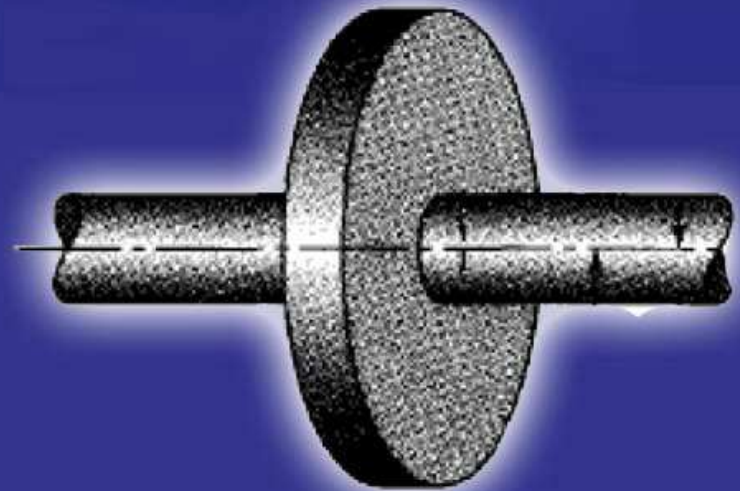


BUKU AJAR

TRANSFER **MASSA** DAN PANAS



Dr. Herti Utami, S.T., M.T.
Ir. Azhar, M.T.

BUKU AJAR

TRANSFER MASSA DAN PANAS

Dr. Herti Utami, S.T., M.T. | Ir. Azhar, M.T.

ISBN 9789799809551



9 789799 809551

Tekkim
Publishing

BUKU AJAR

**TRANSFER MASSA DAN
PANAS**

Dr. Herti Utami, S.T., M.T.

Ir. Azhar, M.T.

Tekkim Publishing

Bandar Lampung

2017

TRASFER MASSA DAN PANAS

Penulis dan tata letak : Dr. Herti Utami, S.T., M.T.

Hak Cipta @Herti Utami, dan Azhar

Tidak ada bagian sedikitpun dari bahan cetakan ini yang boleh diproduksi ulang, disimpan dalam suatu sistem yang dapat diambil kembali atau diproduksi ulang dalam bentuk atau cara-cara lainnya secara elektronik, mekanik, dengan fotokopi, tanpa izin tertulis terlebih dahulu dari penulis.

ISBN 9789799809551
Cetakan Pertama 2017

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT atas ridhonya, Buku Ajar Transfer Massa dan Panas ini dapat diselesaikan. Buku ajar ini digunakan sebagai pendukung dalam mata kuliah Transfer Massa dan Panas, agar memudahkan mahasiswa Teknik Kimia, Fakultas Teknik, Universitas Lampung memahami prinsip-prinsip transfer massa dan panas dan aplikasinya dalam kasus yang melibatkan transfer massa dan panas di industry kimia. Mata kuliah tersebut dalam struktur kurikulum pada Jurusan Teknik Kimia merupakan mata kuliah wajib bagi mahasiswa semester 3, dan merupakan prasyarat bagi beberapa mata kuliah di semester selanjutnya. Mengingat beban matakuliah ini sebesar 3 SKS, tidak semua hal dibahas dengan rinci dan mendalam pada buku ini, namun sudah mencakup asas-asas pokok tentang transfer massa dan panas. Buku ini dibagi dalam 5 bab dan diuraikan dengan rinci dalam tiap sub bab.

Akhir kata, semoga buku ini bermanfaat bagi seluruh kalangan, khususnya mahasiswa Teknik Kimia, Fakultas Teknik, Universitas Lampung, meskipun masih jauh dari sempurna. Masih diperlukan kritik dan saran yang membangun buat penulis, demi perbaikan dan revisi buku ini ke depan. Terima kasih penulis ucapkan kepada Jurusan

Teknik Kimia dan Fakultas Teknik, serta Universitas Lampung yang telah memberikan dukungan dalam penerbitan buku ajar ini.

Bandar Lampung, November 2017

Penulis

DAFTAR ISI

	hal
Halaman Sampul	1
Kata Pengantar	3
Daftar Isi	5
BAB I. Konsep Dasar Difusi Massa Secara Molekuler	8
1.1. Pengertian perpindahan massa dan difusi	8
1.2. Kompetensi Dasar	11
1.3. Istilah-istilah yang menyangkut konsentrasi, fraksi massa dan kecepatan massa	11
1.4. Estimasi difusivitas gas dan difusivitas cairan	16
1.5. Difusi Molekuler Fasa Gas	19
1.6. Difusi Molekuler Fasa Cair	22
1.7. Soal-Soal Latihan	26
Daftar Pustaka	27
BAB II. Perpindahan Massa Antar Fasa	29
2.1. Pengertian perpindahan massa antar fasa	29
2.2. Kompetensi Dasar	30
2.3. Transfer massa antar fasa padat – fluida, transfer massa satu film	31
2.4. Transfer massa antar fasa fluida – fluida, transfer massa dua film	33
2.5. Soal-Soal Latihan	36
Daftar Pustaka	37
BAB III. Perpindahan Massa Aliran Laminar Satu Dimensi dalam Cairan dan Padatan	38
3.1. Perpindahan massa aliran laminar satu	38
	5

dimensi dalam cairan dan padatan	
3.2. Kompetensi Dasar	41
3.3. Kasus : Difusi melalui film gas yang stagnan	42
3.4. Kasus : Difusi yang digabungkan dengan reaksi kimia dengan <i>heterogeneous chemical reaction</i>	45
3.5. Kasus : Difusi yang digabungkan dengan reaksi kimia dengan <i>homogeneous chemical reaction</i> (absorpsi dengan reaksi kimia)	50
3.6. Soal-Soal Latihan	53
Daftar Pustaka	54
BAB IV. Konsep Dasar Perpindahan Panas	55
4.1. Pengertian perpindahan panas	55
4.2. Kompetensi Dasar	56
4.3. Mekanisme perpindahan panas secara konduksi	57
4.4. Mekanisme perpindahan panas antar fasa (konveksi)	58
4.5. Mekanisme perpindahan panas radiasi	62
4.6. Perpindahan panas konduksi keadaan <i>steady state</i> satu dimensi	63
4.7. Perpindahan panas konduksi keadaan <i>steady state</i> pada dinding berlapis	67
4.8. Kombinasi perpindahan panas konveksi dan konduksi dan koefisien perpindahan panas total	70
4.9. Tebal Isolasi Kritis	74
4.10. Soal-Soal Latihan	76
Daftar Pustaka	78
Bab V. Perpindahan Energi/Panas Aliran Laminar Satu Dimensi dalam Cairan dan Padatan	79
5.1. Perpindahan panas aliran laminar satu dimensi dalam cairan dan padatan	79

5.2. Kompetensi Dasar	80
5.3. Macam-macam kondisi batas untuk perpindahan panas	81
5.4. Kasus : Perpindahan panas konduksi dengan sumber panas dari arus listrik	83
5.5. Kasus ; Perpindahan panas konduksi dengan panas yang dibangkitkan dari bahan nuklir berbentuk bola	87
5.6. Kasus : Perpindahan panas konduksi melalui susunan dinding datar (<i>composite walls</i>)	91
5.7. Kasus : Perpindahan panas konduksi melalui susunan dinding silinder (<i>composite cylindrical wall</i>)	95
5.8. Kasus :Perpindahan panas pada <i>cooling fin</i> bentuk sederhana	98
5.9. Kasus :Perpindahan panas atau panas yang hilang pada <i>a circular cooling fin</i>	103
5.10. Soal-Soal Latihan	107
Daftar Pustaka	109

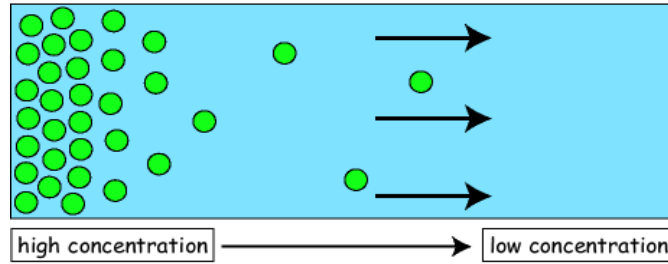
BAB I. Konsep Dasar Difusi Massa Secara Molekuler

1.1. Pengertian Perpindahan Massa dan Difusi

Peristiwa perpindahan massa atau transfer massa atau difusi banyak dijumpai di dalam kehidupan sehari-hari, maupun di industri. Contoh peristiwa transfer massa adalah larutnya kristal gula dalam air, artinya komponen gula mendifusi ke fase air, larutnya kopi ke dalam air, terjerapnya zat beracun ke dalam arang, larutnya oksigen ke dalam darah, dan pada proses fermentasi, nutrisi dan oksigen yang terlarut dalam larutan mendifusi ke mikroorganisme dll.

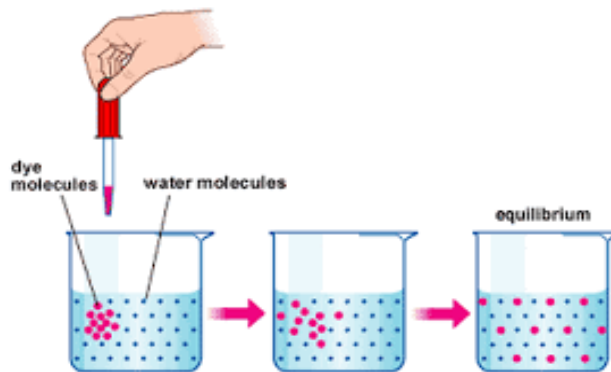
Di Industri, pemisahan komponen-komponen dari campurannya menggunakan alat transfer massa seperti absorpsi, distilasi terjadi karena adanya transfer massa. Kondisi optimum suatu proses dapat ditentukan jika mekanisme dalam peristiwa transfer massa diketahui. Transfer massa termasuk bagian dari *rate processes* (proses transfer) yang merupakan salah satu *Chemical Engineering Tools*, yang merupakan konsep-konsep atau prinsip-prinsip seorang *Chemical Engineer* dalam menyelesaikan tugasnya.

Transfer massa atau perpindahan massa juga dapat disebut sebagai perpindahan suatu komponen dari satu lokasi ke lokasi lain dikarenakan adanya ketidakseimbangan konsentrasi. Pada peristiwa difusi ada *driving force* yaitu adanya perbedaan (gradien) konsentrasi.



Gambar 1.1 Suatu gambaran perpindahan massa

Perpindahan massa adalah perpindahan suatu komponen dari konsentrasinya tinggi menuju ke konsentrasi yang rendah seperti yang digambarkan dalam Gambar 1,1. Transfer massa atau perpindahan massa juga dapat didefinisikan sebagai gerakan molekul-molekul dari elemen fluida yang disebabkan adanya suatu gaya pendorong (*driving force*). Misal: difusi molekuler, difusi olakan dan transfer massa konveksi. Difusi molekuler dapat dilihat pada contoh Gambar 1.2.



Gambar 1.2. Difusi zat warna dalam air

Difusi molekuler : transfer massa yang disebabkan oleh gerakan molekuler secara acak dan dominan pada fluida yang diam atau fluida yang mengalir laminar. Difusi olakan : transfer massa yang dibantu dengan dinamika aliran. Konveksi : perpindahan massa dari suatu permukaan ke fluida yang bergerak atau juga disebut dengan perpindahan massa antar fasa.

Dinamika sistem berpengaruh terhadap kecepatan transfer massa. Contoh adalah gula yang diberikan dalam air teh yang diaduk ternyata akan jauh lebih cepat melarut dan menyebar ke dalam air teh, dibandingkan dengan apabila air teh tersebut tidak diaduk.

Difusi disebabkan oleh gerakan molekuler secara random. Kecepatan gerakan molekuler tersebut bervariasi, bisa sangat lambat, misal dalam fasa gas : 10 cm/menit, dalam fasa cair : 0,05 cm/menit dalam fasa padat : 0,00001 cm/menit. Proses difusi ini bisa menjadi faktor yang mengontrol suatu peristiwa, misal : reaksi dengan katalis padatan berpori.

Pemisahan (*separation*) sangat berperan dalam industri kimia, berdasarkan gaya dorong untuk terjadinya proses pemisahan, maka proses pemisahan yang didasarkan pada perpindahan massa atau perpindahan panas antara lain: distilasi, absorpsi, adsorpsi, *stripping*, ekstraksi, humidifikasi, pengeringan, pemisahan dengan membran dll

banyak digunakan. Proses perpindahan massa juga berperan pada proses reaksi yang melibatkan lebih dari satu fasa (reaksi heterogen) misal pada reaksi gas-cair, reaksi cair-cair yang *immiscible*, reaksi padat-gas, reaksi padat-cair maupun reaksi katalitik heterogen.

1.2. Kompetensi Dasar

1. Kompetensi Umum (TIU)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan mampu menjelaskan tentang konsep difusi molekuler dan mahasiswa dapat menghitung kecepatan difusi atau kecepatan transfer massa.

2. Kompetensi Khusus (TIK)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan dapat mengestimasi besarnya difusivitas massa gas dan cairan untuk sistem biner dan dapat menghitung fluks massa.

1.3. Istilah-istilah yang menyangkut konsentrasi, fraksi massa dan kecepatan massa

1.3.1. Konsentrasi

Biasanya dinyatakan dalam konsentrasi molar (C_A), yaitu jumlah mol A yang ada per satuan volum campuran.

$$C_A = \frac{\text{mol A}}{\text{Volume campuran}} \quad (1)$$

Cara lain yaitu dalam konsentrasi massa (ρ_A), yaitu jumlah massa A per satuan volum campuran,

$$\rho_A = \frac{\text{massa A}}{\text{Volume campuran}} \quad (2)$$

Jika M_A adalah berat molekul komponen A. Hal ini dapat dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$C_A = \frac{\rho_A}{M_A} \quad (3)$$

Untuk campuran dalam fasa gas, konsentrasi komponen dapat juga dinyatakan dalam tekanan parsialnya. Jika dianggap hukum gas ideal berlaku, maka konsentrasi molar A dapat dinyatakan dengan persamaan berikut.

$$C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{P_A}{RT} \quad (4)$$

Dimana P_A adalah tekanan parsial komponen A, n_A adalah jumlah mol komponen A, V adalah volum gas dan T adalah suhu, sedangkan R adalah konstanta gas.

1.3.2. Fraksi Massa

Konsentrasi dapat juga dinyatakan dalam fraksi mol atau fraksi berat. Fraksi mol komponen A untuk campuran gas dan cairan adalah perbandingan antara konsentrasi molar komponen A terhadap kerapatan molar total. Jika dinyatakan untuk gas :

$$y_A = \frac{C_A}{C} \quad (5)$$

Sedangkan untuk cairan seperti pada persamaan berikut,

$$x_A = \frac{C_A}{C} \quad (6)$$

Fraksi berat komponen A untuk campuran gas dan cairan adalah perbandingan antara konsentrasi massa A terhadap kerapatan massa total. Untuk gas dapat dituliskan persamaan berikut.

$$y_A = \frac{\rho_A}{\rho} \quad (7)$$

Sedangkan untuk cairan seperti pada persamaan berikut,

$$x_A = \frac{\rho_A}{\rho} \quad (8)$$

Apabila hukum gas ideal berlaku, konsentrasi komponen A juga dapat dinyatakan dalam tekanan parsial menurut hukum Dalton, seperti pada persamaan berikut ini.

$$p_A = y_A P \quad (9)$$

P adalah tekanan total campuran gas dan p_A adalah tekanan parsial komponen A.

1.3.3. Kecepatan Massa

Dalam campuran gas setiap spesies/komponen mempunyai kecepatan sendiri-sendiri, sehingga untuk menentukan kecepatan campuran perlu menentukan kecepatan rata-rata dari semua spesies yang ada. Kecepatan rata-rata massa untuk campuran multi komponen dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i u_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i u_i}{\rho} \quad (10)$$

Untuk kecepatan rata-rata molar untuk campuran multi komponen dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i U_i}{\sum_{i=1}^n C_i} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i U_i}{C} \quad (11)$$

1.3.4. Hukum Fick

Dinyatakan dalam persamaan :

$$J_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} \quad (12)$$

J_{Az} adalah fluks molar A dalam arah z relatif terhadap kecepatan molar rata-rata. dC_A/dz adalah gradien konsentrasi dalam arah z. Dan D_{AB} adalah difusivitas massa atau koefisien difusi untuk komponen A yang mendifusi melalui komponen B.

Hubungan yang lebih umum mengenai fluks yang tidak terbatas pada sistem yang isothermal dan isobarik dikemukakan oleh de Groot.

$$\text{Fluks} = -(\text{kerapatan keseluruhan})(\text{koef difusi})(\text{gradien konsentrasi}) \quad (13)$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk persamaan :

$$J_{Az} = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dz} \quad (14)$$

Untuk sistem biner dengan kecepatan rata-rata molar yang tetap dalam arah z, fluks dapat juga dinyatakan dengan persamaan:

$$J_{Az} = C_A(u_{Az} - U_z) \quad (15)$$

Persamaan tersebut sama dengan persamaan sebelumnya sehingga :

$$J_{Az} = C_A(u_{Az} - U_z) = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dz} \quad (16)$$

Atau dapat dituliskan persamaannya sebagai berikut:

$$C_A u_{Az} = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dz} + C_A U_z \quad (17)$$

$$C_A U_z = C_A u_{Az} + CD_{AB} \frac{dy_A}{dz} \quad (18)$$

Untuk sistem biner, U_z dapat dihitung dengan persamaan berikut ini.

$$U_z = \frac{1}{C} (C_A u_{Az} + C_B u_{Bz}) \quad (19)$$

Jika $y_A = \frac{C_A}{C}$, maka persamaan menjadi :

$$C_A U_z = y_A (C_A u_{Az} + C_B u_{Bz}) \quad (20)$$

Persamaan (20) dapat dituliskan dalam bentuk lain :

$$C_A u_{Az} = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dz} + y_A (C_A u_{Az} + C_B u_{Bz}) \quad (21)$$

Karena u_{Az} dan u_{Bz} adalah kecepatan relatif terhadap sumbu z yang tetap, maka $C_A u_{Az}$ dan $C_B u_{Bz}$ adalah fluks komponen A dan B relatif terhadap koordinat z yang tetap. Dapat dituliskan dengan persamaan berikut ini.

$$N_A = C_A u_A \quad (22)$$

$$N_B = C_B u_B \quad (23)$$

Sehingga persamaan (21) menjadi persamaan berikut.

$$N_{Az} = -CD_{AB} \frac{dy_A}{dz} + y_A (N_{Az} + N_{Bz}) \quad (24)$$

Atau

$$N_{Az} = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dz} + x_A (N_{Az} + N_{Bz}) \quad (25)$$

Secara umum persamaan Fick untuk sistem biner dapat dituliskan dengan persamaan berikut ini.

$$N_A = (N_A + N_B)x_A - D_{AB}C \frac{dx_A}{dz} \quad (26)$$

1.4. Estimasi difusivitas gas dan difusivitas cairan

D_{AB} yaitu suatu faktor perbandingan yang disebut koefisien difusi atau difusivitas massa. Satuannya dalam ft^2/jam atau cm^2/det (L^2/t). Koefisien difusi merupakan sifat spesifik sistem yang tergantung kepada suhu, tekanan dan komposisi sistem.

1. 4.1. Koefisien difusi gas

Untuk memperkirakan harga koefisien difusi gas Hirschfelder, Bird dan Spatz dengan menggunakan tegangan Lennard-Jones, memberikan sebuah persamaan untuk difusivitas pasangan gas-gas non polar yaitu :

$$D_{AB} = \frac{0,001858T^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}\right)^{\frac{1}{2}}}{P\sigma_{AB}^2\Omega} \quad (27)$$

D_{AB} adalah difusivitas massa A melalui B dalam cm^2/det , T adalah suhu dalam K, P tekanan dalam atm, M_A berat molekul A dan M_B berat molekul B, σ adalah diameter tumbukan, suatu parameter Lennard Jones dalam Angstrom dan Ω adalah integral tumbukan (tak berdimensi).

Besaran Ω sebagai fungsi dari $\frac{kT}{\epsilon_{AB}}$. Besaran kelompok $\left(\frac{kT}{\epsilon_{AB}}\right)$ dapat dilihat pada appendix K (Welty, 1984). Dengan k

adalah konstanta Boltzman = $1,38 \times 10^{-16}$ erg/K dan ϵ_{AB} adalah tenaga molekuler, yaitu tenaga interaksi untuk sistem biner AB yang merupakan parameter Lennard-Jones dalam erg.

Untuk sistem biner pasangan molekul non polar, dapat digunakan persamaan berikut ini.

$$\sigma_{AB} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} \quad (28)$$

Dan

$$\frac{\epsilon_{AB}}{k} = \sqrt{\frac{\epsilon_A}{k} \frac{\epsilon_B}{k}} \quad (29)$$

Jika tanpa adanya data eksperimental, parameter Lennard-Jones dapat juga diperkirakan dari hubungan empiris persamaan-persamaan berikut :

$$\sigma = 1,18V_b^{\frac{1}{3}} \quad (30)$$

$$\sigma = 0,841V_c^{\frac{1}{3}} \quad (31)$$

$$\sigma = 2,44 \left(\frac{T_c}{P_c} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (32)$$

$$\frac{\epsilon_A}{k} = 0,77T_c \quad (33)$$

$$\frac{\epsilon_A}{k} = 1,15T_b \quad (34)$$

Dimana V_b adalah volum molar pada titik didih normal dalam cm^3/gmol (bisa dievaluasi dengan Tabel 24.3, Welty, 1984). V_c adalah volum molar kritis dalam cm^3/gmol dan T_c adalah suhu kritis dalam K, T_b adalah titik didih normal dalam K dan P_c adalah tekanan kritis dalam atm.

Persamaan Hirschfelder menunjukkan bahwa difusivitas gas sebanding dengan suhu dan berbanding terbalik dengan tekanan, serta fungsi tumbukan. Persamaan Hirschfelder dapat pula dituliskan sebagai berikut:

$$D_{AB,T_2P_2} = D_{AB,T_1P_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{P_1}{P_2}\right) \left(\frac{\Omega T_1}{\Omega T_2}\right) \quad (35)$$

Hubungan difusivitas gas dengan tekanan berlaku untuk tekanan sedang sampai dengan tekanan operasi 25 atm. Umumnya harga $\Omega T_1 = \Omega T_2$. Sehingga persamaan (35) dapat disederhanakan menjadi persamaan (36) :

$$D_{AB,T_2P_2} = D_{AB,T_1P_1} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad (36)$$

Difusivitas suatu gas melalui suatu campuran gas multikomponen dapat ditentukan dengan persamaan berikut ini.

$$D_{Am} = \frac{1}{\frac{y_B}{D_{AB}} + \frac{y_C}{D_{AC}} + \frac{y_D}{D_{AD}} + \dots} \quad (37)$$

D_{Am} adalah difusivitas gas A melalui campuran gas multikomponen dan D_{AB} , D_{AC} , D_{AD} adalah difusivitas A melalui B, C, D dan seterusnya, sedangkan y_B , y_C , y_D adalah fraksimol komponen B, C, D dan seterusnya dengan dasar bebas A.

1.4.2. Koefisien difusi Cairan

Difusivitas cairan harganya berubah-ubah dengan konsentrasi. Harganya diperkirakan dengan menggunakan

korelasi empiris, untuk larutan bukan elektrolit encer, Wilke and Chang mengajukan korelasi dengan persamaan berikut ini.

$$\frac{D_{AB}\mu}{T} = \frac{7,4 \times 10^{-8} (\Phi_B M_B)^{\frac{1}{2}}}{V_A^{0,6}} \quad (38)$$

D_{AB} adalah difusivitas solut A melalui solven B dalam cm^2/det , μ adalah viskositas larutan dalam cp, T adalah suhu dalam K, M_{AB} berat molekul solven, V_A adalah volum molar solut dalam cm^3/gmol (ditentukan dengan Hukum Kopp, dievaluasi dari Tabel 24.5, Welty, 1984) dan Φ_B adalah parameter asosiasi solven B, parameter asosiasi untuk beberapa solven dapat dilihat pada hal 417 (Welty, 1984).

1.5. Difusi Molekuler Fasa Gas

Difusi molekuler adalah difusi yang berhubungan dengan gerakan-gerakan molekul melalui suatu alat yang disebabkan oleh tenaga panasnya. Kecepatan rata-rata molekul tergantung suhu. Difusi molekuler terjadi dalam fluida yang diam atau fluida yang bergerak secara laminar.

Difusi molekuler satu dimensi tanpa reaksi kimia

Persamaan differensial umum untuk transfer massa komponen A adalah :

$$\frac{\partial}{\partial x} N_{Ax} + \frac{\partial}{\partial y} N_{Ay} + \frac{\partial}{\partial z} N_{Az} + \frac{\partial C_A}{\partial \theta} - r_A = 0 \quad (39)$$

Untuk keadaan tetap atau *steady state*, difusi satu dimensi dalam arah z, maka persamaan (39) dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial z} N_{Az} = 0 \quad (40)$$

Fluks molar N_{Az} adalah tetap sepanjang arah z. Fluks molar dalam arah z untuk sistem biner pada suhu dan tekanan yang tetap dapat dinyatakan dengan persamaan Ficks.

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} + y_A(N_{Az} + N_{Bz}) \quad (41)$$

1.5.1 Difusi ekuimolar arus berlawanan dalam keadaan tetap (*steady state*)

Dalam hal ini N_{Az} adalah tetap, dan $N_{Az} = -N_{Bz}$ sehingga persamaan (41) berubah menjadi lebih sederhana, seperti pada persamaan berikut (42).

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} \quad (42)$$

Anggapan D_{AB} adalah tetap, maka persamaan (42) dapat diintegrasikan sehingga diperoleh persamaan (43).

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}}{z} (C_{A1} - C_{A2}) \quad (43)$$

Dimana $z = z_2 - z_1$, jika hukum gas ideal berlaku, maka C_A dapat dihitung sesuai dengan persamaan gas ideal, seperti pada persamaan (44)

$$C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{P_A}{RT} \quad (44)$$

Dengan mensubstitusi harga C_A persamaan perpindahan massa (43) berubah menjadi seperti pada persamaan (45).

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}}{RTz} (P_{A1} - P_{A2}) \quad (45)$$

1.5.2. Difusi A melalui B yang diam dalam keadaan tetap (*steady state*)

Dalam hal ini N_{Az} adalah tetap atau diam, dan karena B tidak mendifusi maka $N_{Bz} = 0$, persamaan (41) dapat disederhanakan menjadi persamaan (46).

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} + y_A(N_{Az}) \quad (46)$$

Atau persamaan (46) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut.

$$N_{Az} = -\frac{CD_{AB}}{(1-y_A)} \frac{dy_A}{dz} \quad (47)$$

Jika dianggap D_{AB} adalah tetap, maka persamaan (47) dapat diintegrasikan sehingga diperoleh persamaan (48).

$$N_{Az} = \frac{CD_{AB}}{z} \ln \frac{(1-y_{A2})}{(1-y_{A1})} \quad (48)$$

Konsentrasi rata-rata logaritmis komponen B didefinisikan dengan persamaan (49).

$$y_{Blm} = \frac{y_{B2} - y_{B1}}{\ln \left(\frac{y_{B2}}{y_{B1}} \right)} \quad (49)$$

Untuk sistem biner,

$$y_{B2} = 1 - y_{A2} \quad (50)$$

$$y_{B1} = 1 - y_{A1} \quad (51)$$

Sehingga jika persamaan (49) disubstitusi dengan persamaan (50) dan (51) maka persamaannya menjadi :

$$y_{B1m} = \frac{y_{A1} - y_{A2}}{\ln\left(\frac{1-y_{A2}}{1-y_{A1}}\right)} \quad (52)$$

Dan persamaan (48) bisa dituliskan menjadi persamaan (53).

$$N_{Az} = \frac{CD_{AB}}{zy_{B1m}} (y_{A1} - y_{A2}) \quad (53)$$

Jika hukum gas ideal berlaku maka persamaan (53) dapat juga dituliskan dengan persamaan (54) berikut ini.

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}P}{RTz p_{B1m}} (p_{A1} - p_{A2}) \quad (54)$$

1.5.3. Difusi A melalui campuran multikomponen yang tidak mendifusi dalam keadaan tetap (*steady state*)

Jika difusi A melalui campuran multikomponen yang tidak mendifusi (diam) dalam keadaan tetap, maka persamaan (54) di atas berlaku dengan mengganti D_{AB} dengan difusivitas efektif D_{Am} yang didefinisikan pada persamaan (37) dan mengganti tekanan parsial rata-rata logaritmis B dengan p_{im} .

1.6. Difusi Molekuler Fasa Cair

Seperti halnya untuk fasa gas, fluks molar dalam arah z untuk sistem biner dapat dinyatakan dengan persamaan berikut ini.

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} + x_A(N_{Az} + N_{Bz}) \quad (55)$$

Difusivitas fasa cairan harganya tergantung konsentrasi.

1.6.1 Difusi ekuimolar arus berlawanan dalam keadaan tetap (*steady state*)

Dalam hal ini N_{Az} adalah tetap, dan $N_{Az} = -N_{Bz}$ sehingga persamaan Fick pada persamaan (55) dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut.

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} \quad (56)$$

Anggapan D_{AB} adalah tetap, maka persamaan (56) dapat diintegrasikan sehingga diperoleh persamaan berikut ini :

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}}{z} (C_{A1} - C_{A2}) \quad (57)$$

Dimana $z = z_2 - z_1$. Persamaan (57) juga dapat dituliskan seperti pada persamaan (58).

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}\bar{C}}{z} (x_{A1} - x_{A2}) \quad (58)$$

\bar{C} adalah konsentrasi rata-rata larutan antara seksi 1 dan seksi 2, yang dapat dituliskan seperti pada persamaan (59).

$$\bar{C} = \frac{C_1 + C_2}{2} \quad (59)$$

1.6.2. Difusi A melalui B yang diam dalam keadaan tetap (*steady state*)

Dalam hal ini N_{Az} adalah tetap, dan karena B tidak mendifusi maka $N_{Bz} = 0$, sehingga persamaan (55) dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut.

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} + x_A(N_{Az}) \quad (60)$$

Atau persamaan (60) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut.

$$N_{Az} = - \frac{D_{AB}\bar{C}}{(1-x_A)} \frac{dx_A}{dz} \quad (61)$$

Jika dianggap D_{AB} adalah tetap, maka persamaan (61) dapat diintegrasikan sehingga diperoleh persamaan (62).

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}\bar{C}}{z} \ln \frac{(1-x_{A2})}{(1-x_{A1})} \quad (62)$$

Konsentrasi rata-rata logaritmis komponen B didefinisikan sama dengan persamaan (49).

$$x_{BIm} = \frac{x_{B2} - x_{B1}}{\ln \left(\frac{x_{B2}}{x_{B1}} \right)} \quad (63)$$

Untuk sistem biner,

$$x_{B2} = 1 - x_{A2} \quad (64)$$

$$x_{B1} = 1 - x_{A1} \quad (65)$$

Sehingga jika persamaan (63) disubstitusi dengan persamaan (64) dan (65) maka persamaannya menjadi :

$$x_{BIm} = \frac{x_{A1} - x_{A2}}{\ln \left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}} \right)} \quad (66)$$

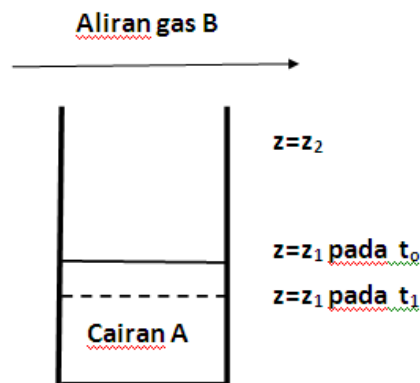
Dan persamaan (62) bisa dituliskan dalam bentuk lain seperti pada persamaan (67).

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}\bar{C}}{zx_{BIm}} (x_{A1} - x_{A2}) \quad (67)$$

1.6.3. Difusi A melalui B yang diam (tidak mendifusi) dalam keadaan tetap semu (*pseudo steady state*)

Dalam kebanyakan operasi transfer massa, salah satu batas-batas dapat berpindah dengan waktu. Jika perubahan panjang lintasan difusi adalah kecil untuk periode waktu yang lama, maka dapat digunakan model difusi dalam keadaan tetap semu atau *pseudo steady state*.

Ditinjau sebuah sel difusi seperti pada Gambar 1.3. berikut:



Gambar 1.3. Sel difusi dengan permukaan cairan yang bergerak

Jika perbedaan permukaan cairan A dalam interval waktu yang ditinjau hanya merupakan sebagian kecil dari lintasan difusi total, sedangkan $t_1 - t_0$ merupakan jangka waktu yang relatif lama, maka pada periode tersebut fluks molar dapat dihitung dengan persamaan berikut ini.

$$N_{Az} = \frac{CD_{AB}}{zy_{BIm}} (y_{A1} - y_{A2}) \quad (68)$$

Hubungan antara fluks molar N_{Az} dengan banyaknya A yang menyinggalkan cairan adalah seperti pada persamaan berikut :

$$N_{Az} = \frac{C_{AL}dz}{dt} \quad (69)$$

Dengan C_{AL} adalah konsentrasi molar A dalam fasa cair, sehingga pada keadaan *pseudo steady state* maka persamaan (69) disubstitusi dengan persamaan (68) maka persamaan menjadi sebagai berikut.

$$\frac{C_{AL}dz}{dt} = \frac{CD_{AB}}{zy_{B1m}}(y_{A1} - y_{A2}) \quad (70)$$

C menunjukkan konsentrasi molar total dalam fasa gas. Jika persamaan (70) diintegrasikan pada batas $t=0$ dan $t=t$ yang sesuai dengan $z=z_{i0}$ dan $z=z_t$. Diperoleh persamaan (71).

$$t = \frac{C_{AL}y_{B1m}}{CD_{AB}(y_{A1}-y_{A2})} \left(\frac{z_t^2 - z_{t0}^2}{2} \right) \quad (71)$$

Untuk menghitung difusivitas gas dari data percobaan dengan menggunakan sel difusi, maka dapat digunakan persamaan (71) untuk menghitung D_{AB} .

$$D_{AB} = \frac{C_{AL}y_{B1m}}{C(y_{A1}-y_{A2})} \left(\frac{z_t^2 - z_{t0}^2}{2t} \right) \quad (72)$$

1.7. Soal-Soal Latihan

1. Tentukan difusivitas gas berikut :

- a. Fenol-udara pada 30°C dan tekanan 2 atm
- b. Furfural-udara pada 30°C dan tekanan 3 atm
- c. Propanol-udara pada pada 30°C dan tekanan 1 atm

2. Tentukan difusivitas nitrogen melalui suatu campuran gas yang mempunyai komposisi sebagai berikut : O₂ 6%, CO 7%, CO₂ 11% dan H₂ 76% , campuran gas mempunyai suhu 110°C dan tekanan 1,5 atm
3. Tentukan difusivitas cairan dari solut yang ditransfer melalui larutan encer sebagai berikut:
 - a. Karbon dioksida dalam etanol pada 20°C
 - b. Karbon dioksida dalam air pada 25°C
 - c. Karbon tetra klorida dalam benzene pada 20°C
 - d. Metanol dalam air pada 25°C
4. Gas ammonia (A) mendifusi dalam udara (B) dalam keadaan tetap, di mana udara merupakan komponen yang tidak mendifusi. Suhu adalah 30°C dan tekanan total adalah 1 atmosfer. Tekanan parsial ammonia pada dua buah bidang yang berjarak 0,1 cm masing-masing adalah 50 mmHg dan 50 mmHg. Difusivitas campuran pada suhu 0°C dan tekanan 1 atmosfer adalah 0,198 cm²/det. Hitunglah fluks molar ammonia antara kedua bidang tersebut dalam gmol/(det.cm²).

Daftar Pustaka

1. Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.N., 1960, Transport Phenomena, John Wiley and Sons, Inc., New York

2. Geankoplis, C.J., 1993, Transport Process and Unit Operations, 3rd ed, Prentice-Hall Inc., New Jersey
3. Welty, J.F., Wilson, R.F., and Wicks, C.E, 1984, Fundamental of Momentum, Heat and Mass Transfer, John Wiley and Sons, Inc., New York

BAB II. Perpindahan Massa Antar Fasa

2.1. Pengertian perpindahan massa antar fasa

Pada operasi alat transfer massa, banyak melibatkan transfer massa antara dua fasa atau lebih yang dikontakkan. Dua buah fasa yang saling tidak larut dikontakkan supaya di antara kedua fasa tersebut terjadi perpindahan massa. Adapun fasa-fasa yang dikontakkan dapat berupa : gas – cair, gas – padat, cair – cair (kedua cairan tidak saling larut), dan cair – padat. Kontak antara fasa gas dengan fasa cair dapat dijumpai pada operasi distilasi, absorbs dan humidifikasi. Kontak antara fasa gas dengan fasa padat dijumpai pada operasi pengeringan zat padat, sublimasi dan adsorpsi. Kontak antara fasa cair dengan fasa cair dapat dijumpai dalam operasi ekstraksi cairan, sedangkan antara fasa cair dengan fasa padat dijumpai pada operasi ekstraksi cairan padatan dan kristalisasi. Adapun kecepatan difusi pada masing-masing fasa tergantung pada gradien konsentrasi atau beda konsentrasi yang ada. Gradien konsentrasi ini dapat dijadikan informasi mengenai penyimpangannya pada kondisi kesetimbangan. Jika keadaan setimbang telah dicapai, maka gradien konsentrasi dan kecepatan difusi sama dengan nol.

Operasi transfer massa umumnya dilakukan dengan menggunakan menara yang dirancang sedemikian sehingga

diperoleh kontak yang baik antara kedua fasa. Alat transfer massa yang berupa menara antara lain menara dengan *plate* dan *packing* serta menara yang dilengkapi dengan penyembur atau *spray*.

Perpindahan massa atau transfer massa antar fasa terdiri dari satu film, terjadi pada kontak fasa padat dengan fluida dan terdiri dua film, terjadi pada kontak fasa fluida dengan fluida.

2.2. Kompetensi Dasar

1. Kompetensi Umum (TIU)

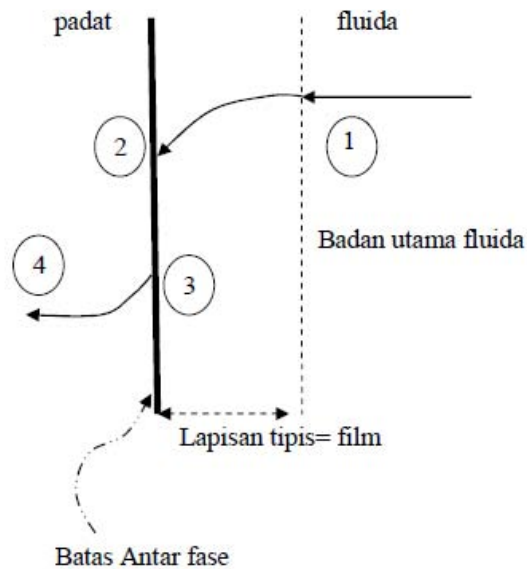
Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan mengerti dan mampu menjelaskan perpindahan massa antar fasa dan mengetahui persamaan kecepatan perpindahan massanya.

2. Kompetensi Khusus (TIK)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan dapat menjelaskan dan menyusun persamaan perpindahan massa antar fasa fluida-fluida, dan padat-fluida.

2.3. Transfer massa antar fasa padat – fluida, transfer massa satu film

Contoh transfer massa antar fasa padat – fluida yaitu pada penjerapan padatan pada suatu adsorben, seperti penjerapan logam berat dalam cairan dengan arang aktif atau zeolit. Peristiwa ini dapat digambarkan seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Difusi solut dari fluida ke padatan

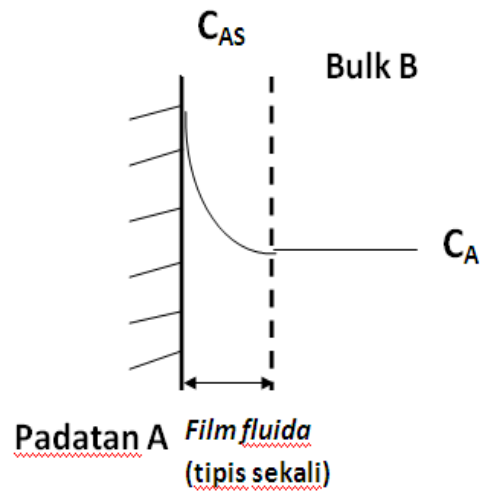
Perpindahan massa yang terjadi adalah :

1. Difusi A secara konvektif dari badan utama fluida ke permukaan padatan. Difusi ini terjadi di film, dari 1 ke 2.

2. Difusi A secara molekuler dari permukaan padatan ke dalam padatan, dari 3 ke 4.

Arah transfer tergantung konsentrasi.

Contoh transfer massa antar fasa padat – fluida lainnya yaitu pada ekstraksi padat – cair yaitu solut A larut dalam B. Peristiwa ini dapat digambarkan seperti pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Difusi solut dari padatan ke fluida

Perpindahan massa yang terjadi adalah :

1. Difusi A secara molekuler dari dalam padatan ke permukaan padatan.
2. Difusi A secara konvektif dari permukaan padatan ke badan utama fluida. Difusi ini terjadi di lapisan film fluida.

Persamaan kecepatan perpindahan massa tersebut seperti berikut.

$$N_A = k_C(C_{AS} - C_A) \quad (73)$$

Koefisien perpindahan massa tergantung dari : sifat fluida, pengadukan dll. Dengan N_A adalah fluks massa satuannya massa/waktu.luas transfer. Dan C_{AS} adalah konsentrasi A jenuh. C_A adalah konsentrasi A di badan utama (*bulk*) cairan. Sedangkan k_C adalah koefisien transfer massa yang nilainya tergantung dari sifat padatan, sifat fluida, geometri alat dan kecepatan pengadukan.

2.4. Transfer massa antar fasa fluida – fluida, transfer massa dua film

Ini terjadi pada perpindahan massa antar fasa cair – gas, dan antar cair – cair (yang tidak saling larut). Pada transfer massa antar fasa ada tiga langkah transfer, yaitu transfer massa dari badan utama suatu fasa ke antarmuka, transfer massa melalui bidang antarmuka ke fasa ke dua dan akhirnya transfer massa dari antarmuka ke badan utama fasa ke dua. Ini dapat digambarkan pada Gambar 2.3.

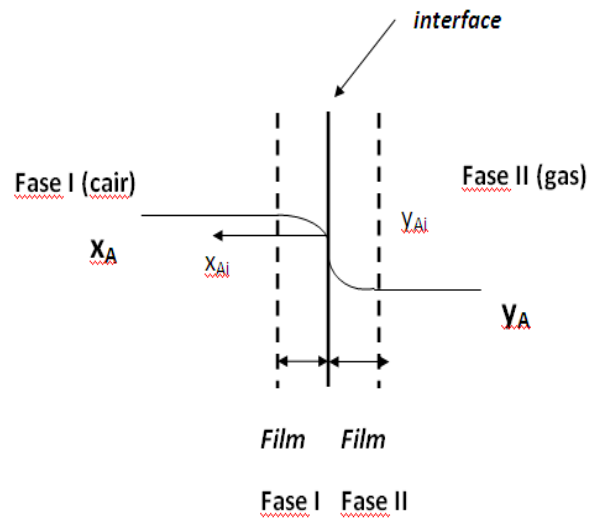
Perpindahan massa yang terjadi adalah :

1. Transfer massa dari badan utama fasa I ke permukaan antar fasa.
2. Transfer massa antar fasa dari antar fasa ke badan utama fasa II.

3. Di batas antar fasa, tidak ada tahanan, sehingga terjadi kesetimbangan. $P_{Ai} = f(X_{Ai})$; keseimbangan)

Persamaan perpindahan massanya sebagai berikut.

$$N_A = k_x(x_A - x_{Ai}) = k_y(y_{Ai} - y_A) \quad (74)$$

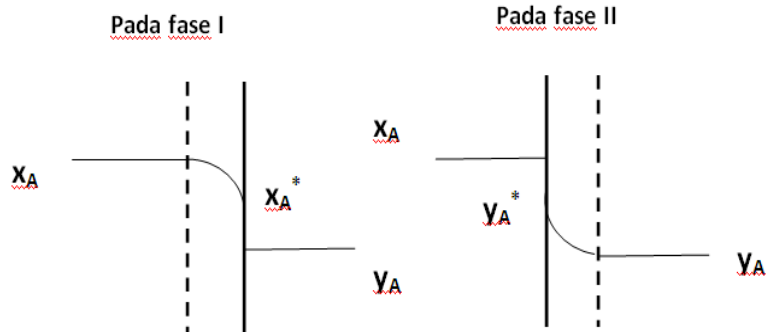


Gambar 2.3. Transfer massa solut A dari fluida I (cair) ke fluida II (gas)

Di *interface* x_{Ai} seimbang dengan y_{Ai} , kedua fasa tidak terdapat tahanan. Nilai akumulasi A pada lapisan *film-film* tersebut diabaikan. Untuk mendapatkan x_{Ai} dan y_{Ai} ternyata nilainya sulit dievaluasi.

Persamaan tersebut sulit dipakai, sehingga dicari bentuk persamaan lain yaitu 2 film tersebut diwakili oleh suatu film

khayal, dan film khayal tersebut dapat dianggap terjadi di fase I atau di fase II. Hal tersebut dapat digambarkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Transfer massa solut A dari fluida I (cair) ke fluida II (gas) dengan suatu film khayal

Persamaan perpindahan massanya sebagai berikut.

$$N_A = k_x(x_A - x_A^*) \quad (75)$$

$$N_A = k_y(y_A^* - y_A) \quad (76)$$

Hubungan persamaan keseimbangannya menggunakan korelasi persamaan Henry.

$$y_A = Hx_A^* \quad (77)$$

$$y_A^* = Hx_A \quad (78)$$

Dengan x_A^* = kadar (fraksi mol A) di fasa cair yang setimbang dengan fraksi mol A di fasa gas (y_A) dan y_A^* = kadar (fraksi mol A) di fasa gas yang setimbang dengan fraksi mol A di fasa cair (x_A).

Perpindahan massa akan berlangsung selama ada perbedaan konsentrasi di lapisan film. Jika konsentrasi di batas fase sudah sama dengan konsentrasi di badan utama, maka keadaan jenuh atau keseimbangan telah tercapai. Dari uraian di atas, tampak bahwa hubungan keseimbangan menjadi sangat penting untuk diketahui. Hal ini dapat digunakan untuk menentukan profil konsentrasi di kedua fase.

Jika harga luas bidang transfer sulit dievaluasi maka N_A dinyatakan dengan persamaan berikut ini.

$$N_A = k_x a (x_A - x_A^*) \quad (79)$$

$$N_A = K_x (x_A - x_A^*) \quad (80)$$

Dengan k_x adalah koefisien transfer massa lokal dan K_x adalah koefisien transfer massa gabungan volumetris atau koefisien transfer massa total.

2.5. Soal-Soal Latihan

Di dalam absorpsi ammonia ke dalam air dari campuran udara-ammonia di dalam sebuah alat yang bekerja pada tekanan total 2 atmosfer, suhu 60°F, ternyata harga rata-rata koefisien perpindahan massa fasa gas 0,4 lbmol/(j.ft²), sedangkan koefisien perpindahan massa untuk fasa cair 1,1 (lb/(j.ft²))(lbmol/ft³). Untuk larutan encer ammonia di dalam air pada 60°F, maka tekanan parsial keseimbangan ammonia adalah : $p_{am} = 465x$, dimana, p_{am} adalah tekanan parsial

ammonia dalam mmHg dan x adalah fraksi mol ammonia dalam cairan. Hitunglah koefisien perpindahan massa gas keseluruhan dalam $\text{lbmol}/(\text{jft}^2 \text{atm})$.

Daftar Pustaka

1. Geankoplis, C.J., 1993, Transport Process and Unit Operations, 3rd ed, Prentice-Hall Inc., New Jersey
2. Treyball, 1981, Mass Transfer Operation, Mc Graw Hill, New York

BAB III. Perpindahan Massa Aliran Laminar Satu Dimensi dalam Cairan dan Padatan

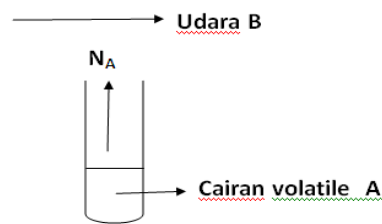
3.1. Perpindahan massa aliran laminar satu dimensi dalam cairan dan padatan

Pokok bahasan ini berisi penyusunan neraca massa pada padatan dan aliran laminar pada berbagai kasus sederhana beserta penyelesaiannya, serta penggunaan neraca massa komponen pada kasus sederhana di padatan dan aliran laminar. Tujuan dari penyusunan neraca massa tersebut adalah untuk memperoleh distribusi konsentrasi dalam padatan dan aliran laminar.

Kejadian-kejadian khusus yang perlu diperhatikan dalam hal ini adalah :

1). B tidak mendifusi (*Diffusion through a stagnant medium*)

Contoh : Cairan A di dalam tabung yang menguap ke udara B yang diam



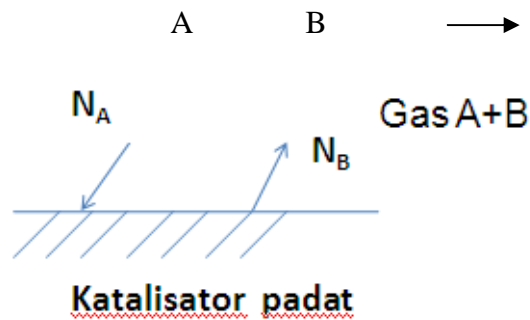
Gambar 3.1. Gambaran kasus jika B tidak mendifusi

Karena B dianggap diam dan tidak mendifusi maka dapat ditentukan bahwa, $N_B = 0$. Persamaan perpindahan massanya dapat disederhanakan dari persamaan Ficks, sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$N_{AB} = -\frac{D_{AB}C}{(1-x_A)} \frac{dx_A}{dz} \quad (81)$$

2). A dan B mendifusi sama cepat dengan arah berlawanan (*equimolar counter diffusion*)

Contoh : Di permukaan katalis terjadi reaksi



Gambar 3.2. Gambaran kasus jika *equimolar counter diffusion*

Karena kecepatan mendifusi A dan B sama dan berlawanan arah, maka dapat ditentukan bahwa, $N_A = -N_B$. Persamaan perpindahan massanya dapat disederhanakan dari persamaan Ficks, sehingga diperoleh persamaan adalah sebagai berikut.

$$N_{AB} = -D_{AB}C \frac{dx_A}{dz} \quad (82)$$

3). Kadar A sangat kecil jumlah fraksi mol A mendekati nol

Hal ini dapat dituliskan x_A mendekati nol. Biasanya terjadi pada larutan encer atau polutan dalam udara.

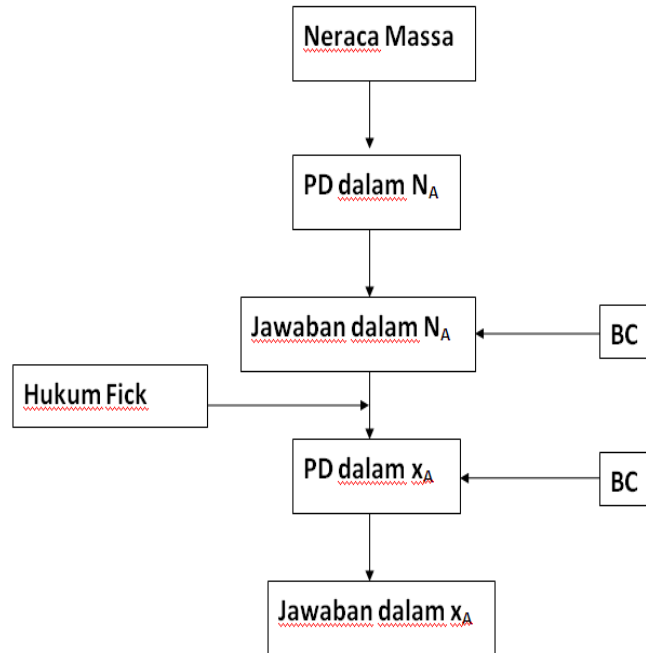
Karena x_A mendekati 0, maka $x_A = 0$. Persamaan perpindahan massanya dapat disederhanakan dari persamaan Ficks, sehingga diperoleh persamaan adalah sebagai berikut.

$$N_{AB} = -D_{AB}C \frac{dx_A}{dz} \quad (83)$$

Atau dapat dituliskan dengan persamaan,

$$N_{AB} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} \quad (84)$$

Untuk menentukan distribusi konsentrasi, maka dapat dilakukan langkah-langkah analisis seperti pada diagram seperti pada Gambar 3.3. Dari langkah-langkah ini bermanfaat untuk menganalisis dan mensintesis peristiwa transfer massa ke dalam suatu formulasi matematis dan menyelesaikan persamaan matematis tersebut untuk mendapatkan informasi penting yang terkait dengan distribusi konsentrasi.



Gambar 3.3. Langkah analisis dalam penentuan distribusi konsentrasi

3.2. Kompetensi Dasar

1. Kompetensi Umum (TIU)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan dapat menganalisis fenomena perpindahan massa pada berbagai kasus aliran laminar satu dimensi dan kondisi batasnya serta menyelesaikannya pada kasus-kasus sederhana.

2. Kompetensi Khusus (TIK)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan dapat mencari distribusi konsentrasi sebagai fungsi jarak dengan menyusun persamaan neraca massa dan menerapkan Hukum Fick serta dapat menyelesaikan persamaan matematis yang terbentuk secara analitis.

3.3. Kasus : Difusi melalui film gas yang stagnan

Cairan A menguap ke dalam gas B, jika tinggi cairan A adalah $z=z_1$. Kelarutan gas B dalam cairan A diabaikan. Jika dianggap B tidak mendifusi, penguapan A sangat lambat, keadaan *steady state*, sehingga tinggi z_1 praktis tetap. Dan keadaan ini dapat dianggap sebagai kondisi *pseudo steady state* (keadaan tetap semu). Bagaimana persamaan hubungan x_A dan z ? (menunjukkan distribusi konsentrasi sebagai fungsi z)

Peristiwa ini dapat digambarkan seperti pada Gambar 3.4.

Persamaan (86) dapat disusun kembali dan dibagi dengan Δz serta dilimitkan Δz mendekati nol, seperti pada persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-(N_{Az}|_{z+\Delta z} - N_{Az}|_z)}{\Delta z} = 0 \quad (87)$$

$$-\frac{dN_{Az}}{dz} = 0 \quad (88)$$

Persamaan (88) adalah persamaan diferensial dalam N_{Az} .

Dengan persamaan Fick, dan B tidak mendifusi maka persamaan untuk fluks N_{Az} adalah sebagai berikut :

$$N_{Az} = \frac{-CD_{AB}}{(1-x_A)} \frac{dx_A}{dz} \quad (89)$$

Persamaan (89) disubstitusi ke dalam persamaan (88), sehingga persamaan:

$$-\frac{d}{dz} \left(\frac{-CD_{AB}}{(1-x_A)} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0 \quad (90)$$

Jika C dan D_{AB} dapat dianggap tetap, maka persamaan (90) menjadi :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(1-x_A)} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0 \quad (91)$$

Persamaan (91) diintegrasikan sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$\frac{dx_A}{(1-x_A)} \frac{1}{dz} = C_1 \quad (92)$$

$$-\ln(1 - x_A) = C_1 z + C_2 \quad (93)$$

Untuk memperoleh nilai C_1 dan C_2 maka dapat diselesaikan dengan *boundary condition* sebagai berikut.

1. $z=z_1, x_A=x_{A1}$

2. $z=z_2, x_A=x_{A2}$

Diperoleh nilai C_1 dan C_2 adalah sebagai berikut.

$$C_1 = -\frac{1}{(z_2-z_1)} \ln \frac{(1-x_{A2})}{(1-x_{A1})} \quad (94)$$

$$C_2 = -\ln(1-x_{A1}) + \frac{z_1}{(z_2-z_1)} \ln \frac{(1-x_{A2})}{(1-x_{A1})} \quad (95)$$

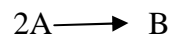
Jika persamaan (94) dan (95) disubstitusikan ke persamaan (93) maka akan diperoleh jawaban seperti pada persamaan (96).

$$\left(\frac{1-x_A}{1-x_{A1}}\right) = \left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)^{\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)} \quad (96)$$

Persamaan (96) menunjukkan hubungan antara x_A dengan z .

3.4. Kasus : Difusi yang digabungkan dengan reaksi kimia dengan *heterogeneous chemical reaction*

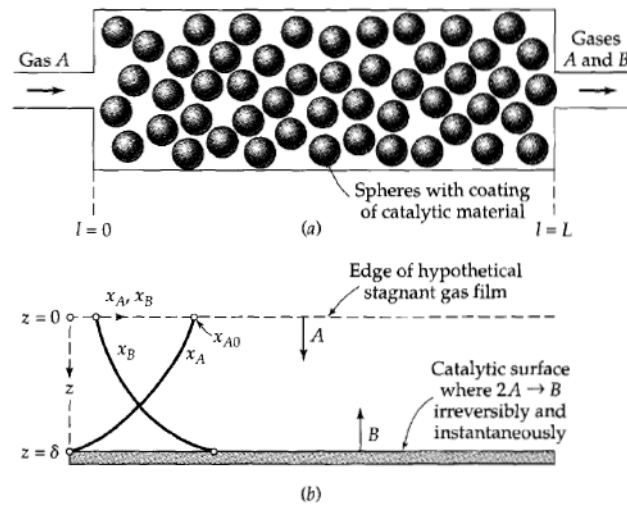
Suatu reaktor katalitik dengan reaksi dalam fasa gas yang terjadi adalah sebagai berikut :



Dibayangkan adanya lapisan film setebal δ di sekeliling katalisator yang berbentuk bola. Ketebalan lapisan flim tersebut sangat kecil jika dibandingkan dengan diameter katalisator bola, sehingga dapat dianggap permukaan katalisator datar. Reaksi yang terjadi di permukaan

katalisator, reaksi berlangsung sangat cepat. Gas A yang mendifusi dan berada di permukaan katalisator langsung berubah menjadi B dan gas B langsung mendifusi balik ke aliran *bulk* gas. Keadaan pada *steady state*.

Peristiwa ini dapat dilihat seperti pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5. Reaktor katalitik gas A menjadi B

Dibuat neraca massa komponen A pada elemen volum di sekitar permukaan katalisator yang dianggap permukaan datar. Reaksi berlangsung sangat cepat, sehingga yang mengontrol adalah kecepatan difusi. Jika luas penampang permukaan katalis S maka persamaannya sebagai berikut :

$$S \cdot N_{Az}|_z - S \cdot N_{Az}|_{z+\Delta z} = 0 \quad (97)$$

Luas penampang (S) sama sehingga persamaan dapat disederhanakan menjadi :

$$N_{Az}|_z - N_{Az}|_{z+\Delta z} = 0 \quad (98)$$

Persamaan (98) dapat disusun kembali dan dibagi dengan Δz serta dilimitkan Δz mendekati nol, seperti pada persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-(N_{Az}|_{z+\Delta z} - N_{Az}|_z)}{\Delta z} = 0 \quad (99)$$

$$-\frac{dN_{Az}}{dz} = 0 \quad (100)$$

Persamaan (100) adalah persamaan diferensial dalam N_{Az} .

Dari stoikiometri reaksi, diperoleh bahwa $N_{Bz} = -\frac{1}{2}N_{Az}$. Nilai negatif menunjukkan bahwa arah difusi A dan B berlawanan arah. Dari hubungan tersebut dan persamaan Fick diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$N_{Az} = \frac{-CD_{AB}}{\left(1 - \frac{1}{2}x_A\right)} \frac{dx_A}{dz} \quad (101)$$

Persamaan (101) disubstitusi ke persamaan (100), diperoleh persamaan berikut.

$$-\frac{d}{dz} \left(\frac{-CD_{AB}}{\left(1 - \frac{1}{2}x_A\right)} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0 \quad (102)$$

$$\frac{CD_{AB}}{\left(1 - \frac{1}{2}x_A\right)} \frac{dx_A}{dz} = C_1 \quad (103)$$

Jika $C_1' = \frac{C_1}{CD_{AB}}$, maka persamaan (103) menjadi persamaan sebagai berikut.

$$\frac{dx_A}{\left(1 - \frac{1}{2}x_A\right)} = C_1' dz \quad (104)$$

Jika persamaan (104) diintegrasikan akan diperoleh persamaan (105).

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{2}x_A\right) = C_1'z + C_2 \quad (105)$$

Untuk memperoleh nilai C_1' dan C_2 maka dapat diselesaikan dengan *boundary condition* sebagai berikut.

1. $z=0, x_A=x_{A0}$
2. $z=\delta, x_A=0$

Diperoleh nilai C_1' dan C_2 adalah sebagai berikut.

$$C_1' = \frac{2}{\delta} \ln\left(1 - \frac{1}{2}x_{A0}\right) \quad (106)$$

$$C_2 = -2\ln\left(1 - \frac{1}{2}x_{A0}\right) \quad (107)$$

Jika persamaan (106) dan (107) disubstitusikan ke persamaan (105) maka akan diperoleh jawaban seperti pada persamaan (108).

$$\left(1 - \frac{1}{2}x_A\right) = \left(1 - \frac{1}{2}x_{A0}\right)^{\left(1 - \frac{z}{\delta}\right)} \quad (108)$$

Persamaan (108) menunjukkan hubungan antara x_A dengan z .

Dari kasus tersebut jalannya reaksi adalah A mendifusi melewati lapisan gas ke permukaan katalisator, langkah selanjutnya adalah terjadi reaksi di permukaan katalisator A menjadi B. Kemudian setelah B terbentuk maka B akan mendifusi *balik* ke bulk gas. Jika kecepatan reaksi berlangsung sangat cepat dibandingkan kecepatan difusi maka kecepatan difusi yang mengontrol kecepatan secara

keseluruhan. Jika reaksi tidak terlalu cepat, dengan persamaan kecepatan reaksi sebagai berikut ini.

$$r_A = k'_1 C_A \quad (109)$$

Atau persamaan tersebut dapat dituliskan :

$$r_A = k'_1 C x_A \quad (110)$$

Pada permukaan katalisator pada $z=\delta$, A ada sejumlah tertentu karena belum habis bereaksi menjadi B. Jika dianggap kecepatan reaksi sama dengan kecepatan difusi dan sama-sama mengontrol jalannya proses secara keseluruhan, maka dapat dituliskan dalam persamaan berikut ini.

$$N_{Az}|_{z=\delta} = k'_1 C x_A \quad (111)$$

Sehingga x_A dapat diperoleh dengan persamaan berikut.

$$x_A = \frac{N_{Az}}{k'_1 C} \quad (112)$$

Langkah-langkah sama dengan sebelumnya sehingga diperoleh persamaan (105), hanya saja *boundary condition* yang berbeda. Untuk memperoleh nilai C_1' dan C_2 *boundary condition* sebagai berikut.

$$1. z=0, x_A=x_{A0}$$

$$2. z=\delta, x_A = \frac{N_{Az}}{k'_1 C}$$

Diperoleh nilai C_1' dan C_2 adalah sebagai berikut.

$$C_1' = \frac{-2}{\delta} \ln \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{N_{Az}}{k'_1 C}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2} x_{A0}\right)} \quad (113)$$

$$C_2 = -2 \ln \left(1 - \frac{1}{2} x_{A0}\right) \quad (114)$$

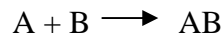
Jika persamaan (113) dan (114) disubstitusikan ke persamaan (105) maka akan diperoleh jawaban seperti pada persamaan (115).

$$\left(1 - \frac{1}{2}x_A\right) = \left(1 - \frac{1}{2}x_{A0}\right)^{\left(1 - \frac{z}{\delta}\right)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{N_{Az}}{k_1 C}\right)^{\frac{z}{\delta}} \quad (115)$$

Persamaan (115) menunjukkan hubungan antara x_A dengan z .

3.5. Kasus : Difusi yang digabungkan dengan reaksi kimia dengan *homogeneous chemical reaction* (absorpsi dengan reaksi kimia)

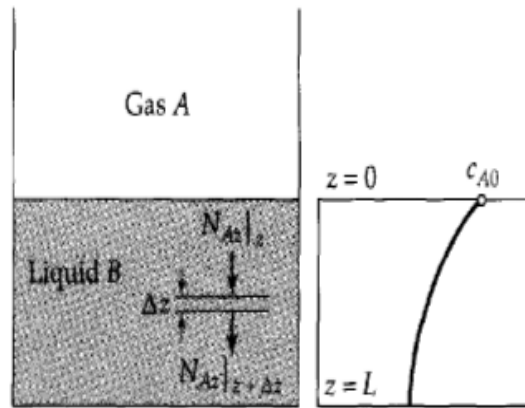
Gas A masuk ke cairan B, lalu mendifusi di cairan B, sekaligus bereaksi membentuk AB. Dianggap keadaan *steady state*. Reaksi yang terjadi adalah sebagai berikut :



Konsentrasi A dan AB cukup kecil dalam larutan B. Bagaimana hubungan distribusi konsentrasi sebagai fungsi ketinggian cairan? ($C_A=f(z)$). Peristiwa tersebut dapat digambarkan seperti pada Gambar 3.6.

Persamaan neraca massa komponen A disusun pada elemen volum dengan luas penampang S. Dan persamaan kecepatan reaksinya adalah sebagai berikut.

$$r_A = k_1'' C_A \quad (116)$$



Gambar 3.6. Gas A mendifusi dan sekaligus bereaksi dalam larutan B membentuk AB

Neraca massa komponen A pada elemen volum ($\Delta z \cdot S$) dapat dituliskan dengan persamaan :

$$S \cdot N_{Az}|_z - S \cdot N_{Az}|_{z+\Delta z} - k_1'' C_A \Delta z \cdot S = 0 \quad (117)$$

Luas penampang (S) sama sehingga persamaan dapat disederhanakan menjadi :

$$N_{Az}|_z - N_{Az}|_{z+\Delta z} - k_1'' C_A \Delta z = 0 \quad (118)$$

Persamaan (118) dapat disusun kembali dan dibagi dengan Δz serta dilimitkan Δz mendekati nol, seperti pada persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-(N_{Az}|_{z+\Delta z} - N_{Az}|_z)}{\Delta z} + k_1'' C_A = 0 \quad (119)$$

$$\frac{dN_{Az}}{dz} + k_1'' C_A = 0 \quad (120)$$

Persamaan (120) adalah persamaan diferensial dalam N_{Az} .

Dengan persamaan Fick, dan jika dianggap konsentrasi Adan AB konsentrasinya cukup kecil, maka x_A cukup kecil. Persamaan fluks N_{Az} adalah sebagai berikut :

$$N_{Az} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dz} \quad (121)$$

Persamaan (121) disubstitusi ke dalam persamaan (120), sehingga persamaan:

$$-D_{AB} \frac{d^2 C_A}{dz^2} + k_1'' C_A = 0 \quad (122)$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial pada persamaan (122) maka diperlukan *boundary condition* sebagai berikut.

1. $z=0, C_A=C_{A0}$
2. $z=L, N_{Az}=0$ dan $\frac{dC_A}{dz}=0$

Persamaan (122) dapat diselesaikan sehingga diperoleh persamaan (123).

$$C_A = C_1 e^{z \sqrt{\frac{k_1''}{D_{AB}}}} + C_2 e^{-z \sqrt{\frac{k_1''}{D_{AB}}}} \quad (123)$$

Persamaan (123) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan lain sebagai berikut.

$$C_A = C_1 \cosh\left(z \sqrt{\frac{k_1''}{D_{AB}}}\right) + C_2 \sinh\left(z \sqrt{\frac{k_1''}{D_{AB}}}\right) \quad (124)$$

Dengan *boundary condition* dapat diperoleh C_1 dan C_2 sebagai berikut.

$$C_1 = C_{A0} \quad (125)$$

$$C_2 = -C_{A0} \tanh\left(L \sqrt{\frac{k_1''}{D_{AB}}}\right) \quad (126)$$

Jika persamaan (125) dan (126) disubstitusikan ke persamaan (124) maka akan diperoleh jawaban seperti pada persamaan (127).

$$C_A = C_{A0} \frac{\cosh\left((L-z)\sqrt{\frac{k_1''}{D_{AB}}}\right)}{\cosh\left(L\sqrt{\frac{k_1''}{D_{AB}}}\right)} \quad (127)$$

Persamaan (127) menunjukkan hubungan antara C_A dengan z .

3.6. Soal-Soal Latihan

1. Reaksi order 1 fasa gas $A \longrightarrow B$ berjalan pada permukaan pori katalisator padat berbentuk silinder panjang dengan jari-jari R . Proses isothermal dan *steady state*. Konsentrasi A pada permukaan luar silinder C_{A0} . Cari distribusi konsentrasi A dalam butir katalisator sebagai fungsi posisi !
2. Cairan volatil berada dalam tabung silinder tegak berjari-jari R . Cairan A menguap lalu mendifusi melalui kolom udara di atas cairan ke udara bebas. Udara bebas tidak mengandung A . Fraksi mol A dalam gas di permukaan cairan = x_{A0} . Rapat massa cairan $A = \rho_s$ gmol/volum.
 - a) Jabarkan kecepatan penguapan A dari cairan jika panjang kolom udara = L dan udara dianggap tidak mendifusi serta difusi berlangsung *steady state*.

- b) Berdasar persamaan a) cari waktu yang diperlukan untuk menguapkan cairan sehingga panjang kolom udara berubah dari L_1 menjadi L_2
3. Tetes bahan A berbentuk bola, jari-jari r_1 , berada dalam arus gas B. Dianggap terjadi film gas diam di sekitar bola berjari-jari r_2 . Fraksi mol A dalam fasa gas pada $r=r_1$ adalah x_{A1} , sedangkan pada $r=r_2$ adalah x_{A2} . Difusi dianggap *steady state*.
- a) Susun PD neraca massa A
- b) Cari persamaan untuk x_A
- c) Cari persamaan untuk flux A pada $r=r_1$
4. Suatu zat padat A yang berbentuk bola, dengan jari-jari R , berada dalam suatu cairan yang diam. Zat A tersebut melarut kemudian mendifusi ke dalam cairan. Di dalam cairan zat A bereaksi menurut reaksi order 1. Konsentrasi zat padat A di permukaan dianggap dalam keadaan jenuh. Ukuran padatan dianggap tetap. Tentukan $C=f(r)$ pada keadaan *steady state*

Daftar Pustaka

Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.N., 1960, Transport Phenomena, John Wiley and Sons, Inc., New York

BAB IV. Konsep Dasar Perpindahan Panas

4.1. Pengertian perpindahan panas

Perpindahan panas adalah ilmu yang mempelajari dengan rinci mekanisme perpindahan panas. Terjadinya perpindahan panas karena ada perbedaan temperatur antara 2 (atau lebih) tempat/benda/zat dan panas akan berpindah dari temperatur tinggi ke tempat yang temperaturnya lebih rendah. Mekanisme perpindahan panas ada tiga cara yaitu : konduksi (secara molekuler), konveksi (secara aliran) dan radiasi (secara gelombang elektromagnet, pancaran, sinaran). Pada peristiwa konduksi, panas akan berpindah tanpa diikuti aliran medium perpindahan panas atau medianya (padat, cair, gas) tidak mengalir. Panas akan berpindah secara estafet dari satu partikel ke partikel yang lainnya dalam medium tersebut. Pada benda padat, satu-satunya cara untuk memindah panas adalah konduksi.

Pada peristiwa konveksi, perpindahan panas terjadi karena terbawa aliran fluida. Secara termodinamika, konveksi dinyatakan sebagai aliran entalpi, bukan aliran panas. Pada peristiwa radiasi, energi berpindah melalui gelombang elektromagnetik.

Perpindahan panas adalah salah satu faktor yang sangat menentukan operasional suatu pabrik kimia. Pengoperasian suatu pabrik tidak lepas dari proses

perpindahan panas yang terjadi antara dua fluida yang berbeda temperaturnya. Contoh alat yang digunakan adalah penukar panas (*heat exchanger*). Penukar panas adalah peralatan proses yang digunakan untuk memindahkan panas dari dua fluida yang berbeda dimana perpindahan panasnya dapat terjadi secara langsung (kedua fluida mengalami pengontakan) ataupun secara tidak langsung (dibatasi oleh suatu dinding pemisah/sekat). Fluida yang mengalami pertukaran panas dapat berupa fasa cair-cair, cair-gas, dan gas-gas.

Sedangkan peristiwa perpindahan panas lainnya yang sering dijumpai dalam industri adalah seperti pada *furnace*, pipa uap pada reaktor, *evaporator* dan lain sebagainya.

4.2. Kompetensi Dasar

1. Kompetensi Umum (TIU)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan memahami konsep dasar dan mekanisme perpindahan panas dan dapat menghitung kecepatan perpindahan panas.

2. Kompetensi Khusus (TIK)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan mahasiswa dapat

memahami prinsip perpindahan panas konduksi, konveksi dan radiasi, serta dapat menghitung fluks panas atau kecepatan perpindahan panas konduksi, konveksi dan radiasi.

4.3. Mekanisme perpindahan panas secara konduksi

Panas mengalir dari yang suhunya tinggi ke tempat yang suhunya lebih rendah namun medianya tidak mengalir, mediumnya tetap/diam. Atau perpindahan panas yang tidak disebabkan gerak makroskopik medianya tetapi disebabkan oleh gerak molekuler medianya. Hukum Fourier merupakan hukum dasar untuk perpindahan panas konduksi yaitu kecepatan perpindahan panas per satuan berbanding lurus dengan beda suhu per satuan panjang jarak perpindahan panas tersebut. Hukum Fourier dapat dinyatakan dalam persamaan (128).

$$\text{Kecepatan transfer} = \frac{\text{driving force}}{\text{resistance}}$$
$$\frac{q}{A} \sim \frac{dT}{dx} \quad (128)$$

Jika faktor pembanding adalah daya hantar panas bahan (k), maka persamaan menjadi sebagai berikut.

$$\frac{q}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (129)$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk persamaan :

$$Q = -k \frac{dT}{dx} \quad (130)$$

Pada dinding datar, persamaan dapat dijabarkan menjadi seperti pada persamaan berikut ini.

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{x_2 - x_1}{kA}\right)} \quad (131)$$

q adalah banyaknya panas yang ditransfer tiap satu satuan waktu dan Q adalah panas yang ditransfer tiap satu satuan waktu, tiap satuan luas (fluks panas). T adalah suhu, x adalah jarak, k adalah konduktivitas termal dan A adalah luas permukaan transfer.

Dengan k adalah konduktivitas panas (daya hantar panas) suatu zat yang besarnya tergantung suhu zat tersebut. Jika harga k tinggi daya hantar panas tinggi, bahan tersebut disebut sebagai konduktor. Jika harga k rendah, daya hantar bahan tersebut rendah dan disebut sebagai isolator. Harga k bisa tetap, atau bisa dipengaruhi suhu, jika k fungsi linier terhadap suhu, maka dapat dituliskan seperti pada persamaan berikut.

$$k = a + bT \quad (132)$$

4.4. Mekanisme perpindahan panas antar fasa (konveksi)

Perpindahan panas yang terjadi jika fluida (cair/gas) yang suhunya tinggi mengalir ke tempat yang suhunya lebih rendah. Cairan/gas yang suhunya lebih tinggi memberikan panasnya pada permukaan yang suhunya lebih rendah dan

media untuk perpindahan panas konveksi adalah cairan/gas yang mengalir.

Jika aliran disebabkan oleh tenaga dari luar (pompa, *blower*, fan dan sebagainya) disebut dengan konveksi paksa (*forced convection*). Jika aliran disebabkan beda suhu saja (menyebabkan beda rapat massa) dan tidak ada tenaga dari luar yang mendorongnya disebut dengan konveksi bebas atau konveksi alamiah (*free convection/natural convection*).

Perpindahan panas konveksi ini terjadi pada lapisan fluida di sekitar permukaan padatan. Persamaan yang dipakai adalah menggunakan persamaan Hukum Newton yang menyatakan perpindahan panas konveksi berbanding lurus dengan beda suhu. Jika T_w adalah suhu dinding padatan dan T_a adalah suhu fluida, dan $T_w > T_a$ maka persamaan Newton tersebut dapat dinyatakan pada persamaan berikut.

$$\frac{q}{A} \sim (T_w - T_a) \quad (134)$$

Jika h_c adalah koefisien perpindahan panas konveksi, maka persamaan dapat dituliskan :

$$q = h_c A (T_w - T_a) \quad (135)$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk,

$$Q = h_c (T_w - T_a) \quad (136)$$

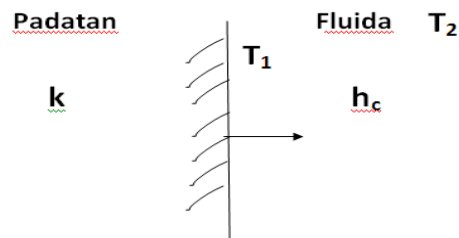
Dengan h_c adalah koefisien perpindahan panas konveksi rata-rata dalam W/m^2K atau dalam $(Btu/j)/ft^{20}F$, Koefisien konveksi dipengaruhi oleh semua variabel yang mempengaruhi proses perpindahan panas konveksi. Pada

beberapa kasus sederhana, h dapat dijabarkan secara analitis, namun umumnya h ditentukan dari percobaan. q adalah jumlah panas tiap satuan waktu. Jika dalam fluks panas Q adalah jumlah panas tiap satuan waktu, tiap satuan luas, T_w adalah suhu dinding dan T_a adalah suhu fluida.

Persamaan dalam bentuk lainnya adalah seperti persamaan berikut ini. Dengan $(T_w - T_a)$ adalah gaya dorong yang berupa gradient suhu (beda suhu) dan $\left(\frac{1}{h_c A}\right)$ adalah tahanan (*resistance*).

$$q = \frac{(T_w - T_a)}{\frac{1}{h_c A}} \quad (137)$$

Pada perpindahan panas antar fasa khusus yang terjadi antara permukaan padatan dengan fluida di dekatnya (perpindahan panas konveksi) dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4.1. Perpindahan panas antar fasa padat dan fluida

Persamaan perpindahan panas konveksi dengan suhu fluida lebih rendah dibanding suhu dinding atau $T_1 > T_2$, maka persamaannya dapat dituliskan sebagai berikut.

$$q = -h_c A (T_2 - T_1) \quad (138)$$

Atau dalam bentuk persamaan,

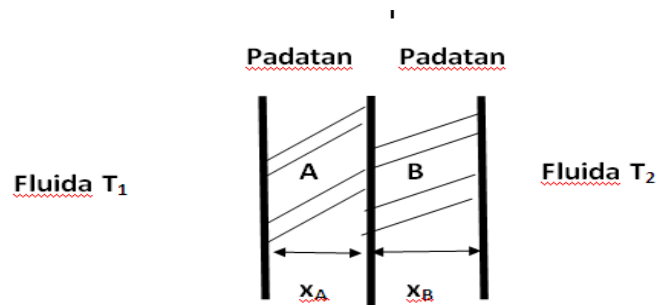
$$q = h_c A (T_1 - T_2) \quad (139)$$

Jika luas permukaan sulit dievaluasi, maka persamaan menjadi:

$$q = \text{volum } h_a (T_1 - T_2) \quad (140)$$

Dengan a adalah luas per satuan volum dan h_a adalah koefisien perpindahan panas volumetris.

Gabungan konduksi dan konveksi (perpindahan panas melalui tahanan seri dinding/isolator) dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4.2. Perpindahan panas gabungan konduksi dan konveksi

Jika $T_1 > T_2$ dan U dalam hal ini adalah koefisien perpindahan panas gabungan, maka persamaan perpindahan panas adalah sebagai berikut.

$$Q = UA(T_1 - T_2) \quad (141)$$

Dan U dapat dijabarkan dalam persamaan berikut.

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{x_A}{k_A} + \frac{x_B}{k_B} + \frac{1}{h_2} \quad (142)$$

Jika konduktivitas panas padatan (k_A dan k_B) sangat besar, maka tahanan $\left(\frac{x_A}{k_A}\right)$ dan $\left(\frac{x_B}{k_B}\right)$ nilainya sangat kecil dan jika bisa diabaikan, persamaan akan menjadi lebih sederhana, seperti persamaan berikut ini.

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \quad (143)$$

Dinding/padatan menghantarkan panas dengan cepat. Jika luas permukaan 1 dan 2 tidak sama besar misal pada pipa, dalam penggabungan perlu koreksi untuk luasnya. Jika A sulit dievaluasi, maka dapat dipakai persamaan berikut.

$$q = \text{volum } Ua(T_1 - T_2) \quad (144)$$

Dengan a adalah luas per satuan volum dan Ua adalah koefisien perpindahan panas volumetris.

4.5. Mekanisme perpindahan panas radiasi

Perpindahan panas radiasi tidak memerlukan media bisa berlangsung dalam ruang hampa udara. Panas ditransfer dari sebuah benda yang suhunya relatif tinggi ke benda lain yang suhunya rendah dengan melintasi ruang (tanpa medium perantara). Tidak diperlukan kontak molekuler. Panas yang ditransfer tersebut tergantung beda suhu antara kedua benda dan karakteristik permukaan masing-masing benda. Benda

yang suhunya lebih rendah akan mengabsorb panas lebih banyak. Jika dapat memancarkan panas dengan sempurna disebut radiator sempurna atau benda hitam, yaitu benda yang dapat memancarkan panas dengan kecepatan yang berbanding lurus dengan suhu absolut berpangkat 4.

$$\frac{q}{A} \approx T^4 \quad (145)$$

Dengan adanya faktor pembanding σ , adalah konstanta Stefan Boltzmann, yang besarnya $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ maka persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{q}{A} = \sigma T^4 \quad (146)$$

Emisivitas adalah faktor pembanding antara panas yang dipancarkan pada suhu T lebih kecil dibanding yang dipancarkan oleh benda hitam. ε adalah koefisien emisivitas, dengan harga $\varepsilon = 1$ untuk benda hitam dan $\varepsilon < 1$ untuk benda tidak hitam. Persamaan perpindahan panas radiasi dapat dituliskan sebagai berikut.

$$q = \varepsilon A \sigma T^4 \quad (147)$$

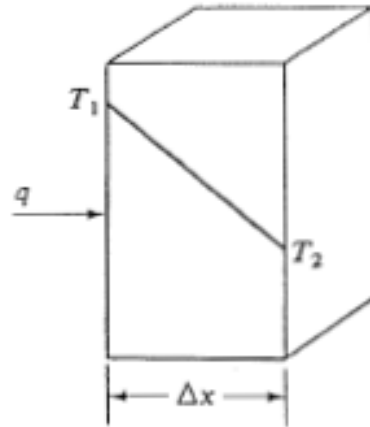
4.6. Perpindahan panas konduksi keadaan *steady state* satu dimensi

4.6.1. Pada dinding datar/slab

Jika pada dinding datar (seperti yang digambarkan pada Gambar 4.3) dengan tebal Δx , diketahui beda suhu

adalah pada T_1 dan T_2 , dengan T_1 lebih besar dari T_2 maka persamaan perpindahan panas konduksi sebagai berikut:

$$q = \frac{kA}{\Delta x} (T_1 - T_2) \quad (148)$$



Gambar 4.3. Perpindahan panas konduksi pada dinding datar

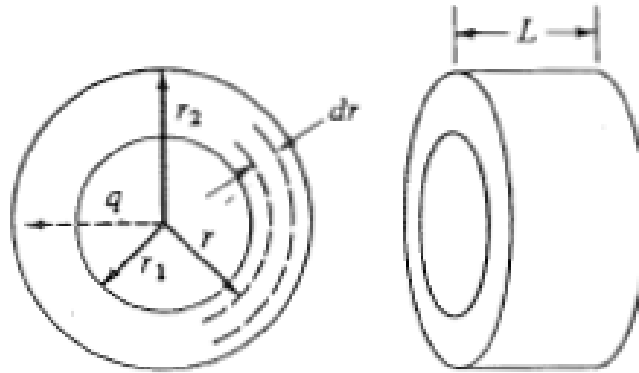
Persamaan (148) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\Delta x}{kA}} \quad (149)$$

Dengan tahanan perpindahan panas konduksi untuk dinding datar atau slab adalah $R = \frac{\Delta x}{kA}$.

4.6.2. Pada silinder yang berongga

Jika pada silinder (seperti yang digambarkan pada Gambar 4.4) dengan tebal Δr , diketahui beda suhu adalah pada T_1 dan T_2 , dengan T_1 lebih besar dari T_2 maka persamaan perpindahan panas konduksi sebagai berikut:



Gambar 4.4. Perpindahan panas konduksi pada silinder

$$\frac{q}{A} = -k \frac{dT}{dr} \quad (150)$$

Luas penampang untuk perpindahan panas $A=2\pi rL$. Maka persamaan (150) jika diintegrasikan dengan batas r_1 dan r_2 serta T_1 dan T_2 diperoleh persamaan berikut.

$$q = \frac{k2\pi L}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (T_1 - T_2) \quad (151)$$

Untuk luas penampang (A) dapat dinyatakan dalam *logarithmic mean area* yang dinyatakan dalam persamaan :

$$A_{lm} = \frac{A_2 - A_1}{\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)} \quad (152)$$

Jika $A_1=2\pi r_1L$ dan $A_2=2\pi r_2L$, maka persamaan (152) berubah menjadi :

$$A_{lm} = \frac{2\pi L (r_2 - r_1)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (153)$$

Persamaan (151) dapat disusun dan dituliskan dalam bentuk persamaan berikut ini.

$$q = \frac{kA_{lm}}{(r_2-r_1)}(T_1 - T_2) \quad (154)$$

Persamaan (154) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan:

$$q = \frac{(T_1-T_2)}{\frac{(r_2-r_1)}{kA_{lm}}} \quad (155)$$

Dengan tahanan perpindahan panas konduksi untuk silinder berongga adalah $R = \frac{(r_2-r_1)}{kA_{lm}}$.

4.6.2. Pada bola yang berongga

Jika pada bola dengan tebal Δr , diketahui beda suhu adalah pada T_1 dan T_2 , dengan T_1 lebih besar dari T_2 maka persamaan perpindahan panas konduksi sebagai berikut:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{dT}{dr} \quad (156)$$

Luas penampang untuk perpindahan panas $A=4\pi r^2$. Maka persamaan (156) jika diintegrasikan dengan batas r_1 dan r_2 serta T_1 dan T_2 diperoleh persamaan berikut.

$$q = \frac{4\pi k(T_1-T_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad (157)$$

Persamaan (157) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut ini:

$$q = \frac{(T_1-T_2)}{\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi k}} \quad (158)$$

Dengan tahanan perpindahan panas konduksi untuk bentuk

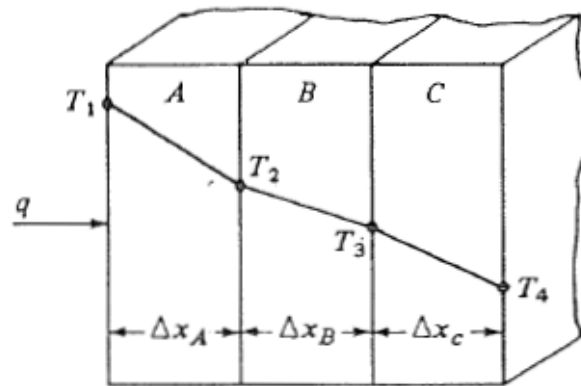
bola berongga adalah $R = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

4.7. Perpindahan panas konduksi keadaan *steady state* pada dinding berlapis

4.7.1. Pada dinding datar/slab berlapis (disusun seri)

Jika pada dinding datar berlapis (seperti yang digambarkan pada Gambar 4.5) dengan tebal Δx_A , Δx_B , dan Δx_C . Dan suhu dinding pada T_1 , T_2 , T_3 dan T_4 . Dimana $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$, maka persamaan perpindahan panas konduksi sebagai berikut:

$$q = \frac{k_A A}{\Delta x_A} (T_1 - T_2) = \frac{k_B A}{\Delta x_B} (T_2 - T_3) = \frac{k_C A}{\Delta x_C} (T_3 - T_4) \quad (159)$$



Gambar 4.5. Perpindahan panas konduksi pada dinding datar berlapis atau disusun seri

Persamaan (159) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut ini.

$$q = \frac{(T_1 - T_4)}{\left(\frac{\Delta x_A}{k_A A} + \frac{\Delta x_B}{k_B A} + \frac{\Delta x_C}{k_C A}\right)} \quad (160)$$

Persamaan (160) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut ini.

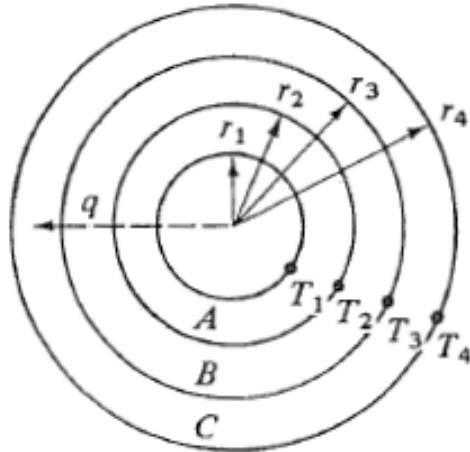
$$q = \frac{(T_1 - T_4)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (161)$$

Dengan tahanan perpindahan panas konduksi untuk dinding datar atau slab berlapis adalah $R_1 = \frac{\Delta x_A}{k_A A}$, $R_2 = \frac{\Delta x_B}{k_B A}$ dan $R_3 = \frac{\Delta x_C}{k_C A}$

4.7.2. Pada silinder yang berongga yang berlapis (*multilayer*)

Jika pada silinder berlapis tiga (seperti yang digambarkan pada Gambar 4.6) biasanya suatu tabung silinder atau pipa yang dilapisi dengan isolator. Diketahui jari-jari masing-masing lapisan r_1 , r_2 , r_2 r_3 dan r_4 . Dan suhu dinding pada T_1 , T_2 , T_3 dan T_4 . Dimana $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$, maka persamaan perpindahan panas konduksi sebagai berikut:

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{(r_2 - r_1)}{k_{A1lm}}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{(r_3 - r_2)}{k_{B1lm}}} = \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{(r_4 - r_3)}{k_{C1lm}}} \quad (162)$$



Gambar 4.6. Perpindahan panas konduksi pada silinder berlapis atau multilayer

Untuk luas penampang A_1 , A_2 dan A_3 luasannya tidak sama. Luas masing-masing adalah : $A_1=2\pi r_1L$; $A_2=2\pi r_2L$ dan $A_3=2\pi r_3L$. Sedangkan $A_{A\text{lm}}$ dan $A_{B\text{lm}}$ dinyatakan dalam persamaan (163) dan (164).

$$A_{A\text{lm}} = \frac{A_2 - A_1}{\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)} \quad (163)$$

$$A_{B\text{lm}} = \frac{A_3 - A_2}{\ln\left(\frac{A_3}{A_2}\right)} \quad (164)$$

Persamaan (162) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut ini.

$$q = \frac{(T_1 - T_4)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (165)$$

Dengan tahanan perpindahan panas konduksi untuk silinder berongga adalah $R_1 = \frac{(r_2-r_1)}{kA_{Alm}}$, $R_2 = \frac{(r_3-r_2)}{kA_{Blm}}$ dan $R_3 = \frac{(r_4-r_3)}{kA_{Clm}}$

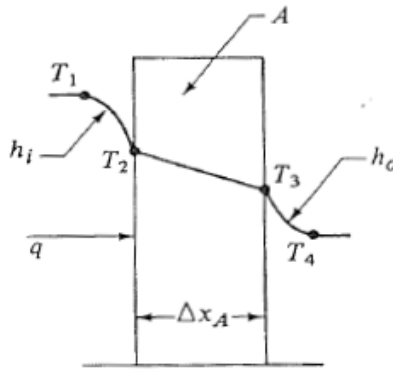
4.8. Kombinasi perpindahan panas konveksi dan konduksi dan koefisien perpindahan panas total

4.8.1. Kombinasi perpindahan panas konveksi dan konduksi pada dinding datar

Jika pada dinding datar (seperti yang digambarkan pada Gambar 4.7) dengan tebal Δx_A . Diketahui suhu fluida pada bagian dalam fluida adalah pada T_1 dan suhu dinding pada bagian dalam adalah T_2 , serta suhu dinding luar pada T_3 dan suhu fluida luar adalah T_4 . Jika $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$, maka persamaan perpindahan panas konduksi dan konveksi sebagai berikut:

$$q = h_i A (T_1 - T_2) = \frac{k_A A}{\Delta x_A} (T_2 - T_3) = h_o A (T_3 - T_4)$$

(166)



Gambar 4.7. Perpindahan panas konduksi dan konveksi pada dinding datar

Persamaan (166) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut ini.

$$q = \frac{(T_1 - T_4)}{\left(\frac{1}{h_i A} + \frac{\Delta x_A}{k_B A} + \frac{1}{h_o A}\right)} \quad (167)$$

Persamaan (167) dapat disederhanakan dalam bentuk persamaan berikut ini.

$$q = \frac{(T_1 - T_4)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (168)$$

Dengan tahanan perpindahan panas gabungan konduksi dan konveksi untuk dinding datar atau slab berlapis adalah

$$R_1 = \frac{1}{h_i A}, R_2 = \frac{\Delta x_B}{k_B A} \text{ dan } R_3 = \frac{1}{h_o A}.$$

Dalam hal ini luas bidang transfer adalah sama. Di mana h_i adalah koefisien perpindahan panas konveksi (fluida *inside*) dan h_o adalah koefisien perpindahan panas konveksi (fluida *outside*). Jika dituliskan persamaan umum gabungan konduksi dan konveksi adalah:

$$q = UA\Delta T_{\text{overall}} \quad (169)$$

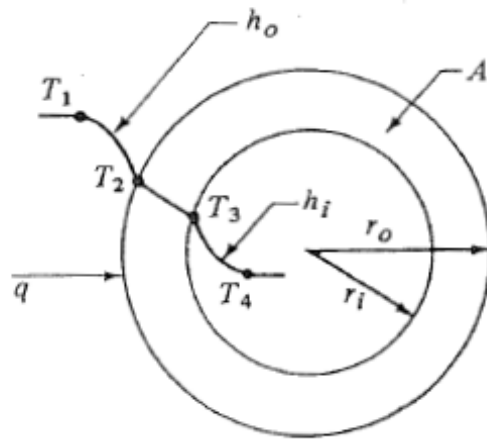
U disebut dengan koefisien perpindahan panas total atau gabungan antara konduksi dan konveksi. Dalam hal ini U dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{\Delta x_B}{k_B} + \frac{1}{h_o}} \quad (170)$$

4.8.2. Kombinasi perpindahan panas konveksi dan konduksi pada silinder

Jika pada silinder (seperti yang digambarkan pada Gambar 4.8) yaitu suatu silinder dengan fluida pada *inside* dan *outside*. Diketahui jari-jari masing-masing lapisan r_i , dan r_o . Diketahui suhu fluida pada bagian dalam fluida adalah pada T_1 dan suhu dinding pada bagian dalam adalah T_2 , serta suhu dinding luar pada T_3 dan suhu fluida luar adalah T_4 . Dimana $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$, maka persamaan perpindahan panas gabungan konduksi dan konveksi sebagai berikut:

$$q = h_i A_i (T_1 - T_2) = \frac{k_A A_{lm} (T_2 - T_3)}{(r_o - r_i)} = h_o A_o (T_3 - T_4) \quad (171)$$



Gambar 4.8. Perpindahan panas konduksi dan konveksi pada silinder

Persamaan (171) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut ini.

$$q = \frac{(T_1 - T_4)}{\left(\frac{1}{h_i A_i} + \frac{(r_o - r_i)}{k_A A_{lm}} + \frac{1}{h_o A_o} \right)} \quad (172)$$

Persamaan (172) dapat disederhanakan dalam bentuk persamaan berikut ini.

$$q = \frac{(T_1 - T_4)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (173)$$

Dengan tahanan perpindahan panas gabungan konduksi dan konveksi untuk silinder adalah $R_1 = \frac{1}{h_i A_i}$, $R_2 = \frac{(r_o - r_i)}{k_A A_{lm}}$ dan $R_3 = \frac{1}{h_o A_o}$.

Dalam hal ini luas bidang transfer tidak sama. Untuk luas penampang A_i , A_{lm} dan A_o masing-masing adalah : $A_i = 2\pi r_i L$ dan $A_o = 2\pi r_o L$. Sedangkan A_{lm} dinyatakan dalam persamaan (174).

$$A_{lm} = \frac{A_o - A_i}{\ln\left(\frac{A_o}{A_i}\right)} \quad (174)$$

Di mana h_i adalah koefisien perpindahan panas konveksi (fluida *inside*) dan h_o adalah koefisien perpindahan panas konveksi (fluida *outside*). Jika dituliskan persamaan umum gabungan konduksi dan konveksi adalah:

$$q = U_i A_i (T_1 - T_4) \quad (175)$$

Atau

$$q = U_o A_o (T_1 - T_4) \quad (176)$$

U_i disebut dengan koefisien perpindahan panas total berdasarkan luas pada bagian *inside*. U_o disebut dengan

koefisien perpindahan panas total berdasarkan luas pada bagian *outside*. Dalam hal ini U_i dan U_o dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$U_i = A_i(T_1 - T_4) \quad (177)$$

$$U_o = A_o(T_1 - T_4) \quad (178)$$

Dalam hal ini U_i dan U_o dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan lain seperti pada persamaan (179) dan (180).

$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{(r_o - r_i)A_i}{k_A A_{lm}} + \frac{A_i}{h_o A_o}} \quad (179)$$

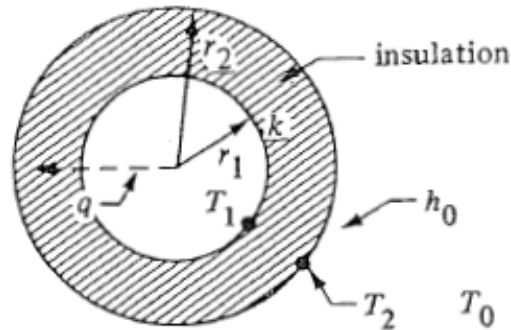
$$U_o = \frac{1}{\frac{A_o}{h_i} + \frac{(r_o - r_i)A_o}{k_A A_{lm}} + \frac{1}{h_o}} \quad (180)$$

4.9. Tebal Isolasi Kritis

Pada dinding datar makin tebal isolasi makin besar tahanan perpindahan panas kuduksinya dan semakin kecil jumlah panas yang hilang. Pada dinding lengkung seperti pada bentuk silinder makin tebal isolasi makin besar tahanan perpindahan panas kuduksinya, maka luas perpindahan panas juga semakin besar. Bisa jadi panas yang hilang semakin besar, sedemikian sampai tahanan konduksi sama dengan tahanan konveksi. Tebal isolasi yang memberikan perpindahan panas maksimal disebut tebal isolasi kritis.

Menghitung tebal isolasi kritis dapat dilakukan pada sebuah pipa yang digambarkan seperti pada Gambar 4.9.

yang dinding luarnya berjari-jari r_1 dan suhunya T_1 diisolasi dengan r_2 adalah jari-jari luar pipa setelah diisolasi. Ingin dicari tebal isolasi yang memberikan q maksimal. Pipa berada di lingkungan yang suhunya T_0 dan koefisien konveksi h_0 .



Gambar 4.9. Tebal isolasi pada silinder

Pada keadaan *steady state* kecepatan perpindahan panas q melalui silinder yang diisolasi akan sama dengan kecepatan perpindahan panas konveksi pada permukaan bagian luar, yang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut ini.

$$q = h_0 A (T_2 - T_0) \quad (181)$$

Persamaan yang menggabungkan antara konduksi dan konveksi adalah seperti pada persamaan (182).

$$q = \frac{2\pi L (T_1 - T_0)}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k} + \frac{1}{r_2 h_0}} \quad (182)$$

Untuk menentukan efek tebal isolasi pada q , maka dilakukan derivatif q terhadap r_2 , sama dengan nol, untuk mendapatkan panas q yang maksimum. Seperti yang dinyatakan dengan persamaan berikut ini.

$$\frac{dq}{dr_2} = \frac{-2\pi L(T_1 - T_0) \left(\frac{1}{r_2 k} - \frac{1}{r_2^2 h_0} \right)}{\left(\frac{\ln(r_2/r_1)}{k} + \frac{1}{r_2 h_0} \right)^2} = 0 \quad (183)$$

Jika diselesaikan diperoleh,

$$r_{2cr} = \frac{k}{h_0} \quad (184)$$

Jika r_2 sama dengan $r_{2cr} = \frac{k}{h_0}$, maka panas yang hilang akan maksimum. Pada $0 < r_2 < r_{cr}$, dengan semakin tebal isolasi maka panas yang hilang akan semakin besar. Namun jika $r_2 > r_{2cr}$, dengan semakin tebal isolasi panas yang hilang akan semakin kecil.

4.10. Soal-Soal Latihan

1. Suatu dinding komposit terdiri susunan bahan konstruksi *stainless steel* setebal 0,25 in ($k = 10$ Btu/h.ft. $^{\circ}$ F), gabus setebal 3 in ($k = 0,025$ Btu/h.ft. $^{\circ}$ F), dan plastik setebal 0,5 in ($k = 1,5$ Btu/h.ft. $^{\circ}$ F).
 - a. Gambarkan perpindahan panas konduksi yang melalui dinding tersebut pada keadaan *steady state*!

- b. Evaluasi masing-masing tahanan termal pada setiap lapisan!
 - c. Tentukan *heat flux* jika pada permukaan *steel* suhunya dijaga tetap pada suhu 250°F dan permukaan plastik bersuhu 80°F !
 - d. Berapa suhu masing-masing permukaan dinding gabus pada kondisi ini?
 - e. Jika fluida di dekat permukaan *steel* bersuhu 280°F sedangkan di permukaan bagian luar dinding plastik suhunya sekitar $26,667^{\circ}\text{C}$. Diketahui *convective coefficient* masing-masing sebesar $1050 \text{ Btu}/(\text{h ft}^2 \text{ }^{\circ}\text{F})$ dan $3,5 \text{ Btu}/(\text{h ft}^2 \text{ }^{\circ}\text{F})$ hitunglah *heat flux* nya!
2. *Steam* jenuh pada suhu 404 K mengalir di dalam pipa dari bahan *steel* memiliki diameter dalam $2,10 \text{ cm}$ dan diameter luarnya $2,7 \text{ cm}$. Diketahui bahwa konduktivitas termal dari *steel* sebesar $42,9 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$. Koefisien perpindahan panas konveksi pada bagian dalam dan luar permukaan pipa sebesar $4560 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$ dan $21,6 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$. Suhu udara lingkungan adalah 30°C . Hitung :
- a. Berapa panas yang hilang tiap 2 m panjang pipa?
 - b. Berapa suhu dinding pipa bagian dalam?
 - c. Jika pipa diisolasi dengan bahan magnesia yang memiliki konduktivitas termal sebesar $0,00675 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$ dengan ketebalan $2,5 \text{ cm}$ pada bagian permukaan luarnya. Berapa sekarang panas yang hilang?

- d. Apa yang terjadi setelah pipa diisolasi jelaskan jawaban saudara dan berapa jumlah perubahan panas yang hilang!

Daftar Pustaka

Geankoplis, C.J., 1993, Transport Process and Unit Operations, 3rd ed, Prentice-Hall Inc., New Jersey

BAB V. Perpindahan Energi/Panas Aliran Laminar Satu Dimensi dalam Cairan dan Padatan

5.1. Perpindahan panas aliran laminar satu dimensi dalam cairan dan padatan

Pokok bahasan ini berisi penyusunan neraca panas atau neraca energi pada padatan dan aliran laminar pada berbagai kasus sederhana beserta penyelesaiannya, serta penggunaan neraca panas tersebut pada kasus sederhana di padatan dan aliran laminar. Tujuan dari penyusunan neraca panas tersebut adalah untuk memperoleh distribusi suhu dalam padatan dan aliran laminar.

Untuk menentukan distribusi suhu, maka dapat dilakukan langkah-langkah analisis seperti pada diagram seperti pada Gambar 5.1. Dari langkah-langkah ini bermanfaat untuk menganalisis dan mensintesis peristiwa transfer panas ke dalam suatu formulasi matematis dan menyelesaikan persamaan matematis tersebut untuk mendapatkan informasi penting yang terkait dengan distribusi suhu dan variabel yang terkait.

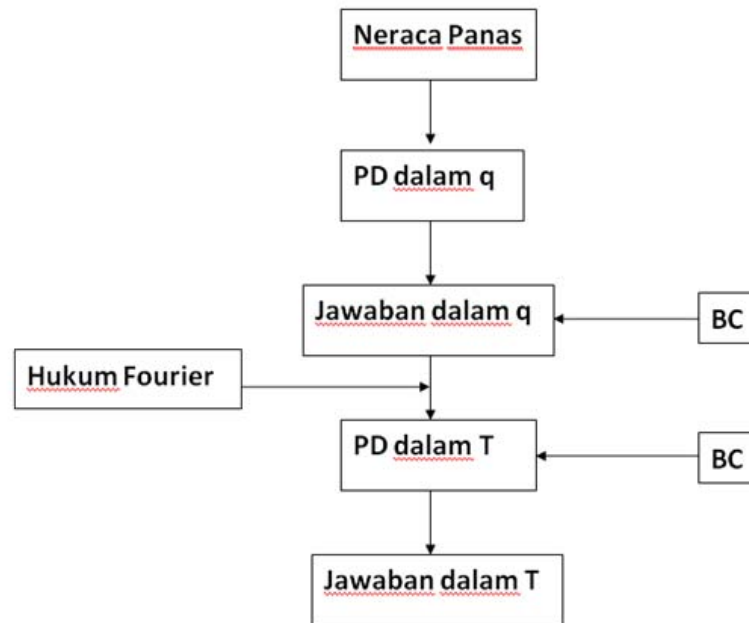
Langkah pertama adalah menyusun neraca panas atau energi. Bentuk neraca panas konduksi secara umum adalah :

$$\text{Rate of input} - \text{Rate of output} + \text{Rate of heat generation} = \text{Rate of accumulation}$$

Dan menggunakan persamaan Hukum Fourier :

$$q_x = -k \frac{dT}{dx} \quad (185)$$

Ada bermacam-macam panas yang dibangkitkan antara lain: adanya gesekan fluida, adanya arus listrik, adanya panas yang timbul karena reaksi kimia dan adanya energi nuklir.



Gambar 5.1. Langkah analisis dalam penentuan distribusi suhu

5.2. Kompetensi Dasar

1. Kompetensi Umum (TIU)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan dapat dapat

menganalisis fenomena perpindahan panas pada berbagai kasus aliran laminar satu dimensi dan kondisi batasnya serta menyelesaikannya pada kasus-kasus sederhana.

2. Kompetensi Khusus (TIK)

Setelah menyelesaikan mata kuliah ini (pada akhir semester), mahasiswa diharapkan dapat mencari distribusi suhu sebagai fungsi jarak dengan menyusun persamaan neraca panas dan menerapkan Hukum Fourier serta dapat menyelesaikan persamaan matematis yang terbentuk secara analitis.

5.3. Macam-macam kondisi batas untuk perpindahan panas

Beberapa kondisi batas atau *Boundary Condition* (BC) yang sering dijumpai adalah sebagai berikut:

1. Suhu di suatu posisi dijaga tetap misal pada suhu T_s .

$$T|_{x=L} = T_s$$

2. Suatu permukaan diberi fluks panas tetap sebesar tertentu sebesar F_n .

$$F_n = \left(\frac{\text{panas}}{\text{waktu luas}} \right)$$

Pada $x=L$, dengan menggunakan persamaan Fourier maka:

$$F_n \text{ luas} = -k_p \text{ luas} \left(\frac{dT}{dx} \right) |_{x=L}$$

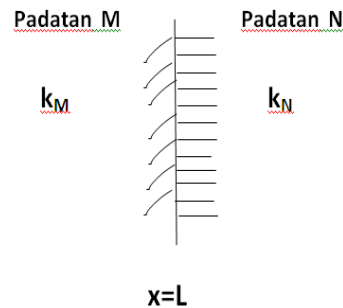
$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = \frac{F_n}{-k_p} \quad (186)$$

3. Pada permukaan yang diisolasi, seperti pada keadaan 2, namun $F_n=0$, sehingga persamaannya berubah menjadi persamaan (187).

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = 0 \quad (187)$$

4. Pada batas antara dua padatan, jika digambarkan seperti pada Gambar 5.2. Pada $x=L$,

$$T_M \Big|_{x=L} = T_N \Big|_{x=L} \quad (188)$$



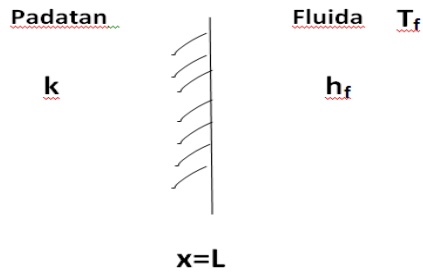
Gambar 5.2. Batas antara dua padatan

Dengan menggunakan persamaan Fourier maka:

$$q_M \Big|_{x=L} = q_N \Big|_{x=L} \quad (189)$$

$$k_M \cdot A \cdot \frac{dT_M}{dx} \Big|_{x=L} = k_N \cdot A \cdot \frac{dT_N}{dx} \Big|_{x=L} \quad (190)$$

5. Pada permukaan dikontakkan dengan fluida bersuhu T_f . Jika digambarkan seperti pada Gambar 5.3.



Gambar 5.3. Batas padatan dan fluida

Pada $x=L$,

$$q|_{x=L} = q_{\text{konveksi}} \quad (191)$$

$$-k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}|_{x=L} = h_f \cdot A \cdot (T|_{x=L} - T_f) \quad (192)$$

5.4. Kasus : Perpindahan panas konduksi dengan sumber panas dari arus listrik

Kawat dengan panjang L , jari-jari R , dan dialiri listrik sehingga dalam kawat timbul panas sebesar Se , yang didefinisikan dengan persamaan berikut.

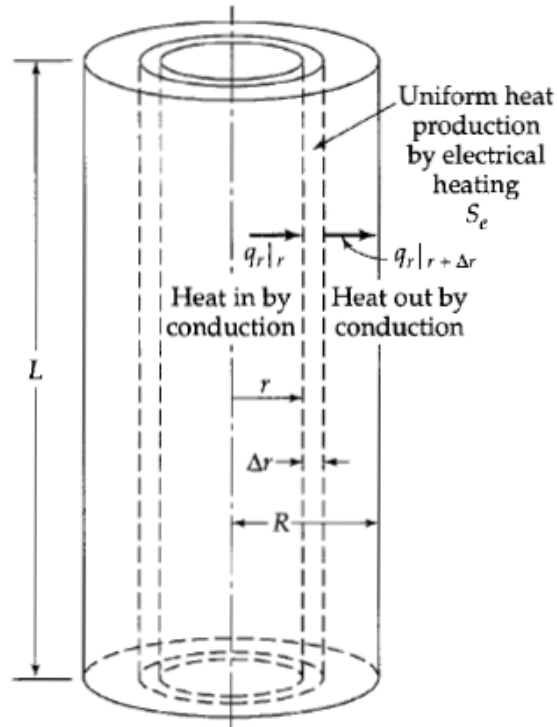
$$\text{Electrical heat source} = Se = \frac{T}{kc}$$

$$Se = \frac{\text{panas}}{\text{waktu} \cdot \text{volume}}$$

Suhu permukaan kawat dijaga temperatur awalnya (T_0).

Ingin dicari $T = f(r)$ pada keadaan *steady state*.

Peristiwa ini dapat digambarkan pada Gambar 5.4. Disusun neraca panas pada elemen volume setebal Δr .



Gambar 5.4. Kawat yang dialiri arus listrik

Dapat disusun neraca energi atau neraca panas pada elemen volum, merupakan irisan kecil dengan luas penampang sebesar $2\pi rL$ dan setinggi Δr .

Neraca panas pada elemen volum dapat dituliskan dengan persamaan :

$$2\pi r L q_r|_r - 2\pi(r + \Delta r)L q_r|_{r+\Delta r} + 2\pi r L \Delta r S_e = 0 \quad (193)$$

Jika dibagi dengan $2\pi L \Delta r$, maka persamaan (193) menjadi:

$$\frac{r q_r|_r - (r + \Delta r) q_r|_{r+\Delta r}}{\Delta r} + r S_e = 0 \quad (194)$$

Jika persamaan (194) dapat disusun kembali dan dilimitkan Δr mendekati nol, maka diperoleh persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{-((r+\Delta r)q_r|_{r+\Delta r} - r q_r|_r)}{\Delta r} + \bar{r} S_e = 0 \quad (195)$$

$$-\frac{d}{dz}(r q_r) + r S_e = 0 \quad (196)$$

Persamaan (196) dapat dituliskan dalam bentuk lain seperti pada persamaan berikut.

$$\frac{d}{dz}(r q_r) - r S_e = 0 \quad (197)$$

Persamaan (197) adalah persamaan diferensial dalam q_r . Persamaan tersebut dapat diintegrasikan, sehingga diperoleh persamaan :

$$r q_r = \frac{1}{2} S_e r^2 + C_1 \quad (198)$$

$$q_r = \frac{1}{2} S_e r + \frac{C_1}{r} \quad (199)$$

Pada $r=0$, maka q_r tak terhingga, Untuk menghindari nilai q_r tak terhingga maka $C_1=0$. Persamaan (199) berubah menjadi :

$$q_r = \frac{1}{2} S_e r \quad (200)$$

Dengan persamaan Fourier, maka persamaan fluks panas q_r adalah :

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} \quad (201)$$

Persamaan (201) disubstitusi ke dalam persamaan (200), sehingga diperoleh persamaan:

$$T = \frac{-1}{4k} S_e r^2 + C_2 \quad (202)$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial pada persamaan (202) maka diperlukan *boundary condition* yaitu pada $r=R$, maka $T=T_0$, diperoleh C_2 .

$$C_2 = T_0 + \frac{S_e}{4k} R^2 \quad (203)$$

Persamaan (201) dapat diselesaikan sehingga diperoleh persamaan (204).

$$T - T_0 = \frac{S_e}{4k} R^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (204)$$

Persamaan (204) menunjukkan hubungan antara T dengan r . Dari persamaan (204) dapat dicari variabel lain yang berkaitan dengan suhu. Diperoleh suhu maksimum terjadi pada $r=0$, persamaannya adalah sebagai berikut.

$$T_{\max} = T_0 + \frac{S_e}{4k} R^2 \quad (205)$$

Panas yang dibuang ke lingkungan dapat diperoleh dengan persamaan :

$$Q = Aq_r|_{r=R} \quad (206)$$

Q dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (200).

$$Q = 2\pi RL \frac{1}{2} S_e R \quad (207)$$

Atau dapat disederhanakan,

$$Q = \pi R^2 L S_e \quad (208)$$

5.5. Kasus : Perpindahan panas konduksi Perpindahan panas konduksi dengan panas yang dibangkitkan dari bahan nuklir berbentuk bola

Bahan nuklir berbentuk bola memiliki elemen yang terdiri material dengan jari-jari $R^{(F)}$ yang diselubungi oleh shell aluminium (*cladding*) berbentuk bola dengan jari-jari $R^{(C)}$. Panas yang dihasilkan dari bahan nuklir tersebut adalah sebesar S_N dalam ($\text{cal/cm}^3\text{s}$) yang dinyatakan dengan persamaan berikut.

$$S_N = S_o \left(1 + b \left(\frac{r}{R^{(F)}} \right)^2 \right) \quad (209)$$

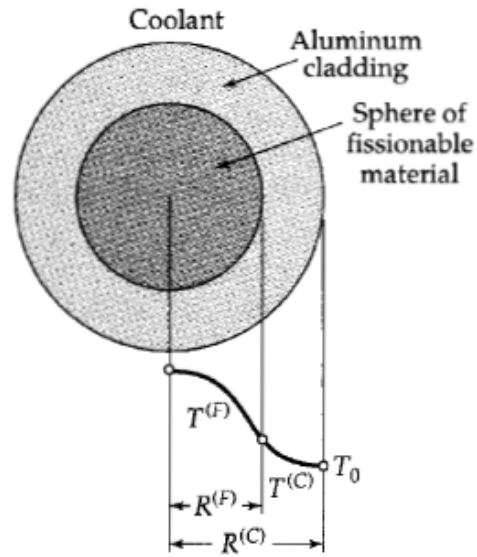
Dengan S_o adalah panas yang dihasilkan pada bagian tengah (pusat) bola, dan b adalah konstanta tak berdimensi. Peristiwa ini digambarkan seperti pada Gambar 5.5. Ingin dicari $T^{(F)}=f(r)$ dan $T^{(C)}=f(r)$ pada keadaan *steady state*.

Dapat disusun neraca energi atau neraca panas pada elemen volum, merupakan irisan kecil dengan luas penampang sebesar $4\pi\bar{r}^2$ setebal Δr .

Neraca panas pada elemen volum dapat dituliskan dengan persamaan :

$$4\pi r^2 q_r^F|_r - 4\pi(r + \Delta r)^2 q_r^F|_{r+\Delta r} + 4\pi\bar{r}^2 \Delta r S_N = 0 \quad (210)$$

Jika dibagi dengan $4\pi\Delta r$, maka persamaan (210) menjadi:



Gambar 5.5. Bahan nuklir berbentuk bola

$$\frac{r^2 q_r^F|_r - (r+\Delta r)^2 q_r^F|_{r+\Delta r}}{\Delta r} + \bar{r}^2 S_N = 0 \quad (211)$$

Jika persamaan (211) dapat disusun kembali dan dilimitkan Δr mendekati nol, maka diperoleh persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{-((r+\Delta r)^2 q_r^F|_{r+\Delta r} - r^2 q_r^F|_r)}{\Delta r} + \bar{r}^2 S_N = 0 \quad (212)$$

$$-\frac{d}{dz} (r^2 q_r^F) + r^2 S_N = 0 \quad (213)$$

Persamaan (213) dapat dituliskan dalam bentuk lain seperti pada persamaan berikut.

$$\frac{d}{dz} (r^2 q_r^F) - r^2 S_N = 0 \quad (214)$$

Analog untuk bagian selubung tetapi $S_N=0$, diperoleh persamaan :

$$\frac{d}{dz}(r^2 q_r^C) = 0 \quad (215)$$

Persamaan (214) dan (215) adalah persamaan diferensial dalam q_r . Persamaan tersebut dapat diintegrasikan, sehingga dari persamaan (214) diperoleh persamaan :

$$q_r^F = S_o \left(\frac{r}{3} + \frac{b}{(R^F)^2} \frac{r^3}{5} \right) + \frac{C_1^F}{r^2} \quad (216)$$

Pada zona *cladding* (selubung) jika persamaan (215) diintegrasikan, diperoleh persamaan :

$$q_r^C = \frac{C_1^C}{r^2} \quad (217)$$

Boundary condition 1) pada $r=0$, maka q_r^F tidak sama dengan *infinite* (tak terhingga), Untuk menghindari nilai $q_r^F = \text{tak terhingga}$ maka $C_1^F=0$. Persamaan (216) berubah menjadi :

$$q_r^F = S_o \left(\frac{r}{3} + \frac{b}{(R^F)^2} \frac{r^3}{5} \right) \quad (218)$$

Dengan *boundary condition* 2) pada $r=R^F$, maka $q_r^F = q_r^C$, jika dipakai kondisi batas ini dari persamaan (217) dan (218) tersebut diperoleh :

$$C_1^C = S_o (R^F)^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \quad (219)$$

Jika persamaan (219) disubstitusi ke persamaan (217) diperoleh persamaan (220).

$$q_r^C = S_o (R^F)^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \frac{1}{r^2} \quad (220)$$

Dengan persamaan Fourier, maka persamaan fluks panas q_r adalah :

$$q_r^F = -k_F \frac{dT_F}{dr} \quad (221)$$

$$q_r^C = -k_C \frac{dT_C}{dr} \quad (222)$$

Persamaan (221) disubstitusi ke dalam persamaan (218), dan diintegrasikan diperoleh persamaan:

$$T^F = -\frac{S_o}{k_F} \left(\frac{1}{6} r^2 + \frac{b}{(R^F)^2} \frac{1}{20} r^4 \right) + C_2^F \quad (223)$$

Persamaan (222) disubstitusi ke dalam persamaan (220), dan diintegrasikan diperoleh persamaan:

$$T^C = -\frac{S_o(R^F)^3}{k_C} \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \frac{1}{r} + C_2^C \quad (224)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (223) dan (224) maka diperlukan *boundary condition* 3) pada $r=R^F$ maka $T^F=T^C$ dan *boundary condition* 4) pada $r=R^C$ maka $T^C=T_o$. Untuk mendapatkan C_2^F digunakan *boundary condition* yang ke 3, diperoleh persamaan (225).

$$C_2^F = T^C + \frac{S_o(R^F)^3}{k_F} \left(\frac{1}{6} + \frac{b}{20} \right) \quad (225)$$

Persamaan (223) dapat diselesaikan sehingga diperoleh persamaan (226).

$$T^F = -\frac{S_o}{k_F} \left(\frac{1}{6} r^2 + \frac{b}{(R^F)^2} \frac{1}{20} r^4 \right) + T^C + \frac{S_o(R^F)^3}{k_F} \left(\frac{1}{6} + \frac{b}{20} \right) \quad (226)$$

Persamaan (226) dapat disusun kembali seperti persamaan (227).

$$T^F - T^C = \frac{S_o(R^F)^3}{6k_F} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R^F} \right)^2 + \frac{3b}{10} \left(1 - \left(\frac{r}{R^F} \right)^4 \right) \right\} \quad (227)$$

Persamaan (227) menunjukkan hubungan antara T^F dengan r .

Untuk menyelesaikan persamaan (224) maka digunakan *boundary condition* 4) pada $r=R^C$ maka $T^C=T_o$. Untuk mendapatkan C_2^C , diperoleh persamaan (228).

$$C_2^C = T_o - \frac{S_o(R^F)^3}{k_c} \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \frac{1}{R^C} \quad (228)$$

Persamaan (224) dapat diselesaikan sehingga diperoleh persamaan (229).

$$T^C = -\frac{S_o(R^F)^3}{k_c} \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \frac{1}{r} + T_o - \frac{S_o(R^F)^3}{k_c} \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \frac{1}{R^C} \quad (229)$$

Persamaan (229) dapat disusun kembali seperti persamaan (230).

$$T^C - T_o = \frac{S_o(R^F)^3}{k_c} \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R^C} \right) \quad (230)$$

Persamaan (230) menunjukkan hubungan antara T^C dengan r .

5.6. Kasus : Perpindahan panas konduksi melalui susunan dinding datar (*composite walls*)

Suatu dinding tersusun dari 3 bahan yang berbeda dan urutannya adalah sebagai berikut ini.

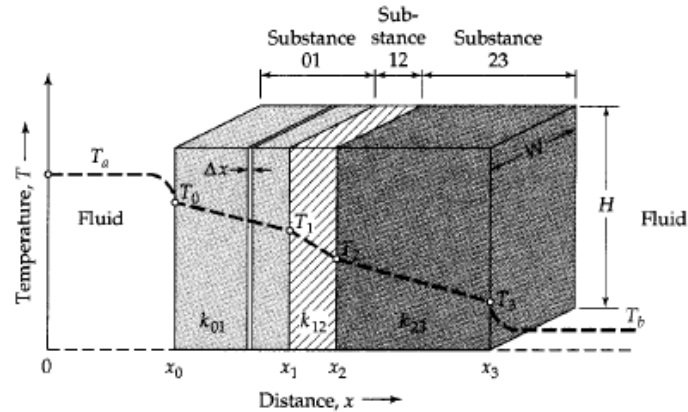
Bahan I = tebal = (x_1-x_0) , dengan konduktivitas bahan k_1

Bahan II = tebal = (x_2-x_1) , dengan konduktivitas bahan k_2

Bahan III = tebal = (x_3-x_2) , dengan konduktivitas bahan k_3

Pada permukaan luar bahan I, dikontakkan dengan fluida yang bersuhu T_a dan koefisien perpindahan panas h_o . Pada permukaan luar bahan III, dikontakkan dengan fluida T_b dan

koefisien perpindahan panas h_3 . Ingin dicari distribusi suhu dalam dinding jika $T_a > T_b$. Peristiwa ini dapat digambarkan seperti pada Gambar 5.6.



Gambar 5.6. Perpindahan panas konduksi melalui susunan dinding datar (padatan berlapis)

Dapat disusun neraca energi atau neraca panas pada elemen volum, merupakan irisan kecil dengan luas penampang sebesar A dan setebal Δx .

Neraca panas pada elemen volum dapat dituliskan dengan persamaan :

$$q^1|_x A - (q^1|_{x+\Delta x} A) = 0 \quad (231)$$

Jika luas penampang sama, dan dibagi dengan Δx , maka persamaan (231) menjadi:

$$\frac{q^1|_{x+\Delta x} - q^1|_x}{\Delta x} = 0 \quad (232)$$

Jika persamaan (232) dilimitkan Δx mendekati nol, maka diperoleh persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q^I|_{x+\Delta x} - q^I|_x}{\Delta x} = 0 \quad (233)$$

$$\frac{dq^I}{dx} = 0 \quad (234)$$

Persamaan (234) adalah persamaan diferensial dalam q^I . Persamaan tersebut dapat diintegrasikan, sehingga diperoleh persamaan :

$$q^I = C_1 \quad (235)$$

Atau
$$q^I = q_o \quad (236)$$

q_o adalah konstan, pada bahan II dan III dengan cara yang sama, diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$\frac{dq^I}{dx} = 0 \quad \text{dan} \quad q^I = q_o \quad (237)$$

$$\frac{dq^{II}}{dx} = 0 \quad \text{dan} \quad q^{II} = q_o \quad (238)$$

$$\frac{dq^{III}}{dx} = 0 \quad \text{dan} \quad q^{III} = q_o \quad (239)$$

Pada keadaan *steady state*, $q^I = q^{II} = q^{III} = q_o$.

Dengan persamaan Fourier, maka persamaan fluks panas q adalah :

$$q_o = -k \frac{dT}{dx} \quad (240)$$

Untuk semua bahan I, II dan III diperoleh persamaan-persamaan ini.

$$-k_1 \frac{dT}{dx} = q_o \quad (241)$$

$$-k_2 \frac{dT}{dx} = q_o \quad (242)$$

$$-k_2 \frac{dT}{dx} = q_o \quad (243)$$

Untuk menyelesaikan persamaan-persamaan (241), (242) dan (243) diintegrasikan dengan batas yang sesuai.

Diperoleh persamaan-persamaan untuk bahan I, II dan III.

$$T_o - T_1 = \frac{q_o}{k_1} (x_1 - x_o) \quad (244)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{q_o}{k_2} (x_2 - x_1) \quad (245)$$

$$T_3 - T_2 = \frac{q_o}{k_3} (x_3 - x_2) \quad (246)$$

Persamaan (244), (245) dan (246) menunjukkan hubungan antara T dengan x.

Pada permukaan yang berkontak dengan fluida dapat dipakai hukum Newton, sehingga diperoleh persamaan :

$$T_a - T_o = \frac{q_o}{h_o} \quad (247)$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_o}{h_3} \quad (248)$$

Dengan penjumlahan diperoleh persamaan,

$$T_a - T_b = q_o \left(\frac{1}{h_o} + \frac{x_1 - x_o}{k_1} + \frac{x_2 - x_1}{k_2} + \frac{x_3 - x_2}{k_3} + \frac{1}{h_3} \right) \quad (249)$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk,

$$q_o = \frac{(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{h_o} + \frac{x_1 - x_o}{k_1} + \frac{x_2 - x_1}{k_2} + \frac{x_3 - x_2}{k_3} + \frac{1}{h_3} \right)} \quad (250)$$

Dengan persamaan (236), secara umum dapat dituliskan

$$q_o = q^I = q^{II} = q^{III} = \frac{(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{h_o} + \frac{x_1 - x_o}{k_1} + \frac{x_2 - x_1}{k_2} + \frac{x_3 - x_2}{k_3} + \frac{1}{h_3} \right)} \quad (251)$$

Bentuk lain persamaan (251) adalah sebagai berikut:

$$q_o = U(T_a - T_b) \quad (252)$$

q_o adalah fluks panas, jika dalam *heat flow*, persamaannya seperti pada persamaan (253).

$$Q_o = U(WH)(T_a - T_b) \quad (253)$$

5.7. Kasus : Perpindahan panas konduksi melalui susunan dinding silinder (*composite cylindrical wall*)

Suatu dinding pipa silinder tersusun dari 3 bahan yang berbeda dan urutannya adalah sebagai berikut ini.

Bahan I = tebal = (r_1-r_0) , dengan konduktivitas bahan k_{01}

Bahan II = tebal = (r_2-r_1) , dengan konduktivitas bahan k_{12}

Bahan III = tebal = (r_3-r_2) , dengan konduktivitas bahan k_{23}

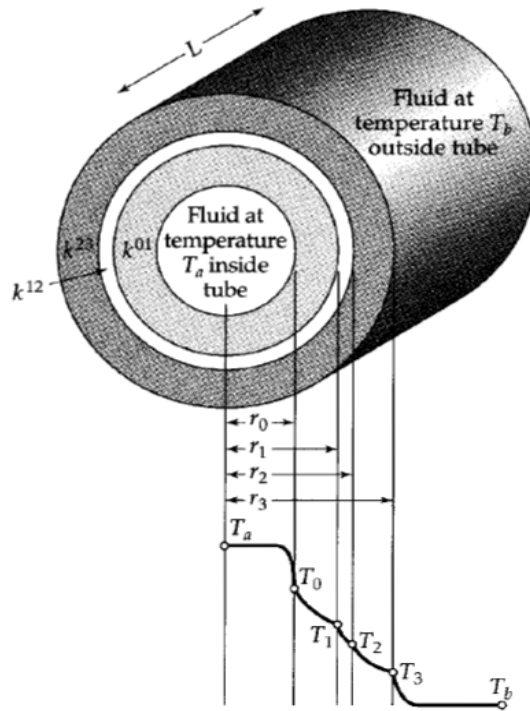
Pada permukaan luar bahan I, dikontakkan dengan fluida yang bersuhu T_a dan koefisien perpindahan panas h_o . Pada permukaan luar bahan III, dikontakkan dengan fluida T_b dan koefisien perpindahan panas h_3 . Ingin dicari distribusi suhu dalam dinding pipa silinder jika $T_a > T_b$. Peristiwa ini dapat digambarkan seperti pada Gambar 5.7.

Dapat disusun neraca energi atau neraca panas pada elemen volum, merupakan irisan kecil dengan luas penampang sebesar $2\pi\bar{r} L$ dan setebal Δr .

Neraca panas pada elemen volum dapat dituliskan dengan persamaan :

$$2\pi r L q_r|_r - (2\pi(r + \Delta r)L q_r|_{r+\Delta r}) = 0 \quad (254)$$

Jika dibagi dengan $2\pi L \Delta r$, maka persamaan (254) menjadi:



Gambar 5.7. Perpindahan panas konduksi melalui susunan dinding silinder (padatan berlapis)

$$\frac{r q_r|_r - (r+\Delta r) q_r|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = 0 \quad (255)$$

Jika persamaan (255) dapat disusun kembali dan dilimitkan Δr mendekati nol, maka diperoleh persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{-(r+\Delta r) q_r|_{r+\Delta r} - r q_r|_r}{\Delta r} = 0 \quad (256)$$

$$-\frac{d}{dz} (r q_r) = 0 \quad (257)$$

Persamaan (257) dapat dituliskan dalam bentuk lain seperti pada persamaan berikut.

$$\frac{d}{dz}(rq_r) = 0 \quad (258)$$

Persamaan (258) adalah persamaan diferensial dalam q_r .
 Persamaan tersebut dapat diintegrasikan, sehingga diperoleh persamaan :

$$rq_r = C_1 \quad (259)$$

C_1 adalah konstan, persamaan (256) dapat dituliskan dalam bentuk lain

$$rq_r = r_o q_o \quad (260)$$

$r_o q_o$ adalah konstan.

Dengan persamaan Fourier, maka persamaan fluks panas q adalah :

$$q_o = -k \frac{dT}{dx} \quad (261)$$

Untuk semua bahan I, II dan III diperoleh persamaan-persamaan ini.

$$-k_{01} \frac{dT}{dx} = q_o \quad (262)$$

$$-k_{12} \frac{dT}{dx} = q_o \quad (263)$$

$$-k_{23} \frac{dT}{dx} = q_o \quad (264)$$

Untuk menyelesaikan persamaan-persamaan (262), (263) dan (264) diintegrasikan dengan batas yang sesuai. Diperoleh persamaan-persamaan untuk bahan I, II dan III.

$$T_o - T_1 = \frac{r_o q_o \ln\left(\frac{r_1}{r_o}\right)}{k_{01}} \quad (265)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{r_o q_o \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_{12}} \quad (266)$$

$$T_3 - T_2 = \frac{r_o q_o \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_{23}} \quad (267)$$

Persamaan (265), (266) dan (267) menunjukkan hubungan antara T dengan r.

Pada permukaan yang berkontak dengan fluida dapat dipakai hukum Newton, sehingga diperoleh persamaan :

$$T_a - T_o = \frac{q_o}{h_o} \quad (268)$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_3}{h_3} = \frac{q_o r_o}{h_3 r_3} \quad (269)$$

Dengan penjumlahan diperoleh persamaan,

$$T_a - T_b = q_o r_o \left(\frac{1}{r_o h_o} + \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_o}\right)}{k_{o1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_{12}} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_{23}} + \frac{1}{r_3 h_3} \right) \quad (270)$$

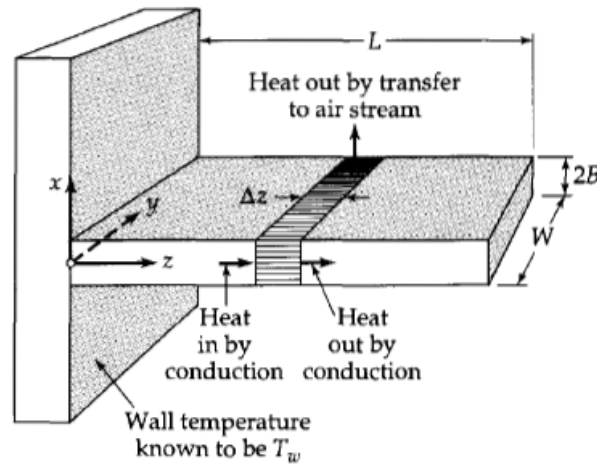
Atau dapat dituliskan dalam bentuk,

$$q_o r_o = \frac{(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{r_o h_o} + \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_o}\right)}{k_{o1}} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_{12}} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_{23}} + \frac{1}{r_3 h_3} \right)} \quad (271)$$

5.8. Kasus : Perpindahan panas pada *cooling fin* bentuk sederhana

Fin pendingin digunakan untuk memperbesar atau meningkatkan luas area heat transfer. Fin paling sederhana adalah seperti pada Gambar 5.8. Suhu dinding pada T_w dan suhu udara T_a Jika keadaan *steady state*; dan diambil anggapan bahwa $T = f(z)$ (hanya arah z dan bukan arah x atau y). Pada ujung B tebalnya cukup kecil, panas yang hilang melalui tepi-tepi F_{in} diabaikan (pada bagian ujung

perpindahan panas konveksi diabaikan). Ingin dicari distribusi suhu sebagai fungsi z atau $T = f(z)$.



Gambar 5.8. Fin sederhana dengan $B \ll L$ dan $B \ll W$

Dapat disusun neraca energi atau neraca panas pada elemen volum, merupakan irisan kecil dengan luas penampang sebesar $2BW$ dan setebal Δz .

Neraca panas pada elemen volum dapat dituliskan dengan persamaan :

$$(2BW q|_z) - (2BW q|_{z+\Delta z} + h 2W \Delta z(\bar{T} - T_a)) = 0 \quad (272)$$

Jika dibagi dengan $2BW\Delta z$, maka persamaan (272) menjadi:

$$\frac{(q|_z) - (q|_{z+\Delta z})}{\Delta z} - \frac{h}{B} (\bar{T} - T_a) = 0 \quad (273)$$

Jika persamaan (273) dapat disusun kembali dan dilimitkan Δz mendekati nol, maka diperoleh persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-(q|_{z+\Delta z} - q|_z)}{\Delta z} - \frac{h}{B} (\bar{T} - T_a) = 0 \quad (274)$$

$$-\frac{dq}{dz} - \frac{h}{B} (T - T_a) = 0 \quad (275)$$

Persamaan (275) adalah persamaan diferensial dalam q . Dengan persamaan Fourier, maka persamaan fluks panas q adalah :

$$q = -k \frac{dT}{dz} \quad (276)$$

Persamaan (276) disubstitusi ke dalam persamaan (275), sehingga diperoleh persamaan:

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{h}{kB} (T - T_a) = 0 \quad (276)$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial pada persamaan (276) maka diperlukan *boundary condition* yaitu:

- 1) $z = 0$, $T = T_w$
- 2) $z = L$, panas minimum artinya $\frac{dT}{dz} = 0$

Bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial seperti pada persamaan (276). Bentuk persamaan diferensial pada (276) diubah dalam θ dan ζ yang merupakan bilangan tak berdimensi.

$$\text{Jika} \quad T - T_a = \theta \quad (277)$$

dan $dT = d\theta$, dan kelompok tak berdimensi :

$$\zeta = z \sqrt{\frac{h}{kB}} \quad (278)$$

Persamaan (278) dapat dikuadratkan seperti pada persamaan berikut ini.

$$\zeta^2 = z^2 \frac{h}{k_B} \quad (279)$$

Dengan substusi persamaan (277) dan (279) maka persamaan (276) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{d^2(T-T_a)}{d\left(z\sqrt{\frac{h}{k_B}}\right)^2} - (T - T_a) = 0 \quad (280)$$

Persamaan (280) dapat ditulis dalam bentuk seperti persamaan berikut ini.

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} - \theta = 0 \quad (281)$$

Boundary condition atau kondisi batas berubah menjadi:

$$1) \zeta=0, \quad \theta=T-T_a$$

$$2) \zeta = L\sqrt{\frac{h}{k_B}} \quad \text{maka} \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = 0$$

Penyelesaian persamaan diferensial (281) adalah :

$$\theta = Ce^{m\zeta} \quad (282)$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = mCe^{m\zeta} \quad (283)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} = m^2Ce^{m\zeta} \quad (284)$$

Jika persamaan (282) dan (284) disubstitusi ke persamaan (281), maka akan diperoleh persamaan berikut ini.

$$m^2Ce^{m\zeta} - Ce^{m\zeta} = 0 \quad (285)$$

Persamaan (285) jika diselesaikan maka diperoleh persamaan (286).

$$\theta = C_1 e^{\zeta} + C_2 e^{-\zeta} \quad (286)$$

Persamaan (286) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\theta = C_3 \sinh(\zeta) + C_4 \cosh(\zeta) \quad (287)$$

Dengan menggunakan *boundary condition* yang pertama, maka diperoleh hasil C_4 , seperti pada persamaan (288).

$$C_4 = T_w - T_a \quad (288)$$

Jika persamaan (288) disubstitusi ke persamaan (287) diperoleh persamaan berikut ini.

$$\theta = C_3 \sinh(\zeta) + (T_w - T_a) \cosh(\zeta) \quad (289)$$

Jika persamaan (289) diturunkan, maka didapatkan:

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = C_3 \cosh(\zeta) + (T_w - T_a) \sinh(\zeta) \quad (290)$$

Dengan menggunakan *boundary condition* yang ke dua, maka diperoleh hasil C_3 , seperti pada persamaan (291).

$$C_3 = \frac{-(T_w - T_a) \sinh\left(L \sqrt{\frac{h}{k_B}}\right)}{\cosh\left(L \sqrt{\frac{h}{k_B}}\right)} \quad (291)$$

Jika persamaan (288) dan (291) disubstitusikan ke persamaan (287) akan diperoleh persamaan berikut ini.

$$\theta = \frac{-(T_w - T_a) \sinh\left(L \sqrt{\frac{h}{k_B}}\right)}{\cosh\left(L \sqrt{\frac{h}{k_B}}\right)} \sinh(\zeta) + (T_w - T_a) \cosh(\zeta) \quad (287)$$

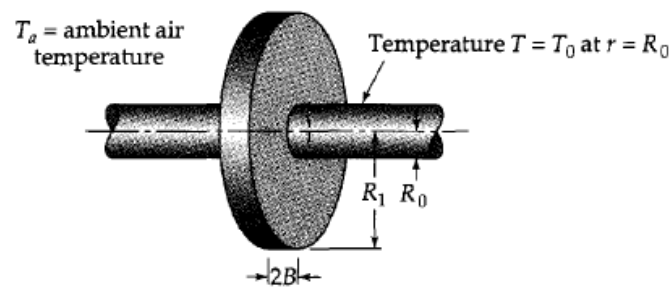
Persamaan (287) dapat disusun kembali dan diperoleh persamaan berikut ini.

$$\frac{T-T_a}{T_w-T_a} = \frac{\cosh\left((L-z)\sqrt{\frac{h}{kB}}\right)}{\cosh\left(L\sqrt{\frac{h}{kB}}\right)} \quad (288)$$

Persamaan (288) menunjukkan hubungan antara T dengan z.

5.9. Kasus : Perpindahan panas atau panas yang hilang pada a circular cooling fin

Fin pendingin digunakan untuk memperbesar atau meningkatkan luas area heat transfer. *Fin* bentuk sirkular atau mirip cakram dipasang pada pipa panas, dapat digambarkan seperti pada Gambar 5.9. Suhu dinding pipa pada T_o dan suhu udara T_a Jika keadaan *steady state*; dan diambil anggapan bahwa $T = f(r)$. Pada ujung $2B$ tebalnya cukup kecil, panas yang hilang melalui tepi-tepi F_{in} diabaikan (pada bagian ujung perpindahan panas konveksi diabaikan). Ingin dicari distribusi suhu sebagai fungsi r atau $T = f(r)$.



Gambar 5.9. Fin pendingin bentuk sirkular pada pipa yang dipanaskan

Dapat disusun neraca energi atau neraca panas pada elemen volum, merupakan irisan kecil dengan luas penampang sebesar $2\pi\bar{r} B\Delta r$ dan setebal Δz .

Neraca panas pada elemen volum dapat dituliskan dengan persamaan :

$$(2\pi r Bq|_z) - (2\pi(r + \Delta r) Bq|_{z+\Delta z}) + 2\pi\bar{r}\Delta rh (\bar{T} - T_a) = 0 \quad (289)$$

Jika persamaan (289) dibagi dengan $2\pi\Delta r$ dan disusun kembali dan dilimitkan Δr mendekati nol, maka diperoleh persamaan berikut ini.

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{-((r+\Delta r)q|_{r+\Delta r} - rq|_r)}{\Delta r} - \frac{2h}{B} \bar{r} (\bar{T} - T_a) = 0 \quad (290)$$

$$\frac{d(rq)}{dr} + \frac{2h}{B} r (T - T_a) = 0 \quad (291)$$

Persamaan (290) adalah persamaan diferensial dalam q . Dengan persamaan Fourier, maka persamaan fluks panas q adalah :

$$q = -k \frac{dT}{dz} \quad (292)$$

Persamaan (292) disubstitusi ke dalam persamaan (291), sehingga diperoleh persamaan:

$$r \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} - \frac{2h}{kB} r (T - T_a) = 0 \quad (293)$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial pada persamaan (293) maka diperlukan *boundary condition* yaitu:

$$1) r = R_o, T = T_o$$

2) pada $r = R_1$, panas konduksi sama dengan panas konveksi, seperti pada persamaan (294).

$$k_1 \frac{dT}{dz} \Big|_{r=R_1} = h(T - T_a) \quad (294)$$

Jika $\alpha = \frac{2h}{k_B}$, disubstitusi ke persamaan (293) serta dikalikan dengan r , diperoleh persamaan (295).

$$r^2 \frac{d^2T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} - \alpha^2 r(T - T_a) = 0 \quad (295)$$

$$\text{Jika} \quad T - T_a = \theta \quad (296)$$

$$dT = d\theta \quad (297)$$

Persamaan (296) dan (297) disubstitusi ke persamaan (295), diperoleh bentuk persamaan diferensial baru.

$$r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} - \alpha r^2 \theta = 0 \quad (296)$$

Bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial (296)?

Disamakan dengan bentuk umum persamaan diferensial Bessel. bentuk umum persamaan diferensial Bessel adalah sebagai berikut.

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x(a + 2bx^r) \frac{dy}{dx} + (c + dx^{2s} - b(1 - a - r)x^r + b^2x^{2r})y = 0 \quad (297)$$

Diperoleh, $b=0$, $a=1$, dan $c=0$ serta $r=0$, $d=-\alpha$ dan $s=1$.

Penyelesaian persamaan diferensial Bessel dalam bentuk persamaan berikut ini.

$$\theta = r^{\frac{1-a}{2}} \exp\left(-\frac{bx^r}{r}\right) \left[C_1 Z_p\left(\frac{\sqrt{|d|}}{s} x^s\right) + C_2 Z_{-p}\left(\frac{\sqrt{|d|}}{s} x^s\right) \right] \quad (298)$$

Persamaan untuk menghitung p adalah :

$$p = \frac{1}{s} \sqrt{\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - c} \quad (299)$$

Jika nilai a,c dan s dimasukkan ke persamaan (299) diperoleh p=0. Dan harga $\frac{\sqrt{|d|}}{s} = \frac{\sqrt{|\alpha|}}{1} = \sqrt{\alpha}$, penyelesaian $Z_p=I_0$ dan $Z_p=K_0$.

Dengan memasukkan nilai-nilai konstantanya persamaan (298) berubah menjadi persamaan (300).

$$\vartheta = C_1 I_0(r\sqrt{\alpha}) + C_2 K_0(r\sqrt{\alpha}) \quad (300)$$

θ pada persamaan (300) dapat diganti dengan persamaan (296).

$$T - T_a = C_1 I_0(r\sqrt{\alpha}) + C_2 K_0(r\sqrt{\alpha}) \quad (301)$$

Dengan menggunakan *boundary condition* yang pertama, maka diperoleh persamaan (302).

$$T_0 - T_a = C_1 I_0(R_0\sqrt{\alpha}) + C_2 K_0(R_0\sqrt{\alpha}) \quad (302)$$

Jika persamaan (301) diturunkan terhadap r, akan diperoleh persamaan (303).

$$\frac{dT}{dr} = C_1 \sqrt{\alpha} I_1(r\sqrt{\alpha}) + C_2 (-\sqrt{\alpha}) K_1(r\sqrt{\alpha}) \quad (303)$$

Atau

$$\frac{dT}{dr} = C_1 \sqrt{\alpha} I_1(r\sqrt{\alpha}) - C_2 \sqrt{\alpha} K_1(r\sqrt{\alpha}) \quad (304)$$

Dengan menggunakan *boundary condition* yang ke dua, maka diperoleh persamaan (305).

$$C_2 = \frac{C_1 I_1(R_1\sqrt{\alpha})}{K_1(R_1\sqrt{\alpha})} \quad (305)$$

Dengan persamaan (302) dan substitusi persamaan (305) diperoleh C_1 seperti pada persamaan (306).

$$C_1 = \frac{(T_o - T_a)K_1(R_1\sqrt{\alpha})}{(I_o(R_o\sqrt{\alpha})K_1(R_1\sqrt{\alpha}) + I_1(R_1\sqrt{\alpha})K_o(R_o\sqrt{\alpha}))} \quad (306)$$

Jika C_1 pada persamaan (306) disubstitusi ke persamaan (305) diperoleh C_2 persamaan (307).

$$C_2 = \frac{(T_o - T_a)I_1(R_1\sqrt{\alpha})}{(I_o(R_o\sqrt{\alpha})K_1(R_1\sqrt{\alpha}) + I_1(R_1\sqrt{\alpha})K_o(R_o\sqrt{\alpha}))} \quad (307)$$

Jika persamaan (306) dan (307) disubstitusikan ke persamaan (301) akan diperoleh persamaan berikut ini.

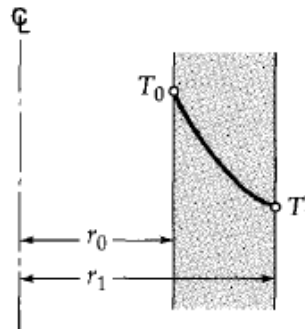
$$T - T_a = \frac{((T_o - T_a)K_1(R_1\sqrt{\alpha})I_o(r\sqrt{\alpha}) + (T_o - T_a)I_1(R_1\sqrt{\alpha})K_o(r\sqrt{\alpha}))}{(I_o(R_o\sqrt{\alpha})K_1(R_1\sqrt{\alpha}) + I_1(R_1\sqrt{\alpha})K_o(R_o\sqrt{\alpha}))} \quad (308)$$

Persamaan (308) menunjukkan hubungan antara T dengan r , atau $T = f(r)$.

5.10. Soal-Soal Latihan

1. Panas mengalir melalui sebuah annulus dengan jari-jari dalam r_o dan jari-jari luar r_1 . Digambarkan seperti pada Gambar 5.10. Konduktivitas panas bervariasi secara linier dengan suhu ($k = aT + b$), dari k_o pada T_o sampai dengan k_1 pada T_1 .
 - a. Susun persamaan yang menyatakan aliran panas melalui dinding pada $r=r_o$

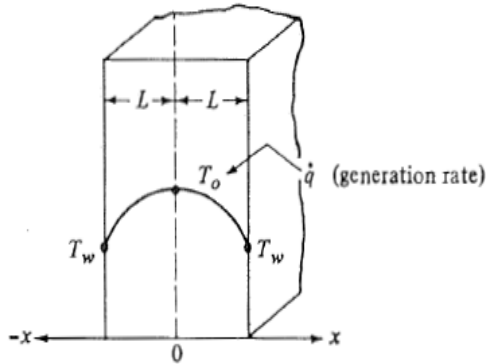
- b. Tunjukkan bahwa persamaan di (a) dapat disederhanakan jika $(r_1 - r_0)$ sangat kecil.



Gambar 5.10. Profil suhu pada dinding annulus

2. Sebuah bahan nuklir berbentuk bola dengan jari-jari R , ada panas yang dibangkitkan di dalam bola nuklir tersebut (*heat internal generation*) sebesar S_N ($=W/h.m^3$). Panas tersebut didistribusikan secara radial sepanjang arah R . Jika suhu dinding permukaan luar bagian bahan nuklir tersebut adalah T_D dan suhu pada bagian tengah bola nuklir adalah maksimum sebesar T_M . Susunlah persamaan distribusi suhu sehingga diperoleh $T=f(r)$. Sebutkan asumsi-asumsi yang saudara gunakan!
3. Sebuah dinding datar (lihat gambar 5.12) ada panas yang dibangkitkan di dalam dinding tersebut (*heat internal generation*) sebesar \dot{q} ($=W/h.m^3$). Panas tersebut didistribusikan hanya sepanjang arah x . Dinding tersebut diisolasi. Jika suhu dinding permukaan luar bagian

dinding adalah konstan sebesar T_w (K) pada $x = L$ dan $x = -L$ dan suhu pada bagian tengah dinding adalah maksimum sebesar T_o . Susunlah persamaan distribusi suhu sehingga diperoleh $T=f(x)$, jika konduktivitas termal bahan adalah k (W/m.K). Sebutkan asumsi-asumsi yang saudara gunakan!



Gambar 5.12. Panas yang dibangkitkan pada dinding

Daftar Pustaka

Bird, R.B., Stewart, W.E., and Lightfoot, E.N., 1960, Transport Phenomena, John Wiley and Sons, Inc., New York