МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи
УДК 530.145.1

**АМОСОВ
ГРИГОРИЙ ГЕННАДЬЕВИЧ**

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАНТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность – 01.04.02
Теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор Манько Владимир Иванович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Григорян Сурен Аршакович

доктор физико-математических наук, с.н.с.
Лесовик Гордей Борисович

доктор физико-математических наук, с.н.с.
Орлов Юрий Николаевич

Ведущая организация: С.-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова

Защита состоится «15»_мая_ 2008 г. в 14 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д212.156.03 в Московском физико-техническом институте (государственном университете) по адресу: 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского физико-технического института (государственного университета)

Автореферат разослан «___»______________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного
совета Д212.156.03
к.ф.-м.н. А.В. Арсенин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена развитию новых математических методов в теории эволюции квантовых систем и квантовой передачи информации. Вероятностная интерпретация квантовой механики, сформировавшаяся почти столетие назад, обрела новое содержание в связи с теоретическими и экспериментальными работами по созданию квантового компьютера, интенсивно ведущимися в мире в последнее десятилетие, и возникшим в этом контексте понятием квантового вычисления. Оказалось, что процессы, сопровождающие работу такого «устройства», требуют формализации в терминах, которые отсутствовали в традиционной квантовомеханической теории. Домыслить же необходимые понятия «по аналогии» или иными не вполне строгими способами в квантовой теории принципиально затруднительно, поскольку наше мышление существенно неквантовое, и тем самым легко совершить ошибочное заключение. Таким образом, необходимость строгих математических формулировок для описания того, что следует понимать, например, под квантовым случайным процессом, квантовым каналом передачи информации и др., является не только и не столько потребностью нового математического языка, формирующегося в этой области знания, но и служит вполне практической цели создания основ для изучения новых физических явлений.

В диссертации последовательно проводится когомологическая интерпретация квантовомеханического представления взаимодействия, позволяющая получить новые важные результаты в теории эволюции квантовых систем. Тема настоящей диссертации также относится к активно обсуждаемой в последнее время в научном сообществе проблеме декодирования квантового сигнала и аддитивности выходной энтропии квантовых каналов связи. Таким образом, тема работы является актуальной. Опишем кратко ее место в ряду основных идей и результатов, полученных в этой области.

В 1982 г. в работе [L. Accardi, A. Frigerrio, J.T. Lewis, Publications RIMS. Kyoto Univ. – 1982. – V. 18. – P. 97-133] было предложено определение квантового случайного процесса «в широком смысле слова» - как семейства гомоморфизмов, осуществляющих вложение некоторой алгебры с инволюцией в алгебру линейных операторов в гильбертовом пространстве. В ней получило дальнейшее развитие формализация квантовых случайных процессов и их возмущений. В этой же работе было введено понятие «марковского возмущения» квантового случайного процесса. Смысл определения сводится к требованию сохранения причинности, так что алгебра наблюдаемых, относящаяся к фиксированному моменту времени, возмущается принадлежащими ей преобразованиями. Конкретная реализация квантовых случайных процессов в симметричном пространстве Фока и доказательство их стохастической эквивалентности броуновскому движению и пуассоновскому процессу были осуществлены впервые в работе [R. Hudson, K.R. Parthasarathy, Commun. Math. Phys. – 1984. – V. 93. – P. 301-323]. В этой работе было введено понятие квантового белого шума. В дальнейшем на основе этого подхода был разработан метод построения квантовых случайных процессов с независимыми приращениями (квантовых процессов Леви) над любой алгеброй Ли, играющей роль алгебры симметрий квантовой системы [M. Schurmann. White noise on bialgebras. Lecture notes in mathematics. V. 1544. Springer. 1993].

Существует несколько путей точного определения марковских возмущений, в зависимости от стоящей задачи. В 2000 г. в [G.G. Amosov, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2000. – V. 3. – P. 237-246] автором было предложено определение марковского возмущения случайного процесса, согласованное с определением [L. Accardi, A. Frigerrio, J.T. Lewis, Publications RIMS. Kyoto Univ. – 1982. – V. 18. – P. 97-133], и построена модель, описывающая все марковские возмущения, соответствующие возмущениям квантовых случайных процессов гауссовского белого шума. Это позволило рассмотреть с единых позиций различные квантовые процессы, изучаемые в представлении взаимодействия, и подойти, таким образом, с новой стороны к описанию процесса эволюции квантовых систем.

Центральной проблемой, связанной с квантовой передачей информации, является неизбежное искажение информации, которое порождается нарушением «чистого» состояния исходной системы после взаимодействия и переходом ее в смешанные состояния. Соответствующая эволюция матрицы плотности называется квантовым каналом передачи информации. При аксиоматическом построении квантовой механики матрицей плотности (или статистическим оператором) системы называется положительный эрмитов оператор с единичным следом в гильбертовом пространстве. Поэтому квантовый канал передачи информации строго определяется [А.С. Холево, Проблемы передачи информации. – 1972. – Т. 8, в.1. – С. 62-71] как аффинное отображение множества всех положительных операторов с единичным следом в себя, если сопряженное с ним отображение, заданное на алгебре всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, является вполне положительным. Условие полной положительности позволяет рассматривать тензорное произведение гильбертовых пространств для описания составных систем.

С другой стороны, в множестве состояний есть так называемые «сцепленные состояния» («запутанные» или «перепутанные» в другом переводе), то есть такие состояния, которые не могут быть представлены в виде линейной комбинации тензорных произведений состояний, относящихся к отдельным частям системы. Одной из основных задач исследования квантовых каналов передачи информации является определение, может ли использование сцепленных состояний при кодировании увеличить пропускную способность канала?

Классическая Шенноновская информационная энтропия неаддитивна относительно операции взятия тензорного произведения квантовых каналов [А.С. Холево, Проблемы передачи информации. – 1973. – Т.9, в. 3. – С. 3-11]. Это означает, что классическое определение информационной энтропии не является адекватной характеристикой квантового процесса передачи информации. В качестве таковой теперь используется т.н. верхняя энтропийная граница («граница Холево»). Для состояния $\hat{\rho}$ обозначим $S(\hat{\rho}) = -Tr(\hat{\rho}\log\hat{\rho})$ энтропию фон Неймана $\hat{\rho}$. Гипотеза аддитивности утверждает, что верхняя энтропийная граница канала Φ, определенная формулой

$$C(\Phi)=\sup(S(\Phi(\sum_k \pi_k \hat{\rho}_k))-\sum_k \pi_k S(\Phi(\hat{\rho}_k))),$$

аддитивна относительно операции взятия тензорного произведения, то есть

$$C(\Phi \otimes \Psi) = C(\Phi) + C(\Psi)$$

для двух квантовых каналов Φ и Ψ. Согласно квантовой теореме кодирования [А.С. Холево, e-print quant-ph/9611023; IEEE Trans. Inform. Theory. – 1998. - V. 44. - P. 269-273; B. Schumacher, M. Westmoreland, Physical Review A. – 1997. – V. 56. – P. 131-138], величина C(Φ) являлась бы в этом случае пропускной способностью квантового канала. В настоящее время, гипотеза аддитивности доказана только для некоторых частных случаев. Тематика исследований, представленных в диссертации, включает изучение характеристик максимальной чистоты выхода квантовых каналов. В частности, предложен метод, позволяющий доказать гипотезу аддитивности пропускной способности канала для некоторых частных случаев [Г.Г. Амосов, Проблемы передачи информации. – 2006. – Т. 42, в.2; J. Math. Phys. – 2007. – V. 48, N 1].

Открытие множества различных вероятностных характеристик квантовых динамических систем приводит к мысли о создании еще одной интерпретации квантовой механики. Основываясь на работе [J. Bertrand и P. Bertrand, Found. Phys. – 1987. – V. 17. – P. 397-405], возникла идея создания вероятностного («томографического») представления квантовой механики. В таком представлении [В.И. Манько, S. Mancicni, P. Tombesi, Quantum Semiclass. Opt. – 1995. – V. 7. – P. 615-624] роль состояний (операторов плотности) играют параметрические семейства распределений вероятностей, а наблюдаемые вводятся как некоторые функции от тех же параметров. При этом при помощи специального интегрального ядра определяется «звездочное произведение» наблюдаемых [О.В. Манько, В.И. Манько, G. Marmo, J. Physics A: Math. and Gen. – 2002. – V. 35. – P. 699-719]. В целом, диссертация посвящена дальнейшей разработке вероятностного представления квантовой механики.

Цель работы. В диссертации исследуются симплектические томограммы непрерывных квантовых динамических систем. Особое внимание уделено изучению эволюции систем с непрерывным временем в представлении взаимодействия. Для дискретных квантовых динамических систем (квантовых каналов) изучены характеристики максимальной чистоты выхода каналов.

Научная новизна заключается в том, что в диссертационной работе впервые последовательно проводится когомологическая интерпретация квантовомеханического представления взаимодействия и выявляется ее вероятностный смысл для динамических систем с непрерывным временем. Для дискретных квантовых динамических систем вводятся вероятностные характеристики, инвариантные относительно унитарных преобразований системы. Это позволяет строго оценивать характеристики квантовых каналов передачи информации типа пропускной способности и надежности. В работе разработан метод оценки снизу энтропии фон Неймана выхода квантового канала передачи информации, что позволило доказать справедливость гипотезы сильной супераддитивности нижней энтропийной границы квантового деполяризующего канала на основе свойства убывания относительной энтропии.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Как известно, в последние годы, назревает технологический прорыв в реализации процессов квантовой передачи информации и квантовых вычислений. Отметим предложение использовать «ионы в ловушке» [J. I. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. Letters. – 1995. – V. 74. – P. 4091-4094] для хранения квантовой информации (квантовые операции при этом осуществляются воздействием внешнего магнитного поля лазера на резонансных частотах). Многочисленные экспериментальные исследования по использованию ядерного магнитного резонанса для осуществления операций над квантовой информацией нашли отражение в монографии [К.А. Валиев, А.А. Кокин. Квантовые компьютеры: надежды и реальность. Мир, 2001]. Экспериментальное осуществление процессов хранения и передачи квантовой информации, ставшее возможным в последние годы за счет развития нанотехнологий, особенно остро задает потребность в развитиии теоретических методов оценки вероятностных характеристик квантовых систем. Это, с одной стороны, проблема распознования состояния квантовой системы и таких его характеристик как сцепленность или сепарабельность по результатам измерения. С другой стороны, разработка методов оптимального кодирования классической информации квантовыми состояниями, исходя из особенностей используемого квантового канала передачи информации. В частности, оценка количества состояний, которые могут быть использованы для кодирования, так чтобы нашлось решающее правило, позволяющее декодировать информацию на выходе канала. Изучение симплектических квантовых томограмм, осуществленное в диссертации позволяет изучать свойства квантовых состояний непосредственно по результатам измерения и относится, тем самым к разработке решения первой проблемы, указанной выше. Кроме того, в диссертации получены оценки различных характеристик квантовых каналов.

Это, в частности, надежность канала и минимальная энтропия выхода канала. Для квантового деполяризующего канала доказана гипотеза сильной супераддитивности. Одним из следствий этого результата является то, что использование сцепленных состояний для кодирования классической информации не дает выигрыша по сравнению с сепарабельными состояниями для этого частного случая. В работе доказано, что для вычисления пропускной способности канала можно пользоваться фундаментальным свойством убывания относительной энтропии состояний. Тем самым, предложен новый подход, который можно использовать для вычисления характеристик различных квантовых каналов передачи информации на практике. Отметим, что недавно было доказано (P. Hayden, quant-ph/07073291 (2007)), что метод, основанный на оценке l_p-норм не дает возможности доказать глобальную гипотезу аддитивности. При этом ценность альтернативного метода, предложенного в диссертации возрастает.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Конференция, посвященная 100-летию Б.М. Гагаева, г. Казань (1996 г.).
2. Ежегодная научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный (1997 г.).
3. Международный конгресс математиков, г. Берлин (1998 г.)..
4. «Проблемы устойчивости в стохастических моделях», г. Налечев (1999 г.)..
5. «Теория операторов и ее приложения», г. Бордо (2000 г.).
6. Международный конгресс по математической физике, г. Лондон (2000 г.).
7. Европейский математический конгресс, г. Барселона (2000 г.).
8. Ежегодная конференция по математическому анализу, г. Санкт-Петербург (2001 – 2007 гг.).
9. «Квантовая вероятность и бесконечномерный анализ», г. Коттбус (2001 г.).
10. Конференция, посвященная 100-летию И.Г. Петровского, г. Москва (2001 г.).
11. Зимняя школа «Квантовые марковские цепи и их приложения в физике и квантовой информации», г. Левико Терме (2001 г.).
12. «Квантовые процессы Леви», г. Охен (2002 г.).
13. «Квантовая информация», г. Сан Фелю де Гисоль (2002 г.).
14. «Колмогоров и современная математика», г. Москва (2003 г.).
15. «Актуальные вопросы математики и механики», г. Казань (2004 г.).
16. «Классические и квантовые интегрируемые системы», г. Дубна (2004, 2005 гг.).

Результаты диссертации докладывались на многих научных семинарах, включая:

1. Семинар «Математические проблемы теорфизики и механики» Московского физико-технического института (рук. В.Б. Лидский и С.П. Аллилуев).
2. Семинар по математической физике Института прикладной математики им. Келдыша, г. Москва (рук. М.В. Масленников и В.В. Веденяпин).
3. Семинар лаборатории математического анализа С.-Петербургского отделения математического института им. Стеклова (рук. В.П. Хавин).
4. Семинар по теории представлений и динамическим системам С.-Петербургского отделения математического института им. Стеклова (рук. А.М. Вершик).
5. Q-семинаре Копенгагенского университета, г. Копенгаген (рук. Ф. Топсе).
6. Семинар кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета (рук. А.М. Чеботарев).
7. Семинар Международного института Солвея, г. Брюссель (рук. Я. Антониу).
8. Семинар по теории операторов механико-математического факультета Московского государственного университета (рук. А.Д. Костюченко).
9. Семинар «Алгебра в анализе» механико-математического факультета Московского государственного университета (рук. А.Я. Хелемский).
10. Семинар по алгебре и теории операторов Казанского государственного университета (рук. А.Н. Шерстнев)
11. Семинар по квантовой теории поля Физического института им. Лебедева (рук. М.А. Васильев).
12. Семинар кафедры высшей математики МФТИ (рук. Е.С. Половинкин)

Публикации. По теме диссертации опубликованы 33 работы (18 работ – в соавторстве). Из них 17 в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов докторских диссертаций.

Вклад автора в совместных работах: В работах [1-2] автору принадлежит определение структуры представлений алгебры канонических антикоммутационных соотношений (КАС), включая описание коммутанта. В работах [5] и [8] автор вывел в явной форме систему-произведение В. Арвесона для случая алгебры КАС. В работах [7], [10] и [22] автору принадлежат оценки сверху следовых норм квантовых каналов. В работе [12] автор доказал, что краевая задача для уравнения Шредингера с кусочно-постоянными коэффициентами порождает марковский коцикл. В работах [13], [26-28], [30-31] автору принадлежит применение метода исследования квантовых томограмм, основанного на использовании подхода квантовой теории вероятностей. В работах [16-17] и [29] автору принадлежит постановка задачи и метод исследования, основанный на модели марковского коцикла, построенной автором. В работе [19] автору принадлежит конструкция состояния Кубо-Мартина-Швингера алгебры квадрата квантового белого шума.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, приложения, заключения и библиографии. Объем диссертации – 212 страниц. Список использованных источников содержит 213 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий обзор основных направлений исследований в области вероятностных характеристик квантовых динамических систем и формулируются проблемы, решению которых посвящена диссертация**.**

В первой главе рассматриваются квантовые томограммы и их динамика.

Обозначим символами σ(H) и L(H) множество всех положительных операторов с единичным следом и всех самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве H. В стандартной модели квантовой механики элементы множества σ(H) интерпретируются как состояния (операторы плотности) системы, а элементы множества L(H) как наблюдаемые. Согласно спектральной теореме (фон Нейман, Стоун, Рисс 1929-1932) для каждой наблюдаемой $\hat{a} \in$ L(H) найдется проекторозначная мера на прямой $\hat{M}$, сопоставляющая каждому измеримому множеству $\Omega \subset$ R ортогональный проектор $\hat{M}\ (\Omega)$, такая что

$$\hat{a} = \int_R X d\hat{M}((-\infty, X]). \qquad (1.1)$$

В силу вероятностной интерпретации квантовой механики, данной фон Нейманом (1932), каждой паре ($\hat{\rho}$, $\hat{a}$), образованной состоянием $\hat{\rho} \in \sigma(\mathrm{H})$, и наблюдаемой $\hat{a} \in \mathrm{L(H)}$ отвечает распределение вероятностей на действительной прямой:

$$M_{\hat{\rho}}^{\hat{a}}(\Omega)=\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\ \hat{M}\ (\Omega)), \qquad (1.2)$$

где $\Omega \subset \mathrm{R}$ – любое борелевское подмножество действительной прямой. Согласно этой интерпретации, $M_{\hat{\rho}}^{\hat{a}}(\Omega)$ есть вероятность того, что наблюдаемая $\hat{a}$ в состоянии $\hat{\rho}$ примет значение из множества Ω. Ортогональный проектор $\hat{M}\ (\Omega)$ можно интерпретировать как «событие» квантового вероятностного пространства, заключающееся в том, что квантовая случайная величина, наблюдаемая, приняла значение из множества Ω. Отметим, что интеграл (1.1) определен в смысле сильной операторной топологии (не по норме). Следовательно, для получения в квантовой теории вероятностей аналога σ-алгебры событий классической теории вероятностей, нужна замкнутость именно в сильной операторной топологии. Замыкание в сильной операторной топологии линейных комбинаций некоторого семейства ортогональных проекторов, событий, приводит к алгебре фон Неймана, то есть такой алгебре, которая замкнута в любой из операторных топологий, слабее топологии нормы. Тем самым, в квантовой теории вероятностей роль σ-алгебр событий играют алгебры фон Неймана.

Положим $\hat{a}\,(\mu,\nu)=\mu\,\hat{x}+\nu\,\hat{p}$, где $\hat{x}$ и $\hat{p}$ - операторы координаты и импульса. Тогда двупараметрическое семейство вероятностных мер $M_{\hat{\rho}}^{\hat{a}(\mu,\nu)}$ полностью определяет состояние $\hat{\rho}$ системы. Набор плотностей распределений таких мер

$$\omega(X,\mu,\nu)=\omega_{\hat{\rho}}(X,\mu,\nu)=\frac{dM_{\hat{\rho}}^{\hat{a}(\mu,\nu)}((-\infty,X])}{dX} \qquad (1.3)$$

называется симплектической квантовой томограммой. Отметим, что первоначально [В.И. Манько, S. Mancicni, P. Tombesi, Quantum Semiclass. Opt. – 1995. – V. 7. – P. 615-624] симплектические квантовые томограммы вводились несколько иным способом, с использованием операторозначной δ-функции, действующей в оснащенном гильберовом пространстве. Состояние $\hat{\rho}$ в этом подходе восстанавливается по симплектической квантовой томограмме $\omega(X,\mu,\nu)$ согласно формуле

$$\hat{\rho}=\frac{1}{2\pi}\int_{R^3} e^{iX} e^{-i\mu\hat{x}-i\nu\hat{p}}\omega(X,\mu,\nu)dXd\mu d\nu\,.$$

Предположим, что динамика квантовой системы определяется уравнением Лиувилля – фон Неймана следующего вида

$$\partial_t \hat{\rho} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}]. \qquad (1.4)$$

Любое решение $\hat{\rho}(t)$ уравнения (1.4) определяет некоторое однопараметрическое семейство квантовых томограмм $\omega(t, X, \mu, \nu) = \omega_{\hat{\rho}(t)}(X, \mu, \nu)$. Обозначим M(t,X,μ,ν) семейства функций распределения, связанных с $\omega(t, X, \mu, \nu)$ формулой (1.3), и F(t,k,μ,ν) характеристические функции, отвечающие плотностям распределения $\omega(t, X, \mu, \nu)$, согласно формуле

$$\mathrm{F}(t,k,\mu,\nu) = \int_R e^{ikX} \omega(t, X, \mu, \nu) dX.$$

Основной целью исследований, проведенных в первой главе диссертации, является вывод динамических уравнений, которым удовлетворяют M(t,X,μ,ν) и F(t,X,μ,ν) для некоторых частных случаев гамильтониана $\hat{H}$.

Основные результаты первой главы состоят в следующем:

1.1. Получены уравнение эволюции и пропагатор, дающий его решение, для осциллятора с переменной частотой $\omega(t)$ и силой $f(t)$ описываемого гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2(t)\hat{x}^2}{2} - f(t)\hat{x}. \qquad (1.4)$$

Уравнение для функций распределения M(t,X,μ,ν), отвечающих управляемому осциллятору имеет вид (Г.Г. Амосов, В.И. Манько, 2003):

$$\frac{\partial M(t, X, \mu, \nu)}{\partial t} = \mu \frac{\partial M(t, X, \mu, \nu)}{\partial \nu} - \nu\omega^2(t) \frac{\partial M(t, X, \mu, \nu)}{\partial \mu} + \qquad (1.5)$$

$$\nu f \frac{\partial M(t, X, \mu, \nu)}{\partial X}.$$

Принимая во внимание явный вид интегралов движения управляемого осциллятора [И.А. Малкин, В.И. Манько, Physics Letters A. – 1970. – V. 32. – P. 243-244]:

$$\hat{A}(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon(t)\hat{p} - \dot{\varepsilon}(t)\hat{x}) + \delta(t),$$

$$\hat{A}^*(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon^*(t)\hat{p} - \dot{\varepsilon}^*(t)\hat{x}) + \delta^*(t),$$

где функции ε(t) и δ(t) удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\varepsilon}(t)+\omega^2(t)\varepsilon(t)=0,$$

$$\varepsilon(0)=1, \quad \dot{\varepsilon}(0)=i,$$

$$\dot{\delta}(t)=-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon(t)f(t), \quad \delta(0)=0,$$

выписан пропагатор, дающий решение уравнения (1.5) (Г.Г. Амосов, В.И. Манько, 2003):

$$M(\mathrm{t},\mathrm{X},\mu,\nu)=\mathrm{T(t)}(M(0,\mathrm{X},\mu,\nu))= \tag{1.6}$$

$$M(0,\mu\mathrm{Re}(\varepsilon)+\nu\mathrm{Re}(\dot{\varepsilon}),\mu\mathrm{Im}(\varepsilon)+\nu\mathrm{Im}(\dot{\varepsilon}),\mathrm{X}+\sqrt{2}\,(\mu\mathrm{Re}(\varepsilon\delta^*)+\nu\mathrm{Re}(\dot{\varepsilon}\,\delta^*)))$$

При этом, если в качестве начального условия при t=0 взять функцию распределения, отвечающую когерентному состоянию параметрического осциллятора, получим решение вида

$$M(\mathrm{t},\mathrm{X},\mu,\nu)=\frac{1}{2}\,(1+\mathrm{erf}(\frac{X+\sqrt{2}(\mu\,\mathrm{Re}((\delta-\alpha)\varepsilon^*)+\nu\,\mathrm{Re}((\delta-\alpha)\dot{\varepsilon}))}{\sqrt{\mu^2\,|\,\varepsilon\,|^2\,+\nu^2\,|\,\dot{\varepsilon}\,|^2\,+2\mu\nu\,\mathrm{Re}(\varepsilon\dot{\varepsilon}^*)}})), \tag{1.7}$$

а если в качестве начального условия взять функцию распределения, отвечающую n-ому возбужденному состоянию осциллятора, получим

$$M(\mathrm{t},\mathrm{X},\mu,\nu)= \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(\frac{1}{2}e^{st}\left(1+erf(\frac{X+\sqrt{2}(\mu\,\mathrm{Re}(\delta\varepsilon^*)+\nu\,\mathrm{Re}(\delta\dot{\varepsilon}^*))}{\sqrt{\mu^2\,|\,\varepsilon\,|^2\,+\nu\,|\,\dot{\varepsilon}\,|^2\,+2\mu\nu\,\mathrm{Re}(\varepsilon\dot{\varepsilon}^*)}})-\frac{t+s}{\sqrt{2}}\right)\right)\Big|_{t=0,s=0}$$

1.2. Для квантовых систем с гамильтонианом вида

$$\hat{H}=W(\hat{p})+V(\hat{x}), \tag{1.9}$$

где W(p) и V(x) – произвольные аналитические функции импульса и координаты, соответственно, получено эволюционное уравнение для характеристических функций (Г.Г. Амосов, В.И. Манько, 2005):

$$\partial_t F(t,k,\mu,\nu)= \tag{1.10}$$

$$i(W(e^{-ik\mu\nu/2}\,\frac{1}{ik}\partial_\nu e^{ik\mu\nu/2})-W(e^{ik\mu\nu/2}\,\frac{1}{ik}\partial_\nu e^{-ik\mu\nu/2})F(t,k,\mu,\nu)+$$

$$i(V(e^{-ik\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{ik\mu\nu/2})-V(e^{ik\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{-ik\mu\nu/2})F(t,k,\mu,\nu).$$

В частном случае $W(\hat{p})=\dfrac{\hat{p}^2}{2}$, получаем

$$\partial_t F(t,k,\mu,\nu)=\mu\partial_\nu F(t,k,\mu,\nu)+ \tag{1.11}$$

$$i(V(e^{-ik\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{ik\mu\nu/2})-V(e^{ik\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{-ik\mu\nu/2}))F(t,k,\mu,\nu).$$

1.3. Получено уравнение эволюции квантовых томограмм, отвечающих нелинейному уравнению Шредингера вида

$$i\psi_t=\frac{\hat{p}^2}{2}\psi+V(|\psi|^2)\psi. \tag{1.12}$$

Отметим, что нелинейность появляется в виду зависимости потенциальной энергии от волновой функции. Первоначально, для кубической нелинейности, такая модель была введена для описания гидродинамики сверхтекучего бозе конденсата [E.P. Gross, Nuovo Cimento. – 1961. – V.20 – P. 454; Л. П. Питаевский, ЖЭТФ. – 1961. – Т.13. – С. 451].

Динамическое уравнение для характеристических функций квантовых томограмм, отвечающее нелинейному уравнению (1.12), является интегродифференциальным и имеет вид (Г.Г. Амосов, В.И. Манько, 2005):

$$\partial_t F(t,k,\mu,\nu)=\mu\partial_\nu F(t,k,\mu,\nu)+ \tag{1.13}$$
$$i\left\{V\left(\frac{1}{2\pi}\int_R \exp(-i\widetilde{k}e^{-k\mu\nu/2}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{k\mu\nu/2})F(t,\widetilde{k},1,0)d\widetilde{k}\right)\right.$$

$$\left.-V\left(\frac{1}{2\pi}\int_R \exp(-i\widetilde{k}e^{k\mu\nu}\frac{1}{ik}\partial_\mu e^{-k\mu\nu})F(t,\widetilde{k},0)d\widetilde{k}\right)\right\}\mathrm{F(t,k,\mu,\nu)}$$

1.4. Исследована симплектическая томограмма центра масс квантовой системы для случая большого числа степеней свободы. Рассмотрим квантовую систему с N степенями свободы, описываемую операторами координаты и импульса $\hat{q}_1,\hat{p}_1,\ldots,\hat{q}_N,\hat{p}_N$. Пусть $\vec{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_N)^T$, $\vec{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_N)^T$ есть два действительнозначных вектора. Положим $\hat{\vec{q}}=(\hat{q}_1,\ldots,\hat{q}_N)^T$ и $\hat{\vec{p}}=(\hat{p}_1,\ldots,\hat{p}_N)^T$. Тогда томограмма центра масс системы вводится по формуле (А.С. Архипов, Ю. Е. Лозовик, В.И. Манько, Physics Letters A. – 2004. – V. 328. – P. 419-431):

$$\omega_{cm}(X,\vec{\mu},\vec{\nu}) = Tr(\hat{\rho}\delta(X - \vec{\mu}\hat{\vec{q}} - \vec{\nu}\hat{\vec{p}})),$$

где $\vec{a}\vec{b}$ обозначено скалярное произведение векторов. Для любого вектора $\vec{n}$, чьими компонентами являются неотрицательные целые числа $n_k, 1 \le k \le N$, волновая функция

$$\psi_{\vec{n}}(\vec{X}) = \prod_{k=1}^{N} \frac{e^{-X_k^2/2}}{\pi^{1/4}\sqrt{2^{n_k} n_k!}} H_{n_k}(X_k),$$

где H_n обозначены полиномы Эрмита, определяет мультимодовое фоковское состояние.

Предположим, что число степеней свободы $N \to \infty$, а все числа заполнения, при этом, равномерно ограничены $n_k \le n$. Тогда (Г.Г. Амосов, В.И. Манько, 2005) томограмма центра масс, отвечающая мультимодовому фоковскому состоянию стремится к гауссовскому распределению. Этот результат подтверждает «наивную» точку зрения, что волновая функция, отвечающая большому объекту, должна быть «классической».

Во второй главе рассматриваются марковские коциклы в одночастичном гильбертовом пространстве.

Предположим, что эволюции невозмущенной и возмущенной квантовых систем описываются следующими двумя уравнениями Шредингера:

$$i\partial_t \psi = \hat{H}_0 \psi, \qquad i\partial_t \psi = \hat{H}\psi.$$

Тогда [см., например, Г.Г. Амосов, Теория вероятностей и ее применения. – 2004. – Т.49, в. 1. – С. 145-155] семейство унитарных операторов W={$W_t = e^{-it\hat{H}} e^{it\hat{H}_0}, t \in R$} удовлетворяет условию мультпликативного 1-коцикла группы S={$S_t = e^{-it\hat{H}_0}$}, то есть

$$W_{t+s} = W_t S_t W_s S_t^*, \qquad s,t \in R.$$
$$W_0 = I.$$

Говорят, что коцикл W задает динамику квантовой системы в представлении взаимодействия (или представлении Дирака). Представление взаимодействия играет важную роль в теории рассеяния (W. Heisenberg, 1943; C. Moeller, 1946). Кроме того, такой подход нашел применение в квантовом стохастическом исчислении (R.Husdon, K.R. Parthasarathy, D. Applebaum, 1984), поскольку решениями квантовых стохастических дифференциальных уравнений являются коциклы группы сдвигов, действующей в симметричном пространстве Фока.

Коцикл W называется 1-когранице группы S, если найдется такой унитарный оператор V, что

$$W_t = VS_tV^*S_t^*, \qquad t \in R,$$

то есть группа унитарных операторов $\widetilde{S} = \{\widetilde{S}_t = W_tS_t, t \in R\}$, называемая коциклическим возмущением группы S, унитарно эквивалентна S:

$$\widetilde{S}_t = VS_tV^*, \qquad t \in R.$$

Обозначим C(S) и $\mathrm{B}(\widetilde{S})$ множества всех коциклов группы S и кограниц ее коциклических возмущений $\widetilde{S}$. Тогда фактор-множество $H^1(S) = C(S)/B(\widetilde{S})$, в котором коциклы W и $\widetilde{W}$ группы S, связанные кограницей $\widetilde{\widetilde{W}}$ группы $\widetilde{S}$, так что $\widetilde{W}_t = \widetilde{\widetilde{W}}_tW_t$, $t \in R$, считаются неразличимыми, называется множеством некоммутативных 1-когомологий группы S.

Рассмотрим модельную ситуацию в «одночастичном пространстве» K. Предположим, что $\mathrm{K} = L^2(R)$. Броуновское движение и квантовый белый шум порождают фильтрацию K. Нам будет удобно поменять направление времени, так что t переходит в –t. Тогда такая фильтрация будет состоять из гильбертовых пространств $K_{t]}$, порожденных функциями с носителями, принадлежащими интервалу $[-t, +\infty)$. В этом случае, группа преобразований, сдвигающая приращения броуновского движения, порождает группу сдвигов S, действующую в пространстве K по формуле $(S_t\psi)(x) = \psi(x+t)$. Коцикл W называется марковским коциклом группы S, если выполнено следующее условие (Г.Г. Амосов, 2000)

$$W_t\big|_{K_{t]}^{\perp}} = Id, \qquad t \geq 0. \tag{2.1}$$

Основные результаты второй главы заключаются в следующем:

2.1. Построена модель марковского коцикла, позволяющая полностью описать множество когомологий $H^1(S)$ (Г.Г. Амосов, 2000). Обозначим $H^2(C_+)$ пространство Харди в верхней полуплоскости C_+ комплексной плоскости, состоящее из функций $\psi \in L^2(R)$, регулярных и ограниченных в C_+. Пусть Θ есть внутренняя функция (ограниченная регулярная функция в C_+, с некасательными предельными граничными значениями $|\Theta(x)| = 1$ почти при всех $x \in R$), определяющая оператор умножения на Θ в $H^2(C_+)$. Обозначим P_{K_Θ}, P_E, $P_{[0,t]}$ и $P_{[t,+\infty)}$ ортогональные проекторы на подпространство $K_\Theta = L^2(R_+)\Theta M_\Theta L^2(R_+)$, его ортогональное дополнение Е=$M_\Theta L^2(R_+)$, и пространства функций с носителями, принадлежащими интервалам $[0,t]$ и $[t,+\infty)$, соответственно. Мы обозначили $M_\Theta = F^{-1}\Theta F$, где F есть преобразование Фурье, а Θ – оператор умножения на внутреннюю функцию Θ.

Теорема 2.4.1. *Пусть U есть группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве $K_\Theta = L^2(R_+)\Theta M_\Theta L^2(R_+)$. Тогда пара (U, Θ) определяет унитарный марковский коцикл W группы S по формуле*

$$W_{-t} = (U_t P_{K_\Theta} + S_{-t} P_E) S_t P_{[t,+\infty)} + M_\Theta P_{[0,t]} + P_{H_0^\perp}, \qquad (2.2)$$

$$W_t = S_t W_{-t} S_{-t}, \qquad t \geq 0.$$

2.2. Построены в явном виде марковские коциклы W со свойством $W_t - I \in S_2$ (класс Гильберта-Шмидта).

Для любой сильно непрерывной группы U=$\{U_t, t\in R\}$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве найдется такое не более чем счетное семейство конечных мер μ_n на прямой R, $1 \leq n \leq N \leq +\infty, \mu_n(R) < +\infty$, что группа U будет унитарно эквивалентна группе унитарных операторов $\widetilde{U}$ в пространстве $\oplus_{n=1}^N L^2(\mu_n)$, действующей по формуле

$$\widetilde{U}_t(\oplus_{n=1}^N \eta_n) = \oplus_{n=1}^N U_t^{(n)} \eta_n, \qquad (2.3)$$

где группа унитарных операторов $U_t^{(n)}$ действует в пространстве $L^2(\mu_n)$ так что $(U_t^{(n)}\eta)(x) = e^{itx}\eta(x)$. Представление (2.3) называется спектральным. Следующее утверждение доказывается при помощи анализа модели (2.2) (Г.Г. Амосов, А.Д. Баранов, 2006).

Теорема 2.7.1. *Предположим, что меры, участвующие в спектральном представлении (2.3) группы U сингулярны относительно меры Лебега. Тогда группа $\widetilde{S} = U \oplus S$ является коциклическим возмущением группы, унитарно эквивалентной группе S коциклом W вида (2.2) со свойством $W_t - I \in S_2$ (класс Гильберта-Шмидта).*

Замечание. *Выполнение условия $W_t - I \in S_2$ необходимо и достаточно для того, чтобы при вторичном квантовании марковского коцикла получился унитарный коцикл $\Gamma(W)$ в* *антисимметричном пространстве Фока, марковский в смысле выполнения включения* $\Gamma(W)_t \in M_{t]}, t \geq 0$ *(см. главу 4).*

2.3. Выведено уравнение эволюции модельного марковского коцикла для простейшей ситуации.

Пусть внутренняя функция $\Theta(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ представляет из себя множитель Бляшке. Положим $H = K \oplus L^2(R)$, где K есть одномерное пространство, натянутое на вектор e. Фиксируем действительное число h и рассмотрим следующее уравнение

$$dW_t = \{((1+ih)P_{K_\Theta} + \sqrt{2}e^{iht} < \delta(x-t,\cdot>)dt - \sqrt{2}e^{-iht}(e,\cdot)d\chi_{[0,t]} +$$

$$(M_\Theta^* - I)d\chi_{[0,t]}\}W_t, \qquad t \geq 0, \qquad (2.4)$$

где $\delta(x-t)$ и $\chi_{[0,t]}$ обозначены δ-функция Дирака и характеристическая функция интервала [0,t], соответственно. Тогда (Г.Г. Амосов, 2006) решение уравнения (2.4) определяет унитарный марковский коцикл, отвечающий паре (U,Θ), где группа U действует в пространстве K по формуле $U_t e = e^{iht}e$.

2.4. Приведен пример конкретной квантовой системы, эволюция которой может быть описана марковским коциклом.

Марковские коциклы группы сдвигов могут появляется при описании динамики квантовых динамических систем, эффективная масса которых зависит от положения в координатном пространстве. Точнее, когда эффективная масса системы обращается в ноль в некоторых точках координатного пространства. Приведем следующий простейший пример (Г.Г. Амосов, В.Ж. Сакбаев, 2004). Пусть гамильтонианы $\hat{H}_0$ и $\hat{H}$ невозмущенной и возмущенной систем в пространстве $L^2(R)$ имеют вид:

$$\hat{H}_0 = i\frac{d}{dx}, \qquad \hat{H} = -\chi_{[-l,l]}\frac{d^2}{dx^2} + i(1-\chi_{[-l,l]})\frac{d}{dx},$$

где $\chi_{[-l,l]}$ обозначена характеристическая функция отрезка [-l,l]. Требование эрмитовости оператора $\hat{H}$ приводит к граничному условию $\psi'(-l+0) = i\psi(-l-0)$, $\psi'(l-0) = i\psi(l+0)$, накладываемому на функции ψ, принадлежащие области определения $D(\hat{H})$ гамильтониана $\hat{H}$. В этом случае, множество унитарных операторов $W_t = e^{-it\hat{H}}e^{it\hat{H}_0}$, $t \in R$, образует марковский коцикл группы сдвигов на прямой.

В третьей главе изучается квантовый белый шум над алгеброй и его возмущения марковскими коциклами.

Пусть некоторый квантовый случайный процесс j=$\{ j_t(x), x \in A, t \in R \}$ в гильбертовом пространстве H порождает фильтрацию из алгебр фон Неймана $\{ M_{t]}, t \in R \}$. Ниже нам, также, потребуется семейство алгебр фон Неймана $M_{[t}$, порожденных приращениями $\{ j_r(x) - j_s(x), r, s \geq t,\ x \in A \}$ Предположим, также, что j является процессом со стационарными приращениями, то есть существует однопараметрическая группа $\alpha = \{\alpha_t, t \in R\}$, состоящая из *-автоморфизмов алгебры всех ограниченных операторов *B(H)* в гильбертовом пространстве *H*, корректно определенная на приращениях квантового случайного процесса j и такая что $\alpha_t(j_s(x) - j_r(x)) = j_{s+t}(x) - j_{r+t}(x),\ \ x \in A$, $s, t, r \in R$, и, следовательно, $\alpha_t(M_{s]}) = M_{s+t]}$. Следуя определениям А.Н. Колмогорова (1958) и G.G. Emch'а (квантовый случай, 1976) назовем группу α колмогоровским потоком, если выполнено условие

$$\bigcap_t M_{t]} = \{C1\}.$$

Отметим, что в нашем определении отсутствуют некоторые дополнительные требования ранее имевшихся определений в силу того, что мы сразу предполагаем, что колмогоровский поток порожден квантовым случайным процессом *j*, что делать не обязательно.

Процесс j=$\{ j_t(x), x \in A, t \in R \}$ называется квантовым случайным процессом с независимыми приращениями или квантовым белым шумом, если фиксированное состояние $\hat{\rho} \in \sigma(H)$, определяющее распределения вероятностей процесса, задает математическое ожидание $\mathbf{M}_{\hat{\rho}}(\cdot) = Tr(\hat{\rho}\cdot)$ факторизующееся в смысле

$$\mathrm{M}_{\hat{\rho}}(\varphi_1(j_{t1}(x_1) - j_{s2}(y_1))...\varphi_n(j_{tn}(x_n) - j_{sn}(y_n))) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{\hat{\rho}}(\varphi_i(j_{ti}(x_i) - j_{si}(y_i)))$$

для любого выбора попарно непересекающихся интервалов (si, ti), функций $\varphi_i \in L^\infty$ и $x_i, y_i \in A$, $1 \leq i \leq n$, кроме того, приращения процесса должны быть коммутативны,

$$[j_t(x_1) - j_s(y_1), j_r(x_2) - j_p(y_2)] = 0,$$

для непересекающихся интервалов (s,t) и (p,r) и любого выбора элементов $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A$. Квантовый белый шум может быть построен для любой универсальной обертывающей алгебры A произвольной алгебры Ли, при помощи задания семейства вложений в симметричное пространство Фока (M. Schurmann, 1988).

Основные результаты третьей главы заключаются в следующем:

3.1. Исследованы условия, при которых квантовый белый шум j={ $j_t(x), x \in A, t \in R$ } порождает колмогоровский поток. А именно, это так (Г.Г. Амосов, 2003), если состояние $\hat{\rho}$ точное (из $\mathbf{M}_{\hat{\rho}}(\hat{x}) = 0$ и того, что оператор $\hat{x}$ положительный, следует $\hat{x} = 0$) или если алгебра фон Неймана *M*, порожденная приращениями процесса j, является фактором ($M \bigcap M' = \{C1\}$).

3.2. Понятие марковского коцикла определено для семейства *-автоморфизмов $w = \{w_t, t \in R\}$ (Г.Г.Амосов, 2003, основываясь на L. Accardi, A. Frigerrio, J.T. Lewis, 1982). Построение пояснено на конкретных примерах.

Семейство *w* называется (мультипликативным) марковским коциклом группы α (по отношению к квантовому белому шуму j), если

$$w_{t+s} = w_t \circ \alpha_t \circ w_s \circ \alpha_{-t}, \qquad s, t \in R,$$

$$w_t(x) = x, \qquad x \in M_{[t}, \qquad t \geq 0.$$

Предположим, что *j={B(t), $t \in R$}* представляет из себя произвольную реализацию броуновского движения. Тогда семейство отображений w, определенных формулой

$$w_t(B(t+s) - B(t)) = B(t+s) - B(t), \qquad s \geq 0,$$

$$w_t(B(s)) = \exp\{-\frac{1}{2}\int_0^t a(x)dB(x) - \frac{1}{4}\int_0^t |a(x)|^2 \, dx\} \cdot$$

$$(B(s) + \int_0^t a(x)dB(x)), \qquad s \leq t,$$

представляет из себя марковский коцикл в смысле определения, данного выше, для любой функции $a(x) \in L^2_{loc}(R)$.

3.3. Множество нелинейных функционалов от квантового белого шума интерпретировано как кольцо когомологий группы сдвигов.

Приращения процесса *j*, определенные формулой *I(t)=* $j_{r+t}(x) - j_r(x)$ удовлетворяют условию аддитивного 1-коцикла группы α, то есть

$$\alpha_t(I(s)) - I(t+s) + I(t) = 0.$$

Вообще, аддитивным $k-\alpha-$коциклом называется k-параметрическое семейство $I(t_1,...,t_k)$ (в нашем случае, со значениями из некоторого алгебры операторов), удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned}&\alpha_s(I(t_1,...,t_k)) - I(t_1+s,t_2,...,t_k) + ...\\&+(-1)^i I(s,t_1,...,t_{i-1},t_i+t_{i+1},...,t_k) + ...\\&+(-1)^{k+1} I(s,t_1,...,t_{k-1}) = 0.\end{aligned}$$

Можно определить операцию когомологического умножения $k-\alpha-$коцикла I на $n-\alpha-$коцикл J, результатом которой будет $(k+n)-\alpha-$коцикл $I\Lambda J$, заданный формулой

$$(I\Lambda J)(t_1,...,t_{k+n}) = I(t_1,...,t_k)\alpha_{t_1+...+t_k}(J(t_{k+1},...,t_{k+n})).$$

Кольцо А, порожденное приращениями $j_{r+t}(x) - j_r(x)$ и операцией Λ, представляет из себя удобный инструмент для изучения коциклических возмущений группы α марковскими коциклами w, поскольку марковский коцикл определяет гомоморфизм кольца А. Заметим, что А представляет из себя множество нелинейных функционалов от приращений квантового случайного процесса j.

3.4. Доказано, что для группы автоморфизмов, являющейся марковским возмущением колмогоровского потока, порожденного квантовым белым шумом, существует сужение, изоморфное исходному колмогоровскому потоку (аналог разложения Вольда в классической теории случайных процессов).

Теорема 3.7.1. *Пусть группа автоморфизмов $\widetilde{\alpha}$ фактора фон Неймана М получена возмущением колмогоровского потока α, порожденного квантовым белым шумом j, марковским коциклом w, оставляющим инвариантным математическое ожидание. Тогда найдется такой подфактор $\widetilde{M} \subset M$, сужение на который $\widetilde{\alpha}$ является колмогоровским потоком, порожденным квантовым белым шумом $\widetilde{j}$, изоморфным исходному. Предел $\lim_{t\to+\infty} w_{-t} = w_-$ корректно определяет нормальный *-эндоморфизм w_-, такой что $\widetilde{M} = w_-(M)$, $\widetilde{j}_t = w_- \circ j_t$, $t \in R$.*

Классическое разложение Вольда (H. Wold, 1938) позволяет однозначно найти случайный процесс с некоррелированными приращениями, соответствующий стационарному случайному процессу, так что недетерминированная часть процесса представляется в виде интеграла по некоторой некоррелированной мере. Теорему 3.7.1 (Г.Г. Амосов, 2003) можно рассматривать как некоторый аналог разложения Вольда для квантового случая.

В четвертой главе изучаются квазисвободные эволюции на алгебрах канонических антикоммутационных соотношений и на алгебре квадрата квантового белого шума.

В первой части четвертой главы изучается алгебра канонических антикоммутационных соотношений.

Алгеброй канонических антикоммутационных соотношений (КАС) **A***(K)* над «одночастичным» гильбертовым пространством *K* называется С*-алгебра с единицей **1**, порожденная образующими $\hat{a}(f), \hat{a}^*(g)$, $f, g \in K$, удовлетворяющими КАС следующего вида:

1. $\hat{a}^*(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{a}^*(f) + \beta \hat{a}^*(g)$, $\alpha, \beta \in C$;

2. $\hat{a}(f)\hat{a}^*(g) + \hat{a}^*(g)\hat{a}(f) = (g, f)\,\mathbf{1}$;

3. $\hat{a}(f)\hat{a}(g) + \hat{a}(g)\hat{a}(f) = 0$.

Оператор R, $0<R<I$, в гильбертовом пространстве *K* определяет *-представление π_R алгебры **A***(K)* в гильбертовом пространстве $H = \Gamma_a(K) \otimes \Gamma_a(K)$ по формуле

$$\pi_R(\hat{a}(f)) = \hat{a}((I-R)^{1/2} f) \otimes \Gamma + 1 \otimes \hat{a}^*(R^{1/2} Jf),$$

где $\Gamma_a(K)$ есть антисимметричное пространство Фока с вакуумным вектором Ω; Γ -- оператор в $\Gamma_a(K)$, определенный условиями $\Gamma a(f) = -a(f)\Gamma$, $\Gamma\Omega = \Omega$; J – антиунитарный оператор, то есть $(Jf, Jg) = (g, f)$, $f, g \in K$. Представление π_R порождает алгебру фон Неймана $M_R = \pi_R(\mathbf{A}(K))''$, которая является фактором (R.T. Powers, 1967). Можно показать, что операторы $\hat{b}(f), \hat{b}^*(f)$, $f \in K$, в пространстве *H*, где

$$\hat{b}(f) = \Gamma \hat{a}(R^{1/2} f) \otimes 1 - \Gamma \otimes \hat{a}^*((I-R)^{1/2} Jf),$$

порождают коммутант $M_R^{'}$ алгебры M_R.

В первой части четвертой главы получены следующие основные результаты:

4.1. Получено условие продолжения квазисвободного (см. ниже) отображения на алгебре M_R на ее коммутант $M_R^{'}$.

Определим *-автоморфизмы α и β алгебр M_R и $M_R^{'}$, называемые квазисвободными, по формуле

$$\alpha(\pi_R(\hat{a}(f))) = \pi_R(\hat{a}(Uf)), \qquad \beta(\hat{b}(f)) = \hat{b}(Vf),$$

где U и V два унитарных оператора в пространстве K. Возникает вопрос, когда эти два автоморфизма можно «сшить», так чтобы получился *-автоморфизм алгебры всех ограниченных операторов $B(H) = M_R \bigcup M_R^{'}$ в пространстве H? Необходимым и достаточным условием будет (Г.Г. Амосов, 1997)

$$R^{1/2}(I-R)^{1/2}(U-V) \in S_2.$$

В общем случае (для произвольного фактора фон Неймана M вопрос о продолжении *-эндоморфизма M на коммутант M' был исследован Г.Г. Амосовым, А.В. Булинским и М.Е. Широковым (2001).

4.2. Доказано, что вторичное квантование в антисимметричном пространстве Фока марковского коцикла W в пространстве K=$L_2(R)$, удовлетворяющего условию $W_t - I \in S_2$, определяет марковский коцикл на гиперфинитном факторе фон Неймана, порожденном представлением алгебры канонических антикоммутационных соотношений.

Пусть $K = L^2(R)$. Определим группу автоморфизмов $\tau = \{\tau_t, t \in R\}$ фактора Неймана M_R по формуле

$$\tau_t(\pi_R(\hat{a}(f))) = \pi_R(\hat{a}(S_t f)),$$

где унитарный операторы $(S_t f)(x) = f(x-t)$ образуют группу сдвигов в K. Пусть фактор фон Неймана $M_{t]}$ порожден операторами $\pi_R(\hat{a}(f)), \pi_R(\hat{a}^*(f))$, отвечающими функциям $f \in K$ с носителями, принадлежащими интервалу $[-t, +\infty)$. Группа τ является колмогоровским потоком на M, относительно фильтрации $\{M_{t]}, t \in R\}$ (А.В. Булинский, 1996). Пусть W есть унитарный коцикл группы сдвигов S, являющийся марковским в смысле определения (2.1). Рассмотрим коциклическое возмущение $\widetilde{S}_t = W_t S_t$, $t \in R$, и соответствующую ему группу $\widetilde{\tau}$, определенную формулой

$$\widetilde{\tau}_t(\pi_R(\hat{a}(f))) = \pi_R(\hat{a}(\widetilde{S}_t f)).$$

Теорема 4.2.1 (Г.Г. Амосов, 2003)**.** *Пусть марковский коцикл W удовлетворяет условию* $W_t - I \in S_2$, $t \in R$. *Тогда существует такой унитарный коцикл U группы* τ, *что группы* τ *и* $\widetilde{\tau}$ *коциклически сопряжены посредством этого коцикла,*

$$\widetilde{\tau}_t(x) = U_t \tau_t(x) U_t^*, \quad x \in M_R, \qquad t \in R,$$

причем U удовлетворяет марковскому свойству в форме

$$U_t \in M_{t]}, \qquad t \geq 0.$$

Во второй части четвертой главы изучается алгебра квадрата квантового белого шума.

Алгеброй квадрата квантового белого шума **A***(K)* над гильбертовой алгеброй $K = L^2(R) \bigcap L^\infty(R)$ называется (L. Accardi, Y.G. Lu, И.В. Волович, 1999) универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли с инволюцией * и образующими **1** (центральный элемент), $\hat{b}_\phi, \hat{b}_\phi^+, \hat{n}_\phi, \quad \phi \in K$, удовлетворяющими соотношениям:

$$[\hat{b}_\phi, \hat{b}_\psi^+] = \gamma < \phi, \psi > \mathbf{1} + \hat{n}_{\bar{\phi}\psi},$$

$$[\hat{n}_\phi, \hat{b}_\psi] = -2\hat{b}_{\bar{\phi}\psi}, \ [\hat{n}_\phi, \hat{b}_\psi] = 2\hat{b}_{\bar{\phi}\psi},$$

$$(\hat{b}_\phi)^* = \hat{b}_\phi^+, \ (\hat{n}_\phi)^* = \hat{n}_{\bar{\phi}},$$

$$[\hat{n}_\phi, \hat{n}_\psi] = [\hat{b}_\phi, \hat{b}_\psi] = [\hat{b}_\phi^+, \hat{b}_\psi^+] = 0.$$

Во второй части четвертой главы получены следующие основные результаты:

4.3. Проведена классификация квазисвободных эволюций на алгебре квадрата квантового белого шума.

Теорема 4.3.1 (L. Accardi, Г.Г. Амосов, U. Franz, 2004)**.** *Пусть* T^1, T^2, T^3 *есть линейные операторы в К. Определим отображение* τ'*, действующее на образующие* **A***(К) по формуле*

$$1 \to 1, \qquad \hat{b}_\varphi \to \hat{b}_{T^1\varphi}, \qquad \hat{b}_\varphi^+ \to \hat{b}_{T^2\varphi}^+, \qquad \hat{n}_\varphi \to \hat{n}_{T^3\varphi}.$$

Отображение τ' *может быть расширено до *-эндоморфизма* **A***(К) тогда и только тогда, когда существует эндоморфизм Т гильбертовой алгебры К и действительнозначная функция* α *на R, так что для любого* $\varphi \in K$,

$$T^3(\varphi) = T(\varphi),$$

$$T^1(\varphi) = T^2(\varphi) = e^{i\alpha} T(\varphi).$$

Эндоморфизм τ' является автоморфизмом тогда и только тогда, когда T – автоморфизм.

Эндоморфизмы, введенные в теореме 4.2.1 естественно назвать квазисвободными. Каждый такой эндморфизм определяется парой (T, α). Определим группу квазисвободных *-автоморфизмов τ алгебры **A**(*K*) по формуле

$$\tau_t(\hat{b}_\varphi) = \lambda^{-it} \hat{b}_\varphi, \qquad \tau_t(\hat{b}_\varphi^+) = \lambda^{it} \hat{b}_\varphi^+,$$

$$\tau_t(\hat{n}_\varphi) = \hat{n}_\varphi, \qquad 0 < \lambda < 1, \qquad \varphi \in K.$$

4.4. Построены состояния Кубо-Мартина-Швингера на алгебре квадрата квантового белого Шума.

Определим представление ρ^+ алгебры Ли **sl2** с образующими элементами B^-, B^+, M, удовлетворяющими соотношениям

$$[B^-, B^+] = M, \qquad [M, B^\pm] = \pm B^\pm,$$

в пространстве l^2 с базисом $\{e_n, n = 0,1,2,...\}$ по формуле [L. Accardi, U. Franz, M. Skeide, Commun. Math. Phys. – 2000. – V. 228. – P. 123-150]

$$\rho^+(B^+)e_n = \sqrt{(n+1)(n+2)}e_{n+1}, \qquad \rho^+(B^-)e_n = \sqrt{n(n+1)}e_{n-1},$$

$$\rho^+(M)e_n = (2n+2)e_n.$$

Далее, определим состояние φ_λ на универсальной обертывающей алгебре *U(***sl2***)* алгебры Ли **sl2** формулой

$$\varphi_\lambda(x) = (1-\lambda)\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (e_n, \rho^+(x)e_n), \qquad x \in U(\mathbf{sl2}),$$

введем вектор $\psi_\lambda = \sqrt{1-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n/2} e_n \otimes e_n$ и представление $\pi_+ = \rho^+ \otimes Id$ алгебры U(**sl2**) в пространстве $H = l^2 \otimes l^2$. Положим $\eta_\lambda(x) = \pi_+(x)\psi_\lambda$, $x \in U$ (**sl2**). Согласно конструкции M. Schurmann'a (1988) тройка ($\pi_+, \eta_\lambda, \psi_\lambda$) определяет квантовый белый шум, который, в данном случае, является представлением θ алгебры квадрата квантового белого шума **A**(*K*) в симметричном пространстве Фока $F(H \otimes L^2)$ над одночастичным пространством $H \otimes L^2(R)$. Определим линейный функционал ω_λ на алгебре **A**(*K*) по следующей формуле

$$\omega_\lambda(x) = (\Omega, \theta(x)\Omega), \qquad x \in \mathbf{A}(K),$$

где Ω обозначен вакуумный вектор в $F(H \otimes L^2)$.

Теорема 4.3.2 (L. Accardi, Г.Г. Амосов, U. Franz, 2004). ω_λ есть состояние Кубо-Мартина-Швингера, ассоциированное с эволюцией τ, то есть

$$\omega_\lambda(xy) = \omega_\lambda(\tau_i(y)x)$$

для всех элементов $x, y \in \mathbf{A}(K)$, *являющихся аналитическими относительно* τ.

Пятая глава посвящена квантовой передаче информации.

Предположим, что квантовый канал Φ, заданный формулой

$$\Phi(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{+\infty} E_i \hat{\rho} E_i^*$$

действует в бесконечномерном гильбертовом пространстве $H, \dim H = +\infty$. В качестве примера можно привести канал, демпфирующий амплитуду, для которого

$$E_i = \sum_{k=i}^{+\infty} \sqrt{C_k^i}\, \eta^{(k-i)/2} (1-\eta)^{i/2} \mid k-i \rangle\langle k \mid,$$

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!},$$

или канал, демпфирующий фазу, для которого

$$E_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[k\sqrt{-2\ln\eta}]^i}{\sqrt{i!}} [\eta]^{k^2} \mid k \rangle\langle k \mid.$$

Здесь $|k\rangle$, $k=0,1,2,\dots$ обозначены фоковские состояния и параметр η описывает степень демпфирования (он может быть записан в виде $\eta = e^{-\gamma t}$, где γ есть степень демпфирования и t - время передачи). Квантовый канал, действующий в бесконечномерном пространстве, может иметь бесконечную емкость. Тем не менее, при кодировании информации реально используется лишь конечное число состояний. Для каждого фиксированного кодирования получается, таким образом, передача через конечномерный канал, который можно назвать подканалом исходного.

Для квантового канала Φ, действующего в гильбертовом пространстве H можно определить следующие характеристики максимальной чистоты выхода канала:

$$\nu_p(\Phi) = \max_{\hat{\rho}} Tr(\Phi(\hat{\rho})^p),$$

$$\nu_S(\Phi) = \min_{\hat{\rho}} S(\Phi(\hat{\rho})).$$

Гипотеза мультипликативности утверждает (Г.Г. Амосов, А.С. Холево, R.F. Werner, 2000), что для квантовых каналов $\Phi_k, 1 \le k \le n$, выполнено

$$\nu_p(\Phi_1 \otimes ... \otimes \Phi_n) = \nu_p(\Phi_1)...\nu_p(\Phi_n)$$

для p>1. Справедливость гипотезы мультипликативности для p близких к единице влечет выполнение гипотезы аддитивности для минимума энтропии (Г.Г. Амосов, А.С. Холево, R.F. Werner, 2000):

$$\nu_S(\Phi_1 \otimes ... \otimes \Phi_n) = \nu_S(\Phi_1) + ... + \nu_S(\Phi_n) \qquad (5.1)$$

Если квантовые каналы удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, например, ковариантны (А.С. Холево, 2002), из справедливости (5.1) вытекает справедливость гипотезы аддитивности для верхней энтропийной границы канала, то есть верхняя энтропийная граница равна пропускной способности канала.

Относительной энтропией двух состояний $\hat{\rho}$ и $\hat{\theta}$ называется (H. Umegaki, 1962) величина $S(\hat{\rho},\hat{\theta}) = Tr(\hat{\rho}\log\hat{\rho}) - Tr(\hat{\rho}\log\hat{\theta})$. Известно (G. Lindblad, 1975), что относительная энтропия убывает при воздействии на состояния квантовым каналом Φ, так что

$$S(\Phi(\hat{\rho}),\Phi(\hat{\theta})) \le S(\hat{\rho},\hat{\theta}). \qquad (5.2)$$

В пятой главе получены следующие основные результаты:

5.1. Для канала, демпфирующего амплитуду использование фоковских состояний с высокими номерами не увеличивает надежность.

Для двух ортогональных состояний $|\psi_0>$ и $|\psi_1>$ положим

$$| \psi >= \cos\frac{\theta}{2} | \psi_0 > + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} | \psi_1 >, \qquad \hat{\rho} = | \psi >< \psi |, \qquad (5.3)$$

$$f(\theta,\varphi) = Tr(\hat{\rho}\Phi(\hat{\rho})) = < \psi | \Phi(\hat{\rho}) | \psi >,$$

усредняя, далее, по сфере Блоха, получаем *надежность* квантового канала Φ,

$$F = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \; f(\theta,\varphi),$$

которая показывает насколько точно передается квантовым каналом информация, кодированная кубитными состояниями (5.3). Расчет надежности квантового канала, демпфирующего амплитуду, показал (Г.Г. Амосов, В.И. Манько, S. Mancini, 2006), что использование фоковских состояний $|k>$ с высокими номерами k не дает выигрыша для передачи информации с точки зрения надежности.

5.2. Гипотеза сильной супераддитивности для квантового деполяризующего канала доказана на основе свойства убывания относительной энтропии.

Рассмотрим квантовый деполяризующий канал Ф в конечномерном гильбертовом пространстве H, $\dim H = d < +\infty$, определенный формулой

$$\Phi(\hat{\rho}) = (1-p)\hat{\rho} + \frac{p}{d} I, \qquad 0 < p < \frac{d^2}{d^2 - 1}.$$

Здесь символом I обозначен тождественный оператор в H. Свойство (5.2) влечет справедливость гипотезы аддитивности для квантового деполяризующего канала (Г.Г. Амосов, 2004), то есть его пропускная способность может быть вычислена по формуле

$$C(\Phi) = \log d - (1 - \frac{d-1}{d} p) \log(1 - \frac{d-1}{d} p) - \frac{d-1}{d} p \log\frac{p}{d}.$$

Отметим, что первое доказательство этого факта [C.King, IEEE Trans. Inform. Theory. – 2003. – V. 49. – P. 221-229] было основано на доказательстве гипотезы мультипликативности и носило излишне технически сложный характер. Более того, если ввести характеристику канала вида

$$\hat{H}_{\Phi}(\hat{\rho}) = \inf_{\hat{\rho}_{av} = \hat{\rho}} \sum_j \pi_j S(\Phi(\hat{\rho}_j)),$$

для квантового деполяризующего канала справедлива гипотеза сильной супераддитивности. То есть для квантового деполяризующего канала Ф в пространстве Н и произвольного квантового канала Ψ в пространстве K справедливо (Г.Г. Амосов, 2006)

$$\hat{H}_{\Phi\otimes\Psi}(\hat{\rho}) \geq \hat{H}_{\Phi}(Tr_H(\hat{\rho})) + \hat{H}_{\Psi}(Tr_K(\hat{\rho})).$$

5.3. Установлена оценка выходной энтропии каналов Вейля, ковариантных относительно максимальной коммутативной группы унитарных операторов.

Фиксируем ортонормированный базис |k>, k=0,…,d-1, в гильбертовом пространстве H, dimH=d, и определим двупараметрическое множество унитарных операторов $W_{m,n}$ по формуле

$$W_{m,n} = \sum_{k=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i}{d}kn} \, |\, k+m \mod \mathrm{d}\rangle\langle \mathrm{k}\,|. \qquad (5.4)$$

Операторы (5.4) называются операторами Вейля и образуют дискретную группу Гензенберга-Вейля, удовлетворяющую соотношению

$$W_{m,n}W_{m',n'} = e^{\frac{2\pi i}{d}(m'n - mn')}W_{m+m',n+n'}$$

Фиксируем неотрицательные числа r и p, удовлетворяющие условию (d-1)(r+dp)=1 и определим бистохастический квантовый канал формулой

$$\Phi(\hat{\rho}) = (1-(d-1)(r+dp)\hat{\rho} + r\sum_{m=0}^{d-1} W_{m,0}\hat{\rho}W_{m,0}^{*} + p\sum_{m=0}^{d-1}\ \sum_{n=1}^{d-1} W_{m,n}\hat{\rho}W_{m,n}^{*} \qquad (5.5)$$

Квантовые каналы (5.5) ковариантны относительно максимальной коммутативной группы унитарных операторов U_d, со спектральными проекторами, совпадающими со спектральными проекторами операторов Вейля $W_{m,0}$ (Г.Г. Амосов, 2006). Для квантовых каналов (5.5) справедлива следующая теорема, из которой вытекает справедливость для них гипотезы аддитивности (Г.Г. Амосов, 2006):

Теорема 5.3.3. *Пусть* Φ *есть канал Вейля вида (5.5) и размерность пространства d является простым числом. Тогда для тензорного произведения канала* Φ *и произвольного канала* Ψ *в пространстве K справедлива следующая оценка*

$$\hat{H}_{\Phi\otimes\Psi}(\hat{\rho}) \geq -(1-\frac{d-1}{d}p)\log(1-\frac{d-1}{d}p) -$$
$$\frac{d-1}{d}p\log\frac{p}{d} + \hat{H}_{\Psi}(Tr_H(\hat{\rho})),$$
$$\hat{\rho} \in \sigma(H \otimes K).$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Получены уравнения эволюции симплектических квантовых томограмм для параметрического осциллятора (с выписыванием пропагатора, дающего решение), квантовых систем с гамильтонианом формы $\hat{H}$=F($\hat{q}$)+G($\hat{p}$) и нелинейного уравнения Шредингера. При дополнительном условии "факторизуемости" состояния доказано, что при стремлении числа степеней свободы к бесконечности, симплектическая томограмма центра масс стремится к плотности гауссовского распределения. Эти результаты опубликованы в работах [13], [27-29], [31-32].

2. Построена модель, позволяющая строить марковские коциклы группы сдвигов на прямой, удовлетворяющие заданным свойствам. На ее основе полностью исследован класс коциклической сопряженности группы сдвигов на прямой марковскими коциклами W, удовлетворяющими условию $W_t - I \in S_2$ (класс Гильберта-Шмидта). Выведено динамическое уравнение унитарного марковского коцикла в модельной ситуации. Эти результаты опубликованы нами в работах [3-4], [6], [11], [12], [16-17], [26], [30].

3. Множество всех функционалов от квантового белого шума интерпретировано как кольцо когомологий группы автоморфизмов, порожденной колмогоровским потоком. Показано, что марковское возмущение колмогоровского потока приводит к тому, что кольцо когомологий, отвечающее возмущенному потоку, изоморфно исходному. Аналог классического разложения Вольда, позволяющего выделить недетерминированную часть случайного процесса, вводится для квантовых случайных процессов, являющихся марковскими возмущениями колмогоровских потоков. Эти результаты опубликованы в работах [14], [24-26].

4. Показано, что вторичное квантование коцикла W со свойством $W_t - I \in S_2$, для представлений алгебры канонических антикоммутационных соотношений (КАС),

порождает коцикл $\Gamma(W)$ колмогоровского потока на КАС с марковским свойством вида $\Gamma(W)_t \in M_{t]}$, $t \geq 0$ (согласованный с фильтрацией ($M_{t]}$, $t \geq 0$), состоящей из алгебр фон Неймана, образующих колмогоровский поток). Выведена классификация квазисвободных эволюций алгебры квадрата квантового белого шума (ККБШ). Построены состояния Кубо-Мартина-Швингера алгебры ККБШ и ассоциированные с ними динамические полугруппы. Приведенные результаты опубликованы в работах [4-5], [8-9], [15], [19-20], [21-22], [26].

5. Введено понятие инвариантных кубитов, кудитов и подканала квантового канала передачи информации. Оптимизация надежности (fidelity) разобрана на примере канала, демпфирующего амплитуду. Получена оценка энтропии выходных состояний вейлевских каналов, ковариантных относительно максимальной коммутативной группы унитарных операторов, из которой вытекает справедливость гипотезы сильной супераддитивности для деполяризующего канала. Приведенные результаты опубликованы в работах [7], [10], [18], [32], [33-34].

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

1. Амосов Г.Г., Булинский А.В. О некоторых полугруппах вполне положительных отображений алгебр фон Неймана // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики: сб. научных трудов/Моск. физ.-тех. ин-т. – М., 1995. – С. 4-11.
2. Амосов Г.Г., Булинский А.В. Сопряженные полугруппы сдвигов гиперфинитных факторов // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики: сб. научных трудов/Моск. физ.-тех. ин-т. – М., 1995. – С. 12-15.
3. Амосов Г.Г. К теории индекса непрерывных полугрупп изометрических операторов в гильбертовом пространстве // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: сб. научных трудов/Моск. физ.-тех. ин-т. – М., 1996. – С. 14-24.
4. Амосов Г.Г. О классе коциклической соряженности квазисвобо-дных К-систем // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: сб. научных трудов/Моск. физ.-тех. ин-т. – М., 1997. – С. 4-16.
5. Амосов Г.Г., Булинский А.В. Индекс Пауэрса-Арвесона для квазисвободных динамических полугрупп // Математические заметки. – 1997. – Т. 62, в. 6. – С. 933-936.

6. Амосов Г.Г. Об аппроксимации полугрупп изометрий в гильбертовом пространстве // Известия ВУЗОВ. Математика. – 2000. – N 2. – С. 7-12.
7. Амосов Г.Г., Холево А.С., Вернер Р. О некоторых проблемах аддитивности в квантовой теории информации // Проблемы передачи информации. – 2000. – Т. 36, в. 4. – С. 25-34 .
8. Амосов Г.Г., Булинский А.В., Широков М.Е. Регулярные полугруппы эндоморфизмов факторов Неймана // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, в. 5. – С. 643-659.
9. Амосов Г.Г. Аппроксимация по модулю s2 изометрических операторов и коциклическая сопряженность эндоморфизмов алгебры КАС // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. – Т. 7, в. 3. – С. 925-930.
10. Амосов Г.Г., Холево А.С. О гипотезе мультипликативности для квантовых каналов // Теория вероятностей и ее применения. – 2002. – Т.47, в. 1. – С. 143-146.
11. Амосов Г.Г. О марковских возмущениях группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 2004. – Т.49, в. 1. – С. 145-155.
12. Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж. О самосопряженных расширениях оператора Шредингера с вырождением на двух полупрямых и определяемых ими марковских коциклах // Математические заметки. – 2004. – Т. 76, в. 3. – С. 335-343.
13. Амосов Г.Г., Манько В.И. Эволюция вероятностных мер, связанных с квантовыми системами // Теоретическая и математическая физика. – 2005. – Т. 142, N 2. – С. 365-370.
14. Амосов Г.Г. О марковских возмущениях квантовых случайных процессов со стационарными приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 2005. – Т. 50, в. 4. – С. 754-763.
15. Амосов Г.Г. Эволюционное уравнение для марковских коциклов, полученных вторичным квантованием в симметричном пространстве Фока // Теоретическая и математическая физика. – 2006. – Т. 46, N 1. – С. 186-192.
16. Амосов Г.Г., Баранов А.Д. О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, в. 1. – С. 3-18.
17. Амосов Г.Г., Баранов А.Д. О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой, II // Математические заметки. – 2006. – Т. 79, в. 5. – С. 779-780.

18. Амосов Г.Г. Замечание о гипотезе аддитивности для квантового деполяризующего канала // Проблемы передачи информации. – 2006. – Т. 42, в. 2. – С. 3-11.
19. Accardi L., Amosov G.G., Franz U. Second quantized automorphisms of the renormalized square of white noise (RSWN) algebra // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probabability and Rel. Top. - 2004. - V. 7, N 1. - P. 183-194.
20. Amosov G.G. Cocycle perturbation of quasifree algebraic K-flow leads to required asymptotic dynamics of associated completely positive semigroup // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Rel. Top. - 2000. - V. 3. - P. 237-246.
21. Amosov G.G. On cocycle conjugacy of quasifree endomorphism semigroups on the CAR algebra // J. Mathematical Sciences. - 2001. - V. 105, N 6. - P. 2496-2503.
22. Amosov G.G., Holevo A.S., Werner R.F. On additivity/multiplicativity problems for quantum channels // Quantum communications, measurement and computing 3, Edited by O. Hirota and P. Tombesi/ Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2001.
23. Amosov G.G. On the Wold decomposition for cocycle perturbations of a quantum Levy process // MaPhySto Miscellanea. - 2002. - N 22. - P. 10-11.
24. Amosov G.G. Stationary quantum stochastic processes from the cohomological point of view // Quantum Probability and White Noise Analysis XV, Edited by W.Freudenberg /World Sci. Publ. Co., 2003, 260 P. - P. 29-40.
25. Amosov G.G. On Markovian cocycle perturbations in classical and quantum probability // Internat. J. of Mathematics and Mathematical Sciences - 2003. - N 54. - P. 3443-3468.
26. Amosov G.G., Man'ko V.I. Quantum probability measure for parametric oscillators // Physics Letters A. - 2003. - V. 318, N 4-5. - P. 287-291.
27. Amosov G.G., Man'ko V.I. Quantum tomograms as von Neumann probaility distributions // Squeezed states and uncertainty relations /Rinton Press, 2003. - P. 7-16.
28. Amosov G.G., Man'ko V.I. Quantum probability measures and tomographic probability densities // J. Russian Laser Research. - 2004. - V.25, N 3. - P. 253-266.
29. Amosov G.G., Baranov A.D. On perturbations of the group of shifts on the line by unitary cocycles // Proceedings of the American Mathematical Society - 2004. - V.132, N 11. - P. 3269-3273.
30. Amosov G.G., Man'ko V.I. Tomographic probability measure for many degrees of freedom and the central limit theorem // J. Physics A: Mathematical and General. - 2005. - V. 38, N 10. - P. 2173-2177.

31. Amosov G.G., Mancicni S., Man'ko V.I. Transmitting qudits through larger quantum channels // J. Physics A: Mathematical and General. - 2006. - V. 39. - P. 3375-3380.
32. Amosov G.G. On the Weyl channels being covariant with respect to the maximum commutative group of unitaries // J. Mathematical Physics. – 2007. – V. 48, N 1. – P. 012104.
33. Amosov G.G. Strong superadditivity conjecture holds for the quantum depolarizing channel in any dimension // Physical Review A. – 2007. – V. 75, N 6. – P. 060304.

Амосов Григорий Геннадьевич

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАНТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Подписано в печать 1.03.2008.
Формат 60*84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1.0. Уч.-изд. л. 1.0.
Тираж 100 экз. Заказ № ф-821.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9