Д.А.Дегтярев, к.т.н.

ПОШАГОВАЯ МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Вступление

Многофакторный эксперимент широко используется в современной научной деятельности и является эффективным средством обработки и планирования экспериментальных исследований.

Планированием многофакторного эксперимента называется процедура выбора числа опытов и условий их проведения, необходимых для решения поставленной задачи с требуемой точностью. Все факторы, формирующие процесс экспериментальных исследований изменяются одновременно по определенным зависимостям, а конечным результатом проведения многофакторного эксперимента будет математическая модель исследуемой функции.

Краткая теория факторного эксперимента.

Полный факторный эксперимент состоит из следующих частей: сбор и анализ априорной информации; выбор входных и выходных переменных, области экспериментирования; выбор математической модели, с помощью которой будут представляться экспериментальные данные; выбор критерия оптимальности и плана эксперимента; определение метода анализа данных; проведение эксперимента; проверка статистических предпосылок для полученных экспериментальных данных; обработка результатов; интерпретации и рекомендаций.

На составляющих факторного эксперимента следует остановиться подробней.

Сбор и анализ априорной информации. На этом этапе исследователь проводит анализ научной литературы по направлению своих научных изысканий, готовит план будущих экспериментальных исследований.

Выбор входных и выходных переменных. Входные переменные (будем называть их факторами) определяют состояние объекта (функции). Основное требование к факторам — управляемость. Под управляемостью понимается установление нужного значения фактора (уровня) и поддержание его в течение всего опыта. В этом состоит особенность активного эксперимента. Факторы могут быть количественными и качественными. Примерами количественных факторов являются температура, давление, концентрация и т. п. Их уровням соответствует числовая шкала. Различные катализаторы, конструкции аппаратов, способы лечения, методики преподавания являются примерами качественных факторов. Уровням таких факторов не соответствует числовая шкала, и их порядок не играет роли. Выходные переменные — это реакции (отклики) на воздействие входных переменных. Отклик зависит от специфики исследования и может быть экономическим (прибыль, рентабельность), технологическим (выход, надежность), психологическим, статистическим и т. д. Параметр оптимизации должен быть эффективным с точки зрения достижения цели, универсальным, количественным, выражаемым числом, имеющим физический смысл, быть простым и легко вычисляемым.

Кроме требования к управляемости выбранных факторов, есть еще несколько требований: для любой пары факторов должно выполняться условие совместимости; факторы должны быть независимыми; факторы должны быть однозначны; факторы должны непосредственно воздействовать на параметр оптимизации; факторы должны быть определены операционно; точность установления граничных значений факторов должна быть максимально высокой.

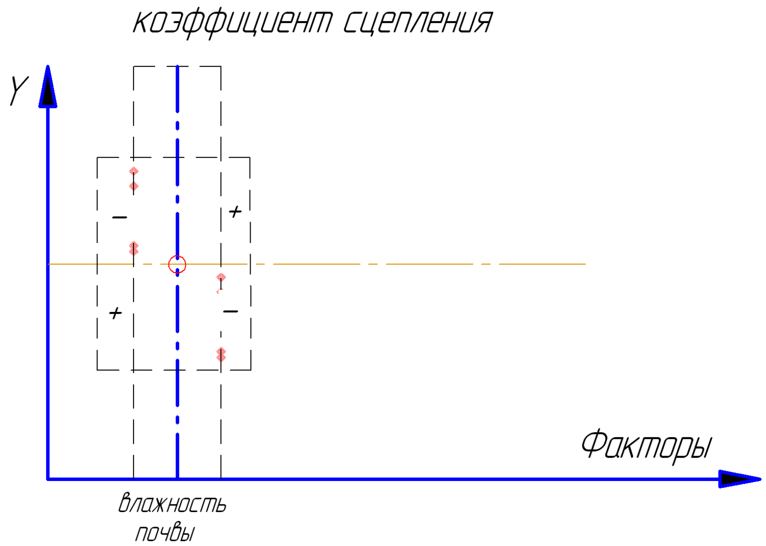
Один из основных вопросов при планировании факторного эксперимента – определение количества факторов в нем участвующих. При этом для определения значимости факторов, используются различные методики. Основными из них являются метод случайного баланса и планы Плаккета-Бермана. Как показывает практика, проведение отсеивающего эксперимента по данным методикам представляет определенную сложность при научной работе.

Предлагаемый *графоаналитический метод определения значимости факторов* основан на данных методиках и позволяет провести отсеивающий эксперимент при минимальном числе опытов, применяя любой программный продукт для черчения. При этом он позволяет, основываясь только на экспериментальных данных определить не только степень влияния факторов на результирующую функцию, но и сделать предварительные выводы о том, как влияют факторы (в сторону увеличения или уменьшения результирующей функции). Отсеивающий эксперимент рекомендуется применять при числе факторов больше трех. Рекомендуемое число серий опытов при отсеивающем эксперименте – восемь. Данные по проведенному отсеивающему эксперименту заносятся в таблицу 1.

Таблица 1

Данные для проведения графоаналитического отсеивающего эксперимента

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Y
1	-	-	-	+	+	-	Y_1
2	+	-	-	-	-	+	Y_2
3	-	+	-	-	+	+	Y_3
4	+	+	-	+	-	-	Y_4
5	-	-	+	+	-	+	Y_5
6	+	-	+	-	+	-	Y_6
7	-	+	+	-	-	-	Y_7
8	+	+	+	+	+	+	Y_8



Далее необходимо построить *медиану* экспериментальных данных. Медиана строится в масштабе по всем факторам по следующим рекомендациям:

1. Для каждого фактора определяются две линии, причем на линии слева откладываются значения результирующей функции в зависимости от факторов со знаком «-», на линии, находящейся справа откладываются значения результирующей функции в зависимости от факторов со знаком «+».
2. Медиана проводится посередине между четвертым и пятым значениями результирующей функции, рис. 1.

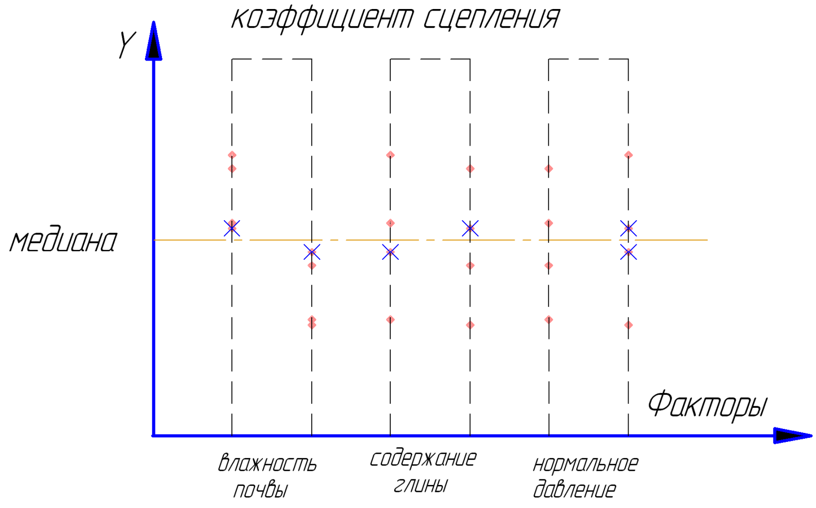


Рисунок 1 – Построение медианы результирующей функции для трех факторов.

3. Схема для определения значимости факторов. Для построения схемы следует определить знак и значение отрезков значимости, согласно схеме,

представленной на рис. 2. Рисунок 2 – Схема для определения знаков отрезков результирующей функции для одного фактора.

Для примера представлена результирующая схема отсеивающего эксперимента (рис. 3), из которой видно, наибольшее отрицательное влияние на коэффициент сцепления имеет влажность почвы.

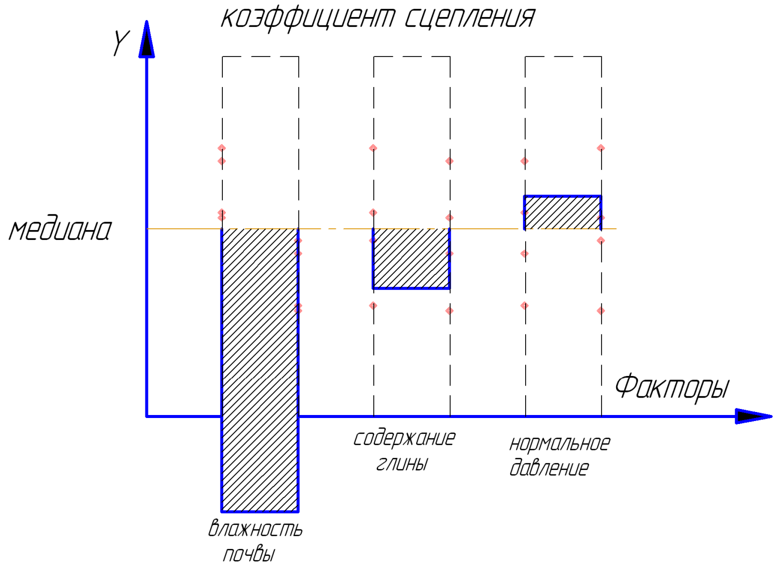


Рисунок 3 – Схема для определения значимости факторов.

Предлагаемый графоаналитический метод определения значимости факторов значительно облегчает задачу проведения отсеивающего эксперимента.

Выбор математической модели, с помощью которой будут представляться экспериментальные данные.

Обозначим наблюдаемый отклик через *y,* а факторы — через x_1, x_2, ….x_k. Выбор модели зависит от наших знаний об объекте, целей исследования и математического аппарата. Если вид функции неизвестен, то полезным оказывается ее представление в виде разложения в степенные ряды.

Вследствие специально разработанных планов многофакторного эксперимента нахождение математической модели исследуемого процесса не подразумевает проведения сложных математических расчетов. Для нахождения коэффициентов полинома в методическом пособии предлагается использовать *ортогональный центрально-композиционный план второго порядка*.

Общий вид функции для матрицы ортогонального центрально-композиционного плана второго порядка будет иметь следующий вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2$$

Поскольку согласно предварительным исследованиям функции отклика должны быть нелинейными, то факторы имели три уровня варьирования.

Таблица 2

Факторы и уровни их варьирования

Факторы	Фактор 1	Фактор 2	Фактор 3
Обозначение	x_1	x_2	x_3
Верхний уровень (+1)			
Основной уровень (0)			
Нижний уровень (-1)			

Таблица 3

Матрица ортогонального центрально-композиционного плана второго порядка и результаты экспериментов

№ опыта	x_1	x_2	x_3	$x_1^{/}=x_1^2-d$	$x_2^{/}=x_2^2-d$	$x_3^{/}=x_3^2-d$	Y
1	+	+	+	0,2697	0,2697	0,2697	
2	-	+	+	0,2697	0,2697	0,2697	
3	+	-	+	0,2697	0,2697	0,2697	
4	-	-	+	0,2697	0,2697	0,2697	
5	+	+	-	0,2697	0,2697	0,2697	
6	-	+	-	0,2697	0,2697	0,2697	
7	+	-	-	0,2697	0,2697	0,2697	
8	-	-	-	0,2697	0,2697	0,2697	
9	1,2154	0	0	0,7469	-0,7303	-0,7303	
10	-1,2154	0	0	0,7469	-0,7303	-0,7303	
11	0	1,2154	0	-0,7303	0,7469	-0,7303	
12	0	-1,2154	0	-0,7303	0,7469	-0,7303	
13	0	0	1,2154	-0,7303	-0,7303	0,7469	
14	0	0	-1,2154	-0,7303	-0,7303	0,7469	
15	0	0	0	-0,7303	-0,7303	-0,7303	

После построения математической модели проводится *статистический анализ*.

При статистическом анализе проверяется значимость коэффициентов регрессии и адекватность линейной модели. Под *адекватностью* понимается соответствие модели экспериментальным данным по выбранному критерию.

Планированию экспериментов предшествует этап неформализованных решений о выборе области экспериментирования (области факторного пространства, изучение которой представляет интерес для экспериментатора). Планированию эксперимента предшествует этап определения центра эксперимента и интервалов варьирования факторов. При этом оцениваются границы областей определения факторов, задаваемых принципиальными ограничениями либо технико-экономическими соображениями.

Построение наиболее простых планов сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно центра эксперимента. В этом случае все k факторов изменяются на двух уровнях, и план эксперимента носит название плана типа 2^k. Уровни факторов изображаются двумя точками на каждой из k координатных осей факторного k-мерного пространства. Эти уровни симметричны относительно основного уровня. Один из них — верхний, другой — нижний. Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний уровень, а вычитание — нижний. Чтобы упростить и унифицировать запись условий опытов и облегчить обработку экспериментальных данных, масштабы по осям задаются в виде кодированных значений +1 и -1, Для количественных факторов это всегда можно сделать с помощью преобразования

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i0}}{J_i}$$

где x_j — кодированное значение фактора,

$\tilde{x}_j$ — натуральное его значение,

$\tilde{x}_{j0}$ — натуральное значение основного уровня,

J_i— интервал варьирования.

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом (ПФЭ). Для двух уровней это будет ПФЭ типа 2^k, а для n уровней — ПФЭ типа n^k. Условия эксперимента представляются в виде таблицы — матрицы планирования, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы — значениям факторов. Геометрическая интерпретация ПФЭ типа 2^k: план 2^2 задается координатами вершин квадрата, план 2^3 — координатами вершин куба, при $k>3$ — координатами вершин гиперкуба (рис. 1 — геометрическая интерпретация ПФЭ 2^2, рис. 2 — геометрическая интерпретация ПФЭ 2^3).

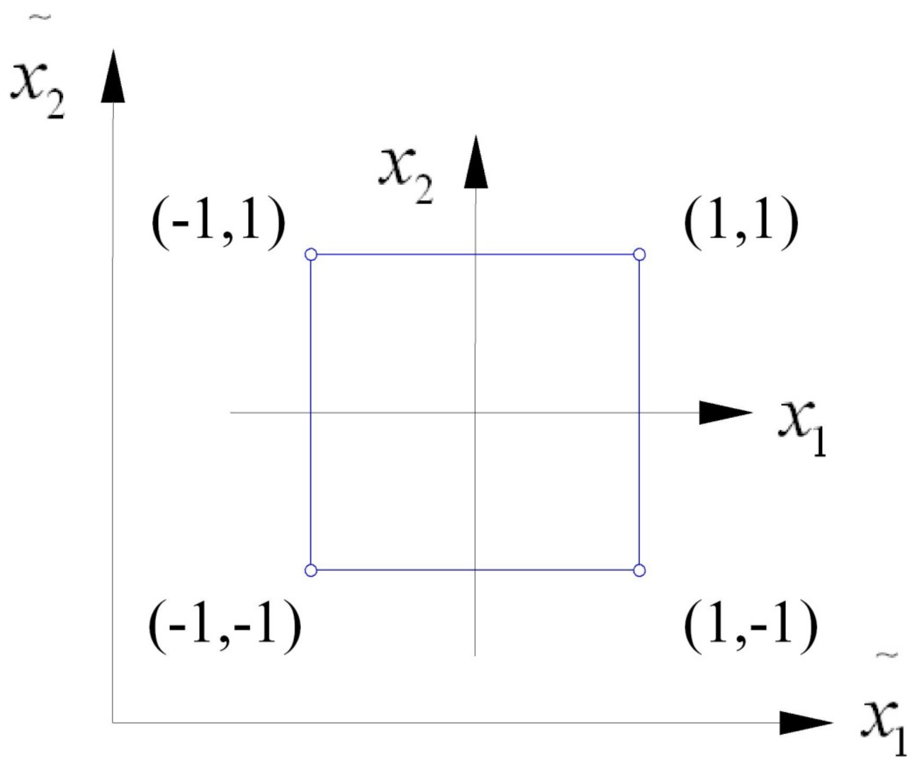


Рис. 4. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^2

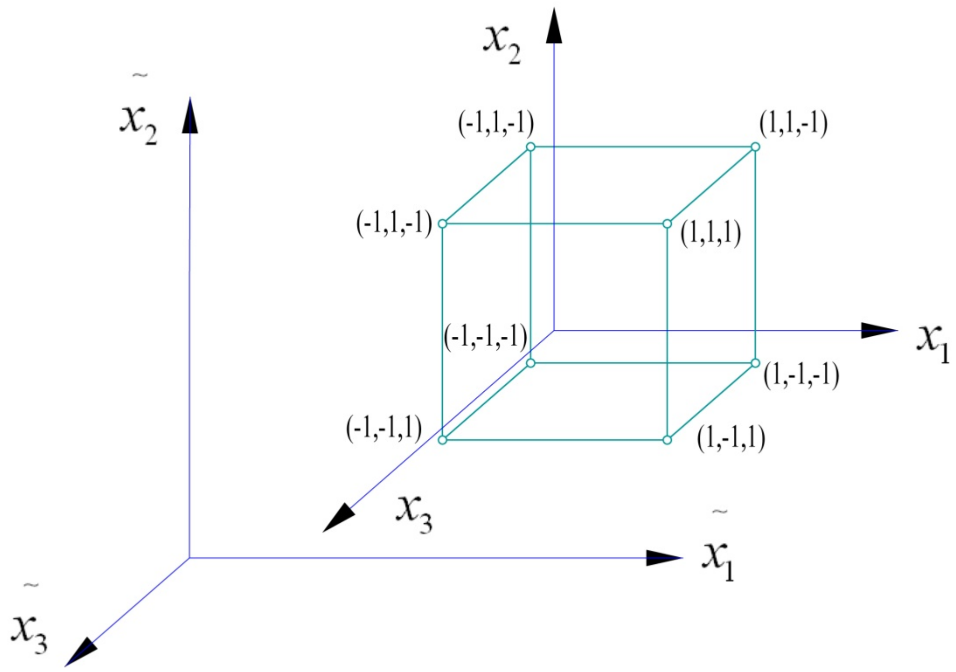


Рис. 5. Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента 2^3

Полный факторный эксперимент типа 2^k обладает следующими *свойствами*:

Симметричность относительно центра эксперимента. Это значит, что алгебраическая сумма элементов вектор - столбца для каждого фактора равна 0, т. е. $\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0$, где j — номер фактора (j=1, 2, ,.., k*),* *i* — номер опыта (i=1, 2, ..., *N).*

Условие нормировки — формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, т. е. $\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N$. Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются в кодированном виде как +1 и —1.

Ортогональность - сумма почленных произведений любых двух вектор - столбцов матрицы равна 0:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} x_{ui} = 0, j \neq u, j, u = 1,2.....,k.$$

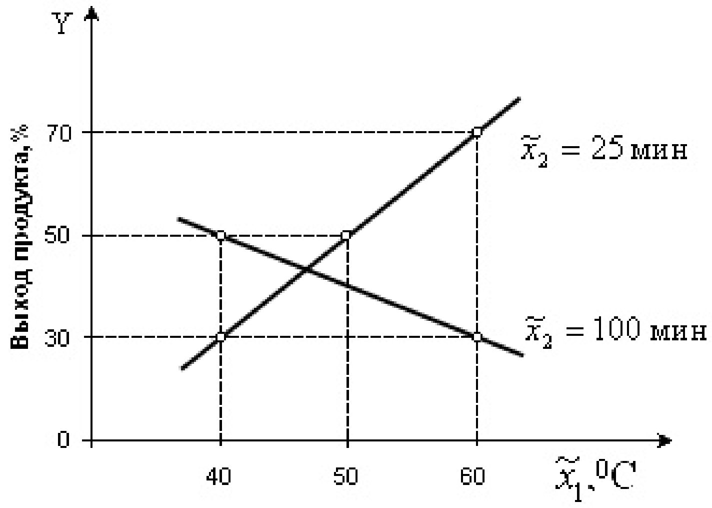


Рис 6. Геометрическая интерпретация парного эффекта взаимодействия факторов.

Пошаговый алгоритм выполнения многофакторного эксперимента.

Ортогональность матриц планов, типа 2^k позволяет количественно оценить все линейные эффекты факторов и их взаимодействия. Взаимодействие возникает в том случае, если эффект одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор.

1. Выбор функции и факторов. На основании теоретических и/или экспериментальных исследований необходимо выбрать факторы, от которых зависит результирующая величина «Y».

2. Составить обобщенную формулу зависимости:

Y = f(a,b,c,d,e,f…n),

где a,b,c,d,e,f,n – факторы, оказывающие влияние на величину «Y».

3. Проверить все факторы на значимость по методике отсеивающего эксперимента (чтобы их осталось не более 3).

4. Выбрать пределы изменений факторов. После определения пределов изменения факторов нижнему пределу присваиваем значение «-1», среднему значению – «0», верхнему пределу – «1». Находим значения факторов, соответствующие «звездным плечам» по формулам:

$Ф_i(1,2154) = Ф_i^1 \cdot 1,2154$

$Ф_i(-1,2154) = Ф_i^{-1} - [Ф_i^{-1} \cdot (-0,2154)]$,

где $Ф_i(1,2154)$ – большее звездное плечо,

$Ф_i^1$ - значение i-го фактора, соответствующее индексу «1» (большему пределу изменения фактора),

$Ф_i(-1,2154)$ – меньшее звездное плечо,

$Ф_i^{-1}$- значение i-го фактора, соответствующее индексу «-1» (меньшему пределу изменения фактора).

5. Составить матрицу (таблицу) проведения многофакторного эксперимента.

Таблица 4

Матрица для проведения многофакторного эксперимента

№	Ф1	Ф2	Ф3	X1	X2	X3	X1*X2	X1*X3	X2*X3	X1*X2*X3	X1*X1	X2*X2	X3*X3	Y
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														

6. Определить коэффициенты регрессии. Благодаря ортогональности плана вычислительная процедура сильно упрощается:

$$b_i = \frac{\sum_1^n (y_i \cdot x_i)}{n},$$

где b_i- коэффициент регрессии;

n – количество проведенных опытов (в трехфакторном эксперименте n=15, в четырехфакторном n=25);

y_i - значение функции «Y», соответствующее n,

x_i – значении фактора, соответствующее n (значение x_i может быть -1; 0; 1; 0,2697; 0,7469; -0,7303; 1,2154; -1,2154).

7. Проверка коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента. Методика проверки коэффициентов по критерию Стьюдента предполагает ортогональность плана. Ортогональное планирование позволяет получить независимые оценки коэффициентов регрессии с минимальной дисперсией. Ортогональность центрально-композиционного плана обеспечивается соответствующим подбором звездного плеча α (для трех факторов α = 1,2154 [1] и специальным преобразованием квадратичных переменных x_i^2 по выражению

$$x_i^{/}=x_i^2-d,$$

где d – поправка, зависящая от числа факторов [1,2], для трех факторов d = 0,7303.

Коэффициенты регрессии определяются с одной и той же дисперсией:

$$S^2_{\{b\}} = S^2_{\{\bar{y}\}} / N$$

Для коэффициентов регрессии рассчитывается доверительный интервал $\Delta b_j = \pm t s_{\{b\}}$ с некоторой доверительной вероятностью. В этом выражении t-критерий (критерий Стьюдента) имеет то же число степеней свободы, что и дисперсия воспроизводимости $S^2_{\{\bar{y}\}}$. Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала. Табличное значение коэффициента Стьюдента выбирают, исходя из количества факторов и количества опытов в каждой сборке (оно должно быть не менее трех) по таблице Приложения 1. Результаты проверки заносят в таблицу 5.

Таблица 5

Результаты проверки коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента

Коэффициенты регрессии	Проверка коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента		
	Численное значение	$S^2\{b_i\}$	$\frac{\lvert b_i \rvert}{\sqrt{S^2\{b_i\}}}$
b0			
b1			
b2			
b3			
b12			
b13			
b23			
b123			
b11			
b22			
b33			

8. Незначимые коэффициенты регрессии исключаются из выражения.
9. Построение уравнения регрессии в кодированном виде.

После определения значимости коэффициентов по критерию Стьюдента, следует записать уравнение регрессии в закодированном виде, с учетом значимости факторов по критерию Стьюдента. В общем виде для трехфакторного эксперимента уравнение выглядит:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 \ldots$$

10. Проверка однородности дисперсий.

Критерий Кохрена определяется отношением максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G = \frac{S_{i\ \max}^{-2}}{\sum_{i=1}^{N} S_i^{-2}}$$

С этим критерием связаны числа степеней свободы n-1 и N. Гипотеза об однородности дисперсий не отвергается, если экспериментальное значение критерия Кохрена не превысит табличного. Если дисперсии однородны, то рассчитывается оценка усредненной дисперсии воспроизводимости:

$$S_{\{\bar{y}\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{q=1}^{n}\left(y_{iq} - \bar{y}_i\right)_2}{Nn(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_i^{-2}}{N}$$

В реальных условиях гипотеза об однородности дисперсий подтверждается далеко не всегда. Поэтому следует найти преобразование зависимой переменной, отыскать иной закон распределения случайной величины или обратиться к какому-нибудь статистическому методу. В нашем случае оптимальным будет критерий Фишера.

Проверка гипотезы об адекватности модели основана на расчетах дисперсии адекватности $S_{\text{ад}}^2$ и критерия Фишера (F-критерия):

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \hat{y}_i\right)^2}{f}, \quad f = N - p, \quad F = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\{\bar{y}\}}^2},$$

где $\hat{y}_i$ — рассчитанное по уравнению регрессии значение отклика, f — число степеней свободы, связанное с дисперсией адекватности, p — число оцениваемых коэффициентов регрессии. Рассчитанное значение F-критерия сравнивается с табличным значением, определяемым числами степеней свободы f и *N (n—1)*. Если экспериментальная величина F-критерия не превышает табличного значения (Приложение 2), гипотеза об адекватности модели не отвергается.

11. Раскодирование уравнения.

Для представления уравнения в закодированном виде в закодированное уравнение вместо x_1, x_2, x_3 ... следует подставить натуральные величины, в соответствии с формулой кодировки факторов:

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i0}}{J_i},$$

Где $\widetilde{x}_i$ - натуральное значение фактора,

$\tilde{x}_{i0}$- натуральное значение уровня варьирования фактора,

J_j - интервал варьирования факторов.

На данном этапе следует очень внимательно отнестись к проведению математических действий, так как элементарная ошибка может привести к неправильному общему выражению зависимости.

12. Построение поверхностей отклика. После того, как формула представлена в раскодированном виде, следует построить поверхности отклика полученной функции в зависимости от факторов. В трехфакторном эксперименте строится три поверхности отклика, в четырехфакторном – четыре. При построении поверхностей фиксированное значение одного из факторов (в четырех факторном эксперименте – два фактора) на одном из уровней (-1, 0 1) и подставляется в раскодированное уравнение функции. Упростив его, получим уравнение для построения одной их поверхностей отклика при зафиксированном факторе. Построение проводится в любой из компьютерных программ, способных вывести трехмерный график.

13. Построение сечений поверхностей отклика. Сечение поверхности отклика строится аналогично поверхности отклика.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.

Таблица 6

Пример состава сырьевой смеси на заполнителях из окалины и дроби на портландцементе М 600

№ п/п	Цемент, кг/м³	Вода, кг/м³	С-3, кг/м³	Прочность сжатия, МПа
1	650	176	6,5	145,2
2	620	174	6,2	140,4
3	580	174	5,8	138,7
4	550	160	5,5	134,1
5	520	140	5,5	148,2
6	500	145	5,2	135,2
7	480	144	5,0	133
8	450	122	5,0	141,5
9	650	208	7,0	124,2
10	600	186	6,5	130,1
11	630	170	6,5	149,3
12	470	132	5,0	139,3

1. Выбор функции и факторов.

Как видно из таблицы 6, факторами будут содержание в растворе цемента, воды и С-3. Итак, проводим трехфакторный эксперимент для выяснения зависимости прочности сжатия от содержания в растворе цемента, воды и С-3. Начнем с определения пределов варьирования факторов. Судя по таблице, максимальным значением содержания цемента будет 650 кг/м³, минимальным – 450 кг/м³. Это и будут пределы варьирования – 450-650 кг/м³. Аналогично и для оставшихся факторов: для содержания воды – 120 - 200 кг/м³; для С-3 – 5-7кг/м³. Для удобства обозначим факторы буквенными символами: содержанию цемента присвоим символ z, воды – v, С-3 – c, прочности сжатия раствора – ρ.

2. Составить обобщенную формулу зависимости.

Базовая формула будет иметь вид: $y = f(z, v, c)$.

3. Проверить все факторы на значимость по методике отсеивающего эксперимента (чтобы их осталось не более 3).

В данном примере 3 фактора.

4. Выбрать пределы изменений факторов.

Таблица 7

Принятые обозначения

Факторы	Содержание цемента, кг/м³	Содержание воды, кг/м³	Содержание С-3, кг/м³	Прочность сжатия, МПа
Принятое обозначение	z	v	c	ρ
Обозначение в МФЭ	x_1	x_2	x_3	y
Верхний предел (1)	650	200	7	-
Основной уровень (0)	550	160	6	-
Нижний предел (-1)	450	120	5	-

5. Составить матрицу (таблицу) проведения многофакторного эксперимента.

Таблица 8

Матрица для проведения трехфакторного эксперимента

№	z	v	c	x_1	x_2	x_3	$x_1 * x_2$	$x_1 * x_3$	$x_2 * x_3$	$x_1 * x_2 * x_3$	$x_1 = x_{11} - d*$	$x_2 = x_{22} - d$	$x_1 = x_{11} - d$	y
1	450	120	5	1	1	1	1	1	1	1	0,2697	0,2697	0,2697	141,5
2	650	120	5	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0,2697	0,2697	0,2697	134
3	450	200	5	1	-1	1	-1	1	-1	-1	0,2697	0,2697	0,2697	137
4	650	200	5	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0,2697	0,2697	0,2697	124
5	450	120	7	1	1	-1	1	-1	-1	-1	0,2697	0,2697	0,2697	141,5
6	650	120	7	-1	1	-1	-1	1	-1	1	0,2697	0,2697	0,2697	139
7	450	200	7	1	-1	-1	-1	-1	1	1	0,2697	0,2697	0,2697	134
8	650	200	7	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0,2697	0,2697	0,2697	125
9	353*	160	6	1,2154	0	0	0	0	0	0	0,7469	-0,7303	-0,7303	131
10	790*	160	6	-1,2154	0	0	0	0	0	0	0,7469	-0,7303	-0,7303	149
11	550	94,15*	6	0	1,2154	0	0	0	0	0	-0,7303	0,7469	-0,7303	136
12	550	243,08*	6	0	-1,2154	0	0	0	0	0	-0,7303	0,7469	-0,7303	133
13	550	160	3,9	0	0	1,2154	0	0	0	0	-0,7303	-0,7303	0,7469	119
14	550	160	8,5	0	0	-1,2154	0	0	0	0	-0,7303	-0,7303	0,7469	141
15	550	160	6	0	0	0	0	0	0	0	-0,7303	-0,7303	-0,7303	136

6. Определить коэффициенты регрессии.

Подсчитаем b_0и b_1 для таблицы 9:

$$b_0 = \frac{141{,}5+134+137+124+141{,}5+139+134+125+131+149+136+133+119+141+136}{15} = 134{,}747$$

$$b_1 = \frac{\begin{gathered}(141{,}5 * 1 + 134 * (-1) + 137 * 1 + 124 * (-1) + 141{,}5 * 1 + 139 * (-1) + 134 * 1 + 125 * (-1) + 131 * \\ +1{,}2152 + 149 * (-1{,}2154) + 136 * 0 + 133 * 0 + 119 * 0 + 141 * 0 + 136 * 0)\end{gathered}}{15}$$

$=0{,}91$

Остальные коэффициенты b_2, $b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{123}, b_{11}, b_{22}, b_{33}$ подсчитываются аналогично.

7. Проверка коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента.

Критерий Стьюдента подразумевает поставленные в центре плана опыты. При трехфакторном эксперименте их количество составляет 3. При этом, все факторы должны находится на нулевом уровне. В нашем примере получены следующие значения: Y=136, Y=138, Y=134.

Проводим расчет

$$\bar{Y}^c = \frac{136 + 138 + 134}{3} = 136$$

$$S^2_{\text{воспр}} = \frac{(136-136)^2+(138-136)^2+(134-136)^2}{3-1} = 4$$

$S_{\text{воспр}} = \sqrt{4} = 2$

$x_i^2 = \sum b_i^2$

Для b_0 x_i^2 не считается.

Расчет для b_1 (таблица 8)

$x_1^2 = 1^2+(-1^2)+1^2+(-1^2)+1^2+(-1^2)+1^2+(-1^2)+1{,}2154^2+(-1{,}2154^2)=10{,}9544$

То же будет и для b_2 и b_3:

$x_2^2, x_3^2 = 10{,}9544$

Расчет для b_{12}, b_{13}, b_{23}:

$x_{12}^2 = 1^2+(-1^2)+1^2+(-1^2)+1^2+(-1^2)+1^2+(-1^2)=8$

То же будет и для b_{23} и b_{13}:

$x_{23}^2, x_{13}^2 = 8$

Расчет для b_{11}, b_{22}, b_{33}:

$x_{11}^2 = 0{,}2697^2+0{,}2697^2+0{,}2697^2+0{,}2697^2+0{,}2697^2+0{,}2697^2+0{,}2697^2+0{,}2697^2+0{,}7469^2+0{,}7469^2+(-0{,}7303^2)+(-0{,}7303^2)+(-0{,}7303^2)+(-0{,}7303^2)+(-{,}7303^2)=4{,}36431$

То же будет и для b_{22} и b_{33}:

$x_{22}^2, x_{33}^2 = 4{,}36431$

$$S_{b_0}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{15} = \frac{4}{15} = 0{,}26667$$

$$S_{b_1}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{x_1^2} = \frac{4}{10{,}9544} = 0{,}26667$$

$$S_{b_2}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{x_2^2} = \frac{4}{10{,}9544} = 0{,}26667$$

$$S_{b_3}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{x_3^2} = \frac{4}{10{,}9544} = 0{,}26667$$

$$S_{b_{12}}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{x_{12}^2} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

$$S_{b_{13}}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{x_{13}^2} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

$$S_{b_{23}}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{x_{23}^2} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

$$S_{b_{11}}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{x_{11}^2} = \frac{4}{4{,}36431} = 0{,}91653$$

$$S_{b_{22}}^2 = \frac{S^2_{\text{воспр}}}{x_{22}^2} = \frac{4}{4{,}36431} = 0{,}91653$$

$$S_{b_{33}}^{2} = \frac{S_{\text{воспр}}^2}{x_{33}^2} = \frac{4}{4{,}36431} = 0{,}91653$$

$$\acute{b}_0 = b_0 - b_{11}\sum_1^n b_{11} - b_{22}\sum_1^n b_{22} - b_{33}\sum_1^n b_{33} = 134{,}747 - 3{,}15 \cdot 0{,}29095 - (-0{,}58) \cdot 0{,}29095 - (-3{,}62) \cdot 0{,}29095 = 135{,}05$$

$$S_{b_0}^2 = S_{\text{воспр}}^2 + b_{11}\sum_1^n b_{11} + b_{22}\sum_1^n b_{22} + b_{33}\sum_1^n b_{33} = 4 + 3{,}15 \cdot 0{,}29095 + (-0{,}58) \cdot 0{,}29095 + (-3{,}62) \cdot 0{,}29095 = 1{,}0667$$

Проверка значимости:

$$t_{b_0} = \frac{\acute{b}_0}{\sqrt{S_{b_0}^2}}; \ t_{b_i} = \frac{b_i}{\sqrt{S_{b_i}^2}}$$

$$t_{b_0} = \frac{\acute{b}_0}{\sqrt{S_{b_0}^2}} = \frac{134{,}05}{\sqrt{1{,}0667}} = 130{,}76$$

$$t_{b_1} = \frac{b_1}{\sqrt{S_{b_1}^2}} = \frac{0{,}91}{\sqrt{0{,}36515}} = 1{,}5$$

$$t_{b_2} = \frac{b_2}{\sqrt{S_{b_2}^2}} = \frac{3{,}6}{\sqrt{0{,}36515}} = 5{,}96$$

Остальные коэффициенты подсчитываются аналогично.
Сводим все коэффициенты в итоговую таблицу.

Таблица 9

Результаты проверки коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента

Коэффициенты регрессии	Проверка коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента				
	Численное значение	$S^2\{b_i\}$	t_{b_i}	Табличное значение коэффициента Стьюдента	Проверка значимости
b_0	134,74	0,266667	130,76	2,77645	Значимый
b_1	0,91	0,36515	1,5	2,77645	Не значимый
b_2	3,6	0,36515	5,96	2,77645	Значимый
b_3	-2,7	0,36515	-4,46	2,77645	Значимый
b_{12}	-1,48	0,5	-2,09	2,77645	Не значимый
b_{13}	1,1	0,5	1,56	2,77645	Не значимый
b_{23}	-0,9	0,5	-1,27	2,77645	Не значимый
b_{123}	0,15	0,5	0,21	2,77645	Не значимый

b_{11}	3,15	0,916526	3,29	2,77645	Значимый
b_{22}	-0,58	0,916526	-0,6	2,77645	Не значимый
b_{33}	-3,62	0,916526	-3,78	2,77645	Значимый

8. Построение уравнения регрессии в кодированном виде.

Уравнение регрессии в кодированном виде приобретет следующий вид:

$$y = 134{,}74 + 3{,}6 \cdot x_2 - 2{,}7 \cdot x_3 + 3{,}15 \cdot x_1^2 - 3{,}62 \cdot x_3^2$$

9. Для оценки адекватности модели произведем ее оценку по критерию Фишера.

Найдем значения Y согласно полученному уравнению регрессии:

$$Y_1 = 134{,}7467 + 3{,}6 \cdot (1) - 2{,}7 \cdot (1) + 3{,}15 \cdot 0{,}2697 - 3{,}62 \cdot 0{,}2697 = 135{,}5$$

$$Y_2 = 134{,}7467 + 3{,}6 \cdot (-1) - 2{,}7 \cdot (1) + 3{,}15 \cdot 0{,}2697 - 3{,}62 \cdot 0{,}2697 = 130{,}9$$

Остальные значения Y подсчитываются аналогично. Результаты расчетов заносим в таблицу 5.

Таблица 5

Расчет дисперсии адекватности

№ опыта	Y		
	y_u	$\hat{y}_u$	$(y_u - \hat{y}_u)^2$
1	141,50	135,5	36,22594274
2	134,00	130,9	9,908795569
3	137,00	126,6	107,846655
4	124,20	124,8	0,364114563
5	141,50	145,3	14,45919344
6	139,00	143,5	20,16789614
7	134,00	139,3	27,60207417
8	125,00	137,4	154,806128
9	131,00	136,2	26,562845
10	149,00	134,0	226,4414564
11	136,00	138,7	7,446357432
12	133,00	131,4	2,633667406
13	119,00	127,4	70,09772968
14	141,00	142,7	3,00503952
15	136,00	135,1	0,896862341
$S^2_{ад}$			64,405

Определяем критерий Фишера:

$$F = \frac{{S^2}_{\text{ад}}}{S^2_{\text{воспр}}} = \frac{64{,}405}{4} = 16{,}101$$

Расчетные значения критерия Фишера составили: F = 16,101. Значит, полученное уравнение регрессии адекватно описывает процесс в пределах исследуемой области (табличное значение F=19,04).

10. Раскодирование уравнения.

Для раскодирования уравнения заменим x на натуральные значения:

$x_1 = \frac{z-550}{100} = 0{,}1z - 5{,}5;$

$x_2 = \frac{\text{v}-160}{40} = 0{,}25\text{v} - 4;$

$\text{x}_3 = \frac{\text{c}-6}{1} = \text{c} - 6;$

$y = 123{,}29 + 5{,}62 \cdot x_2 - 4{,}21 \cdot x_3 + 3{,}1 \cdot x_1^2 - 3{,}57 \cdot x_3^2$

$y = 123{,}29 + 5{,}62(0{,}1z - 5{,}5) - 4{,}21(0{,}25\text{v} - 4) + 3{,}1(0{,}1z - 5{,}5) \cdot (0{,}1z - 5{,}5) - 3{,}57(\text{c} - 6) \cdot (\text{c} - 6)$

После выполнения преобразований и сокращений, получим:

$$y = 97{,}735 - 0{,}346 \cdot z - 0{,}09 \cdot v + 46{,}17 \cdot c + 0{,}0003 \cdot z^2 - 3{,}6228 \cdot c^2$$

11. Построение поверхностей отклика и сечений поверхностей отклика.

Осталось изобразить поверхности отклика и их сечения полученного уравнения регрессии. Для их получения каждый из трех факторов зафиксируем на нулевом уровне: z=550, v=160,c=5. Подставим эти значения в раскодированное уравнение регрессии, получим три уравнения с двумя факторами. Построенные по полученным уравнениям поверхности отклика и их сечения будут выглядеть следующим образом:

$$\sigma = 2{,}55 - 0{,}09 \cdot v + 46{,}17 \cdot c - 3{,}62 \cdot c^2 \text{ (z=550).}$$

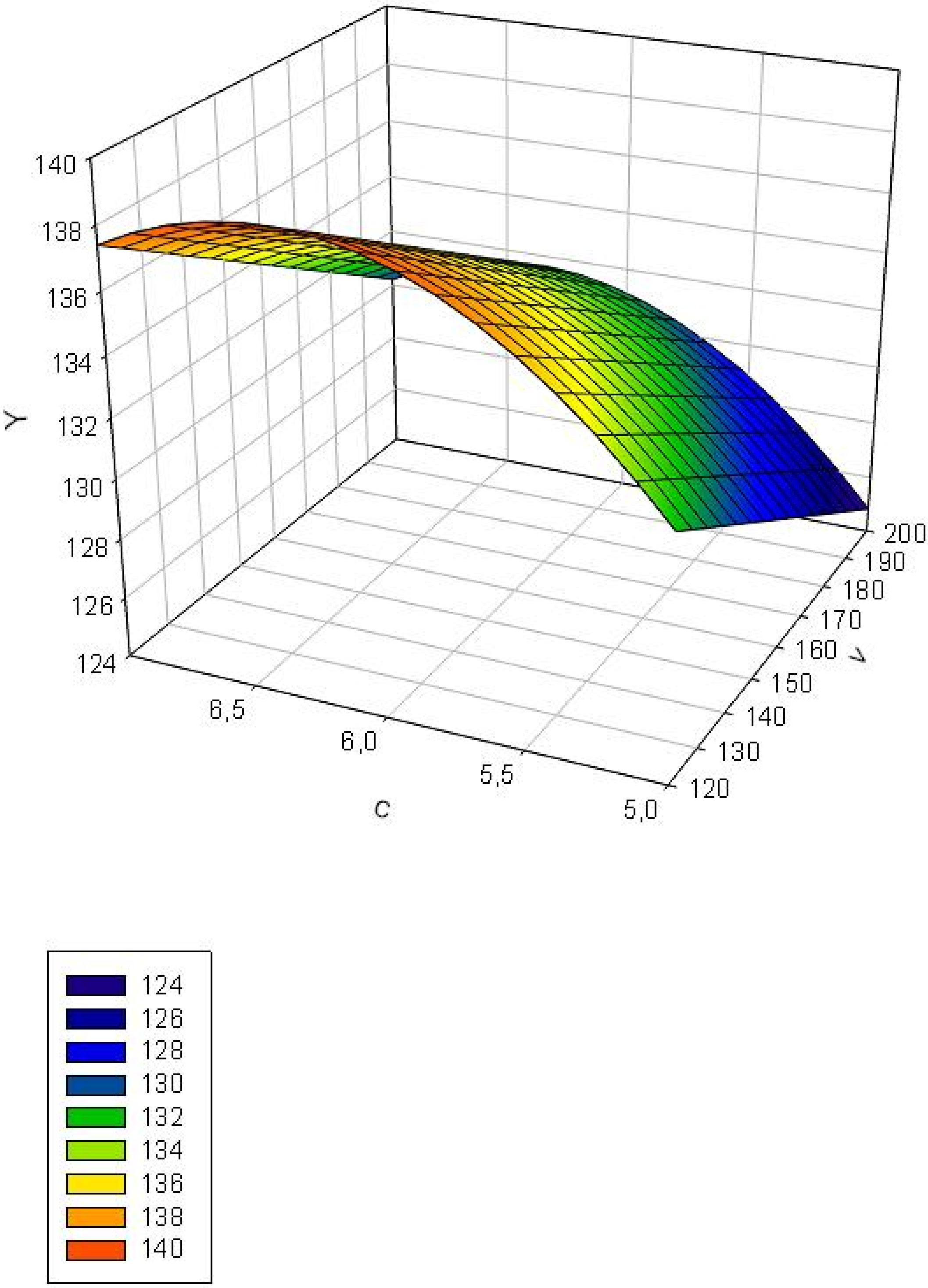


Рис. 7. Поверхность отклика содержания в растворе воды и С-3.

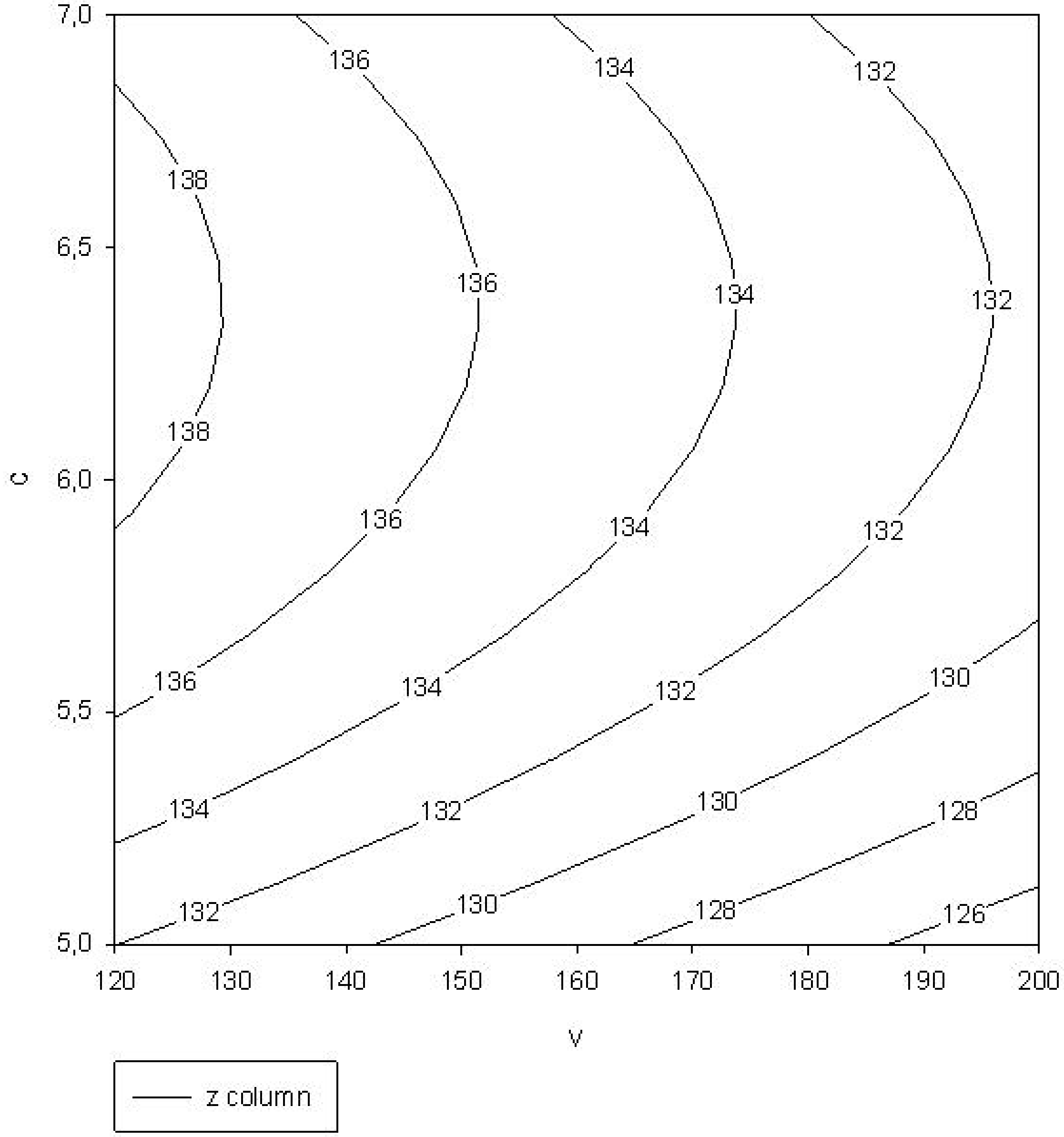


Рис. 8. Сечение поверхности отклика содержания в растворе воды и С-3.

$$\sigma = 83{,}3 - 0{,}346 \cdot z + 46{,}17 \cdot c + 0{,}00031 \cdot z^2 - 3{,}62 \cdot c^2 \text{ (v=160).}$$

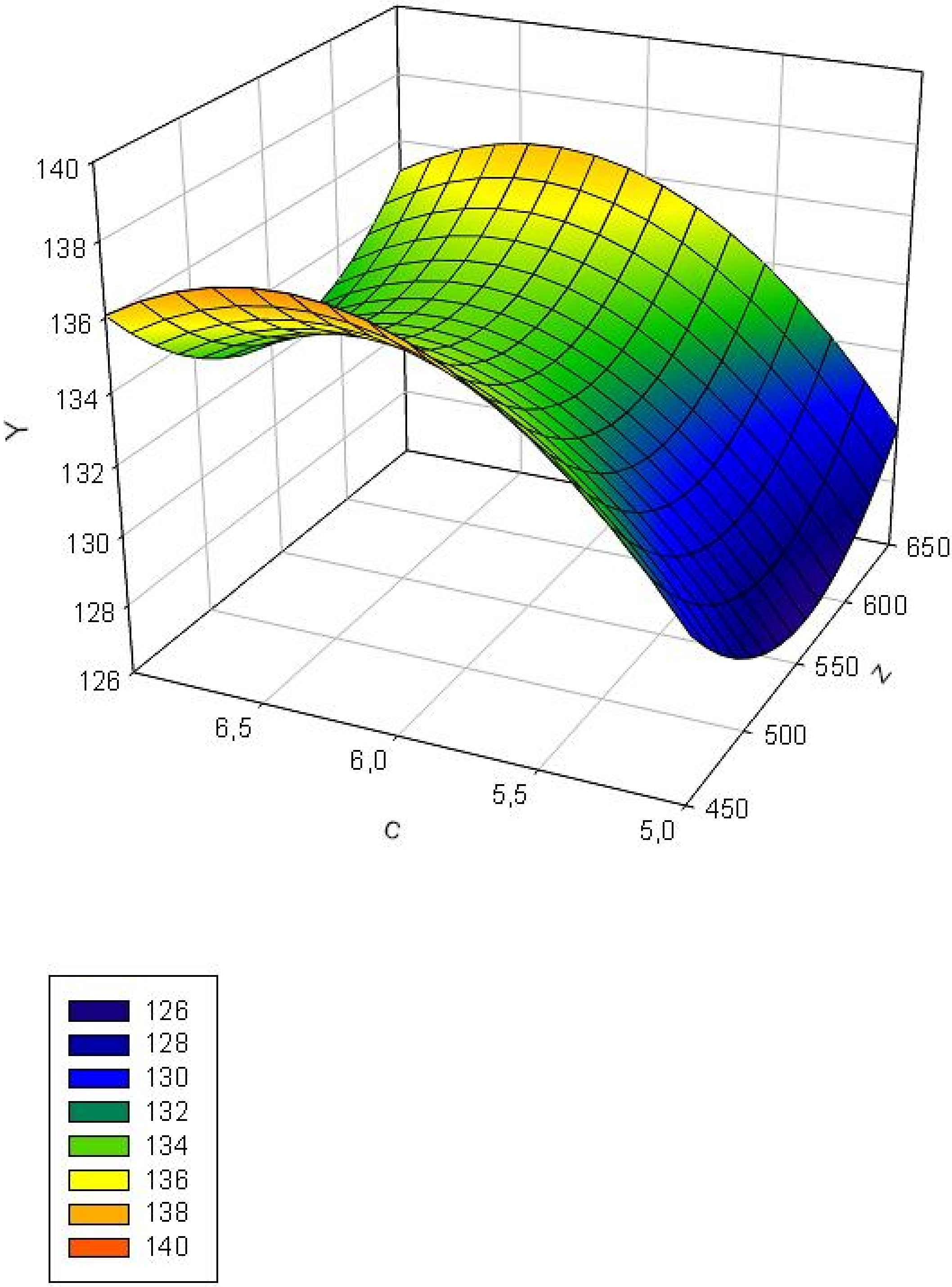


Рис. 9. Поверхность отклика содержания в растворе цемента и С-3.

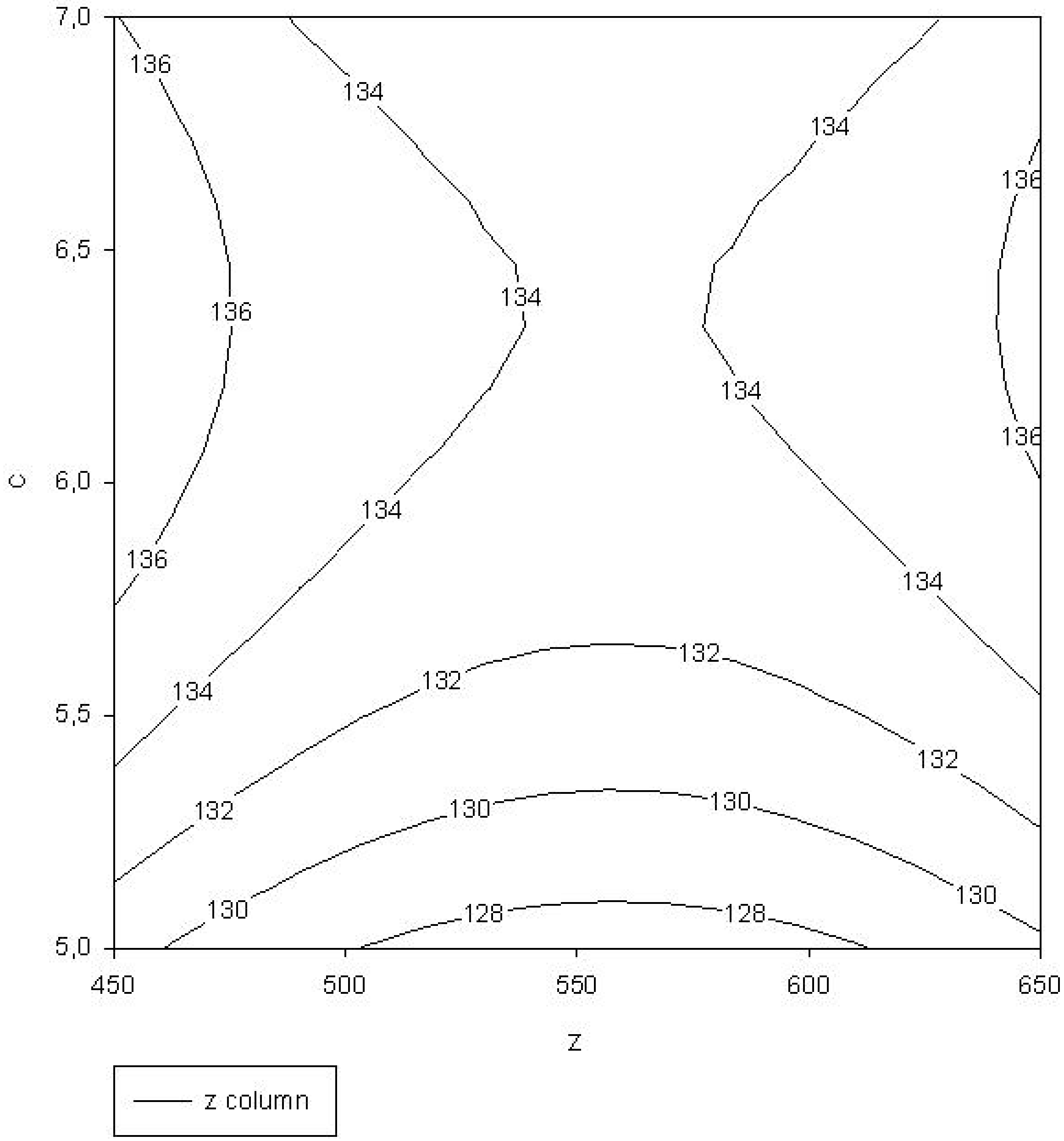


Рис. 9. Сечение поверхности отклика содержания в растворе цемента и С-3.

$$\sigma = 244{,}34 - 0{,}346 \cdot z - 0{,}09 \cdot v + 0{,}00031 \cdot z^2 \text{ (v=160).}$$

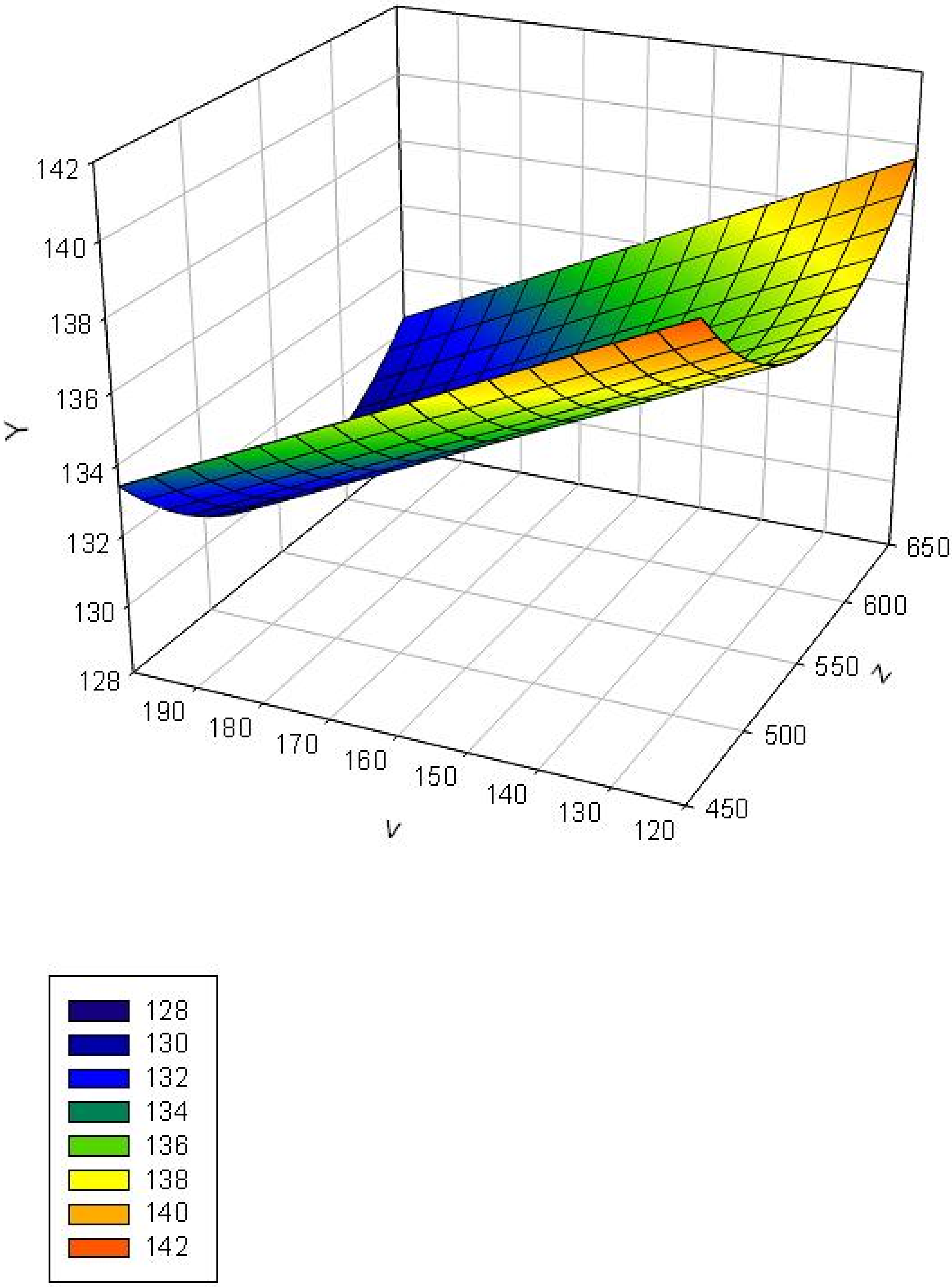


Рис. 10. Поверхность отклика содержания в растворе цемента и воды

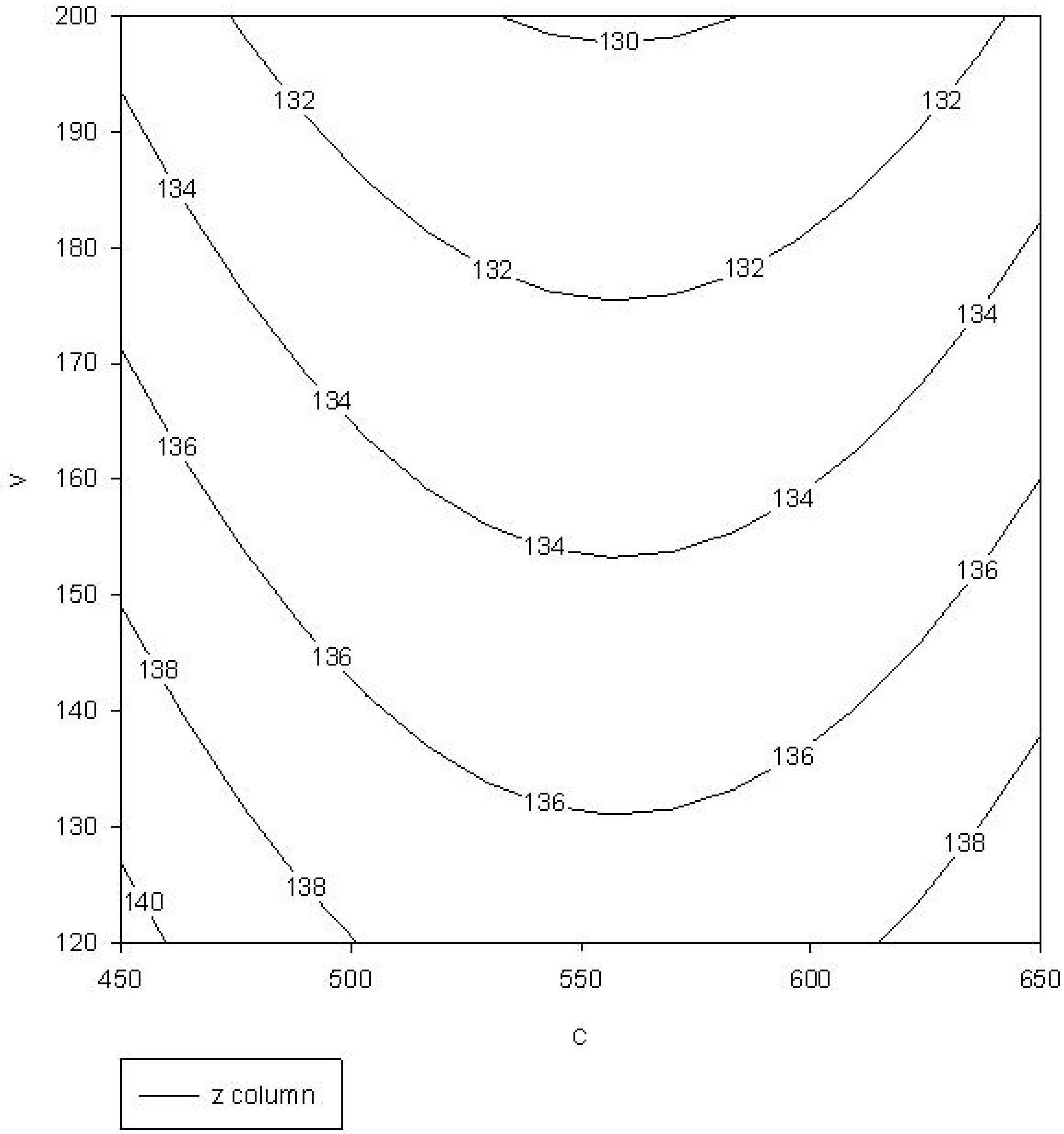


Рис. 11. Сечение поверхности отклика содержания в растворе цемента и воды.

Таким образом, наибольшая значение результирующей функции достигается при следующем содержании компонентов: z – 600-650 кг/м³, c – 120-150 кг/м³ и c – 5,9-6,9 кг/м³. Кроме того, получена четкая математическая зависимость (со степенью точности 0,95) прочности раствора от концентрации цемента, воды и С-3.

В случае проведения двух и более факторных экспериментов с одинаковыми факторами, но для разных результирующих функций, определения приемлемых значений факторов, необходимо решить компромиссную задачу для обоих уравнений регрессии. Поиск компромиссных значений осуществляется наложением двух сечений поверхностей отклика с одинаковыми факторами. Это возможно сделать с помощью программ «Sigma Plot v.11.0» и «Компас 3D V14». Пример решения компромиссной задачи изображен на рисунке 12.

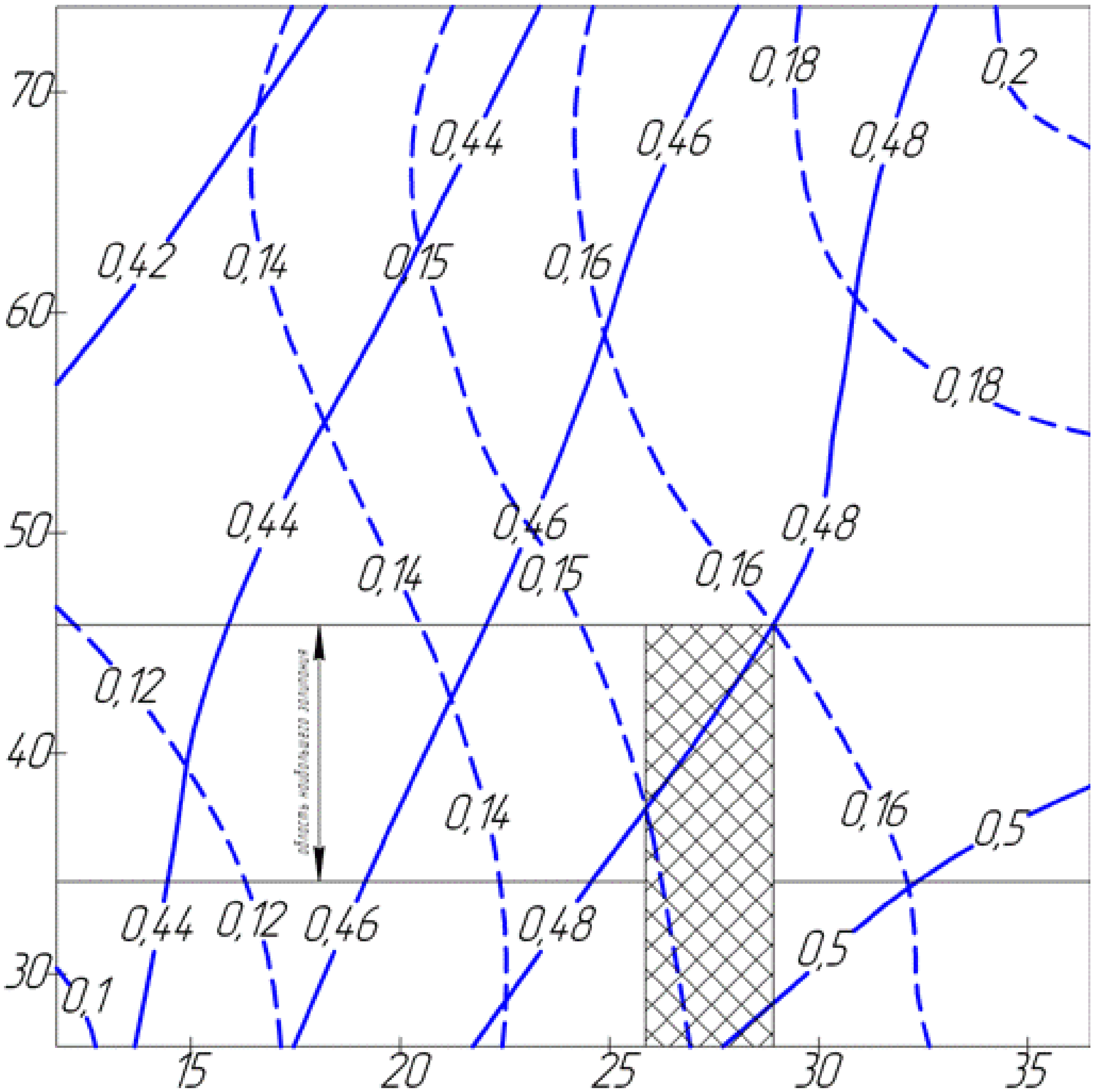


Рис. 12 Пример решения компромиссной задачи.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Процентные точки t – распределения Стьюдента

Приложение 1

n/α	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	0,816	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,360	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,69	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,6110	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,018	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	0,679	1,296	1,761	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Приложение 2

Процентные точки F – распределения

k2/k1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,3	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,4
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,41	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56
16	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79

Использованная литература

1. Вучков И. Прикладной регрессионный анализ [Текст] / И. Вучков, Л. Бояджиева, Е. Солаков. – М.: Финансы и статистика ,1987. - 239 с, ил.
2. Маслов Г.Г., Дидманидзе О.Н., Цибулевский В.В. Оптимизация параметров и режимов работы машин методами планирования эксперимента: Учебн. пособие для сельскохозяйственных вузов. – М.:УМЦ «Триада», 2007. – 292 с., ил.
3. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. М.,»Металургия», 1969.
4. Славутский Л.А. Основы регистрации данных и планирования эксперимента. Учебное пособие: Изд-во ЧГУ, Чебоксары, 2006, 200 с.
5. Джашеев К.А.-М., Джашеева З.А.-М. Монограммный метод анализа результатов многофакторного эксперимента // Успехи современного естествознания. – 2008. – № 8 – С. 19-28.
6. Конопленко Е.И., Хореева Н.К., Лапусь А.П. Методические указания по курсу ″Планирование эксперимента″ «Московский государственный университет пищевых производств», Москва, 2011.
7. http://www.manyfactors.ru.
8. Емельянов А.М., Гуров А.М. Элементы математической обработки и планирования инженерного эксперимента. Методические указания. – Благовещенск: БСХИ, 1984. – 63С.