

Stefan Kaufman

Belka sprężona kablami a strunami

Studium porównawcze wysokości przekrojów i osiągalnych rozpiętości

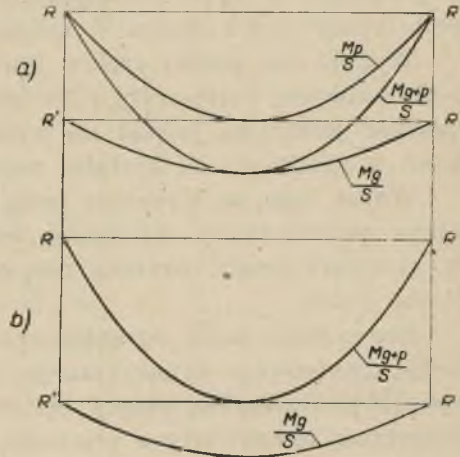
1. Wstęp

W belce sprężonej kablami równoważymy ciężar własny belki (w całości lub częściowo) przez zwykle powiększenie mimośrodów kabla. Jest to możliwe dzięki temu, że kablom nadać możemy formę zakrzywioną. W belce sprężonej strunami takie wyłączenie ciężaru własnego jest niemożliwe (przynajmniej w belce o stałym przekroju), gdyż linia wypadkowa armatury sprężającej jest tu linią prostą.

Ilustruje to rys. 1, gdzie dla belki w dwu punktach swobodnie podpartej, równomiernie obciążonej wykreślono granice rdzenia uogólnionego RR i $R'R'$ oraz obwiednie maksymalnych i minimalnych momentów, $\frac{Mg+Mp}{S}$ od granicy górnej, a Mg/S od granicy dolnej rdzenia.

Otóż w przypadku belki kablowej (rys. 1a) z racji możliwości kształtowania kabli według dowolnie zakrzywionej linii nie ma przeszkód, by ich oś ciężkości poprowadzić trasą biegnącą poniżej granicy dolnej rdzenia $R'R'$ w ten sposób, by zawsze była ona ponad obwiednią Mg/S ; wtedy bowiem mamy zapewnienie, że środek ciśnienia, który pod wpływem ciężaru własnego wznosi się o Mg/S , znajdować się będzie wszędzie, a więc i na podporze, w obrębie granic rdzenia.

W belce strunowej (rys. 1b), gdzie linia wypadkowa armatury sprężającej jest linią prostą, warunek, by linia ta nie znalazła się na podporze poniżej $R'R'$, przepisuje jako najniższą, a więc najkorzystniejszą trasę, dolną granicę rdzenia $R'R'$. Tym samym odległość obu granic rdzenia $R'R'$



Rys. 1

równa jest tu $\frac{Mg + Mp}{S}$, gdy tymczasem w belce kablowej odległość ta wynosi tylko Mp/S (w przypadku gdy ciężar własny nie przekracza granicy ekonomicznej).

Widzimy stąd, że wysokość belki strunowej musi być większa niż wysokość belki kablowej.

Konkluzja ta, zrozumiała i ogólnie zresztą znana, nie daje nam jednak jasnego obrazu o wielkości tej różnicy. Z góry można przewidzieć, że wzrost wysokości belki strunowej uwidoczni się w sposób bardziej jaskrawy dla belek masywnych, a więc o przekroju prostokątnym, w znacznie zaś mniejszym stopniu wystąpi ta różnica w przekrojach typu teowego czy też dwuteowego.

Z drugiej strony musimy wziąć pod uwagę, że w przypadkach, gdzie obciążenie użytkowe jest nieduże, a więc gdzie ciężar własny występuje w stosunkowo silniejszej mierze, tylko część tego ciężaru podlega w belce kablowej zrównoważeniu. Tym samym spodziewać się należy, że niewspółmierny w tych warunkach wzrost różnicy wysokościowej między obu typami belek dozna w takich wypadkach pewnego zahamowania.

Wydaje się przeto rzeczą interesującą ująć porównanie wysokości belki kablowej i strunowej w postać matematyczną, by na tej podstawie uzyskać jaśniejszy pogląd na wielkość zużycia materiałów w obu belkach w zależności od kształtu przekroju.

Wobec tego, że wysokość belki jest funkcją jej rozpiętości, to mając obraz porównawczy wysokości belki kablowej i strunowej będziemy w możności ocenić również różnicę rozpiętości osiągalnych dla każdej z obu belek.

Rozważania nasze ograniczymy do przypadków przekroju prostokątnego, dwuteowego symetrycznego i dwuteowego asymetrycznego; w ten sposób porównaniem objęty będzie również przekrój skrzynkowy, jako statycznie równowarty z przekrojem dwuteowym.

2. Przekrój prostokątny

2.1. Ciężar własny g nie przekracza granicy ekonomicznej

Oznaczając przez

h — wysokość belki sprężonej kablami,

H — wysokość belki sprężonej strunami,

σ_b i σ'_b — naprężenia skrajne we włóknie górnym i dolnym, możemy napisać w odniesieniu do jednostki szerokości:

dla belki kablowej:

$$\frac{h^2}{6} = \frac{Mp}{\sigma_b - \sigma'_b}, \quad (1)$$

dla belki strunowej:

$$\frac{H^2}{6} = \frac{Mg + Mp}{\sigma_b - \sigma'_b} \quad (2)$$

Lewą stronę równania (2) należy pomnożyć przez współczynnik korygujący wielkość wskaźnika wytrzymałości, a to w uwzględnieniu współpracy stali i betonu w belce strunowej.

Moment bezwładności przekroju z uwzględnieniem armatury, jak łatwo dowieść¹, można wyrazić w przybliżeniu

$$J_1 = J(1 + n\mu),$$

gdzie J oznacza moment bezwładności przekroju samego betonu,

n – stosunek współczynników sprężystości stali i betonu E_s/E_b ,

μ – procent uzbrojenia.

Stąd łatwo dojść do wyrażen na wskaźniki przekroju współdziałającego

$$W_1 = W \left[1 + n\mu \left(1 - \frac{i^2}{v^2} \right) \right],$$

$$W'_1 = W' \left[1 + n\mu \left(1 + \frac{i^2}{vv'} \right) \right],$$

dla prostokąta

$$v = v' = \frac{h}{2}, \quad \frac{i^2}{v^2} = \frac{i^2}{vv'} = \frac{1}{3},$$

a zatem

$$W_1 = W \left(1 + \frac{2}{3} n\mu \right),$$

$$W'_1 = W' \left(1 + \frac{4}{3} n\mu \right).$$

Z wystarczającym przybliżeniem operować możemy jedną wartością średnią, czyli

$$W_1 = W(1 + n\mu).$$

Do wartości tej dochodzi też Bruggeling² przyjmując pewne założenia upraszczające.

Wprowadzie i w belkach kablowych, wypełniając z reguły kanały kablowe po dokonany zabiegu sprężenia iniekcjami cementowymi, liczyć możemy na współdziałanie stali i betonu; jednakowoż z powodu tego, że w stanie bezużytkowym kable nie tylko że nie wzmacniają przekroju betonu, lecz otworami swymi osłabiają go, w sumie korekcja jest bardzo mała i dlatego w praktyce bywa pomijana.

¹ Y. Guyon *Béton, précontraint*, Paryż 1951, str. 382.

² A. S. G. Bruggeling, *Voorgespannen beton*, Delft 1950, str. 196.

Równanie (2) przybierze zatem postać

$$\frac{H^2}{6} (1 + n\mu) = \frac{Mg + Mp}{\sigma_b - \sigma'_b} \quad (2a)$$

Dzieląc (2a) przez (1) otrzymujemy

$$\frac{H^2}{h^2} = \frac{1}{1 + n\mu} \cdot \left(1 + \frac{Mg}{Mp}\right), \quad (3)$$

czyli w przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego

$$\frac{H^2}{h^2} = \frac{1}{1 + n\mu} \left(1 + \frac{g}{p}\right).$$

Po wstawieniu za

$$g = 2,5 H,$$

otrzymujemy równanie drugiego stopnia względem H , w postaci:

$$H^2 - \frac{2,5 h^2}{(1 + n\mu)p} \cdot H = \frac{h^2}{1 + n\mu};$$

stąd

$$\frac{H}{h} = \frac{h}{1 + n\mu} \left[\frac{1,25}{p} + \sqrt{\left(\frac{1,25}{p}\right)^2 + \frac{1 + n\mu}{h^2}} \right]. \quad (4)$$

2.2. Ciężar g przekracza granicę ekonomiczną

Gdy ciężar własny belki przekracza granicę ekonomiczną, wtedy tylko część ciężaru własnego, g' , zostaje skompensowana efektem mimośrodru kabla, pozostała reszta $g'' = g - g'$ włącza się w działanie obciążenia użytkowego.

Z rysunku 2 czytamy:

$$\frac{g - g''}{g'' + p} = \frac{\frac{h}{2} - r_u - a}{2r_u},$$

a zakładając

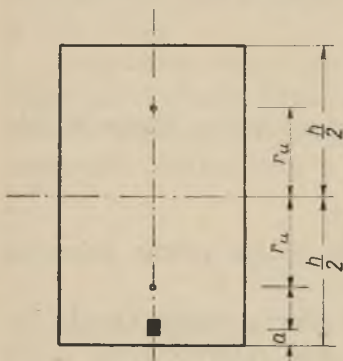
$$\sigma'_b = 0$$

otrzymujemy

$$\frac{g - g''}{g'' + p} = 1 - 3 \frac{a}{h},$$

skąd

$$g'' = \frac{g - p \left(1 - 3 \frac{a}{h}\right)}{2 - 3 \frac{a}{h}},$$



Rys. 2

a więc

$$g'' + p = \frac{g + p}{2 - 3 \frac{a}{h}}$$

W uwzględnieniu, że wartość ta jest miarodajna dla obliczenia momentu, otrzymujemy

$$\frac{h^2}{6} \cdot \sigma_b = \frac{2,5 h + p}{2 - 3 \frac{a}{h}} \cdot m l^2, \quad (5)$$

$$\frac{H^2(1 + n\mu)}{6} \cdot \sigma_b = (2,5 H + p) \cdot m l^2, \quad (6)$$

gdzie m jest współczynnikiem zależnym od warunków podparcia. Dzieląc (6) przez (5) znajdujemy

$$\frac{H^2}{h^2} = \frac{\left(2 - 3 \frac{a}{h}\right) (2,5 H + p)}{(1 + n\mu)(2,5 h + p)}, \quad (7)$$

czyli

$$H^2 = \frac{2,5 \left(2 - 3 \frac{a}{h}\right) h^2}{(1 + n\mu)(2,5 h + p)} \cdot H = \frac{\left(2 - 3 \frac{a}{h}\right) p h^2}{(1 + n\mu)(2,5 h + p)},$$

skąd

$$\frac{H}{h} = \frac{h}{1 + n\mu} \cdot \left[1,25 c + \sqrt{(1,25 c)^2 + \frac{(1 + n\mu) p c}{h^2}} \right], \quad (8)$$

gdzie

$$c = \frac{2 - 3 \frac{a}{h}}{2,5 h + p}.$$

Z równania (7) wynika, że

$$\frac{H}{h} > \sqrt{\frac{2 - 3 \frac{a}{h}}{1 + n\mu}}.$$

Dla $n = 6$ $\mu = \frac{F_z}{F_b} = \frac{\sigma_b}{2\sigma_z} = 0,75$, przyjąć możemy jako rząd wielkości $1 + n\mu = 1,045$. Tym samym dla $\frac{a}{h} = 0,1$ znajdujemy

$$\frac{H}{h} > 1,28.$$

Wysokość belki strunowej H jest tym bliższa swej granicznej w tym obszarze wartości $1,28 h$, im większe jest obciążenie użytkowe belki w sto-

sunku do jej ciężaru własnego. Gdy stosunek $\frac{\text{obciążenie użytkowe}}{\text{ciężar własny}}$ wzrasta na tyle, że ciężar własny belki kablowej doznaje pełnej kompensacji, to w grę wchodzi wzór (4). Z budowy tego wzoru wynika, że stosunek H/h w dalszym ciągu maleć będzie w miarę wzrostu obciążenia użytkowego p .

Rzecz jasna, że oba wzory (4) i (8) muszą na granicy swej ważności dać tę samą wartość. Z porównania obu wzorów wynika, że nastąpi to dla

$$p - \frac{1}{c} = \frac{p + 2,5 h}{2 - 3 \frac{a}{h}},$$

czyli

$$p = \frac{2,5 h}{1 - 3 \frac{a}{h}}.$$

Dla

$$\frac{a}{h} = 0,1, \quad p = \frac{2,5 h}{0,7}.$$

W ten sposób doszliśmy do znanej relacji $g = 0,7 p$.

Obliczony na podstawie wzorów (4) i (8) wzrost wysokości belek strunobetonowych w stosunku do wysokości belek kablobetonowych tej samej nośności, w zależności od tej wysokości h i od poszczególnych wartości obciążenia użytkowego p , ujęto w poniższą tablicę 1.

Grubą linią odgraniczono granicę ważności obu wzorów. Z tablicy tej czytamy, że dla przypadków najczęściej występujących w praktyce stosunek obu wysokości H/h waha się w granicach od 1,3 do 1,4 i wzrasta wraz z wysokością belki, a maleje ze wzrostem p/h .

W rozważaniach naszych pominęliśmy możliwość wystąpienia w belce strunobetonowej momentu ujemnego w czasie transportu lub montażu. Jeśli z taką ewentualnością wypadnie się nam liczyć, to wówczas należałoby w odpowiednich wzorach określających wysokość belki strunobetonowej zastąpić wyraz M_g wartością $2M_g$. Z drugiej strony, wobec dopuszczenia dla przejściowego stanu takiego obciążenia większych naprężeń, należałoby zamiast $(\sigma - \sigma')$ przyjąć wartość: $k(\sigma - \sigma')$ ($k = \sim 1,4 \div 1,6$).

Wzory (4) i (8) przybiorą w takim przypadku postać

$$\frac{H}{h} = \frac{h}{k(1+n\mu)} \left[\frac{2,5}{p} + \sqrt{\left(\frac{2,5}{p}\right)^2 + \frac{k(1+n\mu)}{h^2}} \right], \quad (4a)$$

$$\frac{H}{h} = \frac{h}{k(1+n\mu)} \left[2,5c + \sqrt{(2,5c)^2 + \frac{k(1+n\mu)p \cdot c}{h^2}} \right]. \quad (8a)$$

Tablica 1

Przekrój prostokątny. Wartość H/h w zależności od h i p ($n\mu=0,045$)

$\frac{p_{t/m}}{h \text{ cm}}$	0,25	0,50	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
20	1,45	1,39	1,34	1,24	1,185	1,15	1,12	1,10	1,075	1,06	1,045	1,035
25	1,475	1,41	1,38	1,32	1,24	1,20	1,16	1,135	1,10	1,082	1,07	1,06
30	1,49	1,43	1,39	1,37	1,31	1,24	1,20	1,15	1,13	1,10	1,085	1,07
35	1,51	1,445	1,41	1,38	1,37	1,30	1,24	1,21	1,16	1,13	1,10	1,09
40	1,52	1,45	1,42	1,39	1,38	1,32	1,29	1,24	1,185	1,15	1,12	1,10
45	1,53	1,47	1,42	1,41	1,39	1,37	1,33	1,28	1,22	1,17	1,14	1,12
50	1,53	1,475	1,44	1,41	1,39	1,38	1,37	1,32	1,24	1,20	1,16	1,135
55	1,54	1,485	1,45	1,425	1,40	1,39	1,38	1,36	1,28	1,22	1,18	1,14
60	1,55	1,49	1,45	1,43	1,41	1,39	1,38	1,37	1,30	1,24	1,20	1,15
65	1,555	1,50	1,465	1,435	1,415	1,40	1,39	1,38	1,34	1,27	1,22	1,19
70	1,56	1,51	1,47	1,445	1,43	1,41	1,39	1,38	1,37	1,30	1,24	1,21
75	1,56	1,51	1,475	1,45	1,43	1,41	1,40	1,39	1,37	1,32	1,27	1,23
80	1,56	1,52	1,48	1,45	1,44	1,42	1,41	1,39	1,38	1,34	1,29	1,24
85	1,56	1,52	1,49	1,46	1,44	1,43	1,41	1,40	1,38	1,37	1,31	1,26
90	1,565	1,53	1,49	1,47	1,445	1,43	1,42	1,41	1,39	1,37	1,33	1,28
95	1,57	1,53	1,50	1,47	1,45	1,44	1,42	1,41	1,39	1,38	1,35	1,30
100	1,57	1,53	1,50	1,475	1,45	1,44	1,43	1,41	1,39	1,38	1,37	1,32

Porównanie wzorów (4) i (4a) podobnie jak i (8) i (8a) prowadzi do związku

$$\frac{p}{H} = \frac{5 - 2,5k}{k - 1}$$

Jeśli więc wartość stosunku H/h w warunkach transportu dowolnego nie ma być większa niż przy transporcie zgodnym z warunkami pracy elementu w stanie użytkowym, to musi być spełniona relacja

$$p \Rightarrow \frac{5 - 2,5k}{k - 1} \cdot H,$$

czyli dla $k = 1,5$

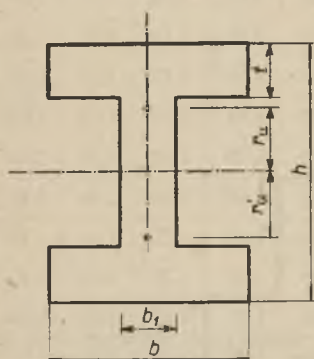
$$p \Rightarrow 2,5 H.$$

Aby więc postawiony warunek został zachowany, obciążenie użytkowe nie może być mniejsze od ciężaru własnego belki strunobetonowej.

3. Przekrój dwuteowy (symetryczny)

3.1. Ciężar własny nie przekracza granicy ekonomicznej

Dla przekrojów typu dwuteowego i teowego unikniemy skomplikowanej budowy wzorów, jeżeli przyjmiemy, że przekroje te, jak to najczęściej bywa w praktyce, wybieramy spośród serii przekrojów jednokładnych. Wtedy bowiem stosunek wysokości stopek do wysokości belki (rys. 3) $\frac{t}{h} = \psi$ oraz stosunek szerokości stopek do szerokości ścianki $\frac{b}{b_1} = \beta$



Rys. 3

posiadają stałą wartość, co pozwala na określenie charakterystycznych wielkości przekroju, jak: pola, momentu bezwładności, wskaźnika wytrzymałości itp. w postaci:

$$F = \bar{F} \cdot bh,$$

$$J = \bar{J} \cdot bh^3,$$

$$W = \bar{W} \cdot bh^2,$$

gdzie \bar{F} , \bar{I} , \bar{W} są współczynnikami bezwymiarowymi, zależnymi od β i ψ . Z dogodności tej możemy tym śmiało korzystać, ponieważ rozważania nasze dotyczą nie wartości bezwzględnych, lecz wartości stosunkowych.

Wysokość belki kablowej i belki strunowej możemy więc określić wyrażeniami:

$$h^2 = \frac{m l^2 p}{\bar{W} b_1 (\sigma_b - \sigma'_b)}, \quad (9)$$

$$H^2 = \frac{m l^2 (2,5 \bar{F} b_1 H + p)}{(1 + n\mu) \bar{W} b_1 (\sigma_b - \sigma'_b)}, \quad (10)$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{H^2}{h^2} = \frac{2,5 \bar{F} b_1 H + p}{(1 + n\mu) p}, \quad (11)$$

a więc równanie drugiego stopnia względem H w uporządkowanej postaci:

$$H^2 - \frac{2,5 \bar{F} b_1 h^2}{(1 + n\mu) p} \cdot H = \frac{h^2}{1 + n\mu},$$

skąd

$$\frac{H}{h} = \frac{h}{1 + n\mu} \cdot \left[\frac{1,25 \bar{F} b_1}{p} + \sqrt{\left(\frac{1,25 \bar{F} b_1}{p} \right)^2 + \frac{1 + n\mu}{h^2}} \right]. \quad (12)$$

3.2. Ciężar g przekracza granicę ekonomiczną

Rozdzielając podobnie jak w przypadku belki prostokątnej ciężar g na część g' ulegającą kompensacji i część g'' sumującą się obciążeniem użytkowym możemy napisać relację:

$$\frac{g - g''}{g'' + p} = \frac{e - r'}{r + r'} = \frac{\frac{h}{2} - r - a}{2r},$$

czyli

$$g - g'' = (g'' + p) \cdot \frac{\frac{1}{2} - \bar{r} - \bar{a}}{2\bar{r}},$$

gdzie

$$\bar{r} = \frac{r}{h}, \quad \bar{a} = \frac{a}{h}.$$

Tym samym

$$g'' + p = (g + p) \cdot \frac{2\bar{r}}{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}} = (2,5\bar{F}b_1h + p) \cdot \frac{2\bar{r}}{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}}.$$

Oba nasze podstawowe równania przedstawiają się tu w postaci:

$$\bar{W}b_1h^2(\sigma_b - \sigma'_b) = (2,5\bar{F}b_1h + p) \cdot \frac{2\bar{r}}{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}} \cdot ml^2, \quad (13)$$

$$\bar{W}b_1H^2(1 + n\mu)(\sigma_b - \sigma'_b) = (2,5\bar{F}b_1H + p) \cdot ml^2. \quad (14)$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{H^2}{h^2} = \frac{2,5\bar{F}b_1H + p}{(1 + n\mu)(2,5\bar{F}b_1h + p)} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}}{2\bar{r}}, \quad (15)$$

czyli

$$H^2 = \frac{h^2}{1 + n\mu} \cdot \frac{2,5\bar{F}b_1}{2,5\bar{F}b_1h + p} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}}{2\bar{r}} \cdot H = \frac{h^2}{1 + n\mu} \cdot \frac{p}{2,5\bar{F}b_1h + p} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}}{2\bar{r}},$$

skąd znajdujemy wartość stosunku obu wysokości

$$\frac{H}{h} = \frac{h}{1 + n\mu} \cdot \left[1,25\bar{F}b_1c' \varrho + \sqrt{(1,25\bar{F}b_1c' \varrho)^2 + \frac{(1 + n\mu)c' \varrho p}{h^2}} \right], \quad (16)$$

gdzie

$$c' = \frac{1}{2,5\bar{F}b_1h + p}, \quad \varrho = \frac{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}}{2\bar{r}}.$$

Z równania (15) wynika, że

$$\frac{H^2}{h^2} > \frac{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}}{(1 + n\mu)2\bar{r}}.$$

Dla ustalonej wysokości belka będzie tym ekonomiczniejsza, im większy będzie rdzeń jej przekroju. Granicą (niemożliwą do osiągnięcia w belce o ściance pełnej) będzie promień rdzeniowy równy połowie wysokości belki. Miarą ekonomii będzie zatem stosunek $2r/h$; im wartość tego stosunku będzie większa, tym belka będzie ekonomiczniejsza. W racjonalnie zaprojektowanej belce dwuteowej stosunek ten (wskaźnik wydajności) waha się w szczupłych granicach od 0,5 do 0,55.

Możemy więc przyjąć $\frac{2r}{h} = 0,5$,

czyli

$$\frac{r}{h} = \bar{r} = 0,25.$$

Tym samym dla $\bar{a} = 0,1$ i $1 + n\mu = 1,045$ będzie

$$H > h \sqrt{\frac{0,65}{1,045 \cdot 0,5}},$$

czyli

$$H > 1,115 h.$$

Granicę ekonomiczną ciężaru własnego znajdujemy — jak wiadomo — z warunku, aby środek ciśnienia siły sprężającej z pozycji możliwie najniższej w stanie czystego sprężenia wzniósł się pod wpływem ciężaru własnego do dolnej granicy rdzenia.

Warunek ten wyraża się więc równaniem

$$\frac{Mg}{S} = v' - r' - a,$$

a w uwzględnieniu, że

$$S = \frac{Mp}{r + r'},$$

otrzymujemy

$$Mg = \frac{v' - r' - a}{r + r'} \cdot Mp,$$

czyli dla obciążenia równomiernego

$$g = \frac{v' - r' - a}{r + r'} \cdot p.$$

Promień rdzeniowy w belce dwuteowej — jak widzieliśmy — jest

$$r = 0,25 h,$$

tym samym

$$g = \frac{0,5 h - 0,25 h - 0,1 h}{0,5 h} \cdot p,$$

czyli

$$g = 0,3 p$$

(dla $a=0$, $g=0,5 p$).

Na granicy tej oba wzory (12) i (16) powinny dać jednakową wartość. Z porównania obu wzorów widzimy, że nastąpi to dla

$$p = \frac{1}{c' \rho} = (2,5 \bar{F} b_1 h + p) \cdot \frac{2\bar{r}}{\frac{1}{2} + \bar{r} - \bar{a}},$$

czyli

$$p = \frac{2\bar{r}}{\frac{1}{2} - \bar{r} - \bar{a}} \cdot g,$$

a zatem

$$g = \frac{\frac{1}{2} - \bar{r} - \bar{a}}{2\bar{r}} p = 0,3 p,$$

zgodnie z wyżej otrzymaną wartością.

Chcąc korzystać z wzorów (12) i (16) należy przyjąć z góry

$$\psi = \frac{t}{h} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{b}{b_1},$$

by móc odczytać z tablic przynależne \bar{F} i \bar{r} . Dla $\psi=0,15$ i $\beta=4$ — wartości często w praktyce spotykanych — wyniki zestawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Przekrój dwuteowy. Wartość H/h w zależności od h , b_1 i p

$$\psi=0,15, \quad \beta=4, \quad n\mu=0,045$$

h_{cm}	$\frac{P_{I/m}}{b_{1\text{cm}}}$	0,25	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0
30	6	1,117	1,063	1,034	1,020	1,005	0,998
40	7	1,125	1,114	1,067	1,044	1,022	1,018
50	8	1,132	1,118	1,108	1,073	1,041	1,025
60	9	1,138	1,124	1,116	1,108	1,063	1,041
70	10	1,145	1,127	1,119	1,116	1,086	1,060
80	12	1,153	1,135	1,125	1,120	1,114	1,092
90	14	1,162	1,141	1,132	1,127	1,119	1,115
100	16	1,168	1,150	1,138	1,132	1,123	1,118
120	18	1,176	1,157	1,146	1,138	1,128	1,123
130	20	1,184	1,167	1,156	1,147	1,137	1,130

Dla $h=0,8$ m i $p=1,5$ t jest $\frac{H}{h}=1,114$. Wartość ta jest mniejsza od wyprowadzonej wyżej wartości minimalnej $\min \frac{H}{h}=1,115$ (dla $g > g_{gr}$); różnica pochodzi stąd, że dla przyjętego przykładu wartość względna promienia rdzeniowego (0,261) odbiega nieco od przyjętej wyżej wartości średniej (0,25).

4. Przekrój asymetryczny typu dwuteowego i teowego

W przypadku, gdy ciężar własny ulega pełnej kompensacji, wzór na obliczenie stosunku H/h przybiera identyczną postać jak dla przekroju symetrycznego (pkt 3.1.). Zmienia się tylko wartość \bar{F} , wskutek czego i wyniki wykazywać będą różnice. Gdy ciężar własny przekracza granicę ekonomiczną, postać wzorów jest również taka sama jak w punkcie 3.2; zmianie ulega tu prócz \bar{F} ponadto wartość ρ , której wzór przybiera postać

$$\rho' = \frac{\bar{v}' + \bar{r} - \bar{a}}{\bar{r} + \bar{r}'}$$

Wartość ρ' różni się na ogół niewiele tylko od wartości ρ , wskutek czego stosunek H/h nie ulegnie tu istotnej zmianie. W przybliżeniu będzie więc i tu (w obszarze $g > g_{gr}$) $H > 1,11 h$.

W przekroju teowym spodziewać się należy wartości większych, bardziej zbliżonych do tych, jakie otrzymaliśmy dla przekroju prostokątnego. Granica ekonomiczna ciężaru własnego bowiem, jak zobaczymy, niewiele odbiega tu od wartości dla prostokąta. Pod tym względem przekrój teowy różni się bardzo od typu teowego odwróconego, dla którego g_{gr} jest bardziej zbliżone do wartości przekroju dwuteowego.

W celach orientacji przeliczymy kilka typowych przykładów.

4.1. Przekrój dwuteowy asymetryczny (rys. 4)

Przy obliczaniu współczynników \bar{F} , \bar{r} , \bar{r}' korzystać możemy z gotowych tablic.

Dla $\psi=0,15$, $\beta=4$ jest $\bar{F}=1,75$, $\bar{r}=0,208$, $\bar{r}'=0,254$, $v'=0,5494$.

Granica ekonomiczna ciężaru własnego wynosi tu:

$$g_{gr} = \frac{0,5494 - 0,254 - 0,1}{0,208 + 0,254} \cdot p = 0,422 p$$

dla $h=0,40$ m, $b_1=0,07$ m jest $g=2,5 \cdot 1,75 \cdot 0,07 \cdot 0,40=0,122$ t/m.

Dla przyjętego $p=0,5$ t jest $g < 0,422 p$. Z wzoru (12) otrzymujemy

$$\frac{H}{h} = 1,11.$$

Ten sam przekrój dla obciążenia $p = 0,250$ t wymaga zastosowania wzoru (16), gdyż $g > 0,422 p$.

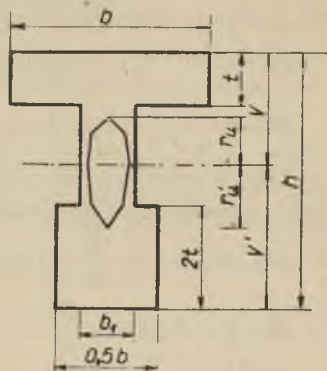
W celu znalezienia wartości H/h obliczamy najpierw

$$c' = \frac{1}{0,122 + 0,250} = 2,69,$$

$$q' = \frac{0,5494 + 0,2080 - 0,1}{0,208 + 0,254} = 1,423$$

i znajdujemy

$$\frac{H}{h} = 1,21.$$



Rys. 4

4.2. Przekrój teowy (rys. 5)

Dla $\psi = 0,15$, $\beta = 4$ jest:

$$\bar{F} = 1,450, \quad v' = 0,632, \quad \bar{r} = 0,153, \quad \bar{r}' = 0,263.$$

Obciążenie użytkowe $p = 0,5$ t/m.

Granica ekonomiczna jest tu

$$g_{gr} = \frac{0,632 - 0,263 - 0,1}{0,153 + 0,263} \cdot p = 0,645 p.$$

Dla $h = 0,40$ m, $b_1 = 0,07$ m jest $g = 2,5 \cdot 1,45 \cdot 0,07 \cdot 0,40 = 0,101$ t/m, a więc wartość mniejsza od granicy ekonomicznej.

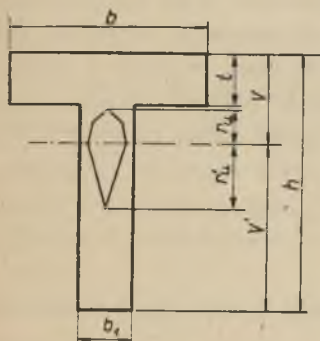
Z wzoru (12) znajdujemy tu $\frac{H}{h} = 1,08$.

Dla $p = 0,250$ t/m, g pozostaje nadal mniejsze od g_{gr} i z wzoru (12) znajdujemy $\frac{H}{h} = 1,19$.

Dla $h = 0,60$ m, $b_1 = 0,10$ m jest $g = 0,217$ t/m,

dla $p = 0,5$ t, jest $g < g_{gr}$ $\frac{H}{h} = 1,21$,

dla $p = 0,250$ t jest $g > g_{gr}$, w grę wchodzi tu już wzór (16), skąd otrzymujemy $\frac{H}{h} = 1,35$.



Rys. 5

4.3. Przekrój teowy odwrócony (rys. 6)

$$\bar{F} = 1,450, \quad v' = 0,368, \quad \bar{r} = 0,263, \quad \bar{r}' = 0,153.$$

Granica ekonomiczna jest więc tu

$$g_{gr} = \frac{0,368 - 0,153 - 0,1}{0,263 + 0,153} = 0,276 p.$$

Dla $h=0,40$ m, $b_1=0,07$ m jest $g=0,101$ t/m, a więc dla $p=0,5$ t poniżej granicy ekonomicznej.

Z wzoru (12) znajdujemy $\frac{H}{h}=1,08$.

Dla $p=0,250$ t zastosowanie ma wzór (16), skąd otrzymujemy $\frac{H}{h}=1,13$.

Dla $h=0,60$ m, $b_1=0,10$ m ciężar własny $g=0,217$ t przekracza granicę ekonomiczną dla obu wartości p ; z wzoru (16) znajdujemy

dla $p=0,5$ t, $\frac{H}{h}=1,13$,

dla $p=0,250$ t, $\frac{H}{h}=1,14$.

Jak długo w obu przekrojach teowych, prostym i odwróconym, jest $g < g_{gr}$, to oczywiście wartość stosunku H/h jest dla jednego i drugiego przekroju taka sama. Jeżeli natomiast jest $g > g_{gr}$, to wzrost wartości H/h zaznacza się w przekroju teowym znacznie wyraźniej niż w typie odwróconym. Jest to zrozumiałe, gdyż wysoko położony środek ciężkości przekroju, a tym samym korzystne usytuowanie jego rdzenia względem dolnej krawędzi pozwala tu na pełniejszą kompensację ciężaru własnego belki kablowej.

Różnica wysokości obu belek, strunowej i kablowej, w przekrojach typu dwuteowego i teowego, jakkolwiek znacznie mniejsza niż w przekroju prostokątnym, wynosi w obszarze $g > g_{gr}$ zawsze jeszcze co najmniej kilkanaście procent (teoretyczne minimum $11,5\%$), jedynie gdy $g < g_{gr}$ różnica ta spaść może poniżej 10% .

Większa wysokość belki przy zachowaniu tych samych wymiarów grubości ścianki i szerokości stopek oraz tego samego stosunku grubości stopek do wysokości belki pociąga za sobą wzrost powierzchni przekroju, proporcjonalny do wzrostu wysokości.

Wzrost ten wyrażony stosunkiem obu wysokości wynosi dla prostokąta

$$\left(\frac{H}{h}-1\right)bh,$$

dla przekroju dwuteowego $\left(\frac{H}{h}-1\right)[2t(b-b_1)+b_1h]$.

Zwiększenie powierzchni przekroju, a więc ilości betonu, wymaga również w tym samym stosunku większej ilości stali. Siła sprężająca jest bowiem, jak wiadomo, proporcjonalna do powierzchni przekroju.

5. Porównanie osiągalnych rozpiętości

Porównanie wysokości belki strunowej z belką kablową dało nam pojęcie o różnicy w ilościach betonu i stali wymaganych dla obu rodzajów belek jednakowej nośności.

Wobec tego, że wysokość belki wiąże się z jej rozpiętością, rozważania nasze możemy w prosty sposób uzupełnić porównując obie kategorie belek z punktu widzenia osiągalnych przez każdą z nich rozpiętości, l dla belki kablowej i L dla belki strunowej, tym razem o jednakowej ich wysokości $H = h$.

5.1. Przekrój prostokątny

Z postaci naszych wzorów podstawowych należy wnioskować, że spadek rozpiętości belki strunowej L w porównaniu z rozpiętością belki kablowej l będzie tego samego rzędu wielkości, jakim był przedtem wzrost jej wysokości.

Dla przekroju prostokątnego, gdy ciężar własny jest niższy od granicy ekonomicznej, znajdujemy z wzorów (1) i (2), wyrażając $M_p = mpl^2$ i $M_{g+p} = m(g+p)L^2$, stosunek obu rozpiętości

$$\frac{L}{l} = \sqrt{\frac{1+n\mu}{1+\frac{g}{p}}} \quad (17)$$

w postaci swej równy stosunkowi $\sqrt{\frac{h^2}{H^2}}$ (pkt 2.1).

Gdy ciężar własny przekracza granicę ekonomiczną, równania podstawowe (5) i (6) prowadzą dla $H = h$ do relacji

$$\frac{L}{l} = \sqrt{\frac{1+n\mu}{2-3\frac{a}{h}}} \quad (18)$$

Wzór ten, jak widzimy, ma postać bardziej prostą niż korespondujący wzór (7) w punkcie 2.2.

Po przekroczeniu granicy ekonomicznej ciężaru własnego stosunek osiągalnych rozpiętości L/l jest wartością stałą, niezależną od obciążenia, a zależną tylko od a/h i $n\mu$.

Dla $\frac{a}{h} = 0,1$ i $n\mu = 0,045$ otrzymujemy tu

$$\frac{L}{l} = \sqrt{\frac{1,045}{1,7}} = 0,78.$$

Do tej wartości zbliża się wartość stosunku h/H w miarę wzrostu obciążenia p , a osiąga ją dla $p = \infty$. Jest to ta sama wartość graniczna, którą określiliśmy wyżej na $1,28 = \frac{1}{0,78}$.

Na granicy osiągnięcia przez ciężar własny swej wartości ekonomicznej, a więc dla prostokąta, gdy $g = 0,7 p$, oba wzory, rzecz jasna, prowadzą do tego samego wyniku.

Graniczną tę rozpiętość otrzymujemy w prosty sposób z warunku pełnego wykorzystania przekroju

$$\frac{M_p}{S} = 2r,$$

czyli

$$\frac{mpl^2}{\frac{h}{2}(\sigma_b + \sigma'_b)} = \frac{h}{3} \cdot \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{\sigma_b + \sigma'_b},$$

skąd dla $m = \frac{1}{8}$ i $\sigma'_b = 0$,

$$l = h \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{\sigma_b}{p}}.$$

Po wstawieniu za h wartości wynikającej z założenia $g = 0,7 p$ (dla $a = 0,1 h$), tzn. $2,5 h = 0,7 p$, czyli $h = 0,28 p$, znajdujemy

$$l_{gr} = 0,322 \sqrt{\sigma_b p}. \quad (19)$$

Powyżej tej wartości stosunek L/l jest stały; dla przyjętego $\frac{a}{h} = 0,1$ i $n\mu = 0,045$ równy jest on, jak widzieliśmy 0,78.

5.2. Przekrój dwuteowy

Z wzorów podstawowych otrzymujemy dla belki kablowej

$$l^2 = \frac{\sigma_b - \sigma'_b}{mp} \cdot \bar{W} b_1 h^2,$$

dla belki strunowej

$$L^2 = \frac{(\sigma_b - \sigma'_b)(1 + n\mu)\bar{W} \cdot b_1 h^2}{m(2,5 \bar{F} b_1 h + p)},$$

skąd

$$\frac{L}{l} = \sqrt{\frac{1 + n\mu}{1 + \frac{g}{p}}}, \quad (20)$$

a więc wzór o identycznej formie jak dla przekroju prostokątnego.

W rozważaniach naszych dotyczących rozpiętości belki kablowej i strunowej doszliśmy więc do ciekawego rezultatu, że różnica rozpiętości obu belek ($l-L$), najmniejsza dla $\frac{g}{p}=0$, rośnie w miarę wzrostu g/p , a więc w miarę wzrostu rozpiętości, osiągając wartość maksymalną przy pewnej rozpiętości granicznej odpowiadającej granicy ekonomicznej ciężaru własnego. Maksymalna wartość tej różnicy pozostaje stała, niezależnie od dalszego wzrostu rozpiętości.

Największa teoretycznie rozpiętość, jaką belka osiągnąć może, będzie dla $p=0$, tj. gdy nieś będzie ona tylko swój ciężar własny.

Rozpiętość tę określimy w prosty sposób z wielkości odcinka, o jaki pod wpływem ciężaru własnego wzniesie się środek ciśnienia, który znajdzie się wtedy w górnej granicy rdzenia. Dla belki kablowej możemy więc napisać

$$\frac{M_g}{S} = v' - a + r,$$

czyli dla prostokąta $2,5 bh ml^2 = \left(\frac{2}{3} h - a\right) \frac{bh}{2} \cdot \sigma_b$, stąd dla $m = \frac{1}{8}$, $a = 0,1 h$

$$l_{\max} = 0,95 \sqrt{\sigma_b h} \quad (l \text{ i } h \text{ w } m, \sigma_b \text{ w } t/m^2)$$

lub też w postaci zależnej od smukłości belki

$$l_{\max} = 0,906 \sigma_b \frac{h}{l}.$$

Dla belki strunowej analogiczny warunek ma postać

$$\frac{M_g}{S} = \frac{h}{3},$$

skąd znajdujemy

$$L = 0,745 \sqrt{\sigma_b h}.$$

Otrzymaliśmy zgodnie z przewidywaniem tę samą stałą wartość stosunku

$$\frac{L}{l} = \frac{0,745}{0,95} = 0,78.$$

Dla przekroju dwuteowego znajdujemy w podobny sposób dla belki kablowej z warunku:

$$2,5 F_b ml^2 = F_b \cdot \frac{\sigma_b}{2} (0,5 h - 0,1 h + 0,25 h),$$

$$l_{\max} = 1,02 \sqrt{\sigma_b h}$$

lub w postaci

$$l_{\max} = 1,04 \sigma_b \frac{h}{l}.$$

Dla belki strunowej analogiczny warunek

$$\frac{M_g}{S} = \frac{h}{2}$$

prowadzi do

$$L = 0,915 \sqrt{\sigma_b h},$$

co stwierdza stałość wartości stosunku $\frac{L}{l} = 0,897$.

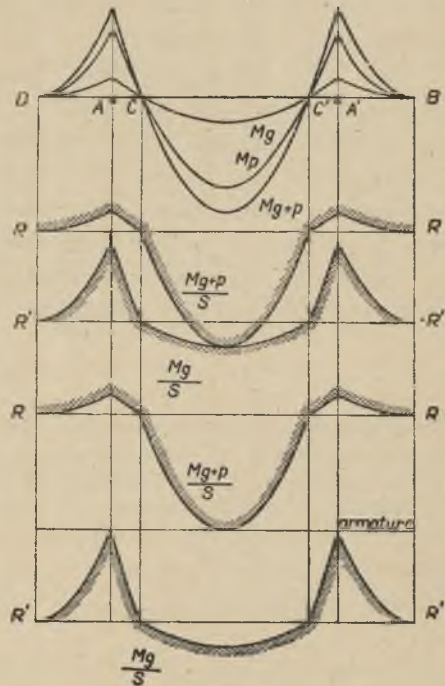
6. Momenty zmiennego znaku

Dotąd rozpatrywaliśmy belki poddane momentowi jednego znaku. Gdy belki narażone są na momenty o zmiennym kierunku działania, wtedy wykazane wyżej różnice między belką kablową a strunową wystąpią w bardziej jaskrawym stopniu.

Weźmy np. pod uwagę belkę wystającą, dla której rys. 7 przedstawia wykres obwiedni granicznych. Linia (algebraiczna) największych momentów jest tu w partii między końcem belki a punktem zerowym linią $-M_g$, zaś w partii środkowej $M_g + M_p$. Linia najmniejszych momentów jest między punktem B a C linią $M_g + M_p$, a w partii środkowej, linią M_g .

Tym samym w belce kablowej (rys. 7b) odległość punktów rdzeniowych wynosi M_p/S . W belce strunowej, aby można było poprowadzić prostą w obrębie obszaru zakreślonego obwiedniami, odległość ta musi być równa co najmniej sumie bezwzględnych wartości momentów maksymalnych w przęśle i minimalnych na podporze (rys. 7c).

Wzrost wysokości belki strunowej w porównaniu z kablową byłby tu tak znaczny, że śmiało można twierdzić, iż w ustrojach, gdzie liczyć należy się ze zmianą znaku momentów, belka strunowa nie może wcho-



Rys. 7

dzić w rachubę. Inaczej, rzecz jasna, gdy konieczność prowadzenia strun trasą prostą zrównoważyć można zakrzywieniem elementu czy też zmienną jego wysokością.

* * *

W rozważaniach naszych widzieliśmy, że zwiększenie wymiarów przekroju belki strunowej w porównaniu z belką kablową wzrasta szybko wraz z wysokością belki. Wynika stąd, że domeną zastosowania betonu strunowego mogą być tylko konstrukcje niedużej rozpiętości.

Fakt ten nabiera jeszcze bardziej wyraźnego obrazu, gdy weźmie się pod uwagę wielkość sił sprężających, jakie praktycznie kreować możemy jednym i drugim systemem sprężania.

Kabel jako jednostka sprężająca przenieść może siłę od 20 do 200 ton w zależności od ilości (8 do 64) i średnicy (5 do 7 mm) drutów, z których jest on złożony. Aby siły takie przenieść za pomocą strun (2,5 mm), ilość ich musiałaby być 30- do 300-krotnie większa niż ilość kabli. Łatwo sobie uzmysłowić, jakie wielkie trudności powstać by musiały przy rozmieszczeniu i prowizorycznym zakotwieniu tak dużej ilości strun.

Tak więc obok względów natury ekonomicznej również i względy techniczne sprawiają, że konstrukcje z betonu strunowego nie mogą mieć tak wszechstronnego zastosowania jak konstrukcje z betonu kablowego, a ograniczyć się muszą do ustrojów niedużych rozmiarów. Wtedy to ujawnić się mogą nawet korzyści zastosowania strunobetonu zwłaszcza przy seryjnym wyrobie elementów prefabrykowanych, gdzie niezbędne do tego celu, a kosztowne urządzenia stają się dzięki masowej produkcji prefabrykatów szybko opłacalne.

LITERATURA

- [1] Olszak W. *Konstrukcje wstępnie sprężone. Monografia*, tom I (w druku).
- [2] Сахновский К. В., *Железобетонные конструкции*, Москва 1951.
- [3] Bruggeling A. S. G., *Voorgespannen beton*, Delft 1950.
- [4] Guyon Y., *Béton précontraint*, Paryż 1951.