow H(s) = \frac{4}{s^2 - s + 1} = \frac{4}{(s - 0,5 - j\sqrt{3}/2)(s - 0,5 + j\sqrt{3}/2)}$$

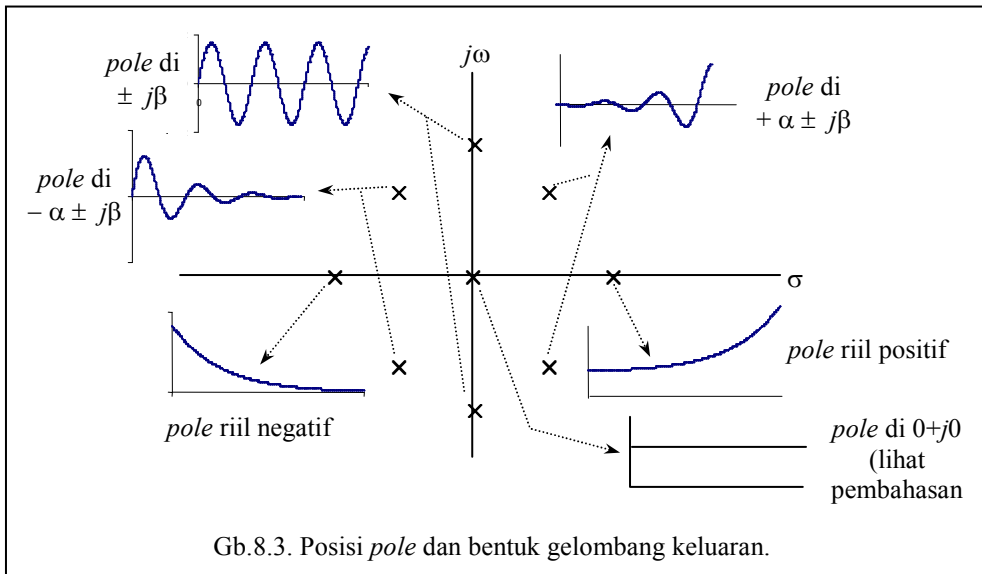
\Rightarrow dua pole kompleks konjugat di $s = 0,5 \pm j\sqrt{3}/2$

$$\mu = 5 \Rightarrow H(s) = \frac{5}{s^2 - 2s + 1} = \frac{5}{(s - 1)^2} \Rightarrow \text{dua pole riil di } s = 1$$

Contoh (8.31) ini memperlihatkan bagaimana fungsi alih menentukan bentuk gelombang sinyal keluaran melalui *pole-pole* yang dikandungnya. Berbagai macam *pole* tersebut akan memberikan $h(t)$ dengan perilaku sebagai berikut.

- $\mu = 0,5$: dua *pole* riil negatif tidak sama besar; sinyal keluaran sangat teredam.
- $\mu = 1$: dua *pole* riil negatif sama besar ; sinyal keluaran teredam kritis.
- $\mu = 2$: dua *pole* kompleks konjugat dengan bagian riil negatif ; sinyal keluaran kurang teredam, berbentuk sinus teredam.
- $\mu = 3$: dua *pole* imajiner; sinyal keluaran berupa sinus tidak teredam.
- $\mu = 4$: dua *pole* kompleks konjugat dengan bagian riil positif; sinyal keluaran tidak teredam, berbentuk sinus dengan amplitudo makin besar.
- $\mu = 5$: dua *pole* riil positif sama besar; sinyal keluaran eksponensial dengan eksponen positif; sinyal makin besar dengan berjalannya t .

Gambar berikut menjelaskan posisi *pole* dan bentuk tanggapan di kawasan t yang berkaitan.



Rangkaian Dengan Masukan Sinyal Anak Tangga. Transformasi sinyal masukan yang berbentuk gelombang anak tangga $x(t) = u(t)$ adalah $X(s) = 1/s$. Jika fungsi alih adalah $T(s)$ maka sinyal keluaran adalah
$$Y(s) = T(s)X(s) = \frac{T(s)}{s} \tag{8.54}$$

Jika kita bandingkan (8.54) ini dengan (8.53) dimana tanggapan terhadap sinyal impuls dinyatakan sebagai $H(s)$, maka tanggapan terhadap sinyal anak tangga ini dapat kita sebut

$$G(s) = \frac{T(s)}{s} = \frac{H(s)}{s} \quad (8.55)$$

Karena $H(s)$ hanya mengandung *pole* alami, maka dengan melihat bentuk (8.55) ini kita segera mengetahui bahwa tanggapan terhadap sinyal anak tangga di kawasan s akan mengandung satu *pole* paksa disamping *pole-pole* alami. *Pole* paksa ini terletak di $s = 0 + j0$; *pole* inilah yang ditambahkan pada Gb. 8.3.

Mengingat sifat integrasi pada transformasi Laplace, maka $g(t)$ dapat diperoleh jika $h(t)$ diketahui, yaitu

$$g(t) = \int_0^t h(x) dx \quad (8.56)$$

Secara timbal balik, maka

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \text{ berlaku hampir di semua titik kecuali di } t \text{ dimana } g(t) \text{ tidak kontinyu.} \quad (8.57)$$

CONTOH 8.32 : Dalam contoh 8.31, jika $\mu = 2$ dan sinyal masukan berupa sinyal anak tangga, carilah *pole* dan *zero* sinyal keluaran.

Penyelesaian :

Dengan $\mu = 2$ fungsi alihnya adalah $T_V(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1}$

Dengan sinyal masukan $X(s) = 1/s$, tanggapan rangkaian adalah

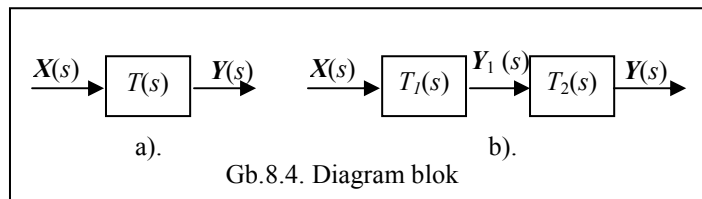
$$G(s) = \frac{2}{(s^2 + s + 1)} \frac{1}{s} = \frac{2}{(s + 0,5 - j\sqrt{3}/2)(s + 0,5 + j\sqrt{3}/2)s}$$

Dari sini kita peroleh :

$s = -0,5 \pm j\sqrt{3}/2$: dua *pole* kompleks konjugat dengan bagian riil negatif
 $s = 0$: satu *pole* paksa di $0 + j0$

Hubungan Bertingkat dan Kaidah Rantai

Hubungan masukan-keluaran melalui suatu fungsi alih dapat kita gambarkan dengan suatu diagram blok seperti Gb.8.4.a.



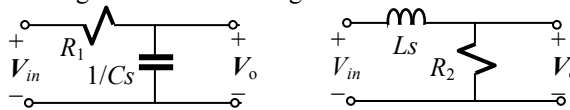
Suatu rangkaian pemroses sinyal seringkali merupakan hubungan bertingkat dari beberapa tahap pemrosesan. Dalam hubungan bertingkat ini, tegangan keluaran dari suatu tahap menjadi tegangan masukan dari tahap berikutnya. Diagram blok dari hubungan bertingkat ini ditunjukkan oleh Gb.8.4.b. Untuk hubungan bertingkat ini berlaku *kaidah rantai* yaitu apabila suatu rangkaian merupakan hubungan bertingkat dari tahapan-tahapan yang masing-masing mempunyai fungsi alih tegangan $T_{V1}(s), T_{V2}(s) \dots$ dst. maka fungsi alih tegangan total rangkaian menjadi

$$T_V(s) = T_{V1}(s)T_{V1}(s) \dots T_{Vk}(s) \quad (8.58)$$

Kaidah rantai ini mempermudah kita dalam melakukan analisis dari suatu rangkaian yang merupakan hubungan bertingkat dari beberapa tahapan. Namun dalam hubungan bertingkat

ini perlu kita perhatikan agar suatu tahap *tidak membebani* tahap sebelumnya. Jika pembebanan ini terjadi maka fungsi alih total tidak sepenuhnya menuruti kaidah rantai. Untuk menekan efek pembebanan tersebut maka harus diusahakan agar impedansi masukan dari setiap tahap sangat besar, yang secara ideal adalah tak hingga besarnya. Jika impedansi masukan dari suatu tahap terlalu rendah, kita perlu menambahkan rangkaian penyangga antara rangkaian ini dengan tahap sebelumnya agar efek pembebanan tidak terjadi. Kita akan melihat hal ini pada contoh berikut.

CONTOH 8.33 : Carilah fungsi alih kedua rangkaian berikut; sesudah itu hubungkan kedua rangkaian secara bertingkat dan carilah fungsi alih total.

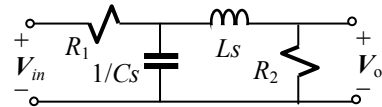


Penyelesaian :

Fungsi alih rangkaian pertama adalah : $T_{V1}(s) = \frac{1/Cs}{R_1 + 1/Cs} = \frac{1}{R_1Cs + 1}$

Fungsi alih rangkaian kedua adalah : $T_{V2}(s) = \frac{R_2}{R_2 + Ls}$

Jika kedua rangkaian dihubungkan maka rangkaian menjadi seperti di samping ini.



Fungsi alih rangkaian gabungan ini adalah:

$$T_V(s) = \frac{R_2}{R_2 + Ls} \left(\frac{1/Cs \parallel (R_2 + Ls)}{1/Cs \parallel (R_2 + Ls) + R_1} \right) = \frac{R_2}{R_2 + Ls} \left(\frac{1/Cs(R_2 + Ls)}{1/Cs + R_2 + Ls} \parallel \frac{1/Cs(R_2 + Ls)}{1/Cs + R_2 + Ls} + R_1 \right)$$

$$= \frac{R_2}{R_2 + Ls} \left(\frac{R_2 + Ls}{LCs^2 + (L + R_2C)s + (R_1 + R_2)} \right)$$

Pemahaman :

Fungsi alih dari rangkaian yang diperoleh dengan menghubungkan kedua rangkaian secara bertingkat tidak merupakan perkalian fungsi alih masing-masing. Hal ini disebabkan terjadinya pembebanan rangkaian pertama oleh rangkaian kedua pada waktu mereka dihubungkan. Untuk mengatasi hal ini kita dapat menambahkan rangkaian penyangga di antara kedua rangkaian sehingga rangkaian menjadi seperti di bawah ini.

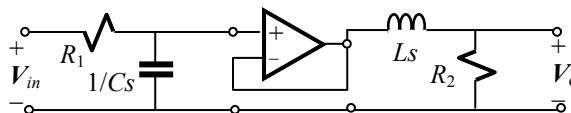
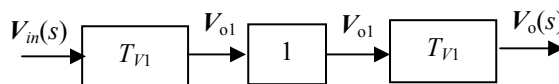


Diagram blok rangkaian ini menjadi :



Contoh 8.33. di atas menunjukkan bahwa kaidah rantai berlaku jika suatu tahap tidak membebani tahap sebelumnya. Oleh karena itu agar kaidah rantai dapat digunakan impedansi masukan harus diusahakan sebesar mungkin, yang dalam contoh diatas dicapai dengan menambahkan rangkaian penyangga. Dengan cara demikian maka hubungan masukan-keluaran total dari seluruh rangkaian dapat dengan mudah diperoleh jika hubungan masukan-keluaran masing-masing bagian diketahui. Pengembangan dari konsep ini akan kita lihat dalam analisis sistem.

Fungsi Alih dan Hubungan Masukan-Keluaran di Kawasan Waktu

Dalam pembahasan di atas dapat kita lihat bahwa jika kita bekerja di kawasan s , hubungan masukan-keluaran diberikan oleh persamaan (8.50) yaitu

$$Y(s) = T(s)X(s)$$

Bagaimanakah bentuk hubungan masukan-keluaran di kawasan waktu? Menurut (8.53) $T(s) = H(s)$, sehingga kita dapat menggunakan konvolusi untuk melakukan transformasi balik dari hubungan di atas dan kita dapatkan hubungan masukan-keluaran di kawasan waktu, yaitu

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (8.59)$$

dengan $h(t)$ adalah tanggapan impuls dari rangkaian.

Persamaan (8.59) ini memberikan hubungan di kawasan waktu, antara besaran keluaran $y(t)$, besaran masukan $x(t)$, dan tanggapan impuls rangkaian $h(t)$. Hubungan ini dapat digunakan langsung tanpa melalui transformasi Laplace. Hubungan ini sangat bermanfaat untuk mencari keluaran $y(t)$ jika $h(t)$ ataupun $x(t)$ diperoleh secara experimental dan sulit dicari transformasi Laplace-nya. Konvolusi berlaku untuk rangkaian linier invarian waktu. Jika batas bawah adalah nol (seperti pada 8.59), maka sinyal masukan adalah sinyal kausal, yaitu $x(t) = 0$ untuk $t < 0$.

Tinjauan Umum Mengenai Hubungan Masukan-Keluaran

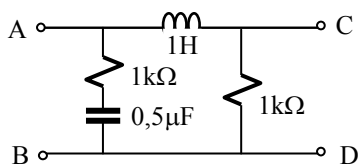
Dari pembahasan mengenai fungsi alih di atas dan pembahasan mengenai hubungan masukan-keluaran pada bab-bab sebelumnya, kita dapat mengetahui bahwa hubungan antara sinyal keluaran dan sinyal masukan di suatu rangkaian dapat kita peroleh dalam beberapa bentuk. Di kawasan s , hubungan tersebut diperoleh melalui transformasi Laplace. Hubungan tersebut juga dapat kita peroleh di kawasan t melalui konvolusi. Di samping itu kita ingat pula bahwa hubungan antara sinyal keluaran dan sinyal masukan dapat pula diperoleh dalam bentuk persamaan diferensial, seperti yang kita temui pada waktu kita membahas analisis transien. Jadi kita telah mempelajari tiga macam bentuk hubungan antara sinyal keluaran dan sinyal masukan, yaitu

- transformasi Laplace,
- konvolusi,
- persamaan diferensial.

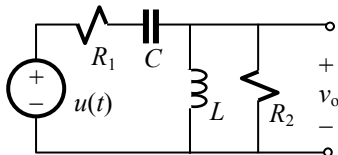
Kita masih akan menjumpai satu lagi bentuk hubungan sinyal keluaran dan sinyal masukan yaitu melalui transformasi Fourier yang akan kita bahas dalam Bab-10. Akan tetapi sebelum kita membahas transformasi Fourier kita akan melihat lebih dulu tanggapan frekuensi dalam Bab-9 berikut.

SOAL-SOAL : FUNGSI JARINGAN

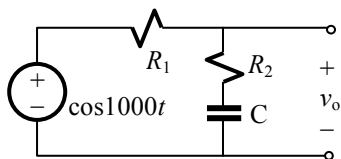
1. Terminal AB rangkaian berikut adalah terminal masukan, dan terminal keluarannya adalah CD. Tentukanlah admitansi masukannya (arus / tegangan masukan di kawasan s) jika terminal keluaran terbuka.



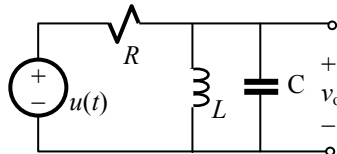
2. Jika tegangan masukan $v_1(t)=10u(t)$ V, gambarkan diagram *pole-zero* dari arus masukan dan sebutkan jenis *pole* dan *zero* yang ada
3. Tegangan keluaran $v_2(t)$ rangkaian soal 1 diperoleh di terminal CD. Tentukan fungsi alih tegangannya (tegangan keluaran / tegangan masukan di kawasan s).
4. Jika tegangan masukan $v_1(t) = 10 u(t)$ V Gambarkan diagram *pole-zero* tegangan keluaran.
5. Ulangi soal 2 dengan tegangan masukan $v_1(t) = 10[\sin 100t]u(t)$ V.
6. Ulangi soal 4 dengan tegangan masukan $v_1(t) = 10[\sin 100t]u(t)$ V.
7. Tentukan fungsi alih pada rangkaian berikut dan gambarkan digram *pole-zero* dari tegangan keluaran $V_o(s)$ dan sebutkan jenis *pole* dan *zeronya*.



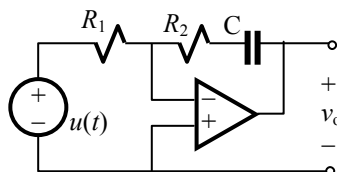
8. Ulangi soal 7 untuk rangkaian berikut.



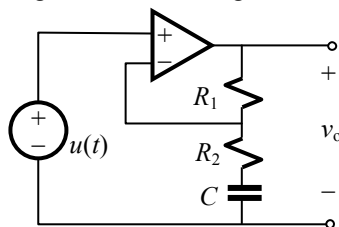
9. Ulangi soal 7 untuk rangkaian berikut.



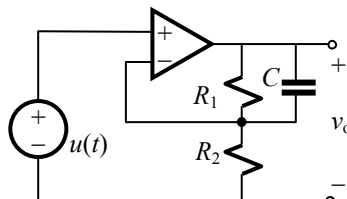
10. Ulangi soal 7 untuk rangkaian berikut.



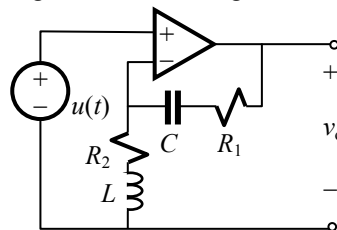
11. Ulangi soal 7 untuk rangkaian berikut.



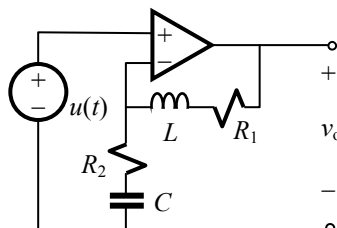
12. Ulangi soal 7 untuk rangkaian berikut.



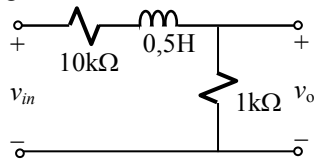
13. Ulangi soal 7 untuk rangkaian berikut.



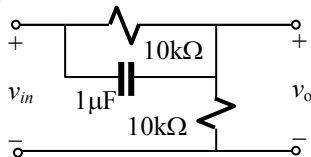
14. Ulangi soal 7 untuk rangkaian berikut.



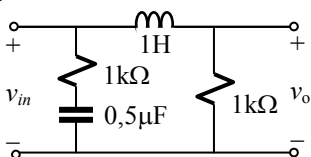
15. Carilah fungsi alih, $g(t)$, dan $h(t)$ dari rangkaian berikut.



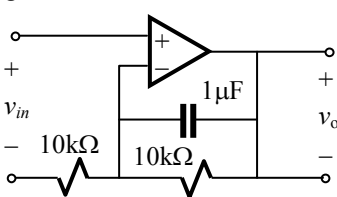
16. Carilah fungsi alih, $g(t)$, dan $h(t)$ dari rangkaian berikut.



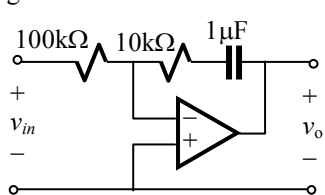
17. Carilah fungsi alih, $g(t)$, dan $h(t)$ dari rangkaian berikut.



18. Carilah fungsi alih, $g(t)$, dan $h(t)$ dari rangkaian berikut.



19. Carilah fungsi alih, $g(t)$, dan $h(t)$ dari rangkaian berikut.



20. Carilah fungsi alih hubungan bertingkat yang tahap pertamanya adalah rangkaian pada soal 18 dan tahap keduanya adalah rangkaian pada soal 15.

21. Carilah fungsi alih hubungan bertingkat yang tahap pertamanya adalah rangkaian pada soal 19 dan

tahap keduanya adalah rangkaian pada soal 16.

22. Ulangi soal 20 jika tahap pertamanya adalah rangkaian soal 15, sedangkan rangkaian pada soal 18 menjadi tahap kedua.

23. Ulangi soal 21 jika tahap pertamanya adalah rangkaian soal 16, sedangkan rangkaian pada soal 19 menjadi tahap kedua.

24. Carilah fungsi alih dari suatu rangkaian jika diketahui bahwa tanggapannya terhadap sinyal anak tangga adalah :

$$\begin{aligned} \text{a. } g(t) &= -e^{-5000t}u(t) \\ \text{b. } g(t) &= (1 - e^{-5000t})u(t) \\ \text{c. } g(t) &= (-1 + 5e^{-5000t})u(t) \end{aligned}$$

25. Carilah fungsi alih dari suatu rangkaian jika diketahui bahwa tanggapannya terhadap sinyal anak tangga adalah :

$$\begin{aligned} \text{a. } g(t) &= (e^{-1000t} - e^{-2000t})u(t) \\ \text{b. } g(t) &= (e^{-1000t} \sin 2000t)u(t) \end{aligned}$$

26. Carilah fungsi alih dari suatu rangkaian jika diketahui bahwa tanggapannya terhadap sinyal impuls adalah :

$$\begin{aligned} \text{a. } h(t) &= -1000 e^{-1000t}u(t) \\ \text{b. } h(t) &= \delta(t) - 1000 e^{-1000t}u(t) \\ \text{c. } h(t) &= \delta(t) - 2000 e^{-1000t}u(t) \end{aligned}$$

27. Carilah fungsi alih dari suatu rangkaian jika diketahui bahwa tanggapannya terhadap sinyal impuls adalah :

$$\begin{aligned} \text{a. } h(t) &= (e^{-1000t} \sin 2000t)u(t) \\ \text{b. } h(t) &= (e^{-1000t} \cos 2000t)u(t) \end{aligned}$$

28. Dengan menggunakan integral konvolusi carilah tegangan kapasitor pada rangkaian seri RC jika tegangan masukannya $v_1(t) = tu(t)$.

29. Ulangi soal 28 jika masukannya adalah $v_1(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$.

BAB 9

Tanggapan Frekuensi

Sebagaimana kita ketahui, kondisi operasi normal rangkaian pada umumnya adalah kondisi mantap dan dalam operasi tersebut banyak digunakan sinyal sinus baik pada pemrosesan energi maupun pemrosesan sinyal listrik. Dalam teknik energi listrik, tenaga listrik dibangkitkan, ditransmisikan, serta dimanfaatkan dalam bentuk sinyal sinus dengan frekuensi yang dijaga konstan yaitu 50 atau 60 Hz. Dalam teknik telekomunikasi, sinyal sinus dimanfaatkan dalam selang frekuensi yang lebih lebar, mulai dari beberapa Hz sampai jutaan Hz. Untuk hal yang kedua ini, walaupun rangkaian beroperasi pada keadaan mantap, tetapi frekuensi sinyal yang diproses dapat bervariasi ataupun mengandung banyak frekuensi (gelombang komposit), misalnya suara manusia ataupun suara musik. Karena impedansi satu macam rangkaian mempunyai nilai yang berbeda untuk frekuensi yang berbeda, maka timbullah persoalan bagaimanakah tanggapan rangkaian terhadap perubahan nilai frekuensi atau bagaimanakah tanggapan rangkaian terhadap sinyal yang tersusun dari banyak frekuensi. Dalam bab inilah persoalan tersebut akan kita bahas.

9.1. Tanggapan Rangkaian Terhadap Sinyal Sinus Keadaan Mantap

Pernyataan di kawasan s dari sinyal masukan berbentuk sinus $x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ adalah (lihat Tabel 9.1.) :

$$X(s) = A \frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2} \quad (9.1)$$

Jika $T(s)$ adalah fungsi alih, maka tanggapan rangkaian adalah

$$Y(s) = T(s)X(s) = A \frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2} T(s) = A \frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{(s - j\omega)(s + j\omega)} T(s) \quad (9.2)$$

Sebagaimana telah kita bahas di bab sebelumnya, $T(s)$ akan memberikan *pole-pole* alami sedangkan $X(s)$ akan memberikan *pole* paksa dan pernyataan (9.2) dapat kita uraikan menjadi berbentuk

$$Y(s) = \frac{k}{s - j\omega} + \frac{k^*}{s + j\omega} + \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} \quad (9.3)$$

yang transformasi baliknya akan berbentuk

$$y(t) = ke^{j\omega t} + k^* e^{-j\omega t} + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} \quad (9.4)$$

Di kawasan t , *pole-pole* alami akan memberikan komponen transien yang biasanya berlangsung hanya beberapa detik (dalam kebanyakan rangkaian praktis) dan tidak termanfaatkan dalam operasi normal. Komponen mantaplah yang kita manfaatkan untuk berbagai keperluan dan komponen ini kita sebut *tanggapan mantap* yang dapat kita peroleh dengan menghilangkan komponen transien dari (9.4), yaitu :

$$y_{tm}(t) = ke^{j\omega t} + k^* e^{-j\omega t} \quad (9.5)$$

Nilai k dapat kita cari dari (9.2) yaitu

$$k = (s - j\omega)Y(s) \Big|_{s=j\omega} = A \frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{(s + j\omega)} T(s) \Big|_{s=j\omega} = A \frac{\cos \theta + j \sin \theta}{2} T(j\omega) \quad (9.6)$$

Faktor $T(j\omega)$ dalam (9.6) adalah suatu pernyataan kompleks yang dapat kita tuliskan dalam bentuk polar sebagai $|T(j\omega)|e^{j\phi}$ dimana $|T(j\omega)|$ adalah nilai mutlaknya dan ϕ adalah sudutnya. Sementara itu menurut Euler $(\cos\theta + j\sin\theta) = e^{j\theta}$. Dengan demikian (9.6) dapat kita tuliskan

$$k = A \frac{e^{j\theta}}{2} |T(j\omega)| e^{j\phi} \quad (9.7)$$

Dengan (9.7) ini maka tanggapan mantap (9.5) menjadi

$$\begin{aligned} y_{lm}(t) &= A \frac{e^{j\theta}}{2} |T(j\omega)| e^{j\phi} e^{j\omega t} + A \frac{e^{-j\theta}}{2} |T(j\omega)| e^{-j\phi} e^{-j\omega t} \\ &= A |T(j\omega)| \left[\frac{e^{j(\omega t + \theta + \phi)} + e^{-j(\omega t + \theta + \phi)}}{2} \right] \\ &= A |T(j\omega)| \cos(\omega t + \theta + \phi) \end{aligned} \quad (9.8)$$

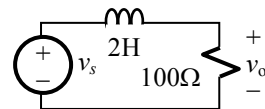
Persamaan (9.8) ini menunjukkan bahwa tanggapan keadaan mantap dari suatu rangkaian yang mempunyai fungsi alih $T(s)$ dengan masukan sinyal sinus, akan :

- berbentuk sinus juga, tanpa perubahan frekuensi
- amplitudo berubah dengan faktor $|T(j\omega)|$
- sudut fasa berubah sebesar sudut dari $T(j\omega)$, yaitu ϕ .

Jadi, walaupun frekuensi sinyal keluaran sama dengan frekuensi sinyal masukan tetapi amplitudo maupun sudut fasanya berubah dan perubahan ini tergantung dari frekuensi. Kita akan melihat kejadian ini dengan suatu contoh.

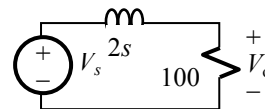
CONTOH 9.1 : Carilah sinyal keluaran keadaan mantap dari rangkaian di samping ini jika masukannya adalah

$$v_s = 10\sqrt{2}\cos(50t + 60^\circ) \text{ V.}$$



Penyelesaian :

Transformasi rangkaian ke kawasan s memberikan rangkaian impedansi seperti di samping ini.



Fungsi alih rangkaian ini adalah $T_V(s) = \frac{100}{2s + 100} = \frac{50}{s + 50}$.

Karena frekuensi sinyal $\omega = 50$, maka

$$T_V(j50) = \frac{50}{50 + j50} = \frac{50}{\sqrt{50^2 + 50^2} e^{j \tan^{-1}(50/50)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}$$

Keluaran keadaan mantap adalah : $v_o(t) = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos(50t + 60^\circ - 45^\circ) = 10 \cos(50t + 15^\circ)$

Pemahaman :

Frekuensi sinyal keluaran sama dengan sinyal masukan, yaitu $\omega = 50$ rad/sec.

Amplitudo sinyal masukan $v_{maks} = 10\sqrt{2}$ V, sedangkan $|T_V(j\omega)| = |T_V(j50)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Amplitudo sinyal keluaran $v_{omaks} = v_{smaks} |T(j\omega)| = 10\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 10$ V

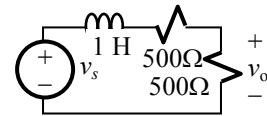
Sudut fasa sinyal masukan $\theta = 60^\circ$, sedang sudut $|T(j\omega)| = -45^\circ$.

Sudut fasa sinyal keluaran : $\theta + \phi = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

Pernyataan Tanggapan Frekuensi. Fungsi Gain dan Fungsi Fasa

Faktor pengubah amplitudo, yaitu $|T(j\omega)|$ yang merupakan fungsi frekuensi, disebut *fungsi gain* yang akan menentukan bagaimana *gain* (perubahan amplitudo sinyal) bervariasi terhadap perubahan frekuensi. Pengubah fasa ϕ yang juga merupakan fungsi frekuensi disebut *fungsi fasa* dan kita tuliskan sebagai $\phi(\omega)$; ia menunjukkan bagaimana sudut fasa sinyal berubah dengan berubahnya frekuensi. Jadi kedua fungsi tersebut dapat menunjukkan bagaimana *amplitudo dan sudut fasa sinyal sinus berubah terhadap perubahan frekuensi* atau dengan singkat disebut sebagai *tanggapan frekuensi* dari rangkaian. Pernyataan tanggapan ini bisa dalam bentuk formulasi matematis ataupun dalam bentuk grafik.

CONTOH 9.2 : Selidikilah perubahan *gain* dan sudut fasa terhadap perubahan frekuensi dari rangkaian orde pertama di samping ini.



Penyelesaian :

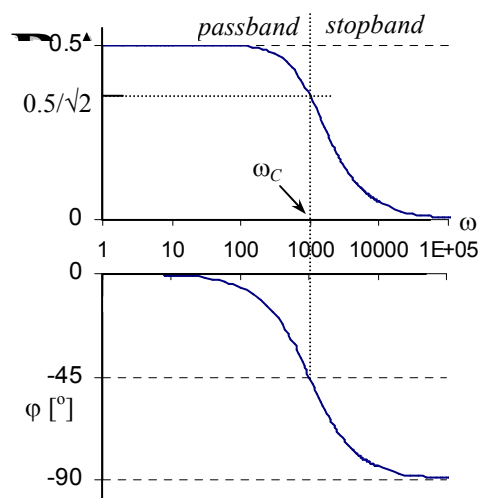
Setelah di transformasikan ke kawasan s , diperoleh

$$\text{fungsi alih rangkaian : } T_V(s) = \frac{500}{s+1000} \Rightarrow \text{maka } T_V(j\omega) = \frac{500}{j\omega+1000}$$

$$\Rightarrow \text{jadi fungsi gain : } |T_V(j\omega)| = \frac{500}{\sqrt{1000^2 + \omega^2}} \quad ; \Rightarrow \text{fungsi fasa : } \phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{1000}$$

Untuk melihat dengan lebih jelas bagaimana *gain* dan fasa berubah terhadap frekuensi, fungsi *gain* dan fungsi fasa di plot terhadap ω . Absis ω dibuat dalam skala logaritmik karena rentang nilai ω sangat besar. Hasilnya terlihat seperti gambar di samping ini.

Kurva *gain* menunjukkan bahwa pada frekuensi rendah terdapat *gain* tinggi yang relatif konstan, sedangkan pada frekuensi tinggi *gain* menurun dengan cepat. Kurva fungsi fasa menunjukkan bahwa pada frekuensi rendah sudut fasa tidak terlalu berubah tetapi kemudian cepat menurun mulai suatu frekuensi tertentu.



Gain tinggi di daerah frekuensi rendah pada contoh di atas menunjukkan bahwa sinyal yang berfrekuensi rendah mengalami *perubahan amplitudo dengan faktor tinggi*, sedangkan *gain* rendah di frekuensi tinggi menunjukkan bahwa sinyal yang berfrekuensi tinggi mengalami *perubahan amplitudo dengan faktor rendah*. Daerah frekuensi dimana terjadi *gain* tinggi disebut *passband* sedangkan daerah frekuensi dimana terjadi *gain* rendah disebut *stopband*. Nilai frekuensi yang menjadi batas antara *passband* dan *stopband* disebut frekuensi *cutoff*, ω_c . Nilai frekuensi cutoff biasanya diambil nilai frekuensi dimana *gain* menurun dengan faktor $1/\sqrt{2}$ dari *gain* maksimum pada *passband*.

Dalam contoh 9.2. di atas, rangkaian mempunyai satu *passband* yang terentang dari frekuensi $\omega = 0$ (tegangan searah) sampai frekuensi cutoff ω_c , dan satu *stopband* mulai dari frekuensi cutoff ke atas. Dengan kata lain rangkaian ini mempunyai *passband* di daerah frekuensi rendah saja sehingga disebut *low-pass gain*. Inilah tanggapan frekuensi rangkaian pada contoh 9.2.

Kebalikan dari *low-pass gain* adalah *high-pass gain*, yaitu jika *passband* berada hanya di daerah frekuensi tinggi saja seperti pada contoh 9.3. berikut ini.

CONTOH 9.3 : Selidikilah tanggapan frekuensi rangkaian di samping ini.

Penyelesaian :

Fungsi alih rangkaian adalah

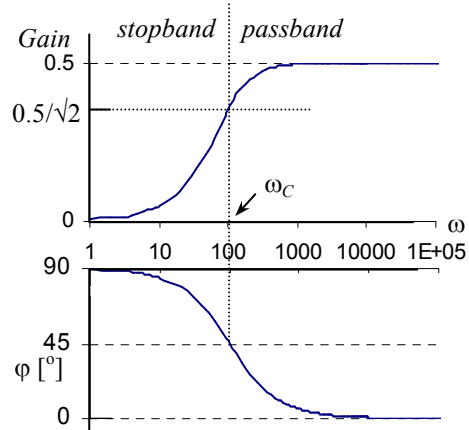
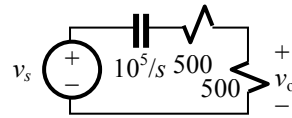
$$T_V(s) = \frac{500}{10^5/s + 1000} = \frac{0,5s}{s + 10^2}$$

$$\rightarrow T_V(j\omega) = \frac{0,5 \times j\omega}{j\omega + 10^2}$$

$$\Rightarrow |T_V(j\omega)| = \frac{0,5\omega}{\sqrt{\omega^2 + 10^4}}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{10^2}$$

Kurva gain dan fasa terlihat seperti pada gambar di samping ini. *Stopband* ada di daerah frekuensi rendah sedangkan *passband* ada di daerah frekuensi tinggi. Inilah karakteristik *high-pass gain*



CONTOH 9.4 : Selidikilah perubahan *gain* dari rangkaian orde kedua di samping ini.

Penyelesaian :

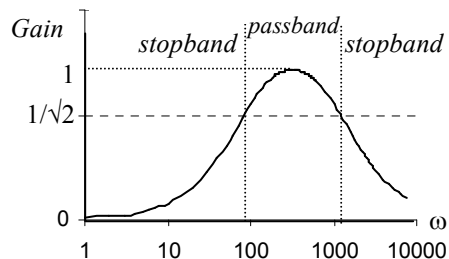
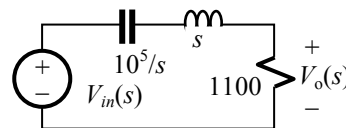
Fungsi alih rangkaian ini adalah

$$T_V(s) = \frac{1100}{1100 + s + 10^5/s} = \frac{1100s}{s^2 + 1100s + 10^5} = \frac{1100s}{(s+100)(s+1000)}$$

$$T_V(j\omega) = \frac{j1100\omega}{(j\omega + 100)(j\omega + 1000)}$$

$$\Rightarrow |T_V(j\omega)| = \frac{1000\omega}{\sqrt{\omega^2 + 100^2} \sqrt{\omega^2 + 1000^2}}$$

Kurva *gain* terlihat seperti gambar di samping ini. Di sini terdapat satu *passband*, yaitu pada ω antara $100 \div 1000$ dan dua *stopband* di daerah frekuensi rendah dan tinggi.



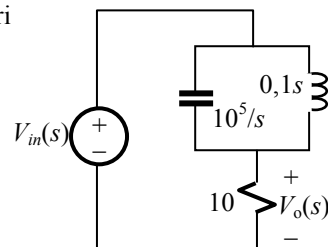
CONTOH 9.5 : Selidikilah perubahan *gain* dari rangkaian orde kedua di samping ini.

Penyelesaian :

Fungsi alih rangkaian ini adalah

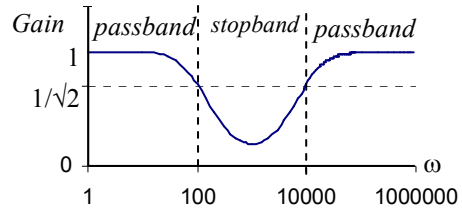
$$T_V(s) = \frac{10}{10 + \frac{0,1s \times 10^5/s}{0,1s + 10^5/s}} = \frac{s^2 + 10^6}{s^2 + 10^4s + 10^6}$$

$$T_V(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 10^6}{-\omega^2 + j10^4\omega + 10^6} \Rightarrow |T_V(j\omega)| = \frac{-\omega^2 + 10^6}{\sqrt{(10^6 - \omega^2)^2 + 10^8\omega^2}}$$



Kurva *gain* adalah seperti gambar di samping ini.

Kurva ini menunjukkan bahwa ada *satu stopband* pada ω antara $100 \div 10000$ dan *dua passband* masing-masing di daerah frekuensi rendah dan tinggi.



Karakteristik *gain* seperti pada contoh 9.4. disebut *band-pass gain* sedangkan pada contoh 9.5 disebut *band-stop gain*. Frekuensi cutoff pada *band-pass gain* ada dua; selang antara kedua frekuensi cutoff disebut *bandwidth (lebar pita)*.

Decibel. Dalam meninjau tanggapan frekuensi, *gain* biasanya dinyatakan dalam *decibels* (disingkat dB) yang didefinisikan sebagai

$$\text{Gain dalam dB} = 20 \log |T(j\omega)| \quad (9.9)$$

Gain dalam dB dapat bernilai nol, positif atau negatif. *Gain* dalam dB akan nol jika $|T(j\omega)|$ bernilai satu, yang berarti sinyal tidak diperkuat ataupun diperlemah; jadi *gain* 0 dB berarti amplitudo sinyal keluaran sama dengan sinyal masukan. *Gain* dalam dB akan positif jika $|T(j\omega)| > 1$, yang berarti sinyal diperkuat, dan akan bernilai negatif jika $|T(j\omega)| < 1$, yang berarti sinyal diperlemah.

Frekuensi cutoff adalah frekuensi dimana *gain* telah turun $1/\sqrt{2} = 0.707$ kali nilai *gain* maksimum dalam *passband*. Jadi pada frekuensi cutoff, nilai *gain* adalah

$$\begin{aligned} 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |T(j\omega)|_{maks} \right) &= 20 \log |T(j\omega)|_{maks} - \log \sqrt{2} \\ &= |T(j\omega)|_{maks} \text{ dB} - 3 \text{ dB} \end{aligned} \quad (9.10)$$

Dengan demikian dapat kita katakan bahwa frekuensi cutoff adalah frekuensi di mana *gain* telah turun sebanyak 3 dB.

Untuk memberikan gambaran lebih jelas, mengenai satuan decibel tersebut, berikut ini contoh numerik *gain* dalam dB yang sebaiknya kita ingat.

CONTOH 9.6 : Berapa dB-kah nilai *gain* sinyal yang diperkuat K kali, jika $K = 1; \sqrt{2}; 2; 10; 30; 100; 1000$?

Penyelesaian :

Untuk sinyal yang diperkuat K kali, $gain = 20 \log(K|T(j\omega)|) = 20 \log(|T(j\omega)|) + 20 \log(K)$

Jadi pertambahan *gain* sebesar $20 \log(K)$ berarti penguatan sinyal K kali.

$$\begin{aligned} K = 1 &\Rightarrow gain : 20 \log 1 = 0 \text{ dB} \\ K = \sqrt{2} &\Rightarrow gain : 20 \log \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB} \\ K = 2 &\Rightarrow gain : 20 \log 2 \approx 6 \text{ dB} \\ K = 10 &\Rightarrow gain : 20 \log 10 = 20 \text{ dB} \\ K = 30 &\Rightarrow gain : 20 \log 30 \approx 30 \text{ dB} \\ K = 100 &\Rightarrow gain : 20 \log 100 = 40 \text{ dB} \\ K = 1000 &\Rightarrow gain : 20 \log 1000 = 60 \text{ dB} \end{aligned}$$

Jika faktor K tersebut di atas bukan penguatan akan tetapi perlemahan sinyal maka *gain* menjadi negatif.

$$\begin{aligned}
 K = 1/\sqrt{2} &\Rightarrow \text{gain} : -3 \text{ dB} \\
 K = 1/2 &\Rightarrow \text{gain} : -6 \text{ dB} \\
 K = 1/10 &\Rightarrow \text{gain} : -20 \text{ dB} \\
 K = 1/30 &\Rightarrow \text{gain} : -30 \text{ dB} \\
 K = 1/100 &\Rightarrow \text{gain} : -40 \text{ dB} \\
 K = 1/1000 &\Rightarrow \text{gain} : -60 \text{ dB}
 \end{aligned}$$

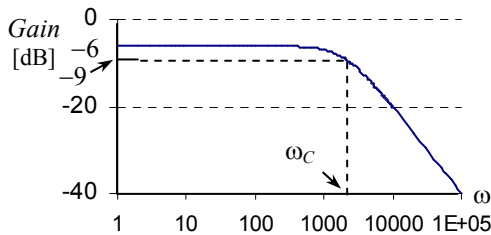
Kurva Gain Dalam Decibel. Kurva gain dibuat dengan absis (frekuensi) dalam skala logaritmik (karena rentang frekuensi yang sangat lebar); jika gain dinyatakan dalam dB yang merupakan bilangan logaritmik sebagaimana didefinisikan pada (9.9), maka kurva gain akan terlihat seperti dalam skala linier. Kurva yang diperoleh dari relasi-relasi yang linier akan berbentuk garis lurus. Dalam contoh berikut, tanggapan gain yang telah diperoleh pada contoh 9.2 sampai 9.4 akan digambar sekali lagi tetapi dengan menyatakan gain dalam dB.

CONTOH 9.7 : Gambarkanlah kurva karakteristik *low-pass*, *high-pass*, dan *band-pass* gain pada contoh 9.2 sampai 9.4 dengan gain dinyatakan dalam dB dan perhatikan kemiringan bagian-bagian kurva yang dapat dianggap linier.

Penyelesaian :

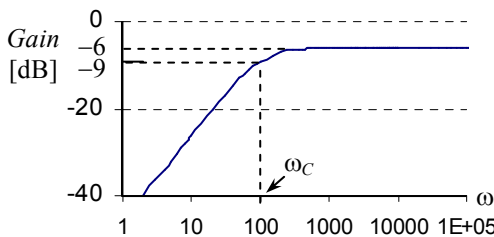
Dengan bantuan komputer sederhana, kurva karakteristik *low-pass*, *high-pass*, *band-pass* gain yang diperoleh adalah seperti berikut.

Low-pass gain :



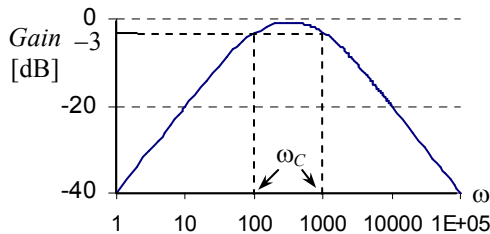
Gain hampir konstan -6 dB di daerah frekuensi rendah. Di daerah frekuensi tinggi gain menurun dengan kemiringan yang hampir konstan pula.

High-pass gain :



Gain hampir konstan -6 dB di daerah frekuensi tinggi. Di daerah frekuensi rendah gain meningkat dengan kemiringan yang hampir konstan pula.

Band-pass gain :



Gain meningkat di daerah frekuensi rendah dengan kemiringan yang hampir konstan, dan menurun di daerah frekuensi tinggi dengan kemiringan yang hampir konstan pula. Gain tinggi berada di antara dua frekuensi cutoff.

9.2. Bode Plots. Pendekatan Garis Lurus Kurva *Gain* dan Kurva Fasa

Bode plots adalah grafik *gain* dalam dB ($|T(j\omega)|_{dB}$) serta fasa ($\varphi(\omega)$) sebagai fungsi dari frekuensi dalam skala logaritmik. Kurva-kurva ini berbentuk garis-garis lengkung. Walaupun demikian kurva ini mendekati nilai-nilai tertentu secara asimtotis, yang memungkinkan kita untuk melakukan pendekatan dengan garis lurus dengan patahan di titik-titik belok. Melalui pendekatan ini, penggambaran akan lebih mudah dilakukan. Bila kita ingin mendapatkan nilai yang lebih tepat, terutama di sekitar titik belok, kita dapat melakukan koreksi-koreksi pada kurva pendekatan ini.

Manfaat Bode plots dapat kita lihat misalnya dalam proses perancangan rangkaian; kurva-kurva pendekatan garis lurus tersebut merupakan cara sederhana tetapi jelas untuk menyatakan karakteristik rangkaian yang diinginkan. Dari sini kita dapat menetapkan maupun mengembangkan persyaratan-persyaratan perancangan. Selain dari pada itu, tanggapan frekuensi dari berbagai piranti, perangkat maupun sistem, sering dinyatakan dengan menggunakan Bode plots. *Pole* dan *zero* dari fungsi alih peralatan-peralatan tersebut dapat kita perkirakan dari bentuk Bode plots yang diberikan. Berikut ini kita akan mempelajari tahap demi tahap penggambaran Bode plots dengan pendekatan garis lurus. Kita akan mulai dari rangkaian orde pertama disusul dengan rangkaian orde kedua.

Rangkaian Orde Pertama

Low-Pass Gain. Bentuk fungsi alih rangkaian orde pertama dengan karakteristik *low-pass gain* adalah

$$T_V(s) = \frac{K}{s + \alpha} \quad (9.11)$$

K dapat bernilai riil positif ataupun negatif. Jika K positif berarti K mempunyai sudut $\theta_K = 0^\circ$ dan jika negatif mempunyai sudut $\theta_K = \pm 180^\circ$. *Pole* fungsi alih ini haruslah riil negatif karena hanya *pole* negatif (di sebelah kiri sumbu imajiner dalam bidang s) yang dapat membuat rangkaian stabil; komponen transienya menuju nol untuk $t \rightarrow \infty$. Hanya rangkaian yang stabil sajalah yang kita tinjau dalam analisis mengenai tanggapan frekuensi.

Dari (9.11) kita dapatkan :

$$T(j\omega) = \frac{K}{j\omega + \alpha} = \frac{K}{\alpha(1 + j\omega/\alpha)} \quad (9.12)$$

Fungsi *gain* dan fungsi fasa dapat kita tuliskan

$$|T_V(j\omega)| = \frac{|K|/\alpha}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}} \quad \text{dan} \quad \varphi(\omega) = \theta_K - \tan^{-1}(\omega/\alpha) \quad (9.13)$$

yang dalam satuan dB, menjadi

$$|T_V(j\omega)|_{dB} = 20 \log(|K|/\alpha) - 20 \log\left(\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}\right) \quad (9.14)$$

Fungsi *gain* ini terdiri dari dua komponen, yang ditunjukkan oleh suku pertama dan suku kedua ruas kanan (9.14). Komponen pertama bernilai konstan untuk seluruh frekuensi. Komponen kedua tergantung dari frekuensi dan komponen inilah yang menyebabkan *gain* berkurang dengan naiknya frekuensi. Komponen ini pula yang menentukan frekuensi cutoff, yaitu saat $(\omega/\alpha) = 1$ dimana komponen ini mencapai nilai $-20 \log \sqrt{2} \approx -3$ dB. Jadi dapat kita katakan bahwa frekuensi cutoff ditentukan oleh komponen yang berasal dari *pole* fungsi alih, yaitu

$$\omega_C = \alpha \quad (9.15)$$

Gb.9.1. memperlihatkan perubahan nilai komponen kedua tersebut sebagai fungsi frekuensi, yang dibuat dengan $\alpha = 1000$. Dengan pola perubahan komponen kedua seperti ini maka *gain* total akan tinggi di daerah frekuensi rendah dan menurun di daerah frekuensi tinggi, yang menunjukkan karakteristik *low-pass gain*. Kurva ini mendekati nilai tertentu secara asimtotis yang memungkinkan dilakukannya pendekatan garis lurus sebagai berikut. Untuk frekuensi rendah, $(\omega/\alpha) \ll 1$ atau $\omega \ll \alpha$, komponen kedua ini dapat didekati dengan

$$-20\log\left(\sqrt{1+(\omega/\alpha)^2}\right) \approx -20\log(\sqrt{1}) = 0 \quad (9.17)$$

Kurva akan berupa garis lurus horisontal di 0 dB. Untuk frekuensi tinggi, $(\omega/\alpha) \gg 1$ atau $\omega \gg \alpha$, komponen kedua tersebut didekati dengan

$$-20\log\left(\sqrt{1+(\omega/\alpha)^2}\right) \approx -20\log(\omega/\alpha) \quad (9.18)$$

sehingga kurvanya berupa garis lurus menurun terhadap $\log(\omega)$. Untuk setiap kenaikan frekuensi 10 kali, yang kita sebut *satu dekade*, penurunan itu adalah

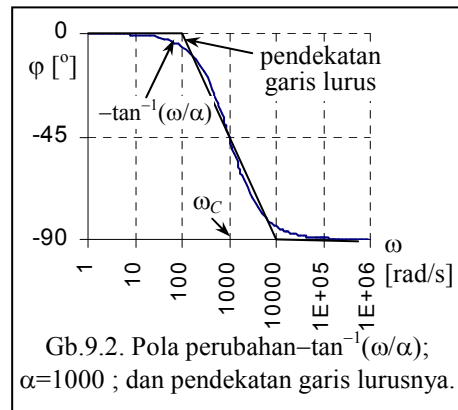
$$-20\log(10\omega/\alpha) - 20\log(\omega/\alpha) = -20\log 10 = -20 \text{ dB}$$

Jadi pendekatan garis lurus untuk komponen kedua ini adalah garis nol untuk $1 < \omega < \alpha$ dan garis lurus -20 dB per dekade untuk $\omega > \alpha$. Titik belok terletak pada perpotongan kedua garis ini, yaitu pada $(\omega/\alpha) = 1$, yang berarti terletak di frekuensi cutoff, seperti terlihat pada Gb.9.1.

Tanggapan fasa kita peroleh dari fungsi fasa (9.12) yaitu

$$\varphi(\omega) = \theta_K - \tan^{-1}(\omega/\alpha) \quad (9.16)$$

Komponen pertama fungsi ini bernilai konstan. Komponen kedua memberi pengurangan fasa yang juga menjadi penentu pola perubahan tanggapan fasa. Lengkung komponen kedua ini terlihat pada Gb.9.2. Seperti halnya kurva pada Gb.9.1. kurva inipun mendekati nilai-nilai tertentu secara asimtotik yang juga memungkinkan kita untuk melakukan pendekatan garis lurus. Pendekatan garis lurus untuk komponen kedua fungsi fasa ini kita lakukan dengan memperhatikan bahwa pada $(\omega/\alpha)=1$, yaitu pada frekuensi cutoff, nilai $-\tan^{-1}(\omega/\alpha)$ adalah -45° . Pada $\omega=0.1\omega_C$, nilai $-\tan^{-1}(\omega/\alpha)$ kecil dan dianggap 0° ; pada $\omega=10\omega_C$, nilai $-\tan^{-1}(\omega/\alpha)$ mendekati -90° dan dianggap -90° ; untuk $\omega > 10\omega_C$, nilai $-\tan^{-1}(\omega/\alpha)$ adalah -90° . Jadi untuk daerah frekuensi $0.1\omega_C < \omega < 10\omega_C$ perubahan fasa dapat dianggap linier -45° per dekade, seperti terlihat pada Gb.9.2.

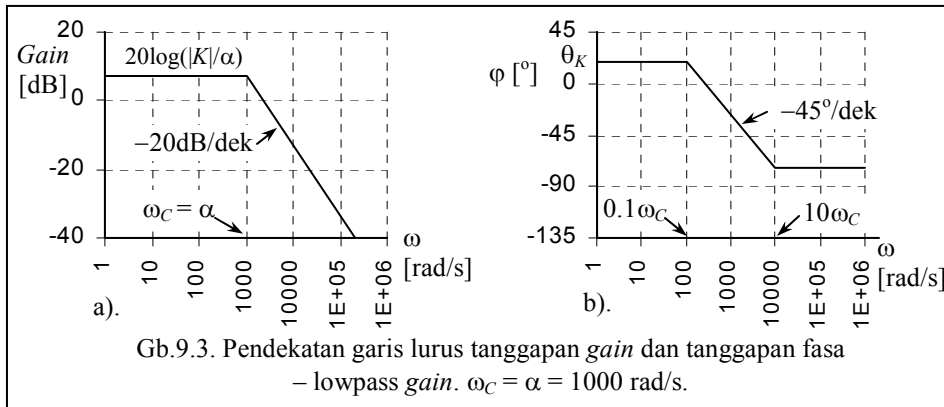


Gb.9.2. Pola perubahan $-\tan^{-1}(\omega/\alpha)$; $\alpha=1000$; dan pendekatan garis lurusnya.

Dengan pendekatan garis lurus seperti di atas, baik untuk fungsi *gain* maupun untuk fungsi fasa, maka tanggapan *gain* dan tanggapan fasa dapat digambarkan dengan nilai seperti tercantum dalam dua tabel di samping ini. Perhatikan bahwa nilai komponen pertama konstan untuk seluruh frekuensi sedangkan komponen kedua mempunyai nilai hanya pada selang frekuensi tertentu. Kurva pendekatan garis lurus tanggapan *gain* dan tanggapan fasa ini, dengan mengambil $\alpha = 1000$, diperlihatkan pada Gb.9.3.a. dan Gb.9.3.b.

Gain	Frekuensi		
	$\omega_c = \alpha$		
	$\omega=1$	$1 < \omega < \alpha$	$\omega > \alpha$
Komponen 1	$20\log(K /\alpha)$	$20\log(K /\alpha)$	$20\log(K /\alpha)$
Komponen 2	0	0	-20dB/dek
Total	$20\log(K /\alpha)$	$20\log(K /\alpha)$	-20dB/dek

ϕ	Frekuensi		
	$\omega_c = \alpha$		
	$\omega=1$	$0,1\alpha < \omega < 10\alpha$	$\omega > 10\alpha$
Komponen 1	θ_K	θ_K	θ_K
Komponen 2	0	-45°/dek	0
Total	θ_K	$\theta_K - 45^\circ/\text{dek}$	θ_K



Gb.9.3. Pendekatan garis lurus tanggapan *gain* dan tanggapan fasa – lowpass *gain*. $\omega_c = \alpha = 1000$ rad/s.

Karena kurva linier adalah kurva pendekatan, maka untuk mengetahui *gain* sebenarnya, diperlukan koreksi-koreksi. Sebagai contoh, pada Gb.9.3.a. *gain* pada frekuensi cutoff sama dengan *gain* maksimum dalam pass-band; seharusnya *gain* pada frekuensi cutoff adalah *gain* maksimum dalam pass-band dikurangi 3 dB.

High-Pass Gain. Fungsi alih rangkaian orde pertama dengan karakteristik *high-pass gain* ini berbentuk

$$T(s) = \frac{Ks}{s + \alpha} \quad \text{sehingga} \quad T(j\omega) = \frac{Ks}{j\omega + \alpha} = \frac{Ks}{\alpha(1 + j\omega/\alpha)} \quad (9.19)$$

Berbeda dengan fungsi alih *low-pass gain*, fungsi alih ini mempunyai *zero* pada $s = 0$. Fungsi *gain* dan fungsi fasa-nya adalah

$$|T(j\omega)| = \frac{(|K|/\alpha)\omega}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2}} \quad \text{dan} \quad \phi(\omega) = \theta_K + 90^\circ - \tan^{-1}(\omega/\alpha) \quad (9.20)$$

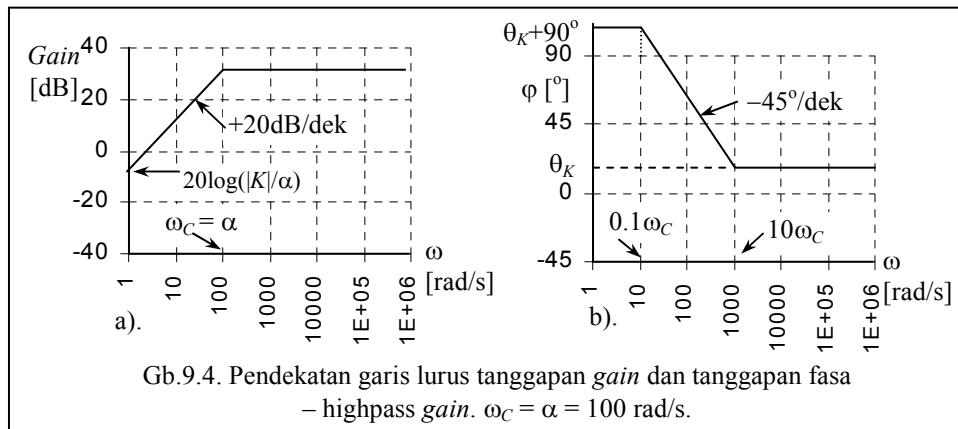
$$\Rightarrow |T(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log(|K|/\alpha) + 20\log\omega - 20\log\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2} \quad (9.21)$$

Dengan hanya menggunakan pendekatan garis lurus, nilai fungsi *gain* dan fungsi fasa adalah seperti dalam tabel berikut.

Gain	Frekuensi		
	$\omega_C = \alpha$		
	$\omega=1$	$1 < \omega < \alpha$	$\omega > \alpha$
Komponen 1	$20\log(K /\alpha)$	$20\log(K /\alpha)$	$20\log(K /\alpha)$
Komponen 2	0	+20dB/dek	$20\log(\alpha/1)+20\text{dB/dek}$
Komponen 3	0	0	-20dB/dek
Total	$20\log(K /\alpha)$	$20\log(K /\alpha)+20\text{dB/dek}$	$20\log(K /\alpha)+20\log(\alpha/1)$

$\varphi(\omega)$	Frekuensi		
	$\omega_C = \alpha$		
	$\omega=1$	$0,1\alpha < \omega < 10\alpha$	$\omega > 10\alpha$
Komponen 1	θ_K	θ_K	θ_K
Komponen 2	90°	90°	90°
Komponen 3	0°	-45°/dek	-90°
Total	$\theta_K + 90^\circ$	$\theta_K + 90^\circ$	θ_K

Pendekatan garis lurus dari tanggapan *gain* dan tanggapan fasa dengan $\alpha=100$, diperlihatkan pada Gb.9.4.a.dan Gb.9.4.b.



CONTOH 9.8 : Gambarkan pendekatan garis lurus tanggapan *gain* dari dua rangkaian yang masing-masing mempunyai fungsi alih

$$T_1(s) = \frac{20}{s+100} \quad \text{dan} \quad T_2(s) = \frac{20s}{s+100}$$

Penyelesaian:

Fungsi *gain* rangkaian pertama adalah

$$T_1(j\omega) = \frac{20}{j\omega+100} = \frac{0.2}{1+j\omega/100} \Rightarrow |T_1(j\omega)| = \frac{0.2}{\sqrt{1+(\omega/100)^2}}$$

$$\Rightarrow |T_1(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log(|T_1(j\omega)|) = 20\log(0.2) - 20\log\sqrt{1+(\omega/100)^2}$$

Frekuensi dan nilai tanggapan *gain* rangkai-an pertama terlihat pada tabel berikut ini.

Gain	Frekuensi		
	$\omega_C = 100 \text{ rad/s}$		
	$\omega=1$	$1 < \omega < 100$	$\omega > 100$
Komponen 1	-14 dB	-14 dB	-14 dB
Komponen 2	0	0	-20dB/dek
Total	-14 dB	-14 dB	-14 dB -20dB/dek

Fungsi *gain* rangkaian kedua adalah:

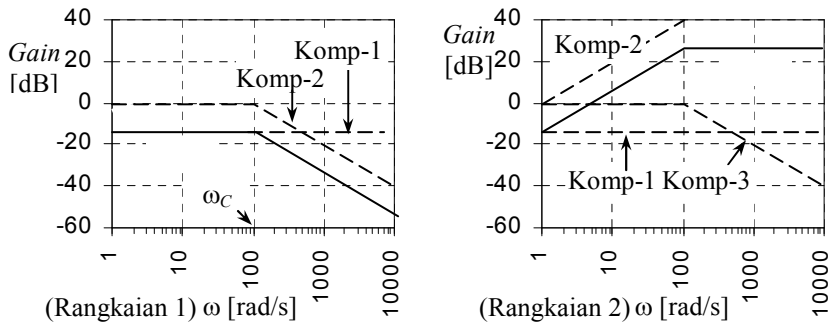
$$T_2(j\omega) = \frac{j20\omega}{j\omega + 100} = \frac{j0,2\omega}{1 + j\omega/100} \Rightarrow |T_2(j\omega)| = \frac{0.2\omega}{\sqrt{1 + (\omega/100)^2}}$$

$$\Rightarrow |T_2(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log(0.2) + 20\log(\omega) - 20\log\sqrt{1 + (\omega/100)^2}$$

Frekuensi dan nilai tanggapan *gain* rangkaian kedua terlihat pada tabel berikut ini.

Gain	Frekuensi		
	$\omega_C = 100 \text{ rad/s}$		
	$\omega=1$	$1 < \omega < 100$	$\omega > 100$
Komponen 1	-14 dB	-14 dB	-14 dB
Komponen 2	0	20 dB/dek	40+20 dB/dek
Komponen 3	0	0	-20 dB/dek
Total	-14 dB	-14 dB +20 dB/dek	26 dB

Gambar tanggapan *gain* ke-dua rangkaian adalah sebagai berikut.



Band-Pass Gain. Rangkaian dengan karakteristik *band-pass gain* dapat diperoleh dengan menghubungkan secara bertingkat dua rangkaian orde pertama dengan menjaga agar rangkaian yang di belakang (rangkaian kedua) tidak membebani rangkaian di depannya (rangkaian pertama). Rangkaian pertama mempunyai karakteristik *high-pass gain* sedangkan rangkaian kedua mempunyai karakteristik *low-pass gain*. Hubungan kaskade demikian ini akan mempunyai fungsi alih sesuai kaidah rantai dan akan berbentuk

$$T = T_1 T_2 = \frac{K_1 s}{s + \alpha} \frac{K_2}{s + \beta} \quad (9.22)$$

$$T(j\omega) = \frac{K_1(j\omega)}{j\omega + \alpha} \times \frac{K_2}{j\omega + \beta} = \frac{K_1(j\omega)}{\alpha(1 + j\omega/\alpha)} \times \frac{K_2}{\beta(1 + j\omega/\beta)} \Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{\{K_1 K_2 / \alpha \beta\} \omega}{\sqrt{1 + (\omega/\alpha)^2} \times \sqrt{1 + (\omega/\beta)^2}}$$

$$\Rightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 20\log(|K_1K_2|/\alpha\beta) + 20\log\omega - 20\log\sqrt{1+(\omega/\alpha)^2} - 20\log\sqrt{1+(\omega/\beta)^2}$$

Dengan membuat $\beta \gg \alpha$ maka akan diperoleh karakteristik *band-pass gain* dengan frkuensi *cutoff* $\omega_{C1} = \alpha$ dan $\omega_{C2} = \beta$. Sesungguhnya fungsi alih (9.22) berbentuk fungsi alih rangkaian orde kedua yang juga mempunyai karakteristik *band-pass gain* yang akan kita lihat berikut ini.

Rangkaian Orde Kedua Dengan Pole Riil

Pole dari fungsi transfer rangkaian orde kedua bisa riil ataupun kompleks konjugat. Pembahasan berikut ini akan dikhususkan untuk fungsi alih dengan *pole* riil

Band-Pass Gain. Fungsi alih rangkaian orde kedua dengan satu *zero* dan dua *pole* riil dapat ditulis sebagai

$$T(s) = \frac{Ks}{(s+\alpha)(s+\beta)} \quad \text{sehingga} \quad T(j\omega) = \frac{K \times j\omega}{(j\omega+\alpha)(j\omega+\beta)} = \frac{(K/\alpha\beta) \times j\omega}{(1+j\omega/\alpha)(1+j\omega/\beta)} \quad (9.23)$$

Fungsi *gain* adalah

$$|T(j\omega)| = \frac{(|K|/\alpha\beta)\omega}{\sqrt{1+(\omega/\alpha)^2} \times \sqrt{1+(\omega/\beta)^2}} \quad (9.24)$$

yang dalam satuan dB menjadi

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20\log(|K|/\alpha\beta) + 20\log\omega - 20\log\sqrt{1+(\omega/\alpha)^2} - 20\log\sqrt{1+(\omega/\beta)^2} \quad (9.25)$$

Fungsi *gain* ini terdiri dari komponen-komponen yang bentuknya telah kita kenal pada pembahasan rangkaian orde pertama. Komponen pertama (suku pertama ruas kanan (9.25)) bernilai konstan. Komponen kedua linier terhadap $\log\omega$ dengan perubahan *gain* +20 dB per dekade; komponen ketiga pengurangan *gain* -20 dB per dekade; komponen keempat juga pengurangan *gain* -20 dB / dekade. Frekuensi *cutoff* $\omega_{C1} = \alpha$ diberikan oleh komponen ketiga sedangkan komponen keempat memberikan frekuensi *cutoff* $\omega_{C2} = \beta$.

Nilai fungsi *gain* dengan pendekatan linier untuk $\beta > \alpha$ adalah seperti dalam tabel di samping ini. Mengenai fungsi fasa-nya tidak kita lihat di sini akan tetapi akan kita lihat pada contoh 9.9.

Gain	Frekuensi			
	$\omega_{C1} = \alpha$ rad/s		$\omega_{C2} = \beta$ rad/s	
	$\omega=1$	$1<\omega<\alpha$	$\alpha<\omega<\beta$	$\omega>\beta$
Komponen 1	$20\log(K /\alpha\beta)$	$20\log(K /\alpha\beta)$	$20\log(K /\alpha\beta)$	$20\log(K /\alpha\beta)$
Komponen 2	0	+20 dB/dek	+20log($\alpha/1$) +20 dB/dek	+20log($\beta/1$) +20 dB/dek
Komponen 3	0	0	-20 dB/dek	-20log(β/α) -20 dB/dek
Komponen 4	0	0	0	-20 dB/dek
Total	$20\log(K /\alpha\beta)$	$20\log(K /\alpha\beta)$ +20 dB/dek	$20\log(K /\alpha\beta)$ +20log($\alpha/1$)	$20\log(K /\alpha\beta)$ +20log(α) -20 dB/dek

CONTOH 9.9 : Gambarkan Bode plots pendekatan garis lurus (tanggapan *gain* dan tanggapan fasa) rangkaian yang diketahui fungsi alihnya adalah :

$$T(s) = \frac{50000s}{(s+10)(s+10000)}$$

Penyelesaian :

$$T(j\omega) = \frac{50000 \times j\omega}{(j\omega+10)(j\omega+10000)} = \frac{0,5\omega}{(1+j\omega/10)(1+j\omega/10000)}$$

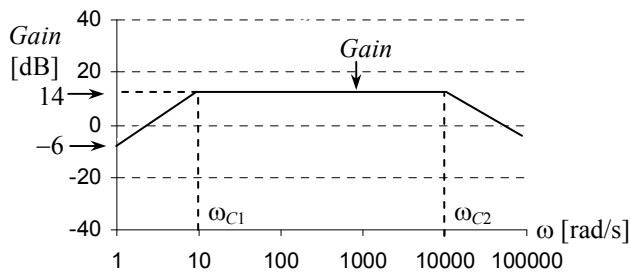
$$\rightarrow |T(j\omega)| = \frac{0,5\omega}{\sqrt{1+(\omega/10)^2} \times \sqrt{1+(\omega/10000)^2}}$$

$$\Rightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 20 \log 0,5 + 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{1+(\omega/10)^2} - 20 \log \sqrt{1+(\omega/10000)^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega) = 0 + 90^\circ - \tan^{-1}(\omega/10) - \tan^{-1}(\omega/10000)$$

Nilai frekuensi dan fungsi *gain* adalah sebagai berikut.

Gain	Frekuensi			
	$\omega_{C1} = 10 \text{ rad/s}$		$\omega_{C2} = 10000 \text{ rad/s}$	
	$\omega=1$	$1 < \omega < 10$	$10 < \omega < 10^4$	$\omega > 10^4$
Komponen 1	-6 dB	-6 dB	-6 dB	-6 dB
Komponen 2	0	+20 dB/dek	20+20 dB/dek	80+20 dB/dek
Komponen 3	0	0	-20 dB/dek	-60-20 dB/dek
Komponen 4	0	0	0	-20 dB/dek
Total	-6 dB	-6 dB +20 dB/dek	14 dB	14 dB -20 dB/dek

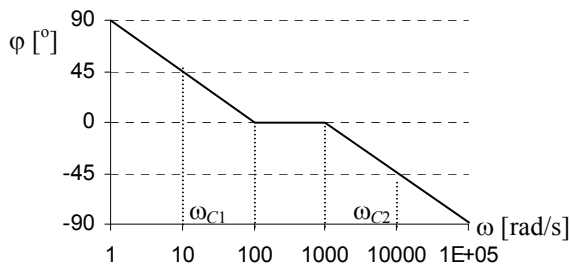


Untuk menggambarkan tanggapan fasa, kita perhatikan fungsi fasa

$$\varphi(\omega) = 0 + 90^\circ - \tan^{-1}(\omega/10) - \tan^{-1}(\omega/10000)$$

Untuk $\omega = 1$ maka $\varphi(\omega) \approx (0+90^\circ-0-0) = 90^\circ$. Mulai dari $0,1\omega_{C1}$ sampai $10\omega_{C1}$ (atau dari 1 sampai 100) terjadi perubahan fasa -45° per dekade. Mulai dari $0,1\omega_{C2}$ sampai $10\omega_{C2}$ (atau 1000 sampai 100000) terjadi perubahan fasa -45° per dekade. Perhatikan bahwa dalam contoh ini $10\omega_{C1} < 0,1\omega_{C2}$, sehingga ada selang frekuensi di mana tanggapan fasa konstan yaitu antara 100 sampai 1000 rad/s.

$\varphi(\omega)$	Frekuensi			
	$\omega_{C1} = 10 \text{ rad/s}$		$\omega_{C2} = 10^4 \text{ rad/s}$	
	$\omega=1$	$1 < \omega < 100$	$10^3 < \omega < 10^5$	$\omega > 10^5$
Komponen 1	0°	0°	0°	0°
Komponen 2	90°	90°	90°	90°
Komponen 3	0°	$-45^\circ/\text{dek}$	-90°	-90°
Komponen 4	0°	0°	$0^\circ-45^\circ/\text{dek}$	-90°
Total	90°	$90^\circ-45^\circ/\text{dek}$	$0^\circ-45^\circ/\text{dek}$	-90°



Pemahaman :

Karena frekuensi cutoff pertama $\omega_{C1} = 10$, maka perubahan fasa $-45^\circ/\text{dekade}$ terjadi pada selang frekuensi $1 < \omega < 100$. Karena frekuensi cutoff kedua $\omega_{C2} = 10000$, maka perubahan fasa $-45^\circ/\text{dekade}$ yang kedua terjadi pada selang frekuensi $1000 < \omega < 100000$. Di luar ke-dua selang frekuensi ini fasa tidak berubah, sehingga terlihat adanya kurva mendatar pada selang frekuensi $100 < \omega < 1000$.

High-Pass Gain. Karakteristik *high-pass gain* dapat diperoleh dari rangkaian orde kedua yang fungsi alihnya mengandung dua *zero* di $s = 0$.

CONTOH 9.10 : Gambarkan tanggapan *gain* dan tanggapan fasa jika diketahui fungsi

$$\text{alihnya adalah : } T(s) = \frac{10s^2}{(s + 40)(s + 200)}$$

Penyelesaian :

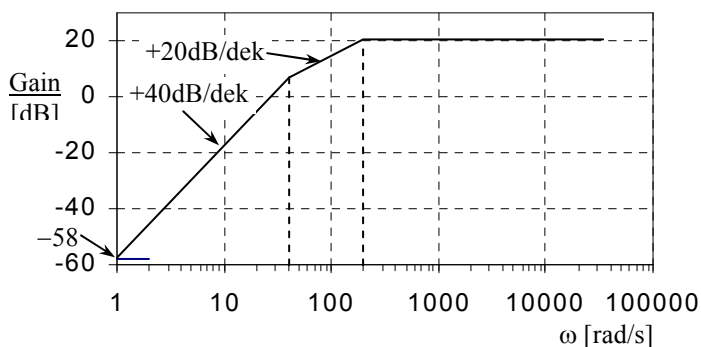
Gain dari sistem ini adalah

$$T(j\omega) = \frac{10(j\omega)^2}{(j\omega + 40)(j\omega + 200)} = \frac{1}{800} \times \frac{-\omega^2}{(1 + j\omega/40)(1 + j\omega/200)}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{800} \times \frac{\omega^2}{\sqrt{1 + (\omega/40)^2} \times \sqrt{1 + (\omega/200)^2}}$$

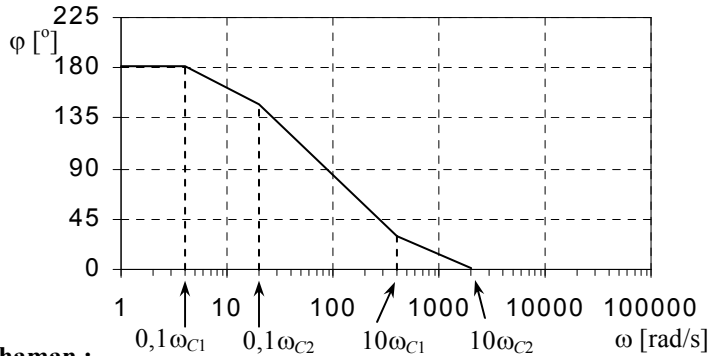
$$|T(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(1/800) + 2 \times 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{(\omega/40)^2 + 1} - 20 \log \sqrt{(\omega/200)^2 + 1}$$

Komponen pertama tanggapan *gain* adalah konstan $20 \log(1/800) = -58$ dB. Komponen kedua linier terhadap $\log(\omega)$ dengan kenaikan 2×20 dB per dekade. Pengurangan *gain* oleh komponen ketiga mulai pada $\omega_{C1} = 40$ dengan -20 dB per dekade. Pengurangan *gain* oleh komponen ke-empat mulai pada $\omega_{C2} = 200$ dengan -20 dB per dekade. Kurva tanggapan *gain* adalah sebagai berikut.



Fungsi fasa adalah : $\varphi(\omega) = 0 + 2 \times 90^\circ - \tan^{-1}(\omega/40) - \tan^{-1}(\omega/200)$

Pada $\omega = 1$, $\varphi(\omega) \approx 0^\circ + 2 \times 90^\circ = 180^\circ$. Pada $\omega = (\omega_{C1}/10) = 4$, komponen ke-tiga mulai memberikan perubahan fasa -45° per dekade dan akan berlangsung sampai $\omega = 10\omega_{C1} = 40$. Pada $\omega = 0.1\omega_{C2} = 20$, komponen ke-empat mulai memberikan perubahan fasa -45° per dekade dan akan berlangsung sampai $\omega = 10\omega_{C2} = 200$.



Pemahaman :

Penggambaran tanggapan *gain* dan tanggapan fasa di sini tidak lagi melalui langkah antara yang berupa pembuatan tabel peran tiap komponen dalam berbagai daerah frekuensi. Kita dapat melakukan hal ini setelah kita memahami peran tiap-tiap komponen tersebut dalam membentuk tanggapan *gain* dan tanggapan fasa. Melalui latihan yang cukup, penggambaran tanggapan *gain* dan tanggapan fasa dapat dilakukan langsung dari pengamatan formulasi kedua macam tanggapan tersebut.

Perhatikanlah penggambaran tanggapan fasa. Dalam contoh ini $0,1\omega_{C2} < 10\omega_{C1}$ dan bahkan $0,1\omega_{C2} < \omega_{C1}$. Oleh karena itu, penurunan fasa -45° per dekade oleh *pole* pertama, yang akan berlangsung sampai $\omega = 10\omega_{C1}$, telah ditambah penurunan oleh *pole* kedua pada $\omega = 0,1\omega_{C2}$ sebesar -45° per dekade. Hal ini menyebabkan terjadinya penurunan fasa $-2 \times 45^\circ$ mulai dari $\omega = 0,1\omega_{C2}$ sampai dengan $\omega = 10\omega_{C1}$ karena dalam selang frekuensi tersebut dua *pole* berperan menurunkan fasa secara bersamaan. Pada $\omega = 10\omega_{C1}$ peran *pole* pertama berakhir dan mulai dari sini penurunan fasa hanya disebabkan oleh *pole* kedua, yaitu -45° per dekade.

Low-pass Gain. Karakteristik *low-pass gain* dapat diperoleh dari rangkaian orde kedua yang fungsi alihnya tidak mengandung *zero*.

CONTOH 9.11 : Gambarkan Bode plots pendekatan garis lurus rangkaian yang fungsi

$$\text{alihnya adalah : } T(s) = \frac{5 \times 10^4}{(s+100)(s+1000)}$$

Penyelesaian :

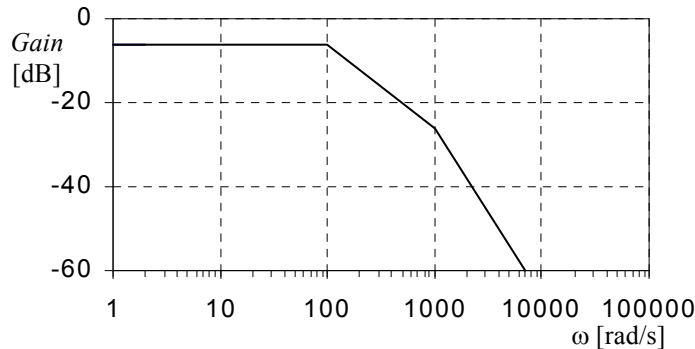
$$T(j\omega) = \frac{5 \times 10^4}{(j\omega+100)(j\omega+1000)} = \frac{0,5}{(1+j\omega/100)(1+j\omega/1000)}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{0,5}{\sqrt{1+(\omega/100)^2} \times \sqrt{1+(\omega/1000)^2}}$$

$$|T(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log 0,5 - 20 \log \sqrt{1+(\omega/100)^2} - 20 \log \sqrt{1+(\omega/1000)^2}$$

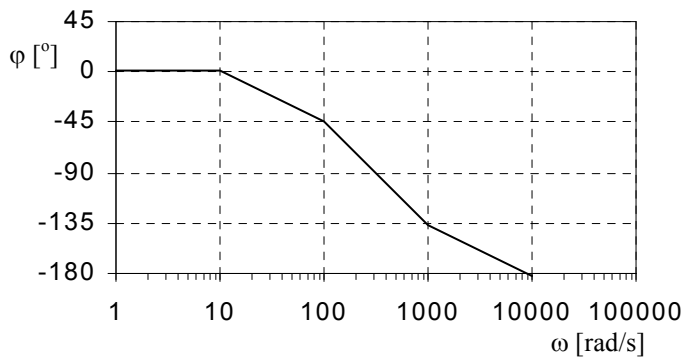
$$\varphi(\omega) = 0 - \tan^{-1}(\omega/100) - \tan^{-1}(\omega/1000)$$

Komponen pertama tanggapan *gain* adalah $20\log(0,8) \approx -6$ dB. Komponen kedua memberikan perubahan *gain* -20 dB per dekade mulai pada $\omega = \omega_{C1} = 100$. Komponen ke-tiga memberikan per-ubahan *gain* -20 dB per dekade mulai pada $\omega = \omega_{C2} = 1000$, sehingga mulai $\omega = 1000$ perubahan *gain* adalah -40 dB per dekade.



Fungsi fasa adalah $\varphi(\omega) = 0 - \tan^{-1}(\omega/100) - \tan^{-1}(\omega/1000)$

Pada $\omega = 1$, $\varphi(\omega) \approx 0$. Mulai pada $\omega = 10$, komponen kedua memberikan perubahan fasa -45° per dekade sampai $\omega = 1000$. Mulai pada $\omega = 100$, komponen ke-tiga memberikan perubahan fasa -45° per dekade sampai $\omega = 10000$. Jadi pada selang $100 < \omega < 1000$ perubahan fasa adalah -90° per dekade.



Fungsi Alih Dengan Zero Riil Negatif. Dalam contoh-contoh sebelumnya, fungsi alih mempunyai *zero* di $s = 0$. Fungsi alih dalam contoh berikut ini mempunyai *zero* di $s \neq 0$.

CONTOH 9.12 : Gambarkan tanggapan *gain* dan tanggapan fasa jika diketahui fungsi

$$\text{alihnya adalah } T(s) = \frac{4 \times 10^4 (s + 20)}{(s + 100)(s + 1000)}$$

Penyelesaian :

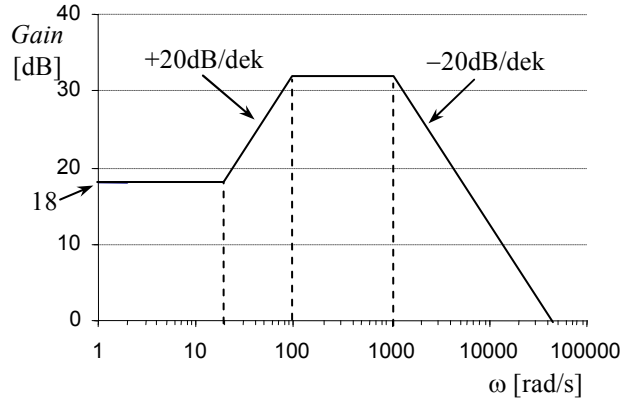
$$T(j\omega) = \frac{4 \times 10^4 (j\omega + 20)}{(j\omega + 100)(j\omega + 1000)} = \frac{8(1 + j\omega/20)}{(1 + j\omega/100)(1 + j\omega/1000)}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{8\sqrt{(\omega/20)^2 + 1}}{\sqrt{1 + (\omega/100)^2} \times \sqrt{1 + (\omega/1000)^2}}$$

$$|T(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log 8 + 20\log\sqrt{1 + (\omega/20)^2} - 20\log\sqrt{1 + (\omega/100)^2} - 20\log\sqrt{1 + (\omega/1000)^2}$$

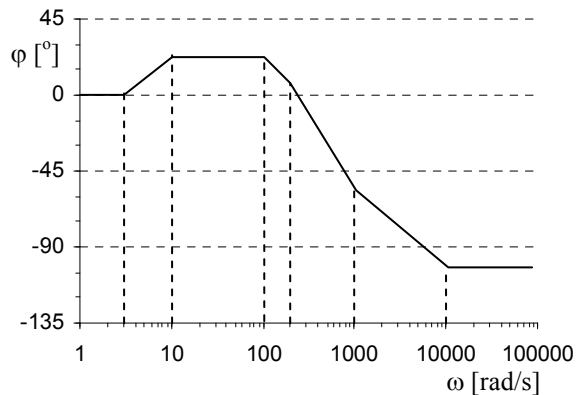
$$\varphi(\omega) = 0 + \tan^{-1}(\omega/20) - \tan^{-1}(\omega/100) - \tan^{-1}(\omega/1000)$$

Komponen pertama dari tanggapan *gain* adalah $20\log 8 = 18$ dB. Komponen kedua memberikan perubahan *gain* +20 dB per dekade, mulai pada $\omega = 20$. Komponen ketiga memberikan perubahan -20 dB per dekade mulai pada $\omega = 100$. Komponen keempat memberikan perubahan -20 dB per dekade mulai pada $\omega = 1000$.



Fungsi fasa adalah : $\varphi(\omega) = 0 + \tan^{-1}(\omega/20) - \tan^{-1}(\omega/100) - \tan^{-1}(\omega/1000)$

Pada $\omega = 1$, $\varphi(\omega) \approx 0$. Komponen kedua memberikan perubahan fasa +45° per dekade mulai dari $\omega = 2$ sampai $\omega = 200$. Komponen ketiga memberikan perubahan fasa -45° per dekade mulai dari $\omega = 10$ sampai $\omega = 1000$. Komponen keempat memberikan perubahan fasa -45° per dekade mulai dari $\omega = 100$ sampai $\omega = 10000$.



Pemahaman :

Zero tetap berperan sebagai peningkat *gain* dan fasa. *Zero* riil negatif meningkatkan *gain* dan fasa mulai pada frekuensi yang sama dengan nilai *zero*.

Tinjauan Umum Bode Plots dari Rangkaian Dengan Pole dan Zero Riil

Bode plots terutama bermanfaat jika *pole* dan *zero* bernilai riil, yaitu *pole* dan *zero* yang dalam diagram *pole-zero* di bidang *s* terletak di sumbu riil negatif. Dari contoh-contoh fungsi alih yang mengandung *zero* dan *pole* riil yang telah kita bahas di atas, kita dapat membuat suatu ringkasan mengenai kaitan antara *pole* dan *zero* yang dimiliki oleh suatu fungsi alih dengan bentuk kurva *gain* dan kurva fasa pada Bode plots dengan pendekatan garis lurus. Untuk itu kita lihat fungsi alih yang berbentuk

$$T(s) = \frac{Ks(s + \alpha_1)}{(s + \alpha_2)(s + \alpha_3)} \tag{9.26}$$

yang akan memberikan

$$T(j\omega) = \frac{K\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3} \frac{j\omega(1 + j\omega/\alpha_1)}{(1 + j\omega/\alpha_2)(1 + j\omega/\alpha_3)} \tag{9.27}$$

Dari (9.27) terlihat ada tiga macam faktor yang akan menentukan bentuk kurva *gain* maupun kurva fasa. Ke-tiga faktor tersebut adalah:

-
1. Faktor $K_0 = \frac{K\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3}$ yang disebut *faktor skala*. Kontribusi faktor skala ini pada *gain* dan fasa berupa suatu nilai konstan, tidak tergantung pada frekuensi. Kontribusinya pada *gain* sebesar $20\log |K_0|$ akan bernilai positif jika $|K_0| > 1$ dan bernilai negatif jika $|K_0| < 1$. Kontribunya pada sudut fasa adalah 0° jika $K_0 > 0$ dan 180° jika $K_0 < 0$.
 2. Faktor $j\omega$. Faktor ini berasal dari *pole* atau *zero* yang terletak di titik (0,0) dalam diagram *pole-zero* di bidang s . Kontribusinya pada *gain* adalah sebesar $\pm 20\log(\omega)$ dan kontribusinya untuk sudut fasa adalah $\pm 90^\circ$; tanda plus untuk *zero* dan tanda minus untuk *pole*. Jika fungsi alih mengandung *pole* ataupun *zero* ganda (lebih dari satu) maka kontribusinya pada *gain* adalah sebesar $\pm 20n\log(\omega)$ dan pada sudut fasa adalah $\pm n90^\circ$ dengan n adalah jumlah *pole* atau *zero*. Dalam pendekatan garis lurus, faktor ini memberikan perubahan *gain* sebesar $\pm 20n$ dB per dekade mulai pada $\omega = 1$; tanda plus untuk *zero* dan tanda minus untuk *pole*.
 3. Faktor $1 + j\omega/\alpha$. Faktor ini berasal dari *pole* ataupun *zero* yang terletak di sumbu riil negatif dalam diagram *pole-zero* di bidang s . Faktor ini berkontribusi pada *gain* sebesar $\pm 20\log\left(\sqrt{1+(\omega/\alpha)^2}\right)$ dan berkontribusi pada sudut fasa sebesar $\pm \tan^{-1}(\omega/\alpha)$; tanda plus untuk *zero* dan tanda minus untuk *pole*. Dalam pendekatan garis lurus, faktor ini memberikan perubahan *gain* sebesar ± 20 dB per dekade mulai pada $\omega = \alpha$; untuk frekuensi di bawahnya kontribusinya nol. Perubahan fasa yang dikontribusikan adalah sebesar $\pm 45^\circ$ per dekade dalam selang frekuensi $0,1\alpha < \omega < 10\alpha$; di luar selang itu kontribusinya nol.

Koreksi-koreksi untuk memperoleh nilai yang lebih tepat, terutama di sekitar titik belok, dapat kita lakukan dengan kembali pada formulasi kontribusi *pole* ataupun *zero* pada *gain* yaitu sebesar $\pm 20\log\left(\sqrt{1+(\omega/\alpha)^2}\right)$. Nilai perubahan *gain* yang lebih tepat diperoleh dengan memasukkan nilai ω yang kita maksudkan pada formulasi tersebut sehingga kita akan memperoleh:

- perubahan *gain* di $\omega = \alpha$ adalah sebesar $\pm 20\log\left(\sqrt{1+(\alpha/\alpha)^2}\right) \approx 3$ dB .
- perubahan *gain* di $\omega = 2\alpha$ adalah sebesar $\pm 20\log\left(\sqrt{1+(2\alpha/\alpha)^2}\right) \approx 7$ dB .
- perubahan *gain* di $\omega = 0.5\alpha$ adalah sebesar $\pm 20\log\left(\sqrt{1+(0.5\alpha/\alpha)^2}\right) \approx 1$ dB .

Tinjauan Kualitatif Tanggapan Frekuensi Di Bidang s

Pembahasan kuantitatif mengenai tanggapan frekuensi dari rangkaian dengan fungsi alih yang mengandung *pole* riil di atas, telah cukup lanjut. Berikut ini kita akan sedikit mundur dengan melakukan tinjauan secara kualitatif mengenai tanggapan frekuensi ini, untuk kemudian melanjutkan pembahasan tanggapan frekuensi rangkaian dari rangkaian dengan fungsi alih yang mengandung *pole* kompleks konjugat.

Tinjaulah sistem orde pertama dengan fungsi alih yang mengandung *pole* riil

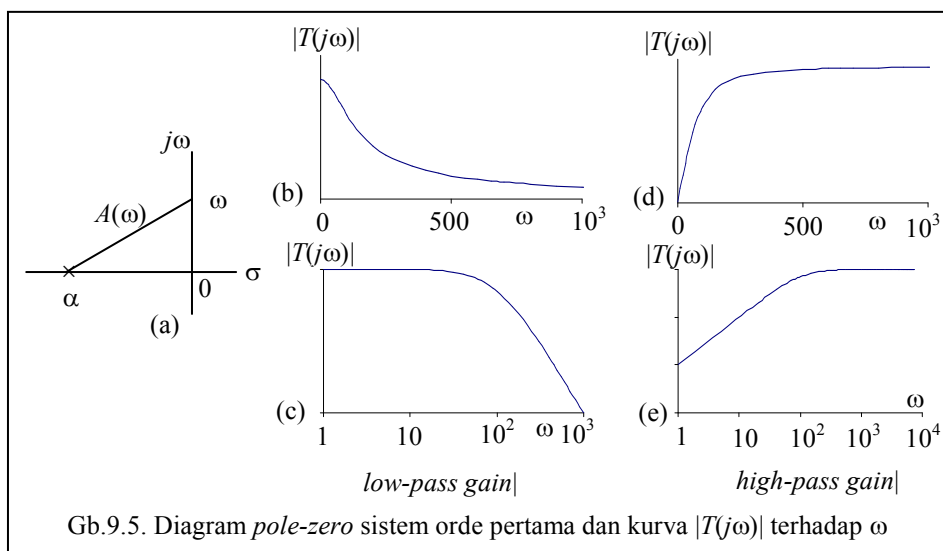
$$T(s) = \frac{K}{s + \alpha}$$

Diagram *pole-zero* dari fungsi alih ini adalah seperti terlihat pada Gb.9.5.a. Dari gambar ini kita dapatkan bahwa fungsi *gain* :

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega + \alpha} \right| = \frac{|K|}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{|K|}{A(\omega)} \quad (9.28)$$

dengan $A(\omega)$ adalah jarak antara *pole* dengan suatu nilai ω di sumbu tegak. Makin besar ω akan makin besar nilai $A(\omega)$ sehingga $|T(j\omega)|$ akan semakin kecil.

Jika kita gambarkan kurva $|T(j\omega)|$ terhadap ω dengan skala linier, kita akan mendapatkan kurva seperti terlihat pada Gb.9.5.b. Akan tetapi jika dalam penggambaran itu kita menggunakan skala logaritmis, baik untuk absis maupun ordinatnya, kita akan mendapatkan kurva seperti terlihat pada Gb.9.5.c. Inilah bentuk karakteristik *low-pass gain* dari rangkaian orde satu yang telah kita kenal.



Kita lihat rangkaian orde pertama dengan fungsi alih yang mengandung *zero* di (0,0)

$$T(s) = \frac{Ks}{s + \alpha}$$

Fungsi *gain* adalah

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{Kj\omega}{j\omega + \alpha} \right| = \frac{|K| \omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{|K| \omega}{A(\omega)} \quad (9.29)$$

Jika kita plot $|T(j\omega)|$ terhadap ω dengan skala linier, kita akan mendapatkan kurva seperti terlihat pada Gb.9.5.d. Akan tetapi jika kita plot $|T(j\omega)|$ terhadap ω dengan skala logaritmis, baik untuk absis maupun ordinatnya, kita akan mendapatkan kurva seperti terlihat pada Gb.9.5.e. Inilah bentuk karakteristik *high-pass gain* dari rangkaian orde satu yang telah kita kenal.

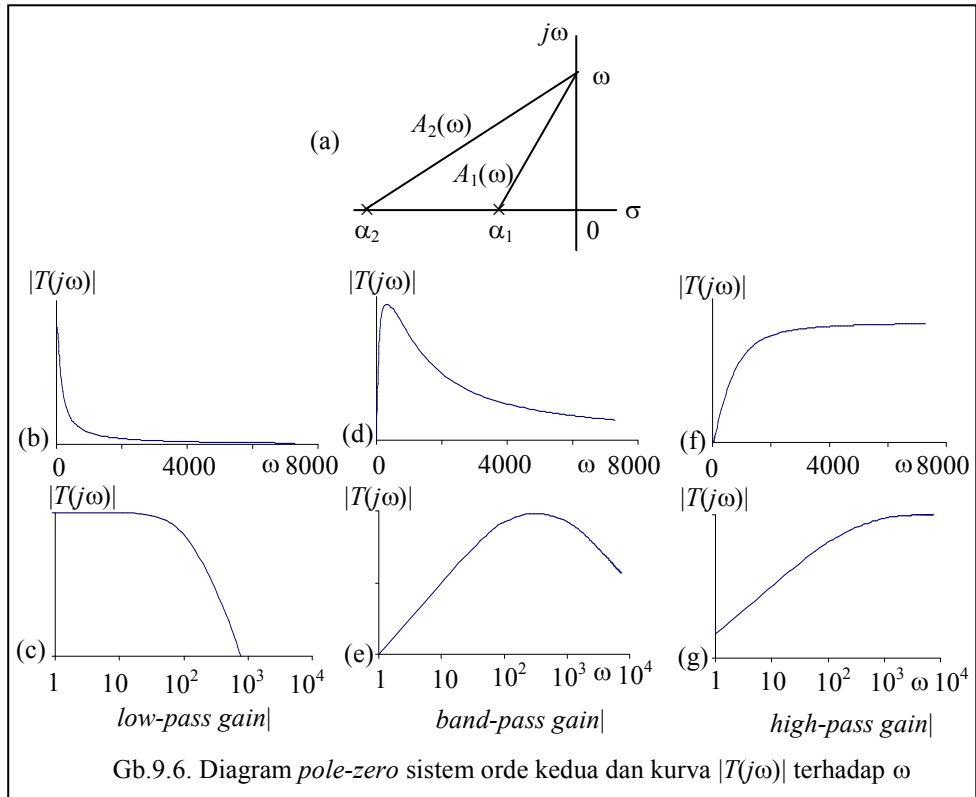
Fungsi alih rangkaian orde kedua dengan fungsi transfer yang mengandung dua *pole* riil, berbentuk

$$T(s) = \frac{K}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$$

Diagram *pole-zero* dari fungsi alih ini adalah seperti terlihat pada Gb.9.6.a. Dari diagram ini terlihat bahwa fungsi *gain* dapat dituliskan sebagai

$$|T(j\omega)| = \frac{|K|}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} = \frac{|K|}{\sqrt{\omega^2 + \alpha_1^2} \sqrt{\omega^2 + \alpha_2^2}} = \frac{|K|}{A_1(\omega) \times A_2(\omega)} \quad (9.30)$$

dengan $A_1(\omega)$ dan $A_2(\omega)$ adalah jarak masing-masing *pole* ke suatu nilai ω . Dengan bertambahnya ω , $A_1(\omega)$ dan $A_2(\omega)$ bertambah secara bersamaan. Situasi ini mirip dengan apa yang dibahas di atas, yaitu bahwa $|T(j\omega)|$ akan menurun dengan naiknya frekuensi; perbedaannya adalah bahwa penurunan pada rangkaian orde kedua ini ditentukan oleh dua faktor yang berasal dari dua *pole*. Dalam skala linier bentuk kurva $|T(j\omega)|$ adalah seperti Gb.9.6.b. Dalam skala logaritmik kita memperoleh karakteristik *low-pass gain* seperti terlihat pada Gb.9.6.c. yang sudah kita kenal.



Jika fungsi alih mengandung satu *zero* di $(0,0)$ kurva $|T(j\omega)|$ dengan skala linier akan terlihat seperti Gb.9.6.d. dan jika dibuat dengan skala logaritmik akan seperti Gb.9.6.e. yang telah kita kenal sebagai karakteristik *band-pass gain*. Jika fungsi alih mengandung dua *zero* di $(0,0)$ kita memperoleh kurva $|T(j\omega)|$ dalam skala linier seperti pada Gb.9.6.f. dan jika digunakan skala logaritmik akan kita peroleh karakteristik *high-pass gain* seperti Gb.9.6.g.

Keadaan yang sangat berbeda terjadi pada rangkaian orde dua dengan fungsi alih yang mengandung *pole* kompleks konjugat yang akan kita bahas berikut ini

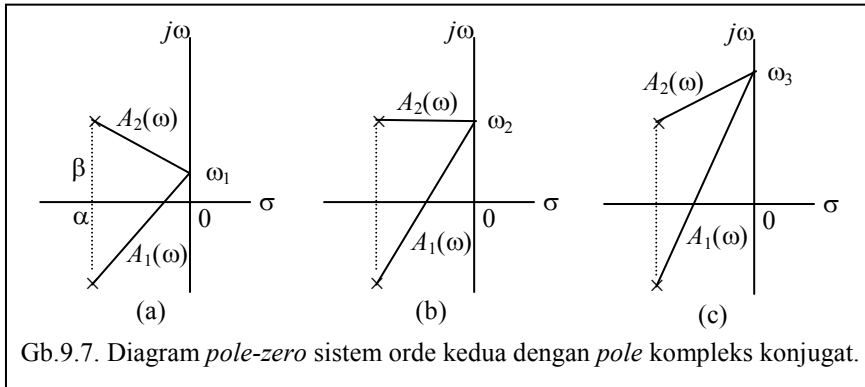
Rangkaian Orde Kedua Dengan Pole Kompleks Konjugat

Gb.9.7. memperlihatkan diagram *pole-zero* rangkaian orde kedua dengan fungsi alih yang mengandung *pole* kompleks konjugat dalam tiga keadaan. Fungsi alih-nya berbentuk

$$T(s) = \frac{K}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)} \quad (9.31)$$

yang memberikan fungsi *gain*

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{K}{(j\omega + \alpha + j\beta)(j\omega + \alpha - j\beta)} \right| = \frac{|K|}{\sqrt{(\omega + \beta)^2 + \alpha^2} \times \sqrt{(\omega - \beta)^2 + \alpha^2}} = \frac{|K|}{A_1(\omega) \times A_2(\omega)} \quad (9.32)$$



Dari Gb.9.7. terlihat bahwa peningkatan ω akan selalu diikuti oleh bertambahnya nilai $A_1(\omega)$. Akan tetapi tidak demikian halnya dengan $A_2(\omega)$. Pada awalnya peningkatan ω diikuti oleh turunnya nilai $A_2(\omega)$ sampai mencapai nilai minimum yaitu pada saat $\omega = \omega_2 = \beta$ seperti pada Gb.9.7.b. Setelah itu $A_2(\omega)$ meningkat dengan meningkatnya ω . Hasilnya adalah fungsi *gain* $|T(j\omega)|$ meningkat pada awal peningkatan ω sampai mencapai nilai maksimum dan kemudian menurun lagi. Puncak tanggapan *gain* disebut *resonansi*.

Untuk mempelajari tanggapan frekuensi di sekitar frekuensi resonansi, kita tuliskan fungsi alih rangkaian orde kedua dalam bentuk

$$T(s) = \frac{Ks}{s^2 + bs + c} \quad (9.32)$$

yang dapat kita tuliskan

$$T(s) = \frac{Ks}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad \text{dengan : } \omega_0^2 = c \quad \text{dan} \quad \zeta = \frac{b}{2c} \quad (9.33)$$

Bentuk penulisan penyebut seperti pada (9.33) ini disebut bentuk normal. ζ disebut *rasio redaman* dan ω_0 adalah *frekuensi alami tanpa redaman* atau dengan singkat disebut *frekuensi alami*. Frekuensi alami adalah frekuensi di mana rasio redaman $\zeta = 0$.

Fungsi alih (9.33) dapat kita tuliskan

$$T(s) = \frac{Ks}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} = \frac{K}{\omega_0^2} \times \frac{s}{(s/\omega_0)^2 + (2\zeta/\omega_0)s + 1} \quad (9.34)$$

dan dari sini kita peroleh

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{K}{\omega_0^2} \times \frac{j\omega}{-(\omega/\omega_0)^2 + j(2\zeta\omega/\omega_0) + 1} \\ \Rightarrow |T(j\omega)| &= \frac{|K|}{\omega_0^2} \times \frac{\omega}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_0)^2}} \\ \Rightarrow \varphi(\omega) &= \theta_K + 90^\circ - \tan^{-1} \frac{(2\zeta\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \end{aligned} \quad (9.35)$$

Fungsi *gain* dalam dB adalah

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20\log\frac{|K|}{\omega_0^2} + 20\log\omega - 20\log\sqrt{1 - (\omega/\omega_0)^2} + (2\zeta\omega/\omega_0)^2 \quad (9.36)$$

Rasio redaman akan mempengaruhi perubahan nilai *gain* oleh *pole* seperti ditunjukkan oleh komponen ketiga dari fungsi *gain* ini.

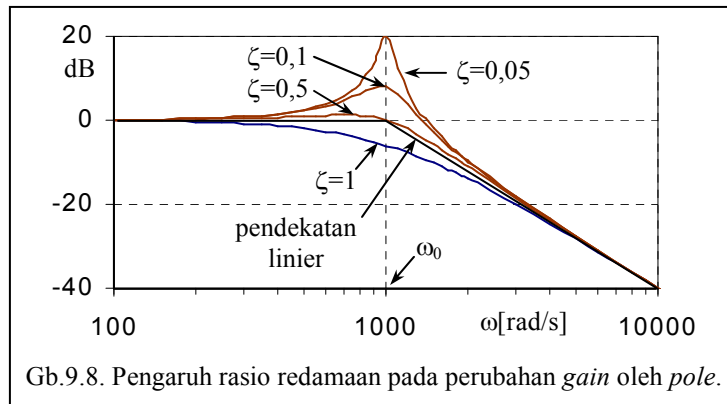
Untuk frekuensi rendah komponen ketiga ini mendekati nilai

$$-20\log\sqrt{1 - (\omega/\omega_0)^2} + (2\zeta\omega/\omega_0)^2 \approx -20\log\sqrt{1+0} = 0 \quad (9.37)$$

Untuk frekuensi tinggi komponen ketiga mendekati

$$-20\log\sqrt{1 - (\omega/\omega_0)^2} + (2\zeta\omega/\omega_0)^2 \approx -20\log(\omega/\omega_0)\sqrt{(\omega/\omega_0)^2 + (2\zeta)^2} \approx -20\log(\omega/\omega_0)^2 \quad (9.38)$$

Pendekatan garis lurus untuk menggambarkan tanggapan *gain* mengambil garis horizontal 0 dB untuk frekuensi rendah dan garis lurus $-20\log(\omega/\omega_0)^2$ untuk frekuensi tinggi yang memberikan kemiringan -40 dB per dekade. Kedua garis ini berpotongan di $\omega = \omega_0$ yang merupakan titik beloknya. Gambar Gb.9.8. memperlihatkan pengaruh nilai rasio redaman pada tanggapan *gain* ini di sekitar titik belok.



Fungsi fasa adalah

$$\varphi(\omega) = \theta_K + 90^\circ - \tan^{-1} \frac{(2\zeta\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (9.39)$$

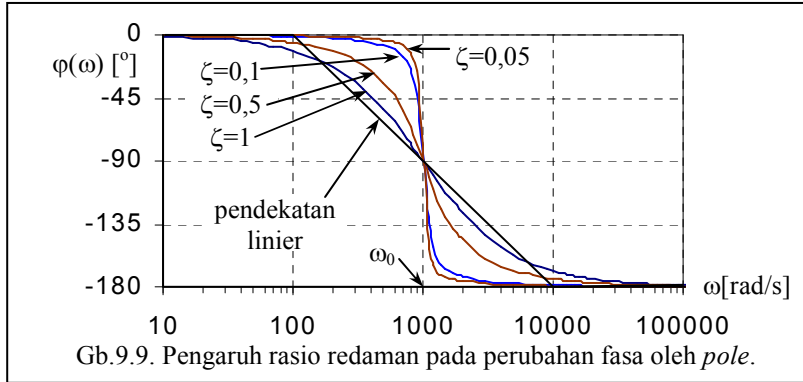
Untuk frekuensi rendah pengurangan fasa oleh *pole* mendekati nilai

$$-\tan^{-1} \frac{(2\zeta\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \approx -\tan^{-1} \frac{(2\zeta\omega/\omega_0)}{1} \approx 0 \quad (9.40)$$

dan untuk frekuensi tinggi mendekati

$$-\tan^{-1} \frac{(2\zeta\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \approx -\tan^{-1} \frac{(2\zeta\omega/\omega_0)}{-(\omega/\omega_0)^2} \approx -180^\circ \quad (9.41)$$

Gb.9.9. memperlihatkan pengaruh rasio redaman terhadap perubahan fasa yang disebabkan oleh *pole*.



CONTOH 9.13 : Gambarkan tanggapan *gain* dan tanggapan fasa untuk fungsi alih berikut ini dan selidiki pengaruh rasio redaman terhadap tanggapan *gain*.

$$T(s) = \frac{80000s}{s^2 + 100s + 4 \times 10^4}$$

Penyelesaian :

Kita tuliskan fungsi alih dengan penyebutnya dalam bentuk normal menjadi

$$T(s) = \frac{80000s}{s^2 + 2 \times 0,25 \times 200s + 200^2}$$

Di sini kita peroleh $\omega_0 = 200$, dan $\zeta = 0,25$.

Fungsi alih dan fungsi gain dapat ditulis

$$T(s) = \frac{2s}{(s/200)^2 + (2\zeta/200)s + 1} \Rightarrow T(j\omega) = \frac{j2\omega}{-(\omega/200)^2 + j2\zeta\omega/200 + 1}$$

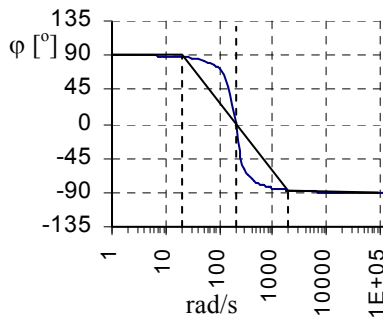
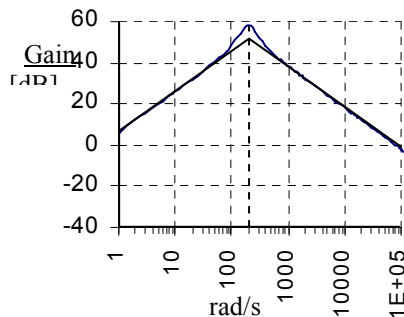
$$\Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{2\omega}{\sqrt{(1 - (\omega/200)^2)^2 + (2\zeta\omega/200)^2}}$$

Fungsi *gain* dalam dB :

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log 2 + 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{(1 - (\omega/200)^2)^2 + (2\zeta\omega/200)^2}$$

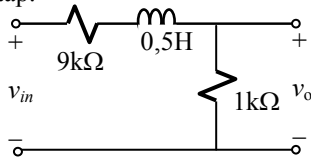
Komponen pertama konstan $20 \log 2 = -6$ dB. Komponen kedua memberikan penambahan *gain* 20 dB per dekade, mulai frekuensi rendah. Pengurangan *gain* oleh komponen ketiga -40 dB per dekade mulai pada $\omega = \omega_0$.

Fungsi fasa adalah : $\varphi(\omega) = 0^\circ + 90^\circ - 90^\circ / \text{dek} \mid_{20 < \omega < 2000}$

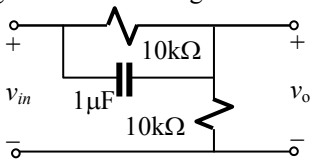


SOAL-SOAL : TANGGAPAN FREKUENSI

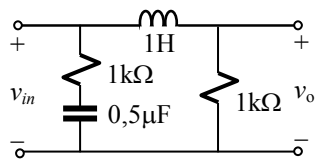
1. Jika tegangan masukan pada rangkaian berikut adalah $v_s = 5\cos 10000t$ V, tentukan amplitudo dan sudut fasa tegangan keluaran dalam keadaan mantap.



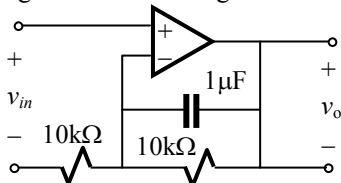
2. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



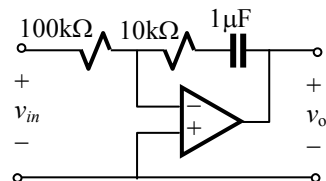
3. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



4. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



5. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



6. Ulangi soal 1 untuk rangkaian yang merupakan hubungan bertingkat dengan tahap pertamanya adalah rangkaian pada soal 4 dan tahap keduanya adalah rangkaian pada soal 1.

7. Ulangi soal 1 untuk rangkaian yang merupakan hubungan bertingkat dengan tahap pertamanya adalah rangkaian pada soal 5 dan tahap

keduanya adalah rangkaian pada soal 2.

8. Tentukanlah tanggapan frekuensi dari rangkaian pada soal 1. Tentukan *gain* tertinggi dan frekuensi *cutoff*.
9. Ulangi soal 8 untuk rangkaian soal 2.
10. Ulangi soal 8 untuk rangkaian soal 3.
11. Ulangi soal 8 untuk rangkaian soal 4.
12. Ulangi soal 8 untuk rangkaian soal 5.
13. Ulangi soal 8 untuk rangkaian soal 6.
14. Ulangi soal 8 untuk rangkaian soal 7.

15. Tentukanlah tanggapan frekuensi dari suatu rangkaian jika diketahui tanggapannya terhadap sinyal anak tangga adalah sebagai seperti di bawah ini. Tentukan *gain* tertinggi dan frekuensi *cutoff*.

$$\begin{aligned} \text{a. } g(t) &= -e^{-5000t}u(t) \\ \text{b. } g(t) &= (1 - e^{-5000t})u(t) \\ \text{c. } g(t) &= (-1 + 5e^{-5000t})u(t) \end{aligned}$$

16. Ulangi soal 15 jika diketahui :

$$\begin{aligned} \text{a. } g(t) &= (e^{-1000t} - e^{-2000t})u(t) \\ \text{b. } g(t) &= (e^{-1000t} \sin 2000t)u(t) \end{aligned}$$

17. Tentukanlah tanggapan frekuensi dari suatu rangkaian jika diketahui tanggapannya terhadap sinyal impuls adalah seperti di bawah ini. Tentukan *gain* tertinggi dan frekuensi *cutoff*.

$$\begin{aligned} \text{a. } h(t) &= -1000 e^{-1000t}u(t) \\ \text{b. } h(t) &= \delta(t) - 1000 e^{-1000t}u(t) \\ \text{c. } h(t) &= \delta(t) - 2000 e^{-1000t}u(t) \end{aligned}$$

18. Gambarkan Bode plots (pendekatan garis lurus) jika diketahui fungsi alihnya

$$T(s) = 10 \frac{(5s + 1)(0.005s + 1)}{(0.05s + 1)(0.5s + 1)}$$

19. Ulangi soal 18 untuk

$$T(s) = 50 \frac{s(0.02s + 1)}{(0.001s + 1)(0.4s + 1)}$$

BAB 10

Analisis Rangkaian Menggunakan Transformasi Fourier

Di Bab-7 kita telah mempelajari tanggapan frekuensi dari suatu rangkaian. Analisis dengan menggunakan transformasi Fourier yang akan kita pelajari berikut ini akan memperluas pemahaman kita mengenai tanggapan frekuensi, baik mengenai perilaku sinyal itu sendiri maupun rangkaiannya. Selain dari pada itu, pada rangkaian-rangkaian tertentu dijumpai keadaan dimana model sinyal dan piranti tidak dapat dilakukan melalui transformasi Laplace akan tetapi dapat dilakukan melalui transformasi Fourier. Topik-topik yang akan kita bahas meliputi : deret Fourier, transformasi Fourier, sifat-sifat transformasi Fourier, dan analisis rangkaian menggunakan transformasi Fourier. Sebaiknya pembaca melihat lagi Bab-1, sub-bab 1.3. sebelum melanjutkan pada uraian berikut ini.

10.1. Deret Fourier

Tujuan :

- Memahami deret Fourier.
- Mampu menguraikan bentuk gelombang periodik menjadi deret Fourier.
- Mampu menentukan spektrum bentuk gelombang periodik.

Koefisien Fourier

Dalam sub-bab 1.3. kita telah melihat bahwa sinyal periodik dapat diuraikan menjadi spektrum sinyal. Penguraian suatu sinyal periodik menjadi suatu spektrum sinyal tidak lain adalah pernyataan fungsi periodik kedalam deret Fourier. Jika $f(t)$ adalah fungsi periodik yang memenuhi persyaratan Dirichlet, maka $f(t)$ dapat dinyatakan sebagai deret Fourier :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)] \\ \text{atau} & \\ f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \end{aligned} \tag{10.1}$$

Persyaratan Dirichlet tidak terlalu merupakan persoalan yang serius untuk kita, karena kebanyakan bentuk-bentuk gelombang sinyal yang kita temui dalam rekayasa elektro memenuhi persyaratan ini.

Kalau (10.1) kita bandingkan dengan spektrum sinyal periodik yang kita pelajari di sub-bab 1.3. , terlihatlah bahwa a_0 pada (10.1) haruslah merupakan nilai rata-rata sinyal sedangkan suku kedua (10.1) adalah penjumlahan dari sinus dasar dan harmonisa-harmonisanya. Agar lebih jelas melihat spektrum sinyal ini, suku ke-dua (10.1) kita tuliskan sebagai

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{a_n} \sin(n\omega_0 t) \right) \right]$$

Jika $\frac{b_n}{a_n} = \tan \theta_n$ maka persamaan tersebut menjadi

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{\cos \theta_n} (\cos \theta_n \cos(n\omega_0 t) + \sin \theta_n \sin(n\omega_0 t)) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos(n\omega_0 t - \theta_n)) \right]$$

dan (10.1) menjadi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos(n\omega_0 t - \theta_n)) \right] \quad (10.2)$$

Bentuk persamaan (10.2) ini lebih jelas memperlihatkan bahwa a_0 adalah nilai rata-rata sinyal, $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ adalah amplitudo-amplitudo harmonisa dan θ_n adalah sudut fasanya. Dengan demikian maka (10.2) merupakan pernyataan matematis dari spektrum amplitudo dan spektrum fasa dari sinyal periodik.

Koefisien Fourier a_0 , a_n , dan b_n ditentukan dengan hubungan berikut.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad ; \quad n > 0 \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad ; \quad n > 0 \end{aligned} \quad (10.3)$$

Hubungan (10.3) dapat diperoleh dari (10.1). Misalkan kita mencari a_n : kita kalikan (10.1) dengan $\cos(k\omega_0 t)$ kemudian kita integrasikan antara $-T_0/2$ sampai $T_0/2$ dan kita akan memperoleh

$$\begin{aligned} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_0 \cos(k\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt \right] \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kesamaan

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \quad ; \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$$

maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt &= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a_0 \cos(k\omega_0 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos((n-k)\omega_0 t) + \cos((n+k)\omega_0 t)) dt + \frac{b_n}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\sin((n-k)\omega_0 t) + \sin((n+k)\omega_0 t)) dt \right] \end{aligned}$$

Karena integral untuk satu perioda dari fungsi sinus adalah nol, maka semua integral diruas kanan persamaan ini bernilai nol kecuali satu yaitu

$$\frac{a_n}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (\cos((n-k)\omega_0 t)) dt = \frac{a_n}{2} \quad \text{yang terjadi jika } n = k$$

oleh karena itu
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

Pada bentuk-bentuk gelombang yang sering kita temui, banyak diantara koefisien-koefisien Fourier yang bernilai nol. Keadaan ini ditentukan oleh *kesimetrisan* fungsi $f(t)$ yang kita akan lihat berikut ini.

Kesimetrisan Fungsi

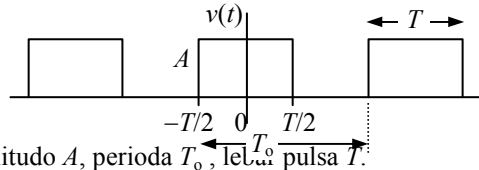
Simetri Genap. Suatu fungsi dikatakan mempunyai simetri genap jika $f(t) = f(-t)$. Salah satu contoh fungsi yang memiliki simetri genap adalah fungsi cosinus, $\cos(\omega t) = \cos(-\omega t)$. Untuk fungsi semacam ini, dari (10.1) kita dapatkan

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad \text{dan} \quad f(-t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) - b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Kalau kedua fungsi ini harus sama, maka haruslah $b_n = 0$, dan $f(t)$ menjadi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t)] \quad (10.4)$$

CONTOH 10.1 : Tentukan deret Fourier dari bentuk gelombang deretan pulsa berikut ini.



Penyelesaian :

Bentuk gelombang ini simetris genap, amplitudo A , periode T_0 , lebar pulsa T .

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} A dt = \frac{AT}{T_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{AT}{T_0} ; b_n = 0 ;$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2A}{T_0 \omega_0 n} \sin n\omega_0 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{\pi n} \left[2 \sin \left(\frac{n\pi T}{T_0} \right) \right] = \frac{2A}{\pi n} \left[\sin \left(\frac{n\pi T}{T_0} \right) \right]$$

Untuk $n = 2, 4, 6, \dots$ (genap), $a_n = 0$; a_n hanya mempunyai nilai untuk $n = 1, 3, 5, \dots$ (ganjil).

$$f(t) = \frac{AT}{T_0} + \sum_{n=1, \text{ganjil}}^{\infty} \frac{2A}{\pi n} \left[\sin \left(\frac{n\pi T}{T_0} \right) \right] \cos(n\omega_0 t) = \frac{AT}{T_0} + \sum_{n=1, \text{ganjil}}^{\infty} \frac{2A}{\pi n} (-1)^{(n-1)/2} \cos(n\omega_0 t)$$

Pemahaman :

Pada bentuk gelombang yang memiliki simetri genap, $b_n = 0$. Oleh karena itu sudut fasa harmonisa $\tan \theta_n = b_n/a_n = 0$ yang berarti $\theta_n = 0^\circ$.

Simetri Ganjil. Suatu fungsi dikatakan mempunyai simetri ganjil jika $f(t) = -f(-t)$. Contoh fungsi yang memiliki simetri ganjil adalah fungsi sinus, $\sin(\omega t) = -\sin(-\omega t)$. Untuk fungsi semacam ini, dari (10.1) kita dapatkan

$$-f(-t) = -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Kalau fungsi ini harus sama dengan $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$

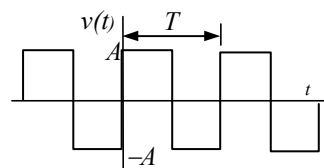
$$\text{maka haruslah} \quad a_0 = 0 \quad \text{dan} \quad a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

(10.5)

CONTOH 10.2 : Carilah deret Fourier dari bentuk gelombang persegi di samping ini.

Penyelesaian:

Bentuk gelombang ini simetris ganjil, amplitudo A , periode $T_0 = T$.



$$a_0 = 0 ; a_n = 0 ;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} A \sin(n\omega_0 t) dt + \int_{T/2}^T -A \sin(n\omega_0 t) dt \right) = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left(-\cos(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} + \cos(n\omega_0 t) \Big|_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{A}{n\pi} (-\cos(n\pi) + 1 + \cos(2n\pi) - \cos(n\pi)) = \frac{A}{n\pi} (1 + \cos(2n\pi) - 2\cos(n\pi)) \\ &= \frac{A}{n\pi} (1 + \cos^2(n\pi) - 2\cos(n\pi)) \end{aligned}$$

Untuk n ganjil $\cos(n\pi) = -1$ sedangkan untuk n genap $\cos(n\pi) = 1$. Dengan demikian maka

$$b_n = \frac{A}{n\pi} (1 + 1 + 2) = \frac{4A}{n\pi} \text{ untuk } n \text{ ganjil ; } b_n = \frac{A}{n\pi} (1 + 1 - 2) = 0 \text{ untuk } n \text{ genap}$$

$$\Rightarrow v(t) = \sum_{n=1, \text{ ganjil}}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin(n\omega_0 t)$$

Pemahaman:

Pada bentuk gelombang yang mempunyai simetri ganjil, $a_n = 0$. Oleh karena itu sudut fasa harmonisa $\tan\theta_n = b_n/a_n = \infty$ yang berarti $\theta_n = 90^\circ$.

Simetri Setengah Gelombang. Suatu fungsi dikatakan mempunyai simetri setengah gelombang jika $f(t) = -f(t - T_0/2)$. Fungsi dengan sifat ini tidak berubah bentuk dan nilainya jika diinversi kemudian digeser setengah perioda. Fungsi sinus(ωt) misalnya, jika kita kita inversikan kemudian kita geser sebesar π akan kembali menjadi sinus(ωt). Demikian pula halnya dengan fungsi-fungsi cosinus, gelombang persegi, dan gelombang segitiga.

$$\begin{aligned} -f(t - T_0/2) &= -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n \cos(n\omega_0(t - \pi)) - b_n \sin(n\omega_0(t - \pi))] \\ &= -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n a_n \cos(n\omega_0 t) - (-1)^n b_n \sin(n\omega_0 t)] \end{aligned}$$

$$\text{Kalau fungsi ini harus sama dengan } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

maka haruslah $a_0 = 0$ dan n harus ganjil. Hal ini berarti bahwa fungsi ini hanya mempunyai harmonisa ganjil saja.

Deret Fourier Bentuk Eksponensial

Deret Fourier dalam bentuk seperti (10.1) sering disebut sebagai bentuk sinus-cosinus. Bentuk ini dapat kita ubah kedalam cosinus (bentuk sinyal standar) seperti (10.2). Sekarang bentuk (10.2) akan kita ubah ke dalam bentuk eksponensial dengan menggunakan hubungan

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \text{ sehingga (10.2) akan menjadi}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\cos(n\omega_0 t - \theta_n)) \right] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \frac{e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t - \theta_n)}}{2} \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{-j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right] \end{aligned} \quad (10.6)$$

Suku ketiga (10.6) adalah penjumlahan dari $n = 1$ sampai $n = \infty$. Penjumlahan ini kita ubah mulai dari $n = -1$ sampai $n = -\infty$, dengan penyesuaian a_n menjadi a_{-n} , b_n menjadi b_{-n} , dan θ_n menjadi θ_{-n} . Menurut (10.3) perubahan ini berakibat

$$\begin{aligned}
a_{-n} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(-n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = a_n \\
b_{-n} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(-n\omega_0 t) dt = -\frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = -b_n \\
\tan \theta_{-n} &= \frac{b_{-n}}{a_{-n}} = \frac{-b_n}{a_n} \Rightarrow \theta_{-n} = -\theta_n
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Dengan (10.7) ini maka (10.6) menjadi

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right] + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{j(n\omega_0 t - \theta_n)} \right] \tag{10.8}$$

Suku pertama dari (10.8) merupakan penjumlahan yang kita mulai dari $n = 0$ untuk memasukkan a_0 sebagai salah satu suku penjumlahan ini. Dengan cara ini maka (10.8) dapat ditulis menjadi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{-j\theta_n} \right) e^{j(n\omega_0 t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j(n\omega_0 t)} \tag{10.9}$$

Ini adalah bentuk eksponensial deret Fourier, dengan c_n adalah koefisien Fourier yang mungkin

berupa besaran kompleks.
$$c_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} e^{-j\theta} = \frac{a_n - jb_n}{2} \tag{10.10}$$

$$|c_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \quad \text{dan} \quad \angle c_n = \theta_n \quad \text{dengan} \quad \theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) \quad \text{jika} \quad a_n < 0$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \quad \text{jika} \quad a_n > 0 \tag{10.11}$$

Jika a_n dan b_n pada (10.3) kita masukkan ke (10.10) akan kita dapatkan

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{10.12}$$

dan dengan (10.12) ini maka (10.9) menjadi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j(n\omega_0 t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{j(n\omega_0 t)} \tag{10.13}$$

Persamaan (10.11) menunjukkan bahwa $2|c_n|$ adalah amplitudo dari harmonisa ke- n dan sudut fasa harmonisa ke- n ini adalah $\angle c_n$. Persamaan (10.10) ataupun (10.12) dapat kita pandang sebagai pengubahan sinyal periodik $f(t)$ menjadi suatu spektrum yang terdiri dari spektrum amplitudo dan spektrum sudut fasa seperti telah kita kenal di Bab-1. Persamaan (10.9) ataupun (10.13) memberikan $f(t)$ apabila komposisi harmonisanya c_n diketahui. Persamaan (10.12) menjadi cikal bakal transformasi Fourier, sedangkan persamaan (10.13) adalah transformasi baliknya.

CONTOH 10.3 : Carilah koefisien Fourier c_n dari fungsi pada contoh 10.1.

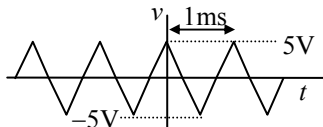
Penyelesaian :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right) \Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{n\omega_0 T_0} \left(\frac{e^{jn\omega_0 T/2} - e^{-jn\omega_0 T/2}}{j} \right) = \frac{2A}{n\omega_0 T_0} \sin(n\omega_0 T/2)$$

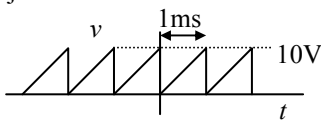
SOAL-SOAL : DERET FOURIER

Deret Fourier Bentuk Sinus-Cosinus.

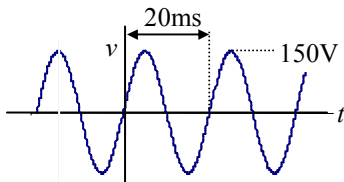
1. Tentukan deret Fourier dari gelombang segitiga berikut ini. Gambarkan spektrum amplitudo dan sudut fasa dari 5 komponen pertama.



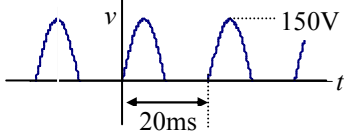
2. Ulangi soal 1 untuk gelombang gigi gergaji berikut.



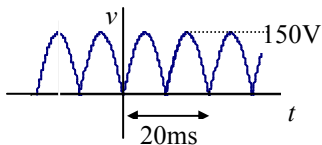
3. Ulangi soal 1 untuk gelombang sinus berikut.



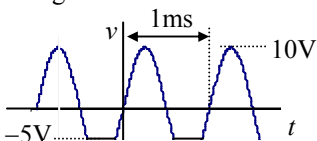
4. Ulangi soal 1 untuk penyearahan setengah gelombang sinus berikut.



5. Ulangi soal 1 untuk penyearahan gelombang penuh sinus berikut.



6. Ulangi soal 1 untuk gelombang sinus terpotong berikut.



7. Siklus pertama dari deretan pulsa dinyatakan sebagai

$$v(t) = 2u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) - u(t-3)$$

Gambarkan siklus pertama tersebut dan carilah koefisien Fourier-nya serta gambarkan spektrum amplitudo dan sudut fasanya.

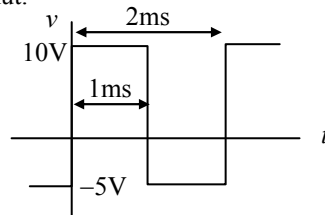
8. Suatu gelombang komposit dibentuk dengan menjumlahkan tegangan searah 10V dengan gelombang persegi yang amplitudo puncak ke puncak-nya 10 V. Carilah deret Fouriernya dan gambarkan spektrum amplitudonya.

Deret Fourier Bentuk Eksponensial.

9. Carilah koefisien kompleks deret Fourier bentuk gelombang pada soal 1.

10. Ulangi soal 7 untuk bentuk gelombang pada soal 2.

11. Ulangi soal 7 untuk bentuk gelombang berikut.



12. Ulangi soal 7 untuk bentuk gelombang pada soal 3.

13. Ulangi soal 7 untuk bentuk gelombang pada soal 4.

14. Ulangi soal 7 untuk bentuk gelombang pada soal 5.

15. Ulangi soal 7 untuk bentuk gelombang pada soal 6.

10.2. Transformasi Fourier dan Sifat-Sifatnya

Tujuan:

- Memahami transformasi Fourier.
- Mampu mencari transformasi Fourier dari suatu fungsi t .
- Mampu mencari transformasi balik dari suatu transformasi Fourier.

Transformasi Fourier

Deret Fourier, yang koefisiennya diberikan oleh (10.12) hanya berlaku untuk sinyal periodik. Sinyal-sinyal aperiodik seperti sinyal eksponensial dan sinyal anak tangga tidak dapat direpresentasikan dengan deret Fourier. Untuk menangani sinyal-sinyal demikian ini kita memerlukan transformasi Fourier dan konsep spektrum kontinyu. Sinyal aperiodik dipandang sebagai sinyal periodik dengan perioda tak-hingga.

Jika diingat bahwa $\omega_0 = 2\pi/T_0$, maka (10.13) menjadi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right) \omega_0 e^{jn\omega_0 t} \quad (10.14)$$

Kita lihat sekarang apa yang terjadi jika perioda T_0 diperbesar. Karena $\omega_0 = 2\pi/T_0$ maka jika T_0 makin besar, ω_0 akan makin kecil. Beda frekuensi antara dua harmonisa yang berturutan,

$$\text{yaitu} \quad \Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

juga akan makin kecil yang berarti untuk suatu selang frekuensi tertentu jumlah harmonisa semakin banyak. Oleh karena itu jika perioda sinyal T_0 diperbesar menuju ∞ maka spektrum sinyal menjadi spektrum kontinyu, $\Delta\omega$ menjadi $d\omega$ (pertambahan frekuensi *infinitesimal*), dan $n\omega_0$ menjadi peubah kontinyu ω . Penjumlahan pada (10.14) menjadi integral. Jadi dengan membuat $T_0 \rightarrow \infty$ maka (10.14) menjadi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (10.15)$$

dengan $F(\omega)$ merupakan sebuah fungsi frekuensi yang baru, sedemikian rupa sehingga

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (10.16)$$

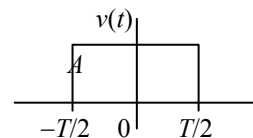
dan $F(\omega)$ inilah transformasi Fourier dari $f(t)$, yang ditulis dengan notasi

$$\mathbf{F}[f(t)] = F(\omega)$$

Proses transformasi balik dapat kita lakukan melalui persamaan (10.15).

$$f(t) = \mathbf{F}^{-1}(\omega)$$

CONTOH 10.4 : Carilah transformasi Fourier dari bentuk gelombang pulsa di samping ini.



Penyelesaian :

Bentuk gelombang ini adalah aperiodik yang hanya mempunyai nilai antara $-T/2$ dan $+T/2$, sedangkan untuk t yang lain nilainya nol. Oleh karena itu integrasi yang diminta oleh (10.16) cukup dilakukan antara $-T/2$ dan $+T/2$ saja.

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{\omega/2} \left[\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j2} \right]$$

$$= AT \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

Kita bandingkan transformasi Fourier (10.16) dan koefisien Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{dan} \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_n t} dt \quad (10.17)$$

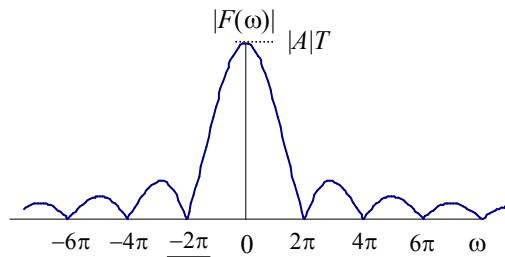
Koefisien Fourier c_n merupakan spektrum sinyal periodik dengan perioda T_0 yang terdiri dari spektrum amplitudo $|c_n|$ dan spektrum sudut fasa $\angle c_n$; kedua spektrum ini berbentuk spektrum garis. Transformasi Fourier $F(\omega)$ diperoleh dengan mengembangkan perioda sinyal menjadi tak-hingga guna mencakup sinyal aperiodik yang kita anggap sebagai sinyal periodik yang periodenya tak-hingga. Faktor $1/T_0$ pada c_n dikeluarkan untuk memperoleh $F(\omega)$ yang merupakan spektrum kontinu amplitudo $|F(j\omega)|$ dan sudut fasa $\angle F(\omega)$.

CONTOH 10.5 : Gambarkan spektrum amplitudo dari sinyal pada contoh 10.4.

Penyelesaian :

Spektrum amplitudo sinyal aperiodik ini merupakan spektrum kontinu $|F(j\omega)|$.

$$|F(\omega)| = \left| AT \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$$



Pemahaman:

Sinyal ini mempunyai simetri genap. $T ; T ; T$ rmonisa T adalah T sehingga spektrum sudut fasa tidak digambarkan. Perhatikan pula bahwa $|F(\omega)|$ mempunyai spektrum di dua sisi, ω positif maupun negatif, nilai nol terjadi jika $\sin(\omega T/2)=0$ yaitu pada $\omega = \pm 2k\pi/T$ ($k = 1,2,3,\dots$); nilai maksimum terjadi pada $\omega = 0$, yaitu pada waktu nilai $\sin(\omega T/2)/(\omega T/2) = 1$.

CONTOH 10.6 : Carilah transformasi Fourier dari $f(t) = [A e^{-\alpha t}] u(t)$ dan gambarkan spektrum amplitudo dan fasanya.

Penyelesaian :

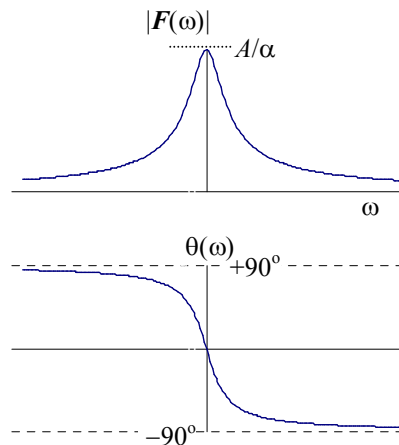
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\alpha t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} A e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$$

$$= -A \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{\alpha + j\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + j\omega} \quad \text{untuk} \quad \alpha > 0$$

$$\Rightarrow |F(\omega)| = \frac{|A|}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\Rightarrow \theta(\omega) = \angle F(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\alpha}$$

Pemahaman: Untuk $\alpha < 0$, tidak ada transformasi Fourier-nya karena integrasi menjadi tidak konvergen.



Transformas Balik

Pada transformasi Fourier transformasi balik sering dilakukan dengan mengaplikasikan relasi formalnya yaitu persamaan (10.15). Hal ini dapat dimengerti karena aplikasi formula tersebut relatif mudah dilakukan

CONTOH 10.7 : Carilah $f(t)$ dari $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0^-}^{0^+} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{\alpha^-}^{\alpha^+} \delta(\omega)(1) d\omega = 1 \end{aligned}$$

Pemahaman :

Fungsi $2\pi\delta(\omega)$ adalah fungsi di kawasan frekuensi yang hanya mempunyai nilai di $\omega=0$ sebesar 2π . Oleh karena itu $e^{j\omega t}$ juga hanya mempunyai nilai di $\omega=0$ sebesar $e^{j0t}=1$. Karena fungsi hanya mempunyai nilai di $\omega=0$ maka integral dari $-\infty$ sampai $+\infty$ cukup dilakukan dari 0^- sampai 0^+ , yaitu sedikit di bawah dan di atas $\omega=0$.

Contoh ini menunjukkan bahwa transformasi Fourier dari sinyal searah beramplitudo 1 adalah $2\pi\delta(\omega)$.

CONTOH 10.8 : Carilah $f(t)$ dari $F(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \alpha)$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \alpha) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha^-}^{\alpha^+} 2\pi\delta(\omega - \alpha) e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j\alpha t} \int_{\alpha^-}^{\alpha^+} \delta(\omega - \alpha) d\omega = e^{j\alpha t} \end{aligned}$$

Pemahaman :

Fungsi $2\pi\delta(\omega - \alpha)$ adalah fungsi di kawasan frekuensi yang hanya mempunyai nilai di $\omega=\alpha$ sebesar 2π . Oleh karena itu $e^{j\omega t}$ juga hanya mempunyai nilai di $\omega=\alpha$ sebesar $e^{j\alpha t}$. Karena fungsi hanya mempunyai nilai di $\omega=\alpha$ maka integral dari $-\infty$ sampai $+\infty$ cukup dilakukan dari α^- sampai α^+ , yaitu sedikit di bawah dan di atas $\omega=\alpha$.

CONTOH 10.9 : Carilah $f(t)$ dari $F(\omega) = \frac{\pi A}{\alpha} [u(\omega + \alpha) - u(\omega - \alpha)]$

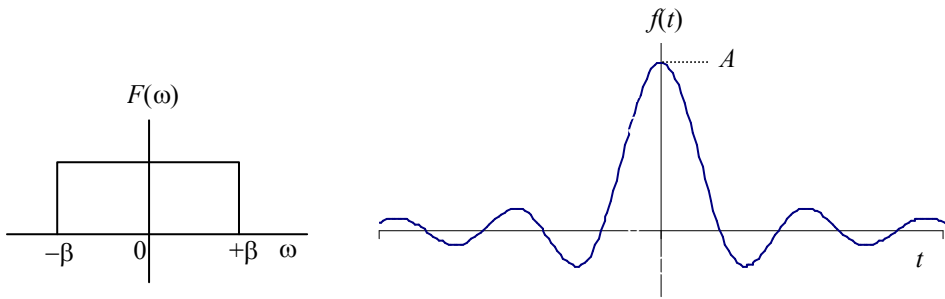
Penyelesaian :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi A}{\alpha} [u(\omega + \alpha) - u(\omega - \alpha)] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi A}{\alpha} [1] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{A}{2\alpha} \frac{e^{j\omega t}}{jt} \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{A}{2\alpha} \frac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{jt} = \frac{A}{\alpha t} \frac{e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t}}{j2} = A \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha t} \end{aligned}$$

Pemahaman:

Dalam soal ini $F(\omega)$ mempunyai nilai pada selang $-\alpha < \omega < +\alpha$ oleh karena itu $e^{j\omega t}$ juga mempunyai nilai pada selang frekuensi ini juga; dengan demikian integrasi cukup dilakukan antara $-\alpha$ dan $+\alpha$.

Hasil transformasi balik $f(t)$ dinyatakan dalam bentuk $\sin(x)/x$ yang bernilai 1 jika $x \rightarrow 0$ dan bernilai 0 jika $x \rightarrow \infty$. Jadi $f(t)$ mencapai nilai maksimum pada $t = 0$ dan menuju nol jika t menuju ∞ baik ke arah positif maupun negatif. Kurva $F(\omega)$ dan $f(t)$ digambarkan di halaman berikut.



Dari Transformasi Laplace ke Transformasi Fourier

Untuk beberapa sinyal, terdapat hubungan sederhana antara transformasi Fourier dan transformasi Laplace. Sebagaimana kita ketahui, transformasi Laplace didefinisikan melalui (8.1) sebagai

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (10.18)$$

dengan $s = \sigma + j\omega$ adalah peubah frekuensi kompleks. Batas bawah integrasi adalah nol, artinya fungsi $f(t)$ haruslah kausal. Jika $f(t)$ memenuhi persyaratan Dirichlet maka integrasi tersebut di atas akan tetap konvergen jika $\sigma = 0$, dan formulasi transformasi Laplace ini menjadi

$$\mathbf{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (10.19)$$

Sementara itu untuk sinyal kausal integrasi transformasi Fourier cukup dilakukan dari nol, sehingga transformasi Fourier untuk sinyal kausal menjadi

$$\mathbf{F}(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (10.20)$$

Bentuk (10.20) sama benar dengan (10.19), sehingga kita dapat simpulkan bahwa

$$\boxed{\text{untuk sinyal } f(t) \text{ kausal dan dapat di-integrasi berlaku : } \mathbf{F}(\omega) = \mathbf{F}(s)|_{\sigma=0}} \quad (10.21)$$

Persyaratan “dapat di-integrasi” pada hubungan (10.21) dapat dipenuhi jika $f(t)$ mempunyai durasi yang terbatas atau cepat menurun menuju nol sehingga integrasi $|f(t)|$ dari $t=0$ ke $t=\infty$ konvergen. Ini berarti bahwa pole-pole dari $\mathbf{F}(s)$ harus berada di sebelah kiri sumbu imajiner. Jika persyaratan-persyaratan tersebut di atas dipenuhi, pencarian transformasi balik dari $\mathbf{F}(\omega)$ dapat pula dilakukan dengan metoda transformasi balik Laplace.

CONTOH 10.10 : Dengan menggunakan metoda transformasi Laplace carilah transformasi Fourier dari fungsi-fungsi berikut (anggap $\alpha, \beta > 0$).

a). $f_1(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$; b). $f_2(t) = \delta(t)$; c). $f_3(t) = A [e^{-\alpha t} \sin \beta t] u(t)$

Penyelesaian:

a). $f_1(t) = A e^{-\alpha t} u(t) \rightarrow$ fungsi kausal dan dapat di-integrasi

$$\rightarrow F(s) = \frac{A}{s + \alpha} \rightarrow \text{pole } p_1 = -\alpha \text{ (di kiri sumbu img)} \rightarrow \mathbf{F}(\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

b). $f_2(t) = \delta(t) \rightarrow$ fungsi kausal dan dapat di-integrasi $\rightarrow \mathbf{F}(s) = 1 \rightarrow \mathbf{F}(\omega) = 1$

c). $f_3(t) = A [e^{-\alpha t} \sin \beta t] u(t) \rightarrow$ fungsi kausal dan dapat di-integrasi $\rightarrow \mathbf{F}(s) = \frac{A}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$

$$\rightarrow \text{pole } p = -\alpha \pm j\beta \text{ (di kiri sumbu img)} \rightarrow \mathbf{F}(\omega) = \frac{A}{(j\omega + \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{a}{\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}$$

CONTOH 10.11 : Carilah $f(t)$ dari $F(\omega) = \frac{10}{(j\omega + 3)(j\omega + 4)}$

Penyelesaian :

Jika kita ganti $j\omega$ dengan s kita dapatkan

$$F(s) = \frac{10}{(s+3)(s+4)}$$

Pole dari fungsi ini adalah $p_1 = -3$ dan $p_2 = -4$, keduanya di sebelah kiri sumbu imajiner.

$$F(s) = \frac{10}{(s+3)(s+4)} = \frac{k_1}{s+3} + \frac{k_2}{s+4} \rightarrow k_1 = \frac{10}{s+4} \Big|_{s=-3} = 10 ; k_2 = \frac{10}{s+3} \Big|_{s=-4} = -10$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{10}{s+3} - \frac{10}{s+4}$$

Transformasi balik dari $F(\omega)$ adalah : $f(t) = [10 e^{-3t} - 10 e^{-4t}]u(t)$

Sifat-Sifat Transformasi Fourier

Kelinieran. Seperti halnya transformasi Laplace, sifat utama transformasi Fourier adalah *kelinieran*.

$$\begin{aligned} \text{Jika : } F[f_1(t)] &= F_1(\omega) \text{ dan } F[f_2(t)] = F_2(\omega) \\ \text{maka : } F[Af_1(t) + Bf_2(t)] &= AF_1(\omega) + BF_2(\omega) \end{aligned} \quad (10.22)$$

CONTOH 10.12 : Carilah transformasi Fourier dari $v(t) = \cos\beta t$.

Penyelesaian:

Fungsi ini adalah non-kausal; oleh karena itu metoda transformasi Laplace tidak dapat di terapkan. Fungsi cosinus ini kita tuliskan dalam bentuk eksponensial.

$$F[\cos\beta t] = F\left[\frac{e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}}{2}\right] = \frac{1}{2}F[e^{j\beta t}] + \frac{1}{2}F[e^{-j\beta t}]$$

Dari contoh 10.8. kita ketahui bahwa $F[e^{j\omega t}] = 2\pi\delta(\omega - \beta)$

Jadi $F[\cos\beta t] = \pi\delta(\omega - \beta) + \pi\delta(\omega + \beta)$

Diferensiasi. Sifat ini dinyatakan sebagai berikut

$$F\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega) \quad (10.23)$$

Persamaan (10.15) menyatakan

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \rightarrow \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} (F(\omega) e^{j\omega t} d\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \rightarrow F\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= j\omega F(\omega) \end{aligned}$$

Integrasi. Sifat ini dinyatakan sebagai berikut.

$$F\left[\int_{-\infty}^t f(x)dx\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (10.24)$$

Suku kedua ruas kanan (10.24) merupakan komponen searah jika sekiranya ada. Faktor $F(0)$ terkait dengan $f(t)$; jika ω diganti dengan nol akan kita dapatkan

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

CONTOH 10.13 : Carilah transformasi Fourier dari $f(t) = Au(t)$.

Penyelesaian:

Metoda transformasi Laplace tidak dapat diterapkan untuk fungsi anak tangga. Dari contoh (10.10.b) kita dapatkan bahwa $F[\delta(t)] = 1$. Karena fungsi anak tangga adalah integral dari fungsi impuls, kita dapat menerapkan hubungan (10.24) tersebut di atas.

$$F[u(t)] = F\int_{-\infty}^t \delta(x)dx = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Pembalikan. Pembalikan suatu fungsi $f(t)$ adalah mengganti t dengan $-t$. Jika kita membalikkan suatu fungsi, maka urutan kejadian dalam fungsi yang baru berlawanan dengan urutan kejadian pada fungsi semula. Transformasi Fourier dari fungsi yang dibalikkan sama dengan kebalikan dari transformasi Fourier fungsi semula. Secara formal hal ini dapat dituliskan sebagai

$$\text{Jika } F[f(t)] = F(\omega) \text{ maka } F[f(-t)] = F(-\omega) \quad (10.25)$$

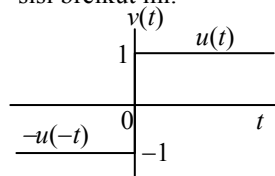
Menurut (10.16)

$$F[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt \quad ; \quad \text{Misalkan } -t = \tau$$

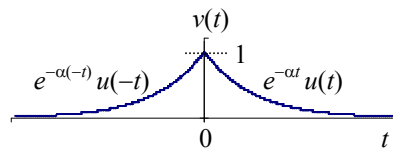
$$\rightarrow F[f(-t)] = F[f(\tau)] = -\int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F(-\omega)$$

Sifat pembalikan ini dapat kita manfaatkan untuk mencari transformasi Fourier dari fungsi signum dan fungsi eksponensial dua sisi.

CONTOH 10.14 : Carilah transformasi Fourier dari fungsi signum dan eksponensial dua sisi berikut ini.



$$\text{signum : } \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$



$$\text{eksponensial dua sisi : } e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t} u(t) + e^{-\alpha(-t)} u(-t)$$

Penyelesaian :

$$\text{Contoh 10.13. memberikan } F[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \text{ maka } F[\text{sgn}(t)] = F[u(t) - u(-t)] = \frac{2}{j\omega}$$

$$\text{Contoh 10.10.a memberikan } F[e^{-\alpha t} u(t)] = \frac{1}{\alpha + j\omega} \text{ maka}$$

$$F[e^{-\alpha|t|}] = F[e^{-\alpha t} u(t) + e^{-\alpha(-t)} u(-t)] = \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha + j(-\omega)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Komponen Nyata dan Imajiner dari $F(\omega)$. Pada umumnya transformasi Fourier dari $f(t)$, $F(\omega)$, berupa fungsi kompleks yang dapat kita tuliskan sebagai

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \\ &= A(\omega) + jB(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \end{aligned}$$

dengan
$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad ; \quad B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (10.26)$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad ; \quad \theta(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right) \quad (10.27)$$

Jika $f(t)$ fungsi nyata, maka dari (10.26) dan (10.27) dapat kita simpulkan bahwa

1. Komponen riil dari $F(\omega)$ merupakan fungsi genap, karena $A(-\omega) = A(\omega)$.
2. Komponen imajiner $F(\omega)$ merupakan fungsi ganjil, karena $B(-\omega) = -B(\omega)$.
3. $|F(\omega)|$ merupakan fungsi genap, karena $|F(-\omega)| = |F(\omega)|$.
4. Sudut fasa $\theta(\omega)$ merupakan fungsi ganjil, karena $\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$.
5. Kesimpulan (1) dan (2) mengakibatkan : kebalikan $F(\omega)$ adalah konjugat-nya, $F(-\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = F^*(\omega)$.
6. Kesimpulan (5) mengakibatkan : $F(\omega) \times F(-\omega) = F(\omega) \times F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$.
7. Jika $f(t)$ fungsi genap, maka $B(\omega) = 0$, yang berarti $F(\omega)$ riil.
8. Jika $f(t)$ fungsi ganjil, maka $A(\omega) = 0$, yang berarti $F(\omega)$ imajiner.

Kesimetrisan. Sifat ini dinyatakan secara umum sebagai berikut.

$$\text{Jika } \mathbf{F}[f(t)] = F(\omega) \text{ maka } \mathbf{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (10.28)$$

Sifat ini dapat diturunkan dari formulasi transformasi balik.

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \rightarrow 2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$\text{Jika } t \text{ dan } \omega \text{ dipertukarkan maka: } 2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} d\omega$$

Pergeseran Waktu. Sifat ini dinyatakan sebagai berikut.

$$\text{Jika } \mathbf{F}[f(t)] = F(\omega) \text{ maka } \mathbf{F}[f(t-T)] = e^{-j\omega T} F(\omega) \quad (10.29)$$

Sifat ini mudah diturunkan dari definisinya.

Pergeseran Frekuensi. Sifat ini dinyatakan sebagai berikut.

$$\text{Jika } \mathbf{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) \text{ maka } \mathbf{F}^{-1}[F(\omega-\beta)] = e^{j\beta t} f(t) \quad (10.30)$$

Sifat ini juga mudah diturunkan dari definisinya.

Penskalaan. Sifat ini dinyatakan sebagai berikut.

$$\text{Jika } \mathbf{F}[f(t)] = F(\omega) \text{ maka } \mathbf{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (10.31)$$

Ringkasan

Tabel 10.1. berikut ini memuat pasangan transformasi Fourier, sedangkan sifat-sifat transformasi Fourier diringkaskan dalam Tabel 10.2.

Tabel 10.1. Pasangan transformasi Fourier.

Sinyal	Bentuk gelombang $f(t)$	Transformasi Fourier $F(\omega)$
Impuls	$\delta(t)$	1
Sinyal searah (konstan)	1	$2\pi \delta(\omega)$
Fungsi anak tangga	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
Signum	$sgn(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
Exponensial (kausal)	$(e^{-\alpha t})u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
Ekspensial (dua sisi)	$e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
Ekspensial kompleks	$e^{j\beta t}$	$2\pi \delta(\omega - \beta)$
Kosinus	$\cos\beta t$	$\pi [\delta(\omega - \beta) + \delta(\omega + \beta)]$
Sinus	$\sin\beta t$	$-j\pi [\delta(\omega - \beta) - \delta(\omega + \beta)]$

Tabel 10.2. Sifat-sifat transformasi Fourier.

Sifat	Kawasan Waktu	Kawasan Frekuensi
Sinyal	$f(t)$	$F(\omega)$
Kelinieran	$A f_1(t) + B f_2(t)$	$A F_1(\omega) + B F_2(\omega)$
Diferensiasi	$\frac{df(t)}{dt}$	$j\omega F(\omega)$
Integrasi	$\int_{-\infty}^t f(x) dx$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$
Kebalikan	$f(-t)$	$F(-\omega)$
Simetri	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Pergeseran waktu	$f(t - T)$	$e^{-j\omega T} F(\omega)$
Pergeseran frekuensi	$e^{j\beta t} f(t)$	$F(\omega - \beta)$
Penskalaan	$ a f(at)$	$F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

SOAL-SOAL : TRANSFORMASI FOURIER

1. Tentukan transformasi Fourier dari bentuk gelombang berikut.

$$v(t) = \frac{At}{T} [u(t) - u(t - T)]$$

2. Ulangi soal 1 untuk bentuk gelombang berikut.

$$v(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \left[u\left(t + \frac{T}{4}\right) - u\left(t - \frac{T}{4}\right) \right]$$

3. Ulangi soal 1 untuk bentuk gelombang berikut.

$$v(t) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

4. Ulangi soal 1 untuk bentuk gelombang berikut.

$$v(t) = 2 + 2u(t)$$

5. Ulangi soal 1 untuk bentuk gelombang berikut.

$$v(t) = 2 \operatorname{sgn}(-t) + 6u(t)$$

6. Ulangi soal 1 untuk bentuk gelombang berikut.

$$v(t) = [2e^{-2t}u(t) + 2 \operatorname{sgn}(t)]\delta(t + 2)$$

7. Ulangi soal 1 untuk bentuk gelombang berikut.

$$v(t) = 2e^{-2(t-2)}u(t-2) + 2e^{-2(t+2)}u(t+2)$$

8. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\omega|}$$

9. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{\pi A}{\beta} [u(\omega + \beta) - u(\omega - \beta)]$$

10. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{1000}{(j\omega + 20)(j\omega + 50)}$$

11. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega + 20)(j\omega + 50)}$$

12. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{-\omega^2}{(j\omega + 20)(j\omega + 50)}$$

13. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{1000}{j\omega(j\omega + 20)(j\omega + 50)}$$

14. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{j500\omega}{(-j\omega + 50)(j\omega + 50)}$$

15. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{j5\omega}{(j\omega + 50)(j\omega + 50)}$$

16. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{5000}{j\omega(-j\omega + 50)(j\omega + 50)}$$

17. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{5000\delta(\omega)}{-\omega^2 + j200\omega + 2500}$$

18. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = 4\pi \delta(\omega) + e^{-2\omega}$$

19. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{4\pi \delta(\omega - 4)e^{-j2\omega}}{j\omega}$$

20. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = \frac{4\pi \delta(\omega) + 4(j\omega + 1)}{j\omega(2 + j\omega)}$$

21. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = 4\pi \delta(\omega) + e^{-2\omega}$$

22. Tentukan transformasi balik dari

$$F(\omega) = 4\pi \delta(\omega) + 4\pi \delta(\omega - 2) + 4\pi \delta(\omega + 2)$$

10.3. Analisis Rangkaian Menggunakan Transformasi Fourier

Tujuan :

- Mampu melakukan analisis rangkaian menggunakan transformasi Fourier.
- Mampu mencari tanggapan frekuensi.

Kelinieran dari transformasi Fourier menjamin berlakunya relasi hukum Kirchhoff di kawasan frekuensi. Relasi HTK misalnya, jika ditransformasikan akan langsung memberikan hubungan di kawasan frekuensi yang sama bentuknya dengan relasinya di kawasan waktu.

$$\text{Misalkan relasi HTK} \quad : v_1(t) + v_2(t) - v_3(t) = 0$$

$$\text{jika ditransformasikan} \quad : V_1(\omega) + V_2(\omega) - V_3(\omega) = 0$$

Hal inipun berlaku untuk KCL. Dengan demikian maka transformasi Fourier dari suatu sinyal akan mengubah pernyataan sinyal di kawasan waktu menjadi spektrum sinyal di kawasan frekuensi tanpa mengubah bentuk relasi hukum Kirchhoff, yang merupakan salah satu persyaratan rangkaian yang harus dipenuhi dalam analisis rangkaian listrik.

Persyaratan rangkaian yang lain adalah persyaratan elemen, yang dapat kita peroleh melalui transformasi hubungan tegangan-arus (karakteristik $i-v$ elemen). Dengan memanfaatkan sifat diferensiasi dari transformasi Fourier, kita akan memperoleh relasi di kawasan frekuensi untuk resistor, induktor, dan kapasitor sebagai berikut.

$$\text{Resistor} \quad : V_R(\omega) = RI_R(\omega)$$

$$\text{Induktor} \quad : V_L(\omega) = j\omega LI_L(\omega)$$

$$\text{Kapasitor} \quad : I_C(\omega) = j\omega CV_C(\omega)$$

Relasi diatas mirip dengan relasi hukum Ohm. Dari relasi di atas kita dapatkan impedansi elemen, yaitu perbandingan antara tegangan dan arus di kawasan frekuensi

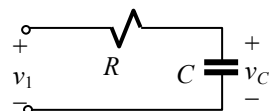
$$Z_R = R \quad ; \quad Z_L = j\omega L \quad ; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (10.32)$$

Bentuk-bentuk (10.32) telah kita kenal sebagai impedansi arus bolak-balik.

Dari uraian di atas dapat kita simpulkan bahwa transformasi Fourier suatu sinyal akan tetap memberikan relasi hukum Kirchhoff di kawasan frekuensi dan hubungan tegangan-arus elemen menjadi mirip dengan relasi hukum Ohm jika elemen dinyatakan dalam impedansinya. Dengan dasar ini maka kita dapat melakukan transformasi rangkaian, yaitu menyatakan elemen-elemen rangkaian dalam impedansinya dan menyatakan sinyal dalam transformasi Fouriernya. Pada rangkaian yang ditransformasikan ini kita dapat menerapkan kaidah-kaidah rangkaian dan metoda-metoda analisis rangkaian. Tanggapan rangkaian di kawasan waktu dapat diperoleh dengan melakukan transformasi balik.

Uraian di atas paralel dengan uraian mengenai transformasi Laplace, kecuali satu hal yaitu bahwa kita tidak menyebut-nyebut tentang *kondisi-awal*. Hal ini dapat difahami karena batas integrasi dalam mencari transformasi Fourier adalah dari $-\infty$ sampai $+\infty$. Hal ini berbeda dengan transformasi Laplace yang batas integrasinya dari 0 ke $+\infty$. Jadi analisis rangkaian dengan menggunakan transformasi Fourier mengikut sertakan seluruh kejadian termasuk kejadian untuk $t < 0$. Oleh karena itu cara analisis dengan transformasi Fourier tidak dapat digunakan jika kejadian pada $t < 0$ dinyatakan dalam bentuk kondisi awal. Pada dasarnya transformasi Fourier diaplikasikan untuk sinyal-sinyal non-kausal sehingga metoda Fourier memberikan tanggapan rangkaian yang berlaku untuk $t = -\infty$ sampai $t = +\infty$.

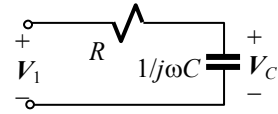
CONTOH 10.14 : Pada rangkaian seri antara resistor R dan kapasitor C diterapkan tegangan v_1 . Tentukan tanggapan rangkaian v_C .



Penyelesaian:

Persoalan rangkaian orde pertama ini telah pernah kita tangani pada analisis transien di kawasan waktu maupun kawasan s (menggunakan transformasi Laplace). Di sini kita akan menggunakan transformasi Fourier.

Transformasi Fourier dari rangkaian ini adalah : tegangan masukan $V_1(\omega)$, impedansi resistor R terhubung seri dengan impedansi kapasitor $\frac{1}{j\omega C}$. Dengan kaidah



pembagi tegangan kita dapatkan tegangan pada kapasitor adalah

$$V_C(\omega) = \frac{Z_C}{R + Z_C} V_1(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + (1/j\omega C)} V_1(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + (1/RC)} V_1(\omega)$$

Tegangan kapasitor tergantung dari $V_1(\omega)$. Misalkan tegangan masukan $v_1(t)$ berupa sinyal anak tangga dengan amplitudo 1. Dari tabel 10.1, tegangan ini di kawasan frekuensi adalah $V_1(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$. Dengan demikian maka

$$V_C(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + (1/RC)} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right) = \frac{1/RC}{j\omega(j\omega + 1/RC)} + \frac{\pi \delta(\omega)/RC}{(j\omega + 1/RC)}$$

Fungsi impuls $\delta(\omega)$ hanya mempunyai nilai untuk $\omega = 0$, sehingga pada umumnya $F(\omega)\delta(\omega) = F(0)\delta(\omega)$. Dengan demikian suku kedua ruas kanan persamaan di atas $\frac{\pi \delta(\omega)/RC}{(j\omega + 1/RC)} = \pi \delta(\omega)$. Suku pertama dapat diuraikan, dan persamaan menjadi

$$V_C(\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega + 1/RC} + \pi \delta(\omega)$$

Dengan menggunakan Tabel 10.1, kita dapat mencari transformasi balik

$$\begin{aligned} v_C(t) &= \frac{1}{2} \text{sgn}(t) - \left[e^{-(1/RC)t} \right] u(t) + \frac{1}{2} \\ &= \left[1 - e^{-(1/RC)t} \right] u(t) \end{aligned}$$

Pemahaman :

Hasil yang kita peroleh menunjukkan keadaan transien tegangan kapasitor, sama dengan hasil yang kita peroleh dalam analisis transien di kawasan waktu di Bab-4 contoh 4.5. Dalam menyelesaikan persoalan ini kita tidak menyinggung sama sekali mengenai kondisi awal pada kapasitor karena transformasi Fourier telah mencakup keadaan untuk $t < 0$.

CONTOH 10.15 : Bagaimanakah v_C pada contoh 10.14, jika tegangan yang diterapkan adalah $v_1(t) = \text{sgn}(t)$?

Penyelesaian:

Dari Tabel 10.1, kita peroleh $F[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$. Dengan demikian maka $V_C(\omega)$ dan uraiannya adalah

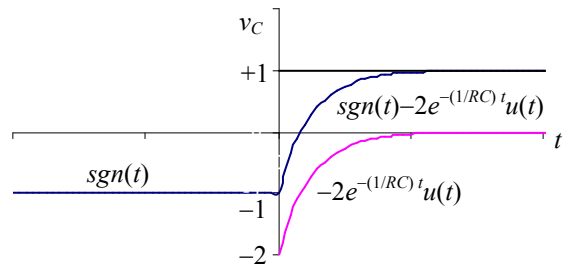
$$V_C(\omega) = \left[\frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} \right] \frac{2}{j\omega} = \frac{2}{j\omega} - \frac{2}{j\omega + 1/RC}$$

Transformasi baliknya memberikan

$$v_C(t) = \text{sgn}(t) - 2e^{-(1/RC)t} u(t)$$

Pemahaman:

Persoalan ini melibatkan sinyal non-kausal yang memerlukan penyelesaian dengan transformasi Fourier. Suku pertama dari $v_C(t)$ memberikan informasi tentang keadaan pada $t < 0$, yaitu bahwa tegangan kapasitor bernilai -1 karena suku kedua bernilai nol untuk $t < 0$. Untuk $t > 0$, $v_C(t)$ bernilai $1 - 2e^{-(1/RC)t}u(t)$ yang merupakan tegangan transien yang nilai akhirnya adalah $+1$. Di sini terlihat jelas bahwa analisis dengan menggunakan transformasi Fourier memberikan tanggapan rangkaian yang mencakup seluruh sejarah rangkaian mulai dari $-\infty$ sampai $+\infty$. Gambar $v_C(t)$ adalah seperti di samping ini.



Konvolusi dan Fungsi Alih

Hubungan antara keluaran dan masukan rangkaian di kawasan waktu diberikan oleh (8.59). Jika $h(t)$ adalah tanggapan rangkaian terhadap sinyal impuls dan $x(t)$ adalah sinyal masukan, maka sinyal keluaran $y(t)$ dapat diperoleh melalui integral konvolusi yaitu

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (10.33)$$

Dalam integral konvolusi ini batas integrasi adalah $\tau = 0$ sampai $\tau = t$ karena dalam penurunan formulasi ini $h(t)$ dan $x(t)$ merupakan bentuk gelombang kausal. Jika batas integrasi tersebut diperlebar mulai dari $\tau = -\infty$ sampai $\tau = +\infty$, (10.33) menjadi

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (10.34)$$

Persamaan (10.34) ini merupakan bentuk umum dari integral konvolusi yang berlaku untuk bentuk gelombang kausal maupun non-kausal.

Transformasi Fourier untuk kedua ruas (10.34) adalah

$$\mathbf{F}[y(t)] = Y(\omega) = \mathbf{F}\left[\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] e^{-j\omega t} dt \quad (10.35)$$

Pertukaran urutan integrasi pada (10.35) memberikan

$$Y(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau) \left[\int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau \quad (10.36)$$

Mengingat sifat pergeseran waktu pada transformasi Fourier, maka (10.36) dapat ditulis

$$Y(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau} X(\omega)d\tau = \left[\int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau\right] X(\omega) = \mathbf{H}(\omega)X(\omega) \quad (10.37)$$

Persamaan (10.37) menunjukkan hubungan antara transformasi Fourier sinyal keluaran dan masukan. Hubungan ini mirip bentuknya dengan persamaan (8.50) yang memberikan hubungan masukan-keluaran melalui fungsi alih $T(s)$ di kawasan s yaitu $\mathbf{Y}(s) = T(s) \mathbf{X}(s)$. Oleh karena itu $\mathbf{H}(\omega)$ disebut *fungsi alih bentuk Fourier*.

CONTOH 10.16 : Tanggapan impuls suatu sistem adalah $h(t) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|t|}$. Jika sistem ini diberi masukan sinyal signum, $sgn(t)$, tentukanlah tanggapan transiennya.

Penyelesaian:

Dengan Tabel 10.1. didapatkan $H(\omega)$ untuk sistem ini

$$H(\omega) = F\left[\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|t|}\right] = \frac{\alpha}{2} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Sinyal masukan, menurut Tabel 10.1. adalah $X(\omega) = F[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$

Sinyal keluaran $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{2}{j\omega} = \frac{2\alpha^2}{j\omega(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)}$ yang dapat

diuraikan menjadi $Y(\omega) = \frac{k_1}{j\omega} + \frac{k_2}{\alpha + j\omega} + \frac{k_3}{\alpha - j\omega}$

$$k_1 = j\omega Y(\omega)\Big|_{j\omega=0} = \frac{2\alpha^2}{(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)}\Big|_{j\omega=0} = 2$$

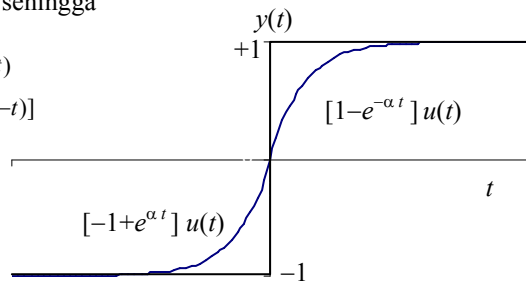
$$k_2 = (\alpha + j\omega)Y(\omega)\Big|_{j\omega=-\alpha} = \frac{2\alpha^2}{j\omega(\alpha - j\omega)}\Big|_{j\omega=-\alpha} = \frac{2\alpha^2}{-\alpha(\alpha + \alpha)} = -1$$

$$k_3 = (\alpha - j\omega)Y(\omega)\Big|_{j\omega=\alpha} = \frac{2\alpha^2}{j\omega(\alpha + j\omega)}\Big|_{j\omega=\alpha} = \frac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha + \alpha)} = +1$$

Jadi $Y(\omega) = \frac{2}{j\omega} + \frac{-1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha + j(-\omega)}$ sehingga

$$y(t) = \text{sgn}(t) - e^{-\alpha t}u(t) + e^{-\alpha(-t)}u(-t) \\ = [1 - e^{-\alpha t}]u(t) + [-1 + e^{\alpha t}]u(-t)$$

Gambar dari hasil yang kita peroleh adalah seperti di samping ini.

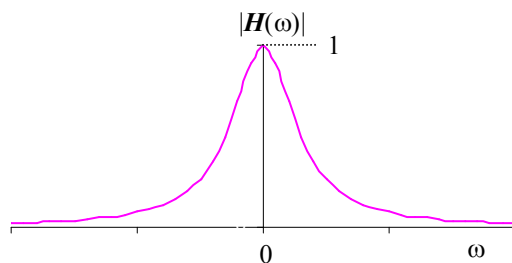


CONTOH 10.17 : Tentukan tanggapan frekuensi dari sistem pada contoh 10.16.

Penyelesaian :

Fungsi alih sistem tersebut adalah $H(\omega) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$.

Kurva $|H(\omega)|$ kita gambarkan dengan ω sebagai absis dan hasilnya adalah seperti gambar di samping ini. Pada $\omega = 0$, yaitu frekuensi sinyal searah, $|H(\omega)|$ bernilai 1 sedangkan untuk ω tinggi $|H(\omega)|$ menuju nol. Sistem ini bekerja seperti *low-pass filter*. Frekuensi *cutoff* terjadi jika $|H(\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$



$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega_c^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\alpha^2 \sqrt{2} - \alpha^2} = 0.644\alpha$$

Teorema Parseval

Energi total yang dibawa oleh suatu bentuk gelombang sinyal didefinisikan sebagai

$$W_{total} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt$$

dengan $p(t)$ adalah daya yang diberikan oleh sinyal kepada suatu beban. Jika beban berupa resistor maka $p(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R}$; dan jika bebannya adalah resistor 1Ω maka

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \quad ; \quad \text{dengan } f(t) \text{ berupa arus ataupun tegangan} \quad (10.38)$$

Persamaan (10.38) digunakan sebagai definisi untuk menyatakan energi yang dibawa oleh suatu bentuk gelombang sinyal. Dengan kata lain, energi yang diberikan oleh suatu gelombang sinyal pada resistor 1Ω menjadi pernyataan kandungan energi gelombang tersebut.

Teorema Parseval menyatakan bahwa energi total yang dibawa oleh suatu bentuk gelombang dapat dihitung baik di kawasan waktu maupun kawasan frekuensi. Pernyataan ini dituliskan sebagai

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (10.39)$$

Karena $|F(\omega)|^2$ merupakan fungsi genap, maka (10.39) dapat dituliskan

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (10.40)$$

Jadi di kawasan waktu energi gelombang adalah integral untuk seluruh waktu dari kuadrat bentuk gelombang, dan di kawasan frekuensi energinya adalah $(1/2\pi)$ kali integrasi untuk seluruh frekuensi dari kuadrat besarnya (nilai mutlak) transformasi Fourier dari sinyal. Penurunan teorema ini dimulai dari (10.38).

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

Integrasi yang berada di dalam tanda kurung adalah integrasi terhadap ω dan bukan terhadap t . Oleh karena itu $f(t)$ dapat dimasukkan ke dalam integrasi tersebut menjadi

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

Dengan mempertukarkan urutan integrasi, akan diperoleh

$$\begin{aligned} W_{1\Omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) F(\omega) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Teorema Parseval menganggap bahwa integrasi pada persamaan (10.39) ataupun (10.40) adalah konvergen, mempunyai nilai berhingga. Sinyal yang bersifat demikian disebut *sinyal energi*; sebagai contoh: sinyal kausal eksponensial, eksponensial dua sisi, pulsa persegi, sinus teredam. Jadi tidak semua sinyal merupakan sinyal energi. Contoh sinyal yang mempunyai transformasi Fourier tetapi bukan sinyal energi adalah sinyal impuls, sinyal anak tangga, signum, dan sinus (tanpa henti). Hal ini bukan berarti bahwa sinyal ini, anak tangga dan sinyal sinus misalnya, tidak dapat digunakan untuk menyalurkan energi bahkan penyaluran energi akan berlangsung sampai tak hingga; justru karena itu ia tidak disebut sinyal energi melainkan disebut *sinyal daya*.

CONTOH 10.18 : Hitunglah energi yang dibawa oleh gelombang $v(t) = 10 \left[e^{-1000t} \right] u(t)$ V.

Penyelesaian:

Kita dapat menghitung di kawasan waktu

$$W_{1\Omega} = \int_0^{\infty} [10 e^{-1000t}]^2 dt = \int_0^{\infty} [100 e^{-2000t}] dt = -\frac{100}{2000} e^{-2000t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{20} \text{ J}$$

Untuk menghitung di kawasan frekuensi, kita cari lebih dulu $V(\omega) = 10/(j\omega + 1000)$.

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{100}{\omega^2 + 10^6} \right]^2 d\omega = \frac{100}{2\pi(1000)} \tan^{-1} \frac{\omega}{1000} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{20\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{20} \text{ J}$$

Pemahaman: Kedua cara perhitungan memberikan hasil yang sama.

Fungsi $|F(\omega)|^2$ menunjukkan kerapatan energi dalam spektrum sinyal. Persamaan (10.40) adalah energi total yang dikandung oleh seluruh spektrum sinyal. Jika batas integrasi adalah ω_1 dan ω_2 maka kita memperoleh persamaan

$$W_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (10.41)$$

yang menunjukkan energi yang dikandung oleh gelombang dalam selang frekuensi ω_1 dan ω_2 .

Jika hubungan antara sinyal keluaran dan masukan suatu pemroses sinyal adalah $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ maka energi sinyal keluaran adalah

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 d\omega \quad (10.42)$$

Dengan hubungan-hubungan yang kita peroleh ini, kita dapat menghitung energi sinyal langsung menggunakan transformasi Fouriernya tanpa harus mengetahui bentuk gelombang sinyalnya.

CONTOH 10.19 : Tentukan lebar pita yang diperlukan agar 90% dari total energi gelombang eksponensial $v(t) = 10 \left[e^{-1000t} \right] u(t)$ V dapat diperoleh.

Penyelesaian:

$$\text{Bentuk gelombang } v(t) = 10 \left[e^{-1000t} \right] u(t) \rightarrow V(\omega) = \frac{10}{j\omega + 1000}$$

$$\text{Energi total : } W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{100}{\omega^2 + 10^6} \right]^2 d\omega = \frac{100}{\pi(1000)} \tan^{-1} \frac{\omega}{1000} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{10\pi} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{1}{20} \text{ J}$$

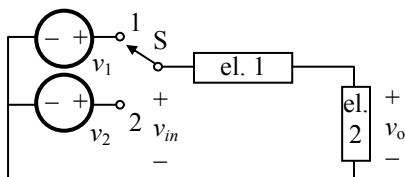
Misalkan lebar pita yang diperlukan untuk memperoleh 90% energi adalah β , maka

$$W_{90\%} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta} \left[\frac{100}{\omega^2 + 10^6} \right]^2 d\omega = \frac{100}{\pi(1000)} \tan^{-1} \frac{\omega}{1000} \Big|_0^{\beta} = \frac{1}{10\pi} \tan^{-1} \frac{\beta}{1000}$$

$$\text{Jadi } \Rightarrow \frac{1}{10\pi} \tan^{-1} \frac{\beta}{1000} = 0.9 \times \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{\beta}{1000} = \tan \left(\frac{9\pi}{20} \right) \Rightarrow \beta = 6310 \text{ rad/s}$$

SOAL-SOAL : ANALISIS RANGKAIAN MENGUNAKAN TRANSFORMASI FOURIER

1. Saklar S pada rangkaian berikut telah berada di posisi 1 mulai $t = -\infty$. Pada $t = 0$ ia dipindahkan keposisi 2 dan tetap pada posisi 2 sampai $t = +\infty$.

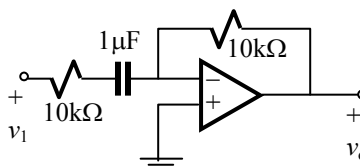


Jika $v_1 = -10$ V, $v_2 = 10$ V, elemen-1 adalah kapasitor $1 \mu\text{F}$, dan elemen-2 adalah resistor $10 \text{ k}\Omega$, tentukan $v_{in}(\omega)$, $V_o(\omega)$, v_o .

2. Ulangi soal 1 untuk $v_1 = -10$ V, $v_2 = 5$ V, elemen-1 adalah resistor $10 \text{ k}\Omega$, dan elemen-2 adalah kapasitor $1 \mu\text{F}$.
3. Ulangi soal 1 untuk $v_1 = 10e^{100t}$ V, $v_2 = 10e^{-100t}$ V, elemen-1 adalah induktor 1 H, dan elemen-2 adalah resistor $0,5 \text{ k}\Omega$.
4. Ulangi soal 1 untuk $v_1 = 10e^{100t}$ V, $v_2 = -10e^{-100t}$ V, elemen-1 adalah resistor $0,5 \text{ k}\Omega$, dan elemen-2 adalah induktor 1 H.
5. Ulangi soal 1 untuk $v_1 = 10$ V, $v_2 = 10e^{-100t}$ V, elemen-1 adalah induktor 1 H, dan elemen-2 adalah resistor 100Ω .
6. Pada sebuah rangkaian seri $L = 1$ H, $C = 1 \mu\text{F}$, dan $R = 1 \text{ k}\Omega$, diterapkan tegangan $v_s = 10 \text{sgn}(t)$ V. Tentukan tegangan pada resistor.
7. Tanggapan impuls sebuah rangkaian linier adalah $h(t) = \text{sgn}(t)$. Jika tagangan masukan adalah $v_s(t) = \delta(t) - 10e^{-10t}u(t)$ V, tentukan tegangan keluarannya.
8. Tentukan tanggapan frekuensi rangkaian yang mempunyai tanggapan impuls $h(t) = \delta(t) - 20e^{-10t}u(t)$.

9. Tentukan tegangan keluaran rangkaian soal 8, jika diberi masukan $v_s(t) = \text{sgn}(t)$.

10. Jika tegangan masukan pada rangkaian berikut adalah $v_1 = 10 \cos 100t$ V, tentukan tegangan keluaran v_o .

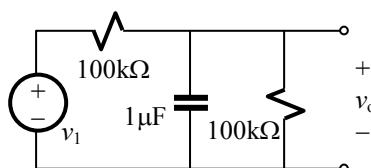


11. Tentukan energi yang dibawa oleh sinyal $v(t) = 500 t e^{-100t} u(t)$ V. Tentukan pula berapa persen energi yang dikandung dalam selang frekuensi $-100 \leq \omega \leq +100$ rad/s.

12. Ulangi soal 10 untuk sinyal yang transformasinya $V(\omega) = \frac{200}{\omega^2 + 400}$.

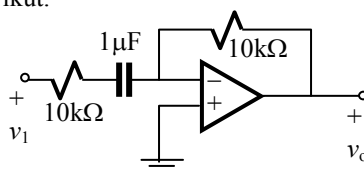
13. Pada rangkaian filter RC berikut ini, tegangan masukan adalah

$$v_1 = 20e^{-5t}u(t) \text{ V}$$



Tentukan energi total masukan, persentase energi sinyal keluaran v_o terhadap energi sinyal masukan, persentase energi sinyal keluaran dalam selang *passband*-nya.

14. Ulangi soal 12 untuk rangkaian filter berikut.



BAB 11

Pengenalan Pada Sistem

11.1. Pengertian Sinyal Secara Luas dan Pengertian Sistem

Tujuan :

- Memahami sinyal dalam pengertian yang lebih luas.
- Memahami pengertian tentang sistem.

Sinyal

Di Bab-1 kita telah mempelajari bentuk gelombang sinyal yang suatu persamaan yang menyatakan sinyal sebagai fungsi dari waktu. Dalam analisis rangkaian listrik, sinyal-sinyal yang kita tangani biasanya berupa tegangan ataupun arus listrik. Pengertian ini dapat kita perluas menjadi suatu pengertian yang tidak hanya mencakup sinyal listrik saja tetapi juga mencakup sinyal-sinyal non-listrik yang juga merupakan fungsi waktu. Dengan perluasan pengertian ini maka kita mempunyai definisi untuk sinyal sebagai,

Sinyal adalah suatu fungsi yang menyatakan variasi terhadap waktu dari suatu peubah fisik.

Fungsi yang kita tetapkan untuk menyatakan suatu sinyal kita sebut *representasi dari sinyal* atau *model sinyal* dan proses penentuan representasi sinyal itu kita sebut *pemodelan sinyal*. Suatu sinyal yang tergantung dari peubah riil t dan yang memodelkan peubah fisik yang berevolusi dalam waktu nyata disebut *sinyal waktu kontinyu*. Sinyal waktu kontinyu ditulis sebagai suatu fungsi dengan peubah riil t seperti misalnya $x(t)$. Sebagaimana telah disebutkan di Bab-1, sinyal jenis inilah yang ditinjau dalam buku ini.

Untuk memberi contoh dari sinyal non-listrik, kita bayangkan suatu benda yang mendapat gaya. Benda ini akan bergerak sesuai dengan arah gaya., posisinya akan berubah dari waktu ke waktu. Dengan mengambil suatu kooordinat referensi, *perubahan posisi* benda akan merupakan fungsi waktu dan akan menjadi salah satu peubah fisik dari benda tersebut dan merupakan suatu sinyal. Selain perubahan posisi, benda juga mempunyai *kecepatan* yang juga merupakan fungsi dari waktu; kecepatan juga merupakan suatu sinyal.

Jika posisi benda dalam contoh di atas merupakan suatu sinyal, apakah ia dapat dijadikan suatu masukan (*input*) pada sebuah “rangkaiian” ? Bayangkanlah benda yang bergerak itu adalah sebuah pesawat terbang. Kita ingin mengamatinya dengan menggunakan sebuah teropong, dan untuk itu teropong kita arahkan pada pesawat. Setiap saat pesawat berubah posisi, kedudukan teropong kita sesuaikan sedemikian rupa sehingga bayangan pesawat selalu terlihat oleh kita melalui teropong. Kita katakan bahwa posisi pesawat merupakan masukan pada kita untuk mengubah arah teropong; dalam hal ini *kita dan teropong* menjadi sebuah “rangkaiian”. Apakah dari “rangkaiian” ini ada suatu keluaran (*output*)? Keluaran dari “rangkaiian” ini adalah berupa *perubahan arah teropong*. Jelaslah bahwa ada hubungan tertentu antara arah teropong sebagai keluaran dengan posisi pesawat sebagai masukan, dan hubungan keluaran-masukan demikian ini sudah biasa kita lihat pada rangkaian listrik. Kalau kita digantikan oleh sebuah mesin penggerak otomatis dan teropong diganti dengan sebuah meriam, maka jadilah sebuah “rangkaiian” mesin penembak pesawat. Mesin penembak ini dapat kita sebut sebagai suatu *perangkat* yang mampu menetapkan arah meriam jika mendapatkan masukan mengenai posisi pesawat (istilah “*perangkat*” di sini kita beri pengertian sebagai gabungan dari banyak *piranti* untuk menjalankan fungsi tertentu). Dengan kata lain antara sinyal keluaran dengan sinyal masukan terdapat hubungan yang

sepenuhnya ditentukan oleh perilaku perangkat yang berarti perangkat “memiliki aturan” yang menetapkan bagaimana bentuk keluaran untuk sesuatu masukan yang ia terima.

Sistem

Dengan contoh di atas, kita sampai pada pengertian mengenai *sistem* dengan definisi :

sistem adalah aturan yang menetapkan sinyal keluaran dari adanya sinyal masukan.

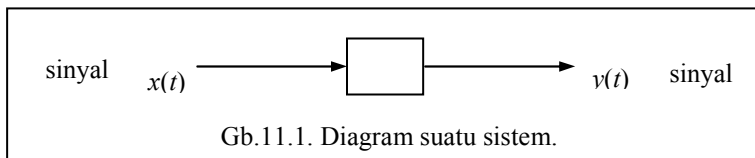
Untuk lebih bernuansa teknik, definisi tersebut di atas kita nyatakan sebagai :

Sistem membangkitkan sinyal keluaran tertentu dari adanya sinyal masukan tertentu.

Jika kita ingat mengenai pengertian *elemen* sebagai model piranti dalam rangkaian listrik, maka *sistem* dapat dipandang sebagai model dari perangkat. Dengan demikian rangkaian-rangkaian listrik yang sudah pernah kita pelajari, yang juga menetapkan hubungan antara keluaran dan masukan, dapat kita pandang sebagai suatu sistem. Kalau rangkaian tersebut merupakan bagian lain dari rangkaian (dalam hubungan kaskade misalnya) kita dapat memandangnya sebagai sub-sistem. Hubungan keluaran-masukan dari suatu sistem dapat kita nyatakan sebagai

$$y(t) = H[x(t)] \quad (11.1)$$

dengan $y(t)$ sinyal keluaran dan $x(t)$ sinyal masukan. Hubungan ini dapat kita gambarkan dengan diagram berikut.



Perhatikanlah bahwa sistem didefinisikan menurut sinyal keluaran dan masukannya. Jadi kita memandang sistem dari sudut pandang sinyal masukan dan keluaran. Selain dari pada itu, Gb.11.1. memperlihatkan bahwa arah propagasi sinyal adalah sesuai dengan arah anak panah. Jadi sinyal berasal dari masukan menuju ke keluaran. Penggambaran ini sesuai dengan definisi kita yaitu bahwa suatu sistem membangkitkan sinyal keluaran dari sinyal masukan.

Suatu sistem dapat mempunyai satu masukan atau lebih; demikian juga keluarannya bisa hanya satu atau lebih. Sistem dengan satu masukan dan satu keluaran disebut *single-input-single-output (SISO) system* atau kita terjemahkan dengan sistem masukan-tunggal-keluaran-tunggal (MTKT). Jika masukan dan keluarannya lebih dari satu disebut *multi-input-multi-output (MIMO) system* atau kita terjemahkan sistem masukan-ganda-keluaran-ganda (MGKG).

Model Sistem

Pernyataan matematis secara eksplisit dari suatu sistem seperti pada (11.1) disebut *representasi sistem* atau *model sistem*. Proses untuk memperoleh model sistem kita sebut *pemodelan sistem*. Ada dua cara yang dapat ditempuh untuk membangun model sistem. Cara pertama adalah menurunkan langsung dari hukum-hukum fisika dan cara kedua adalah melalui observasi empiris. Cara pertama dapat digunakan apabila proses-proses fisiknya terdefinisi dengan jelas dan difahami. Model sistem yang diturunkan haruslah cukup sederhana untuk keperluan analisis dan simulasi.

Cara kedua digunakan untuk sistem yang sangat kompleks dan sangat sulit untuk dianalisis langsung serta perilaku dinamikanya tidak difahami secara baik. Untuk melakukan observasi empiris diperlukan sinyal masukan yang harus dipilih secara cermat, dan sinyal keluarannya diamati. Model sistem diperoleh dengan melakukan perhitungan balik dari kedua sinyal tersebut. Pembangunan model sistem melalui cara observasi sinyal masukan dan keluaran ini disebut *identifikasi sistem*.

Dalam sub-bab 8.3. telah disebutkan bahwa ada empat macam cara untuk memperoleh hubungan antara sinyal keluaran dan sinyal masukan, yaitu persamaan diferensial, transformasi Laplace, konvolusi, dan transformasi Fourier. Sejalan dengan itu, kita mengenal empat macam *representasi sistem* atau *model sistem* sebagai berikut.

1. Persamaan Diferensial. Bentuk ini telah kita kenal misalnya sistem orde kedua di Bab-4.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = f(t)$$

Bentuk umum dari model ini dinyatakan dalam persamaan diferensial :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_mx^{(m)}(t) + b_{m-1}x^{(m-1)}(t) + \dots + b_0x(t) \quad (11.2)$$

$$y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \quad y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}, \quad \dots, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad y(0) = y_0.$$

Dalam (11.2) kita menganggap bahwa koefisien a_k dan b_k adalah bilangan riil (konstan tidak tergantung waktu). Kita juga menganggap $m \leq n$. Masukan sistem adalah $x(t)$ dan keluarannya adalah $y(t)$. Orde dari persamaan diferensial ini adalah n .

2. Fungsi Alih Laplace.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} = T(s) = H(s) \quad (11.3)$$

Di sini sinyal keluaran dan masukan dinyatakan di kawasan s , yaitu $Y(s)$ dan $X(s)$. $T(s)$ adalah fungsi alih Laplace, yang untuk selanjutnya akan kita gunakan sebagai representasi sistem di bab ini dan kita tuliskan sebagai $H(s)$.

3. Integral Konvolusi.

$$y(t) = \int_0^\infty h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda \quad (11.4)$$

dengan $h(t) = \mathbf{L}^{-1}\{H(s)\}$.

4. Fungsi Alih Fourier.

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (11.5)$$

dengan $H(\omega) = \mathbf{F}\{h(t)\}$ adalah fungsi alih Fourier.

Dalam representasi sistem selanjutnya, kita menggunakan fungsi alih Laplace.

11.2. Diagram Blok

Tujuan :

- Memahami manfaat diagram blok.
- Mampu membangun diagram blok.
- Mampu mereduksi diagram blok.

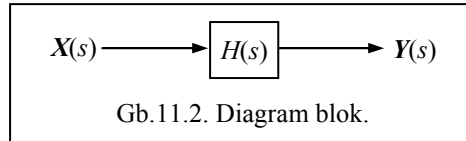
Penggambaran Sistem Dengan Diagram Blok

Diagram blok adalah representasi dari fungsi alih dengan menggunakan gambar. Diagram blok sangat bermanfaat untuk menggambarkan struktur sistem, terutama jika sistem tersusun dari banyak sub-sistem (penjelasan pengertian sub-sistem akan diberikan kemudian).

Diagram ini juga bermanfaat untuk melakukan analisis sistem. Di sub-bab ini kita mengambil model sistem dengan transformasi Laplace (di kawasan s). Hubungan masukan-keluaran sistem akan berbentuk :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) \quad \text{atau} \quad Y(s) = H(s)X(s) \quad (11.6)$$

Diagram blok dari sistem ini adalah seperti terlihat pada Gb.11.2. Diagram blok seperti ini telah kita kenal dalam analisis rangkaian listrik. Hanya di sini kita mempunyai pengertian $H(s)$ sebagai representasi dari sistem. Diagram blok ini ekuivalen dengan persamaan aljabar (11.6). Jadi susunan diagram blok merupakan pernyataan operasi-operasi matematis. Hal ini berbeda dengan Gb.11.1. yang hanya merupakan diagram untuk memperjelas definisi tentang sistem.

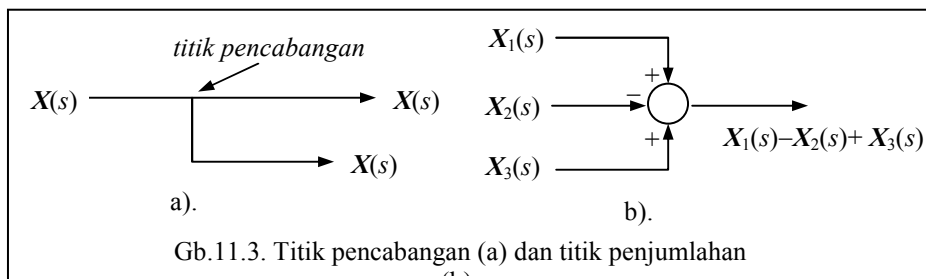


Suatu sistem yang kompleks tersusun dari sistem-sistem yang lebih sederhana. Diagram blok dapat kita gunakan untuk menyatakan hubungan dari sistem-sistem yang lebih sederhana tersebut untuk membentuk sistem yang kompleks. Diagram blok akan memperlihatkan struktur dari sistem yang kompleks yaitu interkoneksi dari komponen-komponen sistem. Lebih dari itu, diagram blok juga dapat dimanfaatkan sebagai alat untuk perhitungan; fungsi alih sistem dihitung dari diagram blok yang tersusun dari banyak komponen tersebut.

Hubungan-Hubungan Sistem

Berikut ini kita akan melihat hubungan-hubungan sederhana dari sistem yang akan menjadi dasar bagi kita untuk memandang sistem yang lebih kompleks. Kita akan meninjau dua sistem yaitu $H_1(s)$ dan $H_2(s)$. Untuk menghubungkan dua sistem, atau dua blok, harus ada titik-titik hubung.

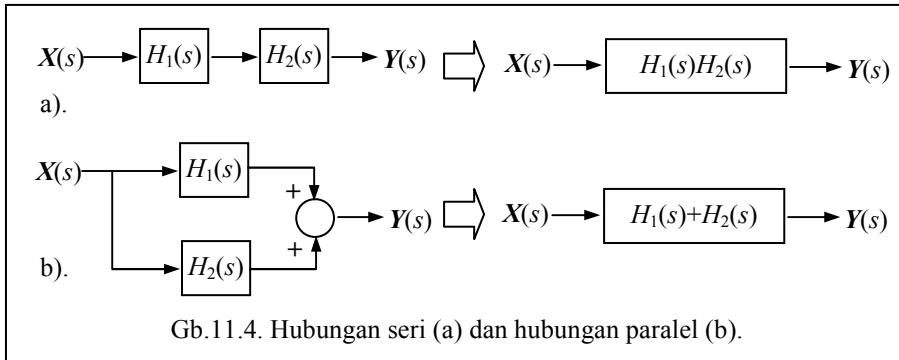
Titik Hubung. Ada dua macam titik hubung yang perlu kita perhatikan yaitu *titik pencabangan* (*pickoff point*) dan *titik penjumlahan*. Titik pencabangan adalah titik tempat terjadinya duplikasi sinyal; sinyal-sinyal yang meninggalkan titik pencabangan sama dengan sinyal yang memasuki titik pencabangan. Hal ini ditunjukkan oleh Gb.11.3.a.



Pada titik penjumlahan, beberapa sinyal dijumlahkan. Sinyal yang keluar dari titik penjumlahan adalah jumlah dari sinyal yang masuk ke titik penjumlahan. Jika sinyal yang masuk bertanda “+” maka ia dijumlahkan dan jika bertanda “-” ia dikurangkan. Untuk titik penjumlahan ini ada konvensi, yaitu bahwa hanya ada satu sinyal saja yang meninggalkan titik penjumlahan.

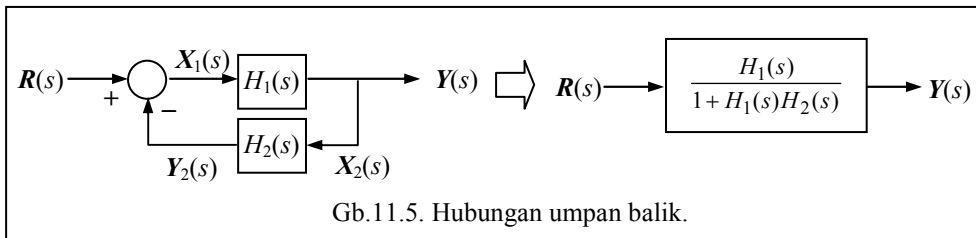
Hubungan Kaskade atau Hubungan Seri. Hubungan seri antara dua sistem terjadi jika keluaran dari sistem yang satu merupakan masukan pada sistem yang lain seperti terlihat pada Gb.11.4.a. Fungsi alih dari hubungan kaskade, yang merupakan fungsi alih total, adalah hasil kali dari fungsi alih sistem yang menyusunnya. Jadi hubungan kaskade sistem

$H_1(s)$ dan $H_2(s)$ dapat digantikan oleh satu sistem $H_1(s)H_2(s)$. Hal ini sesuai dengan kaidah rantai yang telah kita pelajari dalam analisis rangkaian di kawasan s .



Hubungan Paralel. Hubungan paralel antara dua sistem terjadi jika kedua sistem mendapat masukan yang sama sedangkan keluarannya merupakan jumlah dari keluaran kedua sistem tersebut, seperti terlihat pada Gb.11.4.b. Jadi hubungan paralel antara dua sistem $H_1(s)$ dan $H_2(s)$ dapat digantikan oleh satu sistem dengan fungsi alih $H_1(s)+H_2(s)$.

Hubungan Umpan Balik. Pada hubungan umpan balik, keluaran dari sistem pertama menjadi masukan pada sistem kedua dan keluaran sistem kedua menjadi pengurang pada sinyal dari luar $R(s)$; sinyal hasil pengurangan ini menjadi masukan pada sistem pertama. Hubungan ini diperlihatkan pada Gb.11.5.



Dari diagram blok pada Gb.11.5. diperoleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X_1(s) = H_1(s)[R(s) - Y_2(s)] = H_1(s)R(s) - H_1(s)Y_2(s) \\ &= H_1(s)R(s) - H_1(s)[H_2(s)X_2(s)] = H_1(s)R(s) - H_1(s)[H_2(s)Y(s)] \\ \Rightarrow Y(s) + H_1(s)[H_2(s)Y(s)] &= H_1(s)R(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \end{aligned}$$

Dengan hubungan umpan balik seperti pada Gb.11.5. fungsi alih sistem keseluruhan menjadi

$$\frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Fungsi alih $H_1(s)$ adalah fungsi alih dari suatu sistem yang disebut sistem loop terbuka sedangkan $\frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$ adalah fungsi alih dari sistem yang disebut sistem loop tertutup.

Jika pada titik penjumlahan terdapat tanda negatif pada jalur umpan balik maka sistem ini disebut sistem dengan umpan balik negatif. Jika fungsi alih $H_2(s) = 1$ maka sistem menjadi sistem dengan umpan balik negatif satu satuan.

Sub-Sistem. Jika kita memisahkan salah satu bagian dari diagram blok suatu sistem yang tersusun dari banyak bagian dan bagian yang kita pisahkan ini merupakan suatu sistem juga maka bagian ini kita sebut sub-sistem. $H_2(s)$ dalam contoh hubungan paralel di atas merupakan salah satu sub-sistem.

Pembentukan dan Reduksi Diagram Blok

Berikut ini kita akan melihat contoh penggambaran diagram blok dan penyederhanaan diagram blok. Sebagaimana telah disebutkan, walaupun kita telah mengembangkan pengertian sistem akan tetapi dalam contoh-contoh yang akan kita lihat di sini kita membatasi diri pada sistem listrik.

Diagram Blok Elemen Rangkaian. Definisi sistem menyatakan bahwa dari sinyal masukan tertentu suatu sistem akan memberikan sinyal keluaran tertentu. Definisi ini dipenuhi oleh elemen-elemen rangkaian seperti R , L , dan C , karena elemen-elemen ini akan memberikan sinyal keluaran (tegangan/arus) tertentu jika diberi sinyal masukan (arus/tegangan) tertentu yang kita kenal sebagai karakteristik $i-v$ dalam analisis rangkaian listrik. Jika sistem dapat divisualisasikan menggunakan diagram blok, maka elemen-elemen rangkaian listrik dapat pula digambarkan dengan diagram blok.

Resistor. Gb.11.6.a. memperlihatkan diagram blok dari resistor. Hubungan tegangan-arus resistor adalah $V(s) = RI(s)$ atau $I(s) = (1/R)V(s)$. Kedua relasi memberikan diagram blok seperti ditunjukkan pada gambar.

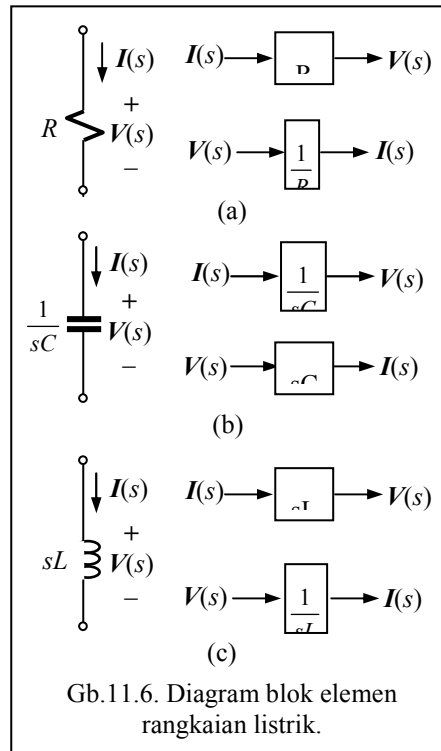
Kapasitor. Gb.11.6.b. memperlihatkan diagram blok dari kapasitor. Hubungan tegangan-arus kapasitor adalah $V(s) = (1/sC)I(s)$ atau $I(s) = (sC)V(s)$. Kedua relasi memberikan diagram blok seperti ditunjukkan pada gambar. Berbeda dengan resistor, kapasitor adalah elemen dinamik. Hubungan yang pertama mengambil peubah status, yaitu tegangan kapasitor, sebagai keluaran dan dapat ditulis sebagai $V(s) = (1/C)(1/s)I(s)$ dan diagram bloknya menjadi :

$$I(s) \rightarrow \left[\frac{1}{C} \right] \rightarrow \left[\frac{1}{s} \right] \rightarrow V(s).$$

Di kawasan t hubungan tersebut adalah $v(t) = (1/C) \int idt$. Oleh karena itu blok $\left[\frac{1}{s} \right]$ disebut sebagai *blok integrator*.

Induktor. Gb.11.6.c. memperlihatkan diagram blok dari induktor. Hubungan tegangan-arus induktor adalah $V(s) = (sL)I(s)$ atau $I(s) = (1/sL)V(s)$. Kedua relasi memberikan diagram blok seperti ditunjukkan pada gambar. Seperti halnya kapasitor, induktor adalah elemen dinamik. Hubungan yang kedua mengambil peubah status, yaitu arus induktor, sebagai keluaran dan dapat ditulis sebagai $I(s) = (1/L)(1/s)V(s)$. Dengan *blok integrator* diagram bloknya menjadi :

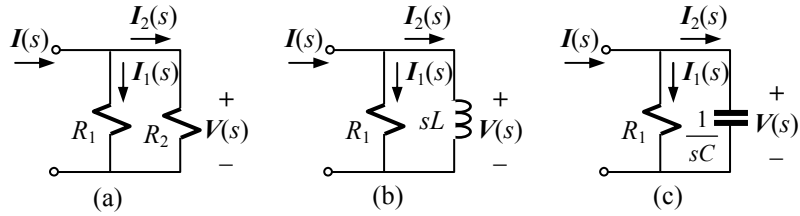
$$V(s) \rightarrow \left[\frac{1}{L} \right] \rightarrow \left[\frac{1}{s} \right] \rightarrow I(s).$$



Gb.11.6. Diagram blok elemen rangkaian listrik.

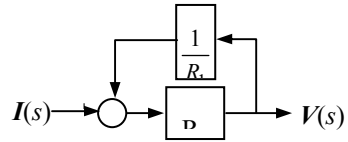
Pembentukan Diagram Blok. Dalam contoh-contoh berikut ini kita akan melihat bagaimana diagram blok dibentuk. Kita menggabungkan pemahaman mengenai rangkaian listrik dengan pemahaman hubungan-hubungan sistem.

CONTOH 11.1 : Gambarkan diagram blok rangkaian-rangkaian berikut.

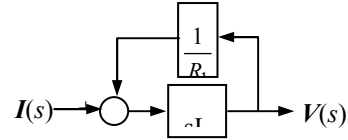


Penyelesaian :

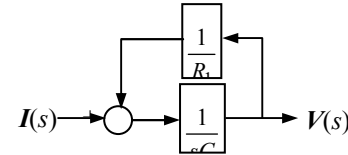
a). $V(s) = R_2 I_2(s) = R_2 [I(s) - I_1(s)] = R_2 \left[I(s) - \frac{V(s)}{R_1} \right]$



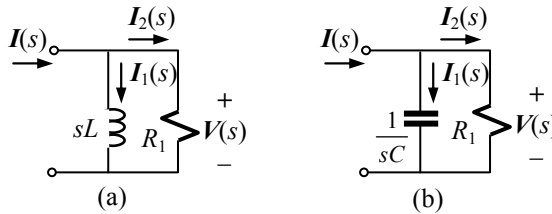
b). $V(s) = sL I_2(s) = sL [I(s) - I_1(s)] = sL \left[I(s) - \frac{V(s)}{R_1} \right]$



c). $V(s) = \frac{1}{sC} I_2(s) = \frac{1}{sC} [I(s) - I_1(s)] = \frac{1}{sC} \left[I(s) - \frac{V(s)}{R_1} \right]$

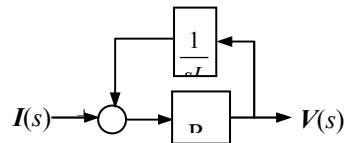


CONTOH 11.2 : Gambarkan diagram blok rangkaian-rangkaian berikut.

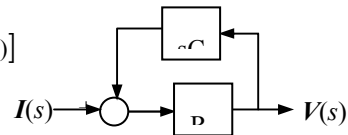


Penyelesaian :

a). $V(s) = R_1 I_2(s) = R_1 [I(s) - I_1(s)] = R_1 \left[I(s) - \frac{V(s)}{sL} \right]$



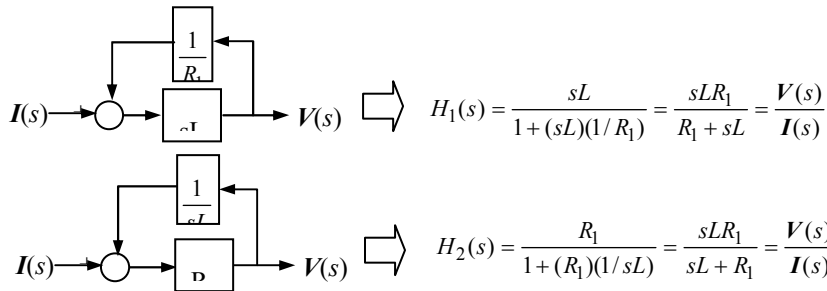
b). $V(s) = R_1 I_2(s) = R_1 [I(s) - I_1(s)] = R_1 [I(s) - sC V(s)]$



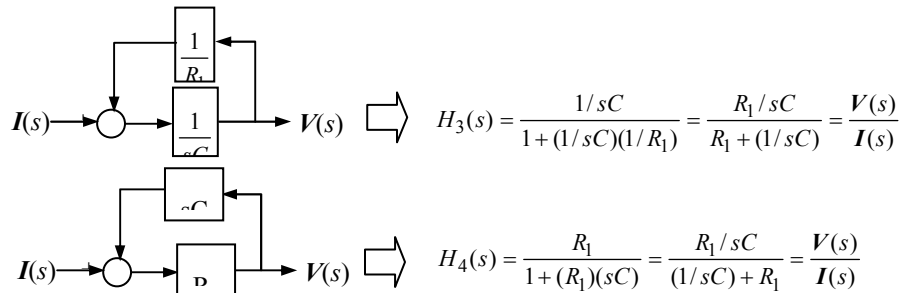
Tegangan $V(s)$ pada contoh 11.1.b. dan 11.1.c. haruslah identik dengan tegangan pada contoh 11.2. karena tegangan ini adalah tegangan pada hubungan paralel dari dua elemen. Walaupun demikian kita mendapatkan diagram blok yang berbeda pada kedua contoh

tersebut. Kita akan menguji apakah kedua diagram blok tersebut identik dengan mencari fungsi alih masing-masing. Untuk itu kita akan memanfaatkan formulasi hubungan blok paralel.

Untuk rangkaian R - L paralel di kedua contoh tersebut di atas kita peroleh :

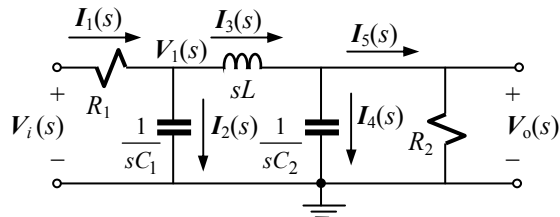


Untuk rangkaian R - C paralel kita peroleh :



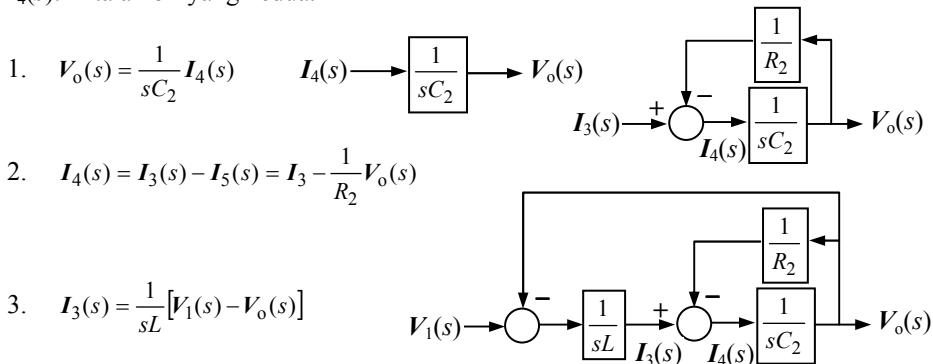
Fungsi alih dari kedua hubungan paralel tersebut ternyata sama yang tidak lain adalah impedansi total rangkaian R - L dan R - C paralel. Jadi diagram blok yang diperoleh pada kedua contoh di atas adalah identik.

CONTOH 11.3 : Bangunlah diagram blok dari rangkaian listrik yang telah ditransformasikan ke kawasan s di samping ini.

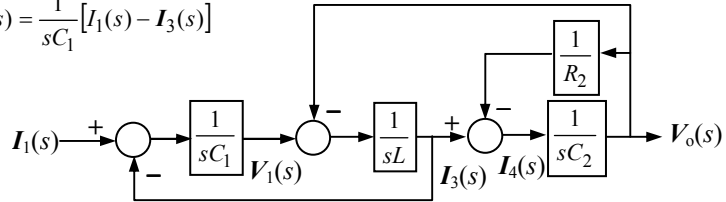


Penyelesaian :

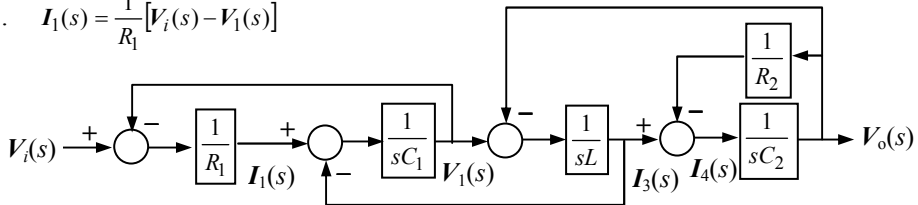
Dalam membangun diagram blok rangkaian ini, kita akan menempuh langkah-langkah yang kita mulai dari tegangan keluaran dan mencari formulasinya secara berurut menuju ke arah masukan. Tegangan $V_o(s)$ dapat dinyatakan sebagai $R_2 I_5(s)$ ataupun $(1/sC_2) I_4(s)$. Kita ambil yang kedua.



$$4. \quad V_1(s) = \frac{1}{sC_1} I_2(s) = \frac{1}{sC_1} [I_1(s) - I_3(s)]$$



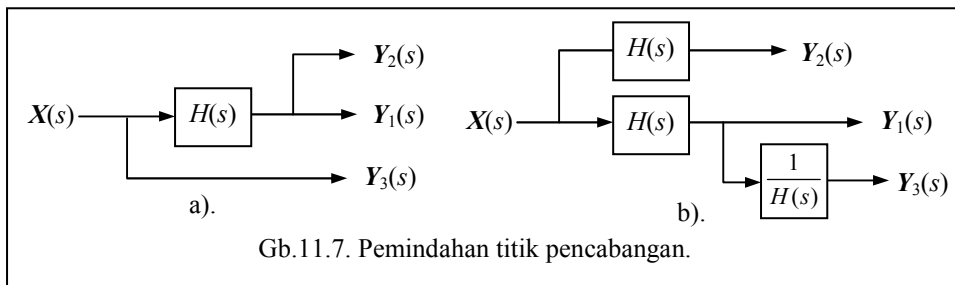
$$5. \quad I_1(s) = \frac{1}{R_1} [V_i(s) - V_1(s)]$$



Pada langkah ke-5 ini terbentuklah diagram blok yang kita cari. Walaupun diagram ini terlihat cukup rumit, tetapi sesungguhnya setiap blok menggambarkan peran dari setiap elemen. Perhatikan pula bahwa dalam diagram blok ini digunakan blok-blok integrator.

Reduksi Diagram Blok. Dalam Contoh 11.1. kita melihat bagaimana diagram blok dibentuk. Diagram blok ini cukup panjang. Dengan menggunakan relasi-relasi ekivalensi sistem terhubung seri dan paralel kita dapat menyederhanakan diagram blok tersebut. Penyederhanaan diagram blok ini disebut *reduksi diagram blok*. Karena diagram blok ekivalen dengan persamaan rangkaian, maka penyederhanaan diagram blok akan menuju pada diperolehnya fungsi alih.

Selain ekivalensi seri dan paralel, dalam melakukan reduksi diagram blok kita memanfaatkan juga kaidah-kaidah pemindahan titik pencabangan. Perhatikanlah Gb.11.7. Gambar b) diperoleh dengan jalan memindahkan titik pencabangan dari keluaran $Y_2(s)$ dan $Y_3(s)$ di gambar a).

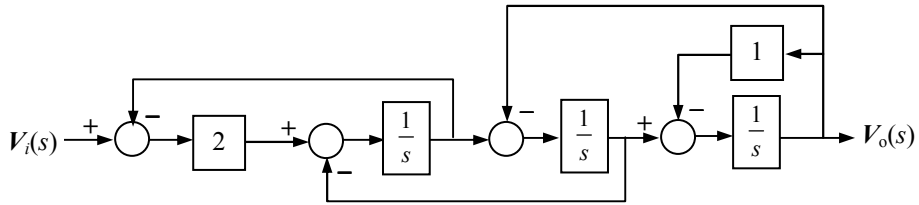


Kaidah pemindahan titik pencabangan adalah sebagai berikut.

Keluaran $Y_2(s)$ tidak akan berubah jika pemindahan titik pencabangannya ke depan melampaui blok $H(s)$ diikuti dengan penambahan satu blok seri yang ekivalen dengan blok $H(s)$.

Keluaran $Y_3(s)$ tidak akan berubah jika pemindahan titik pencabangannya ke belakang melampaui blok $H(s)$ diikuti dengan penambahan satu blok seri $1/H(s)$.

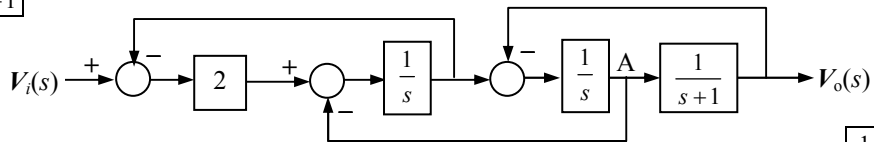
CONTOH 11.4 : Lakukanlah reduksi pada diagram blok berikut ini.



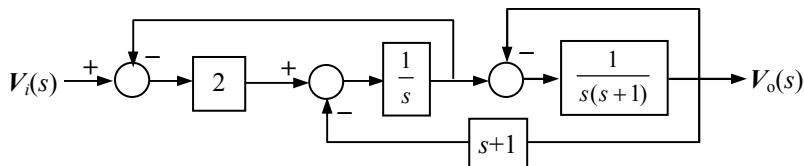
Penyelesaian :

1. Hubungan paralel dari blok $\boxed{1}$ dan $\boxed{\frac{1}{s}}$ dapat digantikan dengan $H_1(s) = \frac{1/s}{1 + (1)(1/s)} =$

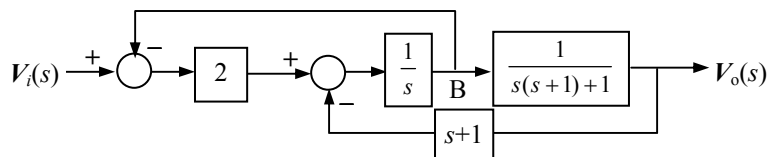
$\boxed{\frac{1}{s+1}}$ sehingga diagram blok menjadi:



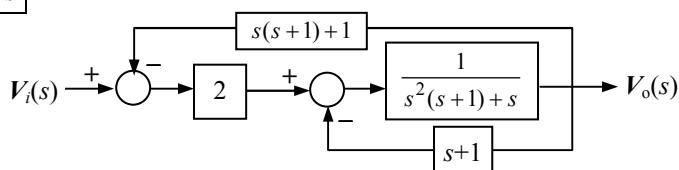
2. Titik percabangan A dapat dipindahkan ke belakang dan terjadi hubungan seri $\boxed{\frac{1}{s}}$ dan $\boxed{\frac{1}{s+1}}$ yang dapat diganti dengan $\boxed{\frac{1}{s(s+1)}}$. Diagram blok menjadi :



3. Umpan balik langsung dari $V_o(s)$ pada blok $\boxed{\frac{1}{s(s+1)}}$ sama dengan memparalel blok ini dengan blok $\boxed{1}$ walaupun tidak tergambar dalam diagram. Hubungan paralel ini dapat diganti dengan $H_2(s) = \frac{1/s(s+1)}{1 + (1)\{1/s(s+1)\}} = \boxed{\frac{1}{s(s+1)+1}}$. Diagram blok menjadi



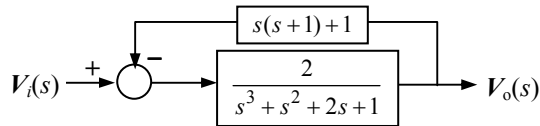
4. Titik percabangan B dapat dipindahkan ke belakang yang akan menyebabkan terjadinya hubungan seri antara blok $\boxed{\frac{1}{s}}$ dan $\boxed{\frac{1}{s(s+1)+1}}$ yang dapat diganti dengan $\boxed{\frac{1}{s^2(s+1)+s}}$. Diagram blok menjadi :



6. Selanjutnya $\boxed{s+1}$ paralel dengan $\boxed{\frac{1}{s^2(s+1)+s}}$

$$H_3(s) = \frac{1/(s^2(s+1)+s)}{1+(s+1)/(s^2(s+1)+s)} = \frac{1}{(s^2(s+1)+s)+(s+1)} = \boxed{\frac{1}{s^3+s^2+2s+1}}$$

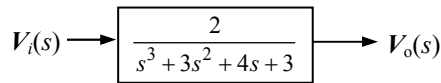
dan $H_3(s)$ seri dengan $\boxed{2}$ sehingga diagram blok menjadi :



7. Diagram blok paralel terakhir ini memberikan

$$H_4(s) = \frac{2/(s^3+s^2+2s+1)}{1+2(s^2+s+1)/(s^3+s^2+2s+1)} = \frac{2}{s^3+3s^2+4s+3}$$

dan diagram blok menjadi



Reduksi diagram blok pada akhirnya akan memberikan fungsi alih dari sistem yaitu $H_4(s)$.

Sub-Sistem Statis dan Dinamis. Perhatikanlah bahwa dalam diagram blok yang diperoleh pada contoh 11.3. terdapat blok-blok yang berisi nilai konstan dan ada yang berisi fungsi s atau lebih tepat blok yang menggambarkan fungsi alih bernilai konstan dan blok yang menggambarkan fungsi alih yang merupakan fungsi dari peubah Laplace s . Blok yang berisi nilai konstan berasal dari elemen statis resistor, dan yang berisi fungsi s berasal dari elemen dinamik C ataupun L . Suatu sub-sistem disebut *dinamis* jika fungsi transfer-nya merupakan fungsi peubah Laplace s . Jika fungsi alihnya bernilai konstan (*gain* konstan) maka sub-sistem itu disebut *statis*.

Diagram Blok Integrator. Suatu diagram blok yang seluruh blok-blok dinamisnya berupa blok integrator disebut *diagram blok integrator*. Sebagaimana telah dibahas, blok integrator berasal dari elemen dinamik apabila kita mengambil *peubah status* sebagai keluaran. Untuk kapasitor $V(s) = (1/C)(1/s)I(s)$ dan untuk induktor $I(s) = (1/L)(1/s)V(s)$.

Pembentukan diagram blok integrator dari suatu fungsi alih dapat dilakukan karena fungsi alih $H(s)$ yang berbentuk rasio polinomial dapat kita uraikan menjadi suku-suku :

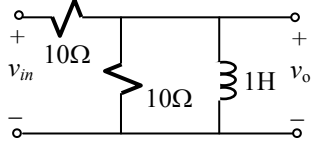
$$H(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(s-p_n)}$$

Hal ini telah kita lihat di Bab-6. Selanjutnya, setiap suku dari fungsi alih $H(s)$ yang berbentuk $\frac{a}{s+b}$ dapat ditulis sebagai $\left(\frac{a}{b}\right)\frac{b(1/s)}{1+b(1/s)}$ yang diagram bloknya merupakan

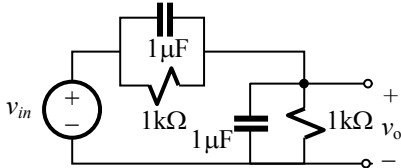
hubungan seri antara blok statis $\boxed{\frac{a}{b}}$ dengan blok berumpan balik $\boxed{\frac{1}{s}}$ yang jalur umpan-balik-nya berisi blok statis \boxed{b} . Dengan demikian maka diagram blok dari $H(s)$ dapat dibuat hanya terdiri dari blok statis dan blok integrator saja.

SOAL-SOAL : DIAGRAM BLOK

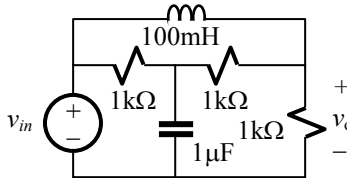
1. Susunlah diagram blok dari rangkaian berikut, lakukan reduksi diagram blok, tentukan fungsi alihnya.



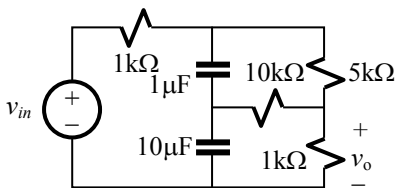
2. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



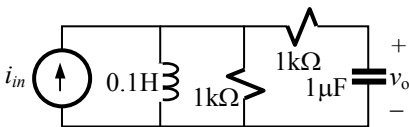
3. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



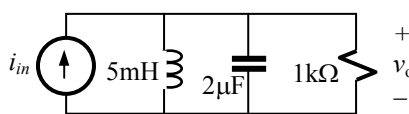
4. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



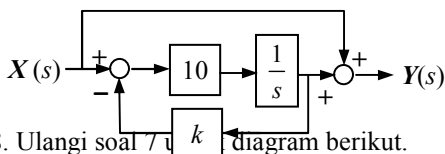
5. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



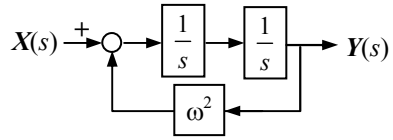
6. Ulangi soal 1 untuk rangkaian berikut.



7. Lakukan reduksi diagram blok dan carilah fungsi alih dari diagram blok berikut.

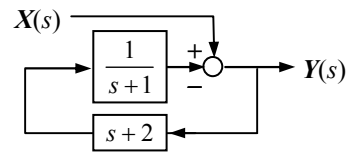


8. Ulangi soal 7 untuk diagram berikut.

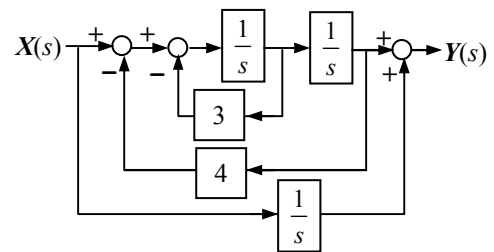


9. Bagaimanakah fungsi alih yang akan diperoleh jika keluaran soal 7 menjadi masukan soal 8.

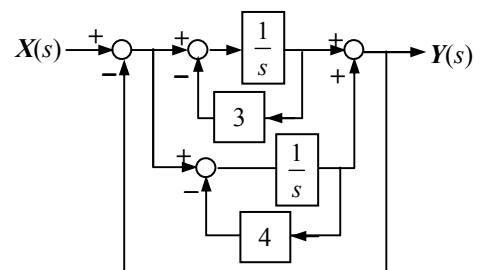
10. Ulangi soal 7 untuk diagram berikut.



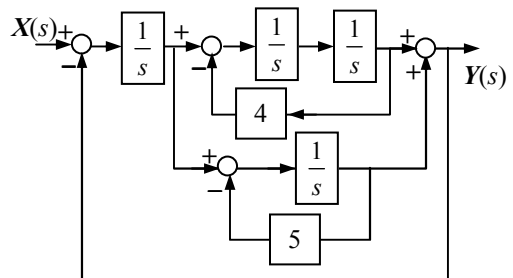
11. Ulangi soal 7 untuk diagram berikut.



12. Ulangi soal 7 untuk diagram berikut.



13. Ulangi soal 7 untuk diagram berikut.



11.3. Persamaan Ruang Status

Persamaan ruang status (*state space equations*) atau *representasi ruang keadaan* (*state space representation*) merupakan satu alternatif untuk menyatakan sistem dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan ini dapat diturunkan dari diagram blok integrator.

Blok Integrator dan Blok Statis. Kita lihat lebih dulu blok integrator $X(s) \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow Y(s)$

yang menunjukkan hubungan $Y(s) = \frac{1}{s} X(s)$. Hubungan ini di kawasan t adalah

$$y(t) = \int x(t) \text{ yang dapat kita tuliskan sebagai } x(t) = \dot{y}(t)$$

Hubungan terakhir di kawasan t ini dapat kita baca sebagai : sinyal masukan adalah turunan dari sinyal keluaran. Sekarang blok $\boxed{\frac{1}{s}}$ kita pandang sebagai *integrator* dan bukan sebagai gambaran dari fungsi alih $1/s$. Dengan pandangan ini maka jika keluaran integrator adalah $q(t)$ masukannya adalah $\dot{q}(t)$. Kita dapat menggambarkan hubungan *keluaran dan masukan di kawasan t* dari integrator sebagai

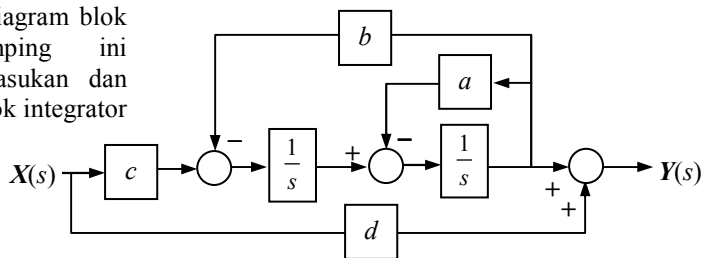
$$\dot{q}(t) \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow q(t) .$$

Perhatikan: Secara teknis penggambaran di atas tidak benar. Akan tetapi kita harus mengartikan gambar tersebut sebagai diagram sub-sistem yang mempunyai sinyal masukan $\dot{q}(t)$ dan sinyal keluarannya $q(t)$ dan bukan $q(t)$ sama dengan $(1/s)$ kali $\dot{q}(t)$.

Blok integrator tersebut berbeda dengan blok statis $X(s) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow Y(s)$ yang memberikan hubungan $Y(s) = aX(s)$ dan di kawasan t memberikan $y(t) = ax(t)$. Jadi dengan blok statis kita dapat menggambarkan hubungan $y(t) = ax(t)$ dengan diagram $x(t) \rightarrow \boxed{a} \rightarrow y(t)$.

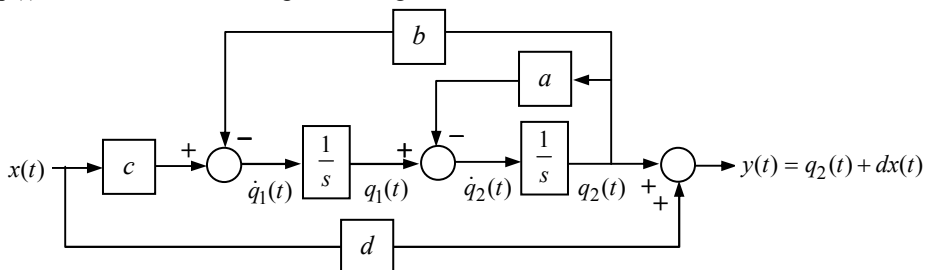
Diagram Blok Integrator Dengan Sinyal Sebagai Fungsi t. Berikut ini kita akan melihat contoh suatu diagram blok integrator yang sinyal masukan dan keluaran dari setiap integrator dinyatakan sebagai fungsi t .

CONTOH 11.5 : Dalam diagram blok integrator di samping ini nyatakanlah sinyal masukan dan keluaran pada setiap blok integrator sebagai fungsi t .



Penyelesaian :

Jika sinyal masukan setiap blok integrator adalah $\dot{q}_i(t)$ dan sinyal keluarannya adalah $q_i(t)$ maka kita akan mendapatkan diagram berikut.



Membangun Persamaan Ruang Status. Dari diagram pada contoh 11.5. di atas, kita dapat memperoleh satu set persamaan di kawasan t yang akan memberikan hubungan antara sinyal masukan dan sinyal keluaran sistem, yaitu $x(t)$ dan $y(t)$. Dengan perkataan lain kita dapat memperoleh persamaan sistem di kawasan t . Set persamaan tersebut adalah :

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t) &= -bq_2(t) + cx(t) \\ \dot{q}_2(t) &= q_1(t) - aq_2(t) \\ y(t) &= q_2(t) + dx(t)\end{aligned}\tag{11.7}$$

Persamaan (11.7) terdiri dari dua kelompok. Kelompok pertama adalah persamaan yang ruas kirinya berisi $\dot{q}(t)$ dan kelompok kedua adalah yang ruas kirinya berisi $y(t)$. Kelompok pertama dapat kita tuliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)\tag{11.8}$$

Dengan mendefinisikan vektor $\dot{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix}$ dan $\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$ maka (11.8) dapat kita tuliskan

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} [\bar{q}(t)] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)\tag{11.9}$$

Kelompok kedua dari (11.7) adalah $y(t) = q_2(t) + dx(t)$ dan dengan definisi untuk vektor $q(t)$ maka ia dapat kita tuliskan dalam bentuk matriks

$$y(t) = [0 \quad 1][\bar{q}(t)] + [d]x(t)\tag{11.9}$$

Dengan demikian maka set persamaan (11.7) dapat kita tuliskan sebagai

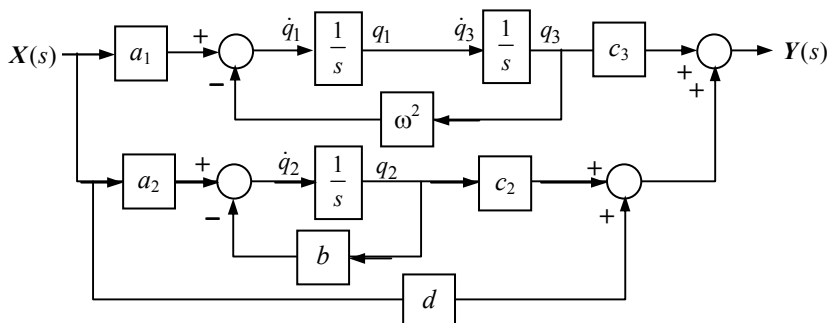
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} [\bar{q}(t)] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= [0 \quad 1][\bar{q}(t)] + [d]x(t)\end{aligned}\tag{11.10}$$

Secara umum bentuk persamaan (11.10) dapat kita tulis sebagai

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= [A][\bar{q}(t)] + [B]x(t) \\ y(t) &= [C][\bar{q}(t)] + [D]x(t)\end{aligned}\tag{11.11}$$

Set persamaan (11.11) ini disebut *representasi ruang status* dari sistem. Sebutan lain dari representasi ini adalah *model ruang status* atau juga *persamaan peubah status* atau *persamaan ruang status*.

CONTOH 11.6 : Carilah representasi ruang status dari sistem berikut.



Penyelesaian:

Dari diagram di atas kita peroleh persamaan berikut.

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= a_1x(t) - \omega^2q_3 \\ \dot{q}_2 &= a_2x(t) - bq_2 \\ \dot{q}_3 &= q_1 \\ y(t) &= c_3q_3 + c_2q_2 + dx(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\vec{q}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= [0 \quad c_2 \quad c_3] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + [d]x(t) \end{aligned}$$

Membangun Diagram Blok dari Persamaan Ruang Status. Melalui contoh 11.7. berikut ini kita akan melihat bagaimana diagram blok suatu sistem dibangun jika diketahui persamaan ruang statusnya.

CONTOH 11.7 : Bangunlah diagram blok sistem yang persamaan ruang statusnya adalah sebagai berikut.

$$\dot{\vec{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

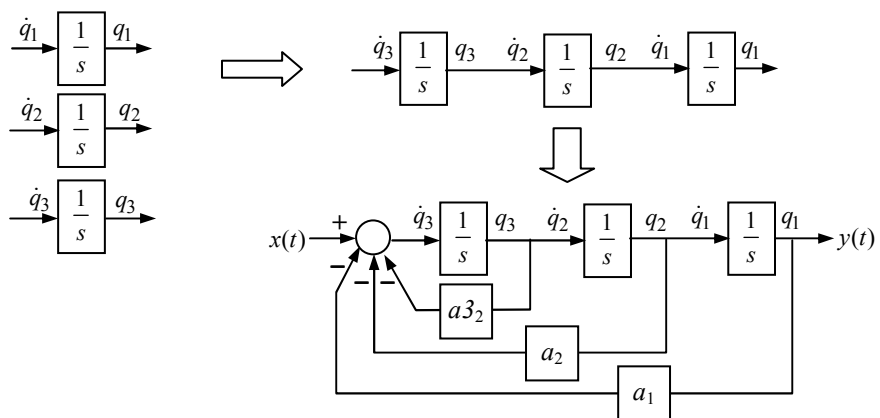
$$y(t) = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \vec{q}(t)$$

Penyelesaian :

Langkah pertama adalah melakukan pengembangan dari persamaan yang diketahui sehingga memberikan set persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{q}_2(t) &= q_3(t) \\ \dot{q}_3(t) &= -a_1q_1(t) - a_2q_2(t) - a_3q_3(t) \\ y(t) &= b_1q_1(t) + b_2q_2(t) + b_3q_3(t) \end{aligned}$$

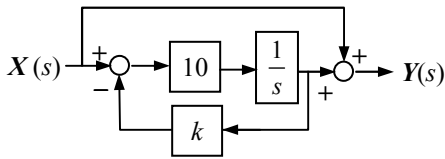
Langkah berikutnya adalah menggambarkan blok-blok integrator dengan masukan dan keluaran masing-masing, melakukan penghubungan dan kemudian membuat pencabangan-pencabangan dan penjumlahan sesuai dengan persamaan di atas.



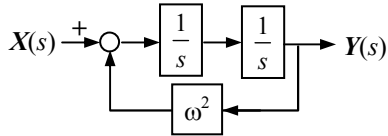
Demikianlah perkenalan singkat kita dengan sistem dan perkenalan ini mengakhiri pelajaran kita mengenai analisis rangkaian listrik. Kita akan memperdalam mengenai sistem ini dalam pelajaran yang lain.

SOAL-SOAL : PERSAMAAN RUANG STATUS

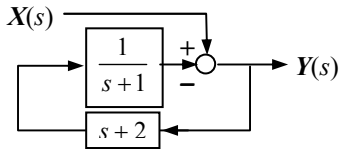
1. Carilah persamaan ruang status dari sistem dengan diagram blok di bawah ini.



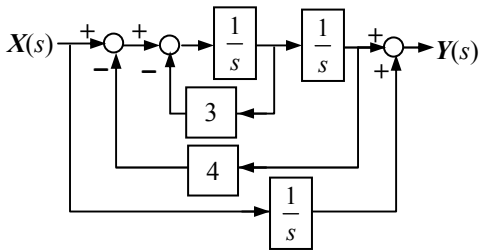
2. Ulangi soal 1 untuk sistem berikut.



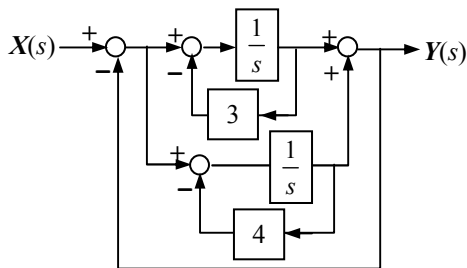
3. Ulangi soal 1 untuk sistem berikut. Ubahlah lebih dulu menjadi diagram blok integrator.



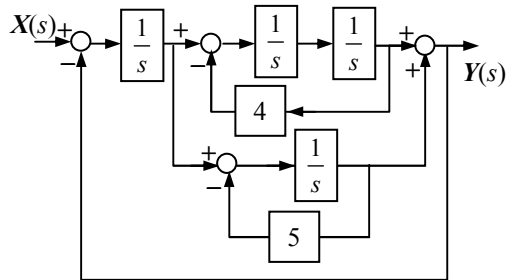
4. Ulangi soal 1 untuk sistem berikut.



5. Ulangi soal 1 untuk sistem berikut.



6. Ulangi soal 1 untuk diagram berikut.



8. Gambarkan diagram blok dari sistem dengan persamaan status berikut ini.

$$\dot{\vec{q}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \vec{q}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [9 \quad 0 \quad 0] \vec{q}(t) + 10x(t)$$

9. Ulangi soal 8 untuk sistem berikut.

$$\dot{\vec{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [5 \quad 0 \quad 0] \vec{q}(t) + 5x(t)$$

10. Ulangi soal 8 untuk sistem berikut.

$$\dot{\vec{q}}(t) = \begin{bmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{bmatrix} \vec{q}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 1] \vec{q}(t)$$

10. Ulangi soal 8 untuk sistem berikut.

$$\dot{\vec{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \vec{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \vec{q}(t)$$

11. Ulangi soal 8 untuk sistem berikut.

$$\dot{\vec{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \vec{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \vec{q}(t)$$

Peubah Kompleks

A.1. Bilangan Kompleks

Definisi

Tinjau persamaan $s^2 + 1 = 0$ dan sebutlah akarnya $j = \sqrt{-1}$.

Suatu bilangan kompleks s didefinisikan sebagai

$$s = \sigma + j\omega \quad \text{dengan } \sigma \in \mathfrak{R} \text{ dan } \omega \in \mathfrak{R} \quad (\text{A.1})$$

Representasi bilangan kompleks seperti di atas disebut representasi *sudut siku*; σ adalah bagian riil dari s dan ditulis $\text{Re}(s) = \sigma$, ω adalah bagian imajiner dari s dituliskan $\text{Im}(s) = \omega$.

Operasi-Operasi Aljabar

Penjumlahan dan Pengurangan. Penjumlahan bilangan kompleks adalah sebagai berikut.

$$s_1 + s_2 = (\sigma_1 + j\omega_1) + (\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1 + \sigma_2) + j(\omega_1 + \omega_2)$$

$$s_1 - s_2 = (\sigma_1 + j\omega_1) - (\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1 - \sigma_2) + j(\omega_1 - \omega_2)$$

Perkalian. Perkalian dua bilangan kompleks adalah sebagai berikut.

$$(s_1)(s_2) = (\sigma_1 + j\omega_1)(\sigma_2 + j\omega_2) = (\sigma_1\sigma_2 - \omega_1\omega_2) + j(\omega_1\sigma_2 + \sigma_1\omega_2)$$

Pembagian. Pembagian satu bilangan kompleks oleh bilangan kompleks yang lain adalah sebagai berikut.

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sigma_1 + j\omega_1}{\sigma_2 + j\omega_2} \times \frac{\sigma_2 - j\omega_2}{\sigma_2 - j\omega_2} = \frac{(\sigma_1\sigma_2 + \omega_1\omega_2) + j(\omega_1\sigma_2 - \sigma_1\omega_2)}{\sigma_2^2 + \omega_2^2}$$

CONTOH A.1. : Jika $s_1 = 2 + j3$ dan $s_2 = 3 + j4$ maka

$$s_1 + s_2 = (2 + j3) + (3 + j4) = 5 + j7$$

$$s_1 - s_2 = (2 + j3) - (3 + j4) = -1 - j1$$

$$(s_1)(s_2) = (2 + j3)(3 + j4) = (6 - 12) + j(8 + 9) = -6 + j17$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{2 + j3}{3 + j4} \times \frac{3 - j4}{3 - j4} = \frac{(6 + 12) + j(-8 + 9)}{3^2 + 4^2} = \frac{18}{25} + j\frac{1}{25}$$

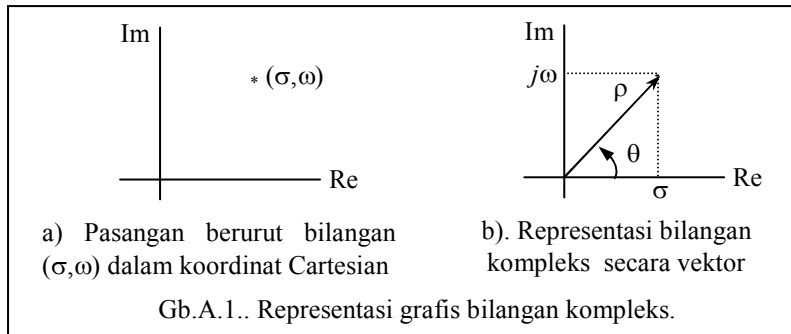
Representasi Grafis

Suatu bilangan kompleks dapat kita pandang sebagai pasangan berurut dari dua bilangan riil.

$$s = \sigma + j\omega \Leftrightarrow (\sigma, \omega) \quad (\text{A.2})$$

Dengan demikian kita dapat menggambarkannya dalam sistem koordinat Cartesian seperti pada Gb.A.1.a. Bidang dengan sumbu koordinat Re (sumbu riil) dan Im (sumbu imajiner) ini disebut bidang kompleks atau bidang s . Suatu kumpulan bilangan kompleks akan terletak di bidang kompleks ini.

Pasangan berurut (σ, ω) dapat pula diasosiasikan dengan sebuah vektor seperti terlihat pada Gb.A.1.b.; dengan kata lain vektor tersebut merepresentasikan bilangan kompleks. Dengan representasi ini maka operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks menjadi operasi penjumlahan dan pengurangan vektor. Dengan cara grafis, operasi-operasi ini lebih mudah dimengerti. Jika kita menggunakan representasi grafis untuk bilangan kompleks, maka representasi vektorlah yang kita gunakan dan bukan pasangan berurut bilangan riil.



Bentuk Sudut Siku dan Bentuk Polar

Ada dua cara untuk menyatakan vektor yaitu bentuk sudut siku dan bentuk polar. Bentuk sudut siku adalah seperti yang kita pakai untuk menyatakan definisi bilangan kompleks, yaitu $s = \sigma + j\omega$. Bentuk polar diturunkan dari bentuk sudut siku melalui relasi geometri sederhana. Jika panjang vektor pada Gb.A.1.b. adalah ρ , dan θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor tersebut dengan sumbu Re maka

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \cos \theta & \text{dan} & & \omega &= \rho \sin \theta \\ \rho &= \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} & \text{dan} & & \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\sigma} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Fungsi eksponensial dari suatu bilangan kompleks $r = \tau + j\theta$ didefinisikan sebagai

$$e^r = e^{(\tau + j\theta)} = e^\tau (\cos \theta + j \sin \theta) ; \text{ dengan } e^\tau \text{ adalah fungsi eksponensial riil} \quad (\text{A.4})$$

Melalui persamaan atau identitas Euler, yaitu

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (\text{A.5})$$

representasi polar dari bilangan kompleks adalah

$$\boxed{s = \rho e^{j\theta}} \quad (\text{A.7})$$

Nilai absolut (*magnitude*) s adalah ρ , ditulis $|s| = \rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$. Sudut θ disebut sudut fasa, ditulis $\angle s = \theta$.

CONTOH A.2 : Misalkan suatu bilangan kompleks $s = 10 e^{j0,5}$.

Nilai bilangan kompleks ini adalah $|s| = 10$ dan sudut fasanya $\angle s = 0,5$ rad.

Bentuk sudut sikunya adalah: $s = 10 (\cos 0,5 + j \sin 0,5) = 10 (0,88 + j0,48) = 8,8 + j4,8$

CONTOH A.3 : Misalkan suatu bilangan kompleks $s = 3 + j4$.

Nilai absolut s adalah $|s| = \rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Sudut fasanya adalah $\angle s = \theta = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0,93$ rad.

Representasi polar adalah: $s = 5 e^{j0,93}$

CONTOH A.4 : Misalkan suatu bilangan kompleks $s = -1$.

Representasi polar adalah : $s = -1 = e^{j\pi} = e^{-j\pi}$

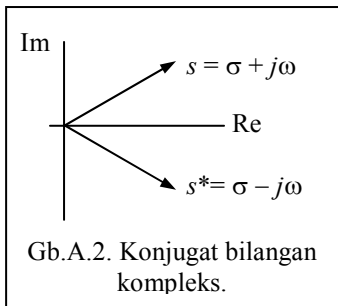
Pemahaman : $\tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right)$ tidak bernilai tunggal. Kita harus berhati-hati menentukan sudut fasanya. Di sini kita harus memilih π rad.

CONTOH A.5 : Representasi polar dari bilangan kompleks mempermudah operasi perkalian dan pembagian.

$$(s_1)(s_2) = \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Konjugat Kompleks. Konjugat dari suatu bilangan kompleks diperoleh dengan mengganti j dengan $-j$.



Jika $s = \sigma + j\omega$ maka konjugatnya adalah $s = \sigma - j\omega$. Perhatikan Gb.A.2.

Relasi-relasi antara suatu bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah sebagai berikut.

$$(s)(s^*) = |s|^2 \quad \text{atau} \quad |s| = \sqrt{s s^*}$$

$$[s_1 + s_2]^* = s_1^* + s_2^*$$

$$[s_1 s_2]^* = (s_1^*) (s_2^*)$$

$$\left[\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} \right]^* = \begin{array}{c} s_1^* \\ s_2^* \end{array}$$

A.2. Fungsi Kompleks

Definisi

Fungsi kompleks $X(s)$ adalah suatu fungsi yang memetakan suatu set bilangan kompleks ke dalam satu set bilangan kompleks.

Pole. Suatu fungsi kompleks $X(s)$ dikatakan mempunyai *pole* di $s = p_1$ jika

$$\lim_{s \rightarrow p_1} X(s) = \infty \quad (\text{A.8})$$

Zero. Suatu fungsi kompleks $X(s)$ dikatakan mempunyai *zero* di $s = z_1$ jika

$$\lim_{s \rightarrow z_1} X(s) = 0 \quad (\text{A.9})$$

CONTOH A.6 : Tinjau suatu fungsi kompleks $X(s) = \frac{s-b}{s-a}$, $a \neq b$

Fungsi ini mempunyai *pole* di $s = a$ dan *zero* di $s = b$

Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi kompleks yang merupakan rasio dua polinomial dengan koefisien riil.

$$X(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (\text{A.10})$$

Kita definisikan bahwa orde dari fungsi ini adalah n . Polinomial $b(s)$ disebut *numerator* (kita menggunakan istilah *pembilang*), sedangkan $a(s)$ disebut *denominator* (kita menggunakan istilah *penyebut*). Dalam penulisan fungsi rasional biasanya diambil $a_n = 1$.

Fungsi rasional $X(s)$ dikatakan *proper* (kita menggunakan istilah *patut*) jika $m \leq n$; dikatakan *not proper* (*kurang patut*) jika $m > n$. Fungsi rasional dengan $m > n$ sering juga disebut fungsi *non-kausal*.

Jika $X(s)$ adalah fungsi rasional dengan koefisien riil, kita dapat menyatakan $b(s)$ dan $a(s)$ dalam faktor-faktor linier.

$$X(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (\text{A.11})$$

Jika koefisien $X(s)$ riil maka akar-akar kompleks dari $b(s)$ dan $a(s)$ akan berupa pasangan konjugat. Bentuk pernyataan fungsi rasional seperti (A.11) ini memperlihatkan dengan jelas *pole* dan *zero*-nya. Pada umumnya kita menghadapi fungsi yang *proper*, sehingga jumlah *zero* lebih kecil dari jumlah *pole*. Dalam keadaan demikian sering kita menganggap bahwa fungsi demikian mempunyai $(n - m)$ *zero* di tak hingga.

CONTOH A.7 : Misalkan kita mempunyai fungsi rasional $X(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)(s+4)}$.

Fungsi ini dapat ditulis sebagai $X_1(s) = \frac{(s+1)}{(s+4)}$.

$X_1(s)$ merupakan bentuk tereduksi dari $X(s)$. Numerator dan denominator dari fungsi $X(s)$ mempunyai faktor yang sama yaitu $(s + 2)$ dan faktor yang sama ini dapat dieliminir.

Numerator dan denominator dari fungsi tereduksi $X_1(s)$ mempunyai pula faktor sama, yaitu 1. Jadi faktor yang sama antara polinomial $b(s)$ dan $a(s)$ pada $X_1(s)$ adalah 1; dua polinomial yang demikian ini disebut *coprime*. Dalam menangani fungsi rasional kita bekerja pada bentuk yang tereduksi; kita menganggap bahwa numerator dan denominator adalah *coprime*.

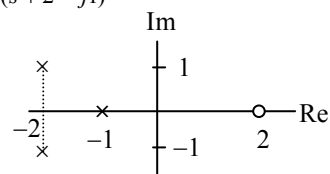
Representasi Grafis Fungsi Rasional Kompleks. Diagram Pole-Zero

Fungsi rasional dapat direpresentasikan secara grafis, yaitu dengan menggambarkan *pole* dan *zero* dalam bidang kompleks. *Pole* diberi tanda "x" sedangkan *zero* diberi tanda "o". Hasilnya kita sebut diagram *pole-zero*.

CONTOH A.8 : Tinjau fungsi $X(s) = \frac{5(s-1)}{(s+1)(s+2+j1)(s+2-j1)}$.

Zero ada di $s = 1$.

Pole ada di $s = -1, (-2-j1), (-2+j1)$.



Resistor

Rangkaian pemroses energi maupun pemroses sinyal memerlukan resistor yang sedapat mungkin bersifat “ohmic”. Gejala-gejala adanya induktansi maupun kapasitansi pada piranti ini harus diusahakan sekecil mungkin. Resistor juga harus mempunyai koefisien temperatur yang rendah agar dalam operasinya perubahan nilai resistansi sebagai akibat kenaikan temperatur masih dalam batas-batas yang dapat diterima. Nilai resistansi yang diperlukan dalam rangkaian listrik bisa tinggi bahkan sangat tinggi, terutama dalam rangkaian elektronika, antara 10^3 sampai $10^8 \Omega$. Sementara itu material yang sesuai untuk membangun resistor mempunyai resistivitas ρ kurang dari $10^{-6} \Omega\text{m}$. Oleh karena itu dikembangkan bentuk konstruksi serta cara-cara pembuatan resistor yang dapat memenuhi persyaratan-persyaratan teknis (termasuk dimensi) serta pertimbangan-pertimbangan ekonomis

Konstruksi

Lapisan Tipis (Thin Films). Di atas permukaan suatu bahan pendukung (substrat) dibuat lapisan tipis bahan resistif melalui proses evaporasi (penguapan) ataupun *sputtering* dalam vakum. Bahan-bahan metal seperti aluminium, perak, emas, dan Ni-Cr dapat dengan mudah diuapkan dalam vakum untuk membentuk lapisan tipis di atas permukaan substrat. Ketebalan lapisan yang diperoleh adalah sekitar 10 nm. Setelah lapisan tipis ini terbentuk, dilakukan “pengupasan” lapisan menurut pola-pola tertentu untuk memperoleh lebar dan panjang lapisan yang diinginkan sesuai dengan nilai resistansi yang diperlukan. Proses “pengupasan” dapat dilakukan dengan beberapa cara, misalnya dengan *air jet* yang mengandung partikel-partikel abrasif, atau penguapan dengan berkas sinar laser atau berkas elektron. Sering juga digunakan proses photolithography.

Lapisan Tebal (Thick Film). Tebal lapisan bahan resistif aktif di sini adalah antara 10 – 15 μm , dibuat dengan teknik *sablon*. Pola-pola alur resistor dibuat lebih dahulu pada *screen* yang kemudian diletakkan tetap sekitar 1 – 3 mm di atas permukaan substrat. Cat dengan kekentalan tertentu, yang merupakan bahan resistor, diletakkan di atas screen kemudian disapukan merata menggunakan penyapu dari karet-keras dengan tekanan yang cukup agar screen menyentuh permukaan substrat. Jika penyapuan dihentikan screen akan kembali pada posisi semula dan terbentuklah pola-pola cat di atas substrat. Kekentalan cat harus dibuat sedemikian rupa sehingga pada waktu screen terangkat, cat yang berada di atas substrat meluber ke tempat yang semula tertutup oleh benang / kawat screen. Dengan demikian ketebalan lapisan tidak terlalu bervariasi.

Cat bahan resistor diperoleh melalui pencampuran tepung bahan konduktif (biasanya oksida misalnya PdO , RuO_2 , dengan konduktivitas $10^6 - 10^6 \text{ Sm}^{-1}$) dengan tepung silikat (boro-silikat timbal) serta campuran bahan organik. Setelah pola-pola resistor terbentuk di atas permukaan substrat, dilakukan pemanasan secara terkendali pada temperatur antara 100 – 150 °C sehingga larutan organik menguap. Sisa-sisa bahan organik yang masih tersisa dihilangkan dengan pemanasan pada temperatur 200 – 400 °C. Yang tertinggal adalah campuran silikat dan komponen resistif aktif yang akan melekat dengan baik pada permukaan substrat melalui pemanasan pada temperatur 800 °C.

Gulungan Kawat. Untuk memperoleh kemampuan arus yang lebih tinggi, dibuat resistor dari gulungan kawat. Untuk mengurangi efek induktansi pada gulungan kawat ini dilakukan cara penggulungan tertentu, misalnya penggulungan *bifilar*.

Resistor Dalam Rangkaian Terintegrasi. Selain konstruksi tersebut di atas, kita mengenal resistor-resistor dalam rangkaian terintegrasi.

Nilai-Nilai Standar Resistor

Resistor dibuat menurut suatu nilai standard dengan toleransi seperti terlihat pada tabel B.1. di samping ini.

Nilai	Toleransi ± %	Nilai	Toleransi ± %	Nilai	Toleransi ± %
10	5; 10; 20	22	5; 10; 20	47	5; 10; 20
11	5	24	5	51	5
12	5; 10	27	5; 10	56	5; 10
13	5	30	5	62	5
15	5; 10; 20	33	5; 10; 20	68	5; 10; 20
16	5	36	5	75	5
18	5; 10	39	5; 10	82	5; 10
20	5	43	5	91	5

Macam-Macam Resistor dan Rentang Kapasitas Daya

Tabel B.2. di samping ini memuat macam-macam resistor serta rentang kapasitas dayanya.

Tabel B.2. Macam-Macam Resistor & Rentang Dayanya		
Type & Nilai Numerik	Toleransi ± %	Daya W
Komposit 1 Ω - 20 MΩ	5; 10; 20	1/8; 1/4; 1/2; 1; 2
Karbon 1 Ω - 20 MΩ	1; 2; 5	1/2 ÷ 2
Lapisan Logam 10 Ω - 10 MΩ	0.01 ÷ 1	1/20 ÷ 1/4.
Kawat gulung 0.1 Ω - 200 kΩ	0.1 ÷ 2	1; 2; 5; 10; 25

Potensiometer

Potensiometer merupakan piranti tiga terminal dimanfaatkan untuk memperoleh pembagian tegangan yang dapat divariasikan. Untuk potensiometer, rentang nilai numerik dan dayanya diberikan dalam tabel B.3.

Tabel B.3. Potensiometer		
Tipe & Nilai Numerik	Toleransi ± %	Daya W
Komposit 50 Ω - 5 MΩ	10	2
Lapisan Logam 50 Ω - 10 kΩ	2,5	0,5 ÷ 1
Kawat gulung 10 Ω - 100 kΩ	2,5	1 ÷ 1000

Kapasitor

Dalam rangkaian listrik kapasitor dapat melakukan berbagai fungsi, misalnya kopling kapasitif, pemisahan tegangan bolak-balik dan tegangan searah, *filtering* (penapisan) dan penyimpanan energi. Kapasitor melewatkan arus bolak-balik tetapi menahan arus searah sehingga ia dapat mengkopel arus bolak-balik antara satu bagian rangkaian dengan bagian lainnya sementara arus searah di kedua bagian tersebut dipisahkan. Nilai kapasitor juga dapat dipilih sedemikian rupa guna memilah frekuensi yang berbeda. Sebagai penyimpan muatan ia dapat dimanfaatkan misalnya pada lampu kilat kamera.

Efisiensi Volume

Efisiensi volume merupakan ukuran kapasitansi yang mungkin diperoleh untuk suatu ukuran (dimensi) tertentu. Untuk kapasitor pelat paralel dengan luas A dan jarak elektroda d (yang berarti juga tebal dielektrik = d), serta permitivitas relatif dielektrik adalah ϵ_r , maka kapasitansi adalah

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (C.1)$$

dan efisiensi volume adalah C/volume

$$\frac{C}{\text{volume}} = \frac{C}{Ad} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{d^2} \quad (C.2)$$

Jadi efisiensi volume berbanding lurus dengan permitivitas relatif ϵ_r dan berbanding terbalik dengan kuadrat tebal dielektriknya. Hal ini berarti bahwa makin tinggi permitivitas relatif dan makin tipis bahan dielektriknya akan makin tinggi efisiensi volumenya. Akan tetapi dielektrik tidak dapat dibuat terlalu tipis karena bahan dielektrik mempunyai kekuatan menahan tegangan tertentu yang jika dilampaui akan terjadi tembus listrik.

Jika kuat medan tembus dielektrik adalah E_b sedangkan kapasitor dirancang untuk tegangan kerja V_k , maka dengan faktor keamanan η kita akan membuat

$$\eta V_k = E_b d \quad (C.3)$$

Dari (C.2) dan (C.3) kita dapat menentukan kerapatan energi dalam dielektrik yang diperkenankan, yaitu

$$\left(\frac{1}{2} C V_k^2 \right) / \text{volume} = \left(\frac{1}{2} C V_k^2 \right) / \frac{C d^2}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 V_k^2}{2 d^2} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 E_b^2}{2 \eta^2} \quad (C.4)$$

Persamaan (C.4) menunjukkan bahwa dalam memilih dielektrik untuk kapasitor tegangan tinggi faktor $\epsilon_r E_b^2$ perlu diperhatikan.

Muatan yang dapat tersimpan dalam kapasitor adalah $q = C V_k$. Efisiensi penyimpanan muatan adalah q/volume menjadi

$$\frac{q}{\text{volume}} = \frac{C}{\text{volume}} V_k \quad (C.5)$$

Jadi efisiensi penyimpanan muatan sama dengan efisiensi volume kali tegangan kerjanya.

Resistansi Arus Searah

Kapasitor nyata (bukan ideal) mengandung resistansi arus searah yang besarnya

$$R_c = \frac{\rho d}{A} \text{ dengan } \rho \text{ adalah resistivitas dielektrik.} \quad (C.6)$$

Suatu kapasitor yang bermuatan Q_0 akan melepaskan muatannya melalui resistansi ini sesuai dengan relasi

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \text{ dengan } \tau = R_c C \quad (C.7)$$

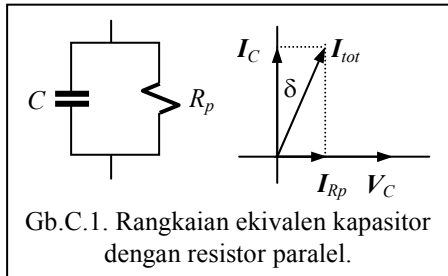
Konstanta waktu τ ini tidak tergantung dari dimensi kapasitor tetapi ditentukan hanya oleh dielektriknya. Hal ini dapat kita lihat jika kita masukkan (C.6) dan (C.1) kita dapatkan

$$\tau = R_c C = \frac{\rho d}{A} \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \rho \epsilon_r \epsilon_0 \quad (C.8)$$

Resistansi R_c di atas adalah resistansi dari volume dielektrik. Untuk kapasitor tegangan tinggi ($> 1\text{kV}$), kita harus memperhatikan pula adanya resistansi permukaan antara elektroda.

Rangkaian Ekuivalen Pada Tegangan Bolak-Balik

Jika tegangan bolak-balik diterapkan pada kapasitor ideal, tidak terjadi *desipasi* energi.



Gb.C.1. Rangkaian ekivalen kapasitor dengan resistor paralel.

Dalam kenyataan, kapasitor mengandung resistansi baik resistansi kawat terminasi, elektroda, maupun resistansi dielektriknya sendiri. Yang paling dominan adalah resistansi dielektrik. Adanya resistansi ini menyebabkan terjadinya desipasi energi, yang dinyatakan sebagai “faktor desipasi” atau $\tan \delta$. Untuk menyatakan adanya rugi-rugi ini, suatu kapasitor dinyatakan dengan rangkaian ekivalen yang terdiri dari kapasitor ideal paralel dengan sebuah resistor R_p seperti pada Gb.C.1. atau kapasitor ideal seri dengan resistor R_s seperti Gb.C.2. Nilai R_p dan R_s untuk kedua rangkaian ekivalen ini masing-masing adalah

$$R_p = \frac{V_C}{I_{R_p}} = \frac{V_C}{I_C \tan \delta} = \frac{1}{\omega C \tan \delta} \quad (C.9)$$

$$R_s = \frac{V_{R_s}}{I_{R_s}} = \frac{V_C \tan \delta}{I_C} = \frac{\tan \delta}{\omega C} \quad (C.10)$$

Rangkaian ekivalen dengan resistor seri lebih mudah digunakan dalam aplikasi praktis karena dalam rangkaian ekivalen ini resistor seri dilalui arus yang sama dengan arus kapasitor. Resistor seri yang digunakan untuk menyatakan adanya gejala resistansi pada kapasitor ini sering disebut *e.s.r.* (*equivalent series resistance*). Untuk frekuensi tinggi, selain resistansi kita perlu memperhitungkan pula adanya gejala induktansi L pada sambungan-sambungan kawat serta elektroda. Dalam hal terakhir ini rangkaian ekivalen kapasitor berupa rangkaian seri resistor R_s , induktor L_s dan kapasitor ideal C , yang pada frekuensi tinggi tertentu bisa terjadi resonansi.

Desipasi Daya Pada Kapasitor

Dari diagram fasor Gb.C.1. dapat diformulasikan daya yang didesipasi berupa panas, yaitu sebesar

$$P = V_C I_{R_p} = V_C I_C \tan \delta = V_C I_C \tan \delta \quad (C.11)$$

atau dari Gb.C.2.

$$P = V_{R_s} I_C = V_C I_C \tan \delta = V_C I_C \tan \delta \quad (C.12)$$

V_C dan I_C dalam kedua persamaan ini adalah nilai efektif tegangan dan arus. Oleh karena $I_C = j\omega C V_C$ atau $I_C = \omega C V_C$ maka persamaan (C.11) ataupun (C.12) dapat dituliskan sebagai

$$P = V_C (\omega C V_C) \tan \delta = V_C^2 \omega C \tan \delta \quad (C.13)$$

Jika tegangan kapasitor dinyatakan sebagai fungsi sinus $v_C = V_{maks} \sin \omega t$, nilai efektif tegangan adalah $V_C = \frac{V_{maks}}{\sqrt{2}}$ dan persamaan (C.13) dapat pula ditulis sebagai

$$P = \frac{1}{2} V_{maks}^2 \omega C \tan \delta \quad (C.14)$$

Kerapatan daya yang didesipasi adalah

$$\begin{aligned} \frac{P}{\text{volume}} &= \frac{1}{2} \frac{V_{maks}^2 \omega C \tan \delta}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \frac{V_{maks}^2 \omega (\epsilon_r \epsilon_0 A / d) \tan \delta}{A \times d} = \frac{1}{2} \frac{V_{maks}^2 \omega \epsilon_r \epsilon_0 \tan \delta}{d^2} \\ &= \frac{1}{2} E_{maks}^2 \omega \epsilon_r \epsilon_0 \tan \delta \end{aligned} \quad (C.15)$$

$$\sigma_{AC} = \omega \epsilon_r \epsilon_0 \tan \delta \text{ disebut } \textit{konduktivitas dielektrik}. \quad (C.16)$$

$(\epsilon_r \tan \delta)$ disebut *faktor rugi-rugi dielektrik*

Permittivitas Kompleks

Rugi daya pada kapasitor sesungguhnya adalah rugi daya pada dielektriknya, atau dengan kata lain faktor rugi-rugi $\tan \delta$ adalah sifat dari dielektriknya. Untuk mencakup adanya rugi-rugi dielektrik ini, dikenalkan pengertian permitivitas relatif kompleks dari dielektrik, yaitu

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' \quad (C.15)$$

dengan ϵ_r' adalah bagian riil dan ϵ_r'' adalah bagian imajiner dari permitivitas. Dengan pengertian ini maka arus kapasitor adalah

$$\begin{aligned} I_C &= j\omega C V_C = j\omega \epsilon_r^* \epsilon_0 \frac{A}{d} V_C \\ &= j\omega (\epsilon_r' - j\epsilon_r'') \epsilon_0 \frac{A}{d} V_C = j\omega \epsilon_r' C_0 V_C + \omega \epsilon_r'' C_0 V_C \end{aligned} \quad (C.16)$$

dengan C_0 adalah kapasitansi dalam vakum yang mempunyai $\epsilon_r^* = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' = 1 - j0$.

Arus kapasitor dalam rumusan (C.16) terdiri dari dua komponen. Komponen pertama adalah arus kapasitor tanpa rugi-rugi, dan komponen kedua adalah arus yang sefasa dengan tegangan. Diagram fasor arus ini terlihat pada Gb.C.3.

Pada Gb.C.3. jelas terlihat bahwa

$$\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} = \tan \delta \quad (C.17)$$

Dari Gb.C.3. terlihat pula bahwa desipasi daya pada kapasitor adalah

$$P = \omega \epsilon_r'' C_0 V_C^2 \quad (C.18)$$

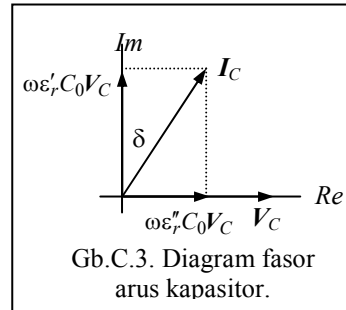
Dengan memasukkan (C.17) ke (C.18) dapat kita peroleh

$$P = \omega \epsilon_r' C_0 V_C^2 \tan \delta = \omega C V_C^2 \tan \delta \quad (C.19)$$

Kerapatan daya yang didesipasi

$$\frac{P}{\text{volume}} = \frac{\omega \epsilon_r' C_0 V_C^2 \tan \delta}{A \times d} = \frac{\omega \epsilon_r' \epsilon_0 (A/d) V_{maks}^2 \tan \delta}{2 \times A \times d} = \frac{1}{2} E_{maks}^2 \omega \epsilon_r' \epsilon_0 \tan \delta \quad (C.20)$$

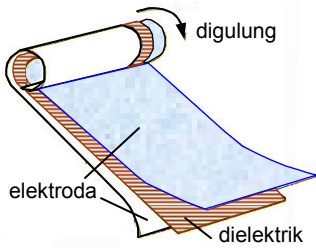
Persamaan ini identik dengan persamaan (C.15).



Macam-Macam Konstruksi Kapasitor

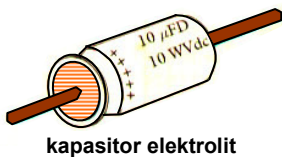
Macam-macam kapasitor yang utama adalah sebagai berikut.

Kapasitor pita polimer. Pada dasarnya kapasitor ini dibangun dari pita polimer sebagai dielektrik yang diletakkan diantara dua pita aluminium (*aluminium foil*) sebagai elektroda dan digulung untuk memperoleh luas elektroda yang diinginkan. Gulungan ini kemudian dimasukkan ke dalam tabung aluminium atau dilindungi dengan *epoxy resin*. Konstruksi lain adalah menggunakan lapisan aluminium yang diendapkan (melalui proses penguapan) langsung di permukaan pita polimer sebagai elektroda. Tebal pita polimer hanya beberapa mikron sedangkan tebal lapisan elektroda yang



diendapkan di permukaan polimer adalah sekitar $0.025 \mu\text{m}$; dengan demikian efisiensi volume menjadi tinggi. Polimer yang biasa digunakan adalah *polystyrene*, *polypropylene*, *polyester*, *polycarbonate*. Kapasitor jenis ini banyak dipakai. Kapasitor dengan dielektrik *polystyrene* mempunyai faktor kerugian ($\tan\delta$) yang sangat rendah ($< 10^{-3}$). Kapasitansi yang bisa dicapai pada konstruksi ini adalah antara $10^{-5} - 10^2 \mu\text{F}$. Kertas dengan impregnasi juga sering digunakan juga sebagai dielektrik.

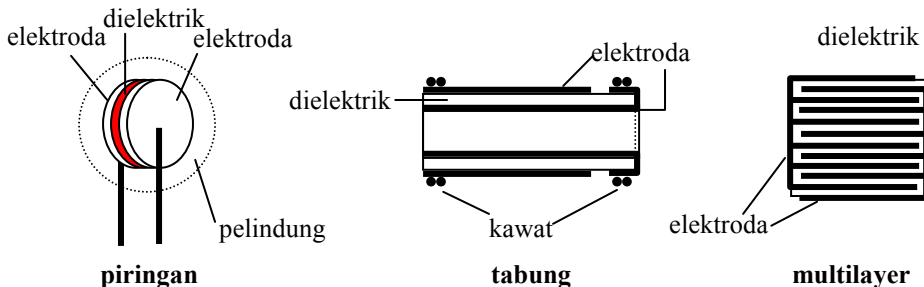
Kapasitor elektrolit aluminium. Kapasitor ini dibangun dari dua pita aluminium yang sangat murni dengan ketebalan sekitar $50 \mu\text{m}$ sebagai elektroda, dan diantara keduanya diletakkan kertas berpori, kemudian digulung membentuk silinder. Salah satu elektroda (yaitu anoda) mempunyai lapisan alumina dengan tebal sekitar $0.1 \mu\text{m}$, yang dibentuk secara anodik. Gulungan ini dimasukkan ke dalam tabung silinder kemudian kertas berporinya di-impregnasi dengan suatu elektrolit (misalnya amonium pentaborat). Dengan demikian tersusunlah kapasitor yang



terdiri dari anoda pita aluminium, lapisan alumina sebagai dielektrik, serta elektrolit dan pita aluminium yang lain sebagai katoda. Dalam penggunaan anoda harus tetap berpotensi positif. Kapasitor ini dibuat dalam rentang nilai antara 10^{-1} sampai $10^4 \mu\text{F}$.

Kapasitor Mika. Konstruksi yang umum terdiri dari beberapa lempeng mika dengan ketebalan antara 0.25 sampai $50 \mu\text{m}$ sebagai dielektrik dengan lapisan perak sebagai elektroda yang disusun dan diklem membentuk satu susunan kapasitor terhubung paralel. Susunan ini kemudian dibungkus dengan thermosetting resin untuk melindunginya dari kelembaban. Kapasitor jenis ini dibuat dalam rentang 10^{-5} sampai $10^{-1} \mu\text{F}$.

Kapasitor Keramik. Kapasitor keramik dibuat untuk penggunaan pada tegangan dan daya rendah maupun tegangan dan daya tinggi. Untuk tegangan rendah kita mengenal konstruksi piringan, konstruksi tabung, dan konstruksi multilayer.



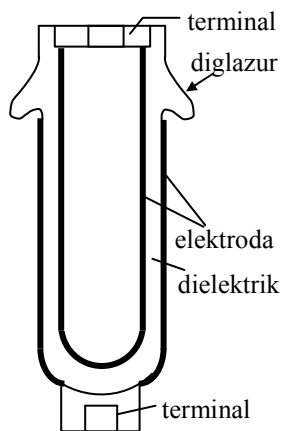
Nilai Standar

Nilai standar kapasitor tegangan rendah dan toleransinya sama seperti resistor yang diberikan dalam tabel B.1. Tabel C.1. memuat macam kapasitor dan rating tegangannya.

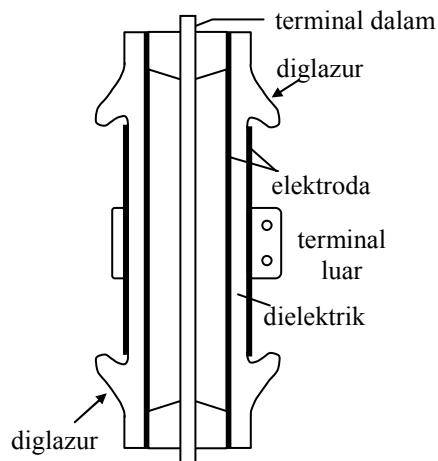
Tabel C.1. Kapasitor			
Dielektrik	Rentang nilai	Toleransi ± %	Tegangan Kerja <u>Searah [V]</u>
Gelas	$1 \div 10^4$ pF	5	100÷1250
Mika	$1 \div 10^5$ pF	1; 2; 5	50÷500
Kertas	10 pF÷10 µF	10	50÷400
Plastik	1 pF ÷ 1 µF	2; 5; 10	50÷600
Keramik	$10 \div 10^6$ pF	5; 10; 20	50÷1600

Kapasitor Tegangan Tinggi

Konstruksi-konstruksi untuk tegangan rendah tidak dapat digunakan untuk tegangan tinggi karena mempunyai kelemahan yaitu kedua elektrodanya tetap paralel sampai di bagian pinggirnya. Pada konstruksi yang demikian ini, walaupun kuat medan listrik di bagian tengah masih normal, di bagian pinggir elektroda dapat terjadi kuat medan yang lebih tinggi (bisa sampai dua kali lipat kuat medan rata-rata) . Selama kuat medan rata-rata kecil dibandingkan dengan kuat medan tembus dielektrik, hal ini tidak menjadi masalah besar. Akan tetapi untuk kondensator tegangan tinggi hal ini harus mendapat perhatian khusus. Tembus permukaan bisa terjadi jika dielektrik kapasitor yang mempunyai permitivitas tinggi berbatasan dengan dielektrik sekitarnya yang permitivitasnya lebih rendah, misalnya udara. Untuk mengatasi situasi ini, pinggiran elektroda dibuat melengkung sedemikian rupa sehingga jarak rambat permukaan dielektrik di daerah pinggir menjadi panjang. Selain itu permukaan dielektrik kapasitor juga perlu di glazur. Konstruksi yang sering dijumpai untuk kapasitor tegangan tinggi adalah konstruksi pot dan konstruksi silinder.



konstruksi pot

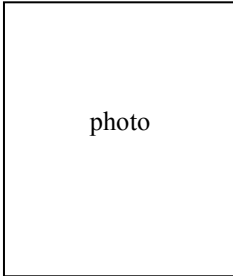


konstruksi silinder

Daftar Pustaka

1. Ralph J. Smith & Richard C. Dorf : “*Circuits, Devices and Systems*” ; John Wiley & Son Inc, 5th ed, 1992.
2. David E. Johnson, Johnny R. Johnson, John L. Hilburn : “*Electric Circuit Analysis*” ; Prentice-Hall Inc, 2nd ed, 1992.
3. Elliot B Slutsky, David W. Messaros : “*Introduction to Electrical Engineering Laboratories*”, Prentice-Hall Inc, 1992.
4. Vincent Del Toro : “*Electric Power Systems*”, Prentice-Hall International, Inc., 1992.
5. Roland E. Thomas, Albert J. Rosa : “*The Analysis And Design of Linier Circuits*”, . Prentice-Hall Inc, 1994.
6. F.A. Ciccarelli : “*Circuit Modeling: Exercises and Software*”, Prentice-Hall Inc, 3rd ed, 1995.
7. M. Dialko, R. Crampagne, D. Andreu : “*Basic Methods for Microcomputer-Aided Analysis of Electronic Circuits*”, Prentice-Hall International (UK), 1995.
8. Douglas K Lindner : “*Introduction to Signals and Systems*”, McGraw-Hill, 1999.
9. Sudaryatno Sudirham : “*Catatan Kuliah : Analisis Rangkaian Listrik dan Rangkaian Magnetik*”, Penerbit ITB, 1999.

Riwayat Hidup



Dr.Ir. Sudaryatno Sudirham, lahir di Blora pada 26 Juli 1943. menikah pada 1973 dengan Ir. Ning Utari dan dikaruniai dua putra, Arga Aridarma S.Si (1976) dan Aria Ajidarma (1993). Setelah menyelesaikan studi di Jurusan Teknik Elektro – Institut Teknologi Bandung pada 1971, ia mengikuti training bidang pendidikan di Tertiary Education Research Center – The University of New South Wales – Australia pada 1974. Pada tahun 1979 ia mengikuti training bidang teknik di EDF – Paris Nord dan Fontainbleu – Perancis. Kesempatan untuk melanjutkan studi S-3 diperoleh pada 1981 di INPT (l’Institute Nationale Polytechnique de Toulouse) – Perancis.

Program DEA diselesaikan pada 1982 dan program doktor diselesaikan pada 1985 dengan predikat Très Honorable dengan disertasi berjudul “Réponse Electrique d’un Polyimide Soumis à une Décharge Luminecente dans l’Argon” yang menjelaskan interaksi antara plasma dan permukaan polimer.

Pada 1986-1989, ia menjabat Sekretaris Jurusan Teknik Elektro ITB dan pada 1989-1992 dan 1992-1995 (dua perioda) menjabat Ketua Jurusan Teknik Elektro ITB. Dalam masa menjabat pimpinan Jurusan inilah, yang juga merangkap sebagai Ketua Panitia Ujian Negara (elektro) pada masa itu, ia menaruh perhatian dan mencermati hal-hal yang berkaitan dengan pengajaran / pembelajaran beberapa mata kuliah dasar teknik elektro, terutama Rangkaian Listrik. Sejak 1998 ia terlibat langsung dalam pemberian pelajaran Rangkaian Listrik dalam mata kuliah Dasar Teknik Elektro. Mata kuliah lain yang pernah diberikan adalah “Material Elektroteknik”, “Phenomena Gas Terionisasi”, “Dinamika Plasma”, “Dielektrika”.

Pengalaman praktis rekayasa diperoleh melalui keterlibatannya di perusahaan swasta pada 1976-1978 dan pada 1995-1997. Jika antara 1976-1978 pengalaman praktis terutama adalah dalam tataran teknik jaringan dan pemanfaatan tenaga listrik, maka antara 1995-1997 mengarah kepada pengembangan sistem dan analisis data. Yang terakhir ini menghasilkan beberapa tulisan ilmiah antara lain berjudul “Indonesia Lightning Detection Network (JADPEN)”, Electropic 1996, Jakarta; “Kerosene Tank Explosion due to Lightning Strikes in an Indonesian Refinery Plant”, 1997, Chamonix-France, “A Review on the HV Line Outages in Java and the Lightning Detection Facilities” , 1998, MITE, EL – ITB. Bidang keilmuan yang menjadi perhatiannya adalah *Gas Discharges* sedangkan dalam bidang pendidikan pada waktu ini tengah mencermati proses pembelajaran ilmu pengetahuan dasar teknik elektro.