CALCULO SIMBÓLICO
Y
MATEMÁTICO
CON
LA HP 40G

Version 1.0

Renée de Graeve

Profesora Titular de la Universidad de Grenoble I

Agradecimientos

Todo el mundo sabia que era imposible que se escribiera un programa de cálculo simbólico completo…Una persona sola, un iluminado, Bernard Parisse no lo sabía … pero él lo consiguió.

Este es su programa de calculo simbólico (llam☺ado ERABLE) implantado por segunda vez en una calculadora HP.

Esto ha llevado a Bernard Parisse a modificar ligeramente su programa de manera que las funciones de cálculo simbólico puedan ser editadas y obtener las respuestas en el editor de ecuaciones…

A lo largo de este manual descubrirán todas las prestaciones de esta calculadora.

Quiero dar las gracias a:

- Bernard Parisse por sus valiosos consejos, sus observaciones sobre el texto, sus correcciones y su facilidad para escribir las funciones según mi demanda, con eficacia y amabilidad
- Jean Tavenas por el interés puesto en la realización de esta guía; Jean Yves Avenard por haber tenido en cuenta nuestras súplicas y haber escrito con prontitud, el comando PROMPT de manera improvisada…(véase 6.4.2)

Prologo

La HP 40G va a marcar una nueva etapa en la expansión del uso del cálculo simbólico. Por un lado por su precio competitivo, y por otro lado, por la gran cantidad de posibilidades para ejecutar paso a paso los principales algoritmos impartidos en matemáticas tanto en institutos como en los primeros años de la universidad.

Pero había además que adjuntar una documentación adecuada, preferentemente escrita por un profesor de matemáticas. Esto es lo que Uds. van a encontrar en esta guía realizada por Reneé de Graeve profesora titular de la Universidad de Grenobe I y presentadora en el IREM de Grenoble. Este manual contiene por supuesto una referencia completa de las funciones de cálculo simbólico, y también nos muestra como a partir de ejemplos de Selectividad y ejercicios de bachillerato se puede sacar todo el partido de la potencia del cálculo de la HP 40G y termina con dos capítulos dedicados a la programación: el primero para aprender a programar y el segundo que trata sobre la aplicación de algoritmos en los programas de aritmética utilizados en las especialidades de ciencias.

Bernard Parisse

Profesora titular de la Universidad de Grenoble I

End-User Terms and Conditions

Contenido

0 Para Empezar

0.1 Presentación General

0.1.1 Puesta en Marcha

Pulse la tecla ON.

Está Ud. en la pantalla HOME.

Durante la realización del trabajo, la tecla ON anula la operación en curso: hace la función de CANCEL

Para apagar la calculadora teclee SHIFT y a continuación ON (OFF)

Si después de haber pulsado reiteradas veces ON (CANCEL) la calculadora no responde pulse simultáneamente ON y F3 para reinicializar la calculadora.

0.1.2 Que se ve

De arriba abajo:

1. La pantalla HOME

a. El área de estado

b. Una línea horizontal

c. El menú principal de los comandos

2. El teclado

La pantalla

1.a El área de estado indica en la pantalla HOME los ajustes seleccionados:

- RAD o DEG o GRD según se trabaje en radianes, grados centesimales o grados sexagesimales.
- {FUNCTION} para indicar el nombre del Aplet seleccionar: Aplet Function
- ▲ La flecha hacia arriba nos permite desplazarnos por la historia.

1.b Línea horizontal

Sobre esta línea se sitúa la historia de los cálculos hechos en HOME.

En la pantalla,.se sitúa a la izquierda la expresión que hemos introducido, y a la derecha el resultado.

Bajo esta línea se sitúa la línea de edición de comandos.

Podemos, gracias a la flecha hacia arriba, volver a la historia y copiar, con el comando COPY del menú, un comando o un resultado anterior en la línea de comandos.

1.c. Menú principal:

Se puede acceder a los comandos del menú a través de las 6 teclas grises a las que llamaremos:

F1, F2, F3, F4, F5, F6.

El menú posee directorios que engloban varios comandos, se reconocen por su forma rectangular.

Para activar un comando del menú, basta con pulsar la tecla Fi correspondiente.

En la pantalla HOME, el menú tiene dos comandos:

- STO▷ nos permite introducir un valor en una variable
- CAS nos permite abrir el editor de ecuaciones para efectuar un cálculo simbólico.

2. Teclado:

Ya conoce Ud.:

La tecla ON para encender o detener la realización de un cálculo en curso y SHIFT ON para apagar la calculadora.

A continuación vamos a localizar:

Las cuatro flechas (izquierda, derecha, arriba, abajo) que permiten desplazar el cursor cuando estamos en el editor de ecuaciones, en el menú etc…

- La tecla SHIFT que permite que una misma tecla tenga acceso a otra función. Se utiliza la tecla ALPHA para escribir en mayúsculas y las teclas SHIFT y a continuación ALPHA para escribir en minúsculas. Para escribir textos es necesario mantener pulsada la tecla ALPHA.
- X,T,θ nos permite, segun el contexto, escribir directamente X,T,θ, N. La tecla ENTER valida el comando.

0.2 Notaciones

Las cuatro flechas de dirección del cursor se representan mediante los cuatro triángulos que representamos a continuación:

Δ◁▷∇

El comando STO▷ del menú está representado en un programa por:

STO ▷ o ▷

En el editor de ecuaciones la posición del cursor se representa por:

◀

0.2.1 Ayuda en Linea

Esta calculadora posee una ayuda en línea muy práctica y eficaz consistente en una lista de todas las funciones de cálculo simbólico por orden alfabético. En todos los menús, Ud. puede tecleando una letra, acceder a las funciones que empiecen por esa letra, sin necesidad de pulsar ALPHA.

La ayuda consiste en una descripción resumida de un comando, de un ejemplo o de su respuesta. Cada ejemplo puede ser verificado con ECHO del menú y ser tratado tal cual, o bien puede ser modificado. También se puede acceder a la ayuda de los comandos próximos con SEE1 SEE2… del menú principal.

Para obtener mas información vea el funcionamiento de las teclas SHIFT 2 (SYNTAX) en las secciones 2.5.4 y 2.7.2.

1 Las Aplets

1.1 Tecla APLET

La tecla Aplet nos permite acceder a la lista de Aplets disponibles.

Esta calculadora nos permite trabajar con Aplets.

Pero, ¿qué es un Aplet?

Un Aplet es un programa incorporado en la calculadora que permite obtener con facilidad 3 visualizaciones diferentes de un.mismo objeto matemático (una visualización simbólica, una visualización numérica y otra gráfica) y ¡¡¡todo está ya incorporado!!!

Las diferentes Aplets nos permiten trabajar con objetos matemáticos tales como: funciones, sucesiones, series estadísticas…

Algunas Aplets son programas de lecciones pertenecientes al curso escolar.

1.2 Las Diferentes Aplets

Desde HOME Ud. puede saber mirando la línea de estado, el nombre del Aplet seleccionado.

Posibles opciones de la tecla Aplet:

Sequence

Este Aplet nos permite definir series con los siguiente nombres:

U1, U2…U9, U0

Podemos definir U1(N):

- O en función de N
- O en función de U1(N – 1)
- O en función de V1(N – 1) y de V1 (N – 2)

Por ejemplo:

U1(N) = N * N + 1

Y entonces los valores de U1(1) y de U1(2) son calculados y puestos automáticamente.

Señalando U1, y pulsando NUM los valores U1(N) se visualizan.

Encontraremos otros ejemplos utilizando Aplet Sequence en los párrafos siguientes como el cálculo de MCD de dos números (véase 1.3) y el cálculo de los coeficientes de Bézout (véase 1.3)

Function

Este Aplet permite definir las funciones que tienen como nombre:

F1(X), F2(X)…F9(X), F0(X)

Definimos F1(X):

- o por una expresión en función de X:

  Por ejemplo, la fórmula:

  F1(X) = X * LN(X)

  Define la función:

  $f_1(x) = x \cdot \ln(x)$

- o si la función está definida por partes, utilizando los booleanos:

  X > 0 etc…

  Por ejemplo, una fórmula de la forma:

  F1(X) = X * (X < 0) + 2 * X * (X > 0)

  Define la función:

  $f_1(x) = x$ si $x < 0$ y

  $f_1(x) = 2 \cdot x$ si $x > 0$

- Para trazar curvas en coordenadas paramétricas
- Para trazar curvas en coordenadas polares
- Para resolver ecuaciones numéricas
- Para hacer estadísticas
- Para hacer estadísticas inferenciales

1.3 Ejemplo Utilizando el Aplet Sequence

1.3.1 Escritura en base b

Dados a y b, queremos obtener, la sucesión qn (n ≥ 1) y rn (n ≥ 2) de los coeficientes y los restos de la división por b de los qi definidos por:

$q_1 = a$

$q_1 = b \cdot q_2 + r_2$ $(0 \leq r_2 < b)$

$q_1 = b \cdot q_3 + r_3$ $(0 \leq r_3 < b)$

……

$q_{n-1} = b \cdot q_n + r_n$ $(0 \leq r_n < \mathrm{b})$

Señalaremos que si $r_{n+1} = 0$ el número $r_n\, r_{n-1} \ldots r_3\, r_2$ corresponde a la escritura en base b de a, cuando suponemos que 2 ≤ b ≤ 10.

Introducimos en B el valor de la base, por ejemplo:

7 STO ▹ B

y en A el número a escribir en base B (por ejemplo 1789 STO ▹ A)

A continuación definimos dos sucesiones:

U1 (1) = A

U2 (2) = FLOOR (A/B)

U1 (N) = FLOOR (U1(N – 1)/B)

y

U2 (1) = 0

U2 (2) = A MOD B

U2 (N) = U1 (N – 1) MOD B

de manera que qn = U1(N) y r_n = U2 (N)

obtenemos:

U2(2) = 4 U2(3) = 3 U2(4) = 1 U2(5) = 5 U2(6) = 0

por lo tanto la escritura en base 7 de 1789 es 5134.

1.3.2 Cálculo del MCD

Ejecución del Algoritmo de Euclides con la HP 40G.

Descripción de este algoritmo:

Efectuamos las divisiones euclidianas sucesivas:

$$A = B \times Q_1 + R_1 \quad 0 \leq R_1 < B$$

$$B = R_1 \times Q_2 + R_2 \quad 0 \leq R_2 < R_1$$

$$A = R_2 \times Q_3 + R_3 \quad 0 \leq R_3 < R_2$$

Tras un número determinado de etapas (como máximo B),.existe un número entero tal que:

RN = 0

MCD (A,B) = MCD (B, R_1) = …

MCD (R_{n-1}, RN) = MCD (R_{n-1}, 0) = R_{n-1}

Con la ayuda de las sucesiones, escribimos la sucesión de las restas.

Con la HP 40G utilizamos el Aplet Sequence (la tecla Aplet, a continuación se selecciona Sequence y START del menú).

Si queremos determinar el MCD (78,56), definiremos la sucesión:

U1 (1) = 78

U1 (2) = 56

U1 (N) = U1(N – 2) MOD U1 (N – 1)

Tecleamos NUM para obtener la lista numérica de los U1 (N), es decir la lista de los restos de las divisiones sucesivas.

El último resto, no nulo, es 2, por lo tanto el MCD (78,56) = 2

NOTA:
Se puede utilizar en HOME las variables A y B para almacenar los dos números y poner, entonces, U1(1) = A U1(2) = B.

Hay que tener en cuenta también que A MOD 0 = A.

Cálculo de los coeficientes de identidad de Bézout

El algoritmo de Euclides permite encontrar un par U,V que verifique que:

A × U × B × V = MCD (A,B)

Con las sucesiones:

Vamos a definir "la sucesión de los restos" R_n y dos sucesiones U_n y V_n de manera que en cada bloque tengamos:

$R_{n} = U_n . A + V_n \times B.$

ya que tenemos: $R_{n} = R_{n-2} - Q_n \times R_{n-1}$, U_n y V van a cumplir la misma relación de recurrencia

(Q_n = cociente entero de R_{n-2} por R_{n-1})

Al principio tenemos:

$R_1 = A$ $R_2 = B$

$U_1 = 1$ $U_2 = 0$ denn $A = 1 \times A + 0 \times B$

$V_1 = 1$ $V_2 = 0$ denn $B = 0 \times A + 1 \times B$

Con la HP 40G, gracias al Aplet Sequence, vamos a definir la sucesión U1 de los restos y las sucesiones U2 y U3, de manera que para N obtengamos:

U1 (N) = A * U2 (N) + B * U3(N)

Necesitaremos la sucesión de los cocientes que introduciremos en U4.

Las series U1, U2, U3 cumplen la misma relación de recurrencia:

$U_n = U_{n-2} - Q_n \times U_{n-1}$ con

Qn = U4 (N) = FLOOR (U1(N – 2)/ U1(N – 1))

Definimos:

U1 (1) = A

U1 (2) = B

U1 (N) = U1 (N – 2) –U4 (N) * U1 (N – 1)

U2 (1) = 1

U2 (2) = 0

U2 (N) = U2 (N-2) – U4 (N) * U2 (N-1)

U3 (1) = 0

U3 (2) = 1

U3 (N) = U3 (N – 2) – U4 (N) * U3 (N – 1)

U4 (1) = 0

U4 (2) = 0

U4 (N) = FLOOR (U1(N – 2)/ U1(N – 1))

Hay que señalar que U4 (N) sólo se utiliza para N > 2, ya que hemos definido los dos primeros valores (que no son necesarios!) por cero.

NUM va a visualizar a continuación los valores de estas sucesiones y en la línea del último resto no nulo se podrá leer el mcd y los coeficientes de Bézout.

1.4 Teclas SYMB NUM PLOT

Las tres principales visualizaciones de un Aplet son:

- Una visualización simbólica que corresponde a la tecla SYMB
- Una visualización numérica que corresponde a la tecla NUM
- Una visualización gráfica que corresponde a la tecla PLOT

Cuando utilizamos la segunda función de las teclas (SETUP), podemos elegir los diferentes parámetros (elección de la unidad del ángulo, parámetros de la ventana gráfica, etc…)

2 El Teclado Y el CAS

2.1 ¿Qué es el CAS?

El CAS nos permite realizar el cálculo simbólico:

CAS = Computer Algebra System.

Tenemos que diferenciar entre:

- Cálculo simbólico, cuando se utilizan las funciones del CAS. Se trabaja entonces en modo exacto con una precisión infinita y permite realizar los cálculos paso a paso.
- Cálculo numérico, cuando se utilizan las funciones del directorio MTH de la tecla MATH,.en la pantalla HOME o desde las Aplets o en programación. Se trabaja entonces en modo aproximado, con una precisión de 10-12.

Ejemplo:

Si estamos en Radians en HOME:

ARG (1 + *i*) tiene un valor de 0.785398163397

Mientras que en CAS, donde siempre se trabaja en radianes:

ARG (1 + *i*) tiene un valor de π/4

2.2 Variable Real

Cuando utilizamos funciones del cálculo simbólico, se trabaja con variables simbólicas (es decir, variables que no contienen ningún valor)

El nombre de la variable simbólica contenida en VX se llama variable real y generalmente suele ser X.

La expresión de algunas funciones depende de la variable real, por ejemplo la función DERVX efectúa una derivada en función a la variable real.

Así,
DERVX (2 * X + Y) = 2 si·VX = X,

y

DERVX (2 * X + Y) = 1·si VX = Y.

2.3 ¿Cómo Realizar un Calculo Simbólico?

La HP 40G ha sido creada para utilizar las funciones de cálculo simbólico desde el editor de ecuaciones.

Para abrir el editor de ecuaciones pulsar CAS del menú de la pantalla HOME.

Para salir del editor de ecuaciones pulsar ON y regresaremos a la pantalla HOME.

También se puede utilizar el cálculo simbólico desde la pantalla HOME tomando algunas precauciones (véase 2.6)

En los capítulos siguientes se aprenderá a utilizar las funciones del CAS.

2.4 El CAS Desde el Editor de Ecuaciones

El editor de ecuaciones le permitirá escribir como Ud. lo haría sobre un papel las expresiones que quiera simplificar, descomponer, derivar, integrar, etc…

Se trata de un editor con un menú que contiene otros directorios:

1. El directorio TOOL contiene los siguientes comandos, Cursor mode,Edit expr.,Change font

- Cursor mode permite pasar a modo cursor (véase 3.1.4)
- Edit expr. permite editar la expresión seleccionada, y así poder modificarla.
- Change font permite elegir escribir la expresión en letra pequeña o letra grande (esta opción se encuentra siempre disponible)

3. El directorio ALGB contiene funciones para la realización de cálculos algebraicos: descomposición, desarrollos, simplificaciones, substituciones…
4. El directorio DIFF&INT contiene funciones que permiten realizar el cálculo diferencial: derivación, integración, desarrollo
5. El directorio REWRITE contiene funciones que permiten escribir de nuevo una expresión de otra manera.
6. El directorio TRIG contiene funciones que permiten transformar expresiones trigonométricas.
7. El directorio SOLVE contiene funciones que permiten resolver ecuaciones, sistemas lineales y ecuaciones diferenciales.

Ud. encontrará en el capítulo 3, cómo escribir una ecuación en el editor de ecuaciones, cómo seleccionar una sub-expresión y cómo acceder a las funciones del CAS.

Ud. encontrará en el capítulo 4, todas las funciones del cálculo simbólico contenidos en los diferentes directorios con un ejemplo.

No obstante Ud. podrá siempre consultar la ayuda en línea con SHIFT 2 (SYNTAX) (véase 2.5.4), para obtener ayuda de otras funciones disponibles utilice SHIFT MATH (CMDS) para introducirlas (véase 2.5.2.)

2.5 Teclado Desde el Editor de Ecuaciones

Las teclas que vamos a explicar a continuación tienen diferente función si se utilizan desde el editor de ecuaciones o desde la pantalla HOME. Para ver su uso fuera del editor de ecuaciones tendrá que consultar la sección 2.7 y/o consultar el manual del usuario.

2.5.1 TECLA MATH

La tecla MATH, pulsada desde el editor de ecuaciones visualiza las funciones útiles del cálculo simbólico. Estas funciones se encuentran en los siguientes directorios o categorías:

- Los cinco directorios anteriores (véase 2.4)

ALGEBRA DIFF&INT REWRITE TRIG SOLVE

El directorio Complex…contiene funciones que permiten trabajar con números complejos

El directorio Constant…(e i 8 pi)

- El directorio Integer…contiene las funciones del cálculo aritmético.
- El directorio Hypbolic…contiene las funciones hiperbólicas.
- El directorio Modular…contiene las funciones que permiten realizar cálculos en Z/pZ o en Z/pZ[X], siendo el valor contenido en la variable MODULO.
- El directorio Polynom…contiene las funciones que permiten realizar cálculos con polinomios.
- El directorio Test…contiene:

ASSUME UNASSUME (para realizar hipótesis de los parámetros y así poder modificar la variable REALASSUME véase 3.3.3)

IFTE (para escribir una función algebraica con el mismo resultado que con un IF THEN ELSE)

Se puede consultar la sección 4.1.8. para obtener la lista de las funciones existentes en los directorios.

2.5.2 TECLAS SHIFT MATH (CMDS)

La combinación de estas teclas abre el catálogo de todas las funciones del cálculo simbólico que se pueden utilizar desde el editor de ecuaciones. De esta manera, las funciones que no se localicen en otro lugar, pueden ser llamadas desde este menú, lo que evita que Ud. tenga que teclearlas en modo ALPHA.

2.5.3 TECLA VARS

Esta tecla pulsada desde el editor de ecuaciones, nos muestra los nombres de las variables definidas en el CAS.

Hay que señalar que namVX contiene el nombre de la variable real.

Para ver el contenido de una variable basta con seleccionar su nombre y pulsar F2, VIEW del menú principal.

Para modificar el contenido de una variable hay que seleccionar el nombre de esa variable y pulsar F3, EDIT del menú principal.

En el menú principal:

PURGE que permite borrar una variable existente.

RENAME que permite cambiar el nombre de una variable existente

NEW que permite definir una nueva variable, para ello, hay que introducir el contenido (object) y su nombre (name).

Para más información vea la sección 3.3.

2.5.4 TECLAS SHIFT 2 (SYNTAX)

Desde el editor de ecuaciones, la combinación de las teclas SHIFT 2 (SYNTAX) abre el menú CAS HELP ON. Si en el editor no está la función del CAS seleccionada, este menú propone la lista de las funciones que se pueden utilizar desde el editor de ecuaciones. Seleccionando la función deseada y tecleando OK nos aparece la ayuda de esa función.

Si en el editor hay una función del CAS seleccionada, por ejemplo FACTOR (45), el menú CAS HELP ON abre directamente la ayuda en la página de FACTOR. La ayuda consiste en una descripción resumida del comando, un ejemplo y la respuesta. Ud. puede llevar cada ejemplo al editor de ecuaciones con ECHO del menú, y a continuación puede ser usado o modificado.

En los ejemplos de la ayuda, hemos elegido como variable real VX = X , sino es el caso el ejemplo será automáticamente transformado, teniendo en cuenta su VX, durante la transferencia hecha por ECHO.

También tiene Ud. la posibilidad de ver directamente la ayuda de un comando señalando en SEE: con SEE1, SEE2…del menú principal.

2.5.5 TECLA HOME

La tecla HOME, pulsada desde el editor de ecuaciones, permite un acceso a la historia del CAS.

La historia de los cálculos realizados en el CAS y la historia de los cálculos realizados en HOME son distintos.

Al igual que ocurría en la historia de HOME, los cálculos a realizar se sitúan en la izquierda de la pantalla y los resultados a la derecha. Con la flecha a la derecha podemos acceder y visualizar la historia.

Con ENTER o ECHO, del menú, se puede copiar un resultado anterior o un comando ya ejecutado.

2.5.6 TECLAS SHIFT SYMB

Desde el editor de ecuaciones la combinación de las teclas:

SHIFT SYMB (SETUP) es análoga a CFG (la primera opción de los menús ALGB etc… del menú principal véase 4.1.1)

Lo que le permite a Ud. precisar:

El nombre de la variable contenida en VX, tecleando su nombre delante de Indep var,

- El valor de MODULO, tecleando su valor delante de Modulo.
- Si Ud. quiere trabajar en modo exacto (o en modo aproximado si marca Approx con CHK del menú)
- Si Ud. quiere trabajar en modo real (o en modo complejo si marca Complex con CHK del menú)
- Si Ud. quiere trabajar en modo directo (o en modo paso a paso si marca Step/Step con CHK del menú)
- Si sus polinomios están escritos en potencias decrecientes (o crecientes si marca Incr Pow con CHK del menú)

- Si Ud. quiere prohibir los factores numéricos (o autoriza los factores numéricos si marca Num Factor con CHK del menú)
- Si Ud. quiere trabajar en modo no riguroso (o en modo riguroso si marca Rigourous con CHK del menú, para no olvidar los valores absolutos!)

Se valida con OK o ENTER.

2.5.7 TECLA SHIFT

Desde el editor de ecuaciones las teclas:

SHIFT, (MEMORY) hacen el papel del "undo"

Es muy útil cuando uno se equivoca, ya que permite anular el último comando.

2.5.8 TECLA PLOT

Cuando Ud. pulsa PLOT, desde el editor de ecuaciones, le aparecerá un cuadro de diálogos preguntándole si quiere trazar una función, una curva paramétrica o una curva polar.

Según lo que Ud. seleccione, la expresión seleccionada será copiada en el Aplet correspondiente, en el lugar que Ud. haya especificado como destino.

CUIDADO: Esto indica que la variable real es también la variable de la función que se va a representar, ya que durante la copia, la expresión es evaluada y la variable real (contenida VX) será cambiada por X,T o θ segun la naturaleza del gráfico.

CUIDADO: Si la función depende de un parámetro, es preferible darle un valor a ese parámetro antes de pulsar PLOT. Si de todas las formas Ud. desea que la expresión paramétrica sea copiada con su parámetro, el nombre de dicho parámetro debe ser una letra diferente a X,T, θ para que no haya confusión.

Si la expresión seleccionada contiene valores reales:

- Ud. puede seleccionar el Aplet Function o el Aplet Polar, y el gráfico será entonces de tipo: Function o Polar.

Si la expresión seleccionada contiene valores complejos:

- Ud. debe seleccionar el Aplet Parametric, y el gráfico será entonces de tipo: Parametric

Si Ud. elige:

- El Aplet Function, La expresión seleccionada será copiada en la función Fi elegida, y la variable real será transformada en X durante la copia.

- El Aplet Parametric, la parte real y la parte imaginaria de la expresión seleccionada serán copiadas en las funciones Xi, Yi elegidas y la variable real será transformada en T durante la copia.
- El Aplet Polar, La expresión selección será copiada en la función Ri elegida y la variable real será transformada en θ durante la copia.

2.5.9 TECLA NUM

Si desde el editor de ecuaciones, pulsamos NUM la expresión marcada es reemplazada por una aproximación numérica.

NUM lo transforma al modo aproximado.

SHIFT NUM realiza la operación inversa, es decir, lo transforma a modo exacto.

2.5.10 TECLA VIEWS

Cuando pulsamos VIEWS desde el editor de ecuaciones la expresión marcada puede visualizarse completamente desplazándonos con el cursor, o bien con las flechas ◃ y ▹. Para volver al editor de ecuaciones pulsemos OK en el menú.

2.5.11 ABREVIATURAS CON EL TECLADO

Desde el editor de ecuaciones, Ud. puede encontrar en el teclado las siguientes abreviaturas:

SHIFT 0 para 8

SHIFT 1 para i

SHIFT 3 para π

SHIFT 5 para <

SHIFT 6 para >

SHIFT 8 para ≤

SHIFT 9 para ≥

2.6 El CAS Desde Home

Ud. puede utilizar directamente algunas funciones desde la pantalla HOME tomando algunas precauciones:

- Usar las funciones de cálculo simbólico que se encuentran en el CAS del menú principal de la tecla MATH (pulsando desde la pantalla HOME). La variable real se convierte automáticamente en la variable S1, por ejemplo:

  DERVX (S12 – 4 * S2) = 2 * S1

- Usar las variables S1, S2,…S5 como variables simbólicas.

CUIDADO: Algunos cálculos serán realizados en modo aproximado debido a la ambigüedad entre los números reales y enteros en HOME. El uso del comando XQ permite convertir un argumento aproximado en argumento exacto, en el ejemplo visto en el apartado 2.1, desde la pantalla HOME (véase también 2.7.1. y 2.7.2.):

ARG (XQ(1 + i)) = $\pi/4$

2.7 Teclado Desde Home

2.7.1 TECLA MATH

Esta tecla abre el menú de las funciones matemáticas.

Si se pulsa desde la pantalla HOME abre una ventana que contiene las funciones matemáticas (numéricas) clasificadas por temas, ya que la opción MTH del menú (tecla F1) se encuentra activada por defecto.

Si marcamos CAS del menú de esta ventana (tecla F3) encontraremos los mismos directorios que cuando pulsábamos la tecla MATH desde el editor de ecuaciones, de esta manera se accede a las funciones de cálculo simbólico clasificadas por temas y utilizables desde la pantalla HOME (no olvidar que desde la pantalla HOME, las únicas variables simbólicas son S1, S2…S5)

2.7.2 TECLA SHIFT 2 (SYNTAX)

La combinación de las teclas SHIFT 2 (SYNTAX) coloca HELPWITH en la línea de comando. Ud. tendría que completar esta línea con el nombre del comando o con el nombre de la función del CAS de la cual Ud. quiere obtener la ayuda. Puede introducir el nombre de la función del CAS con MATH CAS, pero debe quitar los paréntesis.

Por ejemplo:

HELPWITH DERVX le permite abrir la ayuda del CAS en DERVX.

Si desde la pantalla HOME Ud. quiere acceder a la ayuda general, deberá pulsar HELP y a continuación ENTER de esta manera Ud. obtendrá la ayuda de las funciones del CAS, que se pueden usar desde la pantalla HOME.

Ud. puede introducir cada ejemplo en la historia de la pantalla HOME con ECHO del menú, a partir de ese menú puede ser tratado tal cual o modificado (le recordamos que la variable X será sustituida por S1).

Además tendrá que cambiar algunas veces en HOME los números reales por enteros mediante la función XQ.

Por ejemplo:

$$\text{PROPFRAC}\ (\frac{43}{12}) = 3.5833..$$

Mientras que:

$$\text{PROPFRAC}(XQ(\frac{43}{12})) = 3 + \frac{7}{12}$$

2.7.3 TECLA SHIFT 1 (PROGRAM)

La combinación de estas teclas pulsadas desde HOME, nos permite entrar en la pantalla PROGRAM CATALOG.

Vemos:

- Una lista de los programas que Ud. ha escrito.
- Un menú con los siguientes comandos:

EDIT NEW RUN SEND RECV

EDIT nos permite editar el programa seleccionado

NEW nos permite crear un nuevo programa

RUN nos permite ejecutar el programa seleccionado (véase 6.1)

SEND y RECV permiten que su calculadora pueda comunicarse con su ordenador o con otra calculadora.

Por ejemplo:

Si Ud. teclea SEND, le pedirá:

HP 40G o Disk drive

Ud. seleccionará HP 40G para enviar un programa a otra HP 40G o seleccionará Disk drive si por el contrario, Ud. quiere enviar un programa a un ordenador.

A continuación marque OK.

Por ejemplo, veamos como se conecta un ordenado bajo Linux con una HP 40G usando el programa Kermit (que Ud. lo puede encontrar en www.columbia.edu/Kermit que se puede cargar por ftp anonyme en Kermit.columbia.edu):

- Conectamos la calculadora con el cable de conectividad.
- En el ordenador tecleamos:

  kermit

  set line/dev/ttyS0 (o S1…dependiendo del puerto serie que Ud. va a utilizar en su ordenador)

  set speed 9600

  serv

- En la HP40G seleccionamos el programa denominado NOM, pulsamos SEND y a continuación seleccionamos disk drive. Pulsamos OK del menú, así conseguiremos copiar el programa NOM, que se encuentra en su HP 40G, al ordenador.
- o En la HP 40G

Pulsamos RECV, y seleccionamos Disk drive. Pulsamos OK del menú y en la calculadora le aparecerá a Ud…la lista de los programas de su ordenador (le recomendamos que previamente se cree un directorio en su ordenador, para almacenar sus programas de la HP 40G)

Seleccionamos MCD para que el programa de nombre MCD que Ud. tiene en su ordenador sea copiado en su HP 48G.

Para los usuarios de Windows el programa de conexión se encuentra en el CD entregado con la HP 40G.

Si quiere saber más sobre la utilización del Kermit con las calculadoras HP, puede consultar:

http://www.columbia.edu/kermit/hp48.html

3 Cómo Escribir Expresiones en el Editor de Ecuaciones

3.1 Editor de Ecuaciones

3.1.1 Cómo Acceder al Editor de Ecuaciones

Ud. puede acceder al editor de ecuaciones a través de la tecla CAS del menú, y la tecla ON (CANCEL) le permite salir.

Este editor es muy completo para escribir, simplificar y transformar expresiones matemáticas.

Desde el editor de ecuaciones se pueden escribir expresiones sabiendo que el operador que estamos tecleando nos lleva siempre a la expresión adyacente o la expresión seleccionada sin la necesidad de usar paréntesis, únicamente seleccionándolo!

Ud. debe entender las expresiones matemáticas como un árbol, no necesariamente binario, y comprender que las cuatro flechas nos facilitan recorrer el árbol de una manera natural:

- Las flechas derecha e izquierda nos permiten ir de un parte a otra del árbol.
- Las flechas de arriba y abajo nos permiten subir o bajar dentro del árbol
- las flechas derecha e izquierda seleccionadas con la tecla de segunda función nos permiten varias selecciones (véase la pág. 27 el ejemplo 3).

3.1.2 ¿Cómo Seleccionar?

Ud. puede entrar en el modo selección de dos maneras:

- La flecha Δ le introduce a modo selección y selecciona el elemento adyacente al cursor.

  Por ejemplo:

  $$1 + 2 + 3 + 4 + \Delta$$

  Selecciona 4, y a continuación al seleccionar Δ se selecciona todo el árbol 1 + 2 + 3 + 4.

- La flecha $\triangleright$ le introduce en el modo selección y selecciona al sub-árbol adyacente al cursor.

Si vuelve a pulsar ▹ aumentará la selección del sub-árbol contiguo, a la izquierda de su selección.

por ejemplo:

1 + 2 + 3 + 4 + ▹

Seleccione 3 + 4 a continuación ▹ seleccione 2 + 3 + 4 y ▹ selecciona 1 + 2 + 3 + 4

CUIDADO: Si estamos introduciendo una función con varios argumentos (como por ejemplo un ∑ o un ∫ o SUBS etc…), la fecha ▹ sirve para avanzar en la escritura, cambiando el cursor de sitio. Son efectivamente, estas fechas ▹ y ◃ las que le permiten el paso de un argumento a otro. En ese caso hay que seleccionar siempre con la fecha ∆ (véase 3.2.1)

Ejemplos de funcionamiento de este editor.

Pulse CAS del menú para abrir el editor de ecuaciones e introduzca las expresiones de los ejemplos.

- Teclee:

$$2 + X * 3 - X$$

- Obtiene:

$$2 + X\cdot 3 - X$$

▹▹▹ para seleccionar una expresión, y cuando pulsamos ENTER obtenemos:

$$2 + 2\cdot X$$

Teclee:

2 + X ▹ * 3 – X

Se obtiene:

$$(2 + X)\cdot 3 - X$$

▹▹ para seleccionar la expresión y cuando pulsamos ENTER obtenemos:

$$6 + 2\cdot X$$

Introduzca:

2 + X ▹ * ∆ – X

Obtiene:

$$(2 + X)\cdot(3 - X)$$

▹▹▹ para seleccionar la expresión y cuando pulsamos ENTER obtenemos:

$$-(X^2 - X - 6)$$

Ejemplo 1

Si queremos escribir:

$$X^2 - 3\cdot X + 1$$

Tecleamos:

$$Xx^y\ 2 \triangleright - 3\cdot X + 1$$

Si queremos escribir:

$$-X^2 - 3\cdot X + 1$$

Tecleamos:

$$-Xx^y \triangleright \triangleright - 3\cdot X \triangleright \triangleright + 1$$

Hay que seleccionar $-X^2$ antes de teclear lo siguiente.

Ejemplo 2

Si queremos escribir

Aquí la cumbre del árbol es un + y hay 4 sub-árboles; cada uno de ellos tendría como pico un ÷ y posee dos hojas.

Pulsamos CAS del menú para abrir el editor de ecuaciones y escribimos el primer sub-árbol.

$$1\div 2$$

Seleccionamos este árbol con:

▹

Tecleamos

+

y el 2º sub-árbol

$$1\div 3$$

Seleccionamos ese árbol con

▹

Tecleamos

+

Y el 3º sub-árbol

1÷4

Seleccionamos este árbol con

▷

Tecleamos

+

el cuarto sub-árbol

1÷5

Seleccionamos este árbol con

▷

Ahora la expresión buscada

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

Se encuentra en el editor de ecuaciones y se selecciona 1/5

Recorra el árbol para seleccionar

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

Hay que pulsar

◁◁

para seleccionar 1/3 y

SHIFT▷

Permite seleccionar dos sub-árboles contiguos el seleccionado y el inmediato a la derecha en este caso:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

NOTA:

Podemos realizar el cálculo de una parte seleccionada, tecleando ENTER.

Obtenemos:

$$\frac{1}{2}+\frac{7}{12}+\frac{1}{5}$$

donde la fracción 7/12 eta seleccionada.

Si ahora queremos realizar el cálculo parcial

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$$

primero hay que hacer una permutación para que 1/2 y 1/5 se junten, para ello tecleamos

SHIFT ◃

que intercambia el elemento que está seleccionado con el está a su izquierda

obtenemos:

$$\frac{7}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$$

y 7/12 está seleccionado, a continuación:

▹ SHIFT ▹

Seleccione

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$$

Ud. puede pulsar de nuevo ENTER.

Resumiendo: SHIFT▹ le permite seleccionar el elemento marcado y el que está justo a su derecha.

SHIFT ◃ permite cambiar el elemento seleccionado por el que está a su izquierda.

El elemento seleccionado ha cambiado de posición pero sigue estando seleccionado.

3.1.3 Cómo Modificar una Expresión

Si Ud. está escribiendo su expresión, la tecla DEL le permitirá borrar lo que acaba de escribir.

Si Ud. está realizando alguna selección, puede:

Suprimirla sin borrar la expresión, tecleando:

DEL

El cursor se encuentra entonces al final de la expresión que desactivamos.

Sustituir la selección por una expresión, basta con teclear la expresión que se quiere

Transformar la expresión seleccionada aplicándole una función del CAS: se trae la función desde le menú de uno de los directorios del CAS.

Suprimir la expresión seleccionada tecleando:

ALPHA SHIFT DEL (ALPHA CLEAR)

Suprimir un operador unitario que se encuentre en el pico del árbol seleccionado, tecleando:

SHIFT DEL (CLEAR)

Por ejemplo para sustituir SIN(expr) por COS (expr) borramos SIN seleccionando SIN (expr), y SHIFT DEL, y tecleamos COS.

- Suprimir un operador binario editando la expresión: se selecciona

  Edit expr.

  En el menú TOOL del menú principal se efectúa la corrección
- O copiar un elemento de la historia pulsando HOME. La copia se hace en el lugar del cursor, o en el lugar de la selección, cuando pulsamos desde la historia ENTER, o en ECHO desde el menú principal.

3.1.4 Modo Cursor

El modo cursor le permite seleccionar expresiones grandes rápidamente. Para pasar a modo cursor, Ud. debe seleccionar:

Cursor mode del menú TOOL,

y usar las fechas para incluir la selección en un recuadro (cuando deje de utilizar la tecla de la flecha, la expresión punteada por el cursor será encuadrada)

A continuación ENTER para seleccionar el contenido del recuadro.

3.1.5 Para ver Todo

Seleccionando Change font del menú TOOL del menú principal, el tamaño de las letras aumenta o disminuye, esto permite ver en algunos casos la expresión entera.

Sucede que a veces esto no es suficiente, en esos casos habría que ir a modo cursor:

Cursor mode del menú TOOL y utilice la flecha▷

o use:

La tecla VIEWS, y la flecha▷.

3.2 Introducir Datos en las Funciones del CAS

Desde el editor de ecuaciones, Ud. puede utilizar todas las funciones del CAS e introducir datos de diferentes maneras:

Principio general:

Cuando Ud. ha escrito una expresión en el editor de ecuaciones, debe pulsar ENTER para evaluar lo que ha sido seleccionado, o para evaluar toda la expresión si no ha seleccionado nada.

3.2.1 Cómo Escribir ∫ Y Σ

Σ se encuentra en el teclado, Ud. deberá teclear:

SHIFT + (Σ)

El signo ∫ se encuentra también en el teclado, solo tiene Ud. que teclear:

SHIFT d/dX (∫)

Los símbolos ∫ y Σ son consideradas como funciones predeterminadas con varios argumentos.

∫ y Σ se colocan automáticamente delante (de la función prefijada) del elemento seleccionado, si es que hubiera alguno.

El cursor se coloca en los lugares deseados y se mueve con la ayuda de:

$$\triangleright \triangleleft$$

Las expresiones que se introducen deben seguir la ley de selección explicada anteriormente, pero debe entrar en modo selección usando la tecla Δ.

CUIDADO, no utilizar el índice i para definir la suma puesto que i designa el número complejo de solución $X^2 + 1 = 0$.

En modo numérico Σ efectúa cálculos aproximados.

Por ejemplo

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} = 2{,}70833333334$$

mientras

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24}$$

El símbolo ! lo puede obtener Ud. tecleando SHIFT X.

Σ puede calcular simbólicamente las sumas de las fracciones racionales y las series hipergeométricas que admiten una primitiva discreta.

Ejemplo:

Teclee:

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K \cdot (K+1)}$$

Se selecciona todo, ENTER y se obtiene:

$$1$$

3.2.2 Como Escribir las Funciones de Sufijo

Se denominan así a las funciones que se escriben entre sus argumentos por ejemplo: AND | MOD,

Se pueden:

- o escribir en modo Alpha (para AND MOD) y a continuación teclear los argumentos,
- o traerlos desde el menú del directorio del CAS mediante el teclado, siempre y cuando antes se haya escrito y seleccionado el primer argumento.

Podemos pasar de un argumento a otro con las flechas ▹◃

La coma, permite escribir un número complejo.

Se puede escribir de dos formas $1 + 2 \cdot i$ ó (1,2) y los paréntesis se ponen de forma automática cuando Ud. escribe la coma.

Si quiere escribir (-1,2) es necesario que seleccione –1 antes de escribir la coma.

3.2.3 Cómó Escribir las Funciones de Prefijo

Generalmente, estas funciones se escriben antes de los argumentos.

Se puede escribir el primer argumento, seleccionarlo y traer la función con la ayuda de un menú, o escribirla en modo Alpha y escribir su o sus argumentos.

Vamos a explicar con el siguiente ejemplo las diferentes posibilidades para introducir datos.

Ud. quiere descomponer la expresión $x^2 - 4$ y obtener su valor para $x = 4$. Ya sabe que tiene que utilizar la función FACTOR que se encuentra en el menú ALG.

También sabe que SUBST sirve para sustituir en una expresión una variable por un valor. Esta función la puede localizar en el menú ALGB.

PRIMERA POSIBILIDAD: INTRODUCIÓN DE DATOS ANTES QUE LOS ARGUMENTOS

Pulse la tecla F2 que activa ALG de menú, seleccione FACTOR y ENTER.

FACTOR (◄) se inscribe en el editor con el cursor entre paréntesis.

Introduzca la expresión con las normas de selección vistas anteriormente:

Xx^y 2 ▹ – 4 ▹▹

Lo cual selecciona

$$\text{FACTOR}\,(X^2 - 4)$$

y ENTER proporciona el resultado:

$$(X + 2)\cdot(X - 2)$$

El resultado se selecciona y sustituye el comando.

Ud. no lo ve pero después de cada ENTER hay una copia de seguridad en el histórico de esta manera FACTOR (X^2 – 4) Y (X + 2)·(X – 2) se inscribe en la historia.

Ahora Ud. puede borrar el resultado anterior con ALPHA SHIFT DEL (CLEAR) ya que el resultado está seleccionado.

Pulse la tecla que activa ALG, del menú y seleccione SUBST Y ENTER

SUBST (◄,●)

Se inscribe en el editor con el cursor entre los paréntesis en el lugar del primer argumento.

Introduzca su expresión con las reglas de selección vistas anteriormente.

CUIDADO: aquí SUBST tiene dos argumentos por lo que hay que entrar en modo de selección con Δ:

Xx^y 2 Δ Δ – 4 > X = 4 ▹ ▹

Esto selecciona:

$$\text{SUBST}\,(X^2 - 4,\ X = 4)$$

y ENTER nos da el resultado:

$$4^2 - 4$$

Este resultado sustituye el comando, es seleccionado, y pulsando ENTER obtenemos el resultado simplificado:

12

Por supuesto SUBST ($X^2 – 4$, X = 4), $4^2 – 4$ y 12 quedan inscritos en la historia.

NOTA:
Cuando introducimos una función del CAS con sus argumentos, podemos escribirla en modo Alpha con sus paréntesis.

Segunda posibilidad: introduccion de los datos despues de los argumentos

Primero escribimos la expresión que seleccionamos con las reglas vistas anteriormente.

Tecleamos:

$$Xxy^2 \triangleright – 4 \triangleright\triangleright$$

Y traemos FACTOR:

Pulse la tecla que activa ALG del menú, seleccione FACTOR y pulse ENTER.

Obtiene:

$$\text{FACTOR } (X^2 – 4)$$

y ENTER le da el resultado:

$$(X + 2)\cdot(X – 2)$$

Este resultado sustituye el comando y es seleccionado.

Por supuesto FACTOR ($X^2 – 4$) y $(X + 2)\cdot(X – 2)$ quedan inscritos en la historia.

Al ver el resultado seleccionado ya puede aplicar otro comando a su resultado.

Ya puede llamar a SUBST: pulse la tecla del menú que activa ALGB, seleccione SUBST y pulse ENTER.

$$\text{SUBST } ((X + 2)\cdot(X – 2), \blacktriangleleft\ )$$

Se inscribe en el editor con sus paréntesis, con su expresión como primer argumento y con el cursor en el lugar del segundo argumento.

No tiene más que teclear:

X = 4 y ▷▷ y ENTER.

Obtiene:

$$(4 + 2\cdot(4 – 2)$$

Pulse ENTER para obtener:

Tanto SUBST ($X^2 - 4$, X = 4), (4 + 2)·(4 – 2) y 12 son inscritos en la historia.

NOTA:
Mientras escribe una función puede llamar a una función del CAS,.esta función tendrá como primer argumento lo que está seleccionado o nada, si no ha seleccionado nada. El cursor estará situado en la posición para poder completar los argumentos.

3.3 Variables

Ud. puede almacenar objetos en las variables, y volver a utilizarlas, usando el nombre de las variables.

CUIDADO!!!

1. Las variables utilizadas en el CAS no pueden ser utilizadas en HOME y viceversa
2. Se utiliza STO ▹ para almacenar un objeto en una variable del HOME o en el editor del programa y se escribe en la serie STO▹ ó ▹.
3. En CAS hay que utilizar el comando STORE (véase 3.3.2) Para almacenar los valores en las variables
4. La tecla VARS visualiza un menú con todas las variables que están a su disposición.
5. Cuando pulsa esta tecla desde HOME aparecen las variables autorizadas en HOME y en las Aplets.
6. Cuando Ud. la pulsa desde el editor de ecuaciones aparecen las variables definidas en el CAS.

3.3.1 STO▹

STO▹ permite almacenar un objeto en una variable de HOME, los nombres de las variables numéricas de HOME son las 26 letras del abecedario y los nombres de las variables simbólicas de HOME son S1…S5.

CUIDADO Las variables A…Z están siempre a su disposición y contienen siempre un valor real.

Por ejemplo: Si Ud. usa STO ▹ del menú HOME o del editor de programas, introduzca:

1 STO▹ A

En la pantalla aparece:

1▹ A a partir de este momento A pierde su valor anterior y lo sustituye por 1.

A se le asigna el contenido de A

NOTA:

La variable simbólica S1 de HOME sirve como variable real cuando se utilizan algunas funciones del CAS desde HOME.

Ejemplo: Si x está en VX, escribimos desde HOME:

DERVX (S12 + 2 × S1)

para obtener 2 × S1 + 2

3.3.2 STORE

Dentro del CAS, podemos usar el comando STORE para almacenar un objeto en una variable, usar la tecla VARS desde el editor de ecuaciones (desde NEW del menú véase 2.5.3.)

Se puede utilizar cualquier nombre de variable, pero en STORE este nombre debe estar precedido de la función QUOTE la cual permite distinguir el nombre de la variable QUOTE (ABC) de su contenido ABC.

STORE y QUOTE están en el menú ALG del menú del editor de ecuaciones.

Ejemplo:

Teclee

$$\text{STORE}\ (X^2 - 4\cdot\text{QUOTE(ABC)})$$

O teclee:

$$X^2 - 4$$

Se selecciona, y se usa la función STORE, a continuación tecleamos QUOTE(ABC)

ENTER valida la definición de la variable ABC.

Para borrar la variable, hay que utilizar la tecla VARS desde el editor de ecuaciones (y PURGE del menú principal véase 2.5.3) o utilizar el comando UNASSIGN del menú ALG, por ejemplo, introduzca:

UNASSIGN (QUOTE(ABC))

3.3.3 Las Variables Predefinidas del CAS

VX contiene el nombre de la variable real.

Generalmente suele ser X, por lo que no se puede utilizar la x como variable numérica, o bien puede borrar el contenido de X con el comando UNASSIGN del menú ALGB, antes de realizar el cálculo simbólico, tecleando por ejemplo: UNASSIGN (QUOTE(X))

EPS contiene el valor de Epsilon utilizado en el comando EPSXO (véase 4.13.2)

MODULO contiene el valor de p, para realizar el cálculo simbólico en Z/Pz se puede cambiar el valor de p con el comando MODSTO del menú MODULAR, tecleando por ejemplo: MODSTO (13), para asignarle a p el valor 13, o usar CFG de los menús del CAS.

PERIOD debe contener el periodo de la función de la cual queremos los coeficientes de Fourier (véase 4.11.6)

PRIMIT contiene la primitiva de la última función integrada

REALASSUME contiene el nombre de las variables simbólicas que se consideran reales, por defecto son:

X, t, Y todas las variable de integración usadas.

También se pueden hacer suposiciones sobre el dominio de definición de una variable por ejemplo: X > 1.

En este caso hay que utilizar el comando ASSUME (X > 1) para que REALASSUME contenga X > 1.

El comando UNASSUME (X) borrará todas las hipótesis hechas sobre X.

Para ver estas variables y las que Ud. ha definido en el CAS, debe pulsar VARS desde el editor de ecuaciones (véase 2.5.3.)

4 Funciones de Cálculo Simbólico

4.1 Menú del CAS

Solamente el menú TOOL contiene los comandos, los otros menús permiten la actualización de la configuración y contienen funciones algebraicas que se pueden escribir en modo Alpha.

4.1.1 CFG

Todos los menús excepto TOOL, visualizan el estado actual de su configuración y tienen la posibilidad de cambiarlo.

Por ejemplo si Ud. ve en la primera línea de menú

CFG : R = X S

quiere decir que está Ud. en el modo real exacto, que X es la variable real y que Ud. esta utilizando el modo paso a paso (S).

Seleccione CFG y pulse OK

En el encabezamiento aparece:

CFG:R = STEP ↑ ‘X’ 3 ‖

Quiere decir que Ud. está en modo real exacto, que ha seleccionado el modo paso a paso y que los polinomios están escritos en potencias crecientes, que X es la variable real, que los cálculos del los módulos se harán en Z/13Z (p = 13) y que está en modo rigourous (se ponen valores absolutos).

Ud. puede modificar esta configuración, seleccionando lo que quiera modificar, entre:

Quit config (cuando se hayan terminado los cambios)

Complex o Real

Approx o Exact

Direct o Step/Step si se quiere trabajar en modo paso a paso

$X^2 + X + 1$ o $1 + X + X^2$… para escribir polinomios

Rigourous o Sloopy para no trabajar con valores absolutos

Symb factor o Num. factor

Default cfg (Configuración R = DRCT ↓ X 3 ‖).

Pulse OK para validar cada elección

Se sale del menú CFG pulsando o validando Quit Config por OK.

El nombre de la variable real contenida en VX y el valor de la variable MODULO pueden combinarse con las teclas SHIFT SYMB (SETUP) o ayudado de la tecla VARS (véase 2.5.6 y 2.5.3)

NOTA:
En el CAS los ángulos siempre están en radianes, puede cambiar la configuración con las teclas SHIFT SYMB (SETUP) para ello consulte la sección 2.5.6.

4.1.2 TOOL

Ver la sección 2.4. para la descripción de las funciones que están en el directorio TOOL.

Cursor mode

Edit expr.

Change font

4.1.3 ALG

COLLECT

DEF

EXPAND

FACTOR

PARTFRAC

QUOTE

STORE

I

SUBST

TEXPAND

UNASSIGN

4.1.4 DIFF&INT

DERIV

DERVX

DIVPC

FOURIER

IBP

INTVX

LIMIT

PREVAL

RISCH

SERIES

TABVAR

TAYLORO

TRUNC

4.1.5 REWRITE

DISTRIB

EPSXO

EXPLN

EXP2POW

FDISTRIB

LIN

LNCOLLECT

POWEXPAND

SINCOS

SIMPLIFY

XNUM

XQ

4.1.6 SOLVE

DESOLVE

ISOLATE

LDEC

LINSOLVE

SOLVE

SOLVEVX

4.1.7 TRIG

ACOS2S

ASIN2C

ASIN2T

ATAN2S

FOURIER

HALFTAN

SINCOS

TAN2CS2

TAN2SC

TAN2SC2

TCOLLECT

TEXPAND

TLIN

TRIG

TRIGCOS

TRIGSIN

TRIGTAN

4.1.8 TECLA MATH

Además de los directorios arriba nombrados (ALGEBRA DIFF&INT REWRITE TRIG SOLVE) Ud. también puede encontrar:

Complex – (ABS ARG CONJ DROITE FLOOR IM MOD – RE SIGN)

Constant – (e *i* 8 pi)

Hypbolic – (ACOSH ASINH ATANH COSH SINH TANH)

Integer – (DIVIS EULER FACTOR GCD IEGCD IQUOT IREMAINDER ISPRIME? LCM NEXTPRIME PREVPRIME)

Modular – (ADDTMOD DIVMOD EXPANDMOD FACTORMOD GCDMOD INVMOD MODSTO MULTMOD POWMOD SUBTYMOD)

Polynom – (EGCD FACTOR GCD HERMITE LCM LEGENDRE PARTFRAC PROPFRAC PTAYL QUOT REMAINDER TCHEBYCHEFF)

Tests – (ASSUME UNASSUME > ≥ < ≤ == ≠ AND OR NOT IFTE).

Para la descripción de los diferentes directorios ver las secciones 2.4 y 2.5.1.

4.2 Paso a Paso

El modo paso a paso (Step /Step o en abreviatura S) se elige cuando se quieren ver los cálculos detallados.

El detalle de los cálculos se visualiza en una pantalla y hay que pulsar OK del menú para ver el paso siguiente.

Pero a veces, la pantalla no es lo suficientemente grande para ver toda la información.

Para movernos por la pantalla usamos las flechas ∇Δ y veremos lo que nos falta.

Si no ve los detalles de los cálculos tiene que optar por el modo Direct (en abreviatura D)

4.3 Escritura Normal

La calculadora puede trabajar con números enteros con precisión infinita.

Inténtelo:

$$100!$$

Para obtener el símbolo ! pulse SHIFT x

La escritura decimal de 100! es muy larga, se puede ver el resultado pulsando la tecla VIEWS.

4.3.1 DEF

Vea el ejercicio siguiente:

Calcular los seis primeros números de Fermat $F_k = 2^{2^k} + 1$ para k = 1..6 y decir si son primos.

Teclear la expresión

$2^{2^2} + 1$

Se obtiene 17, a continuación se lanza el comando ISPRIME? (). Este comando está en el menú Integer de la tecla MATH.

La solución es 1, que quiere decir verdadero. Gracias a la historia (tecla HOME) se puede volver a escribir la ecuación $2^{2\,2} + 1$ en el editor de ecuaciones y se modifica así:

$$2^{2^3} + 1$$

O si lo prefiere, y es el mejor método, puede definir la función F(X) con el DEF del menú ALGB del menú principal:

$$\text{DEF}(F(K) = 2^{2^K} + 1)$$

La solución $2^{2^K} + 1$ y F se incluye entre las variables (pulsar VARS para verificar)

Para K = 5 teclee:

$$F(5)$$

Obtiene:

$$4294967297$$

Se puede descomponer F5 con FACTOR que está en el menú ALGB del menú principal:

Teclee:

FACTOR (F(5))

Obtiene

$$641 \cdot 6700417$$

Para F(6) obtiene:

18446744073709551617

Se descompone con FACTOR, obtiene:

274177,67280421310721

CUIDADO es diferente:

y

$$2 \cdot 5 = 10$$

4.4 Números Enteros (Y Los Enteros de Gauss)

Todas las funciones de este apartado se encuentran en el menú Integer de la tecla MATH.

Para algunas funciones, se pueden utilizar los enteros de Gauss, número de la forma a + ib, siendo a y b enteros.

4.4.1 DIVIS

DIVIS nos muestra la lista de los divisores de un número entero.

Teclee:

DIVIS (12)

Se obtiene:

12 OR 6 OR 3 OR 4 OR 2 OR 1

4.4.2 EULER

Euler designa el indicador de Euler de un número entero.

EULER(n) es el cardinal del conjunto de los números inferiores a n y primos con n.

Teclee:

EULER(21)

Obtiene:

12

Efectivamente el conjunto:

E = {2,4,5,7,8,10,11,13,15,16,17,19} corresponde a los números, más pequeños que 21, primos con 21, y E tiene como cardinal12.

4.4.3 FACTOR

FACTOR descompone un número entero en productos de factores primos.

Teclee:

FACTOR (90)

Obtiene:

$$2\cdot3^2\cdot5$$

4.4.4 GCD

GCD designa el MCD de dos números enteros.

Teclee:

GCD (18,15)

Obtiene:

3

Con el modo paso a paso, teclee:

GCD (78,24)

obtiene: 78 mod 24 = 6

24 mod 6 = 0

Result 6

ENTER envía 6 al editor de ecuaciones.

4.4.5 IEGCD

IEGCD (A,B) nombra el MCD detallado (identidad de Bézout) de dos números enteros.

IEGCD (A,B) devuelve U AND V = D con U,V, D verificando:

AU + BV = D y D = PGCD(A,B).

Teclee:

IEGCD (48,30)

Obtiene:

2 AND –3 = 6

Efectivamente:

$$2\cdot 48 + (-3)\cdot 30 = 6$$

Con el modo paso a paso:

Z = *u* * 48 + *v* * 30

[48,1,0]

[30,0,1] * –1

[18,1,-1] * –1

[12,1,-2] * –1

[6,2,-3] * –2

Resulta: [6,2,–3]

y ENTER,

2 AND –3 = 6

queda escrita en el editor de ecuaciones.

4.4.6 IQUOT

IQUOT designa el cociente entero de la división euclidiana de 2 números enteros.

Teclee:

IQUOT (148,5)

Obtiene:

29

Con el modo paso a paso la división se hace como en el colegio:

148	|	5
48	|	---
3	|	29

OK para ejecutar la división paso a paso, y a continuación ENTER, y 29 nos aparecerá en el editor de ecuaciones.

4.4.7 IREMAINDER MOD

IREMAINDER designa el resto entero de la división euclidiana de dos números enteros

IREMAINDER se encuentra en el menú Integer y MOD está en el menú Complex de la tecla MATH.

Introduzca:

IREMAINDER (148,5)

o

148 MOD 5

Obtiene:

3

IREMAINDER trabaja con números enteros o enteros de Gauss, esto lo diferencia de MOD.

Ejemplo: IREMAINDER (2 + 3.*i*, 1 + *i*) devuelve *i*

MOD acepta números reales (7.5 mod 2 = 1.5) pero no números enteros de Gauss.

Inténtelo: (! se escribe con SHIFT X)

IREMAINDER (148!,5! + 2)

Con el modo paso a paso la división se calcularía como en el colegio (véase 4.4.6)

4.4.8 ISPRIME?

ISPRIME?(N) devuelve 1 (verdadero) si N es pseudo-primo y devuelve o (falso) si N no es primo.

Definición: para los números inferiores a 10^{14} los números pseudo-primo y primos coinciden… pero a partir de 10^{14} un número pseudo-primo es primo con una probabilidad muy alta (véase el agoritmo de Rabin sección 7.6)

Teclee:

ISPRIME? (13)

obtiene:

1

Teclee:

ISPRIME?(14)

Obtiene:

0

4.4.9 LCM

LCM designa MCM de dos números enteros.

Teclee:

LCM(18,15)

obtiene:

90

4.4.10 NEXTPRIME

NEXTPRIME(N) designa el primer número pseudo primo encontrado después N.

Teclee:

NEXTPRIME (75)

Obtiene:

79

4.4.11 PREVPRIME

PREVPRIME (N) designa el primer número pseudo-primo encontrado antes de N.

Teclee:

PREVPRIME (75)

obtiene:

73

4.5 Calculo Modular

Todas las funciones de este párrafo están en le menú Modular de la tecla MATH.

Ud. puede hacer cálculos módulo p, es decir en Z/pZ o en Z/pZ[X].

CUIDADO: con algunos comandos hay que elegir un número p primo.

En los siguientes ejemplos utilizaremos p = 13

Por lo tanto habremos tecleado:

MODSTO (13)

o hemos cambiado MODULO en la ventana abierta con las teclas SHIFT SYMB (SETUP)

La representación elegida es la representación simétrica (–1 en lugar de 6 módulo 7)

4.5.1 ADDTMOD

ADDTMOD realiza una suma en Z/pZ[X].

Teclee:

ADDTMOD(11X + 5,8X + 6)

obtiene:

6X – 2

4.5.2 DIVMOD

Los argumentos son dos polinomios A[X] y B[X]…El resultado es la fracción racional

simplificada en Z/pZ[X].

Teclee:

$$\text{DIVMOD }(2X^2 + 5,\ 5X^2 + 2X - 3)$$

Obtiene:

$$\frac{5X+3}{6X+6}$$

4.5.3 EXPANDMOD

EXPANDMOD tiene como argumento una expresión polinomica.

EXPANDMOD desarrolla esa expresión en Z/pZ[X].

Teclee:

$$\text{EXPANDMOD }((2X^2 + 12)\cdot(5X - 4))$$

Obtiene:

$$-(3X^3 - 5X^2 + 5X - 4)$$

4.5.4 FACTORMOD

FACTORMOD tiene como argumento un polinomio.

FACTORMOD descompone ese polinomio en Z/pZ[X] solo si $p \leq 97$ y p primo.

Teclee:

$$\text{FACTORMOD }(-(3X^3 - 5X^2 + 5X - 4))$$

obtiene:

$$-((3x - 5)(x^2 + 6))$$

4.5.5 GCDMOD

GCDMOD tiene dos polinomios como argumentos.

GCDMOD calcula el MCD de dos polinomios en Z/pZ[X].

Tecleamos:

$$\text{GCDMOD}\ (2X^2 + 5,\ 5X^2 + 2X - 3)$$

obtiene:

$$-(4X - 5)$$

4.5.6 INVMOD

INVMOD tiene como argumento un número entero.

INVMOD calcula el inverso de ese número en Z/Pz.

Teclee:

$$\text{INVMOD}\ (5)$$

Se obtiene (car $5x - 5 = -25 = 1$ (mod 13)):

$$-5$$

4.5.7 MODSTO

Se introduce en la variable MODULO, el valor de p con el comando MODSTO.

Aquí, en los ejemplos consideramos que $p = 13$ que es su valor por defecto, si no hay que suponer que hemos tecleado:

$$\text{MODSTO}\ (13)$$

4.5.8 MULTMOD

MULTMOD efectúa una multiplicación en Z/pZ[X].

teclee:

$$\text{MULTMOD}(11X + 5,\ 8X + 6)$$

obtiene:

$$-(3X^2 - 2X - 4)$$

4.5.9 POWMOD

POWMOD(A,N) calcula A con la potencia N en Z/pZ y POWMOD(A(X), N)

Calcula A(X) con la potencia N en Z/pZ[X].

El contenido p de MODULO debe de ser un número primo inferior a 100.

teclee:

POWMOD(11,195)

obtiene:

5

En efecto, $11^{1}2 = 1$ mod 13 entonces $11^{1}95 = 11^{3} = 5$ mod 13 teclee:

POWMOD(2X + 1,5)

Se obtiene:

$$6 \cdot X^{5} + 2 \cdot X^{4} + 2 \cdot X^{3} + X^{2} - 3 \cdot X + 1$$

ya que:

10 = –3 (mod 13) 40 = 1 (mod 13) 80 = 2 (mod 13) 32 = 6 (mod 13)

4.5.10 SUBTMOD

SUBTMOD efectúa una suma en Z/pZ[X].

teclee:

SUBTMOD (11X + 5, 8X + 6)

obtiene:

3X – 1

4.6 Numeros Racionales

Intente:

$$\frac{123}{12} + \frac{57}{21}$$

Seleccione y pulse ENTER, la respuesta será:

$$\frac{365}{28}$$

Si aplica la función XNUM del menú REWRITE o si pulsa la tecla NUM, la respuesta será:

$$12{,}9642857143$$

Si mezcla las dos representaciones, por ejemplo:

$$\frac{1}{2}+0{,}5$$

La calculadora le va a pedir que pase al mode approx para poder efectuar el cálculo, conteste yes para obtener:

$$1$$

vuelva luego en modo exacto (CFG etc…).

4.6.1 PROPFRAC

PROPFRAC está en el menú Polynom de la tecla MATH.

PROPFRAC $(\frac{A}{B})$ escribe la fracción *A/B* con la siguiente forma:

$$Q + \frac{R}{B} \text{ con } 0 = R < B$$

Teclee:

$$\text{PROPFRAC}\frac{43}{12}$$

obtiene:

$$3+\frac{7}{12}$$

4.7 Numeros Reales

Pruebe con:

$$\text{EXP}(\pi * \sqrt{20})$$

selecciónelo y pulse ENTER la solución será:

$$\text{EXP}(2 * \sqrt{5} * \pi)$$

si aplica la función XNUM del menú la solución será:

$$1263794{,}7537$$

En el menú Complex de la tecla MATH encontrará las funciones explicadas a continuación:

FLOOR y MOD

4.7.1 FLOOR

FLOOR tiene como argumento un número real y le devuelve su parte entera.

Teclee:

FLOOR (3,53)

Obtiene:

3

4.7.2 MOD

MOD es una función insertada cuyo argumento son dos números enteros.

MOD devuelve el resto de la división euclidiana de los argumentos.

Teclee:

3 MOD 2

obtiene:

1

4.8 Numeros Complejos

NOTACION: Los números complejos de tipo a + bi, donde a y b son números reales se pueden escribir como (a,b) o a + bi

Las operaciones que podemos realizar son +, –, *, / ,¯ .

Teclee:

$$(1 + 2\cdot i)^2$$

Selecciónelo y pulse ENTER.

Si no está en modo Complex la calculadora le preguntará si quiere cambiar de modo, conteste yes y obtendrá:

$$-(3 + 4\cdot i)$$

Esta expresión no se puede simplificar más (los resultados siempre mostraran que se trata de un número complejo con una parte real positiva, en modo exact).

En el menú Complex de la tecla MATH, encontrará las funciones siguientes cuyo parámetro es una expresión con un valor complejo:

DROITE tiene como parámetro dos números complejos

DROITE devuelve la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos de afijo z1, z

ARG para determinar el argumento del parámetro

ABS para determinar el módulo del parámetro

CONJ para determinar el conjugado del parámetro

RE para determinar la parte real del parámetro

IM para determinar la parte imaginaria del parámetro

- para determinar el opuesto del parámetro,

SIGN para determinar el cociente del parámetro y su módulo.

4.8.1 ARG

Teclee:

$$\mathrm{ARG}(3 + 4\cdot i)$$

Obtiene (no olvide que en el CAS usamos radianes)

$$\mathrm{ATAN}(\frac{4}{3})$$

NOTA:
Ud. puede realizar el mismo cálculo desde HOME, pero obtendría el resultado numérico 0.64250…(si está Ud. en radianes)

Desde HOME debe teclear:

$$\mathrm{ARG}(\mathrm{XQ}(3 + 4\cdot i))$$

para obtener:

$$\mathrm{ATAN}(\frac{4}{3})$$

4.8.2 DROITE

Teclee:

DROITE((1,2),(0,1))

o teclee:

DROITE(1 + 2·*i*,*i*)

obtiene:

$$y = x - 1 + 2$$

Pulse ENTER para obtener:

$$y = x + 1$$

4.9 Expresiones Algebraicas

Todas las funciones de este apartado están en el menú ALGB del menú principal.

4.9.1 COLLECT

COLLECT tiene como parámetro una expresión.

COLLECT descompone esta expresión en los números enteros.

Ejemplo:

Descomponer en los números enteros:

$$X^2 - 4$$

teclee:

COLLECT ($X^2 - 4$)

Si está en modo real:

$$(X + 2)\cdot(X - 2)$$

Descomponer sobre los números enteros:

$$X^2 - 2$$

teclee:

COLLECT ($X^2 - 2$)

obtiene:

$$X^2 - 2$$

4.9.2 EXPAND

EXPAND tiene como parámetro una expresión.

EXPAND desarrolla y simplifica esa expresión.

Teclee:

$$\mathrm{EXPAND}((\mathrm{X}^2+\sqrt{2}\cdot\mathrm{X}+1)\cdot(X^2-\sqrt{2}\cdot\mathrm{X}+1))$$

obtiene:

$$x^4+1$$

4.9.3 FACTOR

FACTOR tiene como parámetro una expresión.

FACTOR descompone esa expresión.

Ejemplo:

Descomponer:

$$\mathrm{X}^4+1$$

teclee:

$$\mathrm{FACTOR}(\mathrm{X}^4+1)$$

Ud. puede encontrar FACTOR en el menú ALGB

En modo real tiene:

$$(\mathrm{X}^2+\sqrt{2}\cdot\mathrm{X}+1)\cdot(\mathrm{X}^2-\sqrt{2}\cdot\mathrm{X}+1)$$

En modo complejo (utilizando CFG):

$$\frac{(2\mathrm{X}+(1+i)\cdot\sqrt{2})\cdot(2\mathrm{X}-(1+i)\cdot\sqrt{2})}{16}\times$$

$$\frac{(2\mathrm{X}+(1-i)\cdot\sqrt{2})\cdot(2\mathrm{X}-(1-i)\cdot\sqrt{2})}{16}$$

4.9.4 |

| es un operador integrado útil para reemplazar una variable en una expresión (similar a la función SUBST).

teclee:

$$X^2 - 1 |X = 2$$

obtiene:

$$2^2 - 1$$

4.9.5 SUBST

SUBST tiene dos parámetros: una expresión que depende de un parámetro y una igualdad (parámetro = valor substituido)

SUBST realiza dicha sustitución.

Teclee:

$$SUBST(A^2 + 1, A = 2)$$

obtiene:

$$2^2 + 1$$

4.10 Polinomios

Todas las funciones de este apartado están en el menú Polynom de la tecla MATH

4.10.1 DEGREE

DEGREE tiene como argumento un polinomio de la variable real.

DEGREE devuelve el grado de ese polinomio.

CUIDADO:el grado de un polinomio nulo es –1.

teclee:

$$DEGREE (X^2 + X + 1)$$

Obtiene:

$$2$$

4.10.2 EGCD

Trata de la identidad de Bézout (Extended Greatest Common Divisor).
EGCD(A(X),B(X)) devuelve U(X) AND V(X) = D(X) con D,U,V verificando:

$$D(X) = U(X)\cdot A(X) + V(X)\cdot B(X)$$

introduzca:

$$EGCD\ (X^2 + 2X + 1,\ X^2 - 1)$$

obtiene:

$$1\ AND\ -1 = 2\cdot X + 2$$

teclee:

$$EGCD(X^2 + 2\cdot X + 1, X^3 - 1)$$

obtiene:

$$-(X + 2)\ AND\ 1 = 3\cdot X + 3$$

4.10.3 FACTOR

FACTOR tiene como argumento un polinomio:

FACTOR descompone ese polinomio.

teclee:

$$FACTOR\ (X^2 - 2)$$

obtiene:

$$(X + \sqrt{2})\cdot(X - \sqrt{2})$$

teclee:

$$FACTOR\ (X^2 + 2\cdot X + 1)$$

obtiene:

$$(X + 1)^2$$

teclee:

$$FACTOR\ (X^4 - 2\cdot X^2 + 1)$$

obtiene:

$$(X - 1)^2\cdot(X + 1)^2$$

teclee:

$$FACTOR\ (X^3 - 2\cdot X^2 + 1)$$

obtiene:

$$\frac{(X-1)\cdot(2X+-1+\sqrt{5})\cdot(2X-(1+\sqrt{5}))}{4}$$

4.10.4 GCD

GCD define el MCD (máximo común divisor) de dos polinomios.

teclee:

$$GCD\ (X^2 + 2\cdot X + 1,\ X^2 - 1)$$

obtiene:

$$X + 1$$

4.10.5 HERMITE

HERMITE tiene como argumento un número entero n.

HERMITE devuelve el polinomio de HERMITE de grado n.

Se trata del polinomio:

$$Hn(x) = (-1)^n \cdot e\ \ x2/2\ \ d\ ^n/dx^n\ \ e\ \ -x^2/2$$

Tenemos:

Para n ≥ 0

$$H_n(x) - xH\ _n(x)\ +\ nH_n(x) = 0$$

y para n ≥ 1

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$$

$$H_n(x) = nH_{n-1}(x)$$

Teclee:

$$HERMITE\ (6)$$

obtiene:

$$64\cdot X^6 - 480\cdot X^4 + 720\cdot X^2 - 120$$

4.10.6 LCM

LCM designa el mcm (mínimo común múltiplo) de dos polinomios.

Teclee:

$$LCM(X^2 + 2\cdot X + 1,X^2 - 1)$$

obtiene:

$$(X^2 + 2\cdot X + 1)\cdot(X - 1)$$

4.10.7 LEGENDRE

LEGENDRE tiene como argumento un número entero n.

LEGENDRE devuelve el polinomio Ln no es la única solución de la ecuación diferencial:

$$(x^2 - 1)\cdot y'' - 2\cdot x\cdot y' - n(n + 1)\cdot y = 0$$

Ud. tiene:

para n ≥ 0 la formula de Rodriguès

$$L_n(x) = 1/n!2^n\ d^{\,n}/dx^n\ (x^2 - 1)^n$$

y para n ≥ 1

$$(n + 1)L_{n+1}(x) = (2n + 1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

Introduzca:

LEGENDRE(4)

obtiene:

$$\frac{35 \cdot X^4 - 30 \cdot X^2 + 3}{8}$$

4.10.8 PARTFRAC

Descomponer en elementos simples la fracción racional:

$$\frac{x^5 - 2\times x^3 + 1}{x^4 - 2\times x^3 + 2\times x^2 - 2\times x + 1}$$

Se usa el comando PARTFRAC

Introduzca:

$$\mathrm{PARTFRAC}\left(\frac{\mathrm{X}^5 - 2\times\mathrm{X}^3 + 1}{\mathrm{X}^4 - 2\times\mathrm{X}^3 + 2\times\mathrm{X}^2 - 2\times\mathrm{X} + 1}\right)$$

Obtiene en modo real:

$$X + 2 + \frac{\frac{-1}{2}}{X - 1} + \frac{\frac{X-3}{2}}{X^2 + 1}$$

Obtiene, en modo complejo:

$$X + 2 + \frac{\frac{1-3i}{4}}{X + i} + \frac{\frac{-1}{2}}{X - 1} + \frac{\frac{1-3i}{4}}{X - i}$$

4.10.9 PROPFRAC

PROPFRAC tiene como argumento una fracción racional.

PROPFRAC devuelve esa fracción, escrita de manera que destaca su parte entera.

PROPFRAC (A(X)/B(X)) escribe la fracción racional A[x]/B[x]

$$Q[X]+\frac{R[X]}{B[X]}$$

con R[x] = 0 ó 0 ≤ deg(R[x]) < deg(B[x]).

Teclee:

$$\text{PROPFRAC}\left(\frac{(5\cdot X+3)\cdot(X-1)}{X+2}\right)$$

obtiene:

$$5\cdot X-12+\frac{21}{X+2}$$

4.10.10 PTAYL

Se trata de escribir un polinomio P[x] con las potencias x-a.

PTAYL tiene dos parámetros: un polinomio P y un número a.

Teclee:

$$\text{PTAYL}(X^2 + 2\cdot X + 1{,}2)$$

se obtiene el polinomio Q[x]:

$$X^2 + 6\cdot X + 9$$

CUIDADO, tenemos:

$$P(X) = Q(X - 2)$$

4.10.11 QUOT

QUOT devuelve el cociente de dos polinomios en la división, según las potencias decrecientes.

teclee:

$$\text{QUOT}(X^2 + 2\cdot X + 1\cdot X)$$

obtiene:

$$X + 2$$

4.10.12 REMAINDER

REMAINDER devuelve el resto de la división de dos polinomios (división según las potencias decrecientes)

Teclee:

$$REMAINDER(X^3 - 1, X^2 - 1)$$

obtiene:

$$X - 1$$

4.10.13 TCHEBYCHEFF

TCHEBYCHEFF tiene como argumento un número entero.

Si n > 0, TCHEBYCHEFF devuelve el polinomio Tn tal que:

$$T_n[x] = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

tiene:

para ≥ 0

$$T_n(x) = [n/2]\ k = 0\ C\ 2k\ _n(x^2 - 1)^k\ x^{n-2k}$$

para n ≥ 0

$$(1 - x^2)T00_n(x) - xT0_n\ (x) + n2Tn(x) = 0$$

para n ≥ 1

$$T_{n+1}(x) = 2xTn(x) - T_{n-1}(x)$$

Si n < 0 TCHEBYCHEFF devuelve el polinomio de Tchebycheff de segunda especie:

$$Tn[x] = \frac{\sin(n \cdot \arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}$$

teclee:

$$TCHEBYCHEFF(4)$$

obtiene:

$$8 \cdot X^4 - 8 \cdot X^2 + 1$$

Efectivamente:

$\cos(4 \cdot x) = Re((\cos(x) + I \cdot \sin(x))^4)$

$\cos(4 \cdot x) = \cos(x)^4 - 6 \cdot \cos(x)^2 \cdot (-\cos(x)^2) + ((1 - \cos(x)^2)^2$

$\cos(4\cdot x) = T_4(\cos(x))$

introduzca:

TCHEBYCHEFF(–4)

Obtiene:

$8\cdot X^3 - 4\cdot X$

Efectivamente:

$\sin(4\cdot x) = \sin(x)\cdot(8\cdot\cos(x)^3 - 4\cdot\cos(x))$.

4.11 Funciones

Todas las funciones de este apartado están en el menú DIFF del menú principal, excepto DEF que se encuentra en el menú ALGB y IFTE en el menú Tests de la tecla MATH.

4.11.1 DEF

DEF tiene como argumento una igualdad entre el nombre de una función con paréntesis que contienen el nombre de una variable, y una expresión de define la función.

DEF define esta función y devuelve una igualdad.

Teclee:

$DEF(U(N) = 2^N + 1)$

Obtiene:

$U(N) = 2^N + 1$

Teclee:

U(3)

Obtiene:

9

4.11.2 IFTE

IFTE tiene tres argumentos, uno booleano (cuidado con el ==) y dos expresiones expr1, expr2.

IFTE evalúa el test, devuelve expr1 si es verdadero y expr2 si es falso,

Teclee:

STORE(2,QUOTE(N))

IFTE(N = = 0,1, N + 1 / N)

Obtiene:

3 / 2

Ud. puede definir una función con la ayuda de IFTE, por ejemplo:

DEF(F(X) = IFTE(X = = 0,1, SIN(X) / X))

Define la función f para:

f(x) = 1 si x = 0

sin(x)/x si x ≠ 0

4.11.3 DERVX

Ud. tiene:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} + \mathrm{LN}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Calcular la derivada de f

Teclee:

$$\mathrm{DERVX}(\frac{x}{x^2 - 1} + \mathrm{LN}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

o si Ud. ha almacenado la expresión de f(x) en F, es decir, si ha introducido:

DERVX(F)

o si ha definido F(X) con la ayuda de DEF:

$$\left(\mathrm{DEF}\left(F(X) = \frac{X}{X^2 - 1} + \mathrm{LN}\left(\frac{X+1}{X-1}\right)\right)\right)$$

DERVX(F(X))

Ud. obtiene una operación compleja que se puede simplificar pulsando ENTER.

Obtiene:

$$-\frac{3X^2-1}{X^4-2\cdot X^2+1}$$

4.11.4 DERIV

DERIV tiene dos argumentos una expresión (o una función) y una variable.

DERIV devuelve la variable de la expresión (o de la función) en relacción a la variable del segundo parámetro

(muy útil para calcular derivadas parciales)

Ejemplo:

Se tiene que calcular:

$$\frac{\partial(x\cdot y^2\cdot z^3+x\cdot y)}{\partial z}$$

Teclee:

$$\mathrm{DERIV}(X\cdot Y^2\cdot Z^3 + X\cdot Y, Z)$$

Obtiene:

$$3\cdot X\cdot Y^2\cdot Z^2$$

4.11.5 TABVAR

TABVAR tiene como parámetro una expresión con una derivada racional

TABVAR devuelve una tabla con las variaciones de esa expresión, en función de la variable real.

Teclee:

TABVAR (LN(X) + X)

Obtiene en modo paso a paso:

$$F =: (LN(X) + X)$$
$$F' =: (\frac{1}{x} + 1$$
$$\rightarrow: \frac{X+1}{X}$$

Tabla de variación:

$$\begin{bmatrix} -\infty & ? & -1 & ? & 0 & + & +\infty & X \\ ? & ? & i\pi - 1 & ? & -\infty & \uparrow & +\infty & F \end{bmatrix}$$

4.11.6 FOURIER

FOURIER tiene dos parámetros: 1 expresión f(x) y un número entero n.

FOURIER devuelve el coeficiente de Fourier cn de f(x) considerada como una función definida en [0,T] y periódica de periodo T(siendo T igual al contenido de la variable PERIOD)

Si f es contínua por fragmentos, obtenemos:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2inx\pi}{T}}$$

Ejemplo: Determinar los coeficientes de Fourier de la función f periódica, de periodo 2·π y definida en [0 2·π] para $f(x) = x^2$

Teclee:

STORE(2·π, QUOTE(PERIOD))

FOURIER (X2,N)

Tras la simplificación se obtiene:

$$\frac{2 \cdot i \cdot N \cdot \pi + 2}{N^2}$$

si n ≠0 tenemos

$$c_n = \frac{2 \cdot i \cdot N \cdot \pi + 2}{N^2}$$

Teclee:

FOURIER(X^2,0)

Obtiene:

$$\frac{4 \cdot \pi^2}{3}$$

Si n = 0:

$$c_0 = \frac{4 \cdot \pi^2}{3}$$

4.11.7 IBP

IBP tiene dos parámetros: una expresión de la forma *u*(*x*) *v'*(*x*) y *v*(*x*).

IBP devuelve el AND de *u(x)·(x)* y de *–v(x)·'(x)*, es decir los términos que hay que calcular cuando se hace una integración por partes.

Le queda por calcular la integral del segundo término del AND, y la suma con el primer término del AND para obtener una primitiva de u(x)v'(x)

Teclee:

IBP(LN(X),X)

Obtiene:

X·LN(X) AND –1

La integral se finaliza llamando INTVX:

INTVX(X·LN(X) AND – 1)

Obtiene:

X·LN(X)·X

NOTA:

SI el primer parámetro de IBP es el AND del segundo elemento, IBP sólo actúa sobre el último elemento del AND y añade el término integrado al primer elemento de AND (de manera que se pueden realizar varios IBP seguidos)

4.11.8 INTVX

Ejercicio 1

Calcula primera primitiva de sin(x) x cos(x)

Teclee:

INTVX(SIN(X) * COS(X))

paso a paso:

COS(X)· SIN(X)

Int[*u*' * F(*u*)] with *u* = SIN(X)

Pulse OK y el resultado aparecerá en el editor de ecuaciones:

SIN (X)2/2

Ejercicio 2

Sea:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} + \mathrm{LN}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Calcular una primitiva de f(x)

Teclee:

$$\mathrm{INTVX}(\frac{x}{x^2 - 1} + \mathrm{LN}\left(\frac{x+1}{x-1}\right))$$

Si ha almacenado la expresión de f(x) en F

INTVX (F)

o si ha definido F(X) con la ayuda de DEF

$$\left(\mathrm{DEF}\left(F(X) = \frac{X}{X^2 - 1} + \mathrm{LN}\left(\frac{X+1}{X-1}\right)\right)\right)$$

INTVX(F(X))

Obtiene:

$$X \cdot \mathrm{LN}\left(\frac{X+1}{X-1}\right)+\frac{3}{2}\cdot \mathrm{LN}(|X-1|)+\frac{3}{2}\cdot \mathrm{LN}(|X+1|)$$

Ejercicio 3

Calcule:

$$\int \frac{2}{x^6+2\cdot x^4+x^2}\,dx$$

Teclee:

$$\mathrm{INTVX}\left(\frac{2}{X^{6}+2\cdot X^{4}+X^{2}}\right)$$

Obtiene:

$$-3\cdot \mathrm{ATAN}(X)-\frac{2}{X}-\frac{X}{X^{2}+1}$$

NOTA:
También Ud. puede introducir:

$$\int_1^X \frac{2}{X^{6}+2\cdot X^{4}+X^{2}}\,dX$$

que le da el mismo resultado más la siguiente constante:

$$\frac{3\cdot \pi+10}{4}$$

Ejercicio 4

Calcular:

$$\int \frac{1}{\sin(x)+\sin(2\cdot x)}\,dx$$

Teclee:

$$\mathrm{INTVX}\left(\frac{1}{\mathrm{SIN}(X)+\mathrm{SIN}(2\cdot X)}\right)$$

Obtiene:

$$\frac{1}{6}\cdot \mathrm{LN}(|COS(X)-1|)+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{LN}(|COS(X)+1|)+$$

$$\frac{-2}{3}\cdot \mathrm{LN}(|2\cdot COS(X)+1|)-\mathrm{LN}(2)$$

NOTA:

Si el parámetro de INTX es el AND de dos elementos, INTVX sólo actúa sobre el segundo elemento del AND.

4.11.9 LIMIT

Encontrar el límite para n > 2 cuando *x* tiende a cero de :

$$\frac{n\times\tan(x)-\tan(n\times x)}{\sin(n\times x)-n\times\sin(x)}$$

Se usa el comando LIMIT

Teclee:

$$\mathrm{LIMIT}\left(\frac{N\cdot \mathrm{TAN}(X)-\mathrm{TAN}(N\cdot X)}{\mathrm{SIN}(N\cdot X)-N\cdot \mathrm{SIN}(X)},0\right)$$

Obtiene:

$$2$$

Encontrar el límite cuando x tiende a +∞ de:

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$$

Teclee:

$$\text{LIMIT}(\sqrt{X+\sqrt{X+\sqrt{X}}}-\sqrt{X},+\infty)$$

Después de un periodo breve de tiempo obtiene:

1/2

CUIDADO

Ud. puede obtener ∞ pulsando SHIFT 0

–∞ se obtiene tecleando:

(–)∞

+∞ se obtiene tecleando:

(–)(–)∞

También puede encontrar ∞ en el menú Constant de la tecla MATH.

4.11.10 LIMIT y ∫

Determinar el límite cuando tiende a más infinito de:

$$\int_{2}^{a}\left(\frac{x}{x^2-1}+\text{LN}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)dx$$

Introduzca en el editor de ecuaciones:

$$\int_{2}^{+\infty}\left(\frac{X}{X^2-1}+\text{LN}\left(\frac{X+1}{X-1}\right)\right)dx$$

CUIDADO, +∞ se obtiene tecleando:

(–)(–) ∞ (SHIFT 0)

Obtiene:

$$+\infty-\frac{7\cdot LN(3)}{2}$$

Y tras la simplificación:

+∞

4.11.11 PREVAL

PREVAL tiene tres parámetros: una expresión F(VX) que depende de la variable contenida en VX y dos expresiones A y B.

PREVAL (F(X,A,B,) devuelve F(B)–F(A)

PREVAL se usa para calcular una integral definida a partir de una primitiva: se evalúa esta primitiva desde los dos límites de la integral.

Teclee:

$$\text{PREVAL}\ (X^2 + X, 2,3)$$

Obtiene:

$$12 - 6$$

4.11.12 RISCH

RISCH tiene dos parámetros: una expresión y un nombre de variable.

RISCH devuelve una primitiva del primer parámetro en relación a la variable especificada en el ¶ segundo parámetro.

Teclee:

$$\text{RISCH}((2\cdot X^2 + 1)\cdot \text{EXP}(X^2 + 1),X)$$

Obtiene:

$$X\cdot \text{EXP}(X^2 + 1)$$

NOTA:

Si el parámetro de RISCH es el AND de dos elementos, RISCH sólo actúa en el segundo elemento de AND.

4.12 Desarrollos Limitados y Asintoticos

Todas las funciones de este apartado se encuentran en el menú DIFF de menú principal.

Normalmente se escriben los desarrollos según la potencias crecientes de la variable, en CFG, se hace la selección $1 + x + x^2$…

4.12.1 DIVPC

DIVPC tienen tres argumentos: dos polinomios A(X), B(X) (con $B(0) \neq 0$) y un número entero n.

DIVPC devuelve el cociente Q(X) de la división A(X) entre B(X) según las potencias crecientes con deg (Q) $\leq$ n o Q = 0.

Q[x] es el desarrollo limitado de orden n del entorno de $\frac{A[X]}{B[X]}$

de X = 0

Teclee:

$$\mathrm{DIVPC}(1 + X^2 + X^3, 1 + X^2, 5)$$

Obtiene:

$$1 + X^3 - X^5$$

CUIDADO: La máquina le preguntará si quiere pasar a “potencias crecientes”, conteste yes.

4.12.2 LIMIT

LIMIT tiene como argumento una expresión que depende de una variable y una igualdad (variable = valor dónde se quiere calcular el límite).

A veces es preferible escribir la expresión entre comillas.

QUOTE (expresión) para evitar una reescritura de esta expresión bajo la forma normal (para no tener una simplificación racional de los argumentos) antes de la ejecución del comando LIMIT.

Por ejemplo introduzca:

$$\mathrm{LIMIT}\left(\mathrm{QUOTE}\left((2X-1)\cdot \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{X-1}\right)\right), X=+\infty\right)$$

Obtiene:

$$+\infty$$

4.12.3 SERIES

Desarrollo del entorno de x = a

Ejemplo:

Hacer un desarrollo limitado de orden 4 de $x = \frac{\pi}{6}$ *de* $\cos(2\times x)^2$

Se utiliza el comando SERIES.

Teclee:

$$\mathrm{SERIES}\left(\mathrm{COS}(2\cdot X)^2, X = \frac{\pi}{6}, 4\right)$$

Obtiene:

$$\left(\frac{1}{4} - \sqrt{3}h + 2h^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}h^3 - \frac{8}{3}h^4\right) \quad h = X - \frac{\pi}{6}$$

Hacer el desarrollo para x = +∞ o x = –∞

Ejemplo 1:

Hacer un desarrollo de la arctan(x) de orden 5. para x = +∞ haciendo $h = \frac{1}{x}$ suficientemente pequeño. Teclee:

SERIES(ATAN(X),X = +∞, 5)

Obtiene:

$$\left(\frac{\pi}{2} - h + \frac{h^3}{3} - \frac{h^5}{5}\right) \quad h = \frac{1}{X}$$

Ejemplo 2:

Hacer un desarrollo de $(2x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$ de orden 2. para x = +∞ haciendo $h = \frac{1}{x}$ suficientemente pequeño, Teclee:

$$\mathrm{SERIES}\left((2X-1)\cdot \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{X-1}\right), X = +\infty, 3\right)$$

Obtiene:

$$\left(\frac{2+h+2h^2+\frac{17h^3}{6}}{h}\right)\Big| \quad h=\frac{1}{X}$$

Ejemplo 3:

Hacer un desarrollo de $(2x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$ de orden 2. Para x = –∞ haciendo $h=\frac{-1}{x}$

suficientemente pequeño, Teclee:

$$\mathrm{SERIES}\left((2X-1)\cdot \mathrm{EXP}\left(\frac{1}{X-1}\right), X=-\infty, 3\right)$$

Obtiene::

$$\left(\frac{-2+h-2h^2+\frac{17h^3}{6}}{h}\right)\Big| \quad h=\frac{-1}{X}$$

Desarrollo unidireccional

Para el orden debe usar un numero real positivo(véase ejemplo 4) para hacer un desarrollo de $x = a$ siendo $x > a$ y un número real negativo (véase ejemplo –4) para hacer un desarrollo de $x = a$ siendo $x < a$:

Ejemplo 1:

Hacer un desarrollo de $\frac{(1+X)^{\frac{1}{X}}}{X^3}$ de orden 2. para X = 0^+

Teclee:

$$\mathrm{SERIES}\left(\frac{(1+X)^{\frac{1}{X}}}{X^3}, X, 2\right)$$

Obtiene:

$$\left(-\frac{e\cdot h-2\cdot e}{2\cdot h^3}\right)\Big| h = X$$

Ejemplo 2:

Hacer un desarrollo de $\dfrac{(1+X)^{\frac{1}{X}}}{X^3}$ de orden 2. para X = 0^-.

Teclee:

$$\text{SERIES}\left(\frac{(1+X)^{\frac{1}{X}}}{X^3}, X, -2\right)$$

Obtiene:

$$\left(-\frac{e\cdot h-2\cdot e}{2\cdot h^3}\right)|h = X$$

Ejemplo 3:

Hacer un desarrollo de $\dfrac{(1+X)^{\frac{1}{X}}}{X^3}$ de orden 2. para X = 0.

Teclee:

$$\text{SERIES}\left(\frac{(1+X)^{\frac{1}{X}}}{X^3}, X, 2\right)$$

Obtiene:

$$\left(-\frac{e\cdot h-2\cdot e}{2\cdot h^3}\right)|h = X$$

4.12.4 TAYLOR

TAYLORO sólo tiene un argumento : la función de *x* para desarrollar y devuelve su desarrollo limitado de orden relativo 4 para $x = 0$ (si x es la variable real).

Teclee:

$$\mathrm{TAYLORO}\left(\frac{\mathrm{TAN}(P\cdot X)-\mathrm{SIN}(P\cdot X)}{\mathrm{TAN}(Q\cdot X)-\mathrm{SIN}(Q\cdot X)}\right)$$

Obtiene:

$$\frac{P^5-Q^2\cdot P}{4\cdot Q^3}\cdot X^2+\frac{P^3}{Q^3}$$

CUIDADO!! orden 4 quiere decir que se hace el desarrollo al orden relativo 4 tanto en el numerador como en el denominador (aquí orden absoluto 5 para el numerador y el denominador lo que resulta un orden 2 (5-3) ya que el valor del denominador es igual a 3).

4.12.5 TRUNC

TRUNC permite cambiar un polinomio de un orden dado (útil cuando se hacen desarrollos limitados).

TRUNC tiene dos argumentos : un polinomio y X^n.

TRUNC devuelve el polinomio cambiado de orden n – 1: no hay términos de grado ≥ n

Teclee:

$$TRUNC((1+X+\frac{1}{2}\cdot X^2)^3, X^{4)}$$

Obtiene:

$$4\cdot X^3+\frac{9}{2}\cdot X^2+3\cdot X+1$$

4.13 Funciones de Sobreescritura

Todas las funciones de este apartado se encuentran en el menú REWRITE del menú principal.

4.13.1 DISTRIB

DISTRIB permite aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación en relación a la suma una vez.

DISTRIB cuando se aplica varias veces permite efectuar la propiedad distributiva paso a paso.

Teclee:

DISTRIB ((X + 1)·(X + 2)·(X + 3))

Obtiene:

X·(X + 2)·(X + 3) + 1·(X + 2)·(X + 3)

4.13.2 EPSXO

EPSXO tiene como parámetro una expresión de X y la expresión donde los valores más pequeños que EPS han sido sustituidos por cero.

Teclee:

EPSXO (0,001 + X)

Obtiene (con EPS = 0.01):

0 + X

Obtiene (con EPS = 0.0001):

,001 + X

4.13.3 EXP2POW

EXP2POW permite transformar una expresión con la forma exp (n x ln (x)) en una potencia de x.

Teclee:

EXP2POW(EXP(N·LN(X)))

Obtiene:

$$X^N$$

Diferencia con LNCOLLECT:

Tiene:

LNCOLLECT(EXP(N·LN(X)) = EXP (N·LN(X))

LNCOLLECT(EXP(LN(X)/3)) = EXP(LN(X)/3)

EXP2POW(EXP(LN(X)/3)) = $X^{1/3}$

4.13.4 EXPLN

EXPLN tiene como argumento una expresión trigonométrica.

EXPLN transforma las funciones trigonométricas en exponenciales y logarítmicas sin ser lineales.

EXPLN nos pasa al modo complejo:

Teclee:

EXPLN (SIN(X))

Obtiene:

$$\frac{\mathrm{EXP}(i \cdot X) - \dfrac{i}{\mathrm{EXP}(i \cdot X)}}{2 \cdot i}$$

4.13.5 FDISTRIB

FDISTRIB permite realizar la propiedad distributiva de la multiplicación en relación a la suma en una vez

Teclee:

FDISTRIB ((X + 1)·(X + 2)·(X + 3))

Obtiene:

$$X^3 + 6 \cdot X^2 + 11 \cdot X + 6$$

4.13.6 LIN

LIN tiene como argumento una expresión que contiene exponenciales y funciones trigonométricas.

LIN convierte en lineal esta expresión (la expresa en función de exp(nx)).

LIN pasa al mode complexe cuando hay funciones trigonométricas.

Ejemplo1:

Teclee:

LIN ((SIN(X))

Obtiene:

$$-(\frac{i}{2}\cdot \mathrm{EXP}(i\cdot X))+\frac{i}{2}\cdot \mathrm{EXP}(-(i\cdot X))$$

Ejemplo 2:

Teclee:

$\mathrm{LIN}((\mathrm{COS}(X)^2)$

Obtiene:

$$-(\frac{1}{4}\cdot \mathrm{EXP}(2\cdot i\cdot X))+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot \mathrm{EXP}(-(2\cdot i\cdot X))$$

Ejemplo 3:

Teclee:

$\mathrm{LIN}((\mathrm{EXP}(X) + 1)^3)$

Obtiene:

3·EXP(X) + 1 + 3·EXP(2·X) + EXP3·X)

4.13.7 LNCOLLECT

LNCOLLECT tiene como argumento una expresión de logaritmos.

LNCOLLECT reagrupa los términos en logaritmos. Por eso es preferible usarlo en una función descompuesta en factores (usando FACTOR).

Teclee:

$$\text{LNCOLLECT}\ (\text{LN}(X + 1) + \text{LN}(X - 1)$$

Obtiene:

$$\text{LN}((X + 1)(X - 1))$$

4.13.8 POWEXPAND

POWEXPAND escribe una potencia en forma de productos.

Teclee:

$$\text{POWEXPAND}\ ((X + 1)^3)$$

Obtiene:

$$(X + 1)\cdot(X + 1)\cdot(X + 1)$$

Esto nos permite desarrollar $(X + 1)^3$ paso a paso, aplicando varias veces DISTRIB al resultado anterior.

4.13.9 SIMPLIFY

SIMPLIFY simplifica la expresión de manera automática.

Como en toda simplificación automática no se pueden esperar milagros, sin embargo…

Teclee:

$$\text{SIMPLIFY}\left(\frac{\text{SIN}(3\cdot X)+\text{SIN}(7\cdot X)}{\text{SIN}(5\cdot X)}\right)$$

Desde la simplificación obtendrá:

$$4\ \text{COS}(X)^2 - 2$$

4.13.10 XNUM

XNUM tiene como parámetro una expresión.

XNUM nos pasa al modo aproximado y devuelve el valor numérico de la expresión.

Teclee:

$$\text{XNUM}(\sqrt{2})$$

Obtiene:

$$1{,}41421356237$$

4.13.11 XQ

XQ tiene como parámetro una expresión numérica real.

XQ nos pasa al modo exacto y nos da una expresión racional o real de la expresión:

Teclee:

$$\text{XQ}(1.41422)$$

Obtiene:

$$\frac{66441}{46981}$$

Teclee:

$$\text{XQ}(1.414213562)$$

Obtiene:

$$\sqrt{2}$$

4.14 Ecuaciones

Todas las funciones de este apartado se encuentran en el menú SOLV del menú principal.

4.14.1 ISOLATE

ISOLATE aisla una variable en una expresión o en una ecuación

ISOLATE tiene dos parámetros una expresión o una ecuación y el nombre de la variable que queremos aislar.

CUIDADO: ISOLATE sólo nos devuelve una solución.

Teclee:

$$\text{ISOLATE}(X^4 - 1 = 3, X)$$

Obtiene:

$$(X = \sqrt{2})$$

4.14.2 SOLVEVX

SOLVEVX tiene como parámetro una ecuación entre dos expresiones de la variable contenida en VX o en una expresión (se sobreentiende que es = 0)

SOLVEVX resuelve la ecuación.

Ejemplo1:

$$\text{SOLVEVX}(X^4 - 1 = 3)$$

Obtiene en modo real:

$$(X = -\sqrt{2}) \text{ OR } (X = \sqrt{2})$$

Obtiene en modo complejo:

$$(X = -\sqrt{2}) \text{ OR } (X = \sqrt{2}) \text{ OR } (X = -i \cdot \sqrt{2}) \text{ OR } (X = i\sqrt{2})$$

Ejemplo 2:

Obtiene:

$$\text{SOLVEVX}((X - 2) \cdot \text{SIN}(X))$$

Obtiene en modo real:

$$(X = -2 \cdot \pi \cdot n_1) \text{ OR } (X = 2 \cdot \pi \cdot n_1) \text{ OR } (X = 2)$$

4.14.3 SOLVE

SOLVE tiene como argumentos una ecuación entre dos expresiones o una expresión (se sobreentiende = 0) y el nombre de la variable.

SOLVE resuelve la ecuación.

Teclee:

$$\text{SOLVE}(X^4 - 1 = 3, X)$$

Obtiene en modo real:

$$(X = -\sqrt{2}) \text{ OR } (X = \sqrt{2})$$

En modo complejo se obtiene:

$$(X = -\sqrt{2}) \text{ OR } (X = \sqrt{2}) \text{ OR } (X = -i \cdot \sqrt{2}) \text{ OR } (X = i \cdot \sqrt{2})$$

4.15 Sistemas Lineales

Todas las funciones de este apartado se encuentran en el menú SOLV del menú principal.

4.15.1 LINSOLVE

LINSOLVE permite resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Se supone que las ecuaciones están escritas con formato:

Expression = 0

LINSOLVE tiene dos argumentos:

Los primeros miembros de las diferentes ecuaciones separados por AND y los nombres de las variables separados por AND.

Ejemplo1:

Teclee:

LINSOLVE (X + Y + 3 AND X –Y + 1, X AND Y)

Obtiene:

(X = –2) AND (Y = –1)

Si está Ud. en el modo paso a paso (CFG etc…):

L2 = L2 – L1

… $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ENTER

L1 = 2L1 – L2

… $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

ENTER

Reduction Result

… $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

ENTER

En el editor aparece:

(X = –2) AND (Y = –1)

Ejemplo 2:

Teclee:

(2·X + Y + Z = 1 AND X + Y + 2·Z = 1 AND X + 2·Y + Z = 4

Tiene que utilizar LINSOLVE

Introducir las incógnitas:

X AND Y AND Z

Y pulsar ENTER

Si está en modo paso a paso (CFG etc…):

L2 = 2L2 – L1

… $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

pulse a continuación OK.

L3 = 2L3 – L1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

…

etc…hasta el final

Reduction Result

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

…

Pulse ENTER y

$$(X = -\frac{1}{2})\ AND\ (Y = \frac{5}{2})\ \mathrm{AND}\ (Z = -\frac{1}{2})$$

Aparece en el editor.

4.16 Las Ecuaciones Diferenciales

Todas las funciones de este apartado están en el menú SOLVE del menú principal.

4.16.1 DESOLVE Y SUBST

DESOLVE permite resolver otras ecuaciones diferenciales.

Los parámetros son: la ecuación diferencia(donde y'se escribe d1Y(X) y la incognitaY(X).

Ejemplo 1:

Resolver:

$$y'' + y = \cos(x) \quad y(0) = c_0 \quad y'(0)c_1$$

Teclee:

$$\mathrm{DESOLVE}(d_1d_1Y(X) + Y(X) = \mathrm{COS}(X),Y(X))$$

Obtiene:

$$Y(X) = cC0 \cdot COS(X) + \frac{X + 2 \cdot C1}{2} \cdot \mathrm{SIN}(X)$$

cC0 Y cC1 son las constantes de integración(y(0) = cC(0) y'(0) = cC1).

Se puede dar un valor a las constantes utilizando el comando SUBST y si queremos las soluciones verificando y(0) = 1, escribimos:

$$\mathrm{SUBST}(Y(X) = cC0 \cdot COS(X) + \frac{X + 2 \cdot C1}{2} \cdot \mathrm{SIN}(X), C0 = 1$$

Obtiene:

$$Y(X) = \frac{2 \cdot \mathrm{COS}(X) + (X + 2 \cdot cC1) \cdot \mathrm{SIN}(X)}{2}$$

Ejemplo 2:

Resolver:

$$y'' + y = \cos(x) \quad y(0) = 1 \quad y'(0)c_1$$

Para obtener las soluciones que verifiquen y(0) = 1, se puede escribir directamente:

$$\mathrm{DESOLVE}([d_1 d_1 Y(X) + Y(X) = COS(X), Y(0) = 1], Y(X)$$

Aparece entonces:

$$Y(X) = \mathrm{COS}(X) + \frac{X + 2 \cdot C1}{2} \cdot \mathrm{SIN}(X)$$

4.16.2 LDEC

LDEC permite resolver directamente las ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

Los parámetros son el segundo miembro y la ecuación característica.

Resolver:

$$y'' - 6 \cdot y' + 9 \cdot y = x \cdot e^{3 \cdot x}$$

Teclee:

$$\mathrm{LDEC}(X \cdot EXP(3 \cdot X), X^2 - 6 \cdot X + 9)$$

Obtiene:

$$(\frac{X^3}{6} - (3 \cdot cC0 - cC1) \cdot X + cC0) \cdot \mathrm{EXP}(3 \cdot X)$$

cCo y cC1 son las constantes de integración (y(0) = cC0 y'(0) = cC1).

4.17 Expresiones Trigonometricas

Todas las funciones de este apartado están en e TRIG del menú principal.

4.17.1 ACOS2S

ACOS2S tiene como argumento una expresión trigonométrica.

ACOS2S transforma esa expresión sustituyendo:

Teclee:

Arcos(x) para $\frac{\pi}{2}$ – arcsin(x).

Teclee:

ACOS2S(ACOS(X) + ASIN(X))

Obtiene:

$$\frac{\pi}{2}$$

4.17.2 ASIN2C

ASIN2C tiene como argumento una expresión trigonométrica.

ASIN2C transforma esa expresión sustituyendo:

arcsin(x) para $\frac{\pi}{2}$ – arcos(x).

Teclee:

ASIN2C(ACOS(X) + ASIN(X))

Obtiene:

$$\frac{\pi}{2}$$

4.17.3 ASIN2T

ASIN2T tiene como argumento una expresión trigonométrica.

ASIN2T transforma esa expresión sustituyendo:

arscin(x) para $\arctan(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$

Teclee:

ASIN2T(ASIN(X))

Obtiene:

$$\frac{\pi}{2}$$

4.17.4 ATAN2S

ATAN2S tiene como argumento una expresión trigonométrica.

ATAN2S transforma esa expresión sustituyendo:

arctan(x) por $\arcsin(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$

Teclee:

ATAN2S(ATAN(X))

Obtiene:

$$\text{ASIN}(\frac{X}{\sqrt{1+X^2}})$$

4.17.5 HALFTAN

HALFTAN tiene como argumento una expresión trigonométrica.

HALFTAN transforma sin(x) cos(x) y tan(x), en una expresión en función de $\tan(\frac{x}{2})$

Teclee:

$$\text{HALFTAN}(\frac{\text{SIN}(2 \cdot X)}{1+\text{COS}(2 \cdot X)})$$

Después de la simplificación:

TAN (X)

Teclee:

$$\text{HALFTAN}(\text{SIN}(X)^2 + \text{COS}(X)^2)$$

Obtiene: $(\text{SQ}(X) = X^2)$:

$$\left(\frac{2 \cdot \text{TAN}(\frac{X}{2})}{\text{SQ}(\text{TAN}(\frac{X}{2}))+1}\right)^2 + \left(\frac{1-\text{SQ}(\text{TAN}(\frac{X}{2}))}{\text{SQ}(\text{TAN}(\frac{X}{2}))+1}\right)^2$$

Después de la simplificación obtendrá:

1

4.17.6 SINCOS

SINCOS tiene como argumento una expresión con exponenciales complejos.

SINCOS transforma esa expresión en función de sin(x) y de cos(x).

Teclee:

$$\text{SINCOS}(\text{EXP}(I \cdot X))$$

Obtiene:

$$\text{COS}(X) + i \cdot \text{SIN}(X)$$

4.17.7 TAN2CS2

TAN2CS2 tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TAN2CS2 transforma esa expresión sustituyendo:

tan(x) por $\dfrac{1-\cos(2\cdot x)}{\sin(2\cdot x)}$

Teclee:

TAN2SC2(TAN(X))

Obtiene:

$$\frac{1-\mathrm{COS}(2\cdot X)}{\mathrm{SIN}(2\cdot X)}$$

4.17.8 TAN2SC

TAN2SC tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TAN2SC transforma esa expresión sustituyendo:

tan(x) por $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Teclee:

TAN2SC(TAN(X))

Obtiene:

$$\frac{\mathrm{SIN}(x)}{\mathrm{COS}(x)}$$

4.17.9 TAN2SC2

TAN2SC2 tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TAN2SC2 transforma esa expresión sustituyendo:

tan(x) por $\frac{\sin(2 \cdot x)}{1+\cos(2 \cdot x)}$

Teclee:

TAN2SC2(TAN(X))

Obtiene:

$$\frac{\mathrm{SIN}(2 \cdot X)}{1+\mathrm{COS}(2 \cdot X)}$$

4.17.10 TCOLLECT

TCOLLECT tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TCOLLET transforma en lineal una expresión en función de sin(n·x) y cos(n·x) y agrupa en modo real los senos y los cosenos del mismo ángulo.

Teclee:

TCOLLECT(SIN(X) + COS(X))

Obtiene:

$$\sqrt{2} \cdot \mathrm{COS}(X - \frac{\pi}{4})$$

4.17.11 TEXPAND

TEXPAND tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TEXPAND desarrolla esa expresión en función de sin(x) y cos(x).

Ejemplo 1:

Teclee:

TEXPAND(COS(X + Y))

Obtiene:

COS(Y)·COS(X) – SIN(Y)·SIN(X)

Ejemplo 2:

Teclee:

$$\text{TEXPAND}(\text{COS}(3\cdot X))$$

Obtiene:

$$4\cdot \text{COS}(X)^3 - 3\cdot \text{COS}(X)$$

Ejemplo 3:

Teclee:

$$\text{TEXPAND}(\frac{\text{SIN}(3\cdot X)+\text{SIN}(7\cdot X)}{\text{SIN}(5\cdot X)}$$

Después de una simplificación (ENTER) obtendrá:

$$4\cdot \text{COS}(X)^2 - 2$$

4.17.12 TLIN

TLIN tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TLIN transforma en lineal esa expresión en función d sin(n·x) y cos(n·x)

Ejemplo 1:

Teclee:

TLIN(COS(X)·COS(Y))Obtiene:

$$\frac{1}{2}\cdot \text{COS}(X-Y)+\frac{1}{2}\cdot \text{COS}(X+Y)$$

Ejemplo 2:

Teclee:

$$\text{TLIN}(\text{COS}(X)^3\ )$$

Obtiene:

$$\frac{1}{4}\cdot \text{COS}(3\cdot X)+\frac{3}{4}\cdot \text{COS}(X)$$

Ejemplo 3:

Teclee:

$$\text{TLIN}(4\cdot \text{COS}(X)^2 - 2$$

Obtiene:

$$2\cdot \text{COS}(2\cdot X)$$

4.17.13 TRIG

TRIG tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TRIG simplifica esa expresión con la ayuda de $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

Teclee:

$$\mathrm{TRIGCOS}(\mathrm{SIN}(X)^4 + \mathrm{COS}(X)^2 + 1)$$

Obtiene:

$$2$$

4.17.14 TRIGCOS

TRIGCOS tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TRIGCOS simplifica esa expresión favoreciendo los cosenos con la ayuda de $\sin(x)^2 + \cos\,(x)^2 = 1$

Teclee:

$$\mathrm{TRIGCOS}(\mathrm{SIN}(X)^4 + \mathrm{COS}(X)^2 + 1)$$

Obtiene:

$$\mathrm{COS}(X)^4 - \mathrm{COS}(X)^2 + 2$$

4.17.15 TRIGSIN

TRIGSIN tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TRIGSIN simplifica una expresión favoreciendo los senos con la ayuda de $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

Teclee:

$$\mathrm{TRIGCOS}(\mathrm{SIN}(X)^4 + \mathrm{COS}(X)^2 + 1)$$

Obtiene:

$$\mathrm{COS}(X)^4 - \mathrm{COS}(X)^2 + 2$$

4.17.16 TRIGTAN

TRIGTAN tiene como argumento una expresión trigonométrica.

TRIGTAN simplifica una expresión favoreciendo las tangentes con la ayuda de $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

Teclee:

$$\text{TRIGTAN}(\text{SIN}(X)^4 + \text{COS }(X)^2 + 1)$$

Obtiene:

$$\frac{2 \cdot \text{TAN}(X)^4 + 3 \cdot \text{TAN}(X)^2 + 2}{\text{TAN}(X)^4 + 2 \cdot \text{TAN}(X)^2 + 1}$$

5 Ejercicios Realizados con la HP 40

5.1 Introduccion

Para comenzar selecciones CAS:

Pulsando F6 para CAS del menú principal.

Los comando usados en este capítulo están:

ALGB (CFG DEF FACTOR SUBST TEXPAND)

DIFF (DERIVX DERIV INTVX INT LIMIT TABVAR)

REWRITE (DISTRIB LIN POWEXPAND XNUM)

SOLV (LINSOLV)

y en el menú de la tecla MATH:

Complex (DROITE RE IM),

Integer (IEGCD ISPRIME? PROPFRAC).

La calculadora tiene que estar en modo algebraico real exacto: para ello pulse ALG del menú principal y marque CFG, a continuación OK del menú.

A continuación tiene que elegir Default CFG y pulsar OK, también puede Ud. si lo prefiere elegir el modo Direct o el modo paso a paso(Step/Step), quitar ese menú de configuración con ENTER. ¡¡¡seguro que se nos olvidará, es necesario recordárselo!!!

En este apartado encontrará diferentes pruebas de matemáticas de selectividad y ejercicios para bachillerato.

Hemos intentado implementar el mayor número de cosas en la HP 40G…aún así el alumno es el que debe justificar los cálculos y conocer las razonamientos a seguir cuando tenga el modo paso a paso activo…

5.2 Ejercicios para Bachillerato

5.2.1 EJERCICIO 1

A es igual a:

$$\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}$$

Aparecerá cada paso del cálculo y obtendrá el resultado de A que es una fracción irreductible.

Introduzca en el editor de ecuaciones el valor de A:

3 ÷ 2 ▹ – 1▹ ▹ ÷ 1 ÷ 2 ▹ + 1

▹ Seleccione el denominador.

ENTER efectúa la simplificación del denominador, Obtiene:

$$\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}}$$

Seleccione el numerador con◃.

ENTER simplifica el numerador, obtiene:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

Δ selecciona toda la fracción y ENTER la simplifica, obtiene:

$$\frac{1}{3}$$

5.2.2 EJERCICIO 2

Consideramos C igual:

$$C = 2\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - 6\sqrt{3}$$

Escriba C del modo $\sqrt[d]{5}$, siendo d un número entero.

Introduzca el valor de C en el editor de ecuaciones:

$2\sqrt{45}$ ▷▷ $3\sqrt{12}$ ▷▷ $-\sqrt{20}$ ▷▷ $-6\sqrt{3}$

▷▷▷ seleccione $-6\sqrt{3}$ y

◁ seleccione $-\sqrt{20}$

∇∇seleccione 20

Llame el comando FACTOR que se encuentra en el menú ALGB, pulse ENTER para descomponer 20 en
$2^2 \cdot 5$,

Δ seleccione $\sqrt{3^2 \cdot 5}$ y ENTER devuelve $\sqrt[2]{5}$

▷ seleccione $-\sqrt[2]{5}$

SHIFT◁ intercambia $\sqrt[3]{12}$ y $-\sqrt[2]{5}$

◁ seleccione $\sqrt[2]{45}$

∇∇seleccione 45

llame el comando FACTOR situado en el menú ALGB pulse ENTER para descomponer 45 en $3^2 \cdot 5$

Δ seleccione $\sqrt{3^2 \cdot 5}$ y ENTER sustituye $\sqrt{3^2 \cdot 5}$ por $3 \cdot \sqrt{5}$

Δ seleccione $2 \cdot \sqrt[3]{5}$

SHIFT▷ seleccione $2 \cdot \sqrt[3]{5}$ y $--\sqrt[2]{5}$ y ENTER efectúa la operación

Obtiene:

$\sqrt[4]{5}$

queda por transformar $\sqrt[3]{12}$ y ver que simplifica con $-\sqrt[6]{3}$

Finalmente:

$C = \sqrt[4]{5}$

5.2.3 EJERCICIO 3

Consideramos $D = (3x - 1)^2 - 81$

1. Desarrollar y reducir D
2. Descomponer D
3. Resolver la ecuación: $(3x - 10)(3x + 8) = 0$
4. Calcular D para $x = -5$

1. Escriba D en el editor de ecuaciones:

Teclee:

3X – 1 ▹▹ x^y 2▹ –81

Seleccione $(3X - 1)^2$ (▹ ◃) y ENTER desarrollará esta expresión. Obtiene:

$9x^2 - 6x + 1 - 81$

Para activar el paso a paso aplique:

POWEXPAND $(3X - 1)^2$ y aplique DISTRIB al resultado para obtener:

$9X^2 - 6X + 1$

Δ selecciona toda las expresión y ENTER reduce a :

$9X^2 - 6X - 80$

2. Hay que buscar D en la historia (tecla HOME) se selecciona D y se valida con ENTER.

Llame a la función FACTOR y obtiene:

$(3x + 8)(3x - 10)$

También podríamos haber seleccionado 81 para descomponerlo en 34 y reconocer la diferencia de dos cuadrados.

3. Llame el comando SOLVEX y ENTER devuelve:

$$X = -\frac{8}{3} \text{ OR } X = \frac{10}{3}$$

4. Busque D en el historial (tecla HOME) selecciónelo y valide con ENTER.

Llame la función SUBST, complete el segundo argumento:

X = –5 y ▹▹▹ para seleccionar todo y ENTER.

Obtiene:

$(3\cdot(-5) - 1)^2 - 81$ y ENTER le dará el resultado: 175

D = 175

5.2.4 EJERCICIO 4

Un pastelero prepara dos tipos de cajas surtidas con barquillos y con pastas.

En una de las cajas coloca 17 pastas y 20 barquillos.

En la segunda caja coloca 10 pastas y 25 barquillos.

Estas cajas se venden por 90F.

Calcular el precio de una pasta y de un barquillo

Llamamos x al precio de una pasta y un barquillo

$$\begin{cases} 17x + 20y & = 90 \\ 10x + 20y & = 90 \end{cases}$$

Introduzca en el editor de ecuaciones:

LINSOLVE (17·X + 20·Y – 90 AND 10·X + 25·Y – 90· X AND Y)

con el modo paso a paso obtiene:

$$L_2 = 17L_2 - 10L_1$$

$$\begin{bmatrix} 17 & 20 & -90 \\ 10 & 25 & -90 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = 45L_1 - 4L_2$$

$$\begin{bmatrix} 17 & 20 & -90 \\ 0 & 225 & -630 \end{bmatrix}$$

$$\text{Reduction Result:}$$

$$\begin{bmatrix} 765 & 0 & -90 \\ 0 & 225 & -630 \end{bmatrix}$$

y ENTER le da el resultado:

$$(X = 2) \text{ AND } (Y = \frac{14}{5})$$

seleccione $\frac{14}{5}$, pulse NUM o llame a la función XNUM y obtendrá:

(x = 2) AND (y = 2.8)

¡CUIDADO! Ud. ha pasado a modo Approx, vuelva al modo Exact con CFG.

El precio de una pasta es de 2 francos y el del barquillo de 2.80 francos.

5.2.5 EJERCICIO 5

El plano con un sistema de coordenadas ortonormal (O,i,j) y la unidad de longitud es el centímetro. Llamamos A Y B a los puntos cuyas coordenadas son:

A(–1;3) y B (–3; –1)

1. Calcular A y B introduciendo su valor exacto en centímetros
2. Determinar la ecuación droite AB.

Primer método:

Teclee:

STORE ((–1,3), QUOTE (A))

STORE ((–3,–1), QUOTE (B))

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como coordenadas B –A.

1. Teclee:

ABS (B – A)

Obtiene:

$$2\sqrt{5}$$

2. Teclee:

DROITE (A,B)

Obtiene:

Y = 2·x + 5

o segundo método:

1. Teclee directamente:

(–3,–1) – (–1,3)

Obtiene:

–2 –4·*i*

Teclee:

ABS (–2 –4·*i*)

Obtiene:

$$2\sqrt{5}$$

2. Teclee:

DROITE ((–1,3),(–3,–1))

Obtiene:

y = 2·(x – –1) + 3

y ENTER le dará:

y = 2·x + 5

5.3 Ejercicios DE selectividad

5.3.1 EJERCICIO 1

El objetivo de este ejercicio es trazar una curva Γ descrita por M cuyos afijos $\frac{1}{2}\cdot z^2 - z$ cuando m de afijo z describe el círculo C de centro O y de radio 1. Sea t un número real de (-p,π) y m el punto de C afijo $z = e^{i\cdot t}$.

1. Calcule las coordenadas de M:

Primero se introduce la expresión: $\frac{1}{2}\cdot z^2 - z$ en el editor de ecuaciones.

Teclee en el editor de ecuaciones:

$$alpha\ Z\ x^y\ 2 \triangleright \div 2 \triangleright - alpha\ Z \triangleright \triangleright$$

La expresión $\frac{Z^2}{2} - Z$ es seleccionada.

Como z = e $^{i\cdot t}$ se llama a la función SUBST y se completa el segundo argumento:

$$\mathrm{SUBST}(\frac{Z^2}{2} - Z, Z = \mathrm{EXP}(i \times t))$$

La solución:

$$\frac{\mathrm{EXP}(i\cdot t)^2}{2} - \mathrm{EX}P(i\cdot t)$$

Convertimos la función a lineal llamando LIN

La solución es:

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{EXP}(2\cdot i\cdot t)+-1\cdot \mathrm{EX}P(i\cdot t)$$

a continuación llamamos a STORE:

$$\mathrm{STORE}(\frac{1}{2}\cdot \mathrm{EX}P(2\cdot i\cdot t)+-1\cdot \mathrm{EX}P(i\cdot t),\mathrm{QUOTE}(M))$$

ENTER

Se busca la parte real de esa expresión con :

RE

La solución es:

$$\frac{\mathrm{COS}(t\cdot 2)-2\cdot \mathrm{CO}S(t)}{2}$$

Se define la función x(t) con DEF:

CUIDADO hay que escribir X(T) y cambiar X(T) y la expresión $\frac{\mathrm{COS}(t\cdot 2)-2\cdot \mathrm{COS}(t)}{2}$ seleccionando X (t) con ▷ y a continuación se pulsa SHIFT ◁ para hacer el cambio.

Obtiene:

$$\mathrm{DEF}(X(t)=\frac{\mathrm{CO}S(t\cdot 2)-2\cdot \mathrm{COS}(t)}{2})$$

ENTER

Para buscar la parte imaginaria pruebe con:

IM(M)

La solución es:

$$\frac{\mathrm{SIN}(t\cdot 2)-2\cdot \mathrm{SI}N(t)}{2}$$

Defina la función y(t) (de la misma manera que x(t)):

$$\mathrm{DEF}(Y(t)=\frac{\mathrm{SIN}(t\cdot 2)-2\cdot \mathrm{SIN}(t)}{2})$$

ENTER

2. Busque un eje de simetría de Γ, para ello calcule $x(-t)$ und $y(-t)$ tecleando:

X(–*t*) ENTER

La solución es:

$$\frac{\mathrm{COS}(t\cdot 2)-2\cdot \mathrm{COS}(t)}{2}$$

tenemos: $x(-t) = x(t)$

y:

Y(–*t*) ENTER

La solución es:

$$\frac{2\cdot(-2\cdot \mathrm{SIN}(t\cdot 2)-2\cdot(-\mathrm{SIN}(t)))}{4}$$

Tenemos: $y(-t) = -y(t)$

Si $M_1(x(t), y(t))$ esta sobre T, $M_1(x(-t), y(-t))$ está también sobre Γ.

M_1 y M_2 son simétricos respecto a O_x por lo tanto deducimos que el eje O_x es un eje de simetría de Γ.

3. Cálculo de x'(*t*)

Teclee:

DERIV(X(*t*),*t*)

La solución es:

$$\frac{2\cdot(-2\cdot \mathrm{SIN}(t\cdot 2)-2\cdot(-\mathrm{SIN}(t)))}{4}$$

Después de la simplificación (ENTER).

$$-(\mathrm{SIN}(t\cdot 2) - \mathrm{SIN}(t))$$

Desarrollamos la expresión (transformación de SIN(2·*t*)), y llamamos la función TEXPAND y obtenemos:

TEXPAND(–(SIN(*t*·2) – SIN(*t*)))

ENTER

La solución es:

$$-(\mathrm{SIN}(t)\cdot 2\cdot \mathrm{COS}(t) - \mathrm{SIN}(t))$$

Con FACTOR, se descompone y obtenemos:

$$\text{FACTOR}(-(\text{SIN}(t)\cdot 2\cdot \text{COS}\ (\text{t}) - \text{SIN}(t)))$$

ENTER

La solución es:

$$-\text{SIN}(t)\cdot(2\cdot\text{COS}(t) - 1)$$

Podemos definir la función x'(t) llamando a DEF.

Es necesario escribir = X1 (*t*) y,

Cambiar X1(*t*)(▷) y pulsar SHIFT◁ para hacer el cambio.

Obtiene:

$$\text{DEF}(\text{X1}(t) = -\text{SIN}\ (t)\cdot(2\cdot\text{COS}\ (t) - 1))$$

ENTER

4. Cálculo de y'(*t*)

Teclee:

$$\text{DERIV}(\text{Y}(t),\ t)$$

La solución es:

$$\frac{2\cdot(2\cdot\text{COS}(t\cdot 2)) - 2\cdot\text{COS}(t)}{4}$$

Después de la simplificación ENTER:

$$\text{COS}(t\cdot 2) - \text{COS}(t)$$

Desarrollamos la expresión (transformación de COS (2·*t*)), usamos TEXPAND:

$$\text{TEXPAND}\ (\text{COS}\ (t\cdot 2) - \text{COS}(t))$$

ENTER

La solución es:

$$2\ \text{COS}\ (t)^2 - 1 - \text{COS}\ (t))$$

Se descompone:

$$\text{FACTOR}(2\cdot\text{COS}\ (t)^2 - 1 - \text{COS}\ (t)))$$

ENTER

La solución es:

$$(\mathrm{COS}\ (t) - 1)\cdot(2\cdot\mathrm{COS}\ (t) + 1)$$

Ahora podemos definir la función y'(t), escribimos (igual que para x'(t):

DEF(Y1(t) = (COS(t) – 1)(2·COS (t) + 1))

5. Variaciones de x(t) y de y(t)

Hay que trazar en el mismo gráfico x(t) e y(t).

Introducimos t como variable VX (teclas SHIFT SYMB (SETUP)), escribimos en el editor de ecuaciones X(t) y pulsamos ENTER y a continuación PLOT.

Seleccionamos Function en el cuadro de diálogos y F1 como destino.

Hacemos lo mismo con Y(t) pero eligiendo F2 como destino.

Quitamos CAS con la tecla ON (CANCEL) para hacer el gráfico de las funciones copiadas de esta manera, hay que colocarse en Aplet Function y se marca F1 y F2.

Hay que regular los parámetros de la ventana (SHIFT PLOT) para obtener el gráfico.

6. Trazado de la curva Γ:

Valores de x (t) y de y (t)

Obtenemos los valores de de x (t) y de y (t) para $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\cdot\pi}{3}, \pi$

Tecleando sucesivamente:

X(0) ENTER

La solución: $\frac{-1}{2}$

X($\frac{\pi}{3}$) ENTER

La solución: $\frac{-3}{4}$

X($2\times\frac{\pi}{3}$) ENTER

La solución: $\frac{1}{4}$

X(π)ENTER

La solución: $\frac{3}{2}$

Y(0) ENTER

La solución: 0

Y($\frac{\pi}{3}$) ENTER

La solución: $-\sqrt{3/4}$

Y($2\times\frac{\pi}{3}$) ENTER

La solución: $-3\cdot\sqrt{3/4}$

X(π)ENTER

La solución: 0

Pendientes de las tangentes $(m=\frac{y'(t)}{x'(t)})$

Obtenemos los valores de $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ para $t=0,\frac{\pi}{3},\frac{2\cdot\pi}{3},\pi$ tecleando sucesivamente:

LIMIT($\frac{Y1(t)}{X1(t)}, t=0$) ENTER

La solución: 0

LIMIT($\frac{Y1(t)}{X1(t)}, t=\pi\div 3$) ENTER

La solución: 8

LIMIT($\frac{Y1(t)}{X1(t)}, t=2\times\pi\div 3$) ENTER

La solución: 0

$$\text{LIMIT}(\frac{Y1(t)}{X1(t)}, t=\pi)\ \text{ENTER}$$

La solución: ∞

Las variaciones de x(t) y de y(t)

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	-	0	+	?	+	0
$x(t)$	$\frac{-1}{2}$	↓	$\frac{-3}{4}$	↑	$\frac{1}{4}$	↑	$\frac{3}{2}$
$y(t)$	0	↓	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↓	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	↑	0
$y'(t)$	0	-	?	-	0	+	?
m	0		∞		0		∞

Curva Γ:

Hacemos el trazado paramétrica.

Introduzca X(t) + $i \times$ Y (t) en el editor de ecuaciones y pulse ENTER.

Teclee:

PLOT y selecciones Parametric en el cuadro de diálogo y X1, Y1 como destino. Salga de CAS con la tecla ON (CANCEL),para realizar el gráfico de la curva Γ se lanza: Aplet Parametric.

5.3.2 EJERCICIO 2 (de especialidad)

Se define para n, número entero natural:

$$a_n = 4\times10^n - 1,\ b_n = 2\times10^n - 1,\ c_n = 2\times10^n + 1$$

Teclee:

$$\text{DEF}(A(N) = 4\cdot10^{\text{n}} - 1)$$

$$\text{DEF}(B(N) = 2\cdot10^{\text{n}} - 1)$$

$$\text{DEF}(C(N) = 2\cdot10^{\text{n}} + 1)$$

a) Cálculo de $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$:

Basta con teclear:

A (1) La solución: 39

B (1) La solución: 19

C (1) La solución: 21

A (2) La solución:399

B(2) La solución: 199

C(2) La solución: 201

A(3) La solución: 3999

B(3) La solución: 1999

C(3) La solución: 2001

b) número de cifras y divisibilidad.

Aquí la calculadora sólo hace pruebas para diferentes valores de n…

Sabemos que los números enteros n verifican:

$$10^{n} \leq n < 10^{n+1}$$

Tienen (n + 1) cifras en la escritura decimal.

Tenemos:

$$3 \cdot 10^{n} < a_n < 4 \cdot 10^{n}$$
$$10^{n} < b_n < 2 \cdot 10^{n}$$
$$2 \cdot 10^{n} < c_n < 3 \cdot 10^{n}$$

Donde a^n, b^n, c^n, tienen (n + 1) cifras de la escritura decimal.

Además $d^n = 10^{n-1}$ es divisible por 9, ya que su escritura decimal solo consta de 9.

Tenemos

$$a_n = 3 \cdot 10_n + d_n$$

y

$$c_n = 3 \cdot 10_n - d_n$$

Por lo tanto an y cn son divisibles por 3.

c) b3 es un número primo.

Teclee:

ISPRIME?(B(3))

Obtiene:

1

que quiere decir verdadero

Para demostrar que b3 = 1999 es primo hay que probar que 1999 es divisible por todos los números primos inferiores a iguales a $\sqrt{1999}$.

Como1999 < 2025 = 45^2 comprobamos la divisibilidad de 1999 con n = 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41.

1999 no es divisible por ninguno de esos números por lo que podemos decir que es primo.

d) $a_n = b_n \times c_n$

Teclee:

B(N)·C(N)

Obtiene:

$$4 \cdot (10^N)^2 - 1$$

que es el valor de an

Descomposición en factores primos de a6

Teclee:

FACTOR (A(6))

Obtiene:

3·23·29·1999

e) b_n y c_n son primos entre sí

Aquí la calculadora solo hace pruebas para los diferentes valores de n …

Para demostrar que b^n y c^n son primos entre si hay que señalar que:

$$c_n = b_n + 2$$

Los divisores comunes a b^n y cn son los divisores comunes a b^n y 2. También son los divisores comunes a 2.b^n y c^n y 2 son primos entre si porque bn es un número primo diferente a 2. por lo tanto.

$$PGCD(c_n, b_n) = PGCD(c_n, 2) = PGCD(b_n, 2) = 1$$

2. Considerando la siguiente ecuación:

$$b_3 \cdot x + c_3 \cdot y = 1$$

a) Como se trata de la identidad de Bézout, hay como mínimo una solución.

El teorema de Bézout dice:

Si a y b son primos entre si, x e y verifican:

$$a \cdot x + b \cdot y = 1$$

Por lo tanto la ecuación:

$$b_3 \cdot x + c_3 \cdot y = 1$$

tiene como mínimo una solución.

b) Teclee:

IEGCD (B(3), C(3))

Obtiene:

1000 AND –9999 = 1

Tenemos:

$$b_3 \times 1000 + c_3 \times (-999) = 1$$

Tenemos por lo tanto una solución particular:

x = 1000, y = –999

A mano escriba:

$$c_3 = b_3 + 2 \text{ y } b_3 = 999 \times 2 + 1$$

$$b_3 = 999 \times (c_3 - b_2) + 1$$

$$b_3 \times 1000 + c_3 \times (-999) = 1$$

c) Aquí, la calculadora no puede encontrar la solución general.

Tenemos:

$$b_3 \cdot x + c_3 \cdot y = 1$$

y

$$b_3 \times 1000 + c_3 \times (-999) = 1$$

Por sustracción tenemos:

$$b_3 \cdot (x - 1000) + c_3 \cdot (y + 999) = 0$$

Obtenemos.

$$b_3 \cdot (x - 1000) + c_3 \cdot (y + 999) = 0$$

Según el Teorema de Gauss: c3 es primo con b3, por lo tanto c3 es primo con b3 por lo tanto c3 divide (x –1000).

Existe k Є Z tal que:

$$(x - 1000) = k \times c_3$$

y

$$-(y + 999) = k \times b_3$$

Recíprocamente,

$$x = 1000 + k \times c_3$$

y

$$y = -999 - k \times b_3 \text{ para } k \in Z$$

Tenemos:

$$b_3 \cdot x + c_3 \cdot y = b_3 \times 1000 + c_3 \times (-999) = 1$$

La solución general para todo k Є Z es:

$$x = 1000 + k \times c_3$$

$$y = -999 - k \times b_3$$

5.3.3 EJERCICIO 2 (No es de la Especialidad)

Antes de empezar cerciórese que está Ud. en modo real exacto, siendo x la variable real, si no es el caso seleccione Default cfg de CFG.

Consideramos la sucesión

$$u_n = \int_0^2 \frac{2x+3}{x+2} e^{\frac{x}{n}} dx$$

1. variación de: $g(x) = \frac{2x+3}{x+2}$ Para $x \in [0,2]$

Teclee:

$$\text{DEF}(G(X) = \frac{2X+3}{X+2})$$

y:

TABVAR (G(X))

Obtiene:

$$\begin{array}{cccccc} -\infty & + & -2 & + & +\infty & X \\ 2 & \uparrow & \infty & \uparrow & 2 & F \end{array}$$

La primera línea nos da el signo de g'(x) según x, y la segunda línea las variaciones de g(x). Cabe destacar que para TABVAR la función se llama siempre F.

De ello se deduce que g(x) es creciente en (0,2)

Si está Ud. en modo paso a paso (para ello tiene que validar STEP/STEP con el OK del menú principal de CFG) obtendrá entonces (aunque esta función siempre se llamará F):

$$F =: \frac{2 \cdot X + 3}{X + 2}$$

y ENTER

$$F' =: \frac{2 \cdot (X+3) - (2 \cdot X + 3)}{SQ(X+2)}$$

Usando la flecha ∇ para mover la pantalla

$$\rightarrow \frac{1}{(X+2)^2}$$

Pulse ENTER para obtener el cuadro de variaciones.

Si no está en modo paso a paso también puede introducir el cálculo de la derivada introduciendo:

DERVX (G(X))

Obtendrá el cálculo anterior.

Calcule g(0) y g(2), para ello introduzca:

G(0)

La solución: $\frac{3}{2}$

G(2)

La solución: $\frac{7}{4}$

$$\frac{3}{2} \leq g(x) \leq \frac{7}{4} \quad para\ x \in [0,2]$$

2. en este caso la calculadora no puede hacer nada…hay que especificar que $e^{x/n} \geq 0$ para x Є [0,2]

para demostrar que para x Є [0,2] para obtener la desigualdad:

$$\frac{3}{2}e^{\frac{x}{n}} \leq g(x)e^{\frac{x}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{x}{n}}$$

c/ integre la desigualdad anterior, introduzca:

$$\int_0^2 e^{\frac{X}{N}} dX$$

Obtiene:

$$N \cdot e^{\frac{2}{N}} - N$$

Deducimos:

Para justificar el cálculo anterior hay que especificar que una primitiva de ex/n es n·ex/n

Si no lo sabe puede introducir

$$\mathrm{INTVX}(\mathrm{EXP}(\frac{X}{N}))$$

La solución es: $(ne^{\frac{2}{n}} - n)$

3. Límite de $(ne^{\frac{2}{n}} - n)$ cuando n tiende $n \to +\infty$

$$\mathrm{LIMIT}(N \cdot \mathrm{EXP}(\frac{2}{N}) - N, N = +\infty)$$

Obtiene:

$$2$$

CUIDADO:

Ahora la variable VX es igual a N, use las teclas SHIFT SYMB (SETUP) para colocar VX en X.

Para justificar este resultado, tiene que saber:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

y entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} = 1$$

Obtiene:

$$\lim_{x \to +\infty} (e^{\frac{2}{n}} - 1) \cdot n = 2$$

Si L existe, haciendo que n tienda a +8 en las desigualdades de 1b/ se obtiene:

$$\frac{3}{2}\cdot 2 \le L \le \frac{7}{4}\cdot 2$$

a) $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x+2}$ y calcular $I = \displaystyle\int_0^2 g(x)dx$

Teclee:

PROPFRAC (G(X))

Obtiene:

$$2 - \frac{1}{x+2}$$

para calcular la integral de I introduzca:

$$\int_0^2 G(X)dX$$

Obtiene:

–(LN(2) – 4)

A mano, tenemos 2x + 3 = 2(x + 2) –1 por lo tanto

$$g(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$$

Se integra término a término entre 0 y 2,Obtiene:

$$\int_0^2 g(x)dx = \left[2x - \ln(x+2)\right]_{x=0}^{x=2}$$

ya que ln4 = 2ln2, Obtiene:

$$\int_0^2 g(x)dx = 4 - \ln 2$$

b) la calculadora hay que especificar que $e^{\frac{x}{n}}$ es creciente para $x \in [0,2]$ y se obtiene la desigualdad:

$$1 \leq e^{\frac{x}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$$

mediante la multiplicación como g(x) es positivo [0, 2]Obtiene:

$$g(x) \leq g(x)e^{\frac{x}{n}} \leq g(x)e^{\frac{2}{n}}$$

Integrando obtendremos:

$$I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$$

c) convergencia de Un.

Buscar el límite de $e^{\frac{2}{n}}$ cuando $n \to +\infty$:

$$\text{LIMIT}(\text{EXP}(\frac{2}{N}), N = +\infty)$$

Obtiene:

$$1$$

$\frac{2}{n}$ tiende a 0 cuando n tiende +∞ entonces $e^{\frac{2}{n}}$ tiende a $e^0 = 1$ cuando n tiende a +∞.

cuando n tiende +∞, u_n está comprendido entre I y una cantidad que tiende hacia I (véase desigualdad 2b)).

Por lo tanto u_n es convergente y su límite vale I.

Hemos demostrado que:

$$L = I = 4 - \ln 2$$

5.4 Conclusión

Vemos que un buen manejo de la calculadora nos permite resolver muchas cuetiones.

Aunque cuando se trata de aritmética hay que realizar más razonamientos : la calculadora sirve para hacer las comprobaciones.

6 Programación

6.1 Implementación

6.1.1 Como Editar y Grabar

Pulse las teclas SHIFT 1 (PROGRAM) para tener acceso al catálogo de los programas.

En la pantalla aparecerá una lista con los programas disponibles y el menú principal (EDIT NEW SEND RECV RUN).

Para escribir un nuevo programa pulse F2(NEW).

Le pedirá el nombre del programa: CUIDADO!! Ud. no está en modo Alpha, para pasar a ese modo pulseF4 (A…Z).

Escriba el nombre y pulse F6 (OK)

Ya está Ud. en el programa y su trabajo se grabará automáticamente cuando salga del editor de ecuaciones pulsando HOME o SHIFT 1 (PROGRAM)

6.1.2 Como corregir un Programa

Si la sintaxis no es correcta, en la calculadora aparecerá:

Invalid Syntax Edit program? Conteste F6 (YES)

El cursor se coloca automáticamente en el lugar donde el compilador ha detectado el error. Solo tiene que corregirlo!!!

6.1.3 Como Ejecutar un Programa

Para ejecutar un programa, abra la lista de programación pulsando las teclasSHIFT1(PROGRAM).

Aparecerá en la pantalla la lista de los programas disponibles y el menú EDIT NEW SEND RECV RUN.

Seleccione el programa a ejecutar y pulse F6 (RUN).

6.1.4 Como Modificar un Programa

Para modificar un programa (sin guardar el antiguo) abra el catálogo de programas pulsando SHIFT 1 (PROGRAM) aparecerá la lista de los programas disponibles y el menú EDIT NEW SEND RECV RUN.

Seleccione el programa que quiere modificar y pulse F1(EDIT)

Si Ud. quiere conservar el nuevo y el antiguo programa debe:

abrir el catálogo de programas (SHIFT 1(PROGRAM))

Pulsar F2 (NEW) introducir el nombre del programa y pulsar F6 (OK)

El editor se abre, pulse VARS y a continuación la letra para seleccionar Program.

Con la ayuda de las flechas seleccione el programa que quiere modificar y pulse F4 (VALUE) (para seleccionar VALUE del menú) y F6 (OK).

De esta manera copiará el texto del programa en el editor.

6.2 Comentarios

Debe acostumbrarse a documentar sus programas.

En los cálculos algorítmicos un comentario empieza por // y acaba con un punto y aparte.

Para la HP 40Gun comentario empieza por @ y acaba por un punto y aparte o se rodea de dos @.

CUIDADO!!!

No olvide poner un espacio después de @.

El carácter @ se obtiene pulsando shift VAR (CHARS).

Seleccione ese carácter pulsando ECHO 1 del menú principal.

6.3 Las Variables

6.3.1 Sus Nombres

Son los lugares donde se almacenan los valores, números, expresiones, objetos.

Con la HP 40G, en programación sólo se pueden utilizar las 26 letras del abecedario para almacenar números reales.

6.3.2 Nociones Sobre Variables Locales

En la calculadora HP 40G no existen variables locales. Sólo se pueden utilizar variables globales.

6.3.3 Nociones de Parametros

Cuando se escribe un programa en la HP 40G no se le pueden pasar parámetros

Por consiguiente no se podrán escribir funciones que contengan parámetros, con el lenguaje de programación de la HP 40G.

7 Entradas

7.1.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Para que el usuario pueda introducir un valor en la variable A durante la

ejecución de un programa, deberá escribir, el cálculo algoritmico:

saisir A

y para introducir los valores en A y B escribirá:

saisir A,B

7.1.2 Traduccion HP 40G

INPUT A:" TITRE"; "A";;0:

Si el hecho de tener que escribir todos estos puntos y comas en el INPUT le resulta engorroso, se puede utilizar PROMPT

PROMPT A: Abre una ventana que le pedirá que introduzca el valor de A.

Los programas escritos a continuación, antes de la existencia de PROMPT, utilizan el sub-programa IN que le permite introducir dos valores en A y B.

7.2 las Salidas

7.2.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

En el cálculo algorítmico se escribe:

Afficher "A=", A

7.2.2 Traduccion en la HP 40G

DISP 3 ; "A=" A : 3 representa el número de la línea donde A será visualizada

o

MSGBOX "A=" A :

7.3 Secuencia de Instrucciones o Acción

Una acción es una secuencia con una o varias instrucciones.

7.3.1 traduccion en los Calculos Algoritmicos

Cuando se utiliza el lenguaje algorítmico se usa el espacio en blanco o el punto y aparte para terminar una instrucción.

7.3.2 Traduccion en la HP 40G

:indica el final de una instrucción

7.4 La Instrucción de Asignación

La asignación se usa para almacenar un valor o una expresión o una variable.

7.4.1 traduccion en los calculos algoritmicos.

Escribiremos por ejemplo:

2 * A – > B para almacenar 2 * A en B

7.4.2 Traduccion en la HP 40G

La flecha se obtiene con la letra STO▹ del menú principal.

Escribiremos por ejemplo:

2 * A STO▹ B

7.5 Las Instrucciones Condicionales

7.5.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Si condition entonces

action

fsi

si condition entonces

action1 si no

action2

fsi

Ejemplo:

Si A = 10 ó A<B entonces

B – A->B si no

A – B->A

Fsi

7.5.2 Traduccion en la HP 40G

IF condition THEN

action:

END:

IF condition THEN

action1 : ELSE

action1 :

END :

CUIDADO CON == para traducir la condicional de igualdad.

Ejemplo:

IF A== 10 OR A<B THEN

B-A STO▹ B: ELSE

A-B STO▹ A:

END:

7.6 Las instrucciones “Para”

7.6.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Para I d e A a B hacer action fpara

Para I d e A a B (paso p) ejcutar action fpara

7.6.2 Traduccion en la HP 40G

FOR I = A TO B STEP 1 ; action : END :

FOR I = A TO B STEP P ; action : END :

7.7 La Instrucción “Mientras”

7.7.1 Traduccion en los calculos algoritmicos

Mientras condition ejecutar action fmientras

7.7.2 Traduccion en la HP 40G

WHILE condition REPEAT action : END:

7.8 Las Expresiones Booleanas

Una condición es una función que tiene como valor un booleano, el valor es verdadero o falso.

7.8.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Expresar una condición simple se utilizan los operadores:

= > > ≤ ≥ ≠

7.8.2 Traduccion en la HP 40G

CUIDADO, para la calculadora HP 40G la igualdad se escribe = =

7.9 Operadores Logicos

7.9.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Para traducir condicionales complejas, se usan los operadores lógicos:

ó y no

7.9.2 Traduccion en la HP 40G

ó y no se traducen en la HP 40G por OR AND NOT

7.10 Las Listas

7.10.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

En cálculos algorítmicos se usan las llaves { } para delimitar una lista.

Por ejemplo{ } representa la lista vacía y {1,2,3 } es una lista de 3 elementos.

El signo + se usa para unir dos listas, o una lista y un elemento, o un elemento y una lista:

{1, 2, 3} -> TAB

TAB + 4 -> TAB (ahora TAB vale {1, 2, 3, 4}

TAB [2] es el segundo elemento deTAB, en este caso 2.

7.10.2 Traduccion en la HP 40G

Las variables de listas tienen como nombre: L0, L1, L2…L9
Se usan las llaves { } para delimitar una lista.

Por ejemplo{1,2,3 } es una lista de 3 elementos.

Pero { } no es una lista vacía, debe usar el comando CLEAR L1 para iniciar la lista L1 como vacía.

Comandos útiles:

L1(I) designa el elemento de posición I.

CONCAT (L1, {5}) nos indica una lista que contiene el elemento 5 además de los elementos de la lista L1.

También puede utilizar:

AUGMENT (L1,5) indica una lista que contiene el elemento 5 además de los elementos de la lista L1

SUB L2:L1;2;4 es un comando que meten en L2 los elementos de L1 con los índices de 2 hasta 4.

CUIDADO: La diferencia entre funciones y comandos:

Las funciones devuelven un valor, tienen argumentos que están entre paréntesis y se separan por comas, mientras que los comandos no devuelven valores, sus argumentos se escriben después del nombre del comando y se separan por punto y coma.

7.11 Un Ejemplo: la Criba de Eratóstenes

7.11.1 Descripcion

Buscar los números primos inferiores o iguales a N:

2 Escribimos los números de uno a N en una lista.

5. Tachamos 1 y ponemos 2 en la casilla P.
6. Si P.P ≤ N hay que manejar los elementos de P a N
7. Tachamos todos los múltiplo de P a partir de P.P.
8. Aumentamos P de 1
9. Si P.P es inferior o igual a N, quedan los elementos no eliminados de P a N para trabajar con ellos.
10. Llamamos P al elemento más pequeño no eliminado de la lista.
11. Se repiten los puntos 3 4 5 mientras que P.P sigue siendo inferior o igual a N.

7.11.2 Escritura del Calculo Algoritmico

función crible (N)

local TAB PREM I P

/ / GAB y PREM son dos listas:

{ } -> TAB

{ } -> PREM

para I de 2 a N ejecutar

TAB+1 -> TAB

fpour

0 + TAB -> TAB

2-> P

/ / se hacen los puntos 1 y 2

/ / eliminar 1ha sido ejecutado se sustituye por 0

/ / TAB es la lista 0 2 3 4 …N

mientras P*P ≤ N ejecutar

```
  para I de P en E(N/P) ejecutar
    //E(N/P) representa la parte entera de  N/P
     0 -> TAB [I*P]
   /fpara/
/ / se han eliminado todos los múltiplos de P a partir de P*P
  P+1-> P
/ / se busca el número más pequeño < = N no eliminado
/ / entre P y N
   mientras que (P*P ≤ N) y (TAB[P] = 0) ejecuta
       P + 1 -> P
   mientras que
 mientras que
// se escribe el resultado en una lista PREM
para I de 2 a N ejecutar
 si TAB[I] ≠ 0 so
  PREM + I -> PREM
  /fsi/
/fpara/
resultado: PREM
```

7.11.3 Traduccion en la HP 40G

Programa CRIBLE:

El usuario debe introducir el valor de N.

Al final la lista L2 contendrá los números primos inferiores o iguales a N.

```
INPUT N;″ CRIBLE″;″N=″; ;10:

ERASE:
MAKELIST(I,I,1,N,1) -> L1:
```

```
0 -> L1(1):
2 -> P:
WHILE P*P ≤ N REPEAT
    FOR I = P TO INT(N/P) STEP 1 ;
        0 ->L1(I*P):
END:
DISP 3;″ ″L1:
P+1->P:
WHILE P*P ≤ N AND L1(P) == 0 REPEAT
    P+1->P:
   END:
END:
{2} ->L2:
© 2 es primo
FOR I=3 TO N STEP 1;
  IF L1(I) ≠ 0 THEN
     CONCAT(L2,{I}) ->L2:
     END:
END:
DISP 3 ;″PREPPM″ L2:
FREEZE:
```

8 Programas de Aritmetica

8.1 EL MCD y el Algoritmo de Euclides

Calcular el MCD de dos números enteros positivos A y B.

El algoritmo de Euclides se basa en la definición recursiva de MCD.

MCD(A,0) = A

MCD(A,B) = MCD(B,A mod B) si$B \neq 0$

donde A mod B representa el resto de la división euclidiana de A entre B.

Descripción del algoritmo:

Se efectúan las divisiones euclidianas sucesivas:

$A = B \times Q1 + R1 \quad 0 \leq \ldots R1 < B$

$B = R1 \times Q2 + R2 \quad 0 \leq R2 < R1$

$R1 = R2 \times Q3 + 3 \quad 0 \leq R3 < R2$

Después de un número determinado de pasos existe un entero n tal que: $R^n = 0$.

Entonces obtenemos:

MCDA,B) = MCD(B, R1) = …
$MCD(R_{n-1}, R_n) = MCD(R_{n-1},0) = R_{n-1}$

8.1.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Versión iterativa

Si $B \neq 0$ se calcula R = A mod B, B con el valor de A (introduciendo B en A) y R con el valor de B (introduciendo R en B), así se vuelve a empezar hasta que B = 0, el MCD es entonces A.

Función MCD(A,B)

Local R

mientras que $B \neq 0$ ejecutar

A mod B ->R

B ->A

R ->B

/fmientras que/

resultado A

/ffonction/

Versión recursiva

Se escribe la definición recursiva vista anteriormente

Función MCD(A,B)

Si B ≠ 0 entonces

    resultado MCD(B,A mod B)

si no

     resultado A

/fsi/

/ffunción/

8.1.2 Traduccion en la HP 40G

Versión iterativa para dos números enteros.

Primero escribimos el sub-programa IN para introducir dos números A y B.

```
INPUT A;"A";;;1:
INPUT B;"B";;;1:
ERASE:
```

Se escribe el programa MCD:

```
RUN IN:
DISP 3;"MCD"{A,B}:
WHILE B ≠ 0 REPEAT

A MOD B->R:
```

```
B ->A:
R ->B:
END:
DISP 4;"NSD " A:
FREEZE:
```

Versión recursiva para dos números enteros A y B.

Con la HP 40G no podemos escribir el programa MCD:

```
DISP 3;"MCD "{A,B}:
FREEZE:

IF B ≠ 0 THEN

A MOD B ->R:
B ->A:
R ->B:
NSDR:
ELSE
DISP 3;"MCD "A:
FREEZE:
END:
```

Primero se almacenan los valores en A y B.

El programa PGCDR visualiza el MCD que se está calculando.

La llamada recursiva PGCDR nos devuelve al programa que hay que ejecutar pulsando RUN el menú principal.

El programa PGCDR visualiza los MCD intermediarios calculados.

También se puede sustituir PGCDR en el programa anterior por RUN PGCDR, para no tener que pulsar RUN del menú, y suprimir las visualizaciones intermedias, para usar ese programa en un programa que ejecute entradas y salidas:

El programa recursivo PGCDR se convierte en programa recursivo PR:

```
IF B ≠ 0 THEN

A MOD B -> R:

B -> A:

R -> B:

RUN PR:

END:
```

Se inserta el programa PR en un programa que efectúa entrada y salidas.

```
PROMPT A:

PROMPT B:

RUN PR:

ERASE:

MSGBOX A:
```

Versión iterativa para dos números complejos

Si utiliza la función de cálculo simbólico IREMAINDER en lugar de MOD de los programas precedentes, MCD (ó PR) puede entonces tener como parámetros números enteros de Gauss, siempre y cuando se sustituya los nombres de las variables A,B,R, por Z1,Z2,Z3 y cambie el test de parada.

Tenemos la versión iterativa:

```
PROMPT Z1:

PROMPT Z2:

DISP 3;"PGCD "{Z1,Z2}:


WHILE ABS(Z2) ≠ 0 REPEAT

XNUM(IREMAINDER(XQ(Z1),XQ(Z2)) ->Z3:

Z2 ->Z1:
```

```
Z3 ->Z2:

END:

DISP 4;"PGCD "Z1:

FREEZE:
```

- Versión iterativa para dos polinomios.

Las variables E1, E2,…permiten almacenar expresiones, que es lo que necesitamos para introducir polinomios!! Si se usa la expresión de cálculo simbólico REMAINDER en lugar de MOD en los programas anteriores MCD (o PR) puede entonces tener como parámetros polinomios, siempre y cuando sustituye los nombres de as variables A, B, R por E1, E2, E3 cambie el test de parada.

```
PROMPT E1:

PROMPT E2:

WHILE DEGREE(E2) ≠ -1 REPEAT


REMAINDER(E1,E2) ->E3:

E2 ->E1:

E3 ->E2:

END:

DISP 4;"PGCD "E1:

FREEZE:
```

Teclee por ejemplo:

E1 = S12 – 1 y E2 = S12 – 2 * S1 + 1, obtendrá el MCD igual a 2*S1 – 2.

8.2 Identidad de Bézout

En este apartado la función de Bézout (A,B) devuelve la lista:

{U,V,NSD(A,B)} donde U y V verifican:

$A \times U + B \times V = MCD(A,B)$.

8.2.1 Version Iterativa SIN las Listas

El algoritmo de Euclides permite encontrar una pareja U y V que verifican:

$A \times U + B \times V = MCD(A,B)$

Si damos A0 y B0 los valores de A y B inciales, obtenemos:

$A = A_0 \times U + B_0 \times V$ con $U = 1$ y $V = 0$

$B = A_0 \times W + B_0 \times X$ con $W = 0$ y… $X = 1$

Si va desarrollando A, B, U, V, W, X so, de manera que las dos relaciones antes escritas, se verifiquen siempre.

Si:

$A = B \times Q + R$ $0 \leq R < B$ ($R = A \bmod B$ y $Q = E(A/B)$)

se escribe:

$R = A - B \times Q = A_0 \times (U - W xQ) + B_0 \times (V - X \times Q) =$

$A_0 \times S + B_0 \times T$ mit $S = U - W \times Q$ und $T = V - X \times Q$

Hay que volver a empezar con:

B sustituyendo a A (B->A W->U X->V)

y R sustituyendo B (R ->B S ->W T ->X)

de donde se obtiene el algoritmo:

función Bezout (A,B)

local U,V,W, X, S, T, Q, R

1->U 0 ->V 0 ->W 1 ->X

mientras que B ≠ 0 ejecuta

A mod B ->R

E(A/B) ->Q

/ /R=A-B*Q

U-W*Q ->S

V-X*Q ->T

B->A W->U…X->V

R->B…S->W…T->X

/fmientras /

resultado {U, V, A}

/ffunción/

8.2.2 Version Iterativa con las listas

Se puede simplificar la escritura del algoritmo anterior usando las menos variables: con las listas LA LB LR para memorizar los trios.{U, V, A} {W, X, B} y {S, T, R}. Esto es muy cómodo porque las calculadoras saben añadir listas de una misma longitud (añadiendo los elementos con el mismo índice) y también saben multiplicar una lista por un número (multiplicando cada uno de los elementos de la lista por ese número).

Función Bezout (A,B).

local LA LB LR

{1, 0, A}->LA

{0, 1, B}->LB

mientras que LB [3] ≠ 0 ejecuta

LA-LB*E(LA [3] /LB[3])->LR

LB->LA

LR->LB

/fmientras que/

resultado LA

/ffunción/

8.2.3 Version recursiva con Listas

Se puede definir de una manera recursiva la función de Bézout por:

Bezout(A,0) = {1, 0, A}

Si B $\neq$ 0, hay que definir Bezout(A, B) en función de Bezout(B, R)

cuando

R = A – B $\times$ Q y Q = E(A/B).

Tenemos:

$$Bezout(B,R) = LT = \{W, X, mcd(br)\}$$

$$\text{con} \qquad W \times B \times X \times R = mcd(B,R)$$

por lo tanto:

$$W \times B + X \times (A - B \times Q) = mcd(B,R) \text{ o también}$$

$$X \times A + (W - X \times Q) \times B = mcd(A,B)$$

De dónde sacamos B $\neq$ 0 y si Bezout(B, R) = LT, tenemos:

Bezout(A, B) = {LT[2], LT[1] – LT[2] $\times$ Q, LT[3]}.

funcion Bezout (A,B)

local LT Q R

Si B $\neq$ 0, ejecuta

E(A/B) ->Q

A-B*Q->R

Bezout(B,R)->LT

resultado {LT[2], LT[1]-LT[2]*Q, LT[3]}

si no resultado {1, 0, A}

fsi

funcion

8.2.4 Version Recursiva SIN las Listas

Si se usan variables globales para A B D U VT podemos considerar la función Bezout como si se calculara a partir de A B, valores que se introducen en U V D (AU + BV = D) con la ayuda de una variable local Q.

Se escribe:

Programa Bezour

local Q

si B ≠ 0, ejecutar:

E(A/B) ->Q

A-B*Q->T

B->A

T->B

Bezour

U-V*Q->T

V->U

T->V

si no

1->U

0->V

A->D

fsi

8.2.5 Traduccion en la HP 40G

Versión iterativa con las listas

Aquí también utilizamos el programa IN que nos permite introducir dos números enteros A y B.

```
INPUT A;"A";;;1:
INPUT B;"B";;;1:
ERASE:
```

y escribimos el Programa BEZOUT:

```
RUN IN:
DISP 3;"BEZOUT"{A,B}:
{1, 0, A}->L1:
{0, 1, B}->L2 :
WHILE L2(3) ≠ 0 REPEAT
L1-L2*FLOOR(L1(3)/L2(3)) ->L3:
L2->L1:
L3->L2:
END:
DISP 4;"U VNSD "L1:
FREEZE:
```

Versión recursiva sin las listas

Se escribe el programa BEZOUR, con la ayuda de los comandos (gracias Bernard!!!)

PUSH (PUSH(A) para introducir el contenido de A en la pila).

y POP (para recuperar los valores de la pila).

```
PROGRAM BEZOUR
IF B ≠ 0 THEN
PUSH (FLOOR(A/B)):
B->A:
T->B:
RUN BESOUR:
U-V*POP->T:
V->U:
T->V:
ELSE
 1->U:
 0->V:
 A->D:
END:
```

PUSH (FLOOR(A/B)) introduce los diferentes valores de FLOOR(A/B) en una pila y POP los recupera.

T es una variable auxiliar.

BEZOUR toma como entrada los valores de las variables globales Ay B y rellena las variables globales U y V de manera que:

$A \cdot U + B \cdot V = PGCD(A, B)$.

A continuación se escribe el programa final BEZOURT,

que permite la entrada de A y B y la salida de {U, V, D}.

```
PROGRAM BEZOUR
PROMPT A:
PROMPT B:
RUN BEZOUR:
ERASE:
MSGBOX {U,V,D}:
```

NOTA:
Si Ud. usa la función del cálculo simbólico IREMAINDER en lugar de MOD y IQUOT(A,B) en lugar de FLOOR(A/B) en los programas precedentes, BEZOUT o BEZOUR puede tener entonces como parámetros enteros de Gauss siempre y cuando sustituya los nombre de las variables A,B,R… por Z1,Z2,Z3…

NOTA:
Si Ud. usa la función del cálculo simbólico REMAINDER en lugar de MOD en los programas anteriores BEZOUT (o BEZOUR)puede tener como parámetros polinomios, siempre y cuando sustituya los nombres de las variables A,B,R… por E1,E2,E3…y cambie el test de parada.

8.3 Descomposicion en Factores Primos

8.3.1 Los Calculos Algoritmicos y sus Traducciones

Primer algoritmo

Sea N un número entero D de 2 a N, la divisibilidad de N por D.

Si D divide N, se busca entonces los divisores de N/D etc…N/D desempeña el papel de N cuando N = 1.

Se introducen los divisores que se han encontrado en la lista FACT.

```
Funcion facprem(N)

local D FACT

2->D

{}-> FACT

mientras que N ≠ 1 ejecuta

  si N mod D = 0 entonces

     FACT + D -> FACT

      N/D -> N

  sino

      D+1 -> D

  /fsi/

/fmientras que/
```

resultado FACT

/ffuncion/

Primera mejora

sólo se prueban los divisores D entre 2 y E(√N).

Si N = D1* D2 obtendremos :

D1 ≤ E(√N) ó D2 ≤ E(√N), de lo contrario obtendríamos:

D1 * D2 ≥ $(E(\sqrt{N}) + 1)^2 > N$.

funcion facprem(N)

local D FACT

2-> D

{} -> FACT

mientras que D*D ≤ N ejecuta

si N mod D = 0 entonces

FACT + D -> FACT

N/D -> N

sino D+1-> D

/fsi/

/fmientras que/

FACT + N -> FACT

resultado FACT

/ffonction/

- segunda mejora

Comprobar si 2 divide a N probamos los divisores impares de D entre 3 y E(√N).

En la lista FACT cada divisor va seguido de su exponente:

decomp(12) = {2,2,3,1}.

```
fonction facprem(N)
local KD FACT
{}->FACT
0 -> K
mientras N mod 2 = 0 ejecuta
     K+1 -> K
     N/2 -> N
/f mientras /
si K ≠ 0 so
         FACT + {2 K} -> FACT
/fsi/
3-> D
mientras D*D ≤ N ejecuta
   0 -> K
   mientras N mod D = 0  ejecuta
    K+1 -> K
    N/D -> N
mientras
si K ≠ 0 so
   FACT + {D K} -> FACT
/fsi/
D+2 -> D
/f mientras /
```

si N ≠ 1 so

FACT + {N 1} -> FACT

/fmientras/

resultado FACT

/ffunción/

8.3.2 Traduccion en la HP 40G

Traducimos el último algoritmo.

La HP40G no conoce la lista {}, por lo tanto para inicializar L1 con la lista vacía escribimos:

CLEAR L1.

El programa FACTPREM :

```
INPUT N;"N";;;1:

ERASE:

0 -> K:

CLEAR L1:

WHILE N MOD 2 == 0 REPEAT

1+K -> K:

N/2 ->N:

END:


IF K ≠ 0 THEN

{2, K} -> L1:

END:

3->D:


WHILE D*D ≤ N REPEAT

0 -> K:
```

```
WHILE N MOD D == REPEAT
K+1 -> K:
N/D -> N:
END:

IF K ≠ 0 THEN
CONCAT (L1, {D, K} -> L1:
END:
2+D -> D:
END:

IF K ≠ 1 THEN
CONCAT (L1, {N,1} -> L1:
END:
DISP 3; "FACT " L1:
FREEZE:
```

8.4 Calculo de A^P MOD N

8.4.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Primer algoritmo.

Se usan dos variables locales PUIS e I

Se hace un programa interactivo de manera que cada etapa PUIS representa A^I (mod N).

```
funcion puismod (A, P, N)
local PUIS, I
1 -> PUIS
para I de 1 a P ejecutamos
  A*PUIS mod N -> PUIS
/fpara/
resultado PUIS
/ffuncion/
```

Segundo algoritmo

Se usa una única variable local PUI, variamos P de manera que para cada etapa de la iteración tengamos:

La solución: = PUI * AP (mod N)

```
funcion puismod (A,P,N)
local PUI
1 -> PUI
mientras P>0  ejecutar
   A*PUI mod N -> PUI
   P-1 ->P
/fmientras/
resultado PUI
/funcion/
```

Tercer algoritmo

Se puede fácilmente modificar este programa teniendo en cuenta que:

$A^2*P = (A*A)^p$.

Cuando P es par tenemos la siguiente relación:

$PUI * A^P = PUI * A *A^{P/2}$ (mod N).

Cuando P es impar tenemos la siguiente relación:

$PUI * A^P = PUI * A *A^{P-1}$ (mod N).

Se obtiene entonces un algoritmo rápido de A^P (mod N).

```
funcion puismod (A, P, N)
local PUI
mientras P>0 ejecutar
    si P mod 2=0  entonces
```

```
      P/2->P
      A*A mod N->A
   si no
      A*PUI mod N ->PUI
      P-1->P
  /fsi/
 /fmientras/
resultado PUI
/ffuncion/
```

Si P es impar, P-1 es par.

por lo tanto podemos escribir:

```
funcion puismod (A, P, N)
local PUI
1->PUI
 mientras P>0 ejecuta
   si P mod 2=1 entonces
         A*PUI mod N->PUI
         P-1->P
    /fsi/
P/2->P
A*A mod N->A
/fmientras/
resultado PUI
/ffonction/
```

8.4.2 Traduccion en la HP 40G

El cálculo A^p mod N se utiliza en el programa del método probabilístico de Mr. Rabin (véase.7.6).

8.5 La función “esprimo”

8.5.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Primer algoritmo

Vamos a escribir una función booleana de parámetro N, que sea igual a VERDADERO cuando N sea primo y sino será igual a FALSO.

Hay que buscar si n posee un divisor ≠ 1 y ≤ E(√N) (parte entera de la raíz de N).

En el caso N=1 se trata aparte!

Se usa la variable booleana PREM que parte de VERDADERO y pasa a FALSO cuando encontramos un divisor de N…

```
Funcion esprmo (N)
local PREM, I, J
E(√N) ->J
 si N = 1 entonces
    Falso ->PREM
    Si no
    Verdadero->PREM
/fsi/
2->I
mientras que PREM y I ≤ J  ejecutar
  si N mod I=0 entonces
     Falso->PREM
   si no
     I+1->I
   /fsi/
/fmientras/
resultado PREM
```

```
/ffuncion/
```

Primera mejora

Se puede comprobar si N es par o sino ver si N tiene un divisor impar.

```
Funcion esprimo(N)
Local PREM, I, J

E(√N) ->J
Si (N = 1) o (N mod 2 = 0) y (N≠2) entonces
        Falso->PREM
     Si no
         verdadero->PREM
/fsi/
3->I
     si  N mod I = 0 entonces
        Falso -> PREM
     sino
        I+2->I
     /fsi/
/fmientras/
resultado PREM
/ffuncion/
```

Segunda mejora

Ver si N es divisible por 2 ó 3 o buscar si N tiene un divisor de la forma

$6 \times k - 1$ ó $6 \times K + 1$.

```
funcion estprimo(N)
```

```
local PREM, I, J

E(√N) -> J
si (N = 1) o (N mod 2 = 0) o (N mod 3 = 0) entonces
  Falso->PREM
si no
  Verdadero->PREM
/fsi/
si N=2 o N=3 entonces
   Verdadero-> PREM
/fsi/
5->I

mientras que PREM y I ≤ J ejecutan
   si  (N mod I = 0) o (N mod I + 2 = 0) entonces
       Falso-> PREM
   sino
       I + 6 -> I
   /fsi/
/fmientras/
resultado PREM
/ffuncion/
```

8.5.2 Traduccion en la HP 40G

```
INPUT N;"N";;;1:
IF N MOD 2 == 0 OR N MOD 3 == 0 OR N == 1 THEN
   0 ->P:
ELSE
   1->P:
END:
IF N= =2 OR N= =3 THEN
   1->P:
END:
5->I:

FLOOR (vN)- >J:
WHILE I = J AND P REPEAT
IF N MODI= =0 OR N MOD I+2= =0 THEN
0 ->P:
ELSE
I+6->I:
END:
END:
CLEAR:
DISP 5;P:
FREEZE:
```

8.6 Metodo probabilistico de Mr.Rabin

Si N es primo todos los números K, estrictamente inferiores a N, son primos deN, por lo tanto según el Teorema de Fermat, tenemos:

$K^{N-1} = 1 \pmod N$

Si N no es primo, los números enteros K que verifican:

$K^{N-1} = 1 \pmod N$

Son poco numerosos.

Con más precisión se puede demostrar que si N > 4 la probabilidad de obtener es número k es inferior a 0,25.

Un número N siendo $K^{N-1} = 1 \pmod N$ para 20 pruebas de es un número pseudoprimo. El método probabilístico de consiste en coger al azar un número K (1 < K < N) y calcular:

$K^{N-1} \pmod N$

Si $K^{N-1} = 1 \pmod N$ se coge otro número y si $K^{N-1} \neq 1 \pmod N$, seguro que N no es primo.

Si se obtiene $K^{N-1} = 1 \pmod N$ para 20 valores de K podemos determinar que K es primo

con una probabilidad de error inferior a 0.25^{20} de orden…10^{-12}.

Este método se utiliza únicamente para saber si números muy grandes son pseudo-primos.

8.6.1 Traduccion en los Calculos Algoritmicos

Suponemos que:

Hasard(N) da un número entero al azar entre 0 y N – 1.

el cálculo de:

K^{N-1} mod N

Se hace con el algoritmo de la potencia rápida (véase 13).

Teclee:

Puismod (K, P, N) la función que calcula K^P mod N

Funcion esprim(N)

local K, I, P

```
1->I
1->P
mientras que P = 1 y I < 20 ejecuta
    azar (N-2)+2->K
    y mod (K, N-1, N)->P
    I+1->I
/fmientras/
si P =1 entonces
     resultado verdadero
sino
     resultado falso
/fsi/
/ffuncion/
```

8.6.2 Traduccion en la HP 40G

```
PROMPT N:
RANDSEED TIME:
1->I:
1->P:
WHILE I < 20 AND P= =1 REPEAT
     FLOOR (RANDPM * (N-2))+2->K:
     N-1->M:
     © calcula Kpotencia M mod N en P.
     1->P:
WHILE 0 < M REPEAT
  IF M MOD 2 = = 0 THEN
     M / 2 -> M:
     (K * K) MOD N ->K:
  ELSE
    K*P MOD N -> P:
```

```
    M – 1 -> M:
  END:
END:
@ P contiene Kpotencia M mod N y M=N-1.
I+1 ->I:
END:
ERASE:
IF P = =1 THEN
  DISP 3; "PREMIER " N:
ELSE
  DISP 3; "NON PREMIER " N:
END:
FREEZE:
```

NOTA:
También se puede utilizar la función de cálculo simbólico POWMOD entonces escribiremos:

```
MODSTO(N):
POWMOD(K,N-1) STO▷ P:
```

en lugar de la instrucciones comprendidas entre @ obtendremos:

```
PROMPT N:
RANDSEED TIME:
1->I:
1->P:
WHILE I < 20 AND P= =1 REPEAT
  FLOOR( RANDOM * (N-2))+2->K:
 MODSTO(N):
POWMOD(K,N-1) STO$\triangleright$ P:
 I+1 ->I:
END:
```

```
ERASE:
IF P= =1 THEN
  DISP 3; "PREMIER " N:
ELSE
   DISP 3;"NON PREMIER " N:
END:
FREEZE
```