МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 28

Москва
Издательство МЦНМО
2021

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

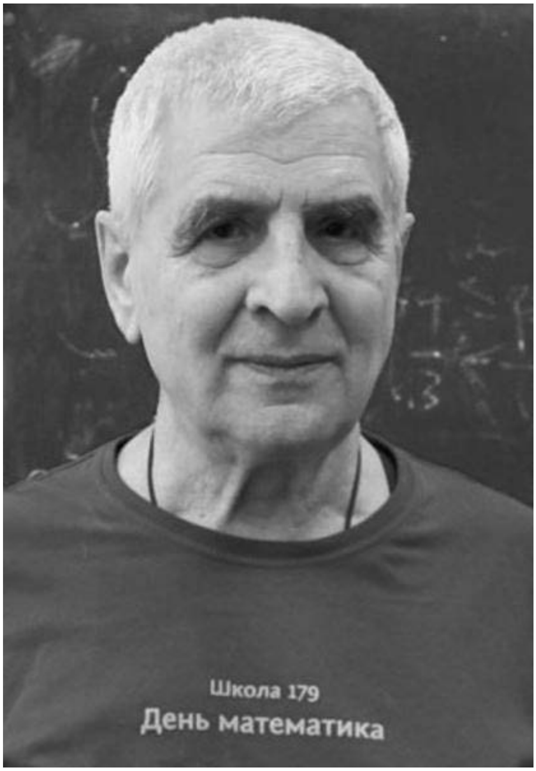
Адрес редакции:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@yandex.ru
Web page: www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Математическое просвещение. Третья серия, вып. 28. —
М34 М.: МЦНМО, 2021. — 264 с.
ISBN 978-5-4439-1685-9

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1685-9



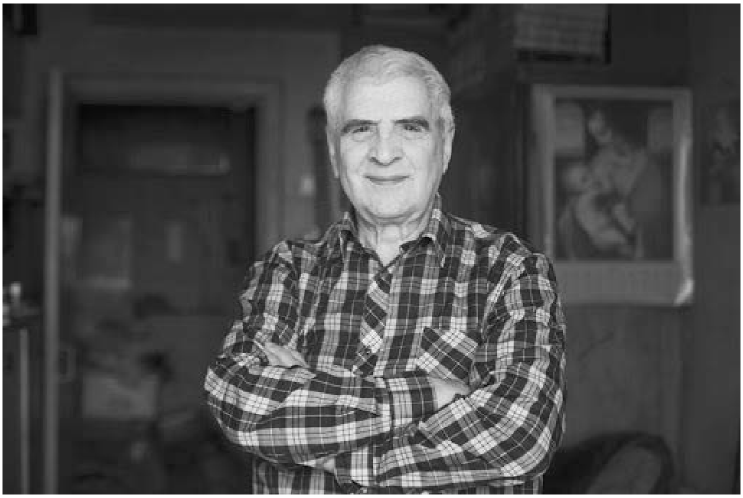
3 июля 2021 года в возрасте 89 лет ушёл из жизни
выдающийся деятель российского математического образования,
создатель ряда физико-математических школ,
основатель Турнира Ломоносова и Турнира городов,
член редколлегии «Математического просвещения»

Николай Николаевич Константинов

Светлая память Николаю Николаевичу!

Содержание

Математический мир



Памяти
Николая Николаевича Константинова
(1932–2021)

В. М. Тихомиров

Мы познакомились в первом семестре 1952/53 учебного года. Я стоял на балконе третьего этажа старого университетского здания на Моховой и обсуждал с однокурсниками какую-то задачу. Чуть в стороне от нас стоял невысокий черноволосый юноша, с интересом следивший за нашими обсуждениями. Потом он подошёл ко мне и спросил, что за задача. Я стал ему объяснять. Однокурсники отошли, мы остались вдвоём. Задача заинтересовала моего собеседника, он похвалил её и спросил, есть ли у меня решение. Я сказал, что у меня есть план, и стал его излагать. Завязался разговор. Кто-то из нас сказал: «Давай познакомимся!» Мы протянули друг к другу руки, я назвал своё имя и услышал в ответ: «Коля

Константинов». Выяснилось, что он студент третьего курса физфака и что с первого курса он ведёт школьный кружок.

Такой мне запомнилась первая встреча с Николаем Николаевичем Константиновым, одной из самых необычных и неповторимых личностей среди тех, с кем довелось общаться в жизни. Его уход — очень горькая потеря для меня.

Феномен Николая Николаевича Константинова нелегко объяснить. Крупную личность принято характеризовать титулами, степенями, государственными наградами, открытиями, трудами и т. д. Николай Николаевич был свободный человек, шедший дорогою свободной, занимавшийся лишь тем, к чему лежала его душа, не требуя наград за благородный свой подвиг. И никогда не роптавший ни на судьбу, ни на людей.

Основную часть своей жизни Константинов был руководителем школьных кружков и учителем математики. Стал вести школьные кружки с 1950 года, а работать в школах с 1960 года. Он преподавал в седьмой, девяносто первой, пятьдесят седьмой и сто семьдесят девятой школах.

Не занимая никаких должностей и позиций, Константинов сыграл огромную роль в математическом образовании в МГУ, Москве, России и во всём мире. Он был и выдающимся организатором, и создателем новых идей и принципов. Был одним из самых активных деятелей на математических олимпиадах. А когда он был устранён от Всесоюзной олимпиады, Николай Николаевич организовал Турнир Ломоносова, Турнир городов, предложил идею организации Независимого университета.

Имена тех, кто отстранял Константинова от Всесоюзной олимпиады, не сохранились, а имя Николая Николаевича Константинова стало широко известным. Он объездил с лекциями и обсуждениями сначала весь Советский Союз, а когда открылись возможности выезжать за рубеж, объездил большое число стран. Константинов побывал в Австралии, Аргентине, Великобритании, Венгрии, Германии, Дании, Иране, Испании, Канаде, Китае, Колумбии, Латвии, Мексике, Сербии, США, Японии. Он был награждён многими престижными призами и премиями.

Н. Н. Константинов прожил очень яркую и плодотворную жизнь. Светлая память о нём навсегда сохранится в душах тех, кому довелось с ним соприкоснуться.

Владимир Михайлович Тихомиров, мехмат МГУ

vmtikh@gmail.com

Лев Дмитриевич Беклемишев — выдающийся специалист по математической логике. В 2019 году он избран действительным членом Российской академии наук. По просьбе редакции «Математического просвещения» Лев Дмитриевич рассказывает о своём пути в науку, профессиональных интересах, взглядах на проблемы науки и образования.

Интервью с академиком Л. Д. Беклемишевым

Какую школу Вы окончили? *Имела ли она физико-математический уклон*?

Я окончил 179 школу в 1984 году, это одна из известных в Москве физико-математических школ. Наш математический класс вёл Сергей Григорьевич Роман, физику преподавал Владимир Владимирович Бронфман. Оба они были талантливыми, преданными своему делу, уникальными учителями. Вести математику помогал Сергей Яковенко, в то время третьекурсник, а сейчас известный математик из Вейцмановского института в Израиле. Составленные им «листочки» по анализу были для меня, особенно поначалу, трудными и очень интересными. Дискретную математику и программирование также вели очень хорошие преподаватели, сотрудники Института прикладной математики имени Келдыша. Программирование было одним из моих любимых предметов в школе.

Но я бы хотел вспомнить добрым словом и школу № 3 с углубленным изучением немецкого языка (сейчас 1249), где я учился до перехода в 179, там мне тоже повезло с учителями и одноклассниками.

Какой вуз и факультет Вы окончили? Чем определялся Ваш выбор?

На мой выбор математики в качестве профессии и мехмата МГУ в качестве вуза повлияли прежде всего родители, которые сами были математиками и преподавателями МФТИ. Эта дорога была для меня наиболее простой и естественной. Нельзя сказать, что в то время я об этом не задумывался, но это решение не было связано с каким-либо трудным жизненным выбором. Пока я учился в школе, не было ясности, в какую сторону мне нужно развиваться, поэтому я скорее плыл по течению.

Кто был Вашим научным руководителем? С какой темы началась Ваша научная деятельность?

Научных руководителей у меня было два: Сергей Николаевич Артёмов и Сергей Иванович Адян. На втором курсе я пришёл на семинар к Артёмову, и именно он повлиял на мой выбор математической логики в качестве специальности. На первых курсах мехмата я старался посещать как можно больше различных семинаров и спецкурсов для того, чтобы выбрать будущее направление. Я выбрал математическую логику, поскольку почувствовал, что это «моё». (В то время некоторые знакомые-математики меня отговаривали, поскольку логика считалась слишком специфической и узкой частью математики.)

С научными руководителями мне повезло. Артёмов был, наверное, лучшим из известных мне преподавателей. В то время он был ещё довольно молодым учёным, кандидатом наук, только что получившим свои ключевые результаты и решившим одну из главных проблем в своей области. (Сейчас С. Н. Артёмов — заслуженный профессор университета CUNY в Нью-Йорке.) При этом он отличался особенной заботой в отношении своих учеников. На его семинар я ходил с приподнятым чувством, предвкушением того, что будет происходить что-то очень интересное. В то время наука, которой мы занимались, переживала начальный период расцвета, и можно было наблюдать воочию, как рождаются математические результаты. Каждый год Сергей Николаевич составлял длинные списки нерешённых задач, раздавал некоторые из них участникам семинара, и потом можно было видеть, как довольно многие из этих задач на протяжении года решаются. На меня в то время эти семинары оказывали прямо-таки духоподъёмное действие. В дальнейшем, когда Артёмов стал проводить много времени за границей, я стал фактически его заместителем по этому семинару.

Сергей Иванович Адян уже тогда был признанным учёным, прославившимся решением одной из труднейших математических проблем (проблемы Бёрнсайда о периодических группах), заведующим отделом математической логики в МИАН и профессором мехмата МГУ. Он взял меня в ученики по рекомендации Артёмова, но при этом совершенно лояльно относился к тому, что я занимаюсь другими задачами, достаточно далёкими от его научных интересов. Его роль отнюдь не была формальной: я был активным участником и его семинара, слушал и сдавал все спецкурсы, которые он читал. Сергей Иванович со свойственной ему тщательностью правил мои первые научные статьи. В дальнейшем, когда я стал сотрудником его отдела в Математическом институте им. В. А. Стеклова, он был моим главным наставником по части научной жизни. Когда дело подошло к защите моей кандидатской диссертации, официальными научными руководителями этой работы стали и С. И. Адян, и С. Н. Артёмов.

Как дальше развивались Ваши исследования? Приходилось ли Вам менять их тематику, заниматься прикладными вопросами?

Направление моих исследований не менялось радикально. Скорее, круг моих научных интересов постепенно расширялся. К исходному направлению, заданному в студенческие годы, добавлялись новые темы, в какие-то периоды я осваивал новые для себя области математической логики. Было несколько таких этапов освоения нового, но всякий раз получалось так, что новые задачи оказывались частично связаны с тем, чем я занимался раньше. Не знаю, насколько это типично для других математиков, но мне такое постепенное освоение новых предметов очень помогало.

Моя работа началась в области логики доказуемости — исследования логических систем, в которых можно рассуждать о свойствах формальных доказательств. Эта область представляет собой дальнейшее развитие идей теорем Гёделя о неполноте. Если теоремы Гёделя дают примеры истинных, но недоказуемых в данной формальной системе утверждений, то логика доказуемости связана с построением примеров утверждений с разнообразными более сложными свойствами в смысле возможности их доказать, и она даёт язык для общего описания такого рода примеров. Оказалось, что для решения поставленных в этой области задач требуется хорошее знание так называемых прогрессий Тьюринга — последовательностей теорий, которые получаются присоединением к теории аксиомы, выражающей её непротиворечивость, а также некоторых более общих утверждений, называемых схемами рефлексии. Исследование таких прогрессий — одна из классических тем в математической логике, восходящих к работе Алана Тьюринга 1939 года. Это заставило меня освоить в то время новые для меня, достаточно сложные методы.

Схемы рефлексии применяются для исследования свойств арифметических теорий, поэтому во второй половине 90-х годов я переключился на изучение различных форм индукции и формальной арифметики Пеано — одной из важнейших аксиоматических систем, исследуемых в математической логике. На этом же пути я заинтересовался и следующей темой — вопросами ординального анализа, исследования ординальных характеристик формальных теорий. Эту науку я осваивал в период пребывания в качестве стипендиата фонда Гумбольдта в университете г. Мюнстера в Германии, где находился центр исследований в этой области. В дальнейшем мне удалось связать между собой идеи ординального анализа и логики доказуемости, что я считаю одним из своих главных достижений.

Что касается приложений, то опыт мой здесь невелик. Был период, в начале 2010-х годов, когда я занимался так называемыми логиками авторизации: это языки, предназначенные для записи протоколов обмена информации и распределением прав доступа к информации между несколькими агентами в сети. В то время в исследовательском центре корпорации Майкрософт в Редмонде под руководством известного логика Ю. Гуревича разрабатывался один из таких языков, DKAL. Этот язык был построен на новых интересных и общих принципах, здесь пригодились мои знания в области неклассических логик, и я присоединился к этому проекту в Майкрософт. Для меня заход в прикладную область, сотрудничество с Гуревичем на протяжении нескольких лет и визит в Редмонд были очень интересными и поучительными.

Оглядываясь назад, я вижу, что залогом моего поступательного пути в науке было то, что начиная с третьего курса мехмата МГУ я выбирал задачи для своей работы самостоятельно, занимался теми вопросами, которые мне самому казались интересными и перспективными. При этом я находился в хорошей и разнообразной «питательной среде». Мои научные руководители, а затем и Математический институт им. В. А. Стеклова, куда мне посчастливилось быть принятым на работу сразу по окончании аспирантуры, предоставляли мне в этом отношении полную свободу и всячески меня поддерживали. То же самое было и в период работы за границей — в Германии, Австрии, а затем в Нидерландах. Такое отношение я стараюсь переносить и на своих собственных учеников.

Какие проблемы Вы видите сегодня в организации научной деятельности, в преподавании математики?

Проблем в организации науки хватает. Они всем известны, но, к сожалению, в обществе нет единого понимания того, на каком именно пути следует искать их решение.

Перечислю некоторые системные проблемы: нехватка и старение научных кадров, падение уровня подготовки выпускников университетов, утечка мозгов (как за границу, так и из провинциальных центров в столицы), прозябание научных библиотек, плачевное положение российских научных журналов.

Ещё одной, и очень существенной, проблемой является вопиющая бюрократизация управления наукой. Количество документов и отчётности, которую требует министерство от научных организаций, зашкаливает. Ситуация усугубляется тем, что значительная часть финансирования научной работы теперь идёт за счёт грантов государственных фондов, прежде всего РНФ. Заявки и отчёты по грантам увеличивают бюрократическую нагрузку ещё больше. В результате работающий учёный должен значительную долю своего времени посвящать не собственно науке, а вот этому всему: заявки, отчёты, рецензии.

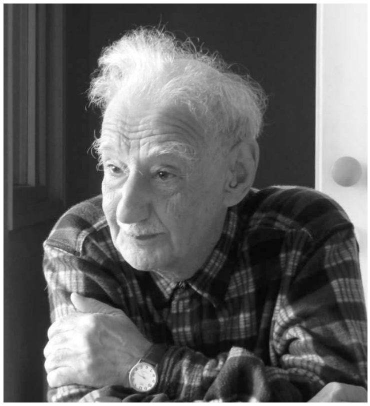
Долгое время одной из ключевых проблем была низкая зарплата учёных. По сравнению с тем, что было в 90-е и начале 2000-х годов, к настоящему времени ситуация всё-таки существенно улучшилась. Однако возникает другая проблема — перекосы в оплате труда: разные университеты, в особенности находящиеся в разных регионах нашей страны, платят своим сотрудникам совершенно разные деньги. При этом успешность учёного в смысле его способности заработать в нынешних условиях не всегда соответствует значимости полученных им научных результатов. Для того и для другого требуются разные качества личности, иногда они совмещаются в одном человеке, но чаще нет. В результате таких перекосов традиционные научные иерархии (например, традиционная система научных степеней и званий) деградируют, учёные теряют видение длительной перспективы своей научной карьеры. Поэтому внедрение рыночных отношений в сферу науки и образования в их нынешней форме, на мой взгляд, нужно ограничивать. Здесь нам лучше бы ориентироваться на европейскую модель, где базовая зарплата учёных достаточно высока, линейка зарплат сравнительно пологая и определяется должностью, а гранты служат не для компенсации низкой зарплаты, а для привлечения дополнительных кадров — аспирантов, постдоков — в проекты.

Каждый из перечисленных вопросов заслуживает отдельного обсуждения. Ответом на эти проблемы со стороны государства пока что была череда реформ управления наукой, наиболее известной из которых стала реформа Российской академии наук в 2013 году. Эти изменения носили характер спонтанный, принятые решения не обсуждались, цели и пути их достижения не проговаривались, в результате решения приходилось не раз пересматривать. Нет сомнений, что непростой период реформирования науки и образования в нашей стране будет и дальше продолжаться, хотя к настоящему времени учёные уже сильно устали от частых изменений правил игры. Думаю, что самое благотворное в нынешней ситуации — это поменьше радикальных изменений.

Что ещё Вам бы хотелось сказать читателям «Математического просвещения»?

Я бы хотел поблагодарить редакцию сборника за предоставленную возможность ответить на вопросы и вспомнить своих учителей, многих из которых уже нет с нами.

Лев Дмитриевич Беклемишев,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
lbekl@yandex.ru



Мне посчастливилось жить среди людей, любящих науку

В. А. Залгаллер

25 декабря 2020 года исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося математика и педагога Виктора Абрамовича Залгаллера (1920–2020). Ему посвящена статья С. Е. Рукшина в 27-м выпуске «Математического просвещения» (с. 12–21). Фронтовые воспоминания В. А. Залгаллера собраны им в электронной публикации «Быт войны». Здесь мы публикуем интервью В. А. Залгаллера, записанное в 2009 г. Н. Е. Мнёвым. Расшифровка В. В. Кондратьева. Подготовка к публикации выполнена Б. Р. Френкиным в издательстве МЦНМО.

Ленинградские математики во время войны

Когда Академия переехала в Москву, вслед за ней из Ленинграда в Москву уехали И. М. Виноградов, Б. Н. Делоне и С. Н. Бернштейн[1]. А че-

[1] О математиках, работавших в Ленинграде и упоминаемых в интервью, см. с. 33–34.

рез некоторое время возник вопрос о создании Ленинградского отделения Математического института имени В. А. Стеклова (ЛОМИ)[2]. Оно было создано в апреле 1940 г. Но вскоре началась война, и первый директор ЛОМИ В. А. Тартаковский, не веря в то, что Ленинград не будет сдан, уехал в эвакуацию без разрешения. И директором был назначен А. А. Марков.

Сотрудники ЛОМИ представляли собой молодых учёных в расцвете творческого этапа жизни. Назову их: сам А. А. Марков, а дальше по алфавиту — А. Д. Александров, Г. М. Голузин, Л. В. Канторович, Ю. В. Линник, Д. К. Фаддеев. Они все пережили первую блокадную зиму, а весной 1942 г. были вывезены в основном в Казань. Фаддеев был вывезен вместе с университетом в Саратов, а Канторович с военно-строительным институтом в Ярославль. И тем не менее основной коллектив работал в Казани весьма успешно и продуктивно. В частности, Александров успел получить Сталинскую премию.

В 1944 г. [после прорыва Ленинградской блокады] они все до одного вернулись в Ленинград. Им было дано маленькое скромное помещение — в глубине двора Ленинградского отделения академии наук, в дальнем углу. На втором этаже был круглый зал (под круглой башенкой) и пара комнат рядом. Была приобретена библиотека скончавшегося Николая Максимовича Гюнтера, она обслуживала два института.

Марков

Расскажу о Маркове. Андрей Андреевич — человек исключительной разносторонности знаний в области естественных наук. Он начинал с поступления на химфак, окончил физический институт, работал в астрономическом институте. Марков стал редчайшим директором, он понимал по существу все научные работы всех сотрудников института — случай уникальный. Андрей Андреевич не пользовался просто приказами, он был аристократически воспитан и несколько экстравагантен. О его экстравагантности было хорошо известно: Марков разыгрывал маленькие сцены, делая людям замечание. Редкий случай, когда он воспользовался приказом: Марков устроил так, что был единый семинар всего института, где сотрудники делали доклады о своих текущих работах, и семинар неизменно вёл он. Я к этому времени вернулся с фронта и, будучи студентом, регулярно ходил на этот семинар на четвёртом и пятом курсе.

[2] С 1992 г. — Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ РАН).

Помню вот такую сцену: Андрей Андреевич опоздал, что на него мало похоже. И Александр Данилович Александров, не дожидаясь, начал свой доклад. Он успел произнести несколько слов. Вошёл Андрей Андреевич Марков, взглянул и сказал: «Александр Данилович, будьте добры стереть с доски!» Александр Данилович стёр, после чего Марков произнёс: «Слово предоставляется Александру Даниловичу Александрову для доклада».

Много позже, когда его аспирант, очень убеждённый сталинист и партиец, высказал что-то по поводу применения марксизма в точных науках, Андрей Андреевич задал ему вопрос: «Александр Александрович, что Вы предполагаете делать с математикой?»

Когда мне поручили делать доклад на обязательном философском семинаре о геометрическом и физическом понятии пространства, я начал рассказывать обычные вещи о том, что различные области физических свойств абстрагируются и в зависимости от выбора этих свойств дают разные модели пространства, и абстрактные объекты становятся пространством. Андрей Андреевич произнёс:

— Виктор Абрамович, предполагаете ли Вы в ходе вашего доклада дать точное определение физического пространства, судя по названию доклада?

Я сказал:

— Нет, Андрей Андреевич, я на это не рассчитываю.

— Значит, дальше можно не слушать? — сказал Андрей Андреевич, обучив нас всех, как надо формулировать то, что вы будете делать.

Добавлю об Андрее Андреевиче. Я упомянул, что у него были аристократические манеры, но некоторые странности. Например, он писал странноватые стихи. Я помню характерную фразу:

Чёрная гиппомонада
Вышла из бездны веков
И ничего ей не надо
Кроме белков и жиров[3].

Когда-то невероятно талантливый актёр Смоктуновский, играя князя Мышкина, вдруг сделал рукой жесты Андрея Андреевича Маркова. Я заплакал: я был в театре и вдруг увидел руку Андрея Андреевича[4].

---

[3] Автограф этого стихотворения см.: *Марков А. А.* Избранные труды. Т. I. М.: МЦНМО, 2002. С. 454.

[4] Подробнее о жизни и деятельности А. А. Маркова см. статьи Н. М. Нагорного в кн.: *Марков А. А.* Избранные труды. Т. I, II. М.: МЦНМО, 2002–2003, а также: *Марков А. А.*, *Нагорный Н. М.* Теория алгорифмов. М.: Фазис, 1996.

Линник

Я перейду к самому молодому, Юрию Владимировичу Линнику. Это был трудоголик, редчайший трудоголик, считавший, что математик должен работать 18 часов в сутки и 6 часов спать. Он не тратил время на учёбу в университете, он был сын профессора физики и жил во внутреннем дворе ЛАХУ (Ленинградского административно-хозяйственного управления АН СССР — здание с колоннами слева от Кунсткамеры на Университетской набережной). Его отец и мать были разведены. Обычно он занимался в саду внутри двора, сидя на скамеечке. Он окончил университет чрезвычайно рано, стал доктором наук в 25 лет, на один год раньше, чем это сумел сделать Соболев.

Александр Данилович Александров критиковал Линника за то, что, будучи научным танком, он никогда не ввязывается в общественные дела, не даёт отпор. Но действительно ли он был таким? Я приведу один известный мне случай. Родители Линника были в разводе, отец уехал, это был известный академик, физик-оптик, а Линник с матерью продолжали занимать эту комнату. И комендант здания — в момент, когда Линник сидел во дворе и занимался, — увидел, как идёт его мать, и произнёс некую фразу, примерно «скоро ли ты, еврейка, освободишь квартиру». На что Линник встал и дал ему по физиономии.

Прошли годы, этот комендант стал управляющим хозяйством Академии наук, а Линник стал академиком. А я был скромным председателем месткома ЛОМИ и должен был у этого самого человека получать квартиру для Линника, у человека, которому когда-то в молодости Линник дал по физиономии. Ничего, получили мы эту квартиру.

Когда Линник умирал, а он умер рано, то он лежал, держа на груди доску, и правил корректуры своей очередной книги[5]. И он был не первым. Голузин, получивший в 1948 г. Сталинскую премию за геометрическую теорию функций комплексного переменного, точно так же умирал в больнице, держа на груди доску с корректурами своей книги[6].

Добавлю ещё. В молодости Линник сказал, что его любимая теория чисел в университете преподаётся Венковым, общей алгеброй заведует Фаддеев, а в теории вероятностей и статистике нет специалистов и он выучит теорию вероятностей, для того чтобы стать нужным университету специалистом. Сказано — сделано. Он стал одним из самых крупных

---

[5] Ю. В. Линник — автор шести монографий.

[6] *Голузин В. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. — Л.: ГИТТЛ, 1952.

специалистов по статистике в мире и членом Международного статистического института.

Из Америки приезжал академик Нейман[7] (не путать с фон Нейманом), который прекрасно говорил по-русски, поскольку молодым человеком уехал из Львова в 1920 г.[8] Он сказал, что видел передряги гражданской войны и теперь он приехал посмотреть, как идут выборы и как теперь в России спорят. Я его сопровождал на митинг, где выдвигался режиссёр Товстоногов. Он мне потом сказал: «У вас всё иначе, у вас хвалят кандидата, а у нас на митингах выступает пожарная команда с оркестром, пляшут гёрлз, и кандидат на выдвижение на узких собраниях обещает продавцам поднять цену, а покупателям её понизить». При этом он сказал: «Самый поразительный человек у вас — это Линник».

Канторович

А теперь я перейду к Канторовичу. Все знают, что Канторович — вундеркинд, который начал учиться чрезвычайно рано. Как сказала Вера Николаевна Фаддеева, жена Дмитрия Константиновича, Канторович может варить кашу сразу в пятидесяти котлах. Он всегда параллельно вёл множество самых разных тем. Он располагал уже высоким авторитетом, потому что продвинул труды лузинской школы, будучи совсем молодым человеком. И для каждой темы он выбирал себе узкую группу людей. У него было несколько групп, которые занимались абсолютно разными делами. Он любил поручать человеку дело, про которое сам человек думал, что не может сделать. Канторович при этом говорил: «Ну что вы, это просто!»

Я был студентом третьего курса. К февралю месяцу Канторович уже трижды меня экзаменовал. Кроме того, я был случайно с ним знаком, потому что постоянно околачивался у своей будущей жены в квартире его друга. Он подошёл ко мне на третьем курсе в феврале и сказал:

— Виктор Абрамович, я поручаю Вам написать курс, который я в этом семестре буду Вам читать, чтобы мы его издали к моменту, когда Вам нужно будет сдавать экзамен.

Я говорю:

— Леонид Витальевич, но я же никогда этого не слушал.

---

[7] Ежи (Юрий) Нейман (Jerzy Neyman, 1894–1981), польско-американский специалист по теории вероятностей и математической статистике, член Британского королевского общества.

[8] На самом деле, видимо, из Харькова в 1921 г.

— Да ничего страшного, я этот курс читаю уже второй раз. У меня сохранились листочки для подготовки к каждой следующей лекции. Я вам их передам, и Вы это связно распишите.

Так появилась книга «Криволинейные интегралы и ряды Фурье»[9]. Я 17 дней не ходил в университет и безостановочно это писал. Он потом надписал мне «хорошо» в одном месте, где я применил удачный оборот типа «прежде чем доказать то-то, мы сделаем то-то». Ему понравилось, что я общий план ощущал. Там написано, что это книга Канторовича, изданная по конспектам студента Залгаллера. То есть он внушил мне веру, что я это могу. Эта манера Канторовича была всем известна.

Когда я вернулся с войны, у Канторовича погибли студенты, которым он давал поручения, и он мне сказал, что у него есть большой замысел, связанный с тем, за что он потом получил Нобелевскую премию и что он написал в 1938 г. в виде брошюры[10], о которой мир не знал, а он боялся её цитировать, потому что это считалось антимарксизмом. В этой брошюре он доказал, что каждая задача на оптимизацию порождает то, что было названо «теневыми ценами». Он этого термина не сумел найти, а называл это в 1938 г.[11] «разрешающие множители». А когда он написал книгу позже, он назвал его «объективно-обусловленные оценки». Поскольку я с ним работал, меня вызвали в спецотдел под расписку «познакомиться со статьёй в спецхране», где обсуждалось, что это уже не марксизм: выходит, что не один труд определяет стоимость, а цель, задача и ограничение участвуют в её формировании. И главное, на что решился Канторович уже во второй публикации, что это может послужить основой для передачи некоторых прав в решении местных вопросов в более низкие инстанции.

Если вы прочтёте мою статью о Канторовиче, которая опубликована, то там описана история, что за эту книгу его пытались арестовать, и это обсуждалось всерьёз у Вознесенского в Госплане, куда он её прислал. Однако у Канторовича старший брат был психиатром, и он в этот момент взял Леонида Витальевича к себе в больницу на всякий случай, чтобы его не арестовали. Но кончилось тем, что выгнали с работы Новожилова[12]. Интересно, что Новожилов пришёл к тем же выводам, что и Канторо-

---

[9] *Канторович Л. В.* Криволинейные интегралы и ряды Фурье. Л.: ЛГУ, 1940.

[10] На самом деле в 1939 г.: *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. Л.: ЛГУ, 1939.

[11] См. предыдущую сноску.

[12] Виктор Валентинович Новожилов (1892–1970) — советский экономист, один из лидеров экономико-математического направления. Доктор экономических наук.

вич, отправляясь от некоторых высказываний Маркса. Новожилов умер раньше, чем Леониду Витальевичу дали Нобелевскую премию.

И вот наступил момент, когда надо было делать некие вычисления. Леонид Витальевич написал знаменитую статью «Функциональный анализ и прикладная математика»[13], за которую получил Сталинскую премию.

У него была одна особенность в мышлении. Он говорил: «Даже грубая теория лучше отсутствия теории». Вот говорят «сильный студент» и «сильный школьник». Что значит «сильный школьник»? Решает трудные задачи — но это первый этап. Второй этап — когда школьник может общий метод применить в частном случае. Но есть третий этап — когда человек может обобщить частный случай и ощутить наличие общего метода. Вот это было блестящим качеством Канторовича. Он любой вопрос поднимал выше и обсуждал шире.

И вот я теперь спокойно могу говорить, о чём шла речь, — требовалось вычислить минимальный объём критической массы для взрыва атомной бомбы. Так как требовалась гарантия, нужны были и опытные вычислители. Создали две группы, заказчиком выступал Ю. Б. Харитон[14], будущий конструктор самой бомбы как изделия. В Москве была одна группа, возглавляемая А. С. Кронродом[15], а в Ленинграде, зная свойство Канторовича разбрасываться, ему приказом запретили продолжать преподавание, он не имел права преподавать в период этой работы, что не мешало ему воспользоваться правом выбора семи студентов из моего выпуска 1948 г.

Возвращение фронтовиков к математике

Я ушёл на фронт добровольцем уже из авиационного института. Я мечтал быть прикладником. Когда я вернулся с фронта, первое, что я сделал, — отстоял своё право учиться на третьем курсе, потому что декан сказал мне: «Вы ушли с четвёртого курса, Вы можете досдать два экзамена — их выпустили досрочно». И в частности моя жена нынешняя досдала и увезла с собой по распределению учительницы в сельскую местность двух своих племянников, жену своего двоюродного брата, с которым

[13] *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика // УМН. 1948. Т. 3, вып. 6(28). С. 89–185.

[14] Юлий Борисович Харитон (1904–1996) — советский физик и физикохимик, один из руководителей советского проекта атомной бомбы. Академик.

[15] Кронрод Александр Семёнович (1921–1986) — один из основоположников работ по созданию искусственного интеллекта. Доктор физико-математических наук.

жила рядом, и мать этой жены. Она успела досдать эти два экзамена, получить диплом и выехать в середине августа, а 8 сентября замкнулась блокада. И они остались живы благодаря тому, что она их увезла.

Я закончил третий курс, я ушёл в декабре, не сдавая первую сессию на четвёртом курсе. А за время войны я одичал — был просто бандит с автоматом в руках. Вот я сижу на вашем учёном совете и думаю, как вы себя поведёте, когда я начну от живота стрелять. Мне надо было вернуться мыслью в математику. И я ходил, слушал спецкурс у Маркова, ходил на семинар Александрова, где стал старостой семинара, и решал подряд все задачи из книги Натансона «Теория функций вещественной переменной». Вот чем я занимался, когда вернулся с фронта. И я предложил свои услуги Дворцу пионеров и вёл там два кружка.

Вернуться к математике после войны было очень трудно. Но, во-первых, у меня была умная мать. Она к моему возврату уже в 1944 г., когда меня ранили, прилетела в Ленинград. Она была у отца в Котласе во время войны. Она очень крупный ленинградский адвокат, член правления адвокатуры, человек, сделавший себя сам, прилично зарабатывавшая, она успела обрушенные потолки квартиры восстановить. И когда я вернулся в 1945 г., квартира была отремонтирована, и мать понимала, что мне надо будет учиться. Она мне купила у моряка загранплавания абонемент на полгода питаться раз в день в гостинице «Европейская». Я был обеспечен раз в день роскошным обедом лучшего ленинградского ресторана. Моя жена к этому времени тоже вернулась. Тогда она была уже кандидатом наук. Она взяла на себя все домашние трудности, я только учился, я от всего остального был освобождён.

Я приведу пример других удачных возвращений своих друзей с фронта. В батарее у нас был разведчик батарейный — это значит наблюдатель артиллерийский — по фамилии Зульпукаров. Он был из Дагестана. Он вернулся, не имея ни кола ни двора. Прожить на стипендию в ленинградском авиационном институте было невозможно. Он уехал и закончил индустриальный институт. Стал директором треста дагестанской нефти, и о нём большая книга есть — о том, какой это был замечательный человек. Он рано умер.

Вот ещё один, еврей, Рафаил Хайкин, с моего довоенного курса, механик[16]. Он не был победителем олимпиад, он завидовал нашей компании и старался за нами тянуться. Очень хорошо учился и вместе с нами перешёл в авиационный институт. И он попал в отряд, который должен

[16] Рафаил Шевелевич Хайкин (1917–2006), выдающийся специалист в области ракетного оружия.

был бороться с какими-то десантами. Они выехали, лежали в открытом поле, их стал расстреливать немецкий самолёт, а им запретили отстреливаться — не надо себя обнаруживать… Хайкин вернулся обратно из этого отряда в голодное общежитие, и в блокаду из них создали бригаду по ремонту авиационных моторов. Часть бригады умерла от голода, он выжил. И он окончил авиационный институт. Я встретил Хайкина после войны. На нём были непривычные для меня орденские ленточки. Я его спросил:

— Что это у тебя за ордена?

Он говорит:

— Это — Октябрьской Революции, а это — орден Ленина просто.

— А что ты такое сделал?

— Я? Я сделал всю систему управления самолётов серии МиГ. Начальникам моим давали за это Героев Соцтруда, а от меня как от еврея откупались орденами.

— Где ты сейчас живёшь?

— Ну, там же, где все, всё конструкторское бюро…

После этого я прочёл газетную заметку, что один лётчик, ставший миллионером и привыкший водить личный самолёт, приобрёл МиГ со снятым вооружением. Его спросили, почему он это сделал. Он сказал: потому что у самолётов этой марки самая лучшая система управления.

Ленинградские математики после войны

Два слова о себе. В 1948 г. я получил диплом с отличием. Это был сильный курс. Поскольку на него пришли демобилизованные и раненые студенты, он был уже полнокровным по количеству оканчивающих. Учёный совет рекомендовал 18 человек в аспирантуру. Я был старостой семинара у Александрова, предполагал заниматься александровской геометрией и уже получил премию на конкурсе студенческих работ. Вывесили список 18 студентов, среди них было 5 евреев. Назавтра этот вопрос был пересмотрен парткомом, и четырёх евреев из пяти вычеркнули. Я был единственным евреем, оставшимся в этом списке. И тогда я сказал, что я в аспирантуру не пойду. Я мотивировал тем, что я не молод, что я прошёл всю войну с первого до последнего, я хочу уже работать. В действительности я уже не хотел подчиняться этим людям.

Это было начало 1948 г., я получил диплом с отличием без назначения на работу и два месяца был безработным. Неожиданно ко мне подошёл Андрей Андреевич Марков и предложил мне стать младшим научным сотрудником ЛОМИ. Кроме перечисленных людей, в ЛОМИ был один младший научный сотрудник — это была Вера Николаевна Фаддеева, жена

Дмитрия Константиновича, в последующем сталинский лауреат за знаменитый учебник по вычислительным методам линейной алгебры, который был первой в мире книгой о вычислениях, не имевшей ни одной ошибки. Америка сделала эту книжку государственным стандартом для вычислителей. Кроме того, она вела вычисления таблиц для функции Бесселя. Она была фанатик точности. Ещё был один аспирант, это был Н. А. Шанин. Остальные аспиранты Андрея Андреевича появились позже.

Я имел честь видеть этот коллектив. И там были замечательные люди, с которыми контактировал коллектив ЛОМИ. Это были люди высочайшей культуры, которые не пошли в узкую профессиональную область: Владимир Иванович Смирнов — так сказать, эталон совести ленинградских математиков, и Сергей Михайлович Лозинский — сын поэта и переводчика М. Л. Лозинского. И вот характерный пример. Там была библиотекарша, которая организовала учёт и пополнение книжного фонда. Лозинский был приглашённый председатель библиотечного совета и решал, на что тратить скромные деньги при подписке за валюту. И на одном из заседаний такого совета, когда не хватило на то, что они отобрали, Лозинский вынул свои деньги и добавил на покупку книг для библиотеки ЛОМИ. Это были люди особые.

О Дмитрии Константиновиче Фаддееве. Он был человек исключительно добрый, и великолепный математик. Но он был скромный, он не претендовал на открытия. Я вспоминаю строки:

> Мелкие пожизненные хлопоты
> По добыче славы и деньжат
> К жизненному опыту
> Не принадлежат.

Это слова Бориса Слуцкого. Дмитрий Константинович был из людей, так смотрящих на мир. Надо отметить, что таким был и Андрей Андреевич Марков.

Позже в ЛОМИ приходили другие корифеи. Пришла Ладыженская.

Появился Андрей Андреевич Марков, пригласил Петрашеня почитать лекции по общей теории относительности. А потом, так как у них было общее — в своё время Андрей Андреевич занимался распространением волн в слоях тора, — а прикладные работы требовали создания группы, Марков пригласил его остаться и создал группу Петрашеня.

Впоследствии Петрашень стал руководителем ЛОМИ. Он был очень добрый человек, немножко недостаточно требовательный. Позже его сменил Людвиг Фаддеев, человек очень жёсткий, который сказал: «Сейчас

ЛОМИ нуждается в восстановлении научных критериев». Он уволил бездельников, надо отдать ему должное.

Александров

Добавлю об Александрове. Марков и Александров были чрезвычайно энергичными в области организации науки: они защищали генетику, они защищали кибернетику, они создавали новые разделы математики, в частности теорию алгорифмов, и блестяще сопротивлялись попыткам закрыть такие вещи, как теория относительности, функциональный анализ, математическая логика. Александр Данилович умудрился получить орден Трудового Красного Знамени за защиту генетики, потому что Ленинградский университет в период, когда Александров был ректором, был единственным вузом страны, где генетика преподавалась и где был издан учебник генетики по инициативе Александрова. Об этом некий лысенковец Жуков из сельскохозяйственного института написал донос в ЦК. И Александру Даниловичу влепили выговор непосредственно от ЦК партии, что ни капли не повлияло на Александрова, он оставался предельно стойким.

Между прочим, Александр Данилович вместе с Марковым написали протест против того, что давали второго героя Соцтруда академику Виноградову, считая, что за одни и те же работы нельзя награждать дважды.

Очень характерно, что когда Колмогоров предпринял неудачную реформу в школьном образовании и ему дали премию Вульфа, то в Новосибирске антисемиты сказали, что ему дали еврейскую премию за разложение советской школы. Александров выступил с резкой защитой Колмогорова, и тогда они начали копаться, нет ли у Александрова сионистских наклонностей. А когда Александров со своей позиции «критикнул» некоторые философские высказывания у физиков, его обвинили наоборот в антисемитизме. Как всегда, если человек живёт собственным твёрдым мнением… Но, правда, твёрдое мнение имеет право меняться со временем. Когда-то Александров меня очень похвалил за фразу об одном человеке: «В нём лень кристаллизовалась, и он стал твёрд в своих убеждениях». Александров сказал, что это здорово сказано.

У Александрова было кредо — надо брать ответственность на себя. Когда ему предложили стать ректором университета, он первый раз пригласил меня в ректорский кабинет и спросил меня (я был у него старостой семинара):

— Виктор Абрамович, ну как? Вот мне предлагают стать ректором, соглашаться?

Я говорю:

— Ну конечно нет! У Вас останется меньше времени для научной работы.

— А Лобачевский был ректором! — ответил он мне.

И он был ректором в течение 13 лет и, как все признают, он был образцовым ректором. Я не скажу, что Александр Данилович всегда был прав. Когда стоял вопрос о том, отделять или нет вычислительный центр, группу ЛОМИ, в самостоятельную организацию, он сказал: «Вычислители должны быть как прачечная при учёных». То есть у него не хватило понимания, что компьютер сам становится самостоятельной наукой, колоссальной, которая потребила целое поколение следующих талантливых математиков. Здесь он ошибся.

Он не был религиозным, но он чрезвычайно много времени уделял самоценности науки и считал её образцом нравственности, чистоту научных критериев. И по его завещанию друзья-альпинисты положили на его могилу камень, а его жена сделала так, что надписи «Академик» нет, но сбоку есть надпись (его изречение): «Поклоняться только истине». Вот то, что я хотел добавить[17)].

О работе со школьниками

Теперь давайте сменим тему, я расскажу о работе со школьниками. Вплоть до тридцатого года приём в вуз определялся социальным положением. Если ваши родители были состоятельные люди, в особенности до семнадцатого года, — вас не брали в университеты, дорога вам была закрыта. Вера Николаевна Фаддеева при всех своих талантах смогла попасть только в областной педвуз, потому что у её отца была, простите, мельница. И вот это стали ощущать вузы, им не хватало закваски способных талантливых ребят, получивших, как Линник, домашнюю подготовку. И первым, кто это сказал, был Делоне.

Борис Николаевич Делоне предложил великую идею: давайте проведём олимпиаду среди старших выпускников, а победителей примем без экзаменов автоматически. И у нас будет небольшая группа на закваску. Это всё крепко поддержали Владимир Иванович Смирнов и Григорий Михайлович Фихтенгольц, и под эгидой этих трёх людей весной 1934 г. была проведена первая олимпиада.

[17)] О жизни и личности А. Д. Александрова см.: Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы. М.: Наука, 2002.

На этой первой олимпиаде особо отличились 11 человек. Одному из них премии не дали. Дело в том, что его фамилия была Таганцев[18)], отец его считался организатором контрреволюционной группы и был расстрелян вместе с поэтом Гумилёвым. И поэтому его сына нельзя было как-то официально награждать[19)]. А 10 человек были отмечены как победители, и было решено закрепить это правило [что их принимают без экзаменов].

Эти люди были все приняты в университет. Делоне сказал, что среди них есть один совершенно невероятный человек — он решает любые задачи, которые ему предлагают, он не школьник, он рабочий завода. Этот рабочий завода имел фамилию Оловянишников[20)], он стал первым любимым аспирантом Александрова. И в этот момент спецорганы докопались, что он скрывал своё происхождение — его мать была из богатого купечества[21)], а его отец был офицер. Всё это он скрыл, и на этом основании он был уволен из университета с пятого курса и отправлен на фронт бесславной финской войны. К счастью для него, он вернулся живым, и как демобилизованного солдата его восстановили в аспирантуре. Он успел получить диплом с отличием и стал аспирантом у Александрова. Но его отправили на фронт новой войны. Он был первый раз ранен, вернулся и, лёжа в госпитале, написал две замечательные работы, которые после войны Александров напечатал[22)]. Потом снова ушёл на фронт. Я воевал в тех местах в эти годы и знаю, какая мясорубка там была. И оттуда уже Оловянишников не вернулся, он погиб где-то в районе Красного Бора за Колпино.

Когда Александров стал ректором, он не только издал работы Оловянишникова и работы второго своего погибшего аспиранта Иосифа Либермана[23)], он написал о них отдельную статью «Настоящие люди», которая,

---

[18)] Кирилл Владимирович Таганцев (1916–2000), окончил ЛГУ, участник Великой Отечественной войны, в дальнейшем сотрудник физического факультета ЛГУ.

[19)] Атмосфера «вытеснения чуждых элементов» достоверно описана в документальном романе И. В. Головкиной (Римской-Корсаковой) «Лебединая песнь. (Побеждённые)». СПб. — Рязань, 2012.

[20)] Сергей Пантелеймонович Оловянишников (1910 – декабрь 1941).

[21)] Оловянишниковы — русский купеческий род ярославского происхождения, крупнейшие производители колоколов в Российской империи.

[22)] *Оловянишников С. П.* Обобщение теоремы Коши о выпуклых многогранниках // Матем. сб. 1946. Т. 18(60), № 3. С. 441–446; *Оловянишников С. П.* Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей // Матем. сб. 1946. Т. 18(60), № 3. С. 429–440.

[23)] Иосиф Меерович Либерман (1917 – август 1941).

вероятно, будет в собрании его сочинений[24]. У этих двух аспирантов была разница в возрасте — 10 лет. Оловянишников пошёл рабочим на завод, потому что знал, что его так не примут, а потом как победитель олимпиады попал в университет. Либерман погиб под Таллинном. Они оба успели, будучи ранеными, провести защиты. Я написал и о третьем — о Костелянце[25], который со мной был на одном курсе, вместе с которым я написал на втором курсе первую в жизни печатную работу[26] и который на третьем курсе решил проблему, поставленную и не решённую Колмогоровым в «Успехах математических наук»[27], а потом погиб[28]. Более того, он сделал ещё открытие в области зенитного прицеливания, и через день после его гибели пришёл приказ отозвать его в конструкторское бюро для разработки этого изобретения. Его звали Пётр Оскарович Костелянец.

И так сложилась практика. Настолько это понравилось математикам, что на следующий же год создали научную станцию для одарённых школьников и предложили учителям всех школ направить туда желающих и хорошо учащихся по математике и физике учеников для занятий в общегородских кружках этой научной станции. Происходило это в вечернее время, и меня школьный учитель послал туда. Мне там очень понравилось, преподавали там аспиранты из университета. Я занимался там в кружке весь 1935/36 учебный год. И Костелянец там стал моим другом… Это была третья олимпиада, она проводилась совместно для 9-х и 10-х классов. И нет ничего удивительного, что натасканные, сильные мальчишки с этой научной станции, и я в их числе, стали победителями, попали в десятку победителей третьей олимпиады. Все 10 победителей потом стали докторами наук.

Должен сказать, что из победителей олимпиады моего 1936 г. самым сильным был некий мальчик. Кажется, его фамилия была Лурье. Он очень сильно заикался и сказал, что не может пойти в университет, потому что после него надо преподавать, а он захлёбывался, когда говорил. Он

[24] *Александров А. Д.* Настоящие люди. Иосиф Либерман и Сергей Оловянишников // Статьи разных лет. Избранные труды. Т. 3. Новосибирск: Наука, 2008. С. 675–677.

[25] См. электронную публикацию: *Залгаллер В. А.* Быт войны. С. 2.

[26] *Залгаллер В. А., Костелянец П. О.* К задаче о плавающем цилиндре // ДАН. 1939. Т. 25. С. 354–356.

[27] *Колмогоров А. Н.* Математическая проблематика. Задача № 16 // УМН. 1938. Вып. 5. С. 233.

[28] Посмертная публикация вместе с другим решением: *Костелянец П. О., Решетняк Ю. Г.* Определение вполне аддитивной функции её значениями на полупространствах // УМН. 1954. Т. 9, вып. 3(61). С. 135–140.

пошёл в политехникум. Но он был умнее меня, он стал сталинским лауреатом, главным специалистом гигантского авиационного завода.

А в 1937 г. открыли Дворец пионеров в Ленинграде. Научную станцию закрыли, и наш коллектив был принят математическим кабинетом, мы считались старожилами математики, и нас спрашивали, хорошо или плохо он оборудован. Там была стеклянная доска из шероховатого стекла, и невозможно было стереть мел иначе как мокрой тряпкой, а потом жди, пока сохнет. Ну, и там стоял бюст Ковалевской[29)]. Ей-богу, Ладыженская сделала в математике много больше Ковалевской. А если считать по всем женщинам мира, то была такая женщина-алгебраист[30)], которую Гильберт требовал ввести в учёный совет [Гёттингенского университета], заявив, что учёный совет — не баня и можно ввести женщину. Но она уехала потом от Гитлера и рано скончалась в Соединённых Штатах. По мнению всех математиков, из всех женщин она больше всех сделала в абстрактной алгебре. Ладыженская тогда вторая среди женщин-математиков.

И вот возник следующий вопрос. Количество кружков Дворца пионеров ограничено, это обычно два кружка. Каждый год начинается один новый. Преподаватель ведёт два кружка. А хороших школьников больше. И самое главное, что есть же талантливые люди.

Я когда-то сказал Дмитрию Константиновичу Фаддееву, что русский язык у человека сохраняет влияние местности, откуда он. Ольга Александровна Ладыженская, выросшая в Кологриве, говорит «втора производная» вместо «вторая». Он и говорит: «Ну и я говорю неверно, потому что я из Юхнова». Провинций в России много, и люди рождаются там тоже. И вот встал вопрос: как охватить этих людей? Возникло два предложения. Двигателем этих предложений был вернувшийся без руки с фронта студент моего курса, сталинист и ярый член партии, но защищавший, например, Чехословакию, писавший в ЦК протест против ввода войск в Чехословакию в 1968 г. Он организовал заочную математическую школу[31)]. Рассылались задания всем желающим, а студенты-добровольцы

[29)] Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891) — русский математик и механик.

[30)] Эмма Нётер (1882–1935) — германский математик, работала в области алгебры и теоретической физики.

[31)] Алексей Алексеевич Никитин (1918–2003), астроном и педагог, доктор физико-математических наук. По сообщению Д. В. Фомина, после своего письма о Чехословакии Никитин не мог принимать большого участия в организации ЗМШ, но ранее сыграл активную роль в создании школы-интерната № 45 и Юношеской математической школы при матмехе ЛГУ.

их проверяли и вступали с ними в систематическую переписку по обновлению задач. Это резко увеличило и улучшило будущие наборы для университетов.

Физматшколы

И ещё одно. Решили, что надо вслед за московским интернатом создать интернат при университете, и создали так называемую школу-интернат № 45[32)]. Разместили её в Петергофе, чтобы было ближе университетским преподавателям. И надо сказать, что там училось много детей математиков, которым хотелось поместить своих детей в элитарную среду. Мне доводилось читать там лекции. Самое главное, что при этом отбирались ещё хорошие учителя математики. И наступил момент, когда у Георгия Ивановича Петрашеня умерла жена, и было неясно, куда сына отдать. К этому времени Дворец пионеров выродился в показуху — они занимались изготовлением моделей, которые можно показывать начальству. И тогда Георгий Иванович выступил с идеей: надо организовать в Ленинграде математическую школу. И он нашёл директора школы, учительницу географии, с очень сильным характером, которая была когда-то активным членом партии, директором школы и имела огромный педагогический опыт[33)]. И она имела в своём распоряжении, ни много ни мало, то великолепнейшее здание[34)], перед которым, как сказал Пушкин,

«На крыльце
С подъятой лапой, как живые,
Стояли львы сторожевые».

Но гороно было против. К власти пришёл Хрущёв, который считал, что надо воссоздать квалифицированный рабочий класс, и всем богатым заводам страны было велено построить специальные здания для ПТУ. А школы ценились по тому, какой процент выпускников пошёл в эти ПТУ. Естественно, что там, где математика была хорошо поставлена, большой процент выпускников шёл в вузы, а не в ПТУ. И такие директора осуждались.

---

32) См. статью А. А. Флоринского в «Математическом просвещении», вып. 26, с. 9–40.

33) Мария Васильевна Матковская (1904–1987). По сообщению С. Е. Рукшина и Д. В. Фомина, Матковская работала в Ленгорисполкоме, а в 1950 г. после «ленинградского дела» (репрессий против руководящих кадров Ленинграда) была назначена директором школы.

34) Имеется в виду дом А. Я. Лобанова-Ростовского, описанный в поэме «Медный всадник». В правление Николая I в этом доме находилось военное министерство, а в годы блокады здесь была школа 239.

И вот возник вопрос: надо или не надо создавать эту школу? Этот вопрос обсуждался на уровне горкома партии, а я в этот момент, простите, был секретарём парторганизации в ЛОМИ. Меня попросили, когда Хрущёв пришёл к власти, чтобы я согласился сменить Александра Александровича Иванова. Сами партийцы: «Давай, Виктор, соглашайся!» Я понимал, что партийное управление наукой немножко противоестественно. А я вступил в партию, когда немцы взяли Тихвин, мой отец провёл в лагерях сначала два года зэком, а потом принудительно оставленным на работу — 16 лет. Я всю жизнь заполнял анкеты, что мой отец сидел по 58-й статье[35]. И вдруг, когда немцы взяли Тихвин, предложили всем вступать в партию. Моментально забыли, что у меня отец по 58-й сидел. И для меня подать в партию означало жест, что я-то не сдамся.

И вот я со своим партбилетом сделал, как я горжусь, три дела. Я участвовал в том, чтобы отстоять здание ЛОМИ на углу Невского и Фонтанки. Здесь огромную роль сыграли Фаддеевы, но активное общение с управлением Академии наук и с парткомом лежало на мне. Во-вторых, я отстоял 239-ю школу. Не я, главным образом Петрашень. И третье — я для закваски бесплатно там преподавал. Ну просто, чтобы показать манеру. Я затеял научную работу вместе со своим классом. Вы учтите — класс был отборный, в него приняли победителей. К тому времени были олимпиады 5–6–7-х классов, из них создали спорт, а не любовь к науке. Но всё-таки были дети — победители олимпиад за прошлые годы, с ними легко было. Они ловили всё с полуслова, они даже понимали, если ты сильному человеку за безделье ставишь двойку в четверти, как я сделал с сыном командующего Ленинградским военно-воздушным округом. Я этому весёлому и умному парню, который бездельничал, в первой четверти поставил 2 и позвонил отцу, что ваш сын очень умный и закончит на пятёрках, но сейчас он бездельничает, и я вас прошу в моём решении, что у него в первой четверти двойка, меня поддержать. Ничего, закончил он хорошо.

Я затеял с ними научную работу. Эту научную работу, конечно, заканчивал я. Она потребовала от меня 4 года компьютерных работ. Но первая начальная часть, когда можно было считать дома просто так, делалась активом класса, они любили это. Она опубликована, и там есть ссылки, кто что сделал. Это классификация выпуклых многогранников с правильными гранями. Книга была издана[36], переведена на английский в Америке[37]

[35] То есть «за контрреволюционную деятельность».

[36] *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Т. 2. М. — Л.: Наука, 1967. С. 5–221.

[37] *Zalgaller V. A.* Convex Polyhedra with Regular Faces. Springer US, 1969.

и очень известна. И там фамилии этих моих ребят. Я им отдал часть русского тиража, и они награждали этой книгой в следующие годы.

В школе было два первоклассных учителя: один из них с манерами учителя старой гимназии — классический, требующий, а второй — обожающий учеников, обожающий преподавание, умеющий преподавать, алкоголик. Я в его классе параллельно вёл геометрию. Он ревновал ко мне учеников, как ревнуют девушку. А потом моя дочь попала к нему в класс, и он думал, что вот, профессорская девочка, наверное, ничего не понимает. Но она великолепно училась, закончила на все пятёрки. Я к нему приехал на дачу с бутылкой коньяку. Он сказал: «Вы что думаете, у меня нет?» И достал вторую бутылку коньяку. К утру мы их одолели, но уехать у меня уже не было сил, и я остался ночевать.

И вот эта школа нуждалась в учениках: было сперва два класса, а потом они перешли в 11-й, надо было два новых десятых. Они взяли на добровольной основе ещё лучших учеников.

Про учителей

Среди учителей был В. И. Рыжик и его друг А. А. Окунев. Рыжик отличался выдающимися качествами: он был умён, был мастером спорта по шахматам, турист первоклассный, водил школьников в летние походы, и он знал методику. Он всё меня допрашивал:

— Виктор Абрамович, Вы же никогда не изучали методику! Почему Вам удаётся преподавание?

Я говорю:

— Я не знаю. Я люблю предмет и люблю учеников.

Он говорит:

— Ну а в чём тут дело?

Рыжик мне прислал свою очень интересную книжку[38]. Он посчитал это за свою жизнь. Его уволили из школы из-за трагедии. Он вёл по Кавказу группу, и мальчик из его группы кинулся спасать в горной реке тонущую женщину и утонул вместе с ней[39]. Откуда было интеллигентному мальчишке знать, что без каната в горную реку бросаться нельзя. Рыжика

---

[38] *Рыжик В. И.* 30 000 уроков математики. Книга для учителя. М.: Просвещение, 2003.

[39] См. «Математическое просвещение», вып. 26, с. 22: «В 1970 году в результате несчастного случая погибли одна из очень ярких интернатских преподавательниц математики Кира Александровна Муранова и бросившийся в горную реку для её спасения талантливейший математик — десятиклассник Геннадий Кегелес».

забрал к себе Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе, который создал лицей, и его поставили руководить этим лицеем. А потом его пригласили в Швецию. Они изучали статистику эмигрантов в Швецию из России и убедились, что наибольших успехов достигали люди, учившиеся у какого-то Рыжика. Они хотели его увидеть. С тем же вопросом его приглашали в Штаты.

Не пропали эти труды

Вот судьба нашего поколения. К сожалению, часть следующего поколения, подготовленного всей системой этих школ, ушла из чистой математики, но она создавала компьютерную науку. Не пропали эти труды.

Моё отношение к прожитой жизни состоит в том, что мне посчастливилось жить среди учёных по-настоящему культурных и любящих науку саму по себе. То, что нам внушил на семинаре Александров, — глубочайшее ощущение самоценности науки самой по себе. Александров потом говорил: «Я уже не интересуюсь геометрией, меня чрезвычайно интересует нравственность. Я уверен, что наука несёт в себе нравственность». У него была такая установка о нравственности научного бескорыстия.

Человек, много сделавший, имеет право больше получить от общества. Но он не должен на этом праве слишком настаивать. Он должен продолжать думать о науке — вот моя точка зрения. Мне посчастливилось жить среди людей, так думающих, во времена, когда это мышление было естественным. Сейчас это труднее. Сейчас человеку могут задать знаменитый американский вопрос: «Если Вы такой умный, то почему Вы такой бедный?»

Математики, работавшие в Ленинграде и упоминаемые в интервью

Александров Александр Данилович (1912–1999) работал в геометрии и других областях математики. Академик, ректор Ленинградского государственного университета (1952–1964).

Бернштейн Сергей Натанович (1880–1968) работал в области математического анализа, теории вероятностей. Академик.

Венков Борис Алексеевич (1900–1962) работал в теории чисел. Доктор физико-математических наук.

Виноградов Иван Матвеевич (1891–1983) — один из крупнейших в мире специалистов по аналитической теории чисел. Академик, директор Математического института им. В. А. Стеклова (1934–1983).

Голузин Геннадий Михайлович (1906–1952) — специалист по комплексному анализу. Доктор физико-математических наук.

Гюнтер Николай Максимович (1871–1941) работал в теории дифференциальных уравнений и других областях математики. Член-корреспондент АН СССР.

Делоне Борис Николаевич (1890–1980) работал в области алгебры, теории чисел, геометрии. Член-корреспондент АН СССР.

Канторович Леонид Витальевич (1912–1986) — математик и экономист, один из создателей линейного программирования. Академик.

Ладыженская Ольга Александровна (1922–2004) работала в области математической физики, теоретической гидродинамики, теории дифференциальных уравнений. Академик.

Линник Юрий Владимирович (1915–1972) работал в теории вероятностей, математической статистике и теории чисел. Академик.

Лозинский Сергей Михайлович (1914–1985) работал в области анализа, приближённых и численных методов. Доктор физико-математических наук.

Марков (младший) Андрей Андреевич (1903–1979) — один из основоположников конструктивной математики. Член-корреспондент АН СССР, директор ЛОМИ АН СССР (1942–1953).

Петрашень Георгий Иванович (1924–2004) работал в области математической физики. Доктор физико-математических наук.

Смирнов Владимир Иванович (1887–1974) работал в области комплексного анализа. Академик.

Тартаковский Владимир Абрамович (1901–1972) — алгебраист, доктор физико-математических наук. Директор ЛОМИ в 1940–1941 гг.

Фаддеев Дмитрий Константинович (1907–1989) работал в алгебре и других областях математики. Член-корреспондент АН СССР. Отец Л. Д. Фаддеева.

Фаддеев Людвиг Дмитриевич (1934–2017) работал в области математической физики. Академик. Сын Д. К. Фаддеева.

Фихтенгольц Григорий Михайлович (1888–1959) работал в области математического анализа, автор широко известного «Курса дифференциального и интегрального исчисления». Доктор физико-математических наук.

Шанин Николай Александрович (1919–2011) — математик и логик. Доктор физико-математических наук.

Памяти Джона Конвея

Ушёл из жизни глубокий и яркий математик, выдающийся педагог и популяризатор математики Джон Х. Конвей (1937–2020). Российским читателям знакомы его книги «Упаковки шаров, решётки и группы» (с Н. Слоэном, М.: Мир, 1990), «Квадратичные формы, данные нам в ощущениях» (М.: МЦНМО, 2008), «О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях» (с Д. Смитом, М.: МЦНМО, 2009).

Публикуем статью о Конвее, написанную хорошо знавшим его немецким математиком Дирком Шляйхером, а также интервью, взятое Шляйхером у Конвея в 2011 г., и три статьи Конвея, адресованные широкой математической аудитории. Перевод и примечания Б. Р. Френкина при участии В. А. Воронова.

Джон Конвей: человек, который играл в математику

Д. Шляйхер

Джон Конвей был одним из самых легендарных математиков нашего времени: глубочайший исследователь, он в то же время много интересовался занимательной и «повседневной» математикой, получая результаты и открывая пути, важные для всех нас. Он всегда был готов включиться в игру, особенно если придумал её сам. Он был единственным в своём роде — как математик, как учитель, как друг. Невозможно воздать должное всем граням его личности, но я хотел бы осветить те из них, которые наиболее впечатлили меня; см. также [CI].

Частичная поддержка работы: European Research Council, Advanced Grant 695621 HOLOGRAM. Сокращённая и отредактированная версия опубликована на английском языке: «The Mathematical Intelligencer», June 2021, v. 43, № 6, p. 1–13.

Джон Хортон Конвей в августе 2012 г. читает лекцию
по Фрактрану в университете Якобса (Бремен)

§ 1. Математика повседневности: дни недели и фаза луны

Позвольте мне начать с «математики повседневности». Один из многих талантов Конвея — замечать взаимосвязи, которые никто больше не видел. Это позволило ему за секунды вычислять день недели для любой даты в прошлом, настоящем и будущем. Часто ему хватало лишь около 15 секунд, чтоб вычислить день недели для 10 (!) случайных дат. Это достигалось благодаря не только быстроте его ума, но и открытому им «алгоритму судного дня». Алгоритм основан на открытии, что в любом году следующие даты приходятся на один и тот же день недели: 4/4, 6/6, 8/8, 10/10 и 12/12 (4 апреля, …, 12 декабря). Если, например, вспомнить, что в 2021 г. все эти даты приходятся на воскресенье, то можно сразу сказать, что день рождения Конвея, 26 декабря, в 2021 г. тоже будет воскресеньем — через две недели после «декабрьского судного дня». Правило «судного дня» (описанное в Дополнении А) весьма замечательно — и особенно замечательно то, что явно никто его не заметил до Конвея.

Ненамного труднее вычислить в уме с разумной точностью фазу луны, снова для любой даты в прошлом, настоящем и будущем. Это ещё одна формула, открытая Конвеем, — неожиданно простая, если сравнить её с достаточно сложной точной формулой, которую даёт физика. Как следствие, можно легко вычислить, когда будет пасха в любом данном году (Карл Фридрих Гаусс вывел для этого свою формулу). Мы объясним метод Конвея в Дополнении B.

§ 2. Игра «Жизнь»

Оба факта, о которых сказано выше, принадлежат «математике повседневности». Я узнал их от Джона и постоянно использую. Хотя они и удивительны, но, разумеется, это не результаты глубоких исследований. Прежде чем перейти к таковым, давайте рассмотрим самое, быть может, известное изобретение Конвея — *игру «Жизнь»*. На самом деле это *клеточный автомат*, который действует на бесконечной квадратной решётке (в действительности это не игра, так как игрок не требуется). Каждая клетка в решётке находится в одном из двух возможных состояний, «белом» или «чёрном» (или эквивалентно, например, «мёртвом» или «живом»). Если дано состояние всех клеток в некоторый момент времени, то состояние в следующий момент определяется очень простым правилом, причём для каждой клетки состояние зависит лишь от предыдущего состояния этой клетки и восьми её соседей (см. Дополнение C). Правило простейшее, и замечательно, какую сложность оно порождает: у многих из нас написаны программы для визуализации этой «игры», и можно получить яркое впечатление, наблюдая её на анимированных вебсайтах вроде `https://en.wikipedia.org/wiki/Conway's_Game_of_Life`. Отсюда и её название: экран компьютера как бы оживает. На рис. 1 показана типичная возникающая конфигурация. Примечательно, что даже гугл по запросу «игра „Жизнь“» выдаёт эмуляцию игры прямо на экране с результатами поиска.

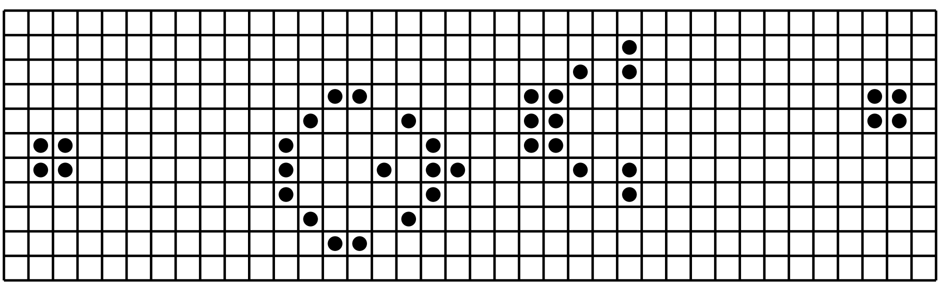


Рис. 1. Типичная конфигурация из игры «Жизнь»: живые клетки закрашены чёрным, а мёртвые клетки пусты. Данная конфигурация называется «Планерное ружьё» и открыта Биллом Госпером

Имеются простые начальные конфигурации всего лишь из пяти живых клеток — они называются *планерами* и движутся через экран по диагонали. Есть и более сложные конфигурации, *планерные ружья*, которые периодически «выстреливают» планеры; см. рис. 1 и Дополнение С.

Больше всего впечатляет, что эта простейшая система полна по Тьюрингу: в принципе она способна выполнить любое вычисление, доступное самому продвинутому компьютеру (хотя гораздо медленнее). Сегодня это легко запрограммировать для компьютера, но Конвей создавал «Жизнь» примерно в 1970 г. на досках для игры в Го в комнате отдыха кембриджских математиков, используя помощь ряда студентов, отвечавших за различные части доски. Ранее было известно, что существуют клеточные автоматы, полные по Тьюрингу (Джон фон Нейман описал один из них). Но их описание было основано на доказательстве соответствующих свойств, а Конвей был убеждён, что почти любой не совсем тривиальный клеточный автомат должен быть полон по Тьюрингу: Конвей верил в возможность «построить его без построения», предоставив простоте выполнять работу по созданию сложности. Он проверил методом проб и ошибок множество простейших возможных систем, пока не нашёл ту, которая сделала его знаменитым. Это была «мечта его юности» (Jugendtraum), лежавшая в основе многого сделанного им: простейшие системы должны иметь значительную, если не универсальную мощь.

В частности, игра «Жизнь» неразрешима: нет алгоритма для проверки, приведёт ли произвольная начальная конфигурация (из конечного количества клеток) к заданной конечной конфигурации. В противном случае игру можно было бы использовать для эмуляции любых компьютерных программ и таким образом решить проблему остановки — образец неразрешимой компьютерной проблемы.

Создав игру «Жизнь», Конвей стал знаменит в сфере науки — далеко не только в математике, — а также в области занимательной математики, после того как журнал *Scientific American* в 1970 г. представил игру широкой аудитории. Тот факт, что очень простая начальная конфигурация может привести к очень сложному и непредсказуемому поведению, породил множество интерпретаций и гипотез, например, что простые детерминированные системы могут допускать макроскопическое поведение, соответствующее наличию «сознания» и «свободы воли».

Иногда Конвею приписывают сожаление о том, что он изобрёл игру «Жизнь», и даже «ненависть» к ней; как я понимаю, его задевало, что его «сводят» к одному этому достижению [CI, p. 570]; но это вполне могло меняться со временем.

§ 3. Фрактран

Мечту юности Конвея материализует другое его изобретение, «Фрактран». Его вдохновила задача о знаменитой классической последовательности — «$3n+1$-проблема», известная также под многими другими именами, например как «проблема Коллатца»: возьмём произвольное натуральное n; если оно чётно, разделим его на 2, а если нечётно — заменим на $3n+1$. Повторим это с полученным числом, и так до бесконечности. Например, число 14 (чётное) переходит в 7; это число нечётно и переходит в 22, затем в 11, затем в 34, затем в 17, 52, 26, 13, и так далее. Все когда-либо проверенные натуральные числа в итоге приземляются на цикл $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$ (и это проверено до многих миллиардов), но никому не удалось объяснить, почему.

Конвей предложил простое концептуальное обобщение, а именно Фрактран [C-F]. «Программа» Фрактрана — это конечный список дробей, например:

$$\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, \frac{55}{1}.$$

Рассмотрим итерационную процедуру как в проблеме Коллатца: для данного натурального числа n найдём первую дробь p/q в списке, при умножении которой на n получается целое число (иначе говоря, найдём первый знаменатель, который делит n), а затем заменим n на произведение np/q. Повторим это с полученным числом. Как и в проблеме Коллатца, имеется конечное количество случаев в зависимости от свойств делимости n, и в каждом случае n заменяется его образом при простом отображении (таком как $n \mapsto 3n+1$ или умножение на дробь). Этот конкретный список дробей обладает замечательным свойством: если начать с 2 и выполнять итерации до бесконечности, то окончательный список чисел содержит бесконечно много степеней двойки, а их показатели в том порядке, в каком они появляются, — это в точности простые числа! Разумеется, это не свойство простых чисел, а следующий результат об универсальности: любая вычислимая функция может быть вычислена с помощью такого конечного списка дробей! Иначе говоря, Фрактран тоже полон по Тьюрингу. Существует даже конечный список дробей, который универсален в том смысле, что может вычислить какую угодно вычислимую функцию. От такого списка дробей не требуется большая длина: достаточно 23 дробей, и до сих пор стоит одна из задач, поставленных Конвеем, — построить самый короткий из таких списков. (Конвей говорит, что однажды он получил универсальную программу Фрактрана, состоящую всего из семи дробей, хотя и очень сложных;

но Конвей потерял эту бумажку, а создавший её студент давно умер. Задача остаётся!)

Поскольку Фрактран полон по Тьюрингу, он алгоритмически неразрешим: невозможно определить, оборвётся ли когда-нибудь (например, достигнув единицы) наперёд заданный набор дробей, начинающийся с определённого числа. Это приводит к вопросу, какое наименьшее количество дробей приводит к неразрешимости. Как показывает список Конвея, для неразрешимости заведомо достаточно 23 дробей; согласно рассказу, приведённому выше, может хватить и семи дробей. Ясно, что двух дробей не хватит; но каково наименьшее количество? Неразрешима ли $(3n+1)$-проблема?

Конвей верит, что достаточно трёх случаев. Он построил следующую «немузыкальную перестановку» (amusical permutation)[1], см. [C-A]: если число n чётно, положим $n=2k$ и заменим n на $3k$; если n нечётно, представим его как $4k+1$ или $4k-1$ и заменим соответственно на $3k+1$ или $3k-1$. Ясно, что получается перестановка на множестве всех целых чисел. Легко видеть, что некоторые числа порождают периодическую последовательность; например, 2 переходит в 3, а 3 переходит снова в 2. Для других целых это не столь очевидно. Конвей, в частности, утверждает, что

(1) орбита числа 8 не периодична, а, напротив, уходит на бесконечность;

(2) утверждение (1) верно, но не может быть доказано;

…

$(n+1)$ утверждение (n) верно, но не может быть доказано.

На самом деле Конвей говорит: все мы знаем, что в математике есть верные, но недоказуемые теоремы, но мы склонны думать, что они для нас далеки и темны, а на самом деле «зверь рядом». В статье [C-A], где описана «немузыкальная перестановка», Конвей подчёркивает, что очень многие результаты «очевидно» верны и «очевидно» недоказуемы. И заканчивает дерзким утверждением, что если кто-то разочарован тем, что статья не содержит доказательств, — ну как раз в этом и дело! Мечта юности Конвея в своём лучшем виде!

Я давно осознал, что эта юношеская мечта заслуживает более последовательного изложения. Оно должно связать универсальность игры «Жизнь» и Фрактрана, двух ранних («юношеских») изобретений Конвея,

[1] Игра слов, характерная для Конвея. В этой перестановке появляется константа, измеряющая отклонение музыкального тона от чистого (его «немузыкальность»). Но слово amuse означает «забавлять», и Конвей пишет о перестановке: it has amused me to call it amusical (мне было забавно назвать её amusical).

с неразрешимостью его перестановки (одна из его поздних публикаций); так что, похоже, Конвей не забывал свою мечту в течение всей жизни (и явно имел в виду к ней вернуться [Ro, p. 168]). Я помогал в редактировании его статьи [C-A] о «немузыкальной перестановке» (совместно с Алексом Рыба). В ранних версиях Конвей связывал эти идеи с работами Гёделя по неразрешимости и с проблемой остановки для машины Тьюринга. Алекс и я усиленно поддерживали его в намерении показать эти важные взаимосвязи, но в итоге Джон решил, что статья окажется лучше без них, и удалил уже написанный текст о взаимосвязях. Я продолжал подталкивать его к тому, чтобы написать обо всём этом, но он решил, что эта тема — лишь предмет «моей одержимости». В итоге мы пришли к ситуации «моя одержимость против его одержимости», и я был вынужден сдаться. Лишь недавно я осознал, что эта идея была юношеской мечтой Конвея; в его биографии [Ro] она возникает повсюду. Я по-прежнему хочу, чтобы кто-нибудь подробно написал об этой его мечте — «глубочайшем вопросе жизни, вселенной и вообще всего».

§ 4. Игры Конвея и сюрреальные числа

Одно из открытий Конвея, наиболее впечатляющих меня, — его теория игр и «сюрреальных» чисел. Можно утверждать, что он ввёл в рассмотрение больше чисел, чем кто-либо другой, и, быть может, никто не сумеет ввести больше, в некоем строгом смысле. Его определения просты почти до неправдоподобия, и однако он создаёт новый мир чисел, ПОЛЕ, содержащее и действительные числа, и ординалы. Я следую традиции Конвея писать ПОЛЕ большими буквами, так как этот объект слишком велик, чтобы содержаться в каком-либо множестве: даже одних ординалов слишком много, чтобы охватить их обычной теорией множеств, а Конвей с лёгкостью создаёт свои числа с арифметикой, необходимой для поля, и всё это — игры с весьма естественными правилами! (Можно возразить, что ординалы — столь же многочисленный класс, как сюрреальные числа Конвея, и они были известны до Конвея; но их арифметика бедна, и в ней отсутствует даже коммутативность сложения.)

Мы говорим об играх двух участников, которых обычно называют Левые и Правые; это игры двух лиц с полной информацией, такие как шахматы и Го: никаких случайностей, никаких тайных карт на руках. И опять Конвей чувствует, что хотя шахматы и удовлетворяют нужным определениям, всё же эта игра «не совсем хороша»: её правила слишком сложны (она не обладает «божественной простотой»). Как всегда, ему нравится сложность, возникающая из очень простых правил.

Определения игр и чисел Конвея очень просты и естественны, хотя эта простота может требовать некоторого пояснения. Они имеют примерно следующий вид, после некоторого дальнейшего упрощения:

Определение 1 (игры и числа).

(1) Если L и R — два множества игр, то упорядоченная пара (L, R) является **игрой**.
(2) Все игры создаются таким образом.
(3) Игрок может **выиграть**, если у противника нет хорошего хода.
(4) Игра называется **числом**, если ни один из участников не имеет намерения делать ход (в любой из своих позиций).

Кратко объясним, что это значит; дальнейшие подробности приведены в Дополнении D.

Игра полностью определяется множеством возможных ходов двух игроков, а каждый такой ход сам по себе является игрой, которая также характеризуется множеством возможных ходов. Так что надо рассматривать игру не как «шахматы с множеством общих правил, например, что ладья всегда ходит по прямой», а скорее как «конкретную ситуацию в такой игре, когда все фигуры занимают определённые позиции». В такой ситуации возможные ходы для отдельного игрока — это в действительности ситуации, в которые можно перейти. Таким образом, L — множество возможных ситуаций (=игр), в которые могут перейти Левые, а R — аналогичное множество для Правых. Например, в начальной ситуации шахмат игрок Белые располагает множеством из 20 возможных ситуаций, куда можно перейти (каждая из восьми пешек может продвинуться на одну или две клетки, а оба коня имеют по два хода), и аналогично для Чёрных. Каждая из этих 20 ситуаций сама по себе является игрой, с возможными ходами для Белых и Чёрных.

Разумеется, такое определение игры рекурсивно в высокой степени. И как придать ему смысл, если для того, чтобы определить игру, мы уже нуждаемся в двух множествах игр? Но ведь некоторое множество игр имеется всегда: пустое множество. Соответственно, тривиальная игра — это игра, где у игроков нет возможных ходов; она называется нулевой игрой; но она вполне корректно определена (правда, скучновата). Условие (2) требует, чтобы каждая игра в итоге заканчивалась: более точная формулировка — чтобы не было бесконечной последовательности ходов из одной позиции в другую. Это основа многих индуктивных доказательств Конвея.

Игрок проигрывает, если его очередь ходить, но возможных ходов нет (множество ходов пусто), и тогда выигрывает другой. Это закодировано в условии (3): игрок выигрывает, если у противника вообще нет ходов, или, рекурсивно, если независимо от действий противника у вас всегда есть «хороший ход», так что вы никогда не останетесь без возможных ходов, пока это не произойдёт с противником. Это условие неявно означает, что игроки ходят по очереди.

Самым естественным образом из игр образуется абелева ГРУППА (снова большими буквами). Противоположный элемент для игры — та же игра, где игроки обменялись множествами возможных ходов. Способ сложения двух и более игр тоже естествен: игрок выбирает одну из игр-слагаемых и делает в ней ход, ничего не меняя в остальных играх. Это определение вполне естественно для многих игр, включая Го (но в меньшей степени для шахмат): отсюда возникает теория эндшпилей в Го, которая в некоторых ситуациях позволяет побеждать больших мастеров.

Наконец, условие (4) выделяет интересное подмножество игр, в терминологии Конвея — *числа*; точную формулировку мы приводим в Дополнении D. Чтобы отличить их от известных видов чисел, их часто обозначают термином «числа Конвея» или «сюрреальные числа», следуя Кнуту [K]. Заранее совсем не ясно, что такое определение ведёт к чему-то содержательному, но это действительно так. В частности, такие числа можно умножать и делить, и мы получаем ПОЛЕ.

Отсюда совсем легко извлечь ординалы: ординал (порядковое число) — это число Конвея, в котором множество R пусто, а L состоит лишь из ординалов. Снова рекурсивное определение. Если не считать пустых множеств R, оно сводится к тому, что ординал — множество (меньших) ординалов. Полное упорядочение возникает из условия (2). На языке игр получаем следующее: Правые не имеют никаких ходов вообще, а Левые могут пойти из данного ординала в любой меньший ординал. Такое правило даёт преимущество Левым, но эту игру можно добавить, например, к шахматам, или к любому ординалу, или к противоположной ему игре, и такие суммы могут оказаться вполне интересными.

Чуть труднее извлечь отсюда действительные числа. Если в условии (1) ограничиться конечными множествами, мы получим все диадические числа (т. е. числа вида $k/2^n$), так что какие-то бесконечные множества необходимы. Легко описать игры, в которых один игрок имеет преимущество в три хода перед другим; нахожу занятным, что столь же легко описать игры, где один из игроков имеет преимущество ровно в пол-хода или в семь шестнадцатых хода. Но нетрудно построить также игры, где преимущество одного из игроков составляет ровно треть хода или ровно π ходов. И столь же легко строятся игры, где преимущество бесконечно велико или бесконечно мало. Несколько примеров мы приводим в Дополнении D. При построении действительных чисел представляется, что технически (но не педагогически) гораздо легче делать это методом Конвея: при традиционном способе вначале нужно построить натуральные числа, затем целые, рациональные и наконец действительные, попутно доказывая снова и снова множество свойств. Напротив, «сюрреальные» числа Конвея сразу строятся вполне легко, и по существу единственный трудный шаг — избавиться от всех лишних «недействительных» чисел. (См. в [K] занимательный рассказ об открытии сюрреальных чисел.)

Положительная игра определяется очень просто: в ней L имеет выигрышную стратегию, кто бы ни начинал; и игра является *отрицательной*, если R имеет выигрышную стратегию, кто бы ни начинал. Разумеется, исход игры мог бы зависеть от того, L или R делает первый ход. Игра называется *нулевой*, если начинающий проигрывает (т. е. второй игрок выигрывает). И наконец, бывают *нечёткие* игры, в которых выигрышную стратегию имеет первый игрок. Ясно, что любая игра принадлежит одному из этих четырёх классов в зависимости от исхода.

Вполне элементарно доказывается, что прибавление нулевой игры к любой другой не меняет исход (см. Дополнение D); этим оправдывается её название. В нечётких играх у каждого игрока есть стимул сделать ход — и, значит, эти игры не являются числами, согласно условию (4). Числа, во вполне строгом смысле, «не хотят, чтобы в них играли; они хотят, чтобы их складывали», а победитель определяется просто по знаку суммы.

Отметим, кроме чисел, и другой интересный и важный класс игр. Если в случае чисел два игрока должны делать разные ходы, то *равноправная* (*беспристрастная*) *игра* такова, что оба игрока имеют одно и то же множество возможных ходов — в начале и в течение всей игры. Таким образом, можно отождествить множества L и R и свести их определение к следующему: *равноправная игра есть множество равноправных игр*; *все равноправные игры создаются таким образом*. (Чтобы яснее подчеркнуть аналогию с п. (1) данного выше определения игр, можно сформулировать так: *если G — любое множество равноправных игр, то множество G называется равноправной игрой*.)

Частный случай равноправных игр — игра Ним: из данной кучи предметов игрок при очередном ходе удаляет любое положительное количество предметов, так что куча становится строго меньше. Разумеется, это тривиальная игра: если изначальная куча непуста, первый игрок выигрывает, удалив всю кучу. Но ситуация становится интереснее при сложении таких игр самым естественным способом: при каждом ходе игрок уменьшает одну из куч, а остальные кучи не трогает (в точности конвеевское стандартное определение сложения игр, и это приводит как раз к стандартной игре Ним). На самом деле у Конвея эти кучи вполне могут быть бесконечными: их размер может быть любым ординалом, а ход может привести к любому меньшему ординалу.

Основная теорема о равноправных играх следующая: любая равноправная игра, конечная или нет, равна единственной куче для Нима, которая соответствует ординалу; поэтому Конвей называет такую кучу «Нимбер». Первый игрок выигрывает всегда, когда размер этой кучи не равен нулю. Вся трудность — в вычислении размера (Ним-значения) этой кучи, и в принципе есть простое правило: рассмотрим множество всех возможных ходов (напомним, что равноправная игра как раз и есть это множество); по предположению индукции все эти ходы являются Нимберами (т. е. равны ординалам), а Ним-значение игры равно наименьшему Нимберу, который не лежит в этом множестве. (Для конечных игр это часто называют *теорией равноправных игр Шпрага — Гранди*, но отметим, что определение Конвея попутно расширяет эту теорию на игры размером с любой ординал.)

Позвольте мне закончить этот раздел простым, но, может быть, удивительным наблюдением: в конкретной игре нередко оказывается, что можно определить, кто из двух игроков имеет выигрышную стратегию, но это не даёт ключа к отысканию этой стратегии. Например, можно ввести правило, что первый игрок делает ход по своему выбору, а затем второй игрок может выбрать, будут ли они продолжать как обычно или поменяются ролями. Так что если первый игрок сделает очень сильный первый ход, второй наверняка захочет перехватить эту выигрышную позицию, а если ход был слабым, то второй радостно с этим согласится. В результате второй игрок теоретически имеет выигрышную стратегию, но этот факт совершенно не помогает реально выиграть. Например, такой выбор сторон после первого хода часто применяется в известной (и горячо рекомендуемой читателю) игре Гекс, и по ней проводятся серьёзные турниры — по игре, в которой известно, что у второго игрока есть выигрышная стратегия!

§ 5. Теория групп, лунный свет и Монстр

Теперь обратимся к исследованиям Конвея, находящимся на переднем крае науки. Группы — один из самых важных блоков в построении всей математики (и других сфер деятельности, столь различных, как физика, химия и искусство). Понимание устройства групп начинается с «простых» групп: тех, которые нельзя дальше упростить взятием факторгрупп. При этом известна полная классификация конечных простых групп: к ним относятся циклические группы простых порядков, группы чётных перестановок конечных множеств, ряд так называемых «групп типа Ли», а также 26 «спорадических» групп. Эта классификация всех конечных простых групп — одно из монументальнейших достижений всей математики, потребовавшее нескольких тысяч страниц текста (часть из них появилась совсем недавно).

Особенно трудно было разобраться с 26 спорадическими группами, и даже задним числом никто не составил из них единую картину. Некоторые из них открыл Матьё в 1861 г., а все остальные найдены за восемь лет с 1965 по 1973 г. Некоторые спорадические группы имеют гигантский размер: «Монстр» состоит из более чем 10^{53} элементов. Конвей в 1969 г. открыл три спорадические группы, все они — в большей по размерам групп половине списка.

Простые группы и особенно спорадические группы выглядят совершенно таинственно (это слова неспециалиста). Важный вклад Конвея заключался в разработке и составлении, при поддержке коллег, объёмной книги под названием *АТЛАС конечных групп* [C-W]. В ней сделана попытка представить структуру и собрать всю информацию об этих группах, и сейчас работа над ней продолжается как онлайн-проект.

Монстр, самая большая из спорадических групп, выглядит особенно таинственно. Коснёмся одного его свойства, которое оказалось столь мистическим, что Конвей назвал его «лунный свет» (в смысле «слишком безумно, чтобы быть реальным»).

Группа получает дополнительную структуру, если рассматривать её как группу симметрий геометрического объекта, и эта геометрия помогает понять группу гораздо лучше, чем её абстрактные свойства. Монстр может действовать на векторных пространствах разной размерности: в размерности 1 он действует тривиально; следующие размерности, где он действует (неприводимым образом), — это 196 883, затем 21 296 876 и т. д.

Теперь совершим скачок в совсем другую область математики — теорию эллиптических кривых. Такую кривую можно описать как множество всех точек вида $(x, y) \in K \times K : y^2 = 4x^3 - ax - b$, где K — любое (алгебраически замкнутое) поле. Эллиптические кривые играют важнейшую роль во всей математике (Эндрю Уайлз решил заняться доказательством последней теоремы Ферма, как только Герхард Фрей осознал её связь с эллиптическими кривыми). Любая эллиптическая кривая над $\mathbb{C}$ биголоморфно эквивалентна комплексному тору, который получается, если профакторизовать $\mathbb{C}$ по некоторой решётке $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, где $\operatorname{Im}\tau > 0$. Часто оказывается, что различные значения τ приводят к эквивалентным решёткам и, следовательно, к эквивалентным эллиптическим кривым;

на верхней комплексной полуплоскости определена хорошо известная функция j, для которой $j(\tau) = j(\tau')$ в точности тогда, когда соответствующие эллиптические кривые эквивалентны. Этот инвариант глубоко изучался разными методами. В частности, хорошо известно, что для $q = e^{2\pi i \tau}$ мы имеем

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196\,884q + 21\,493\,760q^2 + \ldots$$

Первое поразительное наблюдение состоит в том, что здесь присутствует число 196 883, сдвинутое на единицу. Иначе говоря, коэффициент в разложении функции j равен сумме размерностей первых двух представлений Монстра.

Более того, $21\,296\,876 + 196\,883 + 1 = 21\,493\,759$: следующий коэффициент равен сумме размерностей первых трёх представлений Монстра. Мистика? Призрак? Лунный свет!

Подобная закономерность продолжает действовать и для дальнейших коэффициентов. Это заметил Джон Маккей, который обращался к различным специалистам по теории групп. В конце концов они посоветовались с Джоном Конвеем, который знал столь много о строении групп и умел находить закономерности как никто другой. В результате появилась статья Конвея и Симона Нортона *Monstrous moonshine* [CN], в которой содержится объяснение этих загадок (и введён термин «лунный свет» в данном смысле).

Ясно, что это лишь начало потрясающего «сговора» между теорией групп, вселенной и вообще всем; разумеется, с участием квантовой гравитации. Сюда относится и сделанное в статье [CN] предположение об «обобщённом лунном свете», т. е. о том, что подобные замечательные связи должны существовать и для групп, отличных от Монстра.

Конвей и Нортон выдвинули «гипотезу лунного света»: Монстр действует на бесконечномерном пространстве, и все его видимые конечномерные представления соответствуют инвариантным подпространствам конечной размерности. Эту гипотезу позже доказал Ричард Борчердс, в прошлом ученик Конвея, который был в 1998 г. награждён Филдсовской медалью в том числе и за эту работу.

«Сговор» заходит гораздо дальше. Лунный свет, включая его обобщения, имеет существенные связи с теорией струн — математической теорией элементарных частиц, которую развивал нобелевский лауреат Ричард Фейнман. Бесконечномерное представление Монстра можно интерпретировать как структуру, лежащую в основе конформной теории поля (в размерности два), так что Физика создаёт связь между двумя разными областями математики. Затем приходят чёрные дыры и квантовая гравитация, а также гипотезы Эда Виттена — всё это связано с «лунным светом» Конвея, но эта связь далеко выходит за рамки нашей статьи.

К предыдущему имеют отношение и структуры, называемые *решётками*. Это регулярные периодические структуры в $\mathbb{R}^n$ при произвольном n, например упомянутое выше $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ или положения центров апельсинов, упорядоченно сложенных в продовольственном магазине. Решётки особенно интересны и важны, когда у них есть дополнительная структура, например вращательная симметрия, и в действительности они образуют естественный геометрический объект, на котором можно изучать группы в качестве групп симметрии решёток. Много изучался и глубокий вопрос о плотнейшей упаковке сфер в произвольной размерности. Для размерности 3 это знаменитая гипотеза Кеплера (на практике её решает каждый продовольственный магазин, как описано выше; но формальное доказательство ускользало от математиков столетиями, пока не было завершено Хейлзом в 1998 г.). Для высших размерностей эта тема несёт много сюрпризов.

Например, в размерности 24 существует знаменитая решётка, которая называется *решёткой Лича*. Она была открыта в 1967 г., через три года после того, как молодой Конвей получил докторскую степень в Кембридже. Конвей всю жизнь имел репутацию человека с острым умом, но неорганизованного. Вскоре после публикации о решётке Лича доброжелательный наставник предложил ему: «вам было бы неплохо найти группу симметрий этой решётки». Конвей решил в этот раз быть организованным и составил план, какие дни и часы предстоящих недель он выделит для изучения этого вопроса; этот ритм должен поддерживаться, пока вопрос не будет решён. Случилось так, что Конвей решил этот вопрос во время самых первых послеполуденных занятий, и это мгновенно сделало его знаменитым. При изучении этой группы симметрий Конвей открыл спорадические группы и выработал понимание простых групп, которое приводит ко многим результатам, полученным ранее.

Джон Конвей столь же блестяще излагал математические результаты, как и получал их. Вместе с Нейлом Слоуном он написал основополагающую книгу «Упаковки шаров, решётки и группы» [CS]. Влияние этой книги трудно преувеличить; процитируем оценку Джан-Карло Рота из МТИ: «Это лучший обзор лучших работ в одной из лучших областей математики, написанный лучшими людьми. Он станет лучшим чтением для лучших студентов, интересующихся лучшей математикой, какая сегодня развивается».

Как показывает название книги, решётки часто бывают тесно связаны с оптимальными упаковками сфер, и не только в размерности 3.

В частности, решётка Лича приводит к замечательной упаковке в размерности 24 (недавно показано, что она оптимальна). Но зачем нам заботиться об оптимальных упаковках сфер в размерности 24? Разумеется, математическая любознательность — всегда хороший ответ (несомненно достаточный для многих математиков, включая Конвея); но в данном случае ответ совсем другой: такая упаковка порождает методы кодирования, которые позволяют оптимально использовать в каналах связи коды, исправляющие ошибки. Конвей даже получил в США патент на этот эффект, и результаты Конвея цитировались в последующих патентах, в том числе зарегистрированных американским Агентством национальной безопасности (АНБ) [Ro, p. 314].

§ 6. Ещё о математических исследованиях Конвея

В этом разделе мы кратко опишем ещё некоторые из многочисленных достижений Конвея в математических исследованиях. Одна из их тем — *квадратичные формы*: это полиномиальные функции от любого количества переменных, у которых степень каждого слагаемого равна 2, так что функции имеют вид

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{i,j} x_i x_j,$$

где матрицу $(a_{i,j})$ можно считать симметричной. Такие функции играют важную роль во многих областях математики. Квадратичная форма (над упорядоченным полем, например над действительными числами) называется *положительно определённой*, если $Q(x_1, \dots, x_n) > 0$, как только хотя бы одна из переменных не равна 0.

Квадратичные формы имеют долгую историю в теории чисел, особенно для случая, когда все $a_{i,j}$ целые. Например, знаменитая *теорема о четырёх квадратах* гласит, что можно представить все натуральные числа в виде $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ — тогда как в виде $a^2 + b^2 + c^2$ нельзя представить числа, сравнимые с -1 по модулю 8.

Конвей заметил удивительный факт: *положительно определённая квадратичная* форма с целыми коэффициентами $a_{i,j}$, значениями которой являются все числа $1, 2, \dots, 15$, в действительности представляет все натуральные числа. Теперь этот результат известен как 15-*теорема*; его совместно доказали Конвей и его ученик Вильям Шнеебергер, но никогда не публиковали. Более сильный вариант утверждает, что достаточно, чтобы были представлены числа $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15\}$, причём для каждого из этих девяти чисел найдётся квадратичная форма, значениями которой являются все натуральные числа, кроме этого одного. Например, квадратичная форма $a^2 + 2b^2 + 5c^2 + 5d^2$ принимает все натуральные значения, кроме 15.

У этой теоремы есть обобщение, так называемая 290-*теорема* о положительно определённых квадратичных формах, коэффициенты которых $a_{i,j}$ не обязательно целые, но при целых x_i значения всегда целые (это условие строго слабее: например, квадратичная форма $x^2 + xy + y^2$, записанная в виде симметричной матрицы, имеет полуцелые коэффициенты). Конвей сформулировал эту теорему как гипотезу, а позже её доказал Манджул Бхаргава (филдсовский лауреат 2014 г.; Конвей был его наставником, но не формальным научным руководителем).

Конвей сделал также важный вклад в *теорию узлов*. Любой узел (вложение окружности в трёхмерное пространство) может быть изображён на плоскости в виде замкнутой кривой с конечным количеством самопересечений, и для каждого пересечения нужно указать, какая нить проходит над другой. Важная задача — выяснить, представляют ли две заданные кривые один и тот же узел. Один из известных ныне инвариантов называется многочленом Конвея — Александера. Он вычисляется по представлению узла в плоскости; эквивалентным узлам всегда соответствует один и тот же многочлен (но существуют неэквивалентные узлы с одинаковыми многочленами). Со временем математики (особенно филдсовский лауреат Вон Джонс) построили и другие инвариантные многочлены, которые имеют впечатляющие взаимосвязи со многими другими областями математики.

Проблемой является уже описание (и перечисление) возможных узлов. Для этой цели были разработаны различные системы обозначений. *Обозначения Конвея* имеют то преимущество, что яснее отражают некоторые свойства узлов. (Конвей всегда был очень тщателен во всех своих обозначениях.)

Закончим этот раздел *теоремой о свободе воли*, которую доказали Конвей и Саймон Кочен [CK1, CK2]. Это было одно из последних важнейших достижений Конвея, и он им особенно гордился. Говоря попросту, теорема утверждает, что *если физики имеют свободу воли, то она есть и у элементарных частиц*. Этот результат породил некоторую дискуссию среди физиков и философов. Разумеется, вселенная могла бы оказаться вполне детерминированной (Конвей мог подбросить свою авторучку, спросив: «Верите ли вы, что вселенная с самого начала была устроена так, чтобы я бросил эту авторучку в этот момент?»). Разумеется, мы не можем этого знать, но Конвей и многие другие твёрдо верят, что мы, человеческие существа, имеем много свободы воли для наших собственных действий. Его теорема утверждает, что если экспериментаторы имеют хотя бы небольшое количество свободы воли (в постановке экспериментов и выборе измеряемых величин), то элементарные частицы должны иметь то, что Конвей (в своём лаконичном стиле) также называет «свободой воли».

Конкретнее, пусть в эксперименте измеряется спин элементарных частиц — вдоль x-оси, y-оси или z-оси в зависимости от свободной воли экспериментатора. При этом можно получить один из двух результатов — положительный или отрицательный. Если этот результат не был предопределён при создании вселенной, то его «выбор» частицей не определяется ни экспериментом и его историей (на самом деле — ничем предшествующим эксперименту), *ни случайностью*!

Конвей исключает случайность простым рассуждением [CI, с. 570]: если результаты данного бинарного выбора зависят от случайности, то можно считать, что они взяты из бесконечной строки случайных битов, и нет разницы, возникла эта случайная строка спонтанно или создана при сотворении мира. Но такая строка предопределена заранее, а Конвей и Кочен это исключают.

§ 7. Джон Конвей как личность

Джон Конвей родился 26 декабря 1937 г. в Ливерпуле, на несколько лет раньше, чем Битлз (неясно, встречались ли они, но отец Конвея работал в средней школе, где учился Джон Леннон). Конвей часто рассказывал, что в школе он был довольно робким и застенчивым — пока не решил, что, отправившись в Кембриджский университет, он станет выдающейся личностью. Поскольку никто его там не знал, он смог начать заново. Вот почему все мы знали его оживлённым и общительным, готовым поделиться множеством историй — и обычно с дерзкой улыбкой.

Вскоре он приобрёл славу человека гениального, но довольно неорганизованного. Один из его рассказов таков: когда он собирался защищать диссертацию в Кембридже, декан случайно встретил его на улице и спросил, начал ли он искать работу. Конвей не только этого не делал, но даже признался, что и не думал об этом. Декан сказал ему, что надо написать соответствующее письмо; но Конвей не знал, что писать, и тогда декан не выдержал, вытащил клочок бумаги, случайно при нём оказавшийся (это была задняя сторона конверта), и нацарапал письмо самому себе, которое Конвей должен был лишь подписать. Понятно, что вскоре он получил свою первую должность в Кембриджском университете. Конвей оставался там до 1986 г., когда переехал в Принстон, где и жил с тех пор.

Конвей придерживался правила не быть слишком серьёзным — по крайней мере такое впечатление он очень старался производить. Он преимущественно сидел в факультетской комнате отдыха, где играл в различные игры (предпочитая те, которые изобрёл сам) и как бы попутно создавал глубокие теории, которые часто были связаны с играми (например, теорию чисел как игр) или, как в случае игры Го, начинались с игровой доски. Он соглашался, что некоторые его любимые занятия (например, вычисление для недели) были «недостойны» наиболее серьёзных математиков (контрпримерами были Гаусс и фон Нейман). Конвей говорил: «Мои коллеги в Принстоне думают, что это совсем недостойно их. Они не считают, что что-либо недостойно меня» [Ro, p. 370].

И в то же время в исследовательской работе почти ничто не было выше его, и очень немногие математики, если вообще кто-либо, могли охватить спектр глубоких проблем так, как он. Чтобы разжечь интерес к какой-либо теме, а может быть и просто добавить ей известности, он часто предлагал призы за решение поставленных им задач — множество небольших призов, а некоторые довольно существенные; похоже, он руководствовался чувством, что если я не могу решить задачу, то и другие не смогут иначе как за долгое время. Одна история стала легендарной. Конвей предложил весьма значительный приз за строгое доказательство сходимости найденной им интересной рекурсивной последовательности. Задача была решена за несколько месяцев, а не десятилетий — благодаря искусному сочетанию математической интуиции и мощи суперкомпьютера. Конвей остался честным и заплатил [Seq]; это даже попало в «Нью-Йорк таймс» [NYT].

У меня самого была история, связанная с его призом. Будучи старшекурсником, я часто имел возможность сидеть с ним на одном из его любимых диванов. Однажды он рассказал мне о свойствах одной последовательности, которые он доказал несколько лет назад, но теперь не мог восстановить доказательство. Так что он предложил мне 10 долларов, если я смогу это сделать. Разумеется, я принял вызов, и через несколько дней я гордо вернулся с несколькими страницами тщательно проработанного доказательства, содержащего подробно проведённую двойную индукцию. Он улыбнулся, сделал с моими листочками то, что он всегда делает с бумагами (немедленно их теряет) и вручил мне пять долларов, наблюдая мою реакцию. Что я должен был сказать, молодой студент, знаменитому Конвею, который обещал мне вдвое больше? Я чувствовал себя пешкой в его игре. Оказалось, что он вполне понимал моё затруднение и на некоторое время меня в нём оставил, а затем сказал, что он параллельно тоже думал об этой задаче и нашёл решение, так что мы должны разделить приз. Излишне говорить, что его решение было изящным, игнорировало всякие подробности и заменило мою тщательную двойную индукцию треугольниками, которые он нарисовал в воздухе. Другие получали от него более крупные награды за более значительные задачи, но я был горд *разделить с ним приз* за задачу, им же поставленную!

Конвей интересовался многими вещами, включая языки и историю. Тут тоже возникали остроумные наблюдения. Один из его любимых рассказов был о том, что он был на расстоянии лишь двух рукопожатий от Кантора и четырёх — от Гаусса: как докладчик на конференции в честь Кантора, он встретил престарелую женщину, которая в детстве пожала руку Кантору. Сам Кантор был другом Дедекинда, последнего ученика Гаусса. Разумеется, Конвей затем предлагал своим очередным слушателям пожать ему руку, чтобы в результате оказаться всего лишь в пяти рукопожатиях от Гаусса.

Дорогие читатели! Когда мы встретимся лично, я смогу предложить вам расстояние в шесть рукопожатий до Гаусса и в два до Конвея[2)].

Одно из любимых высказываний Конвея состояло в том, что его единственный недостаток — скромность; если бы он не был так скромен, он был бы совершенен. (Да, он любил шутки над собой, а также противоречия. Удачный и забавный пример: его последняя опубликованная статья — «московская статья» [C-M], на самом деле написанная десятилетиями раньше, полная противоречивых ссылок на себя и тем не менее серьёзная[3)].) Конвей любил шутить, что он может потратить сто часов за час, поскольку может говорить с 99 людьми. Он действительно любил говорить с людьми — один на один со студентом или с большой аудиторией профессионалов, и его беседы были замечательны. Ни он, ни его слушатели никогда не ощущали это время потраченным впустую. Обычно его выступления были великолепно подготовлены, и иногда он предоставлял аудитории выбрать тему его выступления, часто путём голосования. В его мозгу готовилось много вариантов.

Он давал легендарные лекции для математической аудитории самого высокого уровня, путешествуя по всему земному шару в роли просветителя[4)]. Но столь же легендарно было его постоянное стремление

[2)] Я слушал рассказ Конвея о рукопожатиях несколько раз и, разумеется, охотно пожимал ему руку; но, разбираясь в этом сейчас, удивлён, почему путь не оказывается короче: сам Конвей отмечал, что у него был второй контакт с Кантором через Бертрана Рассела [Ro, p. 45], который должен был встречаться с Дедекиндом на Первом международном конгрессе математиков в 1900 г. Так что, по всей видимости, я могу предложить вам пять рукопожатий до Гаусса… (истинно, но недоказуемо?). — *Прим. автора*.

[3)] См. наст. сб., с. 88–96.

[4)] В подлиннике «jet-set» like, что имеет близкий смысл.

заниматься со школьниками и школьными учителями. Даже в далёкие 1980-е годы он вёл летние занятия для учителей средней школы совместно с филдсовским лауреатом Уильямом Тёрстоном и другими. И много раз проводил недели в летних лагерях для одарённых старшеклассников — в США, Канаде и Европе. В течение последних десяти лет он семь раз приезжал на мероприятия во Франции (Лион) и Германии (Бремен), где я был в числе организаторов, — в частности, на летние школы «Modern Mathematics», вдохновлённые примером летних школ «Современная математика» в Дубне. Конвей был единственным преподавателем, который участвовал в такой школе с первого до последнего дня, и он делал так каждый раз; а по случаю мог провести ещё несколько дней в местном школьном лагере «на природе». У него было лишь несколько лекций, подготовленных специально для школьников. При этом он приходил на выступления коллег и задавал вопросы, показывавшие, как хорошо он осведомлён во всех областях математики. Допоздна он общался с толпой восхищённых слушателей, когда все организаторы уже давно спали. А рано утром, когда его вечерние слушатели ещё не проснулись, он уже завтракал с «утренней сменой» учеников. Так и шло день за днём, независимо от часовых поясов.

Конвей говорил о своих математических открытиях или делился советами, как достичь успеха: он всегда держал в воздухе четыре или пять мячей — разные математические темы различного уровня. Одна из них могла быть большой математической проблемой, которая в случае решения сделала бы его знаменитым (всю жизнь он почему-то продолжал думать, что бы могло сделать его знаменитым). Другие «мячи» были, по очереди, проектами всё менее честолюбивыми, но более исполнимыми, так что последний мог оказаться рутинным добавлением к предыдущей задаче и требовать лишь времени. Таким образом, увязнув в одной из главных проблем, Конвей всё же мог достичь полезных результатов в другой задаче, избежав чувства неудовлетворённости и дав отдохнуть своему мозгу, пока он не был готов к новой атаке на главные проблемы. (Кто сказал, что Конвей неорганизован?)

Последней публикацией Конвея, появившейся как раз перед его кончиной, была его «московская статья» [C-M], которая десятилетиями существовала лишь в рукописи[5].

---

[5] См. наст. сб., с. 88–96. По сообщению М. С. Патерсона Д. Шляйхеру, статья написана во время Международного конгресса математиков в Москве в 1966 г.: «[включение Москвы в соавторы] — причуда необычного ума Джона… Участие Москвы состояло в том, что… работа над этой задачей, помимо нашего нормального графика, потребовала времени на конгрессе и в транспорте».

(Я получил экземпляр этой статьи, когда посетил Конвея в Принстоне: он больше не имел там офиса и не решался посещать комнату отдыха, чувствуя, что это было бы неуместно, но под подушкой своего дивана он хранил некоторые важные материалы, и мне было позволено сделать копию статьи и подготовить её к публикации.) Статья появилась в печати в апреле 2020 г., как раз перед смертью Конвея, но достаточно рано, чтобы я смог позвонить ему и сообщить, что статья теперь опубликована. Он был очень счастлив услышать эту новость и рассказал мне (ещё раз), как эта статья появилась. Затем мы обсудили ещё одну статью, которую он очень хотел увидеть опубликованной в определённом виде, согласно его определённым пожеланиям. Позже я узнал, что, сделав этот звонок, я стал последним математиком, который говорил с Конвеем.

Позвольте мне закончить двумя материалами, которые я нашёл в интернете. Один появился в блоге, где люди делятся лучшим, что сделали за последний месяц. Неудивительно, что там много записей такого рода: «Я примерно удвоил мой месячный доход», «Помог жене при родах», «Пробежал милю за 6:40» или «Я сделал предложение мечте моей жизни, и она ответила да». Среди всего этого было и такое сообщение: «Я старшеклассник…встретил Джона Конвея в летней школе, и… написал с ним совместную статью». Эта запись цитировалась чаще всех и вызывала наибольшую зависть.

Другой материал, найденный в сети, заставляет вспомнить знаменитую игру Конвея «Жизнь». В нём спрашивалось: «…если трое из нас встанут вокруг пустого квадрата, вернётся ли Конвей к нам?» Мне нравится дух этой записи, и в некотором смысле она совершенно верна. Конвей останется с нами всю жизнь как источник вдохновения и удивления, как математик, как друг.

Благодарности

Прежде всего и больше всего я хотел бы поблагодарить Джона за множество замечательных воспоминаний и полученное от него вдохновение — по многим поводам, в течение многих лет. Я очень признателен многочисленным друзьям и коллегам за их помощь и за отзывы на эту статью. Среди них Манджул Бхаргава, Диана Конвей, Йенс Хорнбостель, Виктор Клепцын, Вильфрид Курт, Марсель Оливер, Шевон Робертс, Алекс Рыба, Петер Шупп, Михаэль Штолль и Сергей Табачников.

Дополнение А. Алгоритм судного дня для определения дня недели

Сверхбыстрый метод Конвея для вычисления дня недели по любой дате григорианского календаря включает две части: (1) вычисление «судного дня» в данном году и (2) определение дня недели в году, для которого известен судный день.

Часть (2) легче и обычно полезнее. Чаще всего нам требуется знать день недели в текущем году или, может быть, в следующем. Так что с этого и начнём. По определению «судный день» в данном году — это нулевой день марта (последний день февраля), а также любая дата, которая приходится на тот же день недели. Основное открытие Конвея в том, что все нижеперечисленные даты являются «судными днями»:

4/4, 6/6, 8/8, 10/10, 12/12,
5/9, 9/5, 7/11, 11/7,

т. е. последний день февраля приходится на тот же день недели, что и 4 апреля, 12 декабря, 5 сентября, 9 мая и так далее. Отметим приятную симметрию: даже при том, что в одних странах 5/9 означает 5 сентября, а в других 9 мая, обе даты являются «судными днями», так что в обоих вариантах обозначения годятся для всех «судных дней».

Этот список, вместе с 0 марта, легко запоминается, особенно для чётных месяцев. Что касается нечётных, то Конвей замечает, что «многие люди работают с 9 до 5», а в США хорошо известна сеть магазинов шаговой доступности 7/11.

Как же это работает на практике? В 2021 г. «судный день» приходится на воскресенье. Так что если вы хотите узнать, на какой день недели приходится, скажем, 26 декабря — день рождения Конвея, то вы вспоминаете «судный день» 12/12. День рождения Конвея на 14 дней позже: неудивительно, что Конвей родился в «судный день»; в 2021 г. он приходится на воскресенье. Нахожу примечательным, что день его смерти — тоже «судный день», 11 апреля (4/4 плюс одна неделя), в некотором смысле «его личный судный день».

Описанное хорошо подходит для апреля и последующих месяцев. В марте нулевое число — по определению «судный день», и таков же День числа пи, 14 марта. Январь и февраль — случай потруднее, так как тут имеет значение, год високосный или нет. Случай февраля ещё довольно лёгок: последний день «судный», и можно отсчитывать назад. Для января я использую другой приём, чем у Конвея: чтобы не возиться с високосом, присоединяю январь к предыдущему году и помню в качестве «судного дня» 2 января (обычно в начале года ещё остаётся привычка использовать прежний «судный день»).

Позвольте отметить здесь маленький трюк, которому Конвей давно научил меня: если надо определить день недели для даты вроде 27 апреля, *не* вычитайте 21 день (3 недели), чтобы попасть на 6 апреля, «судный день» + 2; *вместо этого* найдите ближайший «судный день», в данном случае 4 + 21 = 25 апреля, а *затем* добавьте оставшиеся два дня. Результат, разумеется, тот же, но можно со временем привыкнуть к тому, что 25 апреля — тоже «судный день», и таким образом помнить больше таких дней.

Остаётся часть (1) — вычисление «судного дня» для любого данного года. Система високосных годов периодична с периодом в 400 лет и, к счастью, количество дней в 400 годах делится на 7, так что «судные дни» повторяются каждые 400 лет.

Нужно разделить вклад столетия и вклад года внутри столетия; последний равен некоторому числу $y \in \{0, \ldots, 99\}$. Чтобы вычислить первый, рассмотрим следующий список «судных дней» («опорных дней» столетия):

- в 1900 году — среда;
- в 2000 году — вторник;
- в 2100 году — воскресенье;
- в 2200 году — пятница;

так как «судные дни» повторяются каждые 400 лет, этот список годится для всех столетий (а для практических целей достаточно помнить первые две позиции).

Чтобы найти «судный день» в году y данного столетия, положим

$$y = 12a + b,$$

где $b \in \{0, \ldots, 11\}$, и пусть $c := \lfloor b/4 \rfloor$. Вычислим $d := a + b + c$; «судный день» в году y будет через d дней после опорного дня столетия.

Проделаем это на двух примерах. В 2021 г. имеем $a = 1$, $b = 9$ и $c = 2$, откуда $d = 1 + 9 + 2 = 12 \equiv -2 \pmod 7$, так что «судный день» бывает за два дня до опорного дня столетия, т. е. в воскресенье, как и заявлено выше. Поскольку «судный день» сдвигается вперёд на один день в год (на два дня при переходе к високосному году), в 2020 г. «судный день» приходился на субботу, и в этот день недели умер Конвей.

Он родился в последний «судный день» 1937 года: для этого года $a = 3$, $b = 1$, $c = 0$, откуда $d = 4$ и «судный день» был через четыре дня после опорного дня столетия (среды), т. е. в воскресенье (Sunday): так что Конвей был Sunday child — счастливчик.

Дополнение В. Вычисление фазы луны

Дни недели — изобретение человека, и довольно удивительно, что для них есть столь простая схема, найденная Конвеем. А фазы луны приходят из Физики, со всевозможными осцилляциями и вариациями, и почему вообще для них должна существовать простая схема? Но она существует — чуть более сложная, но всё же достаточно простая для вычислений в уме. Запишем интересующую нас дату так: день DD, месяц MM, год в пределах столетия YY (0–99), столетие CC. Мы хотим вычислить «возраст» луны, т. е. (примерное) количество дней от последнего новолуния, помня, что период между новолуниями равен примерно 29,5 дням. Для каждой из четырёх компонент даты мы вычислим некий индекс, затем сложим эти четыре индекса, и сумма будет равна возрасту луны на эту дату.

(1) Индекс дня определяется просто: достаточно взять DD (возраст луны увеличивается на 1 каждый день).

(2) Для m-го месяца индекс равен m-му числу в последовательности

$$3, 4, \quad 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12;$$

иначе говоря, используется просто номер месяца, но для января и февраля нужно ещё добавить 2 (из-за того, что февраль короче, чем лунный цикл).

(3) Для столетия индекс нужно помнить (всё же это числа экспериментальные, и периодичности в них нет). Ограничимся двумя столетиями, которые интересуют большинство из нас — двадцатым и двадцать первым.

Для двадцатого столетия индекс равен −4, а для двадцать первого 21.

(4) Последний индекс, который нужно вычислить, относится к году, и это единственная сложная часть. Взяв $YY \in \{0, \ldots, 99\}$, вычислим его вычет по модулю 19. Этот вычет можно единственным образом записать как число из списка $\{-9, -8, \ldots, 0, \ldots, 8, 9\}$. Обозначим его $+R$ или $-R$, где R — десятичная цифра. Далее, пусть T — остаток от деления R на 3, записанный как 0, 1 или 2. Тогда индекс года записывается как $+TR$ или $-TR$, где знак взят от R.

Пример для $YY = 21$: вычет по модулю 19 равен $+R = +2$, откуда $T = 2$ и мы получаем индекс $+22$.

Пример для $YY = 37$: вычет по модулю 19 равен $-R = -1$, откуда $T = 1$ и мы получаем индекс -11.

Вычислим теперь фазу луны для дня рождения Джона Конвея, 26 декабря 1937. Индексы дня и месяца равны 26 и 12, а индекс года 37 равен -11, как мы только что вычислили. Вспомнив, что индекс двадцатого столетия составляет -4, получаем полный индекс $26+12-11-4=23=$ $=29{,}5-6.5$, так что мы находим, что Конвей родился «за шесть с половиной дней» до следующего новолуния. И действительно, новолуние пришлось на Новый год, шестью днями позже.

В качестве другого примера возьмём День числа пи в 2021 году, т. е. 14 марта 2021 г. Здесь индексы дня, месяца, года и столетия равны $14+3+$ $+22+21=60$. Учитывая, что лунный цикл составляет 29.5 дней, получаем $60=2\cdot 29{,}5+1$, т. е. День числа пи приходится на следующий день после новолуния. Проверьте по календарю — мы попали в точку!

На практике можно запомнить индексы года и столетия, и тогда фаза луны вычисляется очень просто. Например, в 2021 году всегда нужно брать «день + индекс месяца + 13,5».

Разумеется, нельзя ожидать совершенной точности от такого способа, но качество полученной оценки обычно впечатляет. Эвристические константы можно слегка улучшить (например, для мая и сентября константы 4,5 и 9,5 лучше, чем 5 и 9), но, разумеется, Физика слишком сложна, чтобы надеяться на более точные результаты; подробности см. в [WW, Chapter 24].

Последнее замечание: константы вычислены для начала дня. Если вы вычисляете возраст луны, глядя на неё поздно ночью, то вы гораздо ближе к началу следующего дня, так что можно было бы к дате добавить 1.

Последний вопрос: почему луна подчиняется столь безумной формуле?

Дополнение C. Игра «Жизнь»

Игра «Жизнь» происходит на бесконечной прямоугольной решётке (следовало бы сказать, что она «живёт» на такой решётке). Каждая клетка либо мёртвая, либо живая, причём живые клетки обычно помечены, а мёртвые пусты, как показано на рис. 1.

В такой решётке у каждой клетки ровно восемь соседей (по горизонтали, по вертикали и по диагонали), как показано на рис. 2 слева. Правила игры очень просты:

- живая клетка выживет в следующем поколении, если среди её восьми соседей два или три живых;
- мёртвая клетка оживёт, если у неё ровно три живых соседа из восьми.

Равносильная формулировка выглядит так: посчитаем для произвольной клетки количество живых среди её соседей *с учётом её самой*; тогда клетка будет живой в следующем поколении, если посчитано ровно три живых клетки, а если посчитано четыре, то её статус не изменится; во всех остальных случаях клетка в следующем поколении будет мёртвой.

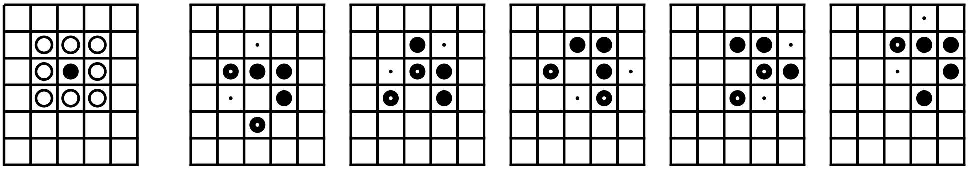


Рис. 2. Игра «Жизнь». Живые клетки помечены сплошными кружочками, мёртвые клетки пусты. Слева: восемь соседей живой клетки помечены кружочками. Вторая конфигурация слева: пять клеток образуют «планер»; четыре его итерации показаны на последующих конфигурациях. (Маленькие чёрные и белые точки показывают, будет жить или нет данная клетка в следующем поколении

Пример развития игры демонстрируется на рис. 2, начиная со второй конфигурации слева: показана начальная конфигурация из пяти живых клеток и четыре её последовательных образа при развитии игры. В каждой конфигурации маленькая чёрная или белая точка указывает статус данной клетки на следующем шаге, чтобы проще было отследить развитие игры. Конкретная конфигурация, показанная здесь, называется «планер» или «глайдер»: она повторяется через четыре поколения со сдвигом на одну клетку вправо вверх («скользит на северо-восток с четвертью скорости света»).

Конвей очень рано поставил вопрос, существуют ли ограниченные конфигурации, которые со временем растут неограниченно. Билл Госпер решил этот вопрос утвердительно в 1970 г., открыв «планерное ружьё», показанное на рис. 1: оно «выстреливает» планер через каждые 30 поколений. Разумеется, гораздо принципиальнее вопрос о полноте по Тьюрингу, и он также решён положительно, что подтвердило юношескую мечту Конвея.

Дополнение D. Игры и числа

В этом Дополнении мы добавим некоторые подробности к конвеевской теории игр и чисел. Примером игры послужит *хакенбуш* (*рубка зарослей*): в его конечном варианте используется конечный граф, возможно несвязный, в котором каждое ребро окрашено в синий, красный или зелёный цвет. Каждая компонента имеет одну или несколько вершин, которые считаются «заземлёнными». Ход состоит в удалении одного из рёбер графа; любые другие рёбра, которые после этого не заземлены (т. е. не соединены с отмеченными вершинами), также удаляются. Смысл окраски в том, что синие (b**L**ue) рёбра могут быть удалены только Левыми (**L**eft), красные (**R**ed) — только Правыми (**R**ight), а зелёные (gr**EE**n) — любым игроком (**E**ither). Игроки ходят по очереди, и как всегда проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Играть в хакенбуш на самом деле очень занятно.

Эта игра удачно иллюстрирует понятие сложения игр: чтобы сделать ход, игроки выбирают компоненту, в которой удаляется ребро, а остальные компоненты остаются без изменения, так что различные компоненты графа образуют естественные слагаемые этой игры. Чтобы из игры G получить противоположную игру $-G$, нужно просто поменять местами красный и синий цвет.

Напомним, что игра H называется *нулевой*, если выигрышная стратегия всегда есть у того, кто не начинает. Докажем важную лемму, которая обосновывает термин «нулевая игра»: прибавление нулевой игры не меняет исход игры.

Лемма (сложение с нулём). *Пусть G — любая игра, H — игра, в которой всегда выигрывает второй игрок. Тогда в сумме $G+H$ выигрывает тот же игрок, что и в игре G.*

Доказательство. Пусть у меня есть выигрышная стратегия в игре G. Играя в сумму $G+H$, я буду всегда делать ход в игре G, пока мой противник не сделает ход в игре H. Тогда я тоже сделаю ход в игре H.

Таким образом, я играю в H только в ответ на ход моего противника, и тем самым я оказываюсь вторым игроком в этой игре. Значит, у меня есть выигрышная стратегия для H и я никогда первым не перестану делать ходы в этой игре (по условию, H — нулевая игра). Что касается ходов в игре G, я просто следую выигрышной стратегии, которая у меня есть по предположению, так что здесь я тоже не окажусь без хода. В итоге именно я сделаю последний ход и, значит, выиграю. $\square$

В нашем формальном определении игр мы не уточнили смысл слова «выиграть», а также, что игроки должны ходить по очереди. Важно понимать, что в любой игре возможные ходы каждого игрока должны быть определены в любой ситуации, независимо от того, кто сделал предыдущий ход: заметим, что даже если в игре $G+H$ игроки ходят по очереди, вполне может оказаться, что в каждом из слагаемых G и H игрок ходит несколько раз подряд.

Исход игры может зависеть от того, кто из игроков делает первый ход. Ясно, что по своему исходу каждая игра принадлежит одному из следующих четырёх классов:

- игра G называется положительной ($G>0$), если Левые всегда выигрывают независимо от того, какой игрок начинает;
- игра G называется отрицательной ($G<0$), если Правые всегда выигрывают независимо от того, какой игрок начинает;

- игра G считается равной нулю ($G=0$), если всегда выигрывает второй игрок;
- игра G называется нечёткой ($G \mid 0$), если всегда выигрывает первый игрок.

Можно создавать обычные комбинации: например, $G \geqslant 0$, если либо $G = 0$, либо $G > 0$, т. е. Левые выигрывают по крайней мере когда ходят вторыми. Здесь появляются формальные определения, которые уточняют данные ранее неформальные (см. с. 42).

Уточним определение (3). Пусть дана игра $G = (L, R)$. Положим $G \geqslant 0$, если нет такого элемента $G^R \in R$, что $G^R \leqslant 0$, и положим $G \leqslant 0$, если нет такого элемента $G^L \in L$, что $G^L \geqslant 0$.

Это определение означает, что Левые имеют выигрышную стратегию в качестве второго игрока в случае, если у Правых нет хорошего первого хода G^R, после которого они выигрывают в качестве второго игрока (после хода Правых первый ход в игре G^R делают Левые).

Замечательно, насколько экономно сказано в этом определении и о выигрыше, и об очерёдности ходов. Далее можно определить отношения вида $G = H$ формулой $G - H = G + (-H) = 0$, а также определить $G \geqslant H$ формулой $G - H \geqslant 0$ и положить $G > H$, если $G \geqslant H$, но не $G = H$.

Мы можем наконец дать точное определение числа.

(4) Мы говорим, что игра $x = (L, R)$ есть *число*, если все элементы x^L из L и все элементы x^R из R удовлетворяют неравенствам $x^L < x < x^R$, причём все элементы из L и R являются числами.

Это определение, как обычно, рекурсивно. Пустая игра ($L = R = \{\,\}$) является числом, так как в множествах L и R нет элементов, которые могли бы нарушить нужное условие; это Нулевая игра. В следующей по простоте игре будет $L = \{0\}$ и $R = \{\,\}$ (это хакенбуш с единственным синим ребром; ход единственный и только у Левых). Эта игра называется 1 (у синих преимущество в один ход). Левые заведомо выигрывают, кто бы ни начинал, так что это простейшая положительная игра и мы доказали, что $1 > 0$. Это неравенство показывает, что 1 является числом. Противоположное ему число — игра -1, где $L = \{\,\}$ и $R = \{0\}$.

Следующей надо рассмотреть игру, которая обозначается $\star$. В ней $L = R = \{0\}$. Здесь один возможный ход (единственное зелёное ребро в хакенбуше), его сделает начинающий и выиграет. Таким образом, эта игра — нечёткая. Если $\star$ хочет быть числом, нужно выполнить условие $0 < \star < 0$, что невозможно: таким образом, $\star$ — простейшая игра, не являющаяся числом.

Прежде чем перейти к умножению, нужно сделать замечание об обозначениях. Наше определение игры как «пары множеств» $G = (L, R)$ математически точно, но Конвей счёл бы его «скучным»[6]. Для Конвея игра — это новый вид множеств с двумя сортами элементов, одним в L и одним в R (они представляют разрешённые ходы Левых и Правых). Конвей заключает множество всех этих элементов в фигурные скобки с чертой посредине, разделяющей ходы Левых и Правых. Например, вместо того чтобы писать $\star = (\{0\}, \{0\})$, он применяет гораздо более удобную запись $\star = \{0 \mid 0\}$. (Конвей считает недостатком теории множеств, что множества обычно могут содержать лишь один сорт элементов, а не два.) Затем Конвей упрощает обозначения, перечисляя лишь «типичные» элементы: так, $G = \{G^L \mid G^R\}$ не означает, что G содержит лишь по одному варианту хода для Левых и Правых, но что G^L и G^R являются представителями таких вариантов. Можно было бы записать $G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots \mid G_1^R, G_2^R, \ldots\}$, но это подразумевает, что множества возможных ходов для Левых и Правых счётны, чего Конвей отнюдь не имел в виду (множества L и R могут иметь любую мощность, например для ординалов, как описано ниже).

Конвей ввёл очень естественное определение умножения чисел, а именно: если $x = \{x^L \mid x^R\}$ и $y = \{y^L \mid y^R\}$ — два числа, то определим их произведение как

$$x \cdot y := \big\{x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L \cdot y^L,\ x^R \cdot y + x \cdot y^R - x^R \cdot y^R \mid x^L \cdot y + x \cdot y^R - x^L \cdot y^R,\\ x^R \cdot y + x \cdot y^L - x^R \cdot y^L\big\}.$$

Разумеется, это определение рекурсивное, как обычно, но оно требует некоторого пояснения, а также мотивировки. Прежде всего, x^L и т. д. означают типичные варианты ходов, так что $x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L y^L$ обозначает «типичный вариант для Левых» в произведении (всего их два): здесь нужно выписать все числа, которые можно образовать из x и y, и любую пару их вариантов для Левых.

Почему такое определение естественно? Исходя из неравенств $x^L < x < x^R$ и $y^L < y < y^R$, мы получаем при умножении, например, неравенство $0 < (x - x^L) \cdot (y - y^L)$, откуда $x \cdot y^L + x^L \cdot y - x^L \cdot y^L < x \cdot y$. Таким образом, числа вроде $x \cdot y^L + x^L \cdot y - x^L \cdot y^L$ — естественные кандидаты на роль вариантов ходов Левых в произведении; определение в самом деле «работает» (Конвей нашёл его лишь с большим трудом, исследовав множество возможностей в твёрдой уверенности, что должно существовать простое определение). Разумеется, есть также рекурсивные определения деления (достаточно определить $1/x$), квадратного корня и т. д. (для всех чисел, включая ординалы!), но здесь мы их опустим; см., например, [NG, SSt].

[6] Pedestrian.

Конвей доказывает, что при таком определении числа удовлетворяют аксиомам ПОЛЯ (учтём, что к числам относятся ординалы, так что они не составляют множество). Причина, почему не любые игры можно перемножать, состоит в том, что существуют три игры G, H, K, для которых $G = H$ (по определению это значит, что $G - H = 0$), но не выполнено равенство $G \cdot K = H \cdot K$. Для чисел эта проблема не возникает.

Закончим это Дополнение несколькими примерами чисел — разной степени неожиданности; см. рис. 3. Понятно, что в играх 1 и -1 есть

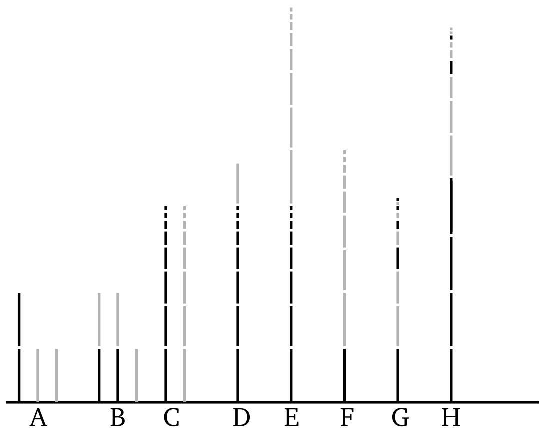


Рис. 3. Несколько сине-красных хакенбушей (синие рёбра показаны как чёрные, красные как серые).

A: доказательство, что $1+1=2$. Точнее, сумма этих трёх игр равна нулю (выигрывает второй игрок), поэтому первая строка сама по себе имеет значение $+2$.

B: доказательство, что красное ребро над синим предоставляет синим преимущество ровно в $1/2$ хода.

C: даже бесконечные деревья могут быть вполне корректно определёнными играми. Сумма синего и красного бесконечных деревьев — это игра, в которой первый игрок выбирает произвольное натуральное число, затем второй игрок делает то же, и выигрывает большее число. Очевидна победа второго игрока, откуда $\omega - \omega = 0$.

D: положительная игра со значением на 1 меньше, чем ω: это игра $\omega - 1$ (для доказательства добавим игры $-\omega$ и $+1$, получая нулевую игру).

E: это игра $\omega/2$ (преимущество ровно вдвое меньше, чем в игре ω; легко доказывается практически).

F: эта игра ε удовлетворяет условию $\omega \cdot \varepsilon = 1$ и потому имеет значение $1/\omega$ (бесконечно малая игра — положительная, но меньше любого положительного действительного числа; доказательство использует формулу, определяющую умножение).

G: игра $1/3$ (ещё одна бесконечная игра; красные и синие рёбра чередуются, за исключением начала).

H: эта бесконечная игра предоставляет синим преимущество ровно в π ходов преимущество ровно в один ход соответственно для Левых и для Правых. Хакенбуш, состоящий из двух синих рёбер, предоставляет превосходство в 2 хода для Левых и потому заслуживает названия 2. Но рассмотрим игру x, в которой красное ребро находится над синим. Легко убедиться практически, что $x + x - 1 = 0$ (в этой сумме трёх игр выигрышная стратегия есть у второго игрока), так что имеет смысл сказать, что x предоставляет Левым преимущество ровно в пол-хода. На рис. 3 мы приводим несколько примеров сине-красных хакенбушей и их значений, предоставляя читателю проверить, что значения именно таковы. А также проверить, что все сине-красные графы хакенбуша (без зелёных рёбер) определяют числа. И найти закономерность для бесконечных последовательностей красно-синих рёбер хакенбуша.

Бесконечные строки хакенбуша иногда преподносят приятные сюрпризы. Они кодируют не только все действительные числа, но и неплохой набор бесконечно больших и бесконечно малых чисел, как показано на рисунке. Например, если ω обозначает наименьший бесконечный ординал (кодирующий игру, где множество ходов Левых — в точности все натуральные числа), то появляются лёгкие игры $\omega+1$ (для Левых на один ход лучше, чем бесконечно много ходов) и $\omega-1$. Столь же легко описать в виде игр числа $\omega/2$ и $\sqrt{\omega}$. А для подходящего числа $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $\omega \cdot \varepsilon = 1$.

Всё это — не что иное, как начало огромного ПОЛЯ, состоящего из чисел и других игр. В заключение рассмотрим одну из наших любимых игр $\uparrow$, где $L = \{0\}$ и $R = \star$, или кратко $\uparrow = \{0 \mid \star\}$: ясно, что выигрывают Левые, так что $\uparrow > 0$, но можно показать без чрезмерных усилий, что $0 < \uparrow < x$ для любого положительного числа x — несмотря на то, что существует очень много бесконечно малых положительных чисел, например ε и все его степени (и много ещё гораздо меньших чисел, включая обратные ко всем ординалам!).

Мы просто не сможем отказать себе в выводе неравенства $0 < \uparrow < x$: для этого нужно сыграть в некоторые лёгкие игры! Левое неравенство очевидно, а для правого нужно доказать, что $\uparrow - x < 0$ для любого числа $x > 0$, т. е. что в сумме $\uparrow + (-x)$ всегда выигрывают Правые. Проверим это: если начинают Левые, то они могут, например, сделать ход в игре $\uparrow$; их единственный ход ведёт в $0 + (-x) < 0$, и Правые выигрывают. Левые могут сделать ход и в игре x, но он приводит к ситуации, которая для них даже хуже — по определению числа.

Если же начинают Правые, то их выигрышный ход принадлежит игре $\uparrow$ и ведёт в игру $\star + (-x)$, где начинают Левые. Они должны либо в игре $\star$ пойти в $0 + (-x) < 0$, либо в игре x перейти в худшую ситуацию, чем

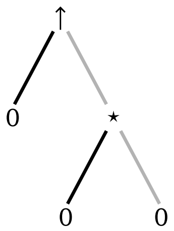


Рис. 4. Дерево удивительной игры $\uparrow$. Возможные ходы из каждой позиции — рёбра, идущие вниз: синие (на рисунке чёрные) для Левых и красные (на рисунке серые) для Правых; игра заканчивается, когда достигнута позиция 0

раньше, так что во всех случаях выигрывают Правые, *и этим полностью доказано, что игра $\uparrow$ положительна, но меньше любого положительного числа*!

Несколько слов о библиографии по играм и числам: стандартный источник по играм — «Winning Ways» Берлекэмпа, Конвея и Гая [WW]. В четырёх томах содержится неоценимая коллекция разнообразных игр всех сортов. В них также содержится небольшое количество доказательств, нередко неформальных и чаще относящихся к конечным числам и играм. Очень неплохое введение в предмет составляет статья Конвея [C-G]. Формальный источник по числам — «On Numbers and Games» Конвея [NG]. Однако этот текст написан очень плотно, и даже по его второму изданию видно, что он был создан всего за две недели. Другой известный источник — «Сюрреальные числа» Дональда Кнута [K], уникальное сочетание математического повествования с преданием в библейском духе. Однако оказалось трудно найти строгий и притом доступный текст на эту тему, так что мы попытались восполнить это в [SSt].

Дополнение E. Фатбол

В заключение опишем простую занимательную игру — одну из любимых игр Конвея, которая им самим придумана и доставляет большое удовольствие игрокам: это *фатбол* (сокращение от «философский футбол»). В него играют на доске для Го с одним чёрным камнем («мячом») и набором белых камней. Каждый игрок хочет попасть мячом на базовую линию вблизи противника или за эту линию. В начале игры доска пуста, лишь в центре лежит мяч. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок имеет два варианта хода: либо поставить один белый камень в любой пустой пункт, либо «перепрыгнуть» мячом по горизонтали, вертикали или диагонали через сплошной прямой ряд белых камней, непосредственно примыкающий к мячу. Сразу после прыжка эти камни удаляются. Если после прыжка и удаления камней мяч может прыгнуть из новой позиции, тот же игрок вправе это немедленно сделать и повторить столько раз, сколько будет возможно (при этом допускаются ходы зигзагом). Вы выигрываете, достигнув базовой линии противника или перепрыгнув её. Но имейте в виду, что если вы можете достичь базовой линии совсем близко от противника и должны там остановиться, вы выиграете очень мало: последует ход противника, и он сможет передвинуть мяч в противоположном направлении. Эта игра полна движения и неожиданностей! Она реализована на различных вебсайтах, например `philosophers.football`.

Список литературы

[C-F] *Conway J. H.* FRACTRAN: a simple universal programming language for arithmetic (первая публикация в 1972 г.) // *Lagarias J. C.* (ed.), The ultimate challenge. The $3x+1$ problem. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010. P. 249–264.

[K] *Knuth D. E.* Surreal Numbers. Reading, Mass.: Addison–Wesley Publishing Company, 1974. (Рус. пер.: *Кнут Д. Э.* Сюрреальные числа. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014.)

[NG] *Conway J. H.* On numbers and games (первая публикация в 1976 г.) / 2nd ed. Natick, MA: A K Peters, 2001.

[C-M] *Conway J. H.*, *Paterson M. S.*, *Moscow* (*USSR*) A headache-causing problem (написано в 1977) // Amer. Math. Monthly. 2020. V. 127, № 4. P. 291–296. (Рус. пер.: *Конвей Дж. Х.*, *Патерсон М. С.*, *Москва* (*СССР*). Каверзная задача // Настоящий сборник. С. 88–96.)

[C-G] *Conway J. H.* All games bright and beautiful // Amer. Math. Monthly. 1977. V. 84, № 6. P. 417–434. (Рус. пер.: *Конвей Дж. Х.* Игры разнообразные, яркие и красивые // Настоящий сборник. С. 97–121.)

[CN] *Conway J. H.*, *Norton S. P.* Monstrous moonshine // Bull. Lond. Math. Soc. 1979. V. 11, № 3. P. 308–339.

[WW] *Berlekamp E. R.*, *Conway J. H.*, *Guy R. K.* Winning ways for your mathematical plays; 4 volumes (первая публикация в 1982) / 2nd ed. Natick, MA: A K Peters, 2004.

[C-W] *Conway J. H.*, *Curtis R. T.*, *Norton S. P.*, *Parker R. A.*, *Wilson R. A.* ATLAS of finite groups. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups. With comput. assist. from J. G. Thackray. Oxford: Clarendon Press, 1985. xxxiii+252 pp.

[CS] *Conway J. H.*, *Sloane N. J. A.* Sphere packings, lattices, and groups (первая публикация в 1988) / 3rd ed. With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov. New York, NY: Springer (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; V. 290). lxxiv+703 pp. (Рус. пер. первого издания: *Конвей Дж.*, *Слоэн Н.* Упаковки шаров, решётки и группы. В 2 т. М.: Мир, 1990.)

[NYT] *Browne M. W.* Intellectual Duel: Brash Challenge, Swift Response // The New York Times. Aug. 30, 1988.

[Seq] *Mallows C. L.* Conway's challenge sequence // Amer. Math. Monthly. 1991. V. 98, № 1. P. 5–20.

[CK1] *Conway J., Kochen S.* The free will theorem // Found. Phys. 2006. V. 36, № 10. P. 1441–1473.

[SSt] *Schleicher D., Stoll M.* An introduction to Conway's games and numbers // Mosc. Math. J. 2006. V. 6, № 2. P. 359–388.

[CK2] *Conway J., Kochen S.* The strong free will theorem // Notices AMS. 2009. V. 56, № 2. P. 226–232.

[C-A] *Conway J. H.* On unsettleable arithmetical problems // Amer. Math. Monthly. 2013. V. 120, № 3. P. 192–198. (Рус. пер.: *Конвей Дж. Х.* О независимых арифметических утверждениях // Настоящий сборник. С. 122–132.)

[CI] *Schleicher D.* Interview with John Conway // Notices AMS. 2013. V. 60, № 5. P. 567–575. (Рус. пер.: *Шляйхер Д.* Интервью с Джоном Хортоном Конвеем // Настоящий сборник. С. 69–87.)

[Ro] *Roberts S.* Genius at play. The curious mind of John Horton Conway. New York: Bloomsbury Press, 2015. xxiv+454 pp.

Замечание. Большинство наших воспоминаний о Конвее основано на многочисленных разговорах с ним в течение десятилетий. Естественно, многие из них и очень многие другие присутствуют в замечательной книге, написанной Ш. Робертс. В некоторых местах мы явно ссылались на эту книгу, особенно когда нам были известны дополнительные подробности и пояснения. Но, несомненно, эта биография представляет собой столь блестящее исследование, что трудно добавить что-либо значимое о Конвее, не присутствующее там, хотя иногда в другом виде, что также интересно (Робертс отмечает и противоречия). Поэтому мы не стали рассыпать по всему тексту ссылки на эту книгу.

Дирк Шляйхер, университет Экс-Марсель

dierk.schleicher@univ-amu.fr

Интервью с Джоном Хортоном Конвеем

Д. Шляйхер

Это отредактированная версия интервью с Джоном Хортоном Конвеем, которое было взято в июле 2011 года на первой Международной математической летней школе для студентов в университете Якобса (Бремен, Германия), а затем слегка дополнено. Интервьюер — Дирк Шляйхер, профессор математики в университете Якобса, член оргкомитета и научного комитета летней школы[1].

Джон Х. Конвей — один из крупнейших специалистов по теории конечных групп, а также один из ведущих мировых специалистов по теории узлов. Он автор или соавтор более чем десяти книг и более чем 130 журнальных статей по широкому кругу математических проблем. Ему принадлежат важные работы по теории чисел, теории игр, теории кодирования, теории замощений. Конвей создал новые числовые системы, в том числе «сюрреальные числа». Он широко известен как создатель игры «Жизнь» — компьютерной имитации размножения клеток с простыми правилами, порождающими сложное поведение.

Конвей родился в 1937 г., получил степень доктора философии в Кембриджском университете в 1967 г. под руководством Гарольда Дэвенпорта. Конвей работал в Кембридже вплоть до перехода в 1986 г. в Принстонский университет, где он стал неймановским профессором. Избран членом Лондонского королевского общества и награждён премией Пойа от Лондонского математического общества и премией по математике Фредерика Эссера Неммерса от Северо-Западного университета (США).

Джон Конвей, добро пожаловать на Международную математическую летнюю студенческую школу в университете Якобса в Бремене. Почему Вы приняли приглашение участвовать?

---

[1] Notices of the AMS. May 2013. V. 60, № 5. P. 567–575.

Йорис Дольдерер и Зимантас Дарбенас заслуживают благодарности за вклад в проведение этого интервью, а Александру Михай — за несколько фотографий. — *Прим. амер. ред.*

Скриншот с интервью в летней школе 2011 г. Предполагалась краткая беседа, но она спонтанно разрослась до часового интервью, которое пришлось прервать лишь когда разрядилась камера

Я люблю преподавать и люблю говорить с молодёжью, так что рассчитывал получить удовольствие. Я нередко говорил о себе, что если кто-то сидит, я его учу; если он встал, я продолжаю его учить; но если он убегает, я, может быть, не сумею его поймать. Но теперь ему надо лишь уйти — и я не сумею поймать, так как недавно перенёс инсульт.

Случалось ли когда-нибудь, чтобы убегали люди, которых Вы учите?

Да, после пяти или шести часов занятий люди так настроены. Знаете, британские студенты не такие дисциплинированные, как немецкие.

В этой летней школе есть студенты из двадцати пяти разных стран, с разным уровнем воспитанности, и они не уклоняются от занятий, совсем наоборот. Вы профессор в Принстоне, и люди приезжают в Принстон, чтобы заниматься с людьми вроде Вас…

Да, до некоторой степени.

…а теперь Вы приехали сюда к студентам. Разумеется, здесь они даже младше, чем большинство студентов в Принстоне. Есть ли для Вас разница — учить в Принстоне или в летней школе?

Говоря попросту, я никогда не смотрю на разных людей по-разному. В Принстоне я учу и студентов, и аспирантов. Я приезжаю в места вроде этого и на другие подобные мероприятия в Штатах. На самом деле я никогда не меняю стиль обучения. Я не меняю основных преподаваемых тем. С младшими учениками я меньше вхожу в подробности, но это для меня тот же материал. В некотором смысле, я очень элементарный математик.

Тогда Вы очень глубокий элементарный математик.

Я приму Ваш комплимент, если он означает то, что должен был означать, но…

Да, он это и означает.

…Как бы я мог это выразить? Найти что-то новое в простых, как бы детских рассуждениях труднее, чем в рассуждениях на переднем крае математических исследований. Всё лёгкое выглядит на первый взгляд уже сказанным, но вы можете обнаружить, что оно ещё не сказано.

Это меня несколько озадачивает, так как Вы один из тех, кто находится на переднем крае математики — пожалуй, на переднем крае неожиданной математики.

Думаю, что последнее утверждение могу принять. Но это моя собственная математика. Я открыл сюрреальные числа, совершенно удивительные. Определения абсолютно тривиальны. Никто о них раньше не думал, никто не пробовал. В математике есть темы большой ценности. Их исследовали очень известные и глубокие математики, и очень трудно отыскать там что-то новое. Большинство моих коллег в Принстоне делают одну тему своей собственной и становятся в ней экспертами мирового значения. Я не поступаю так. Меня как раз интересует очень многое. Я не слишком углубляюсь в каждую тему. Я углубляюсь умеренно.

Расцениваю это больше как проявление Вашей скромности.

Вот, что ещё я о себе скажу: я слишком скромен. Если бы я не был столь скромен, я был бы совершенен. Я работаю над своей скромностью.

Успеха Вам в этой работе! Если говорить о Вашей скромности, что Вы думаете…

Вообще-то я не думаю, что я скромен, но я работаю над этим.

Так или иначе, позвольте задать следующий вопрос. Что Вы считаете своей величайшей идеей, своим величайшим достижением?

Не знаю. Я горжусь многими результатами и не рассматриваю какой-то один как своё величайшее достижение. Мои коллеги назвали бы, вероятно, работы по теории групп. Я не считаю их моим величайшим

Студенты явно не сторонятся Джона Конвея

достижением. Полагаю, они достаточно хороши, но и только. Рад, что их ценят — это означает, что меня не считают совсем несерьёзным. На мой взгляд, я совсем несерьёзен. Но у меня есть два конкретных результата, которые могу отметить. Один совсем недавний — теорема о свободе воли, — а другой гораздо более давний — сюрреальные числа. Я их оцениваю — и ценю — с разных точек зрения: сюрреальными числами я открыл огромный новый мир чисел. Очень много чисел, невообразимо много. Никто другой не открыл больше чисел, чем я. В некотором смысле это победа над так называемыми консервативными математиками в их собственной игре, так как возникает теория вещественных чисел, которая проще традиционной, излагаемой в книгах уже почти двести лет. Так что я очень горд этим результатом. Удивительно, что мне удалось найти его.

Теорема о свободе воли

Другая, более поздняя работа — теорема о свободе воли, найденная мной совместно с моим коллегой Саймоном Коченом; несомненно, один я никогда не нашёл бы её. Эта теорема утверждает нечто доказуемое о понятии свободной воли, о котором философы рассуждают веками — не менее двух тысяч лет. Это не что-то такое, что хотел узнать каждый, но это теорема, доказанная на математическом уровне строгости — или хотя бы очень близко к нему. Этот результат — предмет моей личной гордости,

Математические игры и игрушки, например кубик Рубика, всегда возбуждают живой интерес и у Конвея, и у его аудитории

так как я никогда раньше не думал о чём-то подобном. Я читал книги по философии, но никогда не предполагал достичь какого-то продвижения. Обычно вы не продвигаетесь в философских проблемах. Вместо того, чтобы приступать к проблеме как все остальные, я думал о других вещах, о физике, и вот — удалось сказать нечто о свободной воле.

Таким образом, это или другое Ваше открытие могло определяться совпадением или удачей?

Отчасти удачей. Я никогда ничего бы тут не сделал без моего коллеги. Он научил меня многому из квантовой механики. Когда я учился в университете в Англии, я слушал курсы по квантовой механике, в том числе курс Дирака — великого квантового механика! Замечательный физик и застенчивый человек. Я не понимал ничего. Это было странно, но у Фейнмана есть известное изречение: если кто-то говорит вам, что понимает квантовую механику, то вы встретили лжеца, и притом отнюдь не хорошего лжеца. Так что я не утверждаю, что понимаю квантовую механику.

Мой друг Саймон Кочен сказал мне про квантовую механику одну вещь, которую я понял, и я нахожу, что многие физики эту одну вещь не понимают (разумеется, они понимают много вещей, которых не понимаю я). И этой одной вещи мы следовали, пока не получили эту замечательную теорему. Если сделать разумные допущения, включая допущение о свободе воли, то эта одна вещь состоит в том, что маленькие элементарные частицы делают что-то своё по всей вселенной. Один атом решает двигаться чуть левее, а другой — чуть правее. И всё это очень быстро обрывается, но не сразу. И здесь [указывает на Шляйхера] заключено то, что мы называем жизнью. Вы могли бы оказаться роботом, но я в этом сомневаюсь. Я скорее подозреваю, что у Вас сознание примерно того же типа, что у меня. И это, вероятно, проявление свободы частиц внутри Вас: они делают что-то своё.

Не могли бы Вы сформулировать простое утверждение, выражающее точный — или интуитивный — смысл теоремы о свободе воли?

Да. [Бросает кусок бумаги.] Я только что решил бросить этот кусок бумаги на пол. Я не верю, что это было предопределено в начале большого взрыва, 14 миллиардов лет назад. Полагаю, что нелепо считать предопределённым всё развитие вселенной, включая, например, это интервью. В теореме о свободе воли я предполагаю, что некоторые мои действия не заданы предопределёнными функциями от прошлой истории вселенной. Довольно сильное допущение, но большинство из нас несомненно его делают. А мы с Саймоном доказали, что если это действительно верно, то верно то же самое для элементарных частиц: некоторые их движения не предопределены всей предыдущей историей вселенной. Это довольно замечательный факт.

Теория Ньютона была детерминистской. В 1920-х годах Эйнштейн испытывал трудности, рассматривая квантовую механику как недетерминистскую. Это рассматривалось как дефект квантовой механики. Разумеется, когда я пытался изучать квантовую механику и не преуспел в этом, я тоже считал это дефектом. Но это не дефект. Если теория может предсказать, что будет делать одна из частиц, то эта теория ложна, поскольку согласно теореме о свободе воли — предполагая, что у нас есть свобода воли, — частица принимает решение, что она сделает, лишь когда она это делает или чуть раньше.

Позвольте мне изложить теорему следующим образом. Пусть в человеческих существах заключено лишь крохотное количество свободы воли: вы можете нажать кнопку A или кнопку B, причём выбор не предопределён. Это лишь крохотная часть того, что мы обычно рассматриваем как свободу воли для человеческих существ. И если у нас есть это крохотное количество свободы воли, то оно есть и у элементарных частиц — в том смысле, что частица в ответ на некий эксперимент может выбрать путь C или D. И этот выбор не является предопределённой функцией от всей информации о предыдущей истории вселенной.

Вы верите, что у людей есть свобода воли.

Да. Строгий детерминизм говорит нам, что все наши действия предопределены прошлой историей вселенной. Не знаю, может быть и так. Я не могу это опровергнуть. Я могу доказать, что не могу это опровергнуть. Я могу доказать, что Вы [указывает на Шляйхера] тоже не можете это опровергнуть. Но тем не менее я верю, что у людей есть свобода воли.

Это Ваша вера.

И она очень сильна. Если Вы или кто-то ещё не верит в это, я не собираюсь с Вами спорить, так как знаю, что не смогу опровергнуть позицию детерминиста. Читая лекции на эту тему в разных местах, я иногда затем спрашивал, есть ли в аудитории детерминисты. При аудитории в сто человек обычно двадцать поднимали руку. И обычно они из числа самых интеллектуальных слушателей, так как нужен некоторый интеллект, чтобы не верить в то, что очевидно для остальных, или чтобы верить в то, что остальные находят нелепым. Несколько раз ко мне приходили люди и говорили, что они детерминисты. Они ждали, что я стану спорить об этом. Но раз я доказал, что никто не может опровергнуть детерминизм, какой смысл пытаться опровергнуть детерминизм? У меня нет рассуждения, опровергающего детерминизм, — следовало бы сказать, у меня нет *доводов* против детерминистов.

Обычная интерпретация квантовой механики состоит в том, что поведение элементарных частиц попросту случайно.

Знаете, случайность тут не помогает. Если бы поведение каждой частицы было предопределённой функцией её прошлого плюс случайная строка битов, то мы также могли бы предположить, что эта строка битов была создана перед сотворением вселенной, а это исключено точно так же, как детерминированное поведение.

Клеточные автоматы

Одно из Ваших достижений, которое Вы не упомянули, — то, за которое Вы, пожалуй, наиболее известны: изобретение игры «Жизнь» и теория клеточных автоматов.

Да, это правда. И иногда я желаю, чтобы я не изобретал эту игру.

Почему?

Ну, потому что я довольно эгоистичен. Когда я вижу новую книгу по математике для широкой аудитории, я обращаюсь к указателю и ищу

Джон Конвей любит вызывать на игру в «палочки» — это распространённая игра школьников, но с удивительно глубоким математическим содержанием

там определённое имя, и если нахожу это имя, то оно для меня начинает как-то сиять. И мне говорят: страница 157, страницы 293–298, или ещё что-то. И я с нетерпением обращаюсь к этим страницам, надеясь найти какое-то упоминание о своих открытиях. И каждый раз вижу лишь игру «Жизнь». Я не стыжусь её; это хорошая игра. В ней сказано то, что следовало сказать. Но я открыл столько других вещей, а как раз это было с некоторой точки зрения довольно банально — во всяком случае для меня. Слегка огорчает, что я известен благодаря тому, что я сам считаю, в некотором смысле, довольно тривиальным. Ещё очень много предстоит узнать о сюрреальных числах. А теорема о свободе воли открыта недавно, и поэтому она ещё зажигает во мне энтузиазм.

Понимаю Ваши слова. Но, возможно, игра «Жизнь» не до конца разработана или понята? Может быть, там есть теория, которая ждёт, чтобы её открыли?

Нет, она сверхразработана. Вы не заинтересуете меня игрой «Жизнь».

Но Стивен Вольфрам очень интересуется клеточными автоматами. Не считает ли он, что это всеобщее будущее?

Думаю, что он неправ. И я сильно удивлён, что он имеет то мнение, которое имеет, поскольку он вроде бы изучал физику. Я не должен был говорить «вроде бы» — простите меня. Он должен быть осведомлён о том, что универсум ведёт себя — по крайней мере, в это верят наиболее компетентные физики — недетерминированным образом. А клеточные автоматы, как и игра «Жизнь», — вещь детерминированная. Так что по моему мнению можно доказать, что универсум — не клеточный автомат.

Я слегка удивлён, слыша от Вас, что нужно верить тому, что говорит большинство специалистов в некоторой области. Разве Вас когда-нибудь заботило мнение большинства?

Нет, не очень. Но физика — не моя профессия. И я полагаю, что моё мнение подкрепляется как раз тем, что оно не только моё. Я удивлён, что Вольфрам верит, что универсум — клеточный автомат. Я разговаривал с ним давно, и он был очень дружелюбен. В основном он интересовался игрой «Жизнь». Помню, как я прогуливался с ним и его другом, когда мы оба участвовали в конференции недалеко от Марселя. Обычно мы спускались к Средиземному морю по приятному пути среди скал, а затем возвращались тем же путём, проведя час на пляже. И всё это время мы разговаривали — ну, в основном о вещах вроде клеточных автоматов, но также о философии и других вещах. Я не видел его долгое время, а затем между нами была дискуссия, не вполне дружественная, лет десять назад. Я снова встретил его в прошлом или позапрошлом году на конференции в честь Мартина Гарднера, и мы вернулись к нашей старой привычке вести интересные интеллектуальные разговоры. Это довольно занятно, поскольку он сделал миллионы, создав компанию для хорошего дела. Этот человек мог дать мне один-два миллиона долларов и не заметить.

Не думаю, что взгляды Вольфрама обоснованны. Его книга очень интересна, но что касается объяснения универсума — не думаю, что он нашёл правильную идею. Может быть, потому, что он не понимает одну вещь в квантовой механике, которую понимаю я. Этого не понимают многие физики. Я не нахожу особой доблести в понимании этого. У меня это потребовало десяти лет разговоров с моим другом Саймоном Коченом по нескольку часов в день, не считая суббот и воскресений, — разговоров о квантовой механике и попыток её понять. На самом деле мы не знали, о чём говорим. В то или иное время мы говорили о конкретных проблемах. Но задним числом, пожалуй, я бы сказал, что нам было предопределено прийти к теореме о свободе воли! На самом деле, разумеется, это не было предопределено. Грубо говоря, я не верю, что что-то предопределено. Предопределено то, что относится к большим неодушевлённым предметам. Это дерево не станет ходить вокруг лужайки. Здание, как я надеюсь, не собирается рухнуть. Физические законы,

Конвей всегда готов к математической игре любого рода

относящиеся к неодушевлённым предметам, имеют высокую степень предопределённости. Но что касается одушевлённых объектов, например людей, гуляющих вокруг лужайки, и собаки, которая могла бы их сопровождать, — всё это не кажется мне предопределённым. Я не могу это доказать. И никто другой не может.

Как появилась игра «Жизнь»

Что заставило Вас изобрести игру «Жизнь», и как это произошло?

Я говорил Вам о своей юношеской мечте (Jugendtraum) — неразрешимая сложность не так далеко, как можно было бы ожидать, она может оказаться совсем рядом. Была книга под названием «Automata Studies», одна из этих оранжевых принстонских книг. Она дала мне массу тем для размышлений. В частности, там упоминался клеточный автомат фон Неймана — универсальное вычислительное устройство в том смысле, что оно могло эмулировать любой другой компьютер. Это было нечто очень сложное, с двадцатью девятью состояниями и окрестностью из пяти клеток, и имелся очень длинный список правил перехода, который было практически невозможно проверить. Фон Нейман тщательно сконструировал этот автомат таким образом, чтобы обеспечить это свойство универсальности. Я подумал, что не требовалось это конструировать, поскольку нужное свойство должно было получиться почти автоматически при достаточном количестве сложности.

Одна метафора близка мне с давних пор. Я люблю представлять себе огромный заброшенный склад и в нём множество логических устройств — например вентилей, реализующих операторы И, ИЛИ, НЕ. Предположим, что там живёт маньяк, который спаял вместе большое количество этих устройств совершенно случайным образом. Тогда за достаточное время вы можете научиться программировать получившуюся большую схему, и не потребуется много интеллектуальных усилий, чтобы она стала непредсказуемой и, вероятно, даже универсальной. Эта идея лежит также в основе моей недавней статьи о перестановках[2], написанной мной для специального выпуска American Mathematical Monthly, в котором Вы предложили мне участвовать.

Несколько раз случалось, что доказывалось что-то вроде утверждений об универсальности, а затем это доказательство начинали воспринимать как оценку необходимой сложности универсального устройства. Позвольте привести ряд примеров. Гёдель, чтобы доказать свою знаменитую теорему о неполноте, ввёл то, что называется «гёделевской нумерацией» высказываний, а затем рассмотрел утверждение с гёделевским номером n при значении параметра, равном n, и так далее. В книгах обычно говорится, что гёделевский номер любого сколько-то интересного утверждения должен быть чрезвычайно большим, но я не вижу, почему он должен быть таким большим. Подобно этому часто говорят, что универсальная машина Тьюринга должна быть ужасно сложной, но я не вижу, почему должно быть так. Видите ли, универсальный клеточный автомат фон Неймана имел двадцать девять состояний и очень сложные правила перехода, а я не думаю, что это было необходимо. Поэтому я попытался найти гораздо более простой автомат, который тоже был бы универсальным.

Игра «Жизнь» была, наверно, моим первым набегом на это поле — ну, я не вполне уверен, что действительно первым. Я предположил, что она универсальна.

И как Вы её создали?

Я проверял дюжины и дюжины различных автоматов, не обязательно на универсальность, так как её довольно трудно проверить. Я пытался построить правила, которые дают непредсказуемое поведение, но допускают достаточно долгое изучение, чтобы научиться их программировать. Если на склад, о котором я упоминал, вас пустили лишь на один день, вы

[2] См. настоящий выпуск, с. 122–132. — *Прим. перев.*

не научитесь программировать [полученную большую схему]. В случае игры «Жизнь» я изучал этот вопрос с небольшой группой аспирантов. Мы рассматривали различные наборы правил, играли по ним на доске для Го, как я думаю, месяцев восемнадцать — не постоянно, но то и дело во время кофе-брейков. В итоге мы нашли эту замечательную систему, которая оказалась универсальной. День, когда мы поняли, что сегодня достигнем успеха, я помню очень хорошо. Ричард Гай оставался в Кембридже, что он делал не часто. Ему была поручено наблюдать за мигалками, он человек очень аккуратный. Мигалки — это прямолинейные полоски из трёх клеток, которые чередуются с периодом 2.

Я хорошо знаю игру «Жизнь»: когда я учился в средней школе, это была горячая тема среди всех интересовавшихся там математикой, и это была первая компьютерная программа, написанная мной — в бинарных машинных кодах на моём первом компьютере.

Мы делали всё вручную на досках для Го — с мигалками и другими небольшими объектами — их не требуется обновлять в каждом поколении. Нужно лишь следить, чётное или нечётное поколение. Лишь когда вся игра сосредотачивается вокруг них, нужно заботиться о их обновлении. Следить за этими небольшими объектами — работа наблюдателя (blinker-watcher). В некоторый момент он сказал: «Идите сюда! Мой бит двигается!» И так и было. Произошло открытие планера. В книге «Winning Ways» («Способы выигрыша») есть маленький кусочек о планерах, и там говорится: «Один парень сказал „мой бит двигается“». Этот «парень» (guy) был Ричард Гай (Guy). Пробуя всевозможные правила, мы уже думали о чём-то вроде «космических кораблей». А тут в первый раз космический корабль действительно появился: пять клеток в каждый данный момент, и они появлялись естественно. Конечно, мы это обсуждали, так как надеялись, что наш клеточный автомат окажется универсальным и мы получим компьютер, в котором провода и электрические импульсы заменены путями, по которым реально двигаются планеры (или нечто вроде). Открыв их, мы занялись их уничтожением; существует около сорока способов их уничтожения. В итоге всё это привело к доказательству универсальности.

Я предложил премию любому, кто придёт с конфигурацией из «Жизни», в которой население растёт неограниченно. Эта цель была преднамеренно сформулирована довольно широко. Я хотел того, что в итоге и получилось — нечто, регулярно испускающее планеры, — но я считал интересным всё, что покажет, что типичная конфигурация не умрёт и не застынет. В дальнейшем была найдена «3/4-жизнь». Не помню подробности. В этом случае население достаточно велико. Никто никогда

Джон Конвей окружён студентами всегда и где угодно — здесь, например, он на экскурсии в летней школе

не доказал, что эта игра универсальна. Более или менее любая система, которую вы не можете понять, с большой вероятностью универсальна, но если вы не можете её понять, то как вы можете что-то о ней доказать?

В отношении игры «Жизнь» задача состояла в том, чтобы что-то о ней понять, а затем изучать её достаточно долго, чтобы выявить компоненты, в итоге обеспечивающие универсальность. Интересно, что с тех пор никто больше не нашёл простых примеров универсальности. Это не означает, что их нет; думаю, что они повсюду! Но это означает, что никто не потратил примерно год (кофе-брейков), нужный для отыскания такого примера.

Вы сейчас упомянули, что предложили денежную премию. Из предложенных Вами премий пришлось ли заплатить большинство, и случалось ли удивляться, что приходится платить, когда Вы этого не ждали?

Я всё-таки не часто предлагал денежную премию…

…*Вы её предложили даже мне, когда мы впервые встретились, почти двадцать пять лет назад, а затем сыграли со мной маленькую шутку* [*оба смеются*].

Был такой известный случай, довольно глупый с моей стороны. У меня была задачка: стремится ли некоторая последовательность к бесконечности. Я читал лекцию в Лаборатории Белла — на самом деле довольно большую лекцию. Там я предложил два варианта задачи, лёгкий и трудный. За лёгкий я предложил 100 долларов и сказал, что за трудный я бы предложил в десять раз больше, следовательно, 10 000 долларов…

…и это Вы, мастер вычислений в уме!

Возможно, я даже повторил потом эту неправильную сумму, 10 000 долларов. В Лаборатории Белла был сотрудник, Колин Мэллоуз, который решил трудный вариант. Я был совершенно счастлив и выписал ему чек на 1000 долларов. Нил Слоун сказал, что нужно 10 000 долларов, а я ему не поверил, но это число было в аудиозаписи. Не уверен, что я когда-либо слушал запись снова, наверно должен был, и я выписал чек на 10 000 долларов. Я поговорил с женой, и мы решили не покупать новый автомобиль, который планировали купить; она вполне нормально к этому отнеслась. Мэллоуз получил чек на 10 000 долларов, но сказал, что не собирается его принимать. Я сказал: «Вы не должны переживать насчёт этого» и стал его уговаривать, но без больших усилий [смеётся]. Тогда он принял чек на 1000 долларов. Думаю, что чек на 10 000 долларов он повесил в рамку в своём офисе, но не пытался обратить его в деньги.

Это прекрасная и знаменитая история, так что она даже попала в «Нью-Йорк таймс»!

На самом деле оказалось, что он ошибся. Первый вопрос был — сходится ли некоторая последовательность к 1/2, а второй — когда в последний раз она отклоняется от предела больше чем на 1/20. Много позже выяснилось, что его ответ был в действительности ошибочен. Его идеи были в принципе правильны, но он просмотрел одну глупость, а я её не отловил, так что в итоге хватало ошибок со всех сторон. Кстати, эту последовательность не я придумал: её предложил А. К. Дьюдени, автор книги «Flatland revival» («Возрождение плоского мира»). Последовательность начинается с $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, а дальше

$$f(n) = f(n - f(n-1)) + f(n - f(n-2)).$$

Хорошее или плохое влияние?

Теперь я хотел бы спросить Вас о другом. Некоторые Ваши достижения имели огромное влияние на людей, особенно на молодёжь, и многие из них рассматривают Вас как образец для подражания или как героя. Что Вы чувствуете по этому поводу?

Позвольте мне сказать, что я, может быть, и имел большое влияние на многих, но очень часто это влияние было плохим.

Почему так?

Я чувствую большую вину; я имею в виду одного конкретного человека. Он не получил степень доктора философии, поскольку слишком заинтересовался теми играми, которым я его учил. Подозреваю, что много раз случалось такое. Не обязательно это настолько вредило карьере, как, опасаюсь, было в данном случае, но людям становилось труднее сосредоточиться на работе, которую нужно делать, так как я рассказываю более интересные вещи. Так что я сильно озабочен своим влиянием на людей.

Позвольте мне снова задать вопрос, который я задал в самом начале. Почему Вы потратили время, чтобы приехать на летнюю школу и разговаривать с молодёжью день и ночь?

Во-первых, что касается возможности причинить вред тем способом, о котором я только что сказал: я не могу сильно навредить за одну неделю или около того. Гиппократ, отец медицины, сказал: «Прежде всего не навреди». Так что когда я приезжаю на летнюю школу вроде этой, я твёрдо уверен, что не причиняю вред.

Я удивлён, что у Вас такие заботы.

Я мог делать и добро. Вспоминается следующее. Я написал книгу «On Numbers and Games» («О числах и играх»). Как раз перед этим я прочёл «The Pilgrim's Progress» («Путешествие пилигрима») Джона Баньяна. В начале его книги — небольшое стихотворение. По его словам, он показывал это стихотворение разным людям, и одни говорили: «Джон, напечатай его»; другие говорили: «Не надо». Одни говорили: «Это может принести пользу»; другие отвечали: «Нет». Эти стихи так замечательно подходили к моей книге, что я процитировал их в конце предисловия к ней.

Случайно я оказался заключён в ту же тюрьму, что и Джон Баньян примерно на триста лет раньше. Студентом я участвовал в демонстрации за запрет [атомной] бомбы. Судья задал каждому несколько вопросов и отправил нас в тюрьму. Не думаю, что это было в точности то здание, в котором оказался Баньян, но это было красивое старинное здание. Так что у меня к Баньяну товарищеское чувство. Разумеется, его книга называется «Путешествие пилигрима», и его пилигрима зовут Кристиан, а я не религиозен, определённо не столь религиозен, как Джон Баньян. Поэтому в некотором смысле его книга чужда мне, за тем исключением, что мне знакома «трясина уныния» — выражение, которое он применяет, чтобы обозначить депрессию.

Сколько времени это длилось?

Я был в глубокой депрессии в 1993 году. Я попытался покончить с собой. И это почти удалось. Это была чисто личная проблема — мой брак распался.

Я спрашивал о тюремном сроке.

Это было, думаю, одиннадцать дней. Такое число я помню. Мои воспоминания ненадёжны, как я теперь всё больше убеждаюсь. У меня теперь есть биограф Шевон Робертс. Она написала биографию Коксетера, известного геометра. Шевон спросила, можно ли ей составить мою биографию, на что я сначала ответил «нет», но она настаивала, и в итоге я сказал «да». Время от времени я говорю ей о чём-нибудь, что я делал, а Шевон отвечает: «Это не согласуется с Вашим письмом Мартину Гарднеру от 27 июля тысяча девятьсот шестьдесят такого-то года». Это показывает, какова её память. И моя роль, как я её вспоминаю, всегда заметно лучше, чем находит Шевон на основании фактов.

Вы несколько раз упомянули Мартина Гарднера. Он посвятил Вам книгу.

Да, я забыл, какую книгу; может быть, «Mathematical Carnival» («Математический карнавал»). Когда Элвин Берлекэмп, Ричард Гай и я написали книгу «Winning Ways» («Способы выигрыша»), мы посвятили её Мартину. Не помню посвящение.

«Мартину Гарднеру, который принёс больше математики большему количеству людей, чем кто-либо ещё».

Да, там было «большему количеству миллионов, чем кто-либо ещё». Мы вставили слово «миллионов», так как Ланселот Хогбен написал книгу, названную «Mathematics for the Millions» («Математика для миллионов»). Я считаю, что это посвящение правдиво, и замечательно, что Мартин Гарднер это сделал, поскольку он понимал в математике не слишком много. Несомненно, он не занимался математическими исследованиями. Пожалуй, несправедливо говорить, что он понимал немного. Я перечитывал его книгу математических очерков. Он был одним из самых знающих людей любого времени, и это сияет из его книги. Но на его беду он до сих пор известен в основном по его колонке «Математические игры» в журнале «Scientific American», которую он вёл двадцать лет или больше. Это дело менее серьёзное. Он занялся колонкой игр случайно, написав статью о гексафлексагонах — это остроумные бумажные игрушки, придуманные кем-то ещё. Это ещё не была его колонка; это была статья в журнале. Гарднер умер в прошлом году[3)], через несколько месяцев после своего 95-летия.

[3)] В 2010 г. — *Прим. перев.*

Прощание в аэропорту после другой дружеской встречи:
Дирк Шляйхер (слева) и Джон Конвей

Мы очень рады, что здесь один из молодых участников школы, Йорис. У него вопрос к профессору Конвею.

Йорис: *Профессор Конвей, что Вы сделали, чтобы прийти туда, где Вы теперь находитесь в своей карьере*?

[Смеётся] Я состарился. Ответить довольно трудно. Я горжусь тем, что в некотором смысле никогда в своей жизни не претендовал на академическую позицию. Как это было: получив свою докторскую степень, я спускался по Кингз-парад, главной улице Кембриджа. Глава отделения математики сказал: «Конвей, что Вы сделали, чтобы получить работу?» И я ответил: «Ничего». «Я понимал, что такой ответ возможен», — сказал он. — «Ну, в нашем отделении есть должность. Полагаю, что Вы должны её попросить». А я сказал: «Как это сделать?» А он сказал: «Напишите мне письмо». А я спросил: «Что должно быть в этом письме?» Тогда он потерял терпение, вытащил из кармана письмо — написанное на одной стороне листа — перевернул лист и нацарапал: «Уважаемый профессор Касселс», — это было его имя — «Я прошу то-то и то-то». Он вручил его мне, и я его подписал. Получить работу было бы неплохо. В тот год это не произошло, но я получил ту же позицию в следующем году по тому же письму.

Жонглируйте шестью мячами

Как я всего этого достиг? Не знаю. Я был удивительно удачлив. В точности помню, как мой преподаватель студенческих времён сказал моей тогдашней жене, что Джон не будет успешен. Она спросила, почему. И он сказал: «Ну, он не занимается той математикой, которая нужна для успеха». И это была правда. Я действительно не занимался никакой математикой. Что бы я ни делал, я это делал довольно хорошо и людям это было интересно — вот и всё. При этом у меня был рецепт успеха: всегда жонглировать шестью мячами. Теперь я перенёс инсульт, так что не могу ловить эти мячи слишком хорошо. Но я имею в виду вот что: всегда думайте о шести вещах сразу. Не обязательно совсем одновременно, но вот у вас есть задача, вы не продвигаетесь в ней — и у вас есть другая задача, на которую вы переключаетесь. У меня получалась смесь разных задач: одна из них могла быть из кроссворда или вроде того. В наши дни она могла бы быть из Судоку. Одна из задач может быть такова, что её решение немедленно сделало бы меня знаменитым, а я не рассчитываю её решить, но и не сдаюсь — имеет смысл попытаться. Также должна быть одна задача, где вы определённо можете продвинуться просто за счёт интенсивной работы. И когда нарастает чувство вины — а я в Кембридже чувствовал угрызения совести, когда не делал никакой работы, — вы можете продвинуться в этой задаче. В стандартной задаче, не совсем бессмысленной и, возможно, полезной. Вот мой рецепт успеха. Не думаю, что Вы спросили меня о рецепте успеха. Но — может быть.

Йорис: *Слегка.*

Кстати, это будет стоить Вам четверть доллара [смеётся].

Любовь к математике

Какое послание Вы бы отправили участникам этой летней школы или нашим будущим участникам?

Вот главное в послании: радуйтесь жизни! Конечно, тут требуется дополнение: радоваться жизни — не значит дурачиться и бездельничать. Но если дошло до того, что вам нужно что-то изучить и понять ужасно глубоко, а это перестало доставлять удовольствие — что ж, займитесь чем-то другим, отоспитесь и надейтесь, что избавились от этого, а затем вернитесь снова. Таков мой рецепт для всего, чего угодно. Всю жизнь мне доставляло удовольствие заниматься математикой. В моей жизни были взлёты и падения, но на самом деле они никогда не были связаны с математикой. Математика всегда была для меня успокаивающим средством. Если жизнь прижимает меня, я могу думать о математике и на мгновение оставить в стороне свои личные проблемы. Сейчас это трудно. Хожу с тростью, просыпаюсь и чувствую боль в ноге, и каждый день сознаю, что мне за семьдесят. Я привык думать, что мне двадцать пять — и оставался двадцатипятилетним примерно сорок пять лет. Больше я не чувствую себя двадцатипятилетним, как привык. Это весьма печально. Возраст действительно поймал меня.

Всё же я должен сказать, что Ваша улыбка, вдохновение, математическая глубина и впечатление, которое Вы производите на меня — совершенно те же, как двадцать пять лет назад, когда мы встретились в Принстоне. Это вызывает у меня радость — и я уверен, что у всех студентов тоже.

Вы не утешили меня. Я всё же чувствую себя старым. Я не чувствую той творческой силы, как десятилетия назад. Я не совсем мёртв; я доказал теорему о свободе воли. Это было уже пять или шесть лет назад, и это значительный объём творческой работы. И я горжусь этой теоремой. Но такие идеи не приходят так быстро, как раньше.

Такие достижения случаются не каждый день, но что здесь случается каждый день — и, может быть, это станет хорошим завершением нашего интервью: студентам нравится, насколько Вы доступны. Они всегда вокруг Вас. Мы очень хотели бы поблагодарить Вас за то, что Вы приехали сюда в Бремен, на эту Международную летнюю школу.

Хотел бы поблагодарить вас за то, что вы пригласили меня — и теребили, пока я действительно не приехал! Я люблю студентов, люблю разговаривать с ними, играть с ними в различные игры, отвечать на вопросы о математике, когда могу ответить. И это действительно моя жизнь: я стремлюсь находить молодых людей, которых можно учить — или не обязательно учить, но играть с ними в разные игры и учиться у них, если нужно.

Мы очень рады, что Вы здесь. Большое спасибо.

Благодарю Вас.

Дирк Шляйхер, университет Экс-Марсель

`dierk.schleicher@univ-amu.fr`

От редакции

Публикуемая ниже статья — яркое и характерное для Конвея сочетание серьёзной математики и игры. См. на с. 53 в статье Д. Шляйхера о Конвее: «…„московская статья“… полная противоречивых ссылок на себя и тем не менее серьёзная».

Парадоксален уже список авторов, в который включена Москва — место создания статьи. Об этом говорится в примечании к статье Д. Шляйхера на с. 54: «Участие Москвы состояло в том, что… работа над этой задачей… потребовала времени на конгрессе [математиков в Москве] и в транспорте».

В подлиннике библиография статьи состоит из неё самой. Соответственно в переводе библиография состоит из него самого.

Каверзная задача*

Дж. Х. Конвей, М. С. Патерсон, Москва (СССР)

Мы опровергаем знаменитую теорему Конвея — Патерсона — Москвы [CPM], а затем доказываем эту теорему и применяем её к общеизвестной теоретико-числовой проблеме.

Постановка задачи

В комнате, показанной на рис. 1, собрались вместе N человек. Слепая женщина-арбитр делает следующее объявление (соответствующее действительности):

«Все мы здесь, как мы знаем, — люди бесконечно умные и достойные. Служитель, действуя по моим указаниям, сейчас прикрепил к вашим лбам маленькие диски с обычными обозначениями различных неотрицательных целых чисел, причём каждый из вас может видеть число на голове любого другого, но не на своей собственной. Сумма всех этих чисел равна одному из чисел, которые, как вы видите, я пишу сейчас на доске».

* *Conway J. H.*, *Paterson M. S.*, *Moscow* (*USSR*). A headache-causing problem // Amer. Math. Monthly. 2020. V. 127, № 4. P. 291–296.

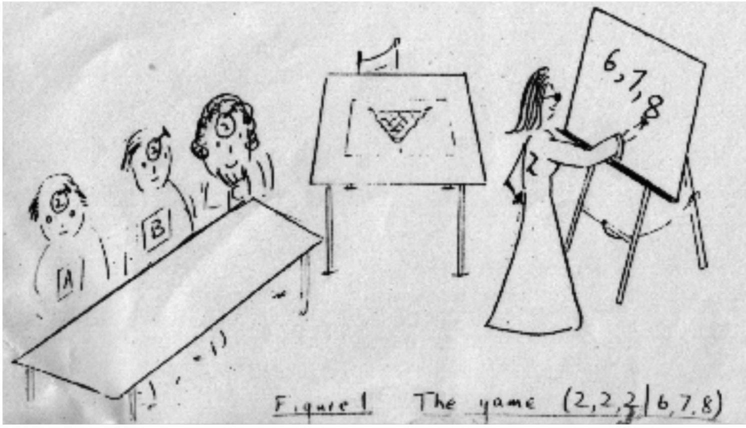


Рис. 1. Игра (2, 2, 2 | 6, 7, 8)

«Сожалею о небольшом неудобстве, которое я своими действиями, видимо, причиняю вам — к счастью, теорема из [CPM] даёт нам уверенность, что оно продлится недолго. Теперь я задам вопрос каждому из вас по очереди, и при первом ответе „Да“ все мы сможем выйти отсюда и хорошо провести остаток вечера».

Затем она спрашивает:

«Артур, можете ли вы определить лишь по этой информации, какое число написано на вашем диске?»

Если Артур ответит «Нет», она обратится к следующему человеку и спросит:

«Бертрам, можете ли вы по предыдущей информации вместе с ответом Артура определить, какое число должно быть на *вашем* диске?»

Если Бертрам в свою очередь скажет «Нет», она спросит Чарльза, Дункана и так далее. Возможно, она дойдёт до N-го человека:

«Энгельберт, сможете ли вы теперь определить ваше число на основании предыдущей информации, включая все ответы, которые вы слышали?»

Если даже Энгельберт скажет «Нет», она вернётся к Артуру и продолжит по кругу, всегда задавая один и тот же вопрос:

«Можете ли вы теперь определить ваше число лишь на основании предыдущей информации, включая все ответы, слышанные вами до сих пор?»,

пока игра не оборвётся при ответе «Да».

Формулировка теоремы

Если количество чисел, написанных на доске, меньше либо равно количеству людей N, то игра оборвётся после конечного количества вопросов.

Опровержение (начало)

Стало обычным (см., например, [CPM]) излагать опровержение этой теоремы перед её доказательством. Опровержение проводится следующим образом.

Чтобы уничтожить совершенно абсурдное утверждение теоремы, достаточно, разумеется, опровергнуть любой его частный случай. Положим $N = 3$. Пусть число на каждой голове равно 2, а числа на доске равны 6, 7 и 8. Покажем, что при этих условиях игра никогда не закончится. Будем обозначать данный случай $(2, 2, 2 \mid 6, 7, 8)$.

Полезно будет представить себе Чарльза за завтраком в то утро.

«Дорогой, вот новое приглашение от Зои. Она приятная девушка, и притом умная, но хотелось бы, чтобы она больше не заставляла нас участвовать в этих нелепых играх».

«Интересно, что будет на этот раз? Я бы предпочёл сразу проверить бесконечно много возможностей, чтобы покончить с этим как можно скорее. Если это шарады, я повторю ту, которую решал в последний раз — они *должны* допускать такое начало. Если это „Охота за тапочками“, то я…»

<…>

…«Но она может также иметь в виду игру, столь остроумно описанную в [CPM]. Тогда не исключено, что она использует частный случай $(2, 2, 2 \mid 6, 7, 8)$ — в удобных обозначениях из этой статьи. Как я должен реагировать?»

Рассуждение Чарльза

«Теперь дайте мне подумать. Я вижу две головы с числом 2, и сразу ясно, что моё число 2, 3 или 4. Давайте рассмотрим эти случаи».

«*Если моё число* 2, Артур заключит, что *его* число равно 2, 3 или 4, а поскольку каждый из этих вариантов совместим со всем, что он слышал, он должен сказать „Нет“».

«Бертрам тогда в аналогичной ситуации. Он будет думать: „Если у меня 2, то Артур, согласно рассуждению Чарльза из предыдущего абзаца, скажет ‘Нет’. Если 3, то Артур, напротив, сможет лишь заключить, что его число 1, 2 или 3, и скажет ‘Нет’“».

«Поскольку в этом случае Бертрам не сможет исключить ни одну из трёх возможностей 2, 3, 4, ему придётся сказать „Нет“. Этим исчерпан случай, когда моё число равно 2».

«*Если моё число* 3, Артур, вполне очевидно, тоже скажет „Нет“. Видимо, Бертрам в итоге узнает, кратко говоря, следующее:

„Я вижу $A = 2$, $C = 3$, так что я знаю, что $B = 1, 2$ или 3.

Если $B=1$, то A не сможет выбрать между 2, 3, 4 и потому скажет ‘Нет’.

Если $B=2$, то A не сможет выбрать между 1, 2, 3, и потому скажет ‘Нет’.

Если $B = 3$, он не сможет выбрать между 0, 1, 2,, поэтому всё равно скажет ‘Нет’. Следовательно, я сам должен сказать ‘Нет’, поскольку все три случая возможны, коль скоро A ответил ‘Нет’“».

«Бертрам и Артур оба скажут „Нет“, если моё число 3. Думаю, что аналогично можно доказать, что они оба скажут „Нет“, даже если моё число 4. Но мне не нужно проверять это — мой первый ответ должен быть „Нет“, поскольку и 2, и 3 совместимы с двумя ответами „Нет“, которые я несомненно услышу».

«Ясно, что мне не требуется рассматривать много других подобных вариантов — полагаю, мы все пойдём домой, сказав „Нет“ полдюжины раз, а я всё ещё не буду знать своё число».

Завершение опровержения

С помощью рассуждения Чарльза и различных его частей можно с абсолютной строгостью установить, что каждый из первых трёх игроков с самого начала знает, что каждый из первых трёх ответов будет «Нет». *И если все они знают, какими будут эти ответы, — какую информацию они получат, услышав эти ответы, произнесённые по правилам*? К началу второго круга они не узнают ничего не известного заранее, так что игра, очевидно, будет продолжаться вечно.

Доказательство (начало)

Можно теперь отметить, что Зоя, слепая женщина-арбитр, не осведомлена о числах на дисках, хотя разумеется знает, какие числа она написала на доске. Ради порядка она, естественно, будет перечислять все ситуации, совместимые с числами, которые она услышала к каждому данному моменту, и будет вычёркивать ситуацию из списка в точности тогда, когда поймёт, что соответствующая игра оборвётся на текущем вопросе. Разумеется, Зоя знает, когда именно это происходит, поскольку, будучи бесконечно умной, она абсолютно точно представит себя на месте игрока, к которому она обращается в любой возможной ситуации.

Под *возможной ситуацией* мы, разумеется, понимаем набор из N чисел $(a, b, c, \ldots, n)$, который может быть записан на дисках игроков $(A, B, C, \ldots, N)$ и приводит к ответу «Нет» на все вопросы до текущего. Будем называть такую ситуацию *проходной* (*ongoing*) в том случае, когда ответ на текущий вопрос тоже будет «Нет».

Мы утверждаем, что Зоя может точно выяснить, какие ситуации проходные, посредством следующего рассуждения:

«Предположим, что текущий вопрос адресован игроку B. Тогда заведомо

i) я *не могу* вычеркнуть $(a, b, c, \ldots, n)$, если есть *сопутствующая* ситуация $(a, b', c, \ldots, n)$ в которой значения $a, c, \ldots, n$ те же, но b' отличается от b. Ведь тогда B не может исключить ни одно из чисел b и b';

ii) я *могу* вычеркнуть $(a, b, c, \ldots, n)$, если такой сопутствующей ситуации нет. Ведь тогда B, видя числа $a, c, \ldots, n$, поймёт, что b — единственное возможное значение его числа».

«Таким образом, если я получаю, скажем, от B ответ „Нет“, я должна вычеркнуть из моей N-мерной таблицы те или только те ситуации $(a, b, c, \ldots, n)$, для которых не существует ситуаций $(a, b', c, \ldots, n)$, сопутствующих по B-координате».

Поскольку рассуждение Зои охватывает все случаи, с помощью её алгоритма можно точно определить, какие ситуации приведут к окончанию игры в любой данный момент.

Случай (2, 2, 2 | 6, 7, 8)

Прежде чем переходить к доказательству для общего случая, поясним исход всех игр вида $(a, b, c \mid 6, 7, 8)$ на рис. 2. На этом рисунке показана ортогональная проекция множества всех точек в пространстве (A, B, C), соответствующих суммам 6, 7 и 8. Зоя отметила здесь для каждой игры номер вопроса, утвердительный ответ на который прекращает игру.

Четыре элемента «19», выделенные на рис. 3, позволяют проверить предсказания Чарльза относительно игры $(2, 2, 2 \mid 6, 7, 8)$.

Завершение доказательства

Вернёмся теперь к общему случаю. Какие бы числа ни написать на доске — если их количество N или меньше[1)], количество начальных ситуаций заведомо конечно. Покажем, что ни одна из этих ситуаций не будет оставаться проходной всё время.

Действительно, в противном случае множество ситуаций, которые постоянно остаются проходными, непусто и обладает тем свойством, что любая его точка имеет сопутствующую по любой координатной оси. Достаточно показать, что любое такое множество точек в N-мерном про-

[1)] Как требуется в теореме.

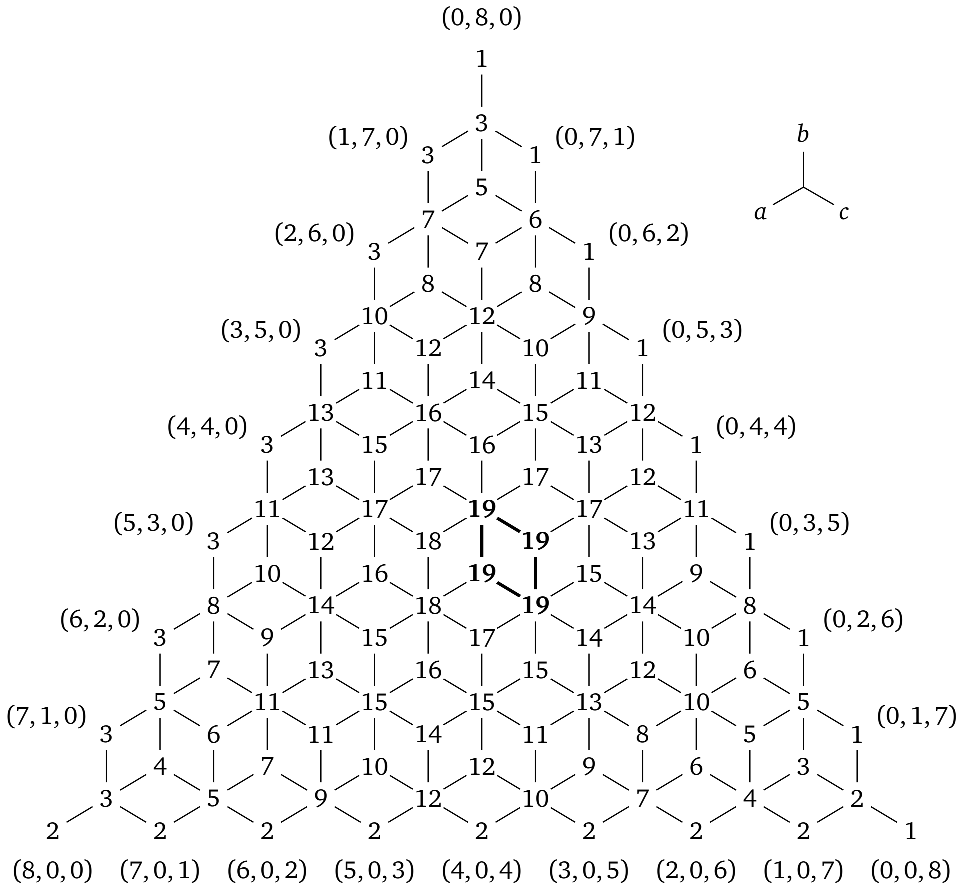


Рис. 2. Пометки Зои ко всем играм $(a, b, c \mid 6, 7, 8)$. Направления координатных осей (a, b, c) показаны наверху справа

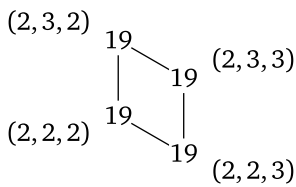


Рис. 3. В конце игры (эта область выделена в центре рис. 2)

странстве имеет не меньше $N + 1$ различных сумм, и мы это проверим по индукции[2)].

Пусть a_0 — наименьшее значение A-координаты постоянно проходных ситуаций в игре N лиц. Тогда наборы из $N - 1$ чисел $(b, c, \ldots, n)$,

[2)] Формально нужно начать с $N = 1$, но этот случай тривиален.

для которых ситуация $(a_0, b, c, \ldots, n)$ — постоянно проходная в этой игре, сами образуют постоянно проходное множество в игре $N-1$ лиц и потому имеют не менее $(N-1)+1=N$ различных сумм. Пусть

$$s_0 = a_0 + b_0 + c_0 + \ldots + n_0$$

— наибольшая из соответствующих сумм для N лиц и она возникает из постоянно проходной ситуации $(a_0, b_0, c_0, \ldots, n_0)$.

Тогда существует постоянно проходная ситуация $(a, b_0, c_0, \ldots, n_0)$ с $a \neq \neq a_0$, сопутствующая данной в A-направлении, причём $a > a_0$, поскольку a_0 минимально. Следовательно, у этой сопутствующей ситуации сумма координат больше, чем у любой упомянутой выше. Поэтому всего должно быть не меньше $N+1$ различных сумм координат.

Применение к теореме Ферма[3)]

Речь идёт о знаменитом утверждении Ферма:

$$a \geqslant 1, \quad b \geqslant 1, \quad c \geqslant 1, \quad n \geqslant 3 \quad \Rightarrow \quad a^n \neq b^n + c^n \tag{$*$}$$

при целых рациональных a, b, c, n.

Как известно, для любого утверждения P верно, что (P и не-P) $\Rightarrow$ (0=1).

Возьмём в качестве P утверждение, рассмотренное в [CPM] столь обезоруживающим образом[4)], и применим *modus ponens*. Получаем, что $0 = 1$. Прибавив теперь 1 к обеим частям равенства, видим, что $1 = 2$. Запишем это в более подробном виде: $1^3 = 1^3 + 1^3$.

Таким образом, лексикографически первый случай утверждения $(*)$ опровергнут. Авторы не могут удержаться от замечания, что это наверняка было бы замечено раньше, если бы современные методы обучения не были ориентированы на разработку грандиозных общих теорий вместо того, чтобы прививать элементарные арифметические навыки.

Благодарности

Представленная здесь работа была выполнена, когда первый и второй авторы пользовались гостеприимством третьего. Второй и третий авторы признательны первому за детальные пояснения. Первый и третий авторы с благодарностью отмечают, что без постоянной поддержки и остроумного подбадривания со стороны второго автора эта статья

---

3) См. на с. 95 о первом из авторов: «Воплощает в математике дух игры». Великая теорема Ферма доказана в 1994 г. Эндрю Джоном Уайлсом.

4) Опровергнутое и доказанное выше.

была завершена.

Список литературы

[CPM] *Конвей Дж. Х., Патерсон М. С., Москва* (*СССР*). Каверзная задача // Этот сборник. С. 88–96.

Конвей Дж. Х. — неймановский заслуженный профессор математики в Принстонском университете. Воплощает в математике дух игры. Работал во многих областях математики, особенно в теории групп, теории узлов, теории игр и геометрии. Наиболее известен как автор игры «Жизнь» и теоремы о свободе воли, но сам он наиболее гордится открытием сюрреальных чисел. Всегда рад вступить в математическую игру любого рода, в том числе Го, фатбол (его собственное изобретение) или даже «палочки».

Отделение математики, Принстонский университет, Принстон, США

Патерсон М. С. (член Лондонского королевского общества) получил степень по математике в Кембриджском университете и приобрёл известность как соавтор игры «Рассада» с Джоном Конвеем. Его пожизненная увлечённость информатикой началась в середине 60-х, когда в Кембридже появился огромный новый компьютер с памятью до 1 мегабайта. Патерсон вырос от президента Математического общества Тринити до президента Европейской ассоциации теоретической информатики и перешёл из МТИ в Уорикский университет, где работал в отделении информатики на протяжении 48 лет.

Отделение информатики, Уорикский университет, Ковентри, Великобритания

Москва — столица России, мегаполис с населением порядка 15 миллионов жителей и город с почти 900-летней историей. Это самый северный и самый холодный мегаполис на Земле[5)]. Москва — крупнейший научный центр в России, место пребывания Российской академии наук и многих её институтов. В Москве порядка 200 учреждений высшего образования, включая их флагман — Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, основанный в 1755 г.

Москва, Россия (*б. СССР*)

[5)] Оценки первых двух авторов.

Комментарий редакции American Mathematical Monthly

Эта статья была первоначально включена в сборник, изданный по случаю докторской защиты Хендрика Ленстры в Амстердаме 18 мая 1977 г. Книга, опубликованная на частные средства, была озаглавлена «Een Pak met een Korte Broek (костюмчик с короткими штанишками): статьи, презентованные Х. В. Ленстре младшему по случаю публикации его „Euclidische Getallenlichamen“ („Евклидовых числовых полей“)». Её редактировали П. ван Эмде Боас, Й. К. Ленстра, Ф. Оорт, Х. Г. Ринной Кан и Т. Й. Вансбек, которые одобрили публикацию этой статьи в American Mathematical Monthly. Мы счастливы представить эту статью вам. Как заявил П. ван Эмде Боас, она оказала большое влияние на становление эпистемической логики в Амстердаме. Текст публикуется без изменений. Редакция American Mathematical Monthly хотела бы выразить свою благодарность Дирку Шляйхеру за все усилия, приложенные им для публикации этой статьи.

Игры разнообразные, яркие и красивые*

Дж. Х. Конвей

Наша тема — теория сложения «партизанских игр». Это означает, что, хотя эта статья написана после [3], она должна бы предшествовать [3] и с точки зрения логики, и в смысле «благозвучия», поскольку числовая система из [3] на самом деле основана на более общей системе, описанной здесь. Благодарю Дональда Кнута за предложение написать обзорную статью с таким заглавием.

В этой статье не найдётся ни одного доказательства. Надеемся, что большинство читателей окажутся достаточно заинтересованными, чтобы самостоятельно доказать самые элементарные факты, и достаточно богатыми, чтобы купить хотя бы одну из книг [1] и [4], если увязнут в более трудных результатах. Все описанные здесь игры рассматриваются более полно в [1] или [4], и во многих случаях описание взято почти дословно из этих книг.

Чтобы увидеть, как возникает сложение игр, рассмотрим два примера.

«Доминирование» (предложено Гораном Андерсоном). Игра происходит на клетчатой доске, со множеством доминошек, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Игрок, который называется Левым, при своём ходе кладёт доминошку в вертикальном направлении, покрыв две свободные клетки. Игрок, который называется Правым, при каждом своём ходе кладёт доминошку горизонтально, также покрывая ровно две пустые до этого клетки. Если игрок при очередном ходе не может положить доминошку в нужном направлении, то он проигрывает.

«Жабы и лягушки» (предложено Ричардом Гаем, см. рис. 2). Игрок Левый натренировал несколько жаб (*Буфо буфо*), а Правый — несколько лягушек (*Рана рана*) для следующей игры. Когда ходит Левый, он должен *либо* заставить одну из своих жаб сдвинуться ровно на одну клетку вправо,

* *Conway J. H.* All Games Bright and Beautiful // Amer. Math. Monthly. 1977. V. 84, № 6. P. 417–434. © 1977 Mathematical Association of America.

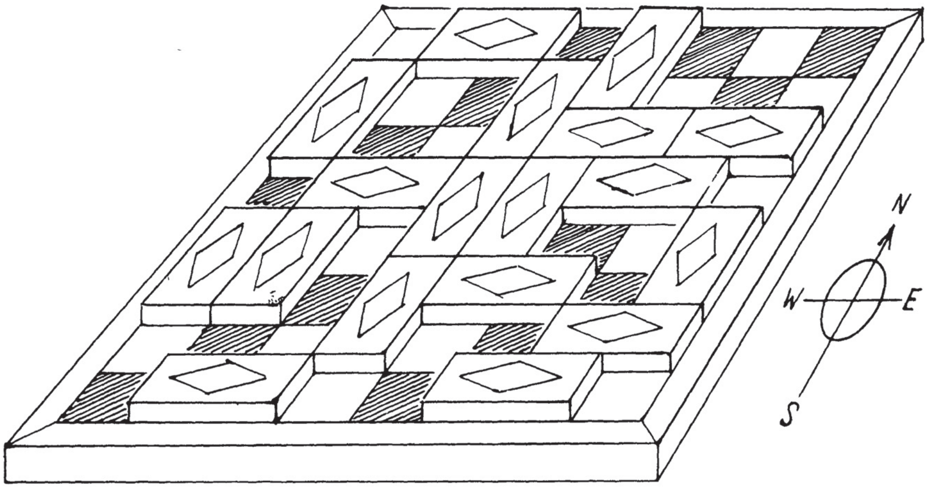


Рис. 1. Игра «Доминирование»

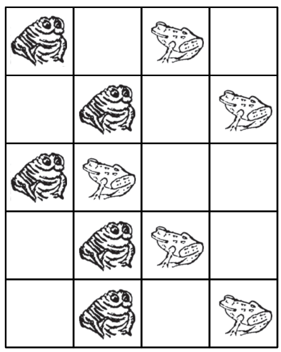


Рис. 2. Игра «Жабы и лягушки»

если эта клетка пуста, *либо* уговорить одну из жаб перепрыгнуть вправо через соседнюю лягушку и приземлиться сразу за ней, причём эта клетка должна быть пуста. Правый двигает своих лягушек аналогичным образом, но влево. Если игрок, чья очередь ходить, не может передвинуть никого из соответствующих существ описанным образом, то он проигрывает.

Партизанские игры вообще. Теперь с помощью этих примеров поясним нашу терминологию. Обе игры проводятся в соответствии с *соглашением о нормальных играх*, означающим, что игрок проигрывает *в точности тогда, когда* он не может сделать очередной ход. И обе игры удовлетворяют *условию остановки*: невозможна бесконечная последовательность ходов по правилам — независимо от того, ходят игроки по очереди или нет. С этого момента мы подразумеваем, что оба условия выполнены для каждой рассматриваемой игры. Отметим, что соглашение о нормальных играх снимает вопрос, кто победил в каждом конкретном случае, — это просто игрок, сделавший последний ход. И, разумеется, условие остановки гарантирует, что последний ход обязательно будет сделан. Вскоре станет ясно, почему условие остановки не ограничено лишь последовательностями чередующихся ходов. Мы не накладываем добавляемое часто предположение, что каждому игроку доступны одни и те же ходы. Поэтому назовём наши игры *партизанскими*[1] (и намеренно используем менее распространённое написание этого слова[2]).

Суммы партизанских игр. В двух наших примерах наиболее интересно то, каким образом типичные позиции этих игр распадаются в сумму гораздо более простых позиций. Так, в игре «Доминирование» пространство, доступное из позиции на рис. 1, состоит из нескольких отдельных областей, форма которых показана на рис. 3.

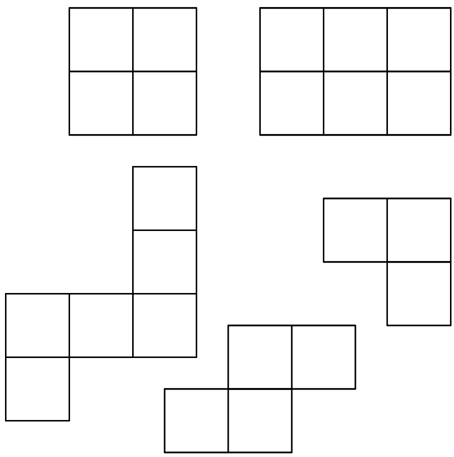


Рис. 3. Области, доступные в игре «Доминирование» из позиции, показанной на рис. 1

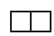
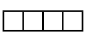
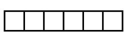
Когда игрок должен ходить, ему требуется выбрать одну из этих областей и сделать ход по правилам в эту область. Ходы в одну область независимы от ходов в другую. Аналогично в игре «Жабы и лягушки»игрок должен выбрать одну из горизонтальных полос, на которые разделена доска, и сделать в этой полосе ход по правилам. Ходы в одной полосе независимы от ходов в другой.

[1] Имеется в виду, что игроки могут находиться в неодинаковых условиях..

[2] Partizan вместо partisan.

Более общо, можно играть в сумму конечного набора (*независимых*) партизанских игр, которые называются *компонентами* суммы. Каждый игрок, когда его очередь ходить, должен выбрать одну из компонент и сделать в этой компоненте ход по правилам. Если окажется, что нет компоненты, где он мог бы сделать ход по правилам, то он, разумеется, проигрывает в силу соглашения о нормальных играх. Разумеется, ходы в сумме игр, затрагивающие данную компоненту, не обязательно делаются двумя игроками по очереди. Однако сильное условие остановки, принятое нами, всё равно обеспечивает, что сумма игр обязательно закончится. На самом деле условие остановки для компонент заведомо обеспечивает условие остановки для их суммы, которая поэтому также является партизанской игрой.

Оценка позиций. Оказывается, позициям в партизанской игре можно сопоставить *значения* (*оценки*) таким образом, что значение, отвечающее сумме игр, равно сумме значений, отвечающих компонентам. Во многих случаях эти значения — обычные числа и их сложение происходит по правилам, знакомым нам со школы, но во многих других случаях это не так. Теория партизанских игр имеет дело с правилами сложения и сравнения многих других причудливых и удивительных значений, которые в них появляются.

Целые значения. Позиции , ,  в игре «Доминирование» легко оценить, поскольку Правый, который ставит доминошки горизонтально, не может сделать ход, а Левый сможет сделать не более 1, 2, 3 ходов, начиная с соответствующей позиции. Поскольку мы всегда будем присваивать значения с точки зрения Левого, мы дадим этим трём позициям значения 1, 2 и 3 именно в таком порядке, а соответствующие позиции , ,  получат значения −1,−2, −3, поскольку в них имеются возможные ходы для Правого. Позиция, в которой ни один из игроков не может сделать ход по правилам, например позиция  в «Доминировании», имеет значение 0.

Предположим, что для некоторого $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ у Левого есть ход в позицию со значением n, но никакого другого хода, а у Правого нет допустимых ходов вообще. Тогда, разумеется, значение этой позиции равно $n+1$. Запишем это в виде формулы:

$$\{n \mid \ \} = n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

где слева показаны значения позиций, куда есть ход у Левого, а справа — соответствующие значения для Правого. Не имеет значения, если мы дадим Левому дополнительные ходы в позиции с целыми значениями, меньшими чем $n+1$; например,

$$\{0, 5, 3, 5 \mid \ \} = 6.$$

Также несущественно, если Правый получит ходы в некоторые позиции с целыми значениями, если они больше $n+1$, например

$$\{1, 4, 7 \mid 13, 20\} = 8.$$

Поменяв ролями Левого и Правого в этом равенстве, получим также

$$\{-13, -20 \mid -1, -4, -7\} = -8.$$

Простейшая формула такого рода, разумеется, — равенство

$$\{\ \mid \ \} = 0,$$

выражающее тот факт, что позиции, в которых нет хода у обоих игроков, имеют значение 0. Но здесь тоже можно добавить некоторые возможности без изменения значения — а именно ходы для Левого в позиции с отрицательными значениями или для Правого — в позиции с положительными значениями. Так, например,

$$\{-1 \mid 3, 5\} = 0.$$

Можно просуммировать эти утверждения следующим образом:

Если значение позиции — число, то оно является *простейшим* числом, которое больше любого варианта, доступного Левому, и меньше любого варианта, доступного Правому.

Назовём это *правилом простоты*. Число 0 — простейшее из всех, затем идут 1 и −1, потом 2 и −2, и т. д.

Многие позиции в партизанских играх имеют целые значения, а некоторые игры полностью состоят из таких позиций, например:

В «**Разрезание торта**» играют двое детей, используя несколько прямоугольных кусков торта. Они уже размечены мамой по горизонтальным и вертикальным линиям так, что их можно разломить на квадратики (рис. 4). Делая ход, Левша разламывает один из кусков вдоль вертикальной линии, а его сестра Рита — вдоль горизонтальной. Значения показаны в таблице 1.

Предоставляем читателю проверить, что игра, обозначенная в таблице разделительными линиями, продолжается до бесконечности. Значения вычисляются только на основании правил, сформулированных

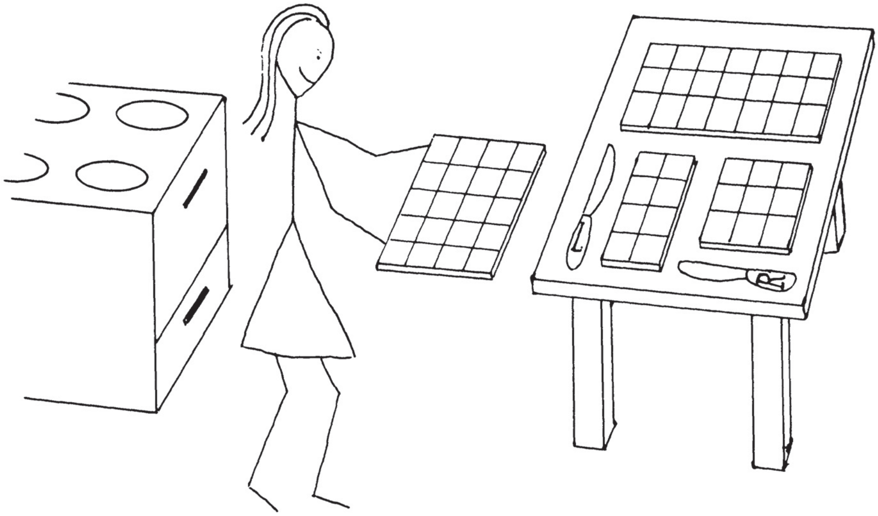


Рис. 4. Перед игрой «Разрезание торта»

Таблица 1

Значения позиций в игре «Разрезание торта»

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	−1	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
3	−2	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4	−3	−1	−1	0	0	0	0	1	1	1	1	2
5	−4	−1	−1	0	0	0	0	1	1	1	1	2
6	−5	−2	−2	0	0	0	0	1	1	1	1	2
7	−6	−2	−2	0	0	0	0	1	1	1	1	2
8	−7	−3	−3	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0
9	−8	−3	−3	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0
10	−9	−4	−4	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0

выше, — например, для прямоугольника 5 × 10 имеются варианты, показанные здесь:

$$\{5\times1+5\times9,\ 5\times2+5\times8,\ 5\times3+5\times7,\ \ldots \mid 1\times10+4\times10,\ 2\times10+3\times10\}.$$

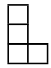
Поэтому его значение равно

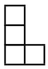
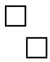
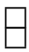
$$\{-4+1, -1+1, -1+0, 0+0, 0+0 \mid 4+1, 4+4\},$$

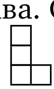
или

$$\{-3, 0, -1, 0, 0 \mid 5, 8\} = 1$$

по правилу простоты.

Дробные значения. Когда мы хотим оценить позицию  в «Доминировании», мы получаем символическое равенство

 $= \{$ ,  $\mid$  $\} = \{-1, 0 \mid 1\}.$

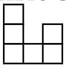
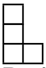
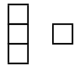
К сожалению, не существует *целого* числа строго между −1 и 0 слева и 1 справа. Однако есть *дроби*, и простейшая из них 1/2. Оказывается, позицию  надо, в подходящем смысле, действительно оценить в полхода для Левого, а добавление двух таких областей к позиции даёт Левому ровно такую же выгоду, как добавление .

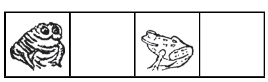
Другие позиции в конечных играх могут иметь значения, которые выражаются через четверти или восьмые части хода и т. д. Для таких значений по-прежнему выполнено правило простоты, если добавить условия, что все целые числа проще, чем дроби со знаменателем 2, а эти дроби проще, чем дроби со знаменателем 4, те в свою очередь проще, чем дроби со знаменателем 8, и т. д. Например,

$$\left\{1 \mid 1\tfrac{3}{8}\right\} = 1\tfrac{1}{4},$$

поскольку не существует целого или полуцелого между 1 и $1\frac{3}{8}$, но между ними находится $1\frac{1}{4}$. Вот другие примеры:

$$\left\{-1 \mid 21\tfrac{1}{2}\right\} = 0, \quad \left\{0 \mid 3\tfrac{1}{4}\right\} = 1, \quad \left\{\tfrac{1}{4} \mid 2\right\} = 1, \quad \left\{\tfrac{1}{4} \mid 1\right\} = \tfrac{1}{2}.$$

Дробные значения возникают во многих играх. В «Доминировании» позиция  имеет значение $\frac{3}{4}$, поскольку для Левого лучший вариант  (значение $\frac{1}{2}$), а для Правого  (значение 1), откуда $\left\{\frac{1}{2} \mid 1\right\} = \frac{3}{4}$. В «Жабах и лягушках» позиция



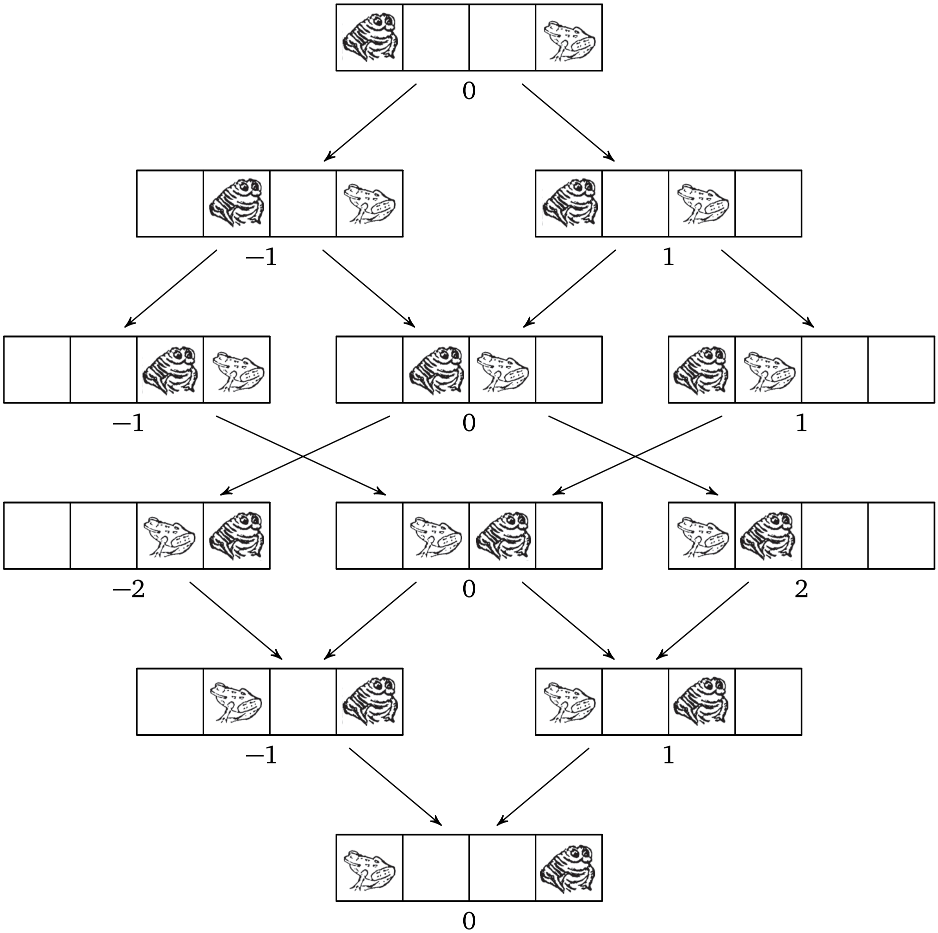
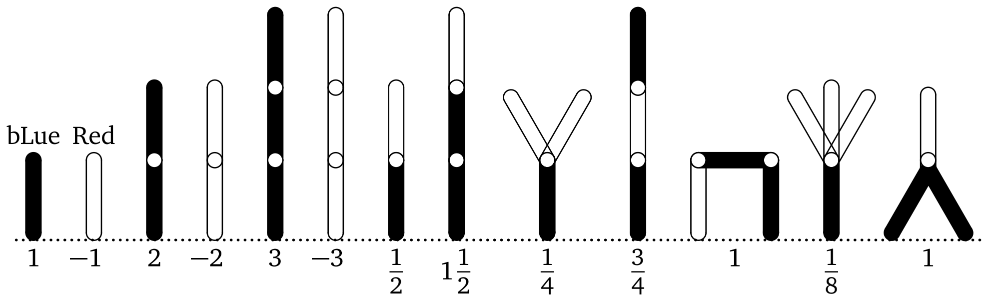


Рис. 5. Анатомия «Жаб и лягушек» на доске 4 × 4

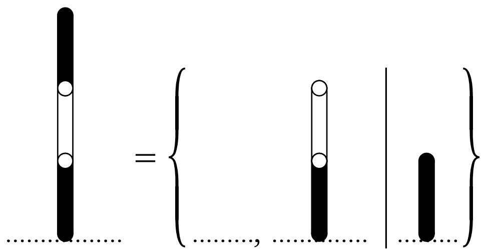
имеет, оказывается, значение $\frac{1}{2}$. Первый из этих примеров довольно затруднительно оценить, поскольку один из вариантов для Левого не имеет числового значения, но второй пример оценивается легко, и читателю было бы полезно проверить, что все значения, показанные на рис. 5, являются следствиями правила простоты.

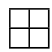
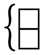
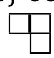
Красно-синий хакенбуш устроен так, что каждая позиция имеет числовое значение, целое или дробное. В этой игре используются *графы*, составленные из красных и синих рёбер, причём каждое ребро касается земли либо связано с землёй через цепочку других рёбер. Левый своим ходом перерезает какое-либо синее ребро, а Правый — красное, и после каждого разреза уничтожаются все рёбра, не связанные больше с землёй.

Упражнения:



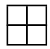
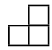
Пример:

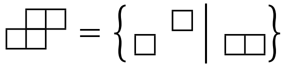

$= \left\{0, \tfrac{1}{2} \mid 1\right\} = \tfrac{3}{4}.$

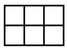
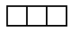
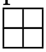
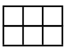
Нечёткие значения. В «Доминировании» позиция  имеет значение $\{$ $|$ $\}$ $= \{1 \mid -1\}$, которое не является числом, поскольку оценка позиций, доступных Левому, больше, чем оценка доступных Правому. Обозначим это значение ± 1, а произвольное $\{x \mid -x\}$ обозначим $\pm x$, причём при $x \geqslant 0$ это не числовое значение. Позиция  $=$ $\{$ $|$ $\}$ имеет значение ± 0, которое мы будем также обозначать $*$, и на самом деле оно появляется очень часто. Более общо, для каждой пары чисел x и y, где $x \geqslant y$, существует нечисловое значение $\{x \mid y\}$. В некотором смысле, как вскоре будет объяснено, значение $\{x \mid y\}$ *строго меньше* любого числа, большего чем x, *строго больше* любого числа, меньшего чем y, но *несравнимо* со всеми числами от x до y включительно. Существует простая стратегия для отыскания лучшего хода из любой суммы таких значений, возможно с учётом числовых значений:

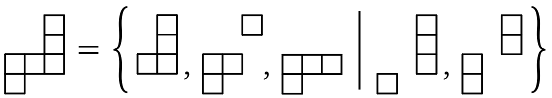
> Никогда не делайте ход в компоненте с числовым значением, если есть другой вариант. Среди различных компонент $\{x \mid y\}$, где $x \geqslant y$, выберите компоненту с наибольшим возможным значением $x - y$.

Если назвать $\frac{1}{2}(x - y)$ *температурой* значения $\{x \mid y\}$, то можно сформулировать стратегию короче: делайте ход в *самое горячее* $\{x \mid y\}$. Если у нескольких компонент одинаковая температура — несущественно, какую выбрать. Аналогичная температурная стратегия применима во многих других ситуациях, но не во всех.

Теперь можно проанализировать позицию на рис. 1. Нам уже встретились значения $\{1 \mid -1\}$ и $\{0 \mid 0\}$ позиций  и , откуда легко получаем

 $= \{0 \mid -1\}$.

С областью  чуть сложнее. У Левого есть вариант  +  $= 2$, а все варианты Правого аналогичны  $= -\frac{1}{2}$. Но у Левого есть также вариант  со значением ± 1. А поскольку $\pm 1 < 2$, он хуже предыдущего, так что  $= \left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\}$. Наконец, имеется равенство



в силу которого значение этой области равно $\left\{\frac{1}{2}, *, -\frac{1}{2} \mid 1, 2\right\}$. Поскольку $\frac{1}{2}$ больше, чем * и $-\frac{1}{2}$, а 1 меньше 2, это значение равно $\left\{\frac{1}{2} \mid 1\right\} = \frac{3}{4}$.

Так как можно пренебречь изолированными квадратами, которые не может использовать ни один из игроков, из этих вычислений получаем

$$\left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\} + \{1 \mid -1\} + \{0 \mid -1\} + \{0 \mid 0\} + \frac{3}{4}$$

для суммарного значения на рис. 1. Здесь мы упорядочили — что естественно — слагаемые $\{x \mid y\}$ по убыванию их температур $\frac{1}{2}(x - y)$. Пусть оба игрока следуют температурной стратегии. Тогда значение после четырёх первых ходов равно, если начинает Левый,

$$2 - 1 + 0 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4},$$

а если начинает Правый, то

$$-\frac{1}{2} + 1 - 1 + 0 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

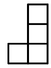
Поскольку оба значения положительны, Левый выиграет в любом случае.

Если, однако, Левый начинает и делает глупый ход в правый верхний угол, это приводит к замене $\left\{2 \mid -\frac{1}{2}\right\}$ на ± 1, и в итоге получается значение

$$\{1 \mid -1\} + \{1 \mid -1\} + \{0 \mid -1\} + \{0 \mid 0\} + \frac{3}{4}.$$

Если следующие четыре хода делаются разумно, получится значение

$$-1 + 1 - 1 + 0 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4},$$

а так как оно отрицательно, Правый выиграет. Если, наоборот, первый ход Левого был в левый нижний угол и $\frac{3}{4}$ заменилось на  $= \frac{1}{2}$, значение станет равным

$$\left\{2 \mid -\tfrac{1}{2}\right\} + \{1 \mid -1\} + \{0 \mid -1\} + \{0 \mid 0\} + \tfrac{1}{2},$$

и после четырёх разумных ходов, приводящих к значению

$$-\tfrac{1}{2} + 1 - 1 + 0 + \tfrac{1}{2} = 0,$$

можно считать игру оконченной. Поскольку последний ход сделан Левым, он выиграл, но он был на волоске от поражения, и ещё один неправильный ход мог оказаться роковым.

В общем случае при правильной игре победитель определяется по окончательному значению согласно следующему правилу:

Если значение *положительно*, *Левый* выиграет, кто бы ни начинал.
Если значение *отрицательно*, *Правый* выиграет, кто бы ни начинал.
Если значение *нулевое*, выиграет тот, кто делает *второй* ход.
Если значение *нечёткое*, выиграет тот, кто делает *первый* ход.

Нечёткие игры — это игры, которые не являются ни *положительными*, ни *отрицательными*, ни *нулевыми*, но их часто *путают* с нулевыми. Такая игра имеет вид $\{x \mid y\}$, где $x \geqslant 0 \geqslant y$.

Сравнение и сложение значений в общем случае. Пусть G^L обозначает типичный вариант хода Левого в игре G, а G^R — типичный вариант хода Правого, в символах

$$G = \{G^L \mid G^R\}.$$

Эти обозначения не подразумевают единственность или хотя бы существование хода для каждого из игроков. Так, например, в игре

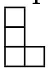
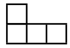
$$G = \{1, \pm 2 \mid \quad\},$$

где Левый может получить значения 1 или ± 2, а Правый не может сделать ход, G^L означает 1 или ± 2, а G^R не имеет определённого значения (что отличается от утверждения, что значение равно 0). В этих обозначениях сумма двух игр определяется формулой

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}.$$

Можно также определить игру, *противоположную* данной, по формуле

$$-G = \{-G^R \mid -G^L\},$$

выражающей тот факт, что Левый и Правый просто поменялись ролями. Таким образом,  противоположно , а в хакенбуше

 противоположно .

Эта терминология обосновывается следующими теоремами.

1. *Добавление нулевой игры* (*т. е. игры, где выигрывает второй*) *не влияет на результат при правильной игре.*
2. *Сумма любой игры с противоположной — нулевая игра.*
3. *Сумма двух положительных или двух нулевых игр — соответственно положительная или нулевая игра.*
4. *Сумма двух отрицательных или двух нулевых игр — соответственно отрицательная или нулевая игра.*
5. *Если разность* $G-H$*, т. е. сумма* $G+(-H)$*, — нулевая игра, то можно заменить* G *на* H *в любой сумме игр, не влияя на результат.*
6. *Если* $G \geqslant H$*, т. е.* $G-H \geqslant 0$*, то у Левого нет оснований возражать против замены* H *на* G*, а у Правого — против замены* G *на* H *в какой-либо сумме игр.*

С помощью этих результатов можно обосновать формальное определение значения. Если игра $G-H$ нулевая, то мы говорим, что G и H имеют одно и то же *значение*, и пишем $G=H$. В общем случае упорядоченность между играми и их значениями устанавливается условием, что отношение $\langle ? \rangle$ имеет тот же смысл в формуле $G \langle ? \rangle H$, что и в формуле $G-H \langle ? \rangle 0$. Возможны четыре случая:

$G>H$: в игре $G-H$ всегда побеждает *Левый*;
$G<H$: в игре $G-H$ всегда побеждает *Правый*;
$G=H$: в игре $G-H$ всегда побеждает *второй* игрок;
$G \parallel H$: в игре $G-H$ всегда побеждает *первый* игрок.

Различные комбинации этих отношений будут обозначаться с естественными сокращениями. Так, $G \geqslant H$ означает $G>H$ *или* $G=H$, а $G \lhd\!|$ означает $G<H$ *или* $G \parallel H$.

Используя эти условия, можно проверить наши утверждения о значениях $\{x \mid y\}$, где x и y — числа, причём $x \geqslant y$. Действительно, если z — число, $x \geqslant z \geqslant y$, то из разности $\{x \mid y\}-z$ Левый может пойти в $x-z \geqslant 0$ и выиграть, а Правый может выиграть ходом в $y-z \leqslant 0$. С другой стороны, если $z>x$, то $x|z$ — некоторое число между x и z, так что $\{x \mid y\} \leqslant \{x \mid z\} < z$.

При проверке неравенств между значениями можно использовать и другие очевидные факты — например, значение игры G не изменится или увеличится, если увеличить значение любого хода Левого или Правого, добавить новый ход Левого или удалить некоторый ход Правого.

Доминируемые и сводимые ходы. В этом разделе мы вкратце опишем метод приведения значений к простейшему виду. Две игры имеют одинаковое значение в точности тогда, когда их простейший вид совпадает. Опишем некоторые изменения вида игры, не влияющие на её значение.

Пусть $A \leqslant B$, где A и B — возможные ходы Левого в игре G. Поскольку Левый заведомо предпочтёт ход в B ходу в A, значение игры G не изменится при удалении A с сохранением B. Если же A и B — возможные ходы Правого, точно так же можно удалить B и сохранить A. В обоих случаях будем говорить, что удаляемый вариант *доминируется* сохраняемым.

Понятие *сводимого*[3)] хода — более тонкое. Пусть при возможном ходе Левого G^{L_0} в игре G имеется возможный ход для Правого $G^{L_0R_0} \leqslant G$. Тогда значение G не изменится, если удалить G^{L_0} из числа вариантов для Левого и взамен добавить к ним все возможные ходы Левого, имеющие вид $G^{L_0R_0L}$, из игры $G^{L_0R_0}$. В этом случае мы скажем, что ход G^{L_0} *сводится через* $G^{L_0R_0}$ *к* $G^{L_0R_0L}$, и назовём эту процедуру *устранением*[4)] хода G^{L_0} (рис. 6). Разумеется, мы назовём ход Правого G^{R_0} сводимым, если для Левого существует возможный ход вида $G^{R_0L_0} \geqslant G$, и тогда можно заменить G^{R_0} всеми $G^{R_0L_0R}$ как новыми ходами Правого в игре G. В общем случае возможный

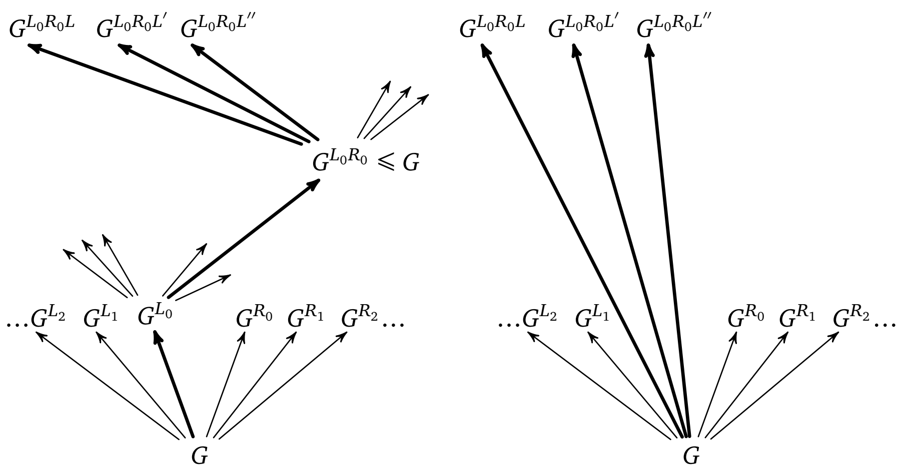


Рис. 6. Устранение хода G^{L_0}

---

3) В подлиннике reversible.

4) Bypassing.

ход сводим, если противник может затем сделать ход, который для него лучше, чем исходная игра G.

Вот простой пример. Игра $G=\{0, \pm1\,|\,2\}$ сама по себе не имеет доминируемых ходов, поскольку 0 и ±1 несравнимы. Но если Левый пойдёт в ±1, ответный ход Правого в -1 заведомо лучше для него, чем исходная игра, которая явно была положительной. Таким образом, вариант ±1 сводим через -1, и его можно заменить как вариант для Левого в игре G набором всех вариантов для Левого в игре -1, не меняя значение игры G. На самом деле -1 не имеет возможных ходов для Левого, так что $G=\{0\,|\,2\}=1$.

Если удалить все доминируемые и сводимые варианты из всех позиций некоторой игры G с конечным множеством позиций, мы в итоге получим *простейший вид игры* G. Следующий результат оправдывает это название:

Две игры G и H имеют одинаковое значение в точности тогда, когда их простейший вид совпадает.

Для бесконечных игр есть немного более слабый результат, который мы здесь не обсуждаем.

Равноправные игры и игра Ним. Игра называется *равноправной* (или *беспристрастной*), если в любой позиции обоим игрокам доступны одни и те же ходы. Теория таких игр была развита Шпрагом [10] и независимо Гранди [6] и, похоже, с тех пор несколько раз переоткрывалась. Она очень естественно включается в нашу более общую теорию.

В игре Ним (Bouton [2]) используется несколько куч, состоящих, например, из бобов. Ход каждого игрока должен уменьшать размер одной из куч путём удаления некоторых бобов. Пусть $*n$ — значение кучи размера n, так что

$$*n = \big\{ *0, *1, \ldots, *(n-1) \mid *0, *1, \ldots, *(n-1) \big\}.$$

Три простейших случая таковы:

$$*0 = 0, \quad *1 = *, \quad *2 = \{0, * \mid 0, *\}.$$

Тогда теория Шпрага — Гранди состоит из следующих утверждений.

(i) Любая равноправная игра с конечным множеством позиций имеет одно из значений $*0, *1, *2, \ldots$

(ii) $\{*a, *b, *c, \ldots \mid *a, *b, *c, \ldots\} = *m$, где m — наименьшее целое неотрицательное число, которое *не* присутствует среди $a, b, c, \ldots$ (*мекс*[5] чисел $a, b, c, \ldots$).

[5] Англ. mex (от minimum excluded) означает наименьший элемент вполне упорядоченного множества, не принадлежащий данному подмножеству.

(iii) Если все $a, b, c, \ldots$ различны, то выполнено равенство

$$*2^a + *2^b + *2^c + \ldots = *(2^a + 2^b + 2^c + \ldots).$$

(iv) $*n + *n = 0(= *0)$.

Из свойства (ii), например, следует, что

$$\{*0, *1, *4, *7 \mid *0, *1, *4, *7\} = *2.$$

Пример сложения, использующий свойства (iii) и (iv):

$$*3 + *5 = (*2 + *1) + (*4 + *1) = *2 + *4 = *6.$$

На самом деле эти результаты очень легко доказываются: как можно видеть, любое $*n$ при $n > m$ является сводимым ходом в игре

$$*m = \{*0, *1, \ldots, *(m-1) \mid *0, *1, \ldots, *(m-1)\},$$

что доказывает (ii), откуда по индукции следует (i). Получаем также, что $*x + *y$ имеет равное значение с *некоторой* кучей z из Нима, и тогда легко доказываются правила (iii) и (iv) для вычисления z. Вся теория тривиально обобщается на бесконечные равноправные игры, где появляется значение $*\alpha$ для каждого ординала α.

Игра «Кейлз». Игра Гранди. На рис. 7 показана позиция из старой английской игры в шары «Кейлз», которую изобрёл Дьюдени [5]. Игроки по очереди удаляют *одну* или *две соседние* кегли, и проигрывает тот, кто не сможет это сделать.

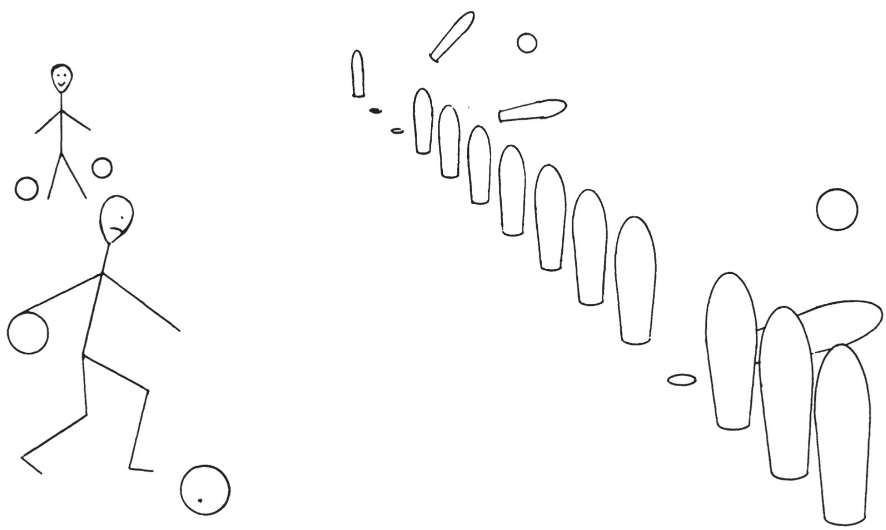


Рис. 7. Игра «Кейлз»

Ясно, что «Кейлз» — равноправная игра, и если K_n — значение линии из n кеглей, то

$$K_n = \{K_a + K_b \mid K_a + K_b\}, \quad a + b = n - 1 \text{ или } n - 2.$$

Например, опуская $K_0 = 0$, находим

$$K_5 = \{K_4, K_3 + K_1, K_2 + K_2, K_3, K_2 + K_1 \mid \text{то же}\}.$$

Считая, что для K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 уже получены значения $*0, *1, *2, *3, *1$, находим:

$$\{*1, *3 + *1, *2 + *2, *3, *2 + *1 \mid \text{то же}\} = \{*1, *2, *0, *3, *3 \mid \text{то же}\} = *4$$

по правилу (ii).

Действуя таким образом, Р. К. Гай открыл замечательный факт: последовательность значений K_n в игре «Кейлз» периодична при $n \geqslant 71$ с периодом 12. Найдено много аналогичных результатов для других игр с кучами (Guy and Smith [7]). *Игра Гранди* (разделение любой кучи на две меньшие кучи разных размеров) проанализирована Берлекэмпом в пределах 240 000 значений и всё ещё не стала периодичной. Однако в структуре значений замечен ряд закономерностей, и если они сохранятся, то можно доказать, что значения *станут* в итоге периодичными, хотя, может быть, лишь гораздо дальше[6].

Рассадка пар и семейств. На рис. 8 показано застолье, где празднуют окончание одной из глав нашей будущей книги. Левый и Правый отвечают за рассадку. Они по очереди сажают за стол каждую пару гостей по мере их прихода. Левый считает правильным сажать даму обязательно *слева* от её партнёра, а Правый предпочитает сажать её *справа*. Даму нельзя посадить рядом с джентльменом, который не является её партнёром. Тот, кто первым не сможет посадить пару согласно этим правилам, окажется перед затруднительной необходимостью объяснить ситуацию оставшимся гостям, и его можно считать *проигравшим*.

Как только один из игроков посадил пару, он фактически резервирует два соседних места для своего соперника, поскольку никто из игроков не может посадить две пары на четыре последовательных места. Так что после первого[7] хода каждая цепочка из n мест оканчивается с обеих сторон зарезервированными местами и потому имеет вид

[6] Периодичность оценок игры Гранди до сих пор не установлена и не опровергнута, несмотря на куда больший объем выполненных расчётов, см. `http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/grundy.html`.

[7] И каждого последующего.

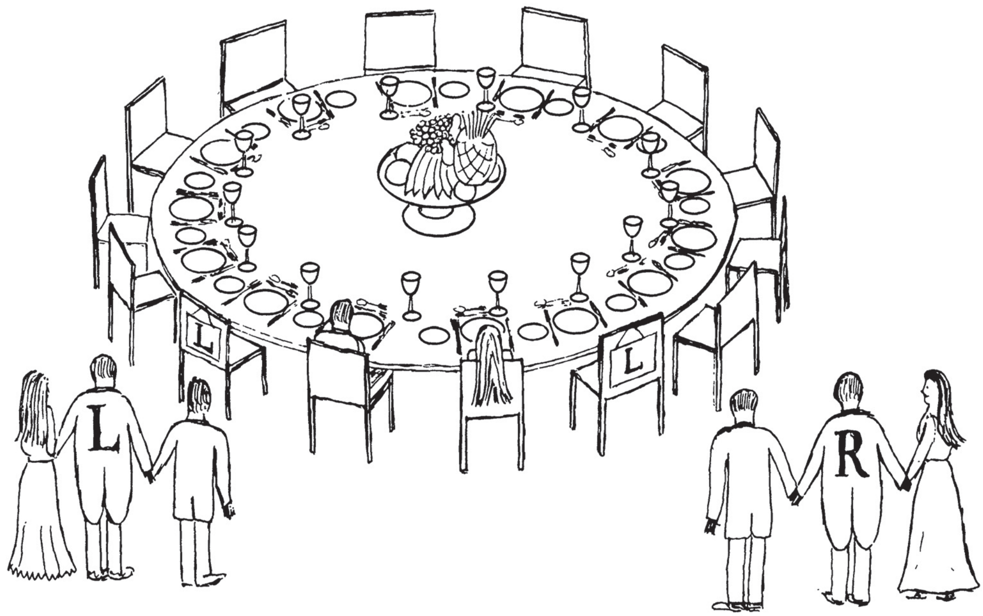


Рис. 8. Рассадка пар

LnL, если два крайних места зарезервированы для Левого;
RnR, если они зарезервированы для Правого;
LnR или RnL, если зарезервировано по одному месту для каждого игрока.

Выполнены равенства:

$$LnL(= -RnR) = \{LaR + RbL \mid LbL + LaL\},$$
$$LnR(= RnL) = \{LaR + RbR \mid LbL + LaR\},$$

где a и b пробегают все неотрицательные целые числа, для которых $a + b = n - 2$, при условии, что число x в каждом из выражений LxR и RxL строго положительно.

В анализе равноправных игр очень полезен следующий общий факт:

Если игра вида
$$\{A, B, C, \ldots \mid -A, -B, -C, \ldots\}$$
удовлетворяет условиям $A \leqslant -A$, $B \leqslant -B$, $C \leqslant -C$, ..., то она имеет значение $*m$, где m — наименьшее целое неотрицательное число, для которого $*m$ не присутствует среди значений $A, B, C, \ldots$

Легко видеть, что $RbR \leqslant LbL$, и потому из этой теоремы, в частности, следует, что каждое LnR имеет значение вида $*m$, где m — наименьшее целое, для которого $*m$ не является возможным ходом в LnR. Значения, появляющиеся в «Рассадке пар», очень просты, и в виде упражнения читатель может потрудиться над их вычислением.

Можно модифицировать игру, рассмотрев не пары, а семьи размера $n > 2$. Например, в игре «Рассадка семей из пяти человек» каждая семья состоит из матери, отца и трёх детей, которых обязательно надо посадить между их родителями. И снова Левый сажает даму слева от её семейства, а Правый — справа, и ни одна дама не должна сидеть рядом с мужем другой. Тогда значения определяются из таких же уравнений, как в игре рассадки пар, с той лишь разницей, что теперь $a+b$ равно $n-5$, а не $n-2$.

Мы отмечаем этот частный пример из-за довольно специфического поведения его значений. Можно показать, что последовательность

$$L0R, L1R, L2R, \ldots$$

для «Рассадки семей из пяти человек» состоит из повторённых трижды значений (равноправной) игры «Кейлз Доусона» (*Dawson's Kayles*), которая определяется как обычные Кейлз, но в ней единственный возможный ход — удаление двух соседних кеглей. При этом значения LnL и RnR обычно имеют вид

$$G = \{*a, *b, *c, \ldots \mid *A, *B, *C, \ldots\}.$$

Что говорит их анализ?

Оказывается, значение описанной игры очень существенно зависит от двух чисел

$$m = \operatorname{mex}(a, b, c, \ldots), \quad M = \operatorname{mex}(A, B, C, \ldots).$$

Если, скажем, $m = M = n$, то $G = *n$. Если же $m > M$, то оказывается, напротив, что значение игры G не зависит от конкретных чисел $a, b, c, \ldots$ Можно записать это в виде

$$\uparrow_{ABC\ldots} = \{*0, *1, *2, \ldots \mid *A, *B, *C, \ldots\},$$

подразумевая, что левая часть выражения в скобках содержит $*n$ для *всех* целых [неотрицательных] n. Если $m < M$, то, разумеется, G имеет значение

$$\downarrow^{abc\ldots} = \{*a, *b, *c, \ldots \mid *0, *1, *2, \ldots\},$$

противоположное значению $\uparrow_{abc\ldots}$.

В некотором смысле, обсуждаемом ниже, можно сказать, что $\uparrow_{ABC\ldots}$ имеет *атомный вес* $+1$, а $\downarrow^{ABC\ldots}$ имеет атомный вес -1, тогда как $*n$ имеет атомный вес 0. Для сумм таких игр нетрудно видеть, что если суммарный атомный вес не меньше 2, то выиграет Левый, причём он также может выиграть, когда атомный вес равен 1 и Левый начинает. Далее, выполнено важное *уравнение сдвига*:

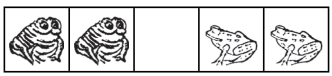
> Если значения $*A, *B, *C, \dots$ равны в каком-то порядке значениям $*a + *n$, $*b + *n$, $*c + *n$, … *для некоторого* n, то *для наименьшего из таких* n выполнено уравнение $\uparrow_{ABC\dots} = \uparrow_{abc\dots} + *n$.

Частный случай $\uparrow_1 = \{0 \mid *\}$ в простейшем виде обычно обозначается $\uparrow$ и называется «вверх», а противоположный ему обозначается $\downarrow$ и называется «вниз». Из уравнения сдвига и формул для $*a + *b$ получаем также равенства

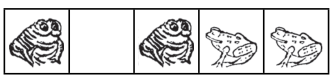
$\uparrow_0 = \uparrow + * = \{0, * \mid 0\}$ в простейшем виде;
$\uparrow_2 = \uparrow + *3 = \{0 \mid *2\}$ в простейшем виде;
$\uparrow_3 = \uparrow + *2 = \{0 \mid *3\}$ в простейшем виде, и т. д.

Значение $\uparrow$ интересно тем, что оно строго положительно и, значит, выгодно Левому, но при этом оно строго меньше любого положительного числа и даже любого бесконечно малого положительного числа. Можно назвать его *малым* в смысле [3].

Линейные комбинации из $\uparrow$ и $*$ появляются во многих играх. Например, в «Жабах и лягушках» начальная позиция



в полосе длины 5 имеет значение $*$, а возникающая из неё после одного хода позиция



имеет значение $\uparrow$. Довольно неожиданно возникает уравнение

$$\{0 \mid \uparrow\} = \uparrow + \uparrow + *,$$

которое можно назвать *тождеством стартового подъёма*[8].

Термография и теорема о среднем значении. Мы уже знаем, что произвольная игра G не обязательно имеет числовое значение. Оказывается, однако, что для неё существует наилучшее числовое приближение m в следующем смысле: для суммы большого количества экземпляров игры G результат примерно равен сумме того же количества экземпляров числа m, и это m называется *средним значением* игры G. Например, игра $G = \{\{7 \mid 5\} \mid \{4 \mid 1\}\}$ имеет среднее значение $4\frac{1}{4}$ и температуру $1\frac{3}{4}$, что поз-

[8] The upstart identity.

воляет нам сказать, что $1000G$ лежит между любым числом, строго меньшим чем $4250-1\frac{3}{4}$, и любым числом, строго превосходящим $4250+1\frac{3}{4}$.

Термограф является средством вычисления средних значений и температур. Будем отмечать числа на горизонтальной прямой, но положительные слева, а отрицательные — справа, вместо более привычного противоположного порядка. Предположим, что термографы уже вычислены для всех возможных ходов G^L и G^R в игре G, и начертим их следующим образом.

Термограф числа x — вертикальный луч, идущий вверх от точки x на горизонтальной оси. Далее, на высоте, которая соответствует некоторой *температуре* t, возьмём самую левую из правых границ для всех G^L и сдвинем её *вправо* на расстояние t (равное расстоянию от горизонтальной оси). Возьмём также самую правую из левых границ для всех G^R и сдвинем её на расстояние t *влево*. Полученные линии определяют границы термографа игры G вплоть до точки их встречи на высоте t_0 над горизонтальной осью (которая называется температурой игры G). Выше t_0 термограф представляет собой вертикальную прямую, которую будем называть *мачтой*.

Примеры существенно поясняют эту процедуру (рис. 9). В случае игры $H=\{7\mid 5\}$ термограф для $H^L=7$ является вертикальной прямой, проходящей через точку 7 на горизонтальной оси, а для H^R — аналогичной вертикалью через точку 5. Таким образом, левая граница термографа для H начинается как прямая, идущая по диагонали через точку 7 вправо вверх, а правая граница — как аналогичная прямая через точку 5, идущая по диагонали влево вверх. Они встречаются в точке на высоте 1 над точкой 6, так что температура игры H равна 1, а среднее значение равно 6. Аналогично игра $K=\{4\mid 1\}$ имеет среднее значение $2\frac{1}{2}$ и температуру $1\frac{1}{2}$.

Далее (рис. 10), в игре $G=\{H\mid K\}$ правая граница для H начинается в точке 5, идёт влево вверх к точке 1 над точкой 6 и далее поднима-

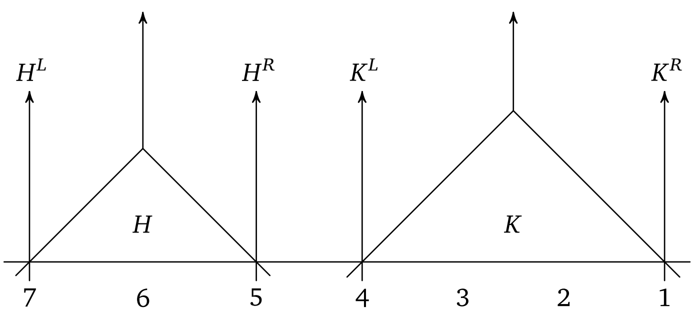


Рис. 9. Термографы для $H=\{7\mid 5\}$ и $K=\{4\mid 1\}$

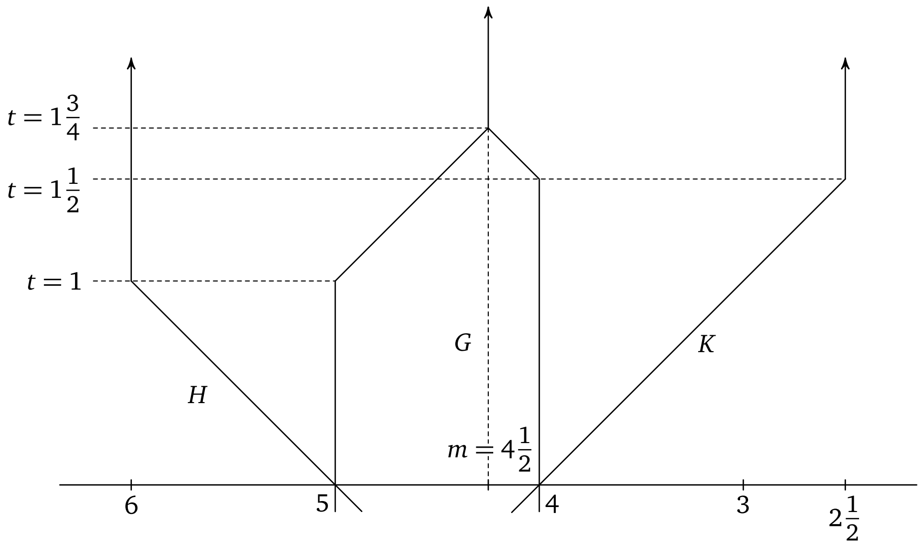


Рис. 10. Как найти термографы

ется вертикально. Левая граница начинается в точке 4, поднимается по диагонали вправо вверх к точке на высоте $1\frac{1}{2}$ над точкой $4\frac{1}{4}$ и далее поднимается вертикально. Левая и правая границы игры G получаются сдвигом этих границ навстречу друг другу. Поэтому одна из них — прямая, которая поднимается вертикально из точки 5 и на высоте 1 наклоняется вправо, а другая поднимается вертикально из точки 4 и на высоте $1\frac{1}{2}$ наклоняется влево. Эти прямые встречаются на высоте $1\frac{3}{4}$ над точкой горизонтальной оси $4\frac{1}{2}$, и это означает, что температура игры G равна $1\frac{3}{4}$, а среднее значение $4\frac{1}{4}$. Тот же алгоритм годится для любой игры G, в которой самая левая из правых границ для всех G^L начинается слева от самой правой из левых границ для любого G^R — в других случаях значение G является числом, а именно определяется правилом простоты. Если t' — любое число, большее, чем температура игры G, а m — среднее значение игры G, то

$$nm - t' < n \cdot G < nm + t'$$

для любого натурального n, что оправдывает нашу терминологию.

Более общо, если игры $G_0, G_1, G_2, \ldots$ имеют средние значения $m_0, m_1, m_2, \ldots$ соответственно, то можно сказать, что

$$m_0 + m_1 + m_2 + \ldots - t' < G_0 + G_1 + G_2 + \ldots < m_0 + m_1 + m_+ \ldots + t'$$

для любого числа t', большего чем температура всех игр G_i. Это часто помогает убедиться в выигрыше, показав без подробного анализа, что сложная сумма игр положительна.

Атомные веса. Для небольших игр вроде $\uparrow$ требуется более тонкая шкала (для $\uparrow$ равны 0 и среднее значение, и температура). Этой цели служит *исчисление атомных весов*, которое для таких маленьких игр предоставляет кое-что из того, что даёт термография для больших. Подробности неожиданно сложны.

Пусть в игре G значение никакой позиции не является ненулевым числом. Для такой игры определён атомный вес G'', вычисляемый по формуле

$$G'' = \{(G^L)'' - 2 \mid (G^R)'' + 2\}$$

со следующим *исключением*: если формула определяет целое число, оно заведомо неправильно. Правильное число в этом случае таково:

если G превосходит далёкие звёзды — *наибольшее* n, для которого

$$(G^L)'' - 2 \lhd\!\!| \; n \lhd\!\!| \; (G^R)'' + 2;$$

если далёкие звёзды превосходят G — *наименьшее* такое n;
если G несравнима с далёкими звёздами — *нуль*.

Далёкие звёзды для игры G — те кучи $*N$ в игре Ним, которые *не* содержатся среди значений позиций в G. Можно показать, что G удовлетворяет одним и тем же соотношениям порядка со всеми далёкими звёздами.

В качестве примера из исчисления атомных весов возьмём $G = \{0 \mid \uparrow\}$. Поскольку 0 имеет атомный вес 0, а $\uparrow$ — атомный вес 1, формула для G'' принимает вид

$$G'' = \{0 - 2 \mid 1 + 2\} = \{-2 \mid 3\},$$

определяя число 0. Поскольку это число целое, нельзя сразу утверждать, что это атомный вес, а нужно сначала сравнить G с далёкими звёздами. Наименьшая звезда, далёкая от G, — это $*2 = \{0, * \mid 0, *\}$. В процессе игры мы найдём, что $G + *2$ положительно, так что G превосходит далёкие звёзды. Значит, это наибольшее целое $\lhd\!\!| \; 3$, а именно 2. Разумеется, значение 2 атомного веса, найденное таким образом, согласуется с нашей более ранней формулой для игры G: $\uparrow + \uparrow + *$.

В качестве другого примера возьмём $H = \{\uparrow + \uparrow + * \mid \downarrow + *\}$. Формула атомного веса теперь даёт $\{2 - 2 \mid -1 + 2\} = \{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$, т. е. это действительно атомный вес. На самом деле эта игра в определённом смысле составляет половину от $\uparrow$, и обычно её обозначают $\frac{1}{2} \cdot \uparrow$. Можно определить $x \cdot \uparrow$ для всех *нецелых* x по формуле

$$x \cdot \uparrow = \{(x^L + 2) \cdot \uparrow + * \mid (x^R - 2) \cdot \uparrow + *\}.$$

Учитывая очевидное определение для целых x, видим, что выполнен закон дистрибутивности

$$(x + y) \cdot \uparrow = (x \cdot \uparrow) + (y \cdot \uparrow).$$

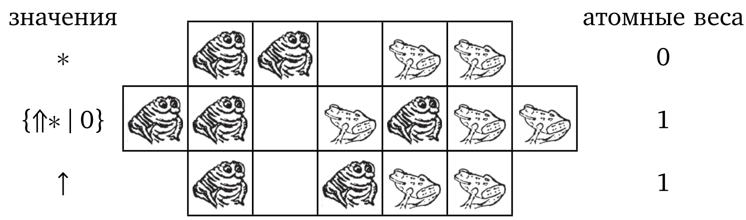


Рис. 11. Позиция в «Жабах и лягушках» с атомным весом 2

Частные случаи $\frac{1}{2}\cdot\uparrow$, $\frac{1}{4}\cdot\uparrow$, $*\cdot\uparrow$ появляются в усложнённой форме в игре Байнема [4, с. 199, 200], которую здесь нет возможности описывать. В неусложнённой форме возникает даже более интересная последовательность бесконечно малых. Теория этих и многих других игр становится гораздо проще благодаря самому полезному свойству атомных весов: если атомный вес игры больше либо равен 2, то игра положительна.

Например, можно вычислить, что позиция в «Жабах и лягушках»:

имеет значение $\{\Uparrow * | 0\}$ (где $\Uparrow * = \uparrow + \uparrow + *$) с атомным весом $\{2-2|0+2\} = 1$. Так что позиция на рис. 11 с атомным весом 2 должна быть положительной и Левый выиграет, кто бы ни начинал. В общем случае Левый может быть уверен в выигрыше, если атомный вес больше либо равен двум. Но если у Левого есть ход, он выиграет, если атомный вес — хотя бы положительный или нечёткий. (Атомные веса *могут* быть нечёткими — например, $\{\Uparrow \mid \Downarrow\}$ имеет атомный вес $\{2-2 \mid -2+2\} = *$, — но, к счастью, они обычно целые.)

Работы Милнора и Ханнера. Наша теория связана с той, которая изложена Джоном Милнором [9]. Хотя многое в них сходно, есть и важные различия. Милнор вводит числа для специальной цели, в качестве *платежей*, а для нас они естественно возникают из теории. Конечные игры приводят лишь к двоично-рациональным числам. Однако, допуская бесконечные игры с условием остановки, мы на самом деле получаем все действительные числа, как и обширный массив бесконечных и бесконечно малых чисел вроде

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega-1,\ \frac{\omega}{2},\ \sqrt{\omega},\ \frac{1}{\omega},\ \frac{1}{\omega^2},\ \frac{1}{\omega^\omega}$$

из [3].

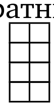
«Вознаграждение» Милнора примерно соответствует нашей *температуре*, а Улоф Ханнер [8] дал для игр Милнора довольно сложное доказательство теоремы о среднем значении. Но для Милнора *единствен-*

ные игры с нулевым вознаграждением — действительные числа, так что у него нет аналогов для наших игр

$$*, *2, \uparrow \quad \text{и т. д.}$$

Его теория охватывает в точности те игры, в которых каждая позиция либо имеет положительную температуру, либо является *действительным* числом.

Закончим несколькими прощальными замечаниями. Во-первых, представляется, что логически наиболее естественна теория, которая допускает бесконечные игры, подчинённые условию остановки. В основном теория не делает различия между конечным и бесконечным случаем; два важных исключения — теорема о среднем значении и теорема Саймона Нортона: игры с конечным множеством позиций не могут иметь нечётный порядок в группе игр по сложению. (Нортон построил бесконечные игры всех порядков.) Рассматриваемая таким образом, теория включает теорию бесконечных и бесконечно малых чисел, развитую в [3], причём сильно её обобщает.

Мир игр содержит много интересных магистралей и тропинок. Приведённые здесь примеры (числа, значения $\{x \mid y\}$, значения $*n$, значения $\uparrow_{abc\ldots}$) — лишь малая их часть. Есть также степени игры $\uparrow$ (например, $\uparrow^2 = \{0 \mid \downarrow *\}$), её кратные, а также крайне малые значения, например значение позиции  в «Доминировании», которое обозначается $+_2$, называется «крохотная двойка»[9]) и равно $\{0 \mid \{0 \mid -2\}\}$. К счастью, похоже, что лучший способ разобраться в этом изобилии структур — изучать всевозможные партизанские игры, вызывающие естественное желание сыграть в них. Почему бы *вам* не помочь в исследовании этих игр и их значений, причудливых и удивительных? Увлекательное занятие!

Эта статья была написана в спешке. Тем, что я не пожалел о ней в спокойной обстановке, я всецело обязан усилиям Ричарда Гая и Карен Макдермид.

Список литературы

[1] *Berlekamp E. R., Conway J. H., Guy R. K.* Winning Ways for Your Mathematical Plays. New York: Academic Press, 1982.

[2] *Bouton C. L.* Nim, a game with a complete mathematical theory // Ann. Math. Ser. 2. 1902. V. 3, № 1/4. P. 35–39.

9) «Tiny-two».

[3] *Conway J. H.* All numbers great and small. Univ. of Calgary Math. Dept. Research Paper No. 149. February, 1972.

[4] *Conway J. H.* On Numbers and Games. New York — London: Academic Press, 1976.

[5] *Dudeney H. E.* The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems. London, 1910. P. 118, 220.

[6] *Grundy P. M.* Mathematics and games // Eureka. 1939. V. 2. P. 6–8.

[7] *Guy R. K.*, *Smith C. A. B.* The G-values of various games // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1956. V. 52, № 3. P. 514–526.

[8] *Hanner O.* Mean play of sums of positional games // Pacific J. Math. 1959. V. 9. P. 81–99. MR 21 # 3277.

[9] *Milnor J.* Sums of positional games // Kuhn H. W. and Tucker A. W. (eds.) Contributions to the Theory of Games II. Ann. of Math. Studies No. 28. Princeton: Univ. Press, 1953. P. 291–301. MR 14–779.

[10] *Sprague R. P.* Über mathematische Kampfspiele // Tôhoku Math. J. 1935–36. V. 41. P. 438–444.

О независимых арифметических утверждениях*

Дж. Х. Конвей

Давно известно, что существуют арифметические утверждения, которые верны, но не доказуемы. Однако обычно считают, что они обязательно должны быть сложными. В этой статье я покажу, что эти дикие звери могут оказаться совсем рядом.

§ 1. Введение

Пока теорема Ферма не была доказана, существовало предположение, что она может оказаться недоказуемой. Многие замечали, что теорема и её отрицание имеют разный статус. В отрицании теоремы утверждается, что для некоторого $n > 2$ существует n-я степень натурального числа, равная сумме двух меньших: предъявление этих чисел доказывает отрицание и опровергает саму теорему. Так что если показать, что теорему невозможно опровергнуть, то этим также показано, что таких n-х степеней не существует и, следовательно, теорема верна.

Однако теорема могла бы оказаться истинной, не будучи доказуемой. В этом случае сама её недоказуемость не может быть доказана, поскольку из такого доказательства следовало бы несуществование контрпримера.

Рассуждения такого рода применялись к проблеме четырёх красок и до сих пор применяются к гипотезе Гольдбаха: каждое чётное число, большее двух, является суммой двух простых. (На самом деле Гольдбах утверждал это о каждом положительном чётном числе, поскольку считал единицу простым числом.) В справедливости гипотезы Гольдбаха никогда не было сомнения, поскольку она подтверждается самым убедительным образом.

* *Conway J. H.* On Unsettleable Arithmetical Problems // Amer. Math. Monthly. 2013. V. 120, № 3. P. 192–198. © 2013 Mathematical Association of America.

Каковы простейшие из истинных утверждений, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть? Я буду использовать для них термин un**set**tleable, поскольку больше столетия последней основой для доказательств служит теория множеств (set theory)[1]. В некоторых моих примерах может даже оказаться, что утверждение о их недоказуемости само недоказуемо и так далее. Разумеется, это значит, что не следует ждать здесь каких-то доказательств! Источником вдохновения для моих примеров служит

§ 2. $(3n+1)$-проблема Коллатца

Рассмотрим *функцию Коллатца* $\frac{1}{2}n \mid 3n+1$, значение которой равно $\frac{1}{2}n$, если это число целое, и $3n+1$ в противном случае. Я буду называть её «двудольной линейной функцией», поскольку каждое её значение равно значению одной из двух линейных функций. Далее, $(3n+1)$*-проблема Коллатца* состоит в следующем: «Всегда ли итерирование функции Коллатца приводит в итоге к единице» (если начинать с натурального числа)? Это несомненно верно, если начать с 7:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to \\ \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Томас Оливейра э Сильва [4] проверил это для всех натуральных чисел, меньших чем 5×10^{18}. Есть небольшой шанс, что утверждение независимо — известно, что некоторые очень похожие утверждения независимы[2].

Я обобщу проблему, рассмотрев многодольные линейные функции и соответствующие игры и задачи. Значением k-дольной линейной функции

$$g(n) = g_1(n) \mid g_2(n) \mid \ldots \mid g_k(n)$$

является первое целое из k чисел $g_i(n) = a_i n + b_i$ (если ни одно из $g_i(n)$ не целое, то значение не определено). Соответствующая *игра Коллатца* состоит в многократной замене n на $g(n)$, пока не достигнуто предписанное число (например, 1) или $g(n)$ не окажется не определённым. Тогда игра останавливается.

§ 3. Существуют ли независимые игры Коллатца?

Несомненно да. Доказательство более технично, чем остальная часть статьи, но суть проста: существует конкретная игра с 24 простыми функ-

---

[1] В русском переводе используется термин «независимое утверждение».

[2] По состоянию на текущий момент гипотеза Коллатца проверена до $2{,}95 \cdot 10^{20}$.

циями, которая при некоторых значениях n никогда не остановится, однако это недоказуемо. Знаменитая теорема Гёделя о неполноте, опубликованная в 1931 г., показывает, что нет непротиворечивой системы аксиом, в которой можно доказать любое истинное арифметическое утверждение. В частности, в ней нельзя доказать арифметическую формулировку утверждения о её собственной непротиворечивости. Тьюринг превратил это в свою теорему о вычислениях: проблема остановки в идеализированной модели вычислений неразрешима.

На основе этих замечательных результатов довольно тривиально строится независимая игра Коллатца. В статье 1972 года «Непредсказуемые итерации» [1] я показал, что любое вычисление имитируется игрой Коллатца очень простого вида, а именно *игрой с дробями*. В ней многодольная линейная функция имеет вид $r_1 n \mid r_2 n \mid \ldots \mid r_k n$, который задан последовательностью $r_1, r_2, \ldots, r_n$ рациональных чисел. В более поздней статье «Фрактран: простой универсальный язык программирования для арифметики» [2] показано, что в случае дробей

$$\frac{583}{559}\ \frac{629}{551}\ \frac{437}{527}\ \frac{82}{517}\ \frac{615}{329}\ \frac{371}{129}\ \frac{1}{115}\ \frac{53}{86}\ \frac{43}{53}\ \frac{23}{47}\ \frac{341}{46}\ \frac{41}{43}$$
$$\frac{47}{41}\ \frac{29}{37}\ \frac{37}{31}\ \frac{299}{29}\ \frac{47}{23}\ \frac{161}{15}\ \frac{527}{19}\ \frac{159}{7}\ \frac{1}{17}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{3}$$

игра универсальна. Это значит, что для любой вычислимой (в технических терминах — общерекурсивной) функции $f(n)$ существует такая константа c, что игра переводит $c \cdot 2^{2^n}$ в $2^{2^{f(n)}}$. В этом случае положим $f_c(n) = f(n)$. При этом результат охватывает все частично рекурсивные функции (не всюду определённые), если считать, что $f_c(n)$ не определена в том случае, когда игра не останавливается или её результат не имеет вида 2^{2^m}.

Отсюда довольно легко получить, что если независимость утверждения определена в терминах любой непротиворечивой системы аксиом, то существует число, для которого игра с ещё одной дробью:

$$\frac{583}{559}\ \frac{629}{551}\ \frac{437}{527}\ \frac{82}{517}\ \frac{615}{329}\ \frac{371}{129}\ \frac{1}{115}\ \frac{53}{86}\ \frac{43}{53}\ \frac{23}{47}\ \frac{341}{46}\ \frac{41}{43}$$
$$\frac{47}{41}\ \frac{29}{37}\ \frac{37}{31}\ \frac{299}{29}\ \frac{47}{23}\ \frac{161}{15}\ \frac{527}{19}\ \frac{159}{7}\ \frac{1}{17}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$$

никогда не приводит к единице, причём это утверждение независимо. Указание программисту: если компьютер доказал $0 = 1$ в n-й системе аксиом, положим $f(n) = 0$, в противном случае оставим $f(n)$ не определённым. Тогда вышеприведённая игра с 23 дробями именно в случае противоречивости системы остановится на двойке, поскольку 0 —

единственно возможное значение для $f(n)$[3], поэтому игра с 24 дробями остановится на единице.

Каковы простейшие игры Коллатца, от которых можно ожидать независимости? Думаю, что один пример у меня есть.

§ 4. Немузыкальная перестановка

Немузыкальная перестановка $\mu(n)$ действует так: $2k \mapsto 3k$, $4k+1 \mapsto 3k+1$ и $4k-1 \mapsto 3k-1$. Очевидно, это трёхдольная линейная функция, поскольку любое натуральное число однозначно представляется в одной из форм, указанных слева. А так как любое натуральное число однозначно представляется и в одной из форм, указанных справа, μ^{-1} также является трёхдольной линейной функцией, так что μ — перестановка. В сокращённых обозначениях немузыкальная перестановка имеет вид $\frac{3n}{2} \mid \frac{3n+1}{4} \mid \frac{3n-1}{4}$, а обратная к ней $\frac{2n}{3} \mid \frac{4n+1}{3} \mid \frac{4n-1}{3}$. Обозначая через $\{r\}$ целое число, ближайшее к r, можно далее сократить обозначение для μ до $\frac{3n}{2} \mid \left\{\frac{3n}{4}\right\}$, а для μ^{-1} до $\frac{2n}{3} \mid \left\{\frac{4n}{3}\right\}$, но это может затемнить тот факт, что μ и μ^{-1} — трёхдольные, а не двудольные линейные функции.

В обычных обозначениях в терминах циклов (допуская бесконечные циклы) μ начинается следующим образом:

$$(\mathbf{1})\ \ (\mathbf{2}, 3)\ \ (\mathbf{4}, 6, 9, 7, 5)\ \ (\mathbf{44}, 66, 99, 74, 111, 83, 62, 93, 70, 105, 79, 59)$$

$$(\ldots 91, 68, \ldots, 86, \ldots, 97, 73, 55, 41, 31, 23, 17, 13, 10, 15, 11, \mathbf{8},$$
$$12, 18, 27, 20, 30, 45, 34, 51, 38, 57, 43, 32, 48, 72, \ldots)$$

$$(\ldots 77, 58, 87, 65, 49, 37, 28, 42, 63, 47, 35, 26, 39, 29, 22, 33, 25, 19, \mathbf{14},$$
$$21, 16, 24, 36, 54, 81, 61, 46, 69, 52, 78, \ldots,$$
$$88, \ldots, 94, \ldots, 89, 67, 50, 75, 56, 84, \ldots)$$

$$(\ldots 98, \ldots, 100, \ldots, 95, 71, 53, \mathbf{40}, 60, 90, \ldots, 76, \ldots)$$

$$(\ldots 85, \mathbf{64}, 96 \ldots)\ \ (\ldots \mathbf{80}, \ldots,)\ \ (\ldots, 92, \ldots \mathbf{82}, \ldots).$$

Здесь выделен наименьший элемент каждого цикла. Я показал, как должны выглядеть все конечные циклы и первые шесть бесконечных, чтобы включать все натуральные числа вплоть до 100.

[3] И, значит, $2^{2^{f(n)}} = 2^{2^0} = 2$.

Строго говоря, я не знаю, верны ли эти утверждения. Например, цикл, содержащий 8, мог бы быть конечным, а мог бы совпадать с циклом, содержащим 14. Однако оба эти цикла продолжаются в обе стороны, пока числа не становятся больше 10^{400}, и очевидно, что числа не спустятся снова ниже 100. Требуется название для такого вида очевидности: предлагаю *очевидность по вероятности*[4)].

Рисунок 1 делает это ещё яснее. На нём циклы, содержащие 4, 14, 40, 64, 80 и 82, показаны на логарифмической шкале относительно ко-

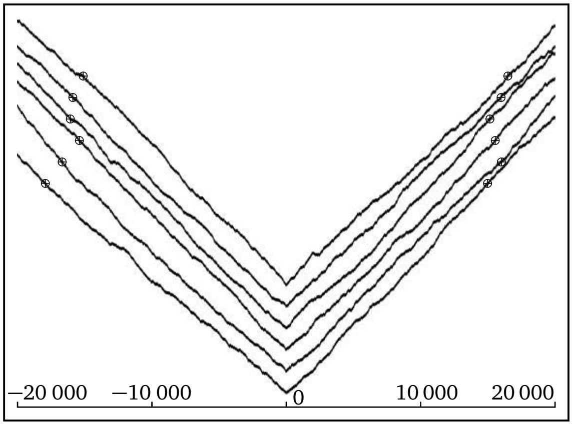


Рис. 1. Циклы, содержащие 8, 14, 40, 64, 80 и 82, после 20 000 итераций

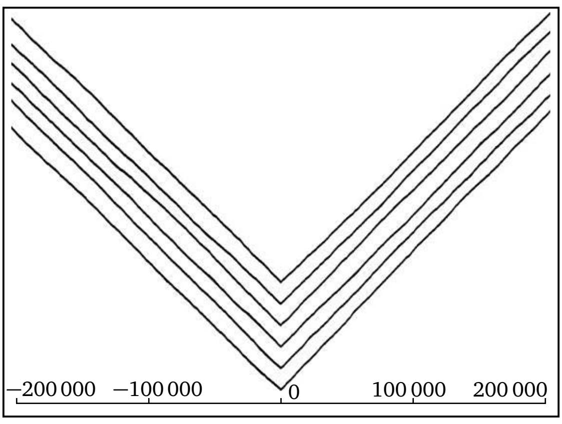


Рис. 2. Те же циклы после 200 000 итераций: на большом промежутке регулярность стала гораздо выше, и вероятностные предсказания всё более подтверждаются. — *Прим. автора.*

4) В подлиннике *probvious*, от *probabilistically obvious*.

личества применений перестановки μ. Эти шесть кривых разделены, так как иначе их наименьшие точки будут неотличимы на рисунке от единицы[5]. Кружочки отмечают места, где графики проходят 10^{400}. В обоих направлениях рост экспоненциальный, причём μ даёт скорость чуть выше, чем μ^{-1}. Как объяснить эти факты?

Давайте посмотрим, что может происходить, когда числа становятся большими. Поскольку n с равным успехом может быть чётным или нечётным, оно умножится за шаг в среднем на

$$\sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{9}{8}}.$$

За двенадцать шагов ожидаемый коэффициент составит

$$\frac{3^{12}}{2^{18}} = \frac{531\,441}{262\,144} \approx 2{,}027.$$

Для μ^{-1} нужно в одном случае из трёх умножить на $2/3$, а в других двух на $4/3$, так что ожидаемый рост за три шага составляет $32/27$, а за двенадцать шагов

$$\frac{32^4}{27^4} = \frac{2^{20}}{3^{12}} = \frac{1\,048\,576}{531\,441} \approx 1{,}973.$$

Округление этих двух чисел до 2 объясняет название «немузыкальный». На фортепиано двенадцать нот составляют октаву, что соответствует удвоению частоты, подобно тому как двенадцать шагов немузыкальной перестановки в среднем примерно удваивают число. Отношение частот

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531\,441}{524\,288} \approx 1{,}0136$$

называется «пифагорова комма» или «пифагорова запятая». Так соотносятся си-бемоль и ля-диез, а также ряд других пар «энгармонически эквивалентных»[6] нот. Так что здесь действительно есть связь с музыкой.

[5] Отчётливый изгиб на графике цикла, содержащего 82, соответствует заметному уменьшению (более чем в 75 989 раз) от $\mu^{1981}(82) = 5\,518\,782\,509\,452\,689\,749\,562\,442\,051\,558\,599\,474\,342\,616\,171\,049\,802\,024\,438\,847\,761 \approx$ $\approx 5{,}519 \cdot 10^{63}$ до $\mu^{2208}(82) = 72\,625\,599\,594\,039\,327\,995\,887\,556\,149\,205\,597\,399\,175\,812\,389\,461\,574\,936\,396 \approx 7.263 \cdot 10^{58}$. Надо признать, что это уменьшение более чем в 2^{16} раз там, где следовало ожидать увеличения почти в 2^{19} раз, бросает тень сомнения на вероятностные рассуждения в нашем тексте. — *Прим. автора.*

[6] То есть близких по высоте, но играющих разную роль в конкретной звуковысотной системе.

Однако наша перестановка даёт в итоге повышение больше, чем на октаву, что звучало бы не очень музыкально, и мне было забавно назвать эту перестановку немузыкальной[7)].

§ 5. Немузыкальные независимые гипотезы?

Простейшее утверждение про μ, которое, как я верю, истинно, но независимо, состоит в том, что 8 принадлежит бесконечному циклу.

Почему оно истинно? Потому что утверждение о линейном росте логарифма $\mu^n(8)$ наглядно доказывается рис. 1 и никто не сможет всерьёз поверить, что $\mu^n(8)$, которое уже превосходит 10^{400}, вновь чудесным образом уменьшится до 8 (рис. 2, созданный уже после написания этого текста, показывает, что после 200 000 итераций это число даже превосходит 10^{5000}). Будучи истинным, утверждение не будет опровержимым.

Если игра Коллатца не останавливается, то существует ли доказательство, что она не останавливается? Игра с 24 дробями из § 3 (улучшенная до 7 дробей Джоном Рикардом [3]) показывает, что ответ, вообще говоря, отрицательный. Если игра Коллатца не останавливается, это в общем случае недоказуемо. Так что не следует ожидать, что цикл с восьмёркой доказуемо бесконечен, ввиду отсутствия всяких причин, почему бы так должно быть. В конце концов, есть очень малая положительная вероятность, что для каких-то очень больших натуральных чисел M и N величина $\mu^M(8)$ может оказаться тем же 10^{100}-значным числом, что и $\mu^{-N}(8)$.

Некоторых читателей может всё же расстроить отсутствие доказательств, несмотря на предупреждение во введении, что иначе быть заведомо не может. Оставляю таких читателей с любопытной мыслью, что доля ошибок в опубликованных доказательствах гораздо выше, чем маленькая положительная вероятность, отмеченная в предыдущем абзаце.

Дополнение 1: решаема ли $(3n+1)$-проблема?

У $(3n+1)$-игры есть специфическая черта: вероятностные рассуждения заставляют предполагать, что большие числа убывают, а не возрастают, как в немузыкальной перестановке. Если это доказуемо, то гипотеза Коллатца оказалась бы доказуемой. Есть слабая надежда, что такое возможно.

Знаменитый круговой метод Харди — Литлвуда часто позволяет доказать результаты, предсказанные вероятностно. Самое впечатляющее

[7)] Игра слов: it has amused me to call it amusical.

его применение дал И. М. Виноградов, доказав, что каждое достаточно большое нечётное число является суммой трёх простых. Более общее применение этого метода — отыскание количества представлений числа n в виде суммы данного количества чисел некоторого специального вида (простых, k-х степеней, ...). Оценка для данного числа принимает вид $P+E$, где P — вероятностная оценка, E — погрешность. Если удалось доказать, что $|E|<P$, то тем самым для искомого количества получено некоторое представление.

Оказывается, что P — произведение множителей вида P_p, где P_p (для простого p) — вероятность того, что n является p-адической (т. е. по модулю всех степеней числа p) суммой данного количества чисел нужного вида. (Есть также множитель P_∞, равный доле представимых в нужном виде чисел среди близких к n.) Иначе говоря, P — как раз то, что можно наивно ожидать от вероятностных рассмотрений, аналогичных случаю немузыкальной перестановки.

Нельзя исключить, что однажды таким методом удастся доказать $(3n+1)$-гипотезу Коллатца, поскольку всё, что требуется, — доказать, что достаточно большие числа в итоге уменьшаются. Однако на самом деле я в это не верю.

Эти замечания не относятся к немузыкальной перестановке, поведение которой не будет определено даже если доказать, что почти все большие числа имеют тенденцию к возрастанию, поскольку, например, результат применения μ миллион раз к восьмёрке может совпадать с результатом применения μ^{-1} ещё больше раз к 8 или 14: в этом случае цикл, содержащий 8, либо конечен, либо совпадает с циклом, содержащим 14. Очевидно по вероятности, что это не произойдёт. Однако нельзя ожидать, что мы это докажем, и нет причины ожидать, что это утверждение или его отрицание следуют из системы аксиом Цермело — Френкеля или какого-то её подходящего расширения. Другими словами, очевидно по вероятности, что это утверждение независимо.

Ещё кое-что очевидно по вероятности, но с немного меньшей вероятностью. Например, таков алгоритм для проверки, принадлежит ли n конечному циклу. Нужно просто спросить, является ли n одним из двадцати чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 44, 59, 62, 66, 70, 74, 79, 83, 93, 99, 105, 111;$$

если да — ответ «да», если нет — «нет». Если есть другой конечный цикл, алгоритм не работает, но всё же ответ можно вычислить, если только не существует бесконечно много конечных циклов, что почти наверняка не имеет места.

Выше я предположил, что утверждение о принадлежности восьмёрки бесконечному циклу хотя и очевидно по вероятности, но независимо. Теперь я выскажу предположение, что это утверждение о независимости само недоказуемо и, следовательно, независимо и так далее — можно углубиться в метатеорию сколь угодно далеко.

Даже если это неверно, математика *не* определяется какой-либо системой теоретико-множественных аксиом. В частности, похоже, что некоторые простые гипотезы Коллатца (может быть, даже сама $(3n+1)$-гипотеза) останутся независимыми навсегда.

Дополнение 2: Некоторые немузыкальные парадоксы

Отвлечёмся с облегчением от глубоких проблем, чтобы обсудить некоторые простые задачки о поведении немузыкальной перестановки. Мы уже отметили парадокс «всегда вверх»: в типичном цикле числа растут независимо от того, каким способом мы обходим цикл. На самом деле это не удивительно, как показывает рис. 1. Начав с любой точки цикла и двигаясь в любом направлении, мы в итоге пройдём минимум и затем пойдём вверх.

Возникает также «парадокс сравнимости». Поскольку $n < \mu(n)$ в точности тогда, когда n чётно, а $n < \mu^{-1}(n)$ в точности тогда, когда n не делится на 3, получаем, что n удовлетворяет обоим неравенствам (и, значит, является локальным минимумом) в точности тогда, когда $n \equiv \pm 2 \pmod 6$,, что происходит ровно в трети случаев; правильно? Может быть, и нет. Число n не удовлетворяет ни одному из этих неравенств в точности тогда, когда $n \equiv 3 \pmod 6$. Значит, n является локальным максимумом ровно в одной шестой случаев. Но в любой последовательности локальные минимумы и максимумы чередуются, так что их количество должно совпадать. Так что же верно: точка экстремума — каждая третья или каждая шестая?

Давайте подумаем ещё немного. Максимум появляется каждый раз, когда возрастание сменяется убыванием. А так как возрастание и убывание равновозможны, максимум будет получаться в четверти случаев. То же верно для минимумов, которые появляются, когда убывание сменяется возрастанием. Так что и максимум, и минимум появляется один раз за четыре шага, а не за три или шесть! Можно получить и ещё один ответ, если пойти в обратном направлении, когда вероятности равны $2/3$ и $1/3$. Заключаем, что и максимумы, и минимумы появляются один раз за $4\frac{1}{2}$ хода.

На самом деле эти рассуждения не доказывают ничего парадоксального. Выбирая произвольное число, мы видим максимумы и минимумы одинаково часто, а именно один раз за четыре шага при движении вперёд и один раз за $4\frac{1}{2}$ шага при движении назад. Предоставляем читателю объяснить, почему оба эти ответа (один раз за 4 или $4\frac{1}{2}$ шага) не согласуются ни с одним из ответов, вытекающих из парадокса сравнимости (один раз за 3 или 6 шагов).

Эти кажущиеся противоречия основаны на нашем опыте работы с конечными циклами. Поэтому можно было бы предположить, что обратными рассуждениями удастся доказать, что большинство или хотя бы некоторые циклы бесконечны. Однако, поразмыслив об этом, я всё же полагаю, что эти гипотезы независимы.

Если вы не согласны, попробуйте доказать или опровергнуть какое-нибудь из следующих утверждений.

1. Существует ещё один конечный цикл [кроме перечисленных в § 4].
2. Существует бесконечный цикл.

Благодарности

Алекс Рыба заслуживает большой признательности за неоценимую помощь в создании этой статьи. Хотел бы также поблагодарить Дирка Шляйхера за создание рисунков.

Постскриптум

Добавлено 8 июня 2012 г.

Следующее рассуждение убедило меня, что сама $3n+1$-гипотеза Коллатца скорее всего независима (а не просто имеет на это небольшой шанс, как отмечено выше). В этом рассуждении используется наличие сколь угодно высоких «гор» на графике игры Коллатца. Чтобы увидеть это, заметим, что $2m-1$ переходит за два шага в $3m-1$, откуда следует, что $2^k m-1$ переходит за $2k$ шагов в $3^k m-1$. Далее, в силу китайской теоремы об остатках можно обеспечить, чтобы $3^k m-1$ имело вид $2^\ell n$, а это число переходит за ℓ шагов в n. Существует очень малая вероятность, что n совпадёт с числом $2^k m-1$, с которого мы начали. Предположим, что исходное число $2^k m-1$ составляет примерно гугол (10^{100}); тогда при спуске с горы обязательно появится число между одним и двумя гуголами, так что вероятность, что это число совпадает с исходным, не меньше чем единица, делённая на гугол. (Это подтверждается рассмотрением меньших n, когда видно, что первое число, попадающее в область $[n, 2n)$, приблизительно равномерно распределено в этой области.) На мой взгляд, тот факт, что эта вероятность хотя и очень мала, но положительна, делает крайне неправдоподобным существование доказательства, что игра Коллатца не имеет циклов, содержащих только большие числа. Не следует путать это с предположением, что действительно *существуют* циклы, содержащие большие числа. В конце концов, события с вероятностью порядка единицы, делённой на гугол, вряд ли могут произойти!

Не хочу, чтобы читатели приняли эти слова на веру. Скорее я хотел бы подбодрить тех, кого они не убедили прилагать ещё больше усилий, чтобы доказать гипотезу Коллатца!

Список литературы

[1] *Conway J. H.* Unpredictable Iterations // Proceedings of the Number Theory Conference (Univ. Colorado, Boulder, 1972). P. 49–52. Также см.: *Lagarias J. C.* (ed.). The ultimate challenge. The $3x+1$ problem. Providence, RI: AMS, 2010. P. 219–224.

[2] *Conway J. H.* Fractran: A Simple Universal Programming Language for Arithmetic // Open Problems in Communication and Computation (*T. M. Cover and B. Gopinath*, eds.). Springer. 1987. P. 4–26. Также см.: *Lagarias J. C.* (ed.). The ultimate challenge. The $3x+1$ problem. Providence, RI: AMS, 2010. P. 249–264.

[3] *Rickard J.* Не опубликовано. (Джон Рикард умер 9 мая 2002 г.)

[4] *Tomás Oliveira e Silva*. Empirical Verification of the $3x+1$ and Related Conjectures // *Lagarias J. C.* (ed.). The ultimate challenge. The $3x+1$ problem. Providence, RI: AMS 2010. P. 189–207.

Алгебра и смежные области

Ещё одно доказательство из Книги: теорема Гаусса — Ванцеля

А. Б. Скопенков*

§ 1. Введение

Мы приводим самое простое[1] (из известных) доказательство теоремы Гаусса — Ванцеля о построимости правильных многоугольников циркулем и линейкой (в нижеприведённой эквивалентной формулировке). Оно отлично от данного в [2, 6, 9] (в этих статьях, внешне столь непохожих, излагается одно и то же доказательство). Ещё одно доказательство см. в [7]. Приводимое доказательство принадлежит ещё Гауссу (см. детали и оговорки в [5, § 27]). Но, к сожалению, оно малоизвестно. См. подробнее замечания 1(b), 1(e).

На примере этого доказательства мы продемонстрируем некоторые важные идеи высшей алгебры (подводящие к теории Галуа, см. подробнее замечание 1(d)). При этом для понимания доказательства достаточно уметь извлекать корни из комплексных чисел и делить многочлены с остатком. Поэтому его разбор может использоваться для отработки тем «многочлены» и «комплексные числа».

Вещественное число называется *вещественно построимым*, если его можно получить из числа 1 при помощи сложений, вычитаний, умножений, делений на ненулевые числа и извлечений квадратных корней

* Частично поддержан грантом фонда Саймонса-НМУ.

[1] Это объясняет название заметки, ср. [1].

из положительных чисел. Иначе говоря, если некоторое множество, его содержащее, можно получить из множества $\{1\}$, используя лишь добавление к уже имеющемуся множеству $M \subset \mathbb{R}$, содержащему числа x, y,

$$\text{чисел } x+y,\ x-y,\ xy, \quad \text{числа } x/y \text{ при } y \neq 0 \quad \text{и} \quad \text{числа } \sqrt{x} \text{ при } x > 0.$$

Теорема (Гаусс — Ванцель). *Число* $\cos(2\pi/n)$ *вещественно построимо тогда и только тогда, когда* $n = 2^\alpha p_1 \cdot \ldots \cdot p_l$, *где* $p_1, \ldots, p_l$ *— различные простые числа вида* $2^{2^s}+1$.

Замечание 1. (a) Для практики приближённые методы вычисления тригонометрических функций полезнее формул с радикалами. Однако проблема построимости интересна как пробная задача современных теории символьных вычислений и теории сложности вычислений.

(b) Приводимое изложение намного проще и короче стандартного (ср. [8, 10]). Здесь я имею в виду доказательство «с нуля», а не вывод нужной теоремы из построенной перед этим теории, в которой фактически заключается всё доказательство.

Доказательство построимости элементарно, но основано на идее *резольвент Лагранжа* (см. элементарное изложение, например, в [12, п. 5.2.2]). Оно получено из [5, § 24] некоторым упрощением, см. подробнее замечание 3. См. [12, § 5.3].

Доказательство непостроимости похоже на стандартное доказательство, но в нём используется «степень многочлена» вместо «степени расширения поля». Оно похоже на [4, Supplement to § 35–37], [12, § 5.5.2].

Приводимое доказательство остаётся настолько малоизвестным, что ссылки на него отсутствуют в [2, 6, 9, 10]. (Это отчасти связано со сложностью его пути к читателю [12, конец п. 5.2.2].)

(c) Мы показываем в п. 2, *как можно догадаться* до формулировки теоремы. Хотя *придумать* доказательство непросто, *изложить* его можно коротко (см. п. 3 и 4).

(d) На примере этого доказательства продемонстрированы следующие идеи симметрии, воплощённые в понятии группы (в этой конкретной ситуации — группы автоморфизмов поля). Важно отображение сопряжения поля $F[\sqrt{a}]$, см. лемму 10 о сопряжении. Важна равноправность корней неприводимого многочлена (в этой конкретной ситуации — многочлена деления круга на простое число частей). Приведённые в скобках термины не используются далее в заметке.

(e) Другие ссылки и комментарии (в частности, на мотивировки и историю) приведены, например, в [12, § 5.1, § 5.2, § 27, § 28], [11, § 9.1].

Завершим это введение «комплексификацией» теоремы Гаусса — Ванцеля, используемой в её доказательстве.

Комплексное число называется (комплексно) *построимым*, если его можно получить из числа 1 при помощи сложений, вычитаний, умножений, делений на ненулевые числа и извлечений квадратных корней. Иначе говоря, если некоторое множество, его содержащее, можно получить из множества $\{1\}$, используя лишь добавление к уже имеющемуся множеству $M \subset \mathbb{C}$, содержащему числа x, y,

$$\text{чисел } x+y,\ x-y,\ xy, \quad \text{числа } x/y \text{ при } y \neq 0$$
$$\text{и любого такого числа } r \in \mathbb{C}, \text{ что } r^2 = x.$$

Лемма 2 (о комплексификации). *Комплексное число построимо тогда и только тогда, когда его вещественная и мнимая части вещественно построимы.*

Набросок доказательства. Часть «тогда» очевидна. Для доказательства части «только тогда» запишите равенство $\sqrt{a+bi} = u + vi$ и выразите u, v через a и b с помощью четырёх арифметических операций и квадратных радикалов. □

Из этой леммы вытекает, что теорему Гаусса — Ванцеля достаточно доказать с заменой числа $\cos(2\pi/n)$ на число

$$\varepsilon_n := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

и «вещественной построимости» на «построимость».

§ 2. Идея доказательства построимости в теореме Гаусса — Ванцеля

Этот параграф формально не используется в дальнейшем.

Идея доказательства построимости числа $\varepsilon := \varepsilon_5$. Во-первых,

$$T_0 := \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 = -1.$$

Докажем построимость числа

$$T_2 := \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^4 - \varepsilon^8.$$

При замене ε на ε^2 число T_2 переходит в $-T_2$. Значит, T_2^2 не меняется при этой замене. Поэтому T_2^2 не меняется при двукратной и трёхкратной такой замене, т. е. при заменах ε на ε^4 и ε на $\varepsilon^8 = \varepsilon^3$. Итак, для любого k число T_2^2 не меняется при замене ε на ε^k.

Раскроем скобки в произведении T_2^2 и заменим ε^5 на 1. Получим равенство

$$T_2^2 = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4 \quad \text{для некоторых } a_k \in \mathbb{Z}.$$

Так как для любого k число T_2^2 не меняется при замене ε на ε^k, мы получаем $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. Поэтому $T_2^2 = a_0 - a_1 \in \mathbb{Z}$. Значит, T_2 построимо.

Обозначим

$$T_1 := \varepsilon + i\varepsilon^2 - \varepsilon^4 - i\varepsilon^8 \quad \text{и} \quad T_3 := \varepsilon - i\varepsilon^2 - \varepsilon^4 + i\varepsilon^8.$$

Тогда $T_0 + T_1 + T_2 + T_3 = 4\varepsilon$. Поэтому достаточно доказать построимость чисел T_1 и T_3. Сделаем это для T_1; доказательство для T_3 аналогично.

При замене ε на ε^2 число T_1 переходит в $-iT_1$. Значит, T_1^4 при этой замене не меняется. Поэтому T_1^4 не меняется при двукратной и трёхкратной такой замене, т. е. при заменах ε на ε^4 и ε на $\varepsilon^8 = \varepsilon^3$. Итак, для любого k число T_1^4 не меняется при замене ε на ε^k.

Раскроем скобки в произведении T_1^4 и заменим ε^5 на 1. Получим равенство

$$T_1^4 = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + a_4\varepsilon^4 \quad \text{для некоторых } a_k \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}.$$

Так как для любого k число T_1^4 не меняется при замене ε на ε^k, мы получаем $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. Поэтому $T_1^4 = a_0 - a_1 \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. Значит, T_1 построимо. □

Замечание 3. В этих рассуждениях нужно обосновать корректность «замены ε на ε^k» (т. е. что при другом представлении числа в виде многочлена от ε результат замены будет таким же.) Нужное представление единственно (даже для общего случая) [5, § 24, Lemma 2]. Отметим, что именно в отсутствии доказательства этой единственности заключается недочёт в рассуждениях Гаусса [5, § 24, § 27].

Доказательство единственности непросто [5, § 71]. Так что вместо этого мы немного изменим наше рассуждение. Именно этим приводимое доказательство проще данного в [5]. Вместо работы с *числами* мы будем работать с *многочленами* и подставлять в них ε в качестве аргумента.

Два многочлена с комплексными коэффициентами называются *сравнимыми по модулю многочлена p*, если их разность делится (в $\mathbb{C}[x]$) на p.

Задача. Обозначим $T_1(x) := x + ix^2 - x^4 - ix^8$. Тогда
(a) $iT_1(x^2) \equiv T_1(x) \bmod (x^5 - 1)$;
(b) $T_1^4(x^2) \equiv T_1^4(x) \bmod (x^5 - 1)$;
(c) $T_1^4(x^k) \equiv T_1^4(x) \bmod (x^5 - 1)$ для любого k.

Доказательство построимости числа $\varepsilon := \varepsilon_5$. Обозначим

$$T_1(x) := x + ix^2 - x^4 - ix^8.$$

Определим многочлены $T_0(x)$, $T_2(x)$ и $T_3(x)$ формулами, аналогичными вышеприведённым. Как и выше,

$$(T_0 + T_1 + T_2 + T_3)(\varepsilon) = 4\varepsilon.$$

Поэтому достаточно доказать построимость каждого из чисел $T_r(\varepsilon)$, $r = 1, 2, 3$. Имеем

$$iT_1(x^2) \underset{x^5-1}{\equiv} T_1(x) \quad\Rightarrow\quad T_1^4(x^2) \underset{x^5-1}{\equiv} T_1^4(x) \quad\Rightarrow\quad T_1^4(x^k) \underset{x^5-1}{\equiv} T_1^4(x) \quad \text{для любого } k.$$

Возьмём многочлен $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ с коэффициентами в $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, сравнимый с $T_1^4(x)$ по модулю $x^5 - 1$.

Тогда $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. Поэтому $T_1^4(\varepsilon) = a_0 - a_1 \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$.

Значит, $T_1(\varepsilon)$ построимо. Аналогично $T_2(\varepsilon)$ и $T_3(\varepsilon)$ построимы. □

Задача. (a) Обозначим

$$\beta := \varepsilon_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad T(x) := x + \beta x^3 + \beta^2 x^9 + \beta^3 x^{27} + \beta^4 x^{81} + \beta^5 x^{243}.$$

Докажите, что $T(x) \equiv \beta T(x^3) \bmod (x^7 - 1)$.

(b) Докажите, что число ε_7 можно получить из числа 1 при помощи сложений, вычитаний, умножений, делений на ненулевые числа и извлечений комплексных корней второй или третьей степени из комплексных чисел.

Задача. (a) Обозначим

$$\beta := \varepsilon_{10} \quad \text{и} \quad T(x) := x + \beta x^2 + \beta^2 x^4 + \beta^3 x^8 + \beta^4 x^{16} + \ldots + \beta^9 x^{512}.$$

Докажите, что $T(x) \equiv \beta T(x^2) \bmod (x^{11} - 1)$.

(b) Докажите, что число ε_{11} можно получить из числа 1 при помощи сложений, вычитаний, умножений, делений на ненулевые числа и извлечений комплексных корней второй или пятой степени из комплексных чисел.

§ 3. Доказательство построимости в теореме Гаусса — Ванцеля

Лемма 4 (об умножении). (a) *Если ε_n построимо, то ε_{2n} построимо.*

(b) *Если ε_n и ε_m построимы и m, n взаимно просты, то ε_{mn} построимо.*

Доказательство получается из формул $\varepsilon_{2n} \in \sqrt{\varepsilon_n}$ и $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_m^x \varepsilon_n^y$, где x и y — целые числа, для которых $nx + my = 1$. □

Доказательство построимости в теореме Гаусса — Ванцеля. По лемме 2 о комплексификации и по лемме 4 об умножении достаточно доказать, что $\varepsilon := \varepsilon_n$ построимо для любого простого $n = 2^{2^s} + 1$. Так как $(n-1)$ — степень двойки, по лемме 4 об умножении $\beta := \varepsilon_{n-1}$ построимо. Используем обозначение

$$\mathbb{Z}[\beta] := \{b_0 + b_1\beta + b_2\beta^2 + \ldots + b_{n-2}\beta^{n-2} \mid b_0, b_1, \ldots, b_{n-2} \in \mathbb{Z}\}.$$

Обозначим через g первообразный корень по модулю n (т. е. такое число g, для которого остатки от деления на n чисел $g^1, g^2, g^3, \ldots, g^{n-1}$ различны.) Для $r = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ обозначим

$$T_r(x) := x + \beta^r x^g + \beta^{2r} x^{g^2} + \ldots + \beta^{(n-2)r} x^{g^{n-2}} \in \mathbb{Z}[\beta][x].$$

Тогда $(T_0 + T_1 + \ldots + T_{n-2})(\varepsilon) = (n-1)\varepsilon$. Кроме того, $T_0(\varepsilon) = -1$. Поэтому достаточно доказать построимость каждого из чисел $T_r(\varepsilon)$, $r = 1, 2, \ldots, n-2$. Имеем

$$\beta^r T_r(x^g) \underset{x^n-1}{\equiv} T_r(x) \quad \Rightarrow \quad T_r^{n-1}(x^g) \underset{x^n-1}{\equiv} T_r^{n-1}(x) \quad \Rightarrow \quad T_r^{n-1}(x^k) \underset{x^n-1}{\equiv} T_r^{n-1}(x)$$

для любого k. Возьмём многочлен $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}[\beta]$, сравнимый с $T_r^{n-1}(x)$ по модулю $x^n - 1$. Тогда $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$. Поэтому $T_r^{n-1}(\varepsilon) = a_0 - a_1 \in \mathbb{Z}[\beta]$. Значит, $T_r(\varepsilon)$ построимо. □

§ 4. Доказательство непостроимости в теореме Гаусса — Ванцеля

Лемма 5 (признак Эйзенштейна). *Пусть p простое. Если для многочлена с целыми коэффициентами старший коэффициент не делится на p, остальные делятся на p, а свободный член не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.*

Лемма 6 (Гаусс). *Если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$.*

И признак Эйзенштейна, и лемма Гаусса доказываются переходом к многочленам с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$.

Лемма 7 (о степенях двойки). *Если неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен P с рациональными коэффициентами имеет построимый корень, то $\deg P$ есть степень двойки.*

Доказательство приведено ниже.

Доказательство непостроимости в теореме Гаусса — Ванцеля. Так как $\varepsilon_n = \varepsilon_{nk}^k$, из построимости числа ε_{nk} вытекает построимость числа ε_n. Если число $2^m + 1$ простое, то m — степень двойки. Ввиду этих фактов и леммы 2 о комплексификации достаточно показать, что ε_n непостроимо для

(A) простого числа n, не представимого в виде $2^m + 1$;

(B) квадрата нечётного простого числа.

Непостроимость числа ε_n следует из леммы 7 о степенях двойки для корня ε_n многочлена

- $P(x) := x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ в случае (A) и
- $P(x) := x^{p(p-1)} + x^{p(p-2)} + \ldots + x^p + 1 = \dfrac{x^{p^2} - 1}{x^p - 1}$ в случае (B), где $p = \sqrt{n}$.

Неприводимость этих многочленов над $\mathbb{Q}$ вытекает из их неприводимости над $\mathbb{Z}$ и леммы 6 Гаусса. Неприводимость этих многочленов $P(x)$ над $\mathbb{Z}$ вытекает из неприводимости многочленов $P(x+1)$ над $\mathbb{Z}$. Последняя неприводимость доказывается применением признака Эйзенштейна. Выполнение предположений признака Эйзенштейна для многочленов $P(x+1)$ проверяется с помощью сравнения $(x+1)^p \equiv x^p + 1 \bmod p$. □

Лемма 7 о степенях двойки вытекает из леммы 9 о башне расширений и леммы 10(b) о сопряжении (см. ниже).

Подмножество множества $\mathbb{C}$ называется *полем*, если оно замкнуто относительно операций сложения, умножения, вычитания и деления на ненулевое число.

Если $F \subset \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{C}$ и $r^2 \in F$, то обозначим $F[r] := \{a + br : a, b \in F\}$.

Лемма 8. *Пусть $F \subset \mathbb{C}$ — поле, $r \in \mathbb{C}$ и $r^2 \in F$. Тогда $F[r]$ — поле.*

Доказательство. Нужно доказать, что $F[r]$ замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевое число. Это не очевидно только в случае деления, который следует из равенства

$$\frac{1}{a+br} = \frac{a}{a^2 - b^2r^2} - \frac{b}{a^2 - b^2r^2} r. \qquad \square$$

Лемма 9 (о башне расширений). *Число $x \in \mathbb{C}$ построимо тогда и только тогда, когда существуют такие $r_1, \ldots r_{s-1} \in \mathbb{C}$, что*

$$\mathbb{Q} = F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots \subset F_{s-1} \subset F_s \ni x,$$

где $r_k^2 \in F_k$, $r_k \notin F_k$ и $F_{k+1} = F_k[r_k]$ для любого $k = 1, \ldots, s-1$. □

Лемма 10 (о сопряжении). *Пусть $F \subset \mathbb{C}$ — поле, $r \in \mathbb{C}$, $r \notin F$ и $r^2 \in F$.*

(a) *Определим отображение сопряжения $\bar{\cdot} : F[r] \to F[r]$ формулой*

$$\overline{x + yr} := x - yr.$$

Это отображение корректно определено, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ и $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

(b) *Если многочлены $P \in F[x]$ и $Q \in F[r][x]$ имеют общий корень и неприводимы над F и над $F[r]$ соответственно, то* $\deg P \in \{\deg Q, 2 \deg Q\}$.

Доказательство части (a) оставляем читателю в качестве упражнения.

Доказательство части (b). По лемме 8 множество $F[r]$ — поле. Делимость, неприводимость и НОД рассматриваются в $F[r]$. Так как P и Q имеют общий корень и Q неприводим, мы получаем P делится на Q.

Тогда по п. (a) $P = \overline{P}$ делится на $\overline{Q}$. Так как Q неприводим и делится на $D := \gcd(Q, \overline{Q})$, мы получаем либо $D = Q$, либо $D = 1$.

Если $D = Q$, то из $\overline{D} = D$ получаем $Q = D \in F[x]$. Так как P неприводим над F, отсюда получаем $P = Q$.

Если $D = 1$, то P делится на $M := Q\overline{Q}$. Так как $\overline{M} = M$, получаем $M \in F[x]$. Так как P неприводим над F, получаем $P = M$. Значит, $\deg P = 2 \deg Q$. □

Благодарности

Благодарю А. Канунникова и В. Кириченко за полезные замечания.

Список литературы

[1] *Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времён Евклида до наших дней. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017.

[2] *Бурда Ю., Кадец Л.* Семнадцатиугольник и закон взаимности Гаусса // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 61–67.

[3] *Бурда Ю., Кадец Л., Скопенков А.* Письмо в редакцию // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 251–252.

[4] *Dörrie H.* 100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution. New York: Dover Publ, 1965.

[5] *Edwards H. M.* Galois Theory. Springer, 1984.

[6] *Канунников А. Л.* Как придумать построение правильного семнадцатиугольника // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 143–166.

[7] *Канунников А. Л.* Как придумать построение правильного семнадцатиугольника (продолжение) // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 142–149.

[8] *Кириченко В. А.* Построения циркулем и линейкой и теория Галуа. `http://www.mccme.ru//dubna/2005/courses/kirichenko.html`.

[9] *Козлов П. Ю., Скопенков А. Б.* В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач) // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 12. М.: МЦНМО, 2008. С. 127–143. `\http://arxiv.org/abs/0804.4357` (v1).

[10] *Салимгареев Р.* К теореме Гаусса — Ванцеля // Константиновский сборник Приложение к журналу «Математическое образование». Сер. «Образование: история, персоналии, проблемы». Вып. 1(02). Февраль 2019. С. 2–5.

[11] *Skopenkov A.* Mathematics via problems: from olympiads and math circles to a profession. Algebra. Providence: AMS. To appear.

[12] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии / Ред. А. А. Заславский, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков. М.: МЦНМО, 2018. http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf.

А. Б. Скопенков, МФТИ, НМУ

skopenko@mccme.ru, https://users.mccme.ru/skopenko

Как придумать построение правильного семнадцатиугольника (окончание)

А. Л. Канунников

В статье [4] мы рассказали, как доказать теорему Гаусса — Ванцеля и как прийти для этого к периодам Гаусса, используя базовые факты об алгебраических числах. В продолжении статьи мы покажем, как с помощью тех же средств придумать ещё одно доказательство, также восходящее к Гауссу [2, п. 360]. Оно короче, чем рассуждение с периодами, но может показаться менее естественным, поскольку основано на рассмотрении величины, «будто свалившейся с неба», так называемой *резольвенты Лагранжа*. Мы покажем, как прийти к резольвенте Лагранжа естественным путём и как её обобщение применяется в критерии Галуа разрешимости уравнений в радикалах. Интересно, что доказательство теоремы Галуа о циклических расширениях (ключевой в этом критерии) фактически повторяет рассуждение Гаусса с резольвентой.

Напомним, что теорема Гаусса — Ванцеля описывает все натуральные n, при которых правильный n-угольник строится циркулем и линейкой. Наиболее содержательная часть состоит в следующем.

Теорема 1. *Для любого простого числа Ферма $p = 2^m + 1$ число*

$$\varepsilon_p = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$$

поликвадратично (*выражается в квадратных радикалах*).

Минимальным многочленом числа $\varepsilon = \varepsilon_p$ над $\mathbb{Q}$ является круговой многочлен $\Phi_p(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$ [4], поэтому $[\mathbb{Q}(\varepsilon):\mathbb{Q}] = p - 1$. В [4] мы построили поликвадратичную башню $\mathbb{Q} \subset \ldots \subset \mathbb{Q}(\varepsilon)$, на каждом шаге присоединяя периоды.

При поддержке гранта Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

§ 7. Как прийти к резольвенте Лагранжа

Выясним, можно ли получить ε, сразу присоединив к $\mathbb{Q}$ неприводимый радикал степени $p-1$, т. е. такое $r \in \mathbb{C}$, что $r^{p-1} \in K$ и двучлен $x^{p-1} - r^{p-1}$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Предположим, это возможно: $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \mathbb{Q}(r)$. Круговое расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}$ обладает свойством: *все сопряжённые с любым элементом этого расширения лежат в нём* (так как сопряжённые с $f(\varepsilon)$, где $f \in \mathbb{Q}[x]$, имеют вид $f(\varepsilon^k)$). Такие расширения называются *нормальными*. Таким образом, расширение $\mathbb{Q}(r)/\mathbb{Q}$ тоже должно быть нормальным, поэтому все сопряжённые с r — числа $r, r\delta, \ldots, r\delta^{p-2}$, где $\delta = \varepsilon_{p-1}$, — лежат в $\mathbb{Q}(r)$. Значит, $\delta \in \mathbb{Q}(r) = \mathbb{Q}(\varepsilon)$. Но $\mathbb{Q}(\varepsilon_m) \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}$ при взаимно простых m и n [3, задача 18], в частности,

$$\mathbb{Q}(\varepsilon_p) \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_{p-1}) = \mathbb{Q}. \qquad (1)$$

С одной стороны, при $p > 3$ получаем противоречие. С другой стороны, ясно, как спасти рассуждение: нужно вместо поля $\mathbb{Q}$ взять $\mathbb{Q}(\delta)$, тогда $[\mathbb{Q}(\varepsilon, \delta) : \mathbb{Q}(\delta)] = [\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = p-1$ благодаря (1).

Итак, попробуем найти r так, что $r^{p-1} \in \mathbb{Q}(\delta)$ и $\mathbb{Q}(\delta, \varepsilon) = \mathbb{Q}(\delta, r)$. Пусть такое r найдено. Тогда $[\mathbb{Q}(\delta, r) : \mathbb{Q}(\delta)] = p-1$ и число $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\delta, r)$ имеет вид

$$\varepsilon = a_0 + a_1 r + \ldots + a_{p-2} r^{p-2} \qquad (2)$$

для некоторых однозначно определённых $a_0, \ldots, a_{p-2} \in \mathbb{Q}(\delta)$. Сопряжённые с ε, с одной стороны, являются его степенями $\varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$, а с другой, получаются из (2) подстановкой вместо r его сопряжённых $r, r\delta, \ldots, r\delta^{p-2}$. Таким образом,

$$\varepsilon^{n_k} = a_0 + a_1 r\delta^k + \ldots + a_{p-2} r_{p-2} \delta^{k(p-2)},$$
$$n_0 = 1, \quad \{n_1, \ldots, n_{p-2}\} = \{2, \ldots, p-1\}.$$

Сложив все ε^{n_k} с коэффициентами δ^{-k}, получим:

$$\varepsilon + \delta^{-1}\varepsilon^{n_1} + \delta^{-2}\varepsilon^{n_2} + \ldots + \delta^{-p+2}\varepsilon^{n_{p-2}} = (p-1)a_1 r. \qquad (3)$$

Выражение $(p-1)a_1 r$ тоже является радикалом степени $p-1$, как и r, если только $a_1 \neq 0$. Это подсказывает идею стартовать с левой части (3) — нужно только *выбрать удачную нумерацию* $n_0, \ldots, n_{p-2}$.

Пример 1. Рассмотрим случай $p = 5$. Тогда $\varepsilon_{p-1} = \delta = i$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon^{n_0} &= a_0 + a_1 r \ + a_2 r^2 + a_3 r^3, \\ \varepsilon^{n_1} &= a_0 + a_1 r i - a_2 r^2 - a_3 r^3 i, \\ \varepsilon^{n_2} &= a_0 - a_1 r \ + a_2 r^2 - a_3 r^3, \\ \varepsilon^{n_3} &= a_0 - a_1 r i - a_2 r^2 + a_3 r^3 i \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{n_0} - i\varepsilon^{n_1} - \varepsilon^{n_2} + i\varepsilon^{n_3} = 4a_1 r.$$

Расположим степени ε, последовательно возводя в квадрат: $\varepsilon, \varepsilon^2$, $\varepsilon^4, \varepsilon^8 = \varepsilon^3$, т. е. $(n_1, n_2, n_3) = (2, 4, 3)$. При подстановке вместо ε его сопряжённых выражение $\varepsilon - i\varepsilon^2 - \varepsilon^4 + i\varepsilon^3$ умножается на степени мнимой единицы i:

$$\mathscr{L}(\varepsilon) := \varepsilon - i\varepsilon^2 - \varepsilon^4 + i\varepsilon^3 \xrightarrow{\cdot i} \varepsilon^2 - i\varepsilon^4 - \varepsilon^8 + i\varepsilon^6 = \mathscr{L}(\varepsilon^2) \xrightarrow{\cdot i} \mathscr{L}(\varepsilon^4) \xrightarrow{\cdot i} \mathscr{L}(\varepsilon^8).$$

Вернёмся к общему случаю. Чтобы добиться того же эффекта циклического сдвига, нужно найти первообразный корень g по модулю p и расположить степени ε, последовательно возводя в степень g: $\varepsilon, \varepsilon^g, \varepsilon^{g^2}, \ldots, \varepsilon^{g^{p-2}}$, т. е. $n_k = g^k$. Ту же самую идею мы применили, придумывая периоды Гаусса. Проведённый анализ и пример подсказывают, что в качестве искомого радикала должна подойти *резольвента Лагранжа* — число $\mathscr{L}(\varepsilon)$, где

$$\mathscr{L}(x) := x + \delta^{-1}x^g + \delta^{-2}x^{g^2} + \ldots + \delta^{-p+2}x^{g^{p-2}} \in \mathbb{Q}(\delta)[x]. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для любого простого p существует такое $r \in \mathbb{C}$, что $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p-1}, \varepsilon_p) = \mathbb{Q}(\varepsilon_{p-1}, r)$ и $r^{p-1} \in \mathbb{Q}(\varepsilon_{p-1})$, в частности, $\varepsilon_p \in \mathbb{Q}(\varepsilon_{p-1}, r)$.*

Доказательство. Сохраним прежние обозначения ε, δ, g и положим

$$r := \mathscr{L}(\varepsilon) = \varepsilon + \delta^{-1}\varepsilon^g + \delta^{-2}\varepsilon^{g^2} + \ldots + \delta^{-p+2}\varepsilon^{g^{p-2}}. \tag{5}$$

Заметим, что $\mathscr{L}(\varepsilon^g) = \delta\mathscr{L}(\varepsilon) = \delta r$ и вообще

$$\mathscr{L}(\varepsilon^{g^k}) = \delta^k r, \quad k = 0, 1, \ldots, p-2. \tag{6}$$

По [3, теорема 6] числа в левых частях равенств (6) образуют набор сопряжённых с $\mathscr{L}(\varepsilon)$ над $\mathbb{Q}(\delta)$. С другой стороны, числа в правых частях образуют не что иное как набор корней двучлена $x^{p-1} - r^{p-1}$. Казалось бы, это и означает, что данный двучлен является минимальным многочленом для чисел (6). Есть только один нюанс: эти числа должны быть различны, т. е. $r \neq 0$. В противном случае $\mathscr{L}(\varepsilon) = 0$ и $\varepsilon, \varepsilon^g, \ldots, \varepsilon^{g^{p-2}}$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}(\delta)$, что неверно в силу (1). Итак, минимальный многочлен $\mu_r^{\mathbb{Q}(\delta)}(x)$ числа r над полем $\mathbb{Q}(\delta)$ равен $x^{p-1} - r^{p-1}$, в частности, $r^{p-1} \in \mathbb{Q}(\delta)$ и $[\mathbb{Q}(\delta, r) : \mathbb{Q}(\delta)] = p-1$. Так как $\mathbb{Q}(\delta, r) \subseteq \mathbb{Q}(\delta, \varepsilon)$ и $[\mathbb{Q}(\delta, \varepsilon) : \mathbb{Q}(\delta)] = p-1$, мы получаем $\mathbb{Q}(\delta, \varepsilon) = \mathbb{Q}(\delta, r)$. □

Из теоремы 2 следует теорема 1, однако для явного выражения числа ε_p в радикалах степени $p-1$ нужны дополнительные усилия, помимо возведения резольвенты $\mathscr{L}(\varepsilon)$ в $(p-1)$-ю степень, см. [5], где приведено более конструктивное доказательство. Однако в любом случае вычисление этим методом гораздо более громоздко, нежели вычисление периодов. Это неудивительно: при последовательном вычислении периодов все участвующие радикалы оставались в поле $\mathbb{Q}(\varepsilon_p)$, в то время как в методе резольвент появляется новый радикал δ.

§ 8. Идеи Лагранжа

Методы решения уравнений 3-й и 4-й степеней, разработанные в XVI веке итальянскими математиками, были основаны на различных подстановках, заменах, использовали те или иные трюки. Лагранж, со свойственным ему педантизмом, пересмотрел и систематизировал накопленные знания, пытаясь найти универсальный метод, пригодный для уравнений высших степеней. Он разработал метод резольвент, идеи которого использовали Руффини, Абель, Гаусс, Галуа, исследуя проблему разрешимости в радикалах после Лагранжа. Именно в труде Лагранжа об алгебраических уравнениях (1771 г.) были заложены начала теории групп (Лагранж установил связь между порядком и индексом подгруппы в группе перестановок, не вводя явно этих терминов, и соответствующую теорему впоследствии назвали в его честь).

Главная идея Лагранжа в следующем: составить многочлен от корней $x_1, \ldots, x_n$ уравнения n-й степени, принимающий при их перестановках менее n значений, которых, однако, хватит с учётом формул Виета, чтобы восстановить $x_1, \ldots, x_n$. Соответствующие функции от корней и возникающие вспомогательные уравнения Лагранж и назвал резольвентами (resolve — разрешить). Рассмотрим примеры при $n = 3$ и 4.

Заметим прежде всего, что уравнение $y^n + ay^{n-1} + \ldots = 0$ сводится заменой $x = y + a/n$ к уравнению с нулевым коэффициентом при x^{n-1}. При $n = 2$ это означает выделение полного квадрата, приводящее к решению квадратного уравнения.

При $n = 3$ рассмотрим уравнение $x^3 + px + q = 0$ с корнями x_1, x_2, x_3. Анализируя вывод формулы Кардано, Лагранж приходит к следующей функции от корней:

$$\mathscr{C} = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3, \quad \text{где } \varepsilon = \varepsilon_3.$$

Переставляя x_1, x_2, x_3, получим 6 величин, причём при циклических сдвигах они пропорциональны $\mathscr{C}$:

$$x_2 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon^2 \mathscr{C}, \quad x_3 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 = \varepsilon \mathscr{C}.$$

Следовательно, величина $\mathscr{C}^3$ не меняется при таких сдвигах и перестановками из неё можно получить ещё только одну величину:

$$\mathscr{C}'^3 = (x_1 + \varepsilon x_3 + \varepsilon^2 x_2)^3.$$

Поэтому величины $\mathscr{C}^3 + \mathscr{C}'^3$ и $\mathscr{C}^3 \mathscr{C}'^3$ симметрично зависят от x_1, x_2, x_3, а значит, выражаются через p и q. Именно,

$$(y - \mathscr{C}^3)(y - \mathscr{C}'^3) = y^2 + 27qy - 27p^3.$$

Остаётся найти корни этого трёхчлена, извлечь из них кубические корни и найти x_1, x_2, x_3 из системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 = \mathscr{C}, \\ x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 = \mathscr{C}'. \end{cases}$$

Это — альтернативный способ вывести формулу Кардано

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},$$

где квадратные корни принимают одно и то же значение (неважно, какое), а кубические выбираются так, чтобы их произведение было равно $-p/3$.

Аналогично при $n = 4$ для многочлена с корнями x_1, x_2, x_3, x_4 можно рассмотреть выражение $x_1 + ix_2 - x_3 + ix_4$, четвёртая степень которого выдерживает циклические сдвиги, а потому принимает 6 значений при перестановках корней. Можно проверить, что возникающее уравнение 6-й степени распадается на два кубических, но гораздо проще использовать другие функции от корней, например,

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \\ y_2 = x_1x_3 + x_2x_4, \\ y_3 = x_1x_4 + x_2x_3. \end{cases} \tag{7}$$

Эти величины являются корнями кубического уравнения, коэффициенты которого полиномиально зависят от коэффициентов исходного многочлена 4-й степени. Вычисления показывают, что

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = x^4 + ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = y^3 - ay^2 - 4cy + 4ac - b^2.$$

Система (7) вместе с равенством $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ позволяет выразить x_1, x_2, x_3, x_4 через y_1, y_2, y_3 (см., например, [1, с. 139–140]).

§ 9. Резольвента Лагранжа в теории Галуа

Центральный результат теории Галуа — критерий разрешимости полиномиального уравнения в радикалах в терминах его группы Галуа. На этом пути Галуа и ввёл разрешимые группы. Не останавливаясь на теории Галуа подробно, докажем теорему 5 о циклических расширениях —

сердцевину критерия Галуа — и убедимся, что в основе лежит идея Гаусса применить резольвенту Лагранжа, как в теореме 2. Фактически Гаусс построил теорию Галуа двучленного уравнения. Начнём с необходимых определений и фактов.

Пусть L/K — конечное (а значит, алгебраическое) расширение полей, $[L:K]=n$. Будем считать все поля подполями в $\mathbb{C}$. Тогда для любого $\alpha\in\mathbb{C}$, алгебраического над K, многочлен $\mu_\alpha^K(x)$ не имеет кратных корней в $\mathbb{C}$ (см. [3, теорема 3]), поэтому α имеет столько сопряжённых над K, какова его степень (нет проблем с сепарабельностью).

Теорема 3 (о примитивном элементе). *Существует такое $\theta\in L$, что $L=K(\theta)$.*

Доказательство. Достаточно для любых $\alpha,\beta\in L$ найти такое θ, что $K(\theta)=K(\alpha,\beta)$ (далее — по индукции). Будем искать θ в виде $\theta=\alpha+c\beta$, где $0\neq c\in K$. Ясно, что $K(\alpha,\beta)=K(\theta)\iff\beta\in K(\theta)$. Рассмотрим многочлены $\mu_\beta^K(x)\in K[x]$ и $\mu_\alpha^K(\theta-cx)\in K(\theta)[x]$, имеющие общий корень β. Добьёмся того, чтобы β был единственным их общим корнем, тогда

$$\bigl(\mu_\beta(x),\mu_\alpha^K(\theta-cx)\bigr)=x-\beta\in K(\theta)[x]\quad\Rightarrow\quad\beta\in K(\theta).$$

Пусть $\alpha=\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ и $\beta=\beta_1,\ldots,\beta_n$ — все сопряжённые с α и β. Тогда любой общий корень многочленов $\mu_\beta^K(x)$ и $\mu_\alpha^K(\theta-cx)$ — это такое β_j, что $\theta-c\beta_j=\alpha_i$ для некоторого i. Поскольку поле K бесконечно, элемент c можно выбрать так, чтобы равенство $\alpha+c\beta=\alpha_i+c\beta_j$ выполнялось только при $i=j=1$. □

Рассмотрим группу $\mathrm{Aut}_K L$ автоморфизмов L над K (тождественных на K).

Лемма 1. *Для всех $\alpha\in L$ и $g\in\mathrm{Aut}_K L$ элемент $g(\alpha)$ сопряжён с α над K.*

Доказательство. Имеем $\mu_\alpha^K(g(\alpha))=g(\mu_\alpha^K(\alpha))=g(0)=0$. □

Следствие 1. $|\mathrm{Aut}_K L|\leqslant[L:K]$.

Доказательство. Благодаря теореме 3, каждый автоморфизм $g\in\mathrm{Aut}_K L$ определяется значением на θ, причём $g(\theta)$ находится среди сопряжённых с θ, которых не более $\deg_K(\theta)=[L:K]$ штук. □

Если $|\mathrm{Aut}_K L|=[L:K]$, то L/K называют *расширением Галуа*, а группу $\mathrm{Aut}_K L$ — *группой Галуа* и обозначают также $\mathrm{Gal}_K L$.

Теорема 4. *Если L/K — расширение Галуа с группой G, то подполе*

$$L^G=\{\alpha\in L\mid\forall\,g\in G\ \ g(\alpha)=\alpha\}$$

неподвижных элементов совпадает с K.

Доказательство. По следствию 1, применённому к расширению L/L^G, имеем $|\mathrm{Aut}_{L^G} L| \leqslant [L : L^G]$, а поскольку $G = \mathrm{Aut}_{L^G} L$, то

$$|G|=|\mathrm{Aut}_{L^G} L|\leqslant[L:L^G]\leqslant[L:K]=|G| \quad\Rightarrow\quad [L:L^G]=[L:K] \quad\Rightarrow\quad L^G=K. \quad \square$$

Замечание. Можно доказать, что в случае конечного расширения L/K равенство $L^G = K$ является критерием того, что L/K — расширение Галуа. Другая равносильная характеризация расширений Галуа — конечные нормальные сепарабельные расширения.

Предположим, что поле K содержит первообразный корень $\delta = \varepsilon_n$ из единицы степени n. Присоединим к полю K неприводимый радикал r степени n. Группа Галуа расширения $K(r)/K$ состоит из автоморфизмов $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ таких, что $\phi_j \colon r \mapsto r\delta^j$. Очевидно, $\phi_i\phi_j = \phi_{i+j \bmod n}$, поэтому $\phi_j = \phi_1^j$. Значит, $\mathrm{Gal}_K K(r) = \langle\phi_1\rangle_n$ — циклическая группа порядка n. В основе критерия Галуа разрешимости в радикалах лежит обращение этого факта.

Теорема 5. *Пусть L/K — расширение Галуа, $\delta = \varepsilon_n \in K$ и $G = \mathrm{Gal}_K L = \langle g\rangle_n$. Тогда $L = K(r)$ для некоторого такого $r \in L$, что $r^n \in K$.*

Будем следовать доказательству теоремы 2 для расширения $L/K = \mathbb{Q}(\delta, \varepsilon_p)/\mathbb{Q}(\delta)$ и анализу, который нас к нему привёл.

Анализ. Предположим, что искомый радикал r найден. Сопряжённые с r суть $r\delta^k$, $k \in \mathbb{Z}_n$. Можно считать, что $g(r) = r\delta$. Сопряжённые с любым элементом $\alpha = \sum_{j=0}^{n-1} a_j r^j \in L$ $(a_j \in K)$ суть $\sum_{j=0}^{n-1} a_j r^j \delta^{kj} = g^k(\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}_n$. Деля k-е равенство на δ^k и складывая полученные равенства, получим *резольвенту Лагранжа* $na_1 r = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{-k} g^k(\alpha)$. При $a_1 \neq 0$ элемент $na_1 r$ также является радикалом, порождающим L. Это подсказывает идею стартовать с резольвенты Лагранжа, построенной по произвольному $\alpha \in L$, имеющему n сопряжённых, т. е. с примитивного элемента расширения L/K.

Доказательство теоремы 5. Найдём примитивный элемент $\alpha \in L$, $L = K(\alpha)$, и рассмотрим резольвенту Лагранжа

$$r = \alpha + \delta^{-1}g(\alpha) + \delta^{-2}g^2(\alpha) + \ldots + \delta^{-n+1}g^{n-1}(\alpha), \tag{8}$$

замечательную тем, что $g(r) = \delta r$ (поскольку $\delta \in K \Rightarrow g(\delta) = \delta$). Отсюда получаем два следствия:

1) $g(r^n) = g(r)^n = r^n \Rightarrow r^n \in L^G = K$ (теорема 4);
2) $\forall\, i \in \{0, \ldots, n-1\}$ $g^i(r) = \delta^i r \Rightarrow r = 0$ или $|Gr| = n$.

Поскольку все элементы из орбиты Gr сопряжены с r над K (лемма 1), при $r \neq 0$ имеем

$$[L : K] = n \leqslant \deg_K(r) = [K(r) : K] \leqslant [L : K] \quad\Rightarrow\quad L = K(r).$$

Таким образом, элемент r искомый, если только он отличен от нуля. Если $r=0$, то построим аналогичные резольвенты по степеням $\alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$:

$$\begin{gathered} r_k = \alpha^k + \delta^{-1} g(\alpha^k) + \delta^{-2} g^2(\alpha^k) + \ldots + \delta^{-n+1} g^{n-1}(\alpha^k), \\ k = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{9}$$

Так как $g(r_k) = \delta r_k$, верны те же следствия: $r_k^n \in K$ и либо $r_k = 0$, либо $L = K(r_k)$. Предположим, что $r_1 = \ldots = r_{n-1} = 0$. Тогда набор $(1, \varepsilon^{-1}, \ldots, \varepsilon^{1-n})$ является решением однородной системы линейных уравнений с матрицей $(g^j(\alpha^i))_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ (при $i = 0$ получается верное равенство $1 + \delta^{-1} + \ldots + \delta^{1-n} = 0$). Значит, эта матрица вырожденна, т. е. её определитель равен 0. Но это определитель Вандермонда

$$\prod_{i>j} (g^i(\alpha) - g^j(\alpha)),$$

поэтому $g^k(\alpha) = g^l(\alpha)$ при некоторых $1 \leqslant k < l < n$, а тогда $g^k = g^l$, так как α порождает L. Полученное противоречие показывает, что $r_k \neq 0$ при некотором $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ и $L = K(r_k)$. $\square$

Список литературы

[1] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2019.

[2] *Гаусс К. Ф.* Арифметические исследования // Труды по теории чисел. М.: АН СССР, 1959.

[3] *Канунников А. Л.* Алгебраические числа как векторы // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 111–142.

[4] *Канунников А. Л.* Как придумать построение правильного семнадцатиугольника // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 143–166.

[5] *Скопенков А. Б.* Ещё одно доказательство из книги: теорема Гаусса — Ванцеля // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 133–141.

Андрей Леонидович Канунников, мехмат МГУ,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

`andrew.kanunnikov@gmail.com`

Реализуемость дисков с ленточками на ленте Мёбиуса

А. И. Бикеев

Назовём *иероглифом* циклическое слово длины $2n$ из n букв, в котором каждая буква встречается дважды (стандартный термин: мультиграф с вращениями, имеющий одну вершину). Возьмём выпуклый многоугольник на плоскости. Отметим на ограничивающей его ломаной $2n$ непересекающихся отрезков и обозначим их буквами из слова в том порядке, в каком эти буквы следуют в слове. Для каждой буквы соединим соответствующие два отрезка ленточкой так, чтобы различные ленточки не пересекались. Любой полученный таким образом объект будем называть *диском с ленточками, соответствующим данному иероглифу*. Назовём иероглиф *слабо реализуемым* на ленте Мёбиуса, если из неё можно вырезать некоторый диск с ленточками, соответствующий данному иероглифу. В работе приводится критерий слабой реализуемости, дающий квадратичный (по количеству букв) алгоритм. Известные критерии, основанные на формуле Эйлера и теореме Мохара, дают экспоненциальные алгоритмы. Приведённый критерий также основан на критерии Мохара реализуемости диска с ленточками на ленте Мёбиуса.

Введение и основные результаты

В работе строится квадратичный алгоритм распознавания вложимости графа с дополнительной структурой в ленту Мёбиуса. Мы начинаем с элементарного пояснения и формулировки основного результата. История вопроса излагается в замечании 4.

Основным результатом работы является теорема 3. Она является топологической версией следующей леммы. Все импликации в этой лемме, кроме (4) $\Rightarrow$ (3), доказываются непосредственно. Импликация (4) $\Rightarrow$ (3) фактически доказана при доказательстве импликации (4) $\Rightarrow$ (3) теоремы 3.

Лемма 1. *Пусть M — матрица над Z_2. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

При поддержке РФФИ, грант № 19–01–00169. Выражаю благодарность своему научному руководителю А. Скопенкову, а также В. Губареву, Е. Когану, А. Медных и И. Медных за полезные замечания по статье.

(1) *Ранг матрицы M не превосходит* 1.
(2) *Все ненулевые строки матрицы M равны.*
(3) *Одинаковой перестановкой столбцов и строк*[1] *можно из M получить матрицу, у которой некоторый левый верхний квадрат заполнен единицами, а вне его стоят нули.*
(4) *У матрицы M нельзя выбрать одинаковые подмножества строк и столбцов*[2]*, на пересечении которых стоит подматрица вида*:

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix},$$

у которой вместо $*$ стоят нули и единицы.

Назовём **иероглифом** циклическое слово длины $2n$ из n различных букв, в котором каждая буква встречается дважды (стандартные термины: хордовая диаграмма или мультиграф с вращениями, имеющий одну вершину). Иероглифы считаются равными, если получаются друг из друга биективной заменой букв. Возьмём выпуклый многоугольник на плоскости. Отметим на ограничивающей его ломаной непересекающиеся отрезки и обозначим их буквами из слова в том порядке, в каком

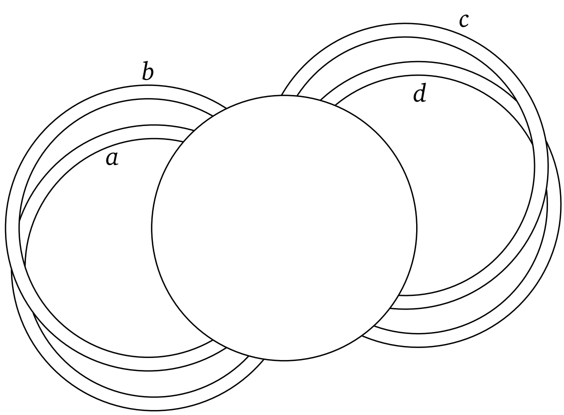


Рис. 1. Пример диска с ленточками, соответствующего иероглифу *ababcdcd*

[1] Это означает, что строки и столбцы занумерованы подряд числами от 1 до n и некоторая перестановка σ чисел от 1 до n применена и к строкам, и к столбцам.

[2] Это означает, что строки и столбцы занумерованы подряд числами от 1 до n и выбраны подмножества тех строк и столбцов, номера которых принадлежат некоторому множеству S.

эти буквы следуют в слове. Для каждой буквы соединим соответствующие два отрезка ленточкой (не обязательно в плоскости) так, чтобы различные ленточки не пересекались. (Ленточки могут быть и перекрученные, и нет.) Любой из полученных таким образом объектов будем называть **диском с ленточками**, соответствующим данному иероглифу (рис. 1).

Назовём иероглиф **слабо реализуемым** на ленте Мёбиуса, если из неё можно вырезать некоторый диск с ленточками, соответствующий данному иероглифу (ср. с замечанием 4).

Теорема 2. *Существует квадратичный алгоритм проверки слабой реализуемости иероглифа на ленте Мёбиуса.*

Будем говорить, что две различные буквы a и b иероглифа **перекрещиваются**, если они идут в этом иероглифе в чередующемся порядке ($abab$, а не $aabb$).

Теорема 3. *Пусть H — иероглиф. Следующие условия эквивалентны*:
(1) *Иероглиф H слабо реализуем на ленте Мёбиуса.*
(2) *Буквы иероглифа H можно раскрасить в красный и синий цвета так, что любые две красные буквы перекрещиваются, а любая синяя буква не перекрещивается ни с какой другой буквой.*
(3) *Операциями удаления пар одинаковых букв, никакая из которых не перекрещивается ни с какой другой буквой, можно свести H к иероглифу вида $a_1a_2\dots a_ma_1a_2\dots a_m$ (возможно, $m=0$).*
(4) *Из H операциями удаления пар одинаковых букв нельзя получить иероглифы $abcacb$ и $ababcdcd$.*
(5) *Найдётся такая матрица над $\mathbb{Z}_2$ ранга не более 1 размера $n\times n$, где n — число различных букв в иероглифе H, что в клетках вне главной диагонали матрицы стоит 0, если соответствующие буквы иероглифа H не перекрещиваются, и 1 в противном случае.*

В теореме 3 импликации (3) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Импликации (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) доказаны далее. Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (5) является частным случаем теоремы Мохара 5, сформулированной далее.

Замечание 4. **История проблемы.** Базовые ссылки по данной теме: [MT01], [Sk20, § 2], [LZ]. По поводу обобщения на произвольные графы см. [MT01], [Sk20, §2], [LZ] и [Ko20]. По поводу связи с интегрируемыми гамильтоновыми системами см. [BFM90]. По поводу других задач, связанных с лентой Мёбиуса, см. [F].

Известны полиномиальные алгоритмы распознавания вырезаемости конкретного двумерного многообразия из ленты Мёбиуса, например, использующие эйлерову характеристику или теорему 5 Мохара. Более сложный полиномиальный алгоритм, для любого m распознающий вырезаемость диска с n ленточками из диска с m лентами Мёбиуса, фактически построен в [Ко20]. Однако из существования этих алгоритмов не следует существование полиномиального алгоритма распознавания слабой реализуемости иероглифа на ленте Мёбиуса, поскольку каждому иероглифу с n парами букв соответствует не одно, а 2^n двумерных многообразий (дисков с ленточками), так как каждая ленточка может быть либо перекрученной, либо нет. Слабая реализуемость иероглифа на ленте Мёбиуса эквивалентна вырезаемости из ленты Мёбиуса хотя бы одного из них. Таким образом, теорема Мохара даёт экспоненциальный алгоритм проверки слабой реализуемости иероглифа на ленте Мёбиуса, основанный на полном переборе, а теорема 3 позволяет проверить это, не рассматривая каждое из многообразий в отдельности.

Доказательства и нерешённая проблема

Доказательство импликации (4) $\Rightarrow$ (3) теоремы 3. Пусть для иероглифа H выполняется условие (4). Обозначим через H_1 иероглиф, получаемый из иероглифа H удалением всех таких букв, которые не перекрещиваются ни с одной другой. Заметим, что условие (4) выполняется и для иероглифа H_1. Предположим, что в иероглифе H_1 есть пара не перекрещивающихся букв a и c.

Если найдётся буква b, перекрещивающаяся и с a, и с c, то, удалив из H_1 все буквы, кроме a, b и c, получим иероглиф $abacbc$, равный иероглифу $abcacb$, что даёт противоречие с условием (4). Значит, любая буква, отличная от a и c, перекрещивается не более чем с одной из них.

Следовательно, в силу того, что в иероглифе H_1 любая буква перекрещивается хотя бы с одной другой, найдутся две различные буквы b и d такие, что b перекрещивается с a, но не перекрещивается с c, а d перекрещивается с c, но не перекрещивается с a. Поэтому если буквы b и d не перекрещиваются, то, удалив все буквы, кроме a, b, c и d, получим иероглиф $ababcdcd$. Если же b и d перекрещиваются, то, удалив все буквы, кроме a, b и d, получим иероглиф $badbda$, равный иероглифу $abcacb$. Во всех случаях получили противоречие с тем, что a и c не перекрещиваются. Значит, любые две буквы иероглифа H_1 перекрещиваются, и тогда он имеет вид $a_1a_2\dots a_na_1a_2\dots a_n$. Следовательно, иероглиф H удовлетворяет условию (3). □

Матрицей перекрещиваний диска с n ленточками D называется матрица размера $n \times n$, у которой

- на главной диагонали стоит 1, если соответствующая ленточка перекручена, и 0 в противном случае, и
- вне главной диагонали на пересечении строки i и столбца j стоит 0, если соответствующие ленточки не перекрещиваются, и 1 в противном случае.

Например, матрицей перекрещиваний любого диска с ленточками, соответствующего иероглифу $abcacb$, является матрица вида

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix}$$

(элементы на главной диагонали зависят от перекрученности ленточек.)

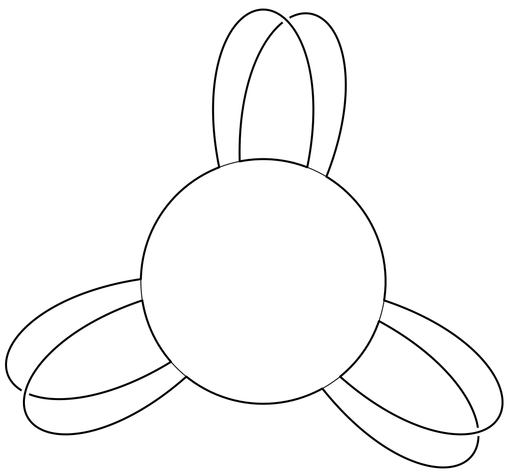


Рис. 2. Диск с тремя лентами Мёбиуса

Диском с m лентами Мёбиуса (рис. 2) называется объединение круга и m ленточек, в котором

- каждая ленточка приклеивается двумя отрезками к граничной окружности S круга, а направления на этих отрезках, задаваемые произвольным направлением на S, «сонаправлены вдоль ленточки»;
- ленточки «отделены», т. е. они приклеены к $2m$ попарно непересекающимся отрезкам на S.

Следующая теорема получается несложным применением формы пересечений двумерного многообразия. Эта теорема была сформулирована и применена Б. Мохаром в [Mo89]. См. также [Sk20, утв. 2.8.8(c)] и [Sk20, утв. 6.7.7].

Теорема 5. *Диск с n ленточками можно вырезать из диска с m лентами Мёбиуса тогда и только тогда, когда ранг над Z_2 матрицы перекрещиваний этого диска с ленточками не превосходит m.*

Доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (4) теоремы 3. Матрица перекрещиваний диска с ленточками, соответствующего иероглифу $abcacb$, изображена выше. При любой расстановке нулей и единиц на её главной диагонали ранг матрицы больше 1. Поэтому по теореме Мохара иероглиф $abcacb$ не является слабо реализуемым на ленте Мёбиуса. По аналогичной причине иероглиф $ababcdcd$ не является слабо реализуемым на ленте Мёбиуса. Отсюда следует нужная импликация. □

Доказательство теоремы 2. Достаточно показать, что условие (3) из теоремы 3 проверяется за квадратичное время. Построим граф G, вершины которого соответствуют буквам иероглифа H, а две вершины соединены ребром, если соответствующие буквы перекрещиваются. Тогда условие (3) эквивалентно тому, что G есть объединение клики и, возможно, нескольких изолированных вершин. Можно перебором проверить все вершины графа G на изолированность, а затем проверить, что все оставшиеся вершины попарно соединены рёбрами. Все части алгоритма (построение графа G и проверка условия (3)) выполняются не более чем за квадратичное время от числа букв в иероглифе. □

Проблема 6. Пусть дана матрица M размера $n \times n$ из нулей и единиц, на диагонали которой стоят нули. Обозначим через $R(M)$ наименьший ранг над Z_2 матрицы, полученной из M изменением каких-нибудь диагональных элементов. Найти быстрый (по n) алгоритм, вычисляющий $R(M)$.

Замечание 7. В статье Е. Когана [Ko20] для каждого фиксированного целого неотрицательного m дан полиномиальный (по n) алгоритм, проверяющий неравенство $R(M) \leqslant m$.

Проблема 6 интересна в силу следующего утверждения.

Утверждение 8. *Если диск с n ленточками с матрицей перекрещиваний M реализуем на диске с m лентами Мёбиуса, то $R(M) \leqslant m$.*

Следующий факт показывает, что проблема 6 не сводится напрямую к задаче о реализуемости иероглифа на ленте Мёбиуса.

Утверждение 9. *Не любая матрица из нулей и единиц является матрицей перекрещиваний какого-нибудь диска с ленточками.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу смежности графа G, изображённого на рис. 3. Его вершины A, B, C попарно не соединены. Если

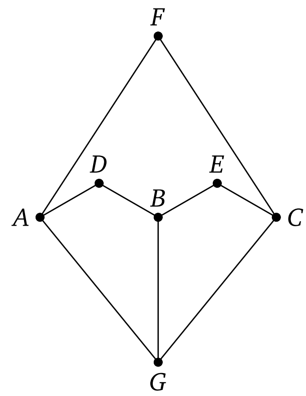


Рис. 3. К утверждению 9

существует диск с ленточками, матрица перекрещиваний которого равна матрице смежности графа G, то концы ленточек, соответствующих вершинам A,B,C, расположены в нём в одном из четырёх следующих циклических порядков: $aabbcc$, $abccba$, $acbbca$, $baccab$. В случае циклического порядка $aabbcc$ ленточка, соответствующая вершине G, не может перекрещиваться со всеми тремя ленточками, соответствующими вершинам A, B, C. В случае циклического порядка $abccba$ ленточка, соответствующая вершине F, не может одновременно перекрещиваться с ленточками, соответствующим вершинам A и C и не перекрещиваться с ленточкой, соответствующей вершине B. Аналогично для остальных двух случаев. Получаем противоречие. □

Любые два диска с ленточками, у которых совпадают матрицы перекрещиваний, гомеоморфны, однако, они могут соответствовать разным иероглифам — например, диски с ленточками, соответствующие иероглифам $aabbcc$ и $abbacc$ соответственно (у каждого из них любые две буквы не перекрещиваются).

Приложение: прямое доказательство импликации (1) ⇒ (4) теоремы 3

Иероглифы $abcacb$ и $ababcdcd$ не являются слабо реализуемыми на ленте Мёбиуса в силу теоремы 10 Бетти и леммы 11.

Теорема 10 (Э. Бетти). *Любые две различные замкнутые ломаные на ленте Мёбиуса разбивают её.*

Доказательство. Теорема Бетти следует из неравенства Эйлера для ленты Мёбиуса [Sk20, 2.8.2] и теоремы Римана для ленты Мёбиуса [Sk20, 2.8.3.(b)]. Приведём детали.

Если данные ломаные не пересекаются, то они разбивают её в силу теоремы Римана для ленты Мёбиуса.

Пусть данные ломаные пересекаются. Можно считать, что вершины и рёбра этих ломаных образуют связный граф. Для любого связного графа с V вершинами и E рёбрами, изображённого без самопересечений на ленте Мёбиуса и разбивающего её на F граней, выполнено неравенство Эйлера: $V - E + F \geqslant 1$. Легко проверить, что в данном случае $V < E$, поэтому $F > 1$, значит, эти ломаные разбивают ленту Мёбиуса. □

Лемма 11. *На любом диске с ленточками, соответствующем иероглифу abcacb или ababcdcd, найдутся две кривые, пересекающиеся в конечном числе точек, которые не разбивают этот диск с ленточками.*

Доказательство.

На рис. 4 и рис. 5 показаны примеры таких пар кривых на дисках с неперекрученными ленточками, соответствующих иероглифам *abcacb* и *ababcdcd*. Покажем, что если заменить одну или несколько ленточек любого из этих дисков с ленточками на перекрученную, то соответствующие пары кривых по-прежнему не будут разбивать полученные диски с ленточками.

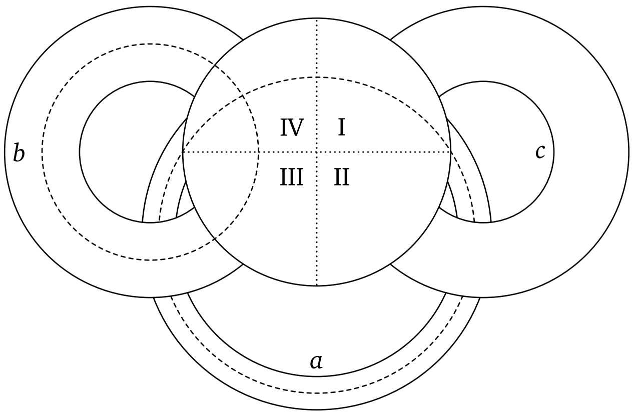


Рис. 4. Диск с ленточками, соответствующий иероглифу *abcacb*, и две кривые на нём

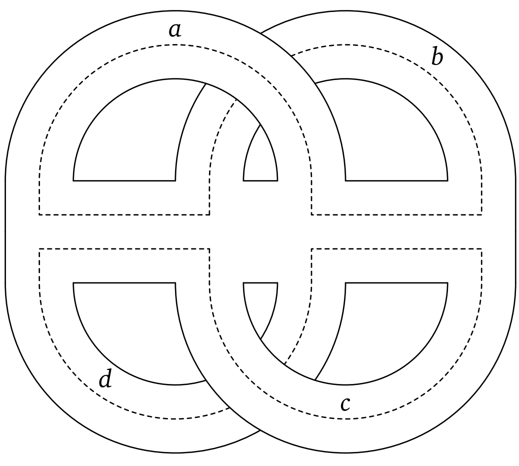


Рис. 5. Диск с ленточками, соответствующий иероглифу *ababcdcd*, и две кривые на нём

Пусть в диске с ленточками, изображённом на рис. 4, некоторые ленточки заменены на перекрученные. Очевидно, ленточка c находится в одной компоненте связности дополнения кривых до диска с ленточками. Тогда области I и II лежат в этой компоненте. Следовательно, в ней целиком лежит ленточка a. Значит, все части 1, 2, 3, 4 лежат в этой компоненте. Тогда в ней лежит и ленточка b. Значит, кривые не разбивают диск с ленточками.

Для иероглифа $ababcdcd$ и диска с ленточками, изображённого на рис. 5, выполнено следующее. Если заменить ленточку b на перекрученную, а ленточку a не заменять, то каждая из частей ленточки a, на которые её разбивает кривая, лежит в одной компоненте связности с центром диска. Таким образом, ленточка a целиком лежит в одной компоненте связности, тогда и ленточка b тоже (каждая её часть не отделена от какой-то из частей ленточки a). То же верно, если заменить ленточку a на перекрученную, а ленточку b не заменять. Если же обе ленточки a и b заменить на перекрученные, то связность обеих ленточек можно проверить непосредственно. Для ленточек c и d можно провести полностью аналогичное рассуждение. □

Список литературы

[BFM90] *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // УМН. 1990. Т. 45, вып. 2. Р. 49–77.

[Ko20] *Kogan E.* On the minimal rank of a matrix with coefficients in Z_2 without the numbers on the main diagonal. arxiv:2104.10668.

[LZ] *Ландо С. К., Звонкин А. К.* Графы на поверхностях и их приложения. М.: МЦНМО, 2010.

[Mo89] *Mohar B.* An obstruction to embedding graphs in surfaces // Discrete Math. 1989. V. 78. P. 135–142.

[MT01] *Mohar B., Thomassen C.* Graphs on Surfaces. Baltimor, MD: Johns Hopkins University Press, 2001.

[Sk20] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2020

[F] *Фукс Д.* Лента Мёбиуса. Вариации на старую тему // Квант. 1979. № 1. С. 2–9.

Артур Игоревич Бикеев, Московский физико-технический институт

`bikeev99@mail.ru`

Геометрия: классика и современность

Обобщение одного факта о треугольниках Наполеона

П. А. Кучерявый

Введение

В октябре 1820 года в Дублинском университете студентам были предложены следующие задачи [2, с. 125–126].

10. На сторонах треугольника ABC построены равносторонние треугольники внешним образом. Докажите, что их центры C, C', C'' составляют равносторонний треугольник.

11. На сторонах треугольника ABC внутренним образом построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры D, D', D'' составляют равносторонний треугольник.

12. Найти связь между площадями треугольников ABC, $CC'C''$, $DD'D''$.

Первые две задачи сейчас широко известны как теорема Наполеона. Результат этой статьи обобщает задачу 12 на многоугольники.

Результат

Зафиксируем натуральное число $n > 2$. Введём обозначения $M = \{1, \ldots, n-1\}$, $M_k = M \setminus \{k\}$. Пусть $r \in M$, и пусть дан произвольный n-угольник A с вершинами $a_1, \ldots, a_n$. Определим преобразование σ_r следующим образом: на отрезке $a_i a_{i+1}$ построим такой равнобедренный треугольник с вершиной b_i, что

$$\angle a_i b_i a_{i+1} = \frac{2\pi r}{n},$$

где $\angle a_i b_i a_{i+1}$ — ориентированный. (В частности, если n чётное и $r = n/2$, то b_i — середина отрезка $a_i a_{i+1}$.) Тогда $\sigma_r(A)$ — многоугольник с вершинами $b_1, \ldots, b_n$.

Теорема. 1. *Для всех $i, j \in M$ преобразования σ_i и σ_j коммутируют. Иными словами,*

$$\sigma_i(\sigma_j(A)) = \sigma_j(\sigma_i(A)).$$

2. *Из предыдущего пункта следует, что корректно определены преобразования*

$$\alpha_k = \prod_{i \in M_k} \sigma_i, \quad \alpha = \prod_{i \in M} \sigma_i.$$

При этом α сопоставляет n-угольнику A вырожденный n-угольник, все точки которого совпадают с центром масс A. В частности, так как $\sigma_k(\alpha_k(A)) = \alpha(A)$, многоугольник $\alpha_k(A)$ — звёздчатый с тем же центром масс, что и A.

3. *Обозначим через S функцию, сопоставляющую n-угольнику его ориентированную площадь. Тогда*

$$\sum_{k \in M} S(\alpha_k(A)) = S(A).$$

Пункты 1 и 2 носят название теоремы Петра — Дугласа — Неймана. Впервые эта теорема была опубликована Карелом Петром в 1908 году [4]. Позже она была независимо переоткрыта Джесси Дугласом в 1940 году [1] и Бернардом Нейманом в 1941 году [3]. Частный случай утверждения 2 был дан в 2009 году в качестве задачи на студенческой олимпиаде мехмата МГУ [5].

В доказательстве пунктов 1 и 2 следуем тексту книги В. В. Прасолова [6, 1.1.10].

Доказательство. Зафиксируем n. Положим

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда C — элемент алгебры матриц $n \times n$ над комплексными числами. Подалгебру, порождённую этим элементом, обозначим $\mathscr{C}$. Элементы этой подалгебры называются *циркулянтами*. Так как минимальный многочлен матрицы C равен $x^n - 1$, получаем естественный изоморфизм

$$\mathscr{C} \simeq \mathbb{C}[x]/(x^n - 1), \quad C \mapsto x.$$

Многочлен, в который переходит циркулянт при данном изоморфизме, будем называть вспомогательным.

Положим

$$\varepsilon_r = e^{2\pi r i/n}, \quad c_r = \frac{1}{1 - \varepsilon_r}.$$

Злоупотребляя обозначениями, будем считать, что $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные координаты вершин многоугольника A. Пусть b_j — координата вершины равнобедренного треугольника с основанием (a_j, a_{j+1}) и углом при вершине $2\pi r/n$. Несложно проверить, что

$$b_i = \frac{a_{i+1} - \varepsilon_r a_i}{1 - \varepsilon_r}.$$

Иными словами, столбец чисел $b_1, \ldots, b_n$ получается из столбца $a_1, \ldots, a_n$ умножением на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\frac{x - \varepsilon_r}{1 - \varepsilon_r}.$$

Так как элементы из $\mathscr{C}$ коммутируют, получаем пункт 1.

Заметим, что

$$f(x) := \prod_{i \in M} (x - \varepsilon_i) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i.$$

Столбец, задающий координаты точки $\alpha(A)$, получается из столбца $a_1, \ldots, a_n$ домножением на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\prod_{i \in M} \frac{x - \varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} = \frac{f(x)}{f(1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{n}.$$

Поэтому если обозначить $c_1, \ldots, c_n$ координаты вершин $\alpha(A)$, то

$$c_j = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{n},$$

что доказывает утверждение 2.

Теперь докажем утверждение 3.

Обозначим через O начало координат. Рассмотрим две точки b, c на комплексной плоскости. Площадь треугольника Obc равна

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \operatorname{Re} b & \operatorname{Im} b \\ \operatorname{Re} c & \operatorname{Im} c \end{vmatrix} = \frac{1}{4i} (\bar{b} c - b \bar{c}).$$

Следовательно, ориентированная площадь многоугольника A равна

$$\frac{1}{4i}\sum_{k=1}^{n}(\bar{a}_k a_{k+1} - a_k\bar{a}_{k+1}) = \frac{1}{4i}\sum_{k=1}^{n} a_k(\bar{a}_{k-1} - \bar{a}_{k+1}).$$

Через X обозначим столбец чисел $a_1, \ldots a_n$, через X_k — столбец из координат вершин многоугольника $\alpha_k(A)$. Положим

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & \vdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ldots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \vdots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, S — циркулянт со вспомогательным многочленом $x^{n-1} - x$. Тогда площадь многоугольника с вершинами a_i, умноженная на $4i$, равна

$$4iS(A) = X^T S\,\overline{X}.$$

Столбец чисел X_k получается из столбца X умножением на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\prod_{i\in M_k}\frac{x-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}.$$

Тогда $\overline{X_k}$ получается из $\overline{X}$ умножением на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\prod_{i\in M_k}\frac{x-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}.$$

Вспомогательный многочлен $\dfrac{x-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}$ задаёт циркулянт

$$D = \begin{pmatrix} 1-c_i & c_i & \vdots & \ldots & 0 \\ 0 & 1-c_i & c_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_i \\ c_i & 0 & \vdots & \ldots & 1-c_i \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что D^T задаётся вспомогательным многочленом

$$\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}.$$

Таким образом, строка X_k^T получается из строки X^T домножением справа на циркулянт со вспомогательным многочленом

$$\prod_{i\in M_k}\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}.$$

Теперь достаточно доказать, что

$$(x^{n-1}-x)\Bigg(\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{x-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)\Bigg)\equiv(x^{n-1}-x)\mod (x^n-1).$$

Для этого достаточно показать, что любой корень n-й степени из 1 также является корнем многочлена

$$(x^{n-1}-x)\Bigg(\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{x-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)-1\Bigg).$$

Пусть ε — некоторый корень n-й степени из 1. Если $\varepsilon=1$, то ε — корень многочлена $x^{n-1}-x$. В противном случае обозначим корень $\bar{\varepsilon}_t$ и покажем, что он является корнем многочлена

$$\Bigg(\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{x-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{x^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)\Bigg)-1.$$

Выполнены равенства

$$\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{\bar{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{\bar{\varepsilon}_t^{n-1}-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)=\sum_{k\in M}\prod_{i\in M_k}\Big(\frac{\bar{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{\varepsilon_t-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)=$$
$$=\prod_{i\in M_t}\Big(\frac{\bar{\varepsilon}_t-\bar{\varepsilon}_i}{1-\bar{\varepsilon}_i}\Big)\Big(\frac{\varepsilon_t-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\Big)=\prod_{i\in M_t}\left|\frac{\varepsilon_t-\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i}\right|^2=1.$$

Последнее равенство следует из того, что существует взаимно однозначное соответствие между векторами $\varepsilon_t-\varepsilon_i$ и векторами $1-\varepsilon_i$, а именно отражение относительно серединного перпендикуляра между точками 1 и ε_t. Оно сохраняет длины векторов, и из него следует равенство

$$\prod_{i\in M_t}|\varepsilon_t-\varepsilon_i|^2=\prod_{i\in M_t}|1-\varepsilon_i|^2. \qquad \square$$

Применим эту теорему к треугольнику ABC из задач 10–12. Выберем такую ориентацию треугольника ABC, чтобы было $S(ABC)>0$. Находим, что

$$\alpha_1(\Delta ABC)=\sigma_2(\Delta ABC)=\Delta CC'C'',$$
$$\alpha_2(\Delta ABC)=\sigma_1(\Delta ABC)=\Delta DD'D''.$$

Из пункта 2 теоремы следует, что $\Delta CC'C''$ и $\Delta DD'D''$ правильные. Очевидно, что $S(CC'C'') > 0$. Заметим, что $\sigma_2(\Delta DD'D'')$ — вырожденный треугольник с тремя совпадающими вершинами. Если бы у $CC'C''$ и $DD'D''$ совпадала ориентация, то $\sigma_2(\Delta CC'C'')$ также был бы вырожденным треугольником, что не верно. Отсюда $S(DD'D'') < 0$.

Таким образом, для неориентированных площадей из пункта 3 теоремы получаем

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CC'C''} - S_{\Delta DD'D''}.$$

Список литературы

[1] *Douglas J.* On linear polygon transformations // Bull. Amer. Math. Soc. 1940. V. 46, № 6. P. 551–560.

[2] Dublin problems: a collection of questions proposed to the candidates for the gold medal at the general examinations, from 1816 to 1822 inclusive. Which is succeeded by an account of the fellowship examination, in 1823. HardPress, 2018.

[3] *Neumann B. H.* Some Remarks on Polygons // J. Lond. Math. Soc. 1941. V. 16, № 4. P. 230–245.

[4] *Petr K.* Ein Satz über Vielecke // Arch. Math. Phys. 1908. V. 13. P. 29–31.

[5] Задача 2009 — 3 // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 227.

[6] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: МЦНМО, 2015.

Пётр Алексеевич Кучерявый, студент факультета математики ВШЭ

peter.ktchr@gmail.com

Прикладная математика, информатика

Принцип симметрии в задачах оптимизации

М. А. Горелов

Использование симметрии задачи при её решении — один из самых фундаментальных методологических принципов. Всем профессиональным математикам это хорошо известно. Однако в средней, да вероятно и в высшей школе, этому принципу уделяется явно недостаточно внимания. По-видимому, происходит это потому, что чаще всего центральными являются какие-то другие идеи, а принцип симметрии используется как некое вспомогательное средство, позволяющее лишь упростить решение. Однако существуют большие классы задач, при решении которых использование симметрии является основной идеей, позволяющей довести решение до конца. Во многих случаях использование принципа симметрии позволяет избежать длинных вычислений или использования сложного математического аппарата. Об одном из таких классов задач и пойдёт речь далее.

§ 1. Необходимые условия максимума

Необходимые условия экстремума достаточно широко представлены в курсах математики. Но обычно ограничиваются изучением условий, использующих приближения заданных функций линейными: для гладких функций используются приближения «в малом», а для выпуклых — односторонние приближения. К такого рода условиям можно отнести изучаемое в школе необходимое условие Ферма, метод множителей Лагранжа, теорему Куна — Такера, принцип максимума Понтрягина, теорему Милютина — Дубовицкого и т. д. Об этом написано много книг (см., например, [2, 3]), да и оригинальные статьи продолжают выходить до сих пор.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 28, 2021 (165–198)

Нас будут интересовать условия иного рода. Неформально говоря, их можно сформулировать следующим образом: если задача обладает какой-то симметрией, то такой же симметрией должно обладать и её решение [4]. Сформулируем этот принцип более строго.

Задачей максимизации будем называть пару $\langle X, f\rangle$, где X — множество, а f — функция, отображающая множество X в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Автоморфизмом задачи $\langle X, f\rangle$ назовём такое биективное (взаимно однозначное) отображение $\pi\colon X \to X$, что для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(\pi(x)) = f(x)$.

Множество автоморфизмов задачи с операцией композиции отображений образует группу. Мы этот факт существенно использовать не будем, поэтому его доказательство оставляем читателю.

Решением задачи $\langle X, f\rangle$ будем считать множество

$$\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x) = \{x \in X \colon \forall\, y \in X \quad f(x) \geqslant f(y)\}.$$

В дальнейшем мы будем широко применять следующее простое утверждение.

Основная теорема. *Пусть π — автоморфизм задачи $\langle X, f\rangle$. Тогда образ $\pi(\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x))$ множества $\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$ при отображении π совпадает с самим множеством $\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$. Тогда для любого $y \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(y)$, а в силу определения автоморфизма справедливо равенство $f(\pi(x)) = f(x)$. Следовательно, для любого $y \in X$ имеет место неравенство $f(\pi(x)) \geqslant f(y)$, т. е. $\pi(x) \in \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$. Таким образом, $\pi(\operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)) \subset \operatorname{Arg}\max_{x\in X} f(x)$. □

Обратное включение доказывается аналогично.

Обратим внимание на то, что основная теорема даёт необходимое условие глобального максимума. Разумеется, аналогичные условия могут быть сформулированы для локальных максимумов, глобальных минимумов и т. п.

Поскольку речь идёт о необходимом условии, эффективно использовать основную теорему можно лишь в тех задачах, в которых максимум достигается. Но то же, разумеется, относится и к «традиционным» необходимым условиям экстремума.

Приведём два важных примера автоморфизмов.

Пусть t — действительное число, а отображение $\pi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ставит в соответствие точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ точку $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_k)$. Если $X = \mathbb{R}^k$, а

$$f(x) = \frac{(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_x)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2},$$

то π — автоморфизм задачи $\langle X, f\rangle$. В данном случае группа автоморфизмов задачи $\langle X, f\rangle$ изоморфна группе ненулевых действительных чисел по умножению.

Разумеется, здесь дело в однородности функции f. Это свойство можно с успехом применять при решении задач оптимизации. Но об этом неоднократно писалось (см., например, [1, 6]), поэтому подробно останавливаться на таких автоморфизмах не станем[1)].

Основное внимание сосредоточим на автоморфизмах иного рода. Пусть σ — перестановка элементов множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. С каждой такой перестановкой можно связать отображение $\sigma_*\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, ставящее в соответствие точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ точку $\sigma_*(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$. Очевидно, отображение σ_* биективно на $\mathbb{R}^k$, а его сужение (которое будем обозначать тем же символом) на множество $\mathbb{R}^k_+$ точек с неотрицательными координатами биективно на $\mathbb{R}^k_+$.

Если $X = \mathbb{R}^k$, а $f(x) = x_1x_2\ldots x_k$, то для каждой перестановки σ соответствующее отображение σ_* является автоморфизмом задачи $\langle X, f\rangle$.

Если $X = \mathbb{R}^3$, а $f(x) = x_1^2x_2 + x_2^3x_3 + x_3^2x_1$, то для чётных перестановок σ соответствующие отображения σ_* являются автоморфизмами, а для нечётных — нет.

На этом мы закончим изложение «теории» и перейдём к решению конкретных задач. Как будет видно, при этом без полученных знаний вполне можно обойтись. Но некий общий взгляд на вещи кажется достаточно важным.

Большинство дальнейших примеров возникает из задач на доказательство неравенств. И начнём мы с самой популярной из них.

§ 2. Неравенство Коши

Нашей ближайшей целью будет доказательство неравенства Коши[2)] между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}.$$

[1)] Возможно, для однородных функций ненулевой степени понятие автоморфизма стоило бы определить чуть более широко: назовём автоморфизмом задачи оптимизации $\langle X, f\rangle$ пару (π, φ), состоящую из функции $\pi\colon X \to X$ и возрастающей функции $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если выполняется равенство $\varphi(f(\pi(x))) = f(x)$. Тогда пара (π, φ) функций $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_k)$ и $\varphi(y) = t^{-d}y$ $(t > 0)$ будет автоморфизмом задачи оптимизации $\langle X, f\rangle$, если $X = \mathbb{R}^k$, а f — однородная функция степени d.

[2)] Огюстен Луи Коши (1789–1857) — французский математик. Он известен оригинальными результатами в самых разных областях математики, от тео-

Данное неравенство выполняется для всех неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Для доказательства достаточно установить, что при произвольном неотрицательном s максимум функции $f(a) = a_1 a_2 \ldots a_k$ на множестве

$$A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1 + a_2 + \ldots + a_k = ks,\ a_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

достигается в точке $a^0 = (s, s, \ldots, s)$.

Функция f непрерывна, а множество A компактно, поэтому максимум достигается.

Пусть он достигается в некоторой точке $a^1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1)$, отличной от a^0. Поскольку $f(a^0) > 0$, координаты точки a^1 строго положительны.

Так как $a^1 \neq a^0$, найдутся индексы i и j, для которых $a_i^1 \neq a_j^1$. Пусть σ — транспозиция, определённая на множестве $\{1, 2, \ldots, k\}$, меняющая местами числа i и j. Тогда σ_* — автоморфизм задачи $\langle A, f \rangle$. Поэтому точка $a^2 = \sigma_*(a^1)$ — тоже точка максимума.

Пусть S — отрезок, получающийся при пересечении прямой (a^1, a^2) с множеством A. Тогда сужение функции f на этот отрезок имеет две точки максимума a^1 и a^2. Причём обе эти точки лежат внутри отрезка.

Но такого не может быть, поскольку это сужение — многочлен второй степени. Полученное противоречие доказывает, что сделанное предположение неверно, и единственной точкой максимума является точка a^0.

Неравенство доказано. Причём попутно установлено, что равенство достигается, только если значения всех переменных равны.

В книге [10] собраны 74 доказательства неравенства Коши. Почти все они используют в разных сочетаниях три идеи:

- индукцию;
- выпуклость;
- дифференциальное исчисление.

Приведённое выше доказательство основано на другой, более фундаментальной идее. Читатель может убедиться, что оно не сложнее уже известных доказательств. А то, что для получения окончательного результата не пришлось иметь дело с какими-то формулами, тоже можно рассматривать как некое достоинство.

рии чисел до геометрии и механики. Но большое внимание он уделял и систематизации накопленных к тому времени знаний. В частности, в 1821 г. вышел в свет его «Курс анализа Королевской политехнической школы», в котором было опубликовано доказательство неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Это доказательство до сих пор остаётся наиболее популярным.

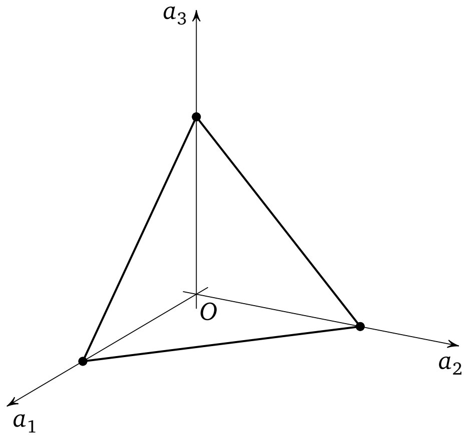


Рис. 1

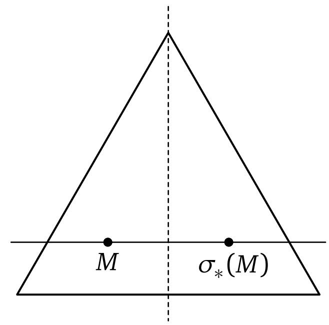


Рис. 2

Удобно иметь в виду следующие геометрические образы. Множество A — это стандартный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^k$ (см. рис. 1 — разумеется, для случая $k = 3$). На рис. 2 этот симплекс нарисован отдельно. Преобразование σ_* — симметрия этого симплекса относительно гиперплоскости. Если точка максимума M не лежит в этой гиперплоскости, то и симметричная ей точка $\sigma_*(M)$ будет точкой максимума, а отсюда получается противоречие. Поскольку все симметрии симплекса являются автоморфизмами данной задачи, точка максимума должна принадлежать всем плоскостям симметрии. А такая точка только одна.

Упражнения

1 (Киевская математическая олимпиада, 1949 год, 9–10 классы). Докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^2 \leqslant m(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — произвольные действительные числа.

2. Докажите, что для всех положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняется неравенство

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) \geqslant k^2.$$

3 [11, 1973 год, 182]. Докажите, что

а) если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2};$$

б) если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3};$$

в) если $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — положительные числа ($k \geqslant 2$), то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_k}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_k}+\ldots+\frac{a_k}{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}} \geqslant \frac{k}{k-1}.$$

(*Л. Г. Лиманов*)

Указание. Задача сводится к предыдущей, если к каждой дроби добавить 1.

4 (неравенство Серпинского[3]). Пусть $A=(a_1+a_2+\ldots+a_k)/k$ — среднее арифметическое, $G=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$ — среднее геометрическое, а

$$H=\frac{k}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_k}}$$

— среднее гармоническое положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Докажите неравенство $G^k \leqslant A^{k-1}H$.

5 (из материалов жюри Международной математической олимпиады, 1998 г.). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — положительные числа такие, что a_1+a_2+ $+\ldots+a_k<1$. Докажите, что

$$\frac{a_1a_2\ldots a_k(1-a_1-a_2-\ldots-a_k)}{(a_1+a_2+\ldots+a_k)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)} \leqslant \frac{1}{k^{k+1}}.$$

§ 3. Симметрические неравенства

Задача 1 (XXVI Московская математическая олимпиада, 1963 год, 9 класс, задача 3). Пусть a, b, c — любые положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Умножим неравенство на наименьший общий знаменатель и перенесём все слагаемые в левую часть. Получим неравенство вида $\Phi(a,b,c) \geqslant 0$. Вид функции $\Phi(a,b,c)$ нетрудно найти, но даже это нам не потребуется. Достаточно понимать, что $\Phi(a,b,c)$ — симметрический однородный многочлен третьей степени.

Задача будет решена, если удастся доказать, что неравенство

$$\Phi(a,b,c) \geqslant 0$$

[3] Вацлав Франциск Серпинский (1882–1969) — польский математик, автор работ по теории множеств, топологии, теории функций и теории чисел. Читателю, возможно, знакома такая красивая конструкция, как ковёр Серпинского. На русский язык переведены несколько его популярных книг, например [7, 8].

справедливо для всех *неотрицательных*[4)] значений переменных. Это обеспечит существование минимума у функции $\Phi(a,b,c)$.

Будем рассматривать задачу поиска минимума функции $\Phi(a,b,c)$ на множестве

$$A=\{(a,b,c)\colon a+b+c=1,\ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0\}.$$

В группу автоморфизмов этой задачи входят все движения пространства, отображающие треугольник A на себя.

Возможны три случая: искомая точка минимума M лежит внутри треугольника, лежит внутри стороны треугольника или совпадает с его вершиной.

Рассмотрим первый случай. Если для какого-то автоморфизма π точка $\pi(M)$ отлична от M, то получим противоречие: сужение функции Φ на прямую, проходящую через точки M и $\pi(M)$, имеет две точки минимума внутри отрезка, по которому эта прямая пересекает множество A. Но это сужение — многочлен третьей степени. Поэтому его производная — квадратичная функция и не может два раза менять знак с минуса на плюс, что происходит в точках минимума.

Значит, точка M инвариантна относительно всех автоморфизмов задачи и, следовательно, совпадает с центром треугольника.

Во втором случае можем аналогичным образом рассмотреть автоморфизмы, отображающие рассматриваемую сторону на себя[5)]. Тогда придём к выводу, что точка минимума должна совпадать с серединой стороны.

В результате мы придём к тому, что неравенство $\Phi(a,b,c)\geqslant 0$ достаточно проверить в трёх случаях: 1) $a=b=c=1/3$; 2) $a=b=1/2$, $c=0$; 3) $a=1$, $b=c=0$.

В первых двух случаях неравенство $\Phi(a,b,c)\geqslant 0$ равносильно исходному, поэтому можно проверять последнее. Это уже банальные вычисления, но и их можно немного упростить. В силу того, что исходное неравенство однородно (степени 0), оно выполняется при $a=b=c=1/3$ тогда и только тогда, когда оно выполняется при $a=b=c=1$. А в этом случае левая часть

[4)] Так как многочлен — функция непрерывная, из того, что неравенство $\Phi(a,b,c)\geqslant 0$ справедливо при всех положительных значениях переменных, следует, что оно выполняется и при всех неотрицательных числах a,b,c. Разумеется, обратное верно всегда. Поэтому, усиливая утверждение, мы по сути ничего не меняем.

[5)] Здесь это не очень существенно, но на будущее важно понять, что в этом случае сужение функции Φ на прямую, содержащую сторону треугольника, будет многочленом второй, а не третьей степени. И следует это как раз из симметрии задачи. Разберитесь в этом!

неравенства как раз равна $3/2$. Точно так же проверка случая 2) сводится к вычислению левой части данного в условии неравенства при $a=b=1$, $c=0$.

Остаётся разобраться со случаем 3. Если мы умножим данное в условии неравенство на наименьший общий знаменатель и подставим значения $a=1$, $b=c=0$, то в правой части полученного неравенства окажется нуль. А многочлен в левой части имеет только положительные коэффициенты, поэтому его значение в интересующей нас точке уж во всяком случае неотрицательно[6]. Это завершает решение задачи.

Результат последней задачи называют неравенством Несбита (A. M. Nesbitt), поскольку он опубликовал эту задачу в 1903 г. Неравенство Несбита[7] имеет большое число обобщений и аналогов. Один из них рассмотрим прямо сейчас.

Следующая задача была предложена в 1990 г. в журнале American Mathematical Monthly (задача E3263). Ниже она сформулирована так, как в журнале, включая звёздочку, обозначающую повышенную трудность.

Задача 2. Для $1 \leqslant k \leqslant n$ рассмотрим функцию

$$\Phi_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\frac{a_1}{1-a_1}\cdot\frac{a_2}{1-a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_k}{1-a_k}+\ldots+\frac{a_{n-k+1}}{1-a_{n-k+1}}\cdot\frac{a_{n-k+2}}{1-a_{n-k+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{1-a_n},$$

где в сумму входят слагаемые, отвечающие всем наборам индексов $1\leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Пусть $M_k(n)$ — наибольшее значение этой функции для всех положительных значений переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Нетрудно видеть, что $M_n(n)=(n-1)^{-n}$.

(а) Докажите, что $M_2(n)=1$.

(б) Докажите, что $M_3(4)=4/27$.

(в*) Для каких пар k, n, удовлетворяющих условию $3 \leqslant k \leqslant n$, верно равенство $M_k(n)=C_n^k(n-1)^{-k}$? (C_n^k — число сочетаний).

Решение. Прежде всего обсудим, почему эта задача аналогична неравенству Несбита? В левой части неравенства Несбита стоит однородная функция степени нуль. А потому его достаточно доказать для случая $a+b+c=1$. Но тогда его можно записать в виде

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c} \geqslant \frac{3}{2}.$$

[6] А можно воспользоваться соображениями непрерывности. Вблизи этой вершины симплекса левая часть исходного неравенства принимает очень большие положительные значения, поэтому разность левой и правой частей исходного неравенства, а значит, и $\Phi(a,b,c)$ положительны. Тогда в самой вершине значение $\Phi(a,b,c)$ неотрицательно, что и требуется.

[7] В другом контексте имя автора этой задачи мне не встречалось.

В левой части этого неравенства стоит функция $\Phi_1(a, b, c)$. Правда, в этой задаче ищется минимум функции (наибольшего значения, очевидно, нет).

Равенство $M_n(n) = (n-1)^{-n}$, о котором говорится в задаче, сводится к неравенству

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k) \geqslant (k-1)^k a_1 a_2 \ldots a_k,$$

которое доказывается аналогично неравенству Коши.

Теперь приступим непосредственно к решению. Положим $m_2(n) = 1$ и $m_k(n) = C_n^k(n-1)^{-k}$ при $k > 2$ и докажем неравенство

$$\Phi_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant m_k(n).$$

Умножим это неравенство на произведение $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)$ и докажем, что получившееся неравенство выполняется для всех неотрицательных значений переменных, в сумме дающих единицу. В правой части будет стоять указанное произведение, умноженное на константу, т. е. в правую часть каждая из переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будет входить в первой степени. В левой части будет стоять n слагаемых, в каждое из которых будет входить сомножителем либо a_i, либо $1-a_i$, но не оба этих выражения вместе. Поэтому и в левую часть каждая переменная будет входить в первой степени. А потому, если мы перенесём правую часть налево и зафиксируем значения всех переменных, кроме двух, то получим многочлен второй степени относительно двух оставшихся переменных. Значит, рассуждения, использовавшиеся в приведённом выше доказательстве неравенства Несбита, пройдут дословно.

В результате мы придём к тому, что неравенство достаточно доказать для случая, когда l переменных положительны и равны между собой, а остальные равны нулю ($l = 1, 2, \ldots, n$).

При $l=1$ в правой части стоит нуль, а в левой — сумма заведомо неотрицательных слагаемых. Этот случай очевиден. А при $l > 1$ полученное неравенство равносильно исходному, значит, можно его и проверять.

Если $k > l$, то значение максимизируемой функции равно нулю и всё очевидно.

При $l \geqslant k$ значения положительных переменных равны $1/l$, а значение функции $\Phi_k(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равно $C_l^k \cdot 1/(l-1)^k$. Из этих чисел нужно выбрать наибольшее.

Дальнейшие рассуждения придётся проводить для каждого пункта отдельно.

В пункте (а) имеем

$$C_l^2 \cdot \frac{1}{(l-1)^2} = \frac{l(l-1)}{2} \cdot \frac{1}{(l-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{l-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{l-1}\right).$$

Очевидно, это выражение уменьшается с ростом l, поэтому наибольшее значение соответствует $l = 2$ и равно единице.

Обращаясь к пункту (б), рассмотрим значения

$$C_l^3 \cdot \frac{1}{(l-1)^3} = \frac{l(l-1)(l-2)}{6} \cdot \frac{1}{(l-1)^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{l^2-2l}{l^2-2l+1} = \\ = \frac{1}{6}\Big(1 - \frac{1}{l^2-2l+1}\Big) = \frac{1}{6}\Big(1 - \frac{1}{(l-1)^2}\Big).$$

Это выражение растёт с ростом l, а потому наибольшее значение достигается при $l = n$. При $n = 4$ получим ответ на поставленный вопрос.

А кроме того, здесь содержится ключ к общему случаю. А именно, при $k > 3$ имеем

$$C_l^k \cdot \frac{1}{(l-1)^k} = \frac{l(l-1)\ldots(l-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{(l-1)^k} = \\ = \frac{1}{k!} \cdot \frac{l(l-2)}{(l-1)^2} \cdot \frac{l-3}{l-1} \cdot \ldots \cdot \frac{l-k+1}{(l-1)} = \\ = \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{(l-1)^2}\Big)\Big(1 - \frac{2}{l-1}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{k-2}{l-1}\Big).$$

Это выражение также возрастает с ростом l, поэтому максимум функции $\Phi_k(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ достигается, когда значения всех переменных равны, т. е. утверждение из пункта (в) справедливо при всех $n \geqslant 3$.

Стоило ли тут ставить звёздочку?

Упражнения

6. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ неотрицательны и $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1$. Докажите, что

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k) \geqslant \Big(\frac{k+1}{k-1}\Big)^k (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k).$$

7 (Польская математическая олимпиада, 1966 год). Докажите, что если неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ удовлетворяют неравенству $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqslant 1/2$, то $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k) \geqslant 1/2$.

8 (Международная математическая олимпиада, 1964 год; Австрийская математическая олимпиада, 1971 год). Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

9 [11, 1992 год, 1364]. Пусть $a+b+c=1$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Докажите неравенства

а) $4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 15abc \geqslant 1$;

б) $a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geqslant \min\Big\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27}\Big\}$. (*В. А. Сендеров*)

10. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)^k \geqslant a_1a_2\ldots a_k + \frac{1}{k^2(k-1)}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)^{k-2}\Delta,$$

где

$$\Delta = (a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\ldots+(a_1-a_k)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_{k-1}-a_k)^2.$$

§ 4. Неравенства для сторон треугольника

Рассмотрим немного более сложный пример.

Задача 3 (Международная математическая олимпиада, 1964 год, задача 2). Обозначим через a, b, c длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу однородности можно считать, что периметр треугольника равен 12. Нарисуем картинки, аналогичные рис. 1 и 2. Числам a, b, c соответствуют точки правильного треугольника, высекаемого координатными плоскостями на плоскости, проходящей через точки $(12, 0, 0)$, $(0, 12, 0)$ и $(0, 0, 12)$. Кроме того, должны выполняться неравенства $a < b+c$, $b < a+c$ и $c < a+b$. Эти точки заполняют внутренность меньшего правильного треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника. Докажем, что данное в условии неравенство справедливо даже при выполнении условий $a \leqslant b+c$, $b \leqslant a+c$ и $c \leqslant a+b$.

Теперь мы попадаем в привычную ситуацию и, повторив стандартные рассуждения, придём к выводу, что неравенство достаточно проверить в трёх случаях.

1. Имеют место все три неравенства $a<b+c$, $b<a+c$ и $c<a+b$, и тогда $a=b=c=4$. В этом случае доказываемое неравенство обращается в равенство.
2. Ровно одно из неравенств $a \leqslant b+c$, $b \leqslant a+c$ или $c \leqslant a+b$ обращается в равенство. Если это первое неравенство, то $a=6$, $b=c=3$. В этом случае приходим к верному неравенству $108 < 162$.
3. Два из неравенств $a \leqslant b+c$, $b \leqslant a+c$ и $c \leqslant a+b$ обращаются в равенство. Если это первые два неравенства, то $a=b=6$ и $c=0$. В этом случае данное неравенство обращается в равенство.

Все случаи разобраны и задача решена.

Упражнения

11 [11, 1991 год, 1333]. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполняется неравенство

$$a^2(2b+2c-a)+b^2(2c+2a-b)+c^2(2a+2b-c) \geqslant 9abc.$$

(*Л. Д. Курляндчик*)

12 [11, 1982 год, 727]. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+2abc<2$, где a, b, c — длины сторон треугольника периметра 2.

(*И. Жаров, А. А. Егоров*)

13 (Международная математическая олимпиада, 1991 год, задача 1 [11, 1991 год, 1317]). Докажите для любого треугольника ABC неравенство

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leqslant \frac{8}{27},$$

где I — центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C — длины биссектрис треугольника ABC. (*А. Б. Скопенков*)

14 [11, 1970 год, 7]. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$ (*С. Т. Берколайко*)

15 (Польская математическая олимпиада, 1961 год). Докажите, что если длина любой из сторон треугольника меньше 1, то площадь треугольника меньше $\sqrt{3}/4$.

§ 5. Неравенство Минковского

Иногда бывает удобно доказывать неравенства, вычисляя минимум вспомогательной функции не при фиксированной сумме переменных, а при фиксированном произведении. Продемонстрируем это на примере результата, полученного Германом Минковским[8)].

Для неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_k$ справедливо неравенство

$$\sqrt[k]{(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ldots(x_k+y_k)} \geqslant \sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}+\sqrt[k]{y_1y_2\ldots y_k}.$$

[8)] Герман Минковский (1864–1909) — немецкий математик, сумевший объединить геометрию с теорией чисел и физикой. Один из учителей Альберта Эйнштейна.

Прежде всего воспользуемся свойством однородности этого неравенства. Если одно из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ равно нулю, неравенство очевидно. В противном случае обе части неравенства можно поделить на $\sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_k}$:

$$\sqrt[k]{\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_2}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{y_k}{x_k}\right)} \geqslant 1+\sqrt[k]{\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{y_k}{x_k}}.$$

Введём новые переменные

$$a_1=\frac{y_1}{x_1}, \quad a_2=\frac{y_2}{x_2}, \quad \ldots, \quad a_k=\frac{y_k}{x_k}.$$

Доказываемое неравенство перепишется в виде

$$\sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)} \geqslant 1+\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}.$$

Фиксируем произвольное положительное число C и будем искать наименьшее значение функции

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots a_k) = (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)$$

при условии $a_1 a_2 \ldots a_k = C$. Достаточно доказать, что искомый минимум достигается при $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$.

Допустим противное. Не ограничивая общности, можно считать, что этот минимум достигается в некоторой точке $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ такой, что $b_1 \neq b_2$.

Тогда функция двух переменных $F(a_1, a_2) = \Phi(a_1, a_2, b_3 \ldots b_k)$ достигает наименьшего значения на множестве переменных, удовлетворяющих условию

$$a_1 a_2 = c = \frac{C}{b_3 b_4 \ldots b_k},$$

в двух точках (b_1, b_2) и (b_2, b_1).

Значит, функция одной переменной

$$f(t) = F\left(\sqrt{a_1 a_2}\,t, \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{t}\right)$$

достигает наименьшего значения при $t=\sqrt{a_1/a_2}$ и при $t=\sqrt{a_2/a_1}$.

Но такая функция не может достигать минимума в двух разных точках. В самом деле: эта функция имеет вид

$$f(t) = \alpha t + \frac{\beta}{t} + \gamma,$$

где α, β, γ — некоторые константы. Если m — наименьшее значение этой функции, то функция $f(t)-m$ всюду неотрицательна и равна нулю в двух разных точках. Тогда и функция $t(f(t)-m)$ всюду неотрицательна и равна нулю в двух точках, т. е. принимает наименьшее значение при двух разных значениях t. Но этого не может быть, так как $t(f(t)-m)$ — квадратный трёхчлен.

Полученное противоречие доказывает неравенство Минковского.

Упражнения

16 (областной этап Всероссийской математической олимпиады, 1993 год, 9 класс, задача 6). Докажите, что для любых $|x| < 1$, $|y| < 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geqslant \frac{2}{1-xy}.$$

17 (Ирландская математическая олимпиада, 2002 год). Докажите, что для положительных чисел a, b, c, меньших 1, выполняется неравенство

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geqslant \frac{\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}.$$

18. Докажите, что если положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ меньше 1, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \ldots + \frac{1}{1-a_k} \geqslant \frac{k}{1-\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}}.$$

19 (из материалов жюри Международной математической олимпиады, 1998 год). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — действительные числа, большие чем 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_k} \geqslant \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}}.$$

20. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — положительные действительные числа, меньшие чем 1. Докажите, что[9)]

$$\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{1+b_2} + \ldots + \frac{1}{1+b_k} \leqslant \frac{k}{1+\sqrt[k]{b_1b_2\ldots b_k}}.$$

§ 6. Циклические неравенства

Термином «симметрический» выражают, в известном смысле, максимальную степень симметрии[10)]. Чуть меньший, но всё же значительный интерес представляют и некоторые другие классы неравенств.

Рассмотрим функции k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Допустим, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ остаётся неизменной при циклической перестановке

[9)] Сравните этот результат с результатом предыдущего упражнения, и подумайте, как такое может быть. Здесь спрятано интересное явление, которое я не могу здесь обсуждать, ибо «нельзя объять необъятного».

[10)] Этот термин является общепринятым. Связан он, видимо, с тем, что группа симметрий рассматриваемого в данной статье вида является симметрической группой (хотя явно эта группа обычно не появляется).

переменных $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_3$, ..., $x_{k-1} \to x_k$, $x_k \to x_1$, т. е. $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_2, x_3, \ldots, x_k, x_1)$. Тогда выполняется равенство $f(x_2, x_3, \ldots, x_k, x_1) = f(x_3, x_4, \ldots, x_1, x_2)$ и по сделанному предположению $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_3, x_4, \ldots, x_1, x_2)$, т. е. функция остаётся неизменной при перестановке $x_1 \to x_3$, $x_2 \to x_4$, ..., $x_{k-1} \to x_1$, $x_k \to x_2$. Продолжая подобные рассуждения, мы найдём k перестановок, включая тождественную, которые не меняют рассматриваемую функцию.

Если этими перестановками исчерпывается список всех перестановок, при которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ остаётся неизменной, то неравенство $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geqslant 0$ называется циклическим (опять-таки по названию соответствующей группы симметрии).

Если вернуться к описанной выше геометрической интерпретации, то можно заметить, что циклическое неравенство не меняется при поворотах изображённого на рис. 1 и 2 треугольника на $120°$ и $240°$ вокруг его центра, но меняется при осевых симметриях.

Например, циклическим является неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a \geqslant 0.$$

Это неравенство не слишком интересно, поскольку оно почти очевидным образом сводится к неравенству Коши. Но есть и менее очевидные примеры.

Задача 4 (областной этап Всероссийской математической олимпиады, 1993 год, 10 класс, задача 2). Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

Решение. Докажем левое неравенство. Избавившись от знаменателя, приведём его к эквивалентному виду

$$(a+b)(b+c)(c+a) < a(b+c)(c+a) + b(a+b)(c+a) + c(a+b)(b+c). \quad (1)$$

Докажем сначала, что для всех неотрицательных значений переменных выполняется нестрогое неравенство

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leqslant a(b+c)(c+a) + b(a+b)(c+a) + c(a+b)(b+c). \quad (2)$$

Пусть $\Phi(a, b, c)$ — разность левой и правой частей неравенства (2). Так как этот многочлен однородный, можно доказывать неравенство только для тех значений переменных, которые удовлетворяют равенству $a + b + c = 3$. Пусть максимальное значение многочлена $\Phi(a, b, c)$ на этом множестве равно $\Phi(a_0, b_0, c_0)$. Поскольку неравенство циклическое, значение $\Phi(b_0, c_0, a_0)$ тоже будет максимальным.

Допустим, что все три числа a_0, b_0, c_0 положительны и среди них есть по крайней мере два различных. Рассмотрим сужение функции Φ на прямую, проходящую через точки (a_0, b_0, c_0) и (b_0, c_0, a_0). По предположению это сужение имеет две точки максимума внутри некоторого отрезка этой прямой. Но этого не может быть, так как мы имеем дело с многочленом, степень которого не превосходит трёх и его производная не может дважды менять знак с плюса на минус. Получено противоречие.

Таким образом, сделанное в предыдущем абзаце предположение неверно, и остаётся две возможности: все три числа a_0, b_0, c_0 равны 1 или среди этих трёх чисел есть нуль.

В первом случае $\Phi(1,1,1) = -4 < 0$, и задача решена.

Во втором случае можно, не ограничивая общности, считать $c = 0$, и тогда неравенство сводится к очевидному $ab(a+b) \leqslant a^2b + ab(a+b)$. Это неравенство обращается в равенство, если одно из чисел равно нулю.

Итак, мы установили, что неравенство (2) имеет место для всех неотрицательных значений переменных и равенство в нём достигается, только если по крайней мере две переменных равны нулю. Но тогда для всех положительных значений переменных имеет место строгое неравенство (1).

Левое неравенство доказано. Правое можно вывести из него двумя способами, основанными на слегка скрытой симметрии.

Во-первых, в силу равенства[11)]

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=1-\frac{b}{a+b}+1-\frac{c}{b+c}+1-\frac{a}{c+a}=3-\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$

правое неравенство можно получить из левого очевидной заменой переменных a на b, b на a и c на c.

Кроме того, данная система неравенств превращается в эквивалентную при замене переменных $a \to 1/a$, $b \to 1/b$, $c \to 1/c$.

Упражнения

21 (Ленинградская математическая олимпиада, 1979 год, 8 класс [11, 1979 год, 559]). Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right| < 1.$$

(*А. В. Ермилов, В. А. Сендеров*)

11) Такой приём прибавления единички очень часто бывает полезным. Мы с ним уже сталкивались при обсуждении неравенства Несбита и столкнёмся ещё.

22 [11, 1988 год, 1107]. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то
$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geqslant \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3. \qquad (\textit{Л. Д. Курляндчик})$$

23 (Румынская математическая олимпиада, 2007 год). Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c выполняется неравенство
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc+\frac{3}{4}|(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

24. Получите усиление неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим трёх чисел, а именно, выясните, при каких значениях параметра m неравенство
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc+m|(a-b)(b-c)(c-a)|$$
выполняется при всех неотрицательных значениях переменных a, b, c.

25 (пункты (а) и (б) — см. [11, 1984 год, 852]). Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что величина
$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|$$
меньше: (а) 1; (б) 1/8. (в) Найдите максимальное значение этой величины.

(*А. В. Ермилов*)

§ 7. Замены переменных

До сих пор мы пользовались двумя видами симметрии неравенств: их инвариантностью относительно умножения всех переменных на одно и то же число и инвариантностью относительно перестановок переменных. Группа симметрий неравенства может содержать и другие преобразования.

В общем случае проблема поиска таких преобразований весьма сложна. Но иногда в их поиске помогает замена переменных. Продемонстрируем это на примере.

Задача 5 (Математическая олимпиада Чехии и Словакии, 2005 год). Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$. Докажите, что
$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Решение. Применить развитую выше технику мешает «кривое» условие $abc = 1$. Но оно же подсказывает подходящую замену переменных. Введём новые положительные переменные x, y и z так, что $a = x/y$,

$b = y/z$. Тогда в силу данного условия получим $c = z/x$, и неравенство перепишется в виде

$$\frac{xz}{(x+y)(y+z)} + \frac{xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{yz}{(x+y)(x+z)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Умножив неравенство на $(x+y)(x+z)(y+z)$, получим

$$4(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2) \geqslant 3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Это уже однородное симметрическое неравенство третьей степени. Его достаточно проверить в трёх случаях: 1) $x = y = z = 1$; 2) $x = y = 1$, $z = 0$; 3) $x = 1$, $y = z = 0$.

Такая проверка не составляет труда. Задача решена.

Проанализируем, что дала замена переменных. Условие исходной задачи не менялось при любых перестановках переменных, а вот доказываемое неравенство было инвариантно только относительно циклических перестановок всех трёх переменных. После замены переменных доказываемое неравенство стало симметрическим. Кроме того, оно стало однородным (это общий факт при замене переменных на их отношения). Здесь и ключ к решению задачи.

Поучительно разобраться, где была спрятана дополнительная степень симметрии, которая проявилась при замене переменных.

Для этого заметим, что использованная замена переменных a, b, c на переменные x, y, z взаимно однозначно отображает множество

$$\{(x, y, z)\colon x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ xyz = 1\}$$

на множество

$$\{(a, b, c)\colon a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ abc = 1\}.$$

Чтобы найти обратное преобразование, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = a, \\ \dfrac{y}{z} = b, \\ \dfrac{z}{x} = c, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на третье и умножив результат на четвёртое, получим $x^3 = a/c$, или $x = \sqrt[3]{a/c}$. Аналогично $y = \sqrt[3]{b/a}$ и $z = \sqrt[3]{c/b}$.

Чтобы найти недостающее преобразование, сделаем замену

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{c}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}, \quad z = \sqrt[3]{\frac{c}{b}},$$

переставим две переменные[12)], положив $u = y$, $v = x$, $w = z$, и выполним обратное преобразование $p = u/v$, $q = v/w$, $r = w/u$. Получим

$$p = \frac{u}{v} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt[3]{b/a}}{\sqrt[3]{a/c}} = \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}} = \frac{1}{a}.$$

Аналогично $q = 1/c$ и $r = 1/b$.

Значит, наше неравенство должно быть инвариантно относительно замены a на $1/a$, b на $1/c$ и c на $1/b$. Это действительно так, поскольку, например,

$$\frac{1/a}{\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)} = \frac{c}{(a+1)(c+1)}.$$

Могли бы вы увидеть эту симметрию без вычислений?

Упражнения

26. Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geqslant 3.$$

27 (Ирландская математическая олимпиада, 2007 год). Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите неравенства

$$\frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

28 [11, 1976 год, 374]. Пусть a, b, c — положительные числа, $a > c$, $b > c$. Докажите неравенство

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}. \qquad (\textit{А. Резников})$$

29. Пусть положительные числа $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяют условию $a_{i+k} = a_i$ для любого i. Докажите, что для $l < k$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_l}{a_{l+1}+a_{l+2}+\ldots+a_k} + \frac{a_2+a_3+\ldots+a_{l+1}}{a_{l+2}+a_{l+3}+\ldots+a_{k+1}} + \ldots + \frac{a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{k+l-1}}{a_{k+l}+a_{k+l+1}+\ldots+a_{2k-1}} \geqslant \frac{lk}{k-l}.$$

§ 8. Условные неравенства

Вспомним задачу: среди всех прямоугольников с данным периметром найти прямоугольник с наибольшей площадью (она без труда решается

[12)] Именно такого преобразования не хватает для полной симметрии исходного неравенства.

с помощью принципа симметрии). У неё есть не менее интересный аналог: среди всех прямоугольников с данной площадью найти прямоугольник с наименьшим периметром. Вторую задачу можно чисто логически, не вдаваясь в её геометрическую природу, свести к первой. Вот как это делается.

Мы уже знаем, что среди всех прямоугольников данного периметра P наибольшую площадь $S = P^2/16$ имеет квадрат. Так вот — тот же квадрат имеет наименьший периметр среди всех прямоугольников площади S.

В самом деле, допустим противное. Пусть имеется прямоугольник Π_0 площади S с меньшим периметром $P_0 < P$. Рассмотрим тогда прямоугольник Π, подобный[13)] ему с коэффициентом $k = P/P_0$. Он имеет периметр $P_0 \cdot P/P_0 = P$. А его площадь равна Sk^2. Но по предположению $k > 1$. То есть мы нашли прямоугольник периметра P, площадь которого больше, чем площадь квадрата с тем же периметром. А это противоречит полученному выше результату. Значит, сделанное предположение неверно и ответ во второй задаче тот же, что и в первой.

Полезно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию проведённого рассуждения. Пусть прямоугольнику со сторонами a и b соответствует точка координатной плоскости с координатами (a, b) (рис. 3).

Прямоугольникам с периметром P будет соответствовать отрезок прямой $2a + 2b = P$. Прямоугольникам с периметром, большим чем P, будут соответствовать точки, лежащие выше этой прямой, а с меньшим периметром — точки, лежащие ниже.

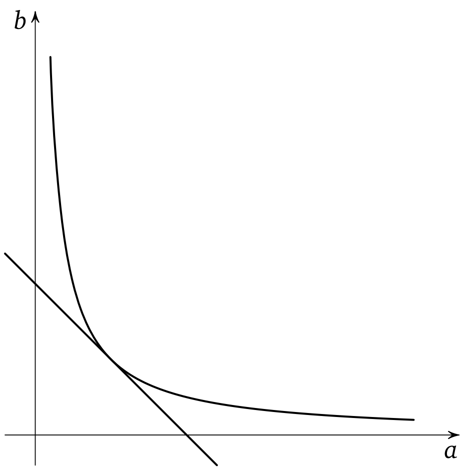


Рис. 3

13) В геометрических задачах свойства преобразования подобия заменяют свойства однородных многочленов.

Прямоугольникам, имеющим площадь S, будет соответствовать ветвь гиперболы $b = S/a$. И опять выше гиперболы лежат точки, соответствующие прямоугольникам большей площади, а ниже — точки, соответствующие прямоугольникам меньшей площади.

Решение первой задачи говорит нам, что ветвь гиперболы целиком лежит выше прямой и лишь в одной точке попадает на прямую. Но тогда прямая целиком лежит ниже ветви гиперболы и лишь в одной точке попадает на гиперболу. Значит, эта единственная точка и есть решение второй задачи.

Подобная схема рассуждений является довольно общей. Часто приходится доказывать, что некоторое неравенство выполняется при каком-то ограничении. Во многих случаях данное ограничение и доказываемое неравенство можно поменять местами. Такого рода симметрия задачи имеет весьма глубокие корни. Мы продемонстрируем пользу от неё лишь на нескольких примерах.

Задача 6 (Ленинградская математическая олимпиада, 1980 год, 8 класс). Сумма четырёх положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6.$$

Решение. Докажем более сильное неравенство

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \leqslant 4\sqrt{2}.$$

Нужную константу угадать нетрудно. Накопленный опыт подсказывает, что «хорошее» симметрическое неравенство часто обращается в равенство, когда значения всех переменных равны между собой.

Неравенство не очень подходит для использования нашего метода, поскольку содержит много радикалов, с которыми мы пока не работали. Попробуем избавиться от них с помощью замены переменных. Обозначим

$$p = \sqrt{4a+1}, \quad q = \sqrt{4b+1}, \quad r = \sqrt{4c+1}, \quad s = \sqrt{4d+1}.$$

Тогда

$$a = \frac{p^2-1}{4}, \quad b = \frac{q^2-1}{4}, \quad c = \frac{r^2-1}{4}, \quad d = \frac{s^2-1}{4},$$

и доказываемое неравенство перепишется в виде

$$p + q + r + s \leqslant 4\sqrt{2}, \tag{3}$$

а данное условие примет вид

$$\frac{p^2-1}{4} + \frac{q^2-1}{4} + \frac{r^2-1}{4} + \frac{s^2-1}{4} = 1,$$

или

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}=2. \tag{4}$$

Данная задача непривычна тем, что доказываемое неравенство выглядит просто, а вот условие — сложное. Лучше бы было наоборот.

Но нам нужно доказать, что из условия (4) следует неравенство (3). А это равносильно тому, что из условия

$$p+q+r+s>4\sqrt{2}$$

следует

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}\neq 2.$$

На самом деле даже

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}>2,$$

что легко доказывается стандартным методом.

Использованный приём основывается на следующих наглядных соображениях.

Пусть нам нужно доказать, что неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geqslant 0$ выполняется при условии $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$. Будем рассматривать числа $x_1,x_2,\ldots,x_k$ как координаты некоторой точки. Почти всегда[14)] множество точек, для которых $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$, представляет собой гиперповерхность, делящую пространство на две части: решение неравенства $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и решение неравенства $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)<0$. Если выполняется неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geqslant 0$, то решения уравнения $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежат в одной из этих частей, удовлетворяющей условию $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и, быть может, на самой поверхности $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$, т. е. поверхность $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежит по одну сторону от поверхности $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$.

Но тогда и поверхность $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежит по одну сторону от поверхности $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$. Последняя поверхность в свою очередь почти всегда разбивает пространство на две части: решение неравенства $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и решение неравенства $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)<0$. А тогда при условии $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ либо выполняется неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geqslant 0$, либо[15)] — неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\leqslant 0$.

[14)] Подумайте, когда это не так, и почему такие случаи редки!

[15)] Какой из этих двух случаев имеет место, зависит от конкретной задачи. Обычно выяснить это нетрудно, выбрав одну подходящую точку. Если функции F и Φ непрерывны, оба неравенства выполняться одновременно не могут.

Таким образом, доказываемое неравенство и условие «поменялись местами». Эти рассуждения не вполне строги. Но логика решения предыдущей задачи абсолютно корректна.

Вот ещё один пример, когда выгодно поменять местами условие и доказываемое неравенство.

Задача 7 [11, 1994 год, 1439]. Длины сторон треугольника равны a, b и c, а длины проведённых к ним медиан равны m_a, m_b и m_c соответственно. Докажите неравенства

(а) $\dfrac{m_a}{a}+\dfrac{m_b}{b}+\dfrac{m_c}{c}\geqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

(б) $\dfrac{a}{m_a}+\dfrac{b}{m_b}+\dfrac{c}{m_c}\geqslant 2\sqrt{3}$. (*Г. Алиханов, В. А. Сендеров*)

Решение. Докажем неравенство пункта (а).

Алгебраизируем задачу, воспользовавшись известными формулами для медиан треугольника

$$m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2},\quad m_b=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2},\quad m_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}.$$

Тогда доказываемое неравенство перепишется в виде

$$\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2a}+\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2b}+\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

или

$$\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2}}+\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2}}+\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}}\geqslant 3.$$

Теперь введём новые переменные

$$x=\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2}},\quad y=\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2}},\quad z=\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}}.$$

В этих переменных доказываемое неравенство примет вид $x+y+z\geqslant 3$. Это неравенство, разумеется, верно не всегда, а каких-либо ограничений, на первый взгляд, нет. Но дело обстоит не так, и сообразить это не трудно. Исходное неравенство — однородное первой степени. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $c=1$. И тогда новые три переменные x, y и z выразятся через две старые переменные a и b. Но в этом случае между переменными x, y и z должна существовать связь. Попробуем её найти[16].

Имеем

$$x^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2},\quad y^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2},\quad z^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}.$$

[16] Здесь ещё раз работает приём «приведения к общему числителю».

Чтобы сделать числители дробей симметричными, добавим к каждой из них единичку:

$$x^2+1=\frac{2b^2+2c^2+2a^2}{3a^2},$$
$$y^2+1=\frac{2a^2+2c^2+2b^2}{3b^2},$$
$$z^2+1=\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{3c^2}.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{3a^2}{2(a^2+b^2+c^2)},$$
$$\frac{1}{y^2+1}=\frac{3b^2}{2(a^2+b^2+c^2)},$$
$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{3c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Сложив эти равенства, получим искомое соотношение

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{3}{2}.$$

Теперь поменяем местами ограничение и доказываемое неравенство. Задача сведётся к доказательству неравенства

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\neq\frac{3}{2}$$

при условии, что $x+y+z<3$.

Подставив, например, $x=1$, $y=z=0$, убедимся, что на самом деле нужно доказывать неравенство

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}>\frac{3}{2}.$$

Здесь мы можем забыть, что числа a, b и c обозначали длины сторон треугольника, и решать задачу для любых неотрицательных x, y и z.

Это неравенство только усиливается, когда переменная x увеличивается. Поэтому достаточно доказать, что при условии $x+y+z=3$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Эта задача даже на беглый взгляд проще исходной. На самом деле мы попадаем в знакомую ситуацию, и теперь решение задачи — дело техники.

Считая z параметром, перепишем неравенство в виде

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{z^2+1}\right)(x^2y^2+x^2+y^2+1)-(x^2+y^2+2)\leqslant 0,$$

или

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{z^2+1}\right)\left(\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right)^2+x^2+y^2+1\right)-(x^2+y^2+2)\leqslant 0.$$

Очевидно, $1/(z^2+1)<3/2$. Поэтому, если z и $(x+y)/2$ постоянны, то левая часть последнего неравенства представляет собой многочлен четвёртой степени с положительным старшим коэффициентом относительно переменной $t = (x-y)/2$. Такой многочлен может иметь не более одного максимума внутри отрезка.

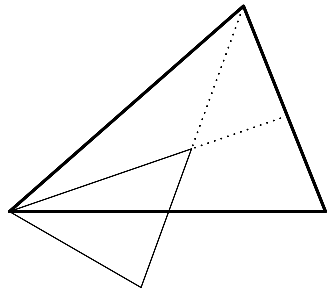


Рис. 4

А поскольку неравенство симметрическое, его достаточно доказать в трёх случаях: 1) $x = y = z = 1$; 2) $x = y = 3/2$, $z = 0$; 3) $x = 3$, $y = z = 0$.

В первом случае неравенство обращается в равенство, а в двух других — в строгое неравенство.

Неравенство пункта (б) можно доказать аналогично. А можно воспользоваться ещё раз свойствами симметрии задачи. Дело в том, что если a, b, и c — длины сторон треугольника, а m_a, m_b и m_c — длины медиан этого треугольника, то из отрезков длиной m_a, m_b и m_c тоже можно составить треугольник, и длины медиан этого треугольника будут равны $3a/4$, $3b/4$ и $3c/4$ (рис. 4). Таким образом, задача сводится к уже решённому пункту (а).

Упражнения

30 (33-й Турнир городов, 2011 год, осень, сложный вариант, 8–9 классы, задача 5). Известно, что $0 < a, b, c, d < 1$ и

$$abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d).$$

Докажите неравенство $a+b+c+d-(a+c)(b+d) \geqslant 1$. (*Г. Гальперин*)

31 (Румынская математическая олимпиада, 2008 год). Пусть a, b, c — такие положительные числа, что $abc = 8$. Докажите, что

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\leqslant 0.$$

32 (Румынская математическая олимпиада, 1999 год). Пусть a_1, a_2, $\ldots, a_k$ — такие положительные числа, что $a_1 a_2 \ldots a_k = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{k-1+a_1}+\frac{1}{k-1+a_2}+\ldots+\frac{1}{k-1+a_k}\leqslant 1.$$

33. Докажите, что для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{1+a_1a_2\ldots a_k} < \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_k} < k-1+\frac{1}{1+a_1a_2\ldots a_k}.$$

34 (Международная математическая олимпиада, 2001 год, задача 2, [11, 2002 год, 1804]). Для любых положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

§ 9. Неравенства с малой симметрией

Рассмотрим ещё один пример.

Задача 8 (Санкт-Петербургская математическая олимпиада, 2015 год, второй тур, 9 класс). Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $ab+bc+ac+2abc=1$. Докажите, что $4a+b+c \geqslant 2$. (*А. Храбров*)

Решение. В этой задаче «сложное» условие и «простое» доказываемое неравенство. Поэтому разумно поменять их местами. Практически дословно повторяя рассуждения из предыдущего раздела, придём к следующей задаче.

Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $4a+b+c=2$. Докажите, что $ab+bc+ac+2abc \leqslant 1$.

Эта задача уже близка к тем, которые решались выше. Только вот условие не совсем симметрично. Оно не меняется при перестановках переменных b и c, но меняется при всех остальных перестановках переменных. Однако уже наличие одного такого преобразования позволяет решить задачу.

Считая a параметром, а b и c переменными, стандартными рассуждениями придём к выводу, что неравенство достаточно доказать в двух случаях: 1) $c=0$; 2) $b=c$.

Из-за малой степени симметрии дальше упростить задачу не получается. Но уже сделанного упрощения достаточно.

В первом случае придём к неравенству $ab \leqslant 1$ при условии $4a+b=1$. Это немедленно следует из неравенства Коши для двух чисел $4a$ и b .

Во втором случае придём к неравенству

$$2ab+b^2+2ab^2 \leqslant 1$$

при условии $2a+b=1$. Исключая с помощью этого условия переменную a, получим неравенство $b+(1-b)b^2 \leqslant 1$. Дальше делаем почти очевидные преобразования:

$$(1-b)-(1-b)b^2 \geqslant 0, \quad (1-b)(1-b^2) \geqslant 0, \quad (1-b)^2(1+b) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно.

Упражнения

35 (23-й Турнир городов, 2002 год, весна, основной вариант, 8–9 классы, задача 1). Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство $a^3+b^3+3abc > c^3$. (*В. А. Сендеров*)

36 (Канадская математическая олимпиада, 1992 год). Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a(a-c)^2+b(b-c)^2 \geqslant (a-c)(b-c)(a+b-c).$$

37. Пусть R — радиус описанной окружности некоторого треугольника, а r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей того же треугольника, причём $r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$. Докажите, что а) $r_a \leqslant 3R/2$; б) $r_b < 2R$; в) $3R/2 \leqslant r_c < 4R$.

38. Пусть r — радиус вписанной окружности некоторого треугольника, а r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей того же треугольника, обозначенные так, что $r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$. Докажите, что а) $r < r_a \leqslant 3r$; б) $2r < r_b$; в) $3r \leqslant r_c$.

39 (Эрдёш[17)]). Пусть h — длина наибольшей высоты нетупоугольного треугольника, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что $R+r \leqslant h$.

§ 10. Аддитивная сложность

Имеющиеся на сегодняшний день результаты позволяют оценить число корней многочлена через число операций сложения, использующихся при его записи [9]. Они гораздо сложнее и менее точны, чем аналогичные результаты для операций умножения. Однако в некоторых случаях и ими можно воспользоваться.

Задача 9. Докажите, что если $n \geqslant 1$, то для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n}{k}\right)^{1/n} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}.$$

---

17) Пал Эрдёш (1913–1996) — венгерский математик, которому принадлежит большое число красивых миниатюр в самых разных областях математики.

Решение. В силу однородности неравенства можно, не ограничивая общности, считать, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = k$.

Будем искать минимальное значение функции

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n}{k}$$

по всем неотрицательным значениям переменных, удовлетворяющим равенству $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = k$. Если мы убедимся, что это минимальное значение равно 1, задача будет решена. Пусть искомое минимальное значение равно $\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Выберем какие-нибудь две переменные, например, a_1 и a_2 и рассмотрим функцию двух переменных

$$F(a_1, a_2) = \frac{a_1^n + a_2^n + b_3^n + \ldots + b_k^n}{k}.$$

Число $F(b_1, b_2)$ будет наименьшим значением функции $F(a_1, a_2)$, если переменные a_1 и a_2 неотрицательны и удовлетворяют равенству

$$a_1 + a_2 + b_3 + \ldots + b_k = k.$$

Но тогда в силу симметрии и число $F(b_2, b_1)$ будет минимальным значением той же функции.

Выразив a_2 через a_1, получим функцию одной переменной

$$f(a_1) = \frac{a_1^n + (k - b_2 - \ldots - b_k - a_1)^n + b_3^n + \ldots + b_k^n}{k},$$

которая имеет на отрезке $[0, k - b_3 - \ldots - b_k]$ точки минимума $a_1 = b_1$ и $a_1 = b_2$. Мы попадём в знакомую ситуацию, если докажем, что двух разных точек минимума внутри отрезка такая функция иметь не может.

Для этого воспользуемся средствами дифференциального исчисления. Вторая производная

$$f''(a_1) = \frac{n(n-1)a_1^{n-2} + n(n-1)(k - b_2 - \ldots - b_k - a_1)^{n-2}}{k}$$

функции $f(a_1)$ очевидно положительна. Поэтому производная $f'(a_1)$ функции $f(a_1)$ монотонна, а следовательно, не может иметь более одного корня. А так как обращение производной в нуль является необходимым условием минимума, функция $f(a_1)$ не может иметь двух разных точек минимума внутри отрезка. Следовательно, либо $b_1 = b_2$, либо одно из этих чисел равно нулю.

Поскольку подобные рассуждения могут быть проведены для любой пары переменных, все числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$ разбиваются на две группы: в одной группе числа положительны и равны между собой, а во второй —

равны нулю. Если количество чисел в первой группе равно l, то каждое из них равно k/l и

$$\Phi(b_1, b_2, \ldots, b_k) = \frac{l}{k} \cdot \left(\frac{k}{l}\right)^n = \left(\frac{k}{l}\right)^{n-1} \geqslant 1,$$

так как $k/l \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$. Задача решена.

Упражнения

40 [11, 1989 год, 1144]. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — неотрицательные числа. Какое число больше:

$$\sqrt[1988]{a_1^{1988} + a_2^{1988} + \ldots + a_k^{1988}} \quad \text{или} \quad \sqrt[1989]{a_1^{1989} + a_2^{1989} + \ldots + a_k^{1989}}\,?$$

(*А. И. Шехорский*)

41 (XV Московская математическая олимпиада, 1952 год, первый тур, 10 класс, задача 2). Докажите, что при целом $n \geqslant 2$ и $|a| < 1$ справедливо неравенство $(1-a)^n + (1+a)^n < 2^n$.

42 (Санкт-Петербургская математическая олимпиада, 1995 год, отборочный тур, 11 класс, задача 2). Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$(ac+bd)^5 + (ad+bc)^5 \leqslant (a+b)^5(c^5+d^5). \qquad (\textit{А. Храбров})$$

43 (Польская математическая олимпиада, 1963 год). Докажите, что если числа a, b, c положительны, то

$$a+b+c \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

44. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)^k \geqslant a_1 a_2 \ldots a_k + \frac{1}{(k-1)k^k}\Delta,$$

где Δ — сумма всевозможных чисел вида $|a_i - a_j|^k$.

§ 11. Неравенство Йенсена

До сих пор для оценки числа максимумов или минимумов функции использовались её алгебраические свойства. Но можно воспользоваться и геометрическими.

Пусть функция $\varphi(x)$ вогнута. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_k)}{k} \leqslant \varphi\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right).$$

Этот результат называют неравенством Йенсена[18)].

Докажем его сначала для строго вогнутых функций. В этом нам поможет следующее простое утверждение.

Строго вогнутая функция не может иметь более одной точки максимума. В самом деле, если x и y — две различных точки максимума функции, то

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} = \varphi(x),$$

что противоречит выбору точки x.

Единственность максимума — это то свойство, которое мы уже неоднократно использовали. Применим привычную схему рассуждений ещё раз.

Обозначим через m наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и положим $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_k)$$

от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, удовлетворяющих условиям

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = s, \quad x_i \geqslant m, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Пусть максимум этой функции достигается в точке $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Если все числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$ равны между собой, то доказываемое неравенство обращается в равенство и всё доказано. Остаётся убедиться, что иначе быть не может.

Пусть, например, $b_1 \neq b_2$. Тогда функция

$$f(x) = \Phi(x, s - b_3 - \ldots - b_k - x, b_3, \ldots, b_k)$$

имеет на отрезке $m \leqslant x \leqslant s - b_3 - \ldots - b_k - m$ две точки максимума $x = b_1$ и $x = b_2$. Но функция

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(s - b_3 - \ldots - b_k - x) + \varphi(b_3) + \ldots + \varphi(b_k)$$

является строго вогнутой, а потому не может иметь двух точек максимума. Полученное противоречие доказывает неравенство Йенсена для строго вогнутых функций.

Для его доказательства в общем случае рассмотрим функции $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) - \varepsilon x^2$. По условию функция $\varphi(x)$ вогнута, а функция $-\varepsilon x^2$ строго

[18)] Иоган Виллем Людвиг Вальдемар Йенсен (1859–1925) — датский математик и инженер. Он в значительной степени был самоучкой, никогда не занимал академических должностей, а занимался математикой в свободное от основной работы время. Йенсен первым начал систематическое изучение выпуклых функций. Своё знаменитое неравенство он опубликовал в 1906 г.

вогнута при любом $\varepsilon > 0$, поэтому функция $\varphi_\varepsilon(x)$ строго вогнута. Следовательно, согласно доказанному выполняется неравенство

$$\frac{\varphi_\varepsilon(x_1)+\varphi_\varepsilon(x_2)+\ldots+\varphi_\varepsilon(x_k)}{k} \leqslant \varphi_\varepsilon\Big(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\Big),$$

или

$$\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_k)}{k} - \varepsilon\Big(\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}{k}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\Big) - \varepsilon\Big(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\Big)^2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0+$, получим нужный результат.

Для выпуклых функций тоже справедливо неравенство Йенсена, но, разумеется, знак «$\leqslant$» нужно поменять на «$\geqslant$».

Содержание полученного результата понятно: он позволяет свести доказательство сложного неравенства с k переменными к доказательству аналогичного, но более простого неравенства с двумя переменными. В большинстве практически интересных случаев и эту последнюю задачу можно упростить, благодаря критерию выпуклости.

При доказательстве неравенства Йенсена был использован следующий очень важный методологический принцип. Допустим, нужно доказать справедливость некоторого утверждения для какого-то множества объектов. Начинать всегда следует с доказательства для типичных объектов. А затем, возможно, доказательство для общего случая удастся свести к уже рассмотренному частному.

В нашем примере нужно было доказать неравенство Йенсена для множества вогнутых функций. Типичными вогнутыми функциями являются строго вогнутые. Для них доказательство проходит по привычной уже схеме. А затем можно воспользоваться тем, что любая вогнутая функция может быть сколь угодно точно приближена строго вогнутой (именно так в данном случае следует понимать «типичность»).

Упражнения

45 (К. Шеннон[19)]). Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равна 1. Докажите неравенство

$$-a_1 \ln a_1 - a_2 \ln a_2 - \ldots - a_k \ln a_k \leqslant \ln k.$$

[19)] Клод Элвуд Шеннон (1916–2001) — американский инженер, криптоаналитик и математик, создатель современной теории информации.

46 (Олимпиада ФМЛ № 239 Санкт-Петербурга, 2001 год, 8–9 классы, задача 7). Для любых положительных $a_1, a_2, \ldots, a_k$ докажите неравенство

$$\left(1+\frac{1}{a_1(1+a_1)}\right)\left(1+\frac{1}{a_2(1+a_2)}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_k(1+a_k)}\right) \geqslant \left(1+\frac{1}{p(1+p)}\right)^k,$$

где $p = \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$. (*А. Храбров*)

47. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

48 (неравенство Гюйгенса[20]). Докажите, что для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ верно неравенство

$$1 + \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} \leqslant \sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)}.$$

49 (неравенство Фань Цзы[21]). Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ удовлетворяют условиям $0 \leqslant a_i \leqslant 1/2$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то справедливо неравенство

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^k} \leqslant \frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)}{((1-a_1)+(1-a_2)+\ldots+(1-a_k))^k}.$$

§ 12. Заключение

Рассмотренные выше примеры ясно показывают, что полученные в первом разделе необходимые условия экстремума вполне работоспособны. Причём в подавляющем числе случаев полученные на их основе решения задач проще прочих. Заинтересованный читатель без труда найдёт много других задач разной степени сложности, которые решаются предлагаемым методом.

Кстати, о сложности. Выше мы использовали это слово в двух разных смыслах. В предыдущем абзаце оно обозначало субъективную трудность решения задачи. А в других разделах оно использовалось для обозначения «объективной» характеристики оптимизируемых функций и ограничений рассматриваемых задач.

[20] Христиан Гюйгенс (1629–1695) — голландский математик, механик, физик, астроном и изобретатель.

[21] Фань Цзы (1914–2010) — математик, родившийся в Китае и работавший во Франции, США и на Тайване (иногда его имя переводят с английского как Ки Фан). Получил важные результаты во многих областях как чистой, так и прикладной математики. Подробнее о неравенстве Фань Цзы можно прочесть в [5].

У читателя была возможность убедиться, что понятие субъективной сложности существенно меняется, когда мы знакомимся с новым методом: в статье есть несколько задач с международных олимпиад, которые решаются «с ходу» и «в уме».

Об объективной сложности стоит поговорить подробнее. Эта характеристика явно «синтетическая». Выше мы использовали в качестве меры сложности степень многочлена, количество «плюсов», используемых при его записи, выпуклость (на самом деле это качественный признак, позволяющий разделить все функции на «простые» и «сложные»). Можно поработать с тригонометрическими многочленами или квазимногочленами. У них имеются свои меры сложности.

А можно заняться теоретическим исследованием. Скажем, классифицировать однородные многочлены небольших степеней от небольшого числа переменных по их группам автоморфизмов. И для каждого класса выяснять, при каких условиях эти многочлены неотрицательны при неотрицательных значениях переменных. Уже для трёх переменных получается небольшая, но довольно симпатичная теория. Из неё, кстати, следует, что чем больше группа автоморфизмов задачи, тем задача проще (в обоих смыслах).

В общем, здесь есть о чём подумать.

Ну и всегда стоит помнить, что при решении любой, не только оптимизационной, задачи возможности применения принципа симметрии нужно проверять в первую очередь.

Список литературы

[1] *Арбит А. В.* Неравенства и основные способы их доказательства. Ч. 1. М.: МЦНМО, 2016.

[2] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 1979.

[3] *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. В 2 кн. М.: МЦНМО, 2011.

[4] *Вейль Г.* Симметрия. М.: УРСС, 2003.

[5] *Калинин С. И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана. Киров: Вятский государственный гуманитарный университет, 2002.

[6] *Седракян Н. М., Авоян А. М.* Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит, 2002.

[7] *Серпинский В.* Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959.

[8] *Серпинский В.* 250 задач по элементарной теории чисел. М.: Просвещение, 1968.

[9] *Хованский А. Г.* Малочлены. М.: Фазис, 1997.

[10] *Bullen P. S.* Handbook of Means and their Inequalities. Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publisher, 2003.

[11] Задачник «Кванта» по математике. http://www.kvant.info/zkm_tex/zkm_main.pdf

Михаил Александрович Горелов, ФИЦ ИУ РАН

griefer62@gmail.com

Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей в 2021 году

А. Д. Заболотский

§ 1. Введение: что содержит Онлайн-энциклопедия

Числа Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\ldots$$

Последовательность факториалов чисел $n = 0, 1, 2, 3\ldots$:

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40\,320, 362\,880\ldots$$

Количество разбиений числа $n = 1, 2, 3\ldots$ на положительные целые слагаемые:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176\ldots$$

Всё это — целочисленные последовательности. В комбинаторике, теории чисел и развлекательных математических задачках они встречаются на каждом шагу. А раз есть множество схожих по форме объектов, значит, можно составить картотеку таких объектов. Такой картотекой и является Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей — The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS. Она доступна в интернете по адресу `https://oeis.org/`.

Ссылки на OEIS регулярно встречаются на страницах «Математического просвещения». В то же время критерии включения в Онлайн-энциклопедию, устройство её редакционного процесса, её роль в математике и возможные перспективы редко обсуждаются в литературе. Поэтому надеюсь, что статья, освещающая эти вопросы, будет интересна читателю.

Что входит в OEIS? Иногда говорят, что главный критерий таков: целочисленная последовательность может попасть в OEIS, если ею когда-нибудь заинтересуется хоть кто-то независимо от её автора. Иначе говоря, последовательность должна быть интересной.

«Интересность», конечно, субъективное понятие. Однако бывший вице-президент Фонда OEIS Чарльз Грейтхаус написал эссе «Is this sequence interesting» (`https://oeis.org/wiki/User:Charles_R_Greathouse_IV/Is_this_sequence_interesting`) с классификацией последовательностей, позволяющей понять, как в Онлайн-энциклопедии оценивают, является ли последовательность интересной и подходящей. В основном следуя Грейтхаусу, поделим последовательности на следующие категории.

- **Интересные и, вероятно, подходят для OEIS.** Последовательность, которую порождает простая и естественная формула или алгоритм и которая при этом обладает неожиданными свойствами (хотя бы красивым графиком); последовательность, к которой приводят различные формулы или алгоритмы, которые кажутся не связанными между собой; последовательность, иллюстрирующая красивую теорему; последовательность из известной загадки или задачки. Также к этой категории относятся последовательности из опубликованной научной литературы.
- **Интересные, но, вероятно, не подходят для OEIS.** Очень короткие последовательности; последовательности, члены которых вычислены лишь приблизительно; последовательности, почти не отличающиеся от уже имеющихся в OEIS.
- **Неинтересные, но, возможно, подходят для OEIS.** Очень простые последовательности, например последовательность из одних единиц, а также последовательности из научной литературы, содержащие ошибки.
- **Неинтересные и, вероятно, не подходят для OEIS.** Последовательности, определения которых не являются *естественными*[1].

Каждая последовательность в OEIS имеет шестизначный номер, предваряемый буквой A; в частности, приведённые выше последовательности имеют номера A000045, A000142, A000041. Каждая запись о последовательности содержит замечания о её свойствах, формулы и программы для её вычисления, ссылки на релевантную литературу и веб-страницы, текстовый файл с длинным списком членов последовательности (так называемый b-файл). В OEIS уже треть миллиона записей, и она продолжает непрерывно пополняться.

---

[1] Особенно часто случаются злоупотребления операциями с десятичными цифрами или последовательностями простых чисел (в духе «Элементы последовательности A000055, являющиеся простыми числами» — бессмысленный выбор, учитывая, что A000055 подсчитывает количество деревьев на n вершинах).

§ 2. История и организация

Основатель Энциклопедии математик Нил Джеймс Александр Слоун рассказывал её историю неоднократно. В 1964 году, ещё будучи студентом, Слоун начал собирать коллекцию целочисленных последовательностей. Эта коллекция непрерывно пополнялась, дважды была издана в виде книги и стала относительно известной. В 1996 году в коллекции насчитывалось уже десять тысяч последовательностей, и Слоун сделал её непосредственно доступной для читателей через интернет; тогда Энциклопедия и стала Онлайн-энциклопедией. Это дополнительно увеличило как аудиторию, так и поток сообщений с комментариями и новыми последовательностями. Слоуну приходилось обрабатывать более сотни электронных писем в день. В 2009 году Слоун официально зарегистрировал некоммерческую организацию «Фонд OEIS» и сделал Фонд правообладателем материалов Онлайн-энциклопедии. В это же время была предпринята попытка превратить OEIS в вики[2)] на движке MediaWiki, но применявшийся в этом вики-движке поисковый механизм не подходил для последовательностей. В результате Расс Кокс, разработчик из компании Google, написал специально для OEIS программное обеспечение (вики-движок и поиск), которое и используется с 2010 года.

Последние десять лет OEIS работает в режиме премодерируемой вики. Это значит, что любой желающий может зарегистрироваться и предложить новые последовательности или правки в существующие записи о последовательностях, но опубликованы эти правки будут только после одобрения редакторами. Ниже я расскажу подробнее о том, как устроен этот процесс.

Нил Слоун, которому сейчас 81 год, занимает пост президента Фонда OEIS. Он совместно с попечительским советом фонда решает юридические и финансовые вопросы. Фонд финансируется из частных пожертвований (в значительной степени приходящих от редакторов OEIS) и грантов Фонда Саймонса. Фонд OEIS тратит 20–30 тыс. долларов в год. Деньги уходят, в частности, на оплату сервера, на котором работает OEIS.

Помимо работы с документами Фонда OEIS, Слоун продолжает исследовать свойства разных интересных последовательностей и вести переписку о них, а также часто принимает окончательное решение по вопросам, касающимся OEIS, когда между редакторами есть разногласия.

[2)] Вики, или вики-проект — сайт, содержимое которого редактируется пользователями совместно. Программное обеспечение «под капотом» вики-проекта называют вики-движком. Самый известный вики-проект — Википедия, она работает на движке MediaWiki.

§ 3. Как устроена OEIS

Технически Онлайн-энциклопедия состоит из двух частей.

Первая часть — это основной сайт OEIS (`https://oeis.org`). Он представляет собой интерфейс к поиску по базе данных OEIS и вики-движку для её редактирования и пополнения (их в 2010 году создал Расс Кокс). Кроме того, на основном сайте содержатся старые справочные страницы разного качества.

Вторая часть — так называемая The OEIS Wiki, т. е. вики OEIS. Она расположена по адресу `https://oeis.org/wiki` и представляет собой вики на движке MediaWiki — ту самую, в которой в 2009 году попытались вести всю деятельность OEIS. В этой части OEIS содержится следующее:

- регистрация новых пользователей;
- справочные материалы для авторов;
- связь с другими авторами;
- указатель записей OEIS (довольно избирательный, в основном составленный вручную);
- поддерживаемый вручную список работ, ссылающихся на OEIS;
- списки редакторов и журнал блокировок;
- околоматематические страницы, написанные различными авторами.

Всё содержимое и почти весь интерфейс OEIS — на английском языке.

Новые последовательности и правки в уже имеющиеся записи обрабатываются на основном сайте. Запросить регистрацию в качестве автора может любой пользователь, а модерацией поступающих материалов занимаются редакторы. В OEIS две группы редакторов: старшие редакторы (Editors-in-Chief) могут публиковать исправления и новые последовательности на сайте, младшие редакторы (Associate Editors) могут лишь помечать их как «проверенные», т. е. их роль чисто консультативная.

На момент написания этих строк в OEIS имелось 35 старших редакторов, многие из которых активно работают в OEIS, и около сотни младших редакторов, из которых собственно редактированием занимаются менее десятка. Все редакторы, как и руководство Фонда OEIS, работают бесплатно и добровольно. Автор OEIS может стать редактором, предложив свои услуги в этом качестве или неожиданно получив полномочия от Нила Слоуна, если тот сочтёт, что этот автор достаточно хорошо понимает дух Онлайн-энциклопедии.

Предположим, автор составил проект новой записи о последовательности или подготовил правку в существующую. И то и другое обраба-

Draft edits for A333855

(Underlined text is an addition; strikethrough text is a ~~deletion~~.)

A333855 allocated for Wolfdieter Lang
(history; published version)

Individual edits:

#2 by Wolfdieter Lang at Tue May 12 11:33:46 EDT 2020

NAME ~~allocated~~\Numbers 2*k + 1 with A135303(k) >= 2, for ~~Wolfdieter~~k >= 1, sorted ~~Lang~~increasingly.

DATA 17, 31, 33, 41, 43, 51, 57, 63, 65, 73, 85, 89, 91, 93, 97, 99, 105, 109, 113, 117, 119, 123, 127, 129, 133, 137, 145, 151, 153, 155, 157, 161, 165, 171, 177, 185, 187, 189, 193, 195, 201, 205, 209, 215, 217, 219, 221, 223, 229, 231, 233, 241, 247, 249, 251, 255, 257, 259, 265, 267, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 297, 301, 305, 307, 313, 315, 321, 323, 325

OFFSET 1,1

COMMENTS These are the numbers a(n) for which there is more than one periodic Schick sequence. In his notation B(a(n)) >= 2, for n >= 1.
These are also the numbers a(n) for which there is more than one coach in the complete coach system Sigma(b = a(n)) of Hilton and Pedersen, for n >= 1
These are the numbers a(n) for which there is more than one cycle in the complete system MDS(a(n)) (Modified Doubling Sequence) proposed in the comment by Gary W. Adamson, Aug 20 2019, in A003558.
The complement relative to the odd numbers >= 3 is given in A333854.
The subsequence for odd primes is identical with A268923.

REFERENCES Carl Schick, Trigonometrie und unterhaltsame Zahlentheorie, Bokos Druck, Zürich, 2003 (ISBN 3-9522917-0-6). Tables 3.1 to 3.10, for odd p = 3..113 (with gaps), pp. 158-166.

LINKS Peter Hilton and Jean Pedersen, A Mathematical Tapestry: Demonstrating the Beautiful Unity of Mathematics, Cambridge University Press, 2010, pp. 261-264.

FORMULA Sequence {a(n)}_{n>=1} of numbers 2*k + 1 satisfying A135303(k) >= 2, for k >= 1, ordered increasingly

CROSSREFS Cf. A003558, A135303, A216371, A268923, A333854.

KEYWORD ~~allocated~~
nonn

AUTHOR Wolfdieter Lang, May 12 2020

STATUS ~~approved~~
editing

#3 by Wolfdieter Lang at Tue May 12 11:33:52 EDT 2020

STATUS ~~editing~~
proposed

#4 by Michel Marcus at Wed May 13 11:24:27 EDT 2020

REFERENCES Peter Hilton and Jean Pedersen, A Mathematical Tapestry: Demonstrating the Beautiful Unity of Mathematics, Cambridge University Press, 2010, pp. 261-264.

LINKS ~~Peter Hilton and Jean Pedersen, A Mathematical Tapestry: Demonstrating the Beautiful Unity of Mathematics, Cambridge University Press, 2010, pp. 261-264.~~

STATUS ~~proposed~~
editing

Discussion

Wed May 13 11:24 **Michel Marcus**: data section bit big: could be cut right after 255

#5 by Michel Marcus at Wed May 13 11:24:52 EDT 2020

STATUS ~~editing~~
proposed

#6 by Wolfdieter Lang at Wed May 13 11:30:09 EDT 2020

DATA 17, 31, 33, 41, 43, 51, 57, 63, 65, 73, 85, 89, 91, 93, 97, 99, 105, 109, 113, 117, 119, 123, 127, 129, 133, 137, 145, 151, 153, 155, 157, 161, 165, 171, 177, 185, 187, 189, 193, 195, 201, 205, 209, 215, 217, 219, 221, 223, 229, 231, 233, 241, 247, 249, 251, 255~~, 257, 259, 265, 267, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 297, 301, 305, 307, 313, 315, 321, 323, 325~~

STATUS ~~proposed~~
editing

Discussion

Wed May 13 11:31 **Wolfdieter Lang**: O.k. Michel. Thanks for the shifting Links ->refs.

#7 by Wolfdieter Lang at Wed May 13 11:31:37 EDT 2020

STATUS ~~editing~~
proposed

Discussion

Wed May 13 11:33 **Amiram Eldar**: The first character of the name is "\"...?

#8 by Wolfdieter Lang at Thu May 14 03:29:49 EDT 2020

NAME ~~\~~Numbers 2*k + 1 with A135303(k) >= 2, for k >= 1, sorted increasingly.

STATUS ~~proposed~~
editing

Discussion

Thu May 14 03:30 **Wolfdieter Lang**: Thanks Amiram Eldar! Sorry, I overlooked this.

#9 by Wolfdieter Lang at Thu May 14 03:30:47 EDT 2020

Рис. 1. Предложенная последовательность с комментариями редакторов тывается редакторами почти одинаково, так что будем для краткости называть и то и другое «открытая правка» (в интерфейсе OEIS — «draft»). После создания открытой правки следующий шаг для автора — нажатием соответствующей кнопки пометить открытую правку как предложенную на рассмотрения редакторам (статус «proposed»). На любом этапе рассмотрения открытой правки её автор или другой пользователь может внести в неё изменения, после чего её вновь надо предложить к рассмотрению. Редакторы OEIS могут оставить указания, вопросы или реплики для других редакторов в «розовых комментариях» («pink-box comments») к открытой правке или внести собственные изменения.

Когда кто-то из редакторов сочтёт новую последовательность готовой к публикации, он переведёт её в статус «проверено» («reviewed»). После этого кто-то из главных редакторов переведёт её в статус «одобрено» («approved»), и в этот момент последовательность будет опубликована в OEIS. Если же редакторы решат, что предложенная последовательность не подходит для OEIS (например, выяснится, что это дубликат существующей последовательности), то она будет удалена, точнее, «переработана» («recycled») — содержимое удалено, а выделенный для последовательности номер будет использован позже кем-то другим. Принятие или отклонение изменения в существующую последовательность устроено так же, но в случае отрицательного решения переработка не происходит.

Время, которое пройдёт до момента, когда открытая правка будет отмечена проверенной (иногда — сразу одобренной), трудно предсказать. Это может занять буквально от часа до нескольких месяцев. В большинстве случаев — от месяца до двух для новых последовательностей.

Обычно имеется порядка трёхсот открытых правок одновременно. Редакторы сами решают, какими из них заняться. У редакторов нет практически никаких специальных инструкций. Есть две закрытые почтовые рассылки, но они очень мало используются, почти всё общение между редакторами происходит прямо в OEIS, в «розовых комментариях» к открытым правкам.

Если вы сами попробовали стать автором и вашу последовательность приняли — замечательно! Не приняли — не страшно: OEIS — не единственная и не всегда наиболее подходящая площадка для публикации математических идей.

Содержимое OEIS публикуется по лицензии CC BY-NC 3.0, что позволяет использовать и модифицировать его в некоммерческих целях при наличии ссылки на источник.

§ 4. Сообщество и влияние

Сообщество OEIS обладает своеобразной привлекательностью. В создании Онлайн-энциклопедии участвуют люди со всего света, представители самых разных народов, и поскольку все выступают под своими настоящими именами, то можно видеть редкостное разнообразие имён — английские, русские, немецкие, испанские, румынские, китайские, индийские, вьетнамские и так далее, и так далее.

Среди авторов есть как математики (студенты, аспиранты и профессора на пенсии, гораздо реже — постдоки и работающие профессора, в том числе известные), так и более или менее квалифицированные любители: физики, инженеры, работники сферы информационных технологий, учителя математики, школьники. Энциклопедия OEIS может быть подходящим местом для публикации результатов школьного проекта, если руководитель знаком с требованиями к содержанию и оформлению предлагаемых записей о последовательностях: например, последовательности A275302–A275305 (касаются муравья Лэнгтона, ползающего по треугольному паркету) и A275667 (касается клеточного автомата типа игры «Жизнь» на треугольном паркете, в котором изначальный паттерн порождает собственные копии) были получены школьниками в Летней школе «Слон» на организованном мной исследовательском проекте по клеточным автоматам.

Большинство авторов добавляют материал в OEIS единожды или изредка. Некоторых авторов OEIS затягивает, и Энциклопедия становится их многолетним увлечением. Постоянные авторы часто имеют определённую специализацию. Например, Шон Ирвин, разработчик программного обеспечения для биоинформатики из Новой Зеландии, занимается Энциклопедией с самого момента её выхода в интернет; с 2009 года Шон постоянно снабжает последовательности, начав с A000001 «Количество групп порядка n», написанными на языке Java программами. Попутно Шон регулярно находит и исправляет ошибки в OEIS; по его словам, это быстро стало основным стимулом к его работе. Программы Шона объединены в единый комплекс под названием jOEIS (`https://github.com/archmageirvine/joeis`), и количество последовательностей, члены которых jOEIS научился генерировать за 11 с лишним лет, превысило сто тысяч.

Постоянные авторы иногда обсуждают идеи последовательностей в открытой почтовой рассылке seqfan. Наиболее квалифицированным постоянным авторам, таким как тот же Шон Ирвин, Нил Слоун в конце концов даёт полномочия редакторов (соответственно, большинство из редакторов — не профессиональные математики). Встречаются среди постоянных авторов и фрики, чьё упорство больше похоже на одержимость; наиболее одиозных из них Нил Слоун блокирует.

Вносить информацию в OEIS не значит заниматься математикой, но в идеале значит помогать тем, кто занимается математикой. Лектор университета Стратклайда Сергей Китаев, неоднократный автор OEIS, и почётный профессор Ратгерского университета Дорон Цейльбергер, член консультативного совета фонда OEIS, оценивают Онлайн-энциклопедию как известный, уважаемый и ценный инструмент для математиков, работающих в соответствующих областях (комбинаторика, теория чисел), а также для математиков-любителей. Цейльбергер не преминул заметить, что любительская математика «столь же важна и часто более интересна» по сравнению с профессиональной; в самом деле, многие материалы из OEIS вряд ли окажутся очень уж важными для математической науки, но они красивы и интересны.

Трудно сказать, насколько часто данные OEIS приводят к нетривиальным математическим открытиям, но несомненно, что такое случалось неоднократно. Так, Китаев рассказывает о последовательности A022493 «Числа Фишберна <...>; также количество неизоморфных интервальных порядков на n неразличимых точках»:

> Эта история началась, когда я и двое моих коллег развлекались с новым типом паттернов перестановок (известным ныне как бивинкулярные паттерны, *bivincular patterns*) и обнаружили с помощью OEIS, что они связаны с интервальными порядками (которые суть то же самое, что (2+2)-свободные частично упорядоченные множества). Мы сумели не только комбинаторно объяснить эту связь, но и подсчитать интервальные порядки с помощью так называемых подъёмных последовательностей, *ascent sequences* (мы ввели их как инструмент, но теперь они привлекли значительный интерес в литературе), решив таким образом задачу, которая оставалась открытой около 40 лет. Наша работа была весьма влиятельной, и позже она привела к семейству симпатичных обобщений интервальных порядков, предложенных различными авторами. По сути, вся эта работа не смогла бы состояться без OEIS, ведь как бы мы смогли догадаться, что наши перестановки, избегающие определённые паттерны, связаны, скажем, с интервальными порядками?!

Энциклопедия OEIS вдохновила и другие подобные проекты — «базы идентификационных данных» (*fingerprint databases*, `https://www.ams.org/journals/notices/201308/rnoti-p1034.pdf`). Характерный пример — «Энциклопедия центров треугольника» (`https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`) Кларка Кимберлинга, профессора Университета Эвансвилла и многолетнего автора OEIS. Эта база данных начинается с точек пересечения биссектрис, медиан, срединных перпендикуляров и высот треугольника и продолжается сведениями о десятках тысяч точек, которые в том или ином смысле можно назвать центрами треугольника. В этом проекте невооружённым глазом заметно влияние OEIS во многих аспектах, от организации информации до спартанского дизайна, да и в само́м грандиозном размере.

§ 5. Перспективы и вызовы

Сейчас, как сообщает Расс Кокс, OEIS имеет 300 тысяч посещений в месяц и 80 тысяч правок в год. Появление нынешнего программного обеспечения OEIS в 2010 году позволило распределить огромную работу по редактуре всех входящих правок, которую раньше выполнял Нил Слоун в одиночку, на несколько десятков активных редакторов. Йёрг Арндт, профессор Нюрнбергского технического университета им. Георга Симона Ома и один из самых активных редакторов OEIS, отмечает: «Двадцать лет назад многие записи были очень краткими, часто включали лишь название, приблизительно обозначающее, о чём эта последовательность, и одну-две ссылки на статьи. Теперь же многие последовательности включают самостоятельное определение и примеры». Это несомненный успех, как и несколько тысяч цитирований OEIS в научной литературе. Нил Слоун же получил возможность уделять больше времени математической работе (исследование последовательностей, написание статей), отвечать на математические и историографические запросы о последовательностях с помощью своих огромных бумажных и электронных архивов, больше заниматься популяризацией OEIS (делать доклады и писать статьи о новых интересных последовательностях), а также делать формально-бюрократическую работу по руководству фондом OEIS и осуществлять фактическое стратегическое руководство Энциклопедией.

Что будет с OEIS дальше, в долгосрочной перспективе? Когда я задал этот вопрос Нилу Слоуну, он ответил:

> ОЧЕНЬ ВАЖНО, чтобы она **не менялась слишком сильно**. У нас хорошая система, и важно её сохранить. Она работает почти 60 лет. Я надеюсь, что эта база данных будет существовать сотню лет без больших изменений. Я прожил долго, и многие вещи некоторое время существовали, а затем были куплены, или проданы, или погибли, или исчезли. Или изменились до неузнаваемости.

Кроме того, Слоун считает, что не следует как-либо менять ни правила и руководства OEIS, ни её программное обеспечение. В будущем управлять OEIS будет Фонд OEIS; попечительский совет Фонда доселе занимался только финансовыми вопросами, так что, видимо, когда Слоун перестанет руководить Фондом, фактическое руководство перейдёт вице-президенту Фонда. Сейчас это место занимает Расс Кокс[3)], и он также считает, что нужно сосредоточиться на содержании Энциклопедии, а в программном обеспечении OEIS он планирует в первую очередь улучшать поиск и автоматизировать указатель; отметим, что Расс Кокс действительно постоянно улучшает качество поиска последовательностей.

Неужели OEIS действительно не нуждается ни в каких изменениях?

Темп роста OEIS постепенно увеличивается. С одной стороны, это свидетельство успеха OEIS. С другой — возрастает нагрузка на редакторов. Нил Слоун справедливо отмечает, что сроки рассмотрения поступающей информации гораздо короче, чем в престижных математических журналах. Однако в своих выступлениях он регулярно говорит, что в OEIS поступает много материала и Энциклопедии нужно больше редакторов. Неспроста ограничение для авторов на количество открытых правок по умолчанию недавно было снижено с 7 до 3. В самом деле, хотя правки постоянных авторов и редакторов часто публикуются быстро, многие открытые правки маринуются в очереди долгое время. Должны быть причины, по которым редакторы всё время проходят мимо этих открытых правок, а самым действенным механизмом принятия решений оказывается Слоун ex machina.

Причины эти разнообразны и взаимосвязанны. В вики-движке OEIS отсутствуют многие функции, имеющиеся в движке MediaWiki и привычные любому, кто работает в Википедии, например, список наблюдения или поиск по обсуждениям («розовым комментариям»). В рамках отдельно взятой открытой правки отображаются подряд все комментарии и устаревшие версии, в нетривиальных случаях они могут накапливаться как снежный ком, что, с одной стороны, демотивирует редакторов разбираться в длинных «простынях» обсуждений, с другой — удерживает редакторов от высказывания мнения, чтобы не добавлять лишние реплики, осложняющие работу коллегам (полагаю, особенно это касается младших редакторов).

Ещё с тех пор, когда Энциклопедия не была онлайновой, установилось весьма разумное правило: отдельные замечания и формулы в запи-

---

[3)] В конце июня 2021 г. стало известно, что Расс Кокс сменил Нила Слоуна на посту президента Фонда OEIS.

сях о последовательностях снабжаются подписью их авторов с датами добавления. Вики-движок с удобным просмотром истории правок, вообще говоря, делает подписи ненужными, но правила по-прежнему требуют их добавлять. Кроме того, в правилах OEIS записано, что редакторы могут «безжалостно отредактировать» текст, добавленный авторами. В результате масса усилий тратится на споры о том, как оформить, допустим, подписи у замечания, написанного одним автором и изменённого другим. К тому же в замечаниях к последовательностям принят хронологический порядок, что препятствует их упорядочению и тематическому секционированию.

Далее, у разных редакторов разные вкусы и немного разные представления о том, какие именно последовательности являются интересными и подходящими. К тому же, как говорит Нил Слоун, устанавливать законы на любой случай — не в духе OEIS. Это так, но отсутствие прописанных общепринятых принципов приводит к сложностям и задержкам обработки не очень интересных последовательностей. Поток предлагаемых последовательностей с пограничной интересностью довольно велик, и они замусоривают очередь открытых правок, а при попадании в OEIS — поисковую выдачу, становясь проблемой уже не редакторов, а читателей.

Немногие правила, установленные однозначно, относятся в основном к оформлению. При этом они не всегда записаны в The OEIS Wiki, а если и записаны, то заметных ссылок на них из интерфейса OEIS нет, что порождает огромное количество одинаковых недочётов у разных авторов и, соответственно, комментариев от редакторов: «пожалуйста, поставьте точку в конце названия» и т. п. Поскольку среди этих правил и ограничений есть очень простые и формальные (например: b-файл и данные в основном содержании записи должны всегда согласоваться между собой), их можно было бы реализовывать чисто техническими методами, но вики-движок OEIS не даёт такой возможности, и Нил Слоун обычно отвергает технические подходы к выполнению рутинных задач.

Георг Фишер, проработавший программистом-разработчиком почти 45 лет и недавно присоединившийся к работе над jOEIS, разработал средства регулярных автоматизированных проверок OEIS на очевидные проблемы, такие как неправильные b-файлы. Он справедливо отмечает, что эти инструменты стоило бы интегрировать в программное обеспечение OEIS. Также он замечает, что пользовательский интерфейс OEIS нуждается в обновлении. Если же составить полный список изменений, которые многие редакторы (включая меня) считают остро необходимыми, он получится настолько длинным, что наиболее актуальными оказываются мета-улучшения: Георг Фишер назвал самой срочной задачей расширение команды разработчиков и системных администраторов, Йёрг Арндт — открытие баг-трекера для программного обеспечения OEIS. Отдельного упоминания заслуживают возможные проблемы с безопасностью: если в системе OEIS, которую никогда не исследовали специалисты по информационной безопасности, обнаружатся уязвимости, которыми воспользуются злоумышленники, то могут непосредственно пострадать уже читатели Энциклопедии.

Сейчас дальнейшим развитием программного обеспечения OEIS занимается его автор — Расс Кокс. Он написал код этой системы на языке программирования Go. Это был естественный выбор, поскольку Расс сам разрабатывал этот язык; он и сейчас возглавляет этот проект в компании Google (что, очевидно, не способствует наличию большого количества времени на хобби типа OEIS). Но тогда, в 2010 году, этот язык был новым, мало кто знал его. Это подняло порог вхождения для новых разработчиков. Сейчас язык Go более распространён, так что можно было бы привлечь больше разработчиков; денег на оплату труда таких специалистов у Фонда OEIS нет, но все связанные с OEIS люди и так волонтёры. Расс Кокс говорит, что в позапрошлом году «были предприняты некоторые шаги в сторону превращения программного обеспечения OEIS в нечто, над чем могли бы работать другие люди, но этого пока не произошло». Таким образом, Расс Кокс не рассматривает привлечение новых разработчиков как дело первостепенной важности, Нил Слоун — тем более. Чарльз Грейтхаус говорит, что имеется небольшая группа людей, которые хотят и могут вносить изменения в код программного обеспечения OEIS, но они не делают этого по разным причинам (сам Грейтхаус ссылается на недостаток времени). Таким образом, реализация в ближайшее время изменений, которые многие редакторы считают необходимыми, кажется маловероятной.

Мета-проблема же состоит в том, что в сообществе OEIS просто не существует практики обсуждения подобных проблем и принятия каких-либо решений по итогам обсуждений. Форумов, как в Википедии, в OEIS нет; редакторские рассылки малоактивны, и в них в любом случае обсуждаются только частные вопросы, а попытки обсуждения общих обычно заканчиваются ничем; попечительский совет Фонда OEIS занимается лишь финансовыми делами; консультативный совет не функционирует. Получается, что стратегические решения может принимать только сам Нил Слоун, при этом времени на обсуждение таких вопросов у него не так много, а собственная позиция весьма консервативная.

Нил Слоун создал замечательную Энциклопедию, которая объединяет любителей математики со всего мира и стала ценным инструментом для профессиональных математиков. У него всегда найдутся добрые слова для авторов и редакторов. Расс Кокс сделал возможным развитие Энциклопедии в её нынешней форме и продолжает улучшать её. (Есть и другие люди, причастные к созданию и функционированию OEIS; на описание их роли здесь, к сожалению, недостаточно места.) Авторы продолжают пополнять OEIS, а редакторы — поддерживать качество её содержания. Я надеюсь, что Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей будет жить и развиваться долго и счастливо.

§ 6. Постскриптум: все числа интересные, но некоторые интереснее других

В заключение предлагаем читателю поразмыслить над загадкой, относящейся к неформальному аспекту математики. Взгляните на рис. 2. Если вы программируете, то можете воспроизвести его самостоятельно, воспользовавшись файлом `https://oeis.org/stripped.gz` со всеми последовательностями OEIS. На рисунке видно, что в целом чем число n больше, тем реже оно встречается в OEIS. При этом большинство точек формируют две выраженные полосы — нижняя погуще, верхняя поразреженнее. Это значит, что среди всех натуральных чисел можно выделить некую большую группу чисел, заметно чаще встречающихся в Онлайн-энциклопедии (они и формируют верхнюю полосу). Первый вопрос: что это за группа чисел? Чтобы подсмотреть ответ на этот вопрос в интернете, следует знать, что просвет между этими двумя полосами известен как

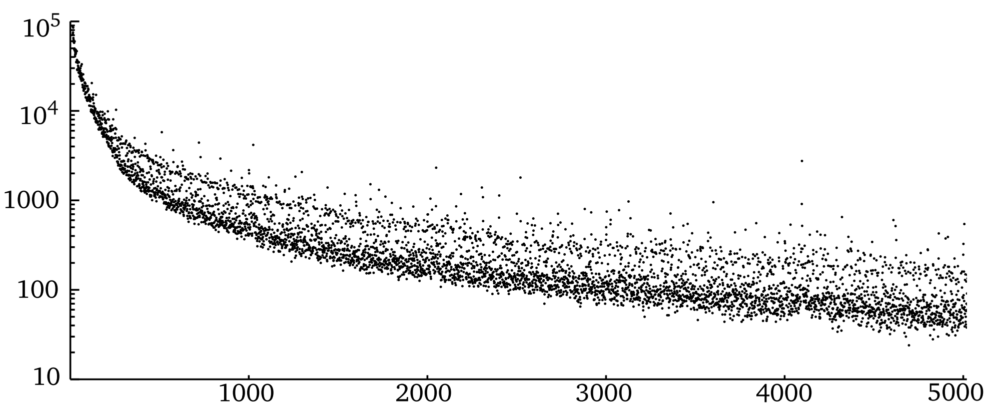


Рис. 2. По горизонтальной оси отложено натуральное число n, а по вертикальной (в логарифмической шкале) — сколько раз число n встречается в отображаемой части всех последовательностей OEIS

Sloane's gap (*пробел Слоуна*). Второй вопрос: как охарактеризовать числа, которые аномально часто встречаются в OEIS, оказываясь на графике даже выше верхней полосы? Этот вопрос посложнее первого и, по-видимому, не имеет ясного и однозначного ответа.

Андрей Дмитриевич Заболотский, ВНИИА им. Н. Л. Духова
zabolotskiy@phystech.edu

Связность графа как топологическая связность

Б. Р. Френкин

В топологии и в теории графов существует понятие связности, которое соответствует одному и тому же наглядному представлению. Ввиду простоты и важности этого понятия полезно выяснить, как соотносится теоретико-графовая связность с топологической.

Будем рассматривать неориентированные графы (допуская мультирёбра). Как известно, связность таких графов сводится к топологической связности посредством реализации в вещественном пространстве: если рёбра графа — отрезки в вещественном пространстве, вершины — концы этих отрезков, то связный граф связен как подмножество этого пространства, а несвязный — несвязен. Но понятие вещественного числа принципиально сложнее, чем понятие связности графа, и получается неестественная редукция простого к сложному. А нельзя ли свести теоретико-графовую связность к топологической более элементарным образом?

Ответ положительный, но не тривиальный. Пусть дан граф G (неориентированный, возможно с мультирёбрами). Рассмотрим множество M, состоящее из всех его вершин и рёбер. Объявим *замкнутыми* все подмножества $X \subseteq M$ со следующим свойством: *если некоторое ребро графа G принадлежит X, то и обе инцидентные ему вершины принадлежат X*. Этим задана топология на множестве M, поскольку все объединения и пересечения таких множеств обладают тем же свойством.

В данной топологии *открыты* в точности те множества $Y \subseteq M$, которые обладают следующим свойством: *если Y содержит некоторую вершину, то Y содержит и все инцидентные ей рёбра*.

На самом деле мы взяли стандартное представление графа в вещественном пространстве, для каждого ребра «склеили» все его внутренние точки в одну и рассмотрели фактортопологию на полученном множестве. А для описания этой топологии уже не требуется понятие вещественного числа.

Во введённой топологии множество вершин и рёбер любого связного подграфа связно, а любого несвязного — несвязно. В самом деле, пусть F — множество всех вершин и рёбер некоторого подграфа, несвязное в данной топологии. Это значит, что существуют замкнутые множества C_1, C_2, пересечения которых с F непусты, не пересекаются и в совокупности покрывают F. Если некоторое ребро из F принадлежит одному из этих множеств, то ему принадлежат и концы ребра. Следовательно, каждое из множеств C_1, C_2 содержит хотя по одной вершине из F. Если F связно в смысле теории графов, то между этими вершинами существует путь. Какие-то две соседние вершины v_1, v_2 этого пути принадлежат множествам C_1 и C_2 соответственно. Но они должны принадлежать тому из множеств C_1, C_2, которому принадлежит соединяющее их ребро. Противоречие. Значит, F несвязно в теоретико-графовом смысле.

Обратно, пусть подграф H несвязен в смысле теории графов, M_1 — множество всех вершин и рёбер одной из его компонент связности, M_2 — множество всех остальных его вершин и рёбер. Тогда M_1 и M_2 непусты, не пересекаются, в совокупности покрывают H и замкнуты в рассматриваемой топологии. Значит, H топологически несвязен.

Объединение вершин и рёбер в одно множество — шаг не совсем стандартный. Возникает вопрос, насколько он необходим: *нельзя ли на множестве вершин графа ввести топологию, в которой связно множество всех вершин каждого связного подграфа и несвязны остальные непустые множества*? Покажем, что *это не всегда возможно*.

Пусть дан цикл нечётной длины $m > 3$. Предположим, что нужная топология на множестве его вершин существует. Обозначим последовательные вершины цикла $1, 2, \ldots, m$. Пусть C_i — совокупность всех замкнутых множеств, содержащих вершину i $(i = 1, \ldots, m)$. Одно из множеств C_1, C_2 включает другое, иначе множество $\{1; 2\}$ топологически несвязно, хотя является множеством всех вершин связного подграфа. Без ограничения общности $C_1 \subseteq C_2$. Точно так же одно из множеств C_2, C_3 включает другое. Если $C_2 \subseteq C_3$, то $C_1 \subseteq C_3$. Но тогда множество $\{1; 3\}$ топологически связно и, значит, должно быть множеством всех вершин связного подграфа, что неверно. Если C_2 совпадает с C_1 или C_3, то результат такой же. Значит, C_2 строго включает C_1 и C_3. Аналогично C_3 строго содержится в C_2 и C_4, а C_4 строго включает C_3 и C_5, и т. д. Поскольку m нечётно, C_1 строго включает C_m и C_2. Но мы уже показали, что C_2 строго включает C_1, — противоречие. Значит, нужной топологии не существует.

В рассмотренном примере ограничение $m > 3$ необходимо: в цикле длины 3 любое подмножество вершин является множеством вершин связного подграфа, поэтому можно взять тривиальную топологию, в которой все множества связны.

Ограничение циклами нечётной длины также необходимо: покажем, что для циклов чётной длины n нужная топология на множестве вершин существует. Можно считать $n \leqslant 4$. Обозначим последовательные вершины через $1, 2, \ldots, n$. Объявим замкнутыми: множество всех вершин; пустое множество; множество всех вершин каждого связного участка, концы которого имеют чётные номера; объединения таких множеств. Совокупность перечисленных множеств замкнута относительно объединений и пересечений, так что мы получаем топологию.

Пусть S — множество всех вершин непустого связного подграфа, т. е. некоторое непустое множество последовательных вершин цикла. Если S несвязно в построенной топологии, то найдутся соседние вершины v_1, v_2 в S и замкнутые множества S_1, S_2, такие что $v_1 \in S_1 \setminus S_2$, $v_2 \in S_2 \setminus S_1$. Из построения рассматриваемой топологии следует, что номера v_1 и v_2 чётны. Но это невозможно для соседних вершин. Значит, S топологически связно.

Пусть теперь некоторое множество T вершин цикла не является множеством всех вершин связного подграфа. Это значит, что в цикле содержатся вершины a, b, c, d, расположенные именно в этом порядке (по часовой стрелке, не обязательно рядом) и такие, что $a, c \notin T$ и $b, d \in T$. Пройдём от a по часовой стрелке к c, множество пройденных вершин обозначим T_1. Вершину a включим в T_1 в том и только том случае, если её номер чётен. Аналогично поступим с вершиной c. Затем пройдём от c к a по часовой стрелке и аналогично построим множество T_2. Множества T_1 и T_2 замкнуты, а их пересечения с T непусты (содержат соответственно b и d), не пересекаются и в совокупности покрывают T. Значит, T несвязно в данной топологии, что и требуется.

Борис Рафаилович Френкин, МЦНМО

frenkin@mccme.ru

По мотивам задачника

К статье И. Е. Воробьёва

В олимпиадном мире хорошо известен сюжет о том, что попарно различные квадратные радикалы из целых чисел, свободных от квадратов, линейно независимы над $\mathbb{Q}$ (см., например, [8, с. 99–103]). В то же время сюжет про радикалы высших степеней не получил отражения в кружковой практике. Это побудило школьника (ныне студента) Ваню Воробьёва самому себе поставить задачу (что методически важно) и разобраться в вопросе. На основе этой работы и написана данная статья, содержащая решение задачи 25.11 из задачника «Математического просвещения»:

Числа $m_1, \ldots, m_k$ *свободны от* n*-х степеней* (*т. е. не делятся на* n*-ю степень натурального числа, большего чем* 1). *Докажите, что* $\sqrt[n]{m_1}, \ldots, \sqrt[n]{m_k}$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *Вначале рассмотрите случай* $n = 2$.

(*Фольклор*)

На этой работе основан проект «Алгебраические числа как векторы» 32-й Летней конференции Турнира городов [1]. Упрощённая версия данной статьи в соавторстве с А. Л. Канунниковым опубликована в журнале «Квант» [2, 3]. Советуем читателю также обратиться к статьям А. Л. Канунникова [4–6] и А. Б. Скопенкова [7].

Список литературы

[1] *Воробьёв И., Дориченко С., Жилина А., Канель-Белов А., Канунников А., Френкин Б.* Алгебраические числа как векторы // 32-я Летняя конференция международного математического турнира городов `https://www.turgor.ru/lktg/2020/1/index.html`.

[2] *Канунников А., Воробьёв И.* Линейная независимость радикалов // Квант. 2021. № 3. С. 12–20.

[3] *Канунников А.*, *Воробьёв И.* Линейная независимость радикалов (окончание) // Квант. 2021. № 4. С. 6–10.

[4] *Канунников А. Л.* Алгебраические числа как векторы // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 111–142.

[5] *Канунников А. Л.* Как придумать построение правильного семнадцатиугольника // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 143–166.

[6] *Канунников А. Л.* Как придумать построение правильного семнадцатиугольника (окончание) // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 28. М.: МЦНМО, 2021. С. 142–149.

[7] *Скопенков А. Б.* Ещё одно доказательство из Книги: теорема Гаусса — Ванцеля // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 28. М.: МЦНМО, 2021. С. 133–141.

[8] *Уфнаровский В. А.* Математический аквариум. М.: МЦНМО, 2010.

О линейной независимости радикалов из натуральных чисел

И. Е. Воробьёв

В этой работе приводится альтернативное доказательство двух классических результатов:

- Радикалы из натуральных чисел, все попарные отношения которых иррациональны, линейно независимы над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.
- Радикалы нечётной степени n из натуральных чисел, свободных от n-х степеней, линейно независимы над круговым полем $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$.

§ 1. Введение

При изучении алгебры естественным образом возникают радикалы из натуральных чисел. Между ними имеются тривиальные соотношения типа $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$ и т. п.

Встаёт вопрос о существовании линейных соотношений между радикалами, кроме тривиальных. Здесь возникают эффекты, связанные с комплексными корнями из единицы. Например, $\sqrt{-3}$ выражается над $\mathbb{Q}$ через $\sqrt{3}$ с использованием $\sqrt{-1}$. Чтобы их исключить, ограничимся только положительными вещественными значениями радикалов.

Простейшим фактом рассматриваемого типа является следующий: квадратные корни из натуральных чисел, свободных от квадратов, линейно независимы над полем рациональных чисел.

Мы приведём новое доказательство следующего результата, полученного в работе А. С. Безиковича [4]: *если* $\sqrt[m_i]{n_i}/\sqrt[m_j]{n_j} \notin \mathbb{Q}$ *при* $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$, *то* $\sqrt[m_1]{n_1}, \sqrt[m_2]{n_2}, \ldots, \sqrt[m_k]{n_k}$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$.

Этот факт можно переформулировать так: *Если каждый из различных радикалов* $\sqrt[m_i]{n_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ *нельзя сократить* (*т. е.* n_i *не является точной* l*-й степенью, где* l — *какой-либо делитель числа* m_i) *и каждое* n_i *свободно от* m_i*-х степеней, то* $1, \sqrt[m_1]{n_1}, \sqrt[m_2]{n_2}, \ldots, \sqrt[m_k]{n_k}$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$.

После такого естественного вопроса можно задаться следующим: *верно ли, что радикалы* m*-й степени линейно независимы над расширением* *поля $\mathbb{Q}$ примитивным корнем m-й степени из* 1? Будет доказано, что это верно для нечётных m. В чём-то схожее доказательство приводит Ричардс в [5]. Отметим, однако, что при рассмотрении этого случая нами доказаны некоторые дополнительные факты.

Доказательства основаны на рассмотрении группы Галуа и используют тот факт, что порядок группы Галуа равен степени расширения. Поэтому нам будет удобнее сначала доказать результат про независимость над круговым полем (расширения в нём нормальны, т. е. мы можем говорить о группе Галуа), хотя он и выглядит более сложным. А затем, обобщив его, получить доказательство независимости над полем рациональных чисел.

О теории Галуа см. [2, 3].

§ 2. Все корни квадратные

Начнём с простейшего содержательного случая — когда все корни квадратные.

Теорема 1. *Квадратные корни из натуральных чисел, свободных от квадратов, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Иными словами,*

$$1,\ \sqrt{p_1},\ \ldots,\ \sqrt{p_n},\ \sqrt{p_1p_2},\ \ldots,\ \sqrt{p_{n-1}p_n},\ \ldots,\ \sqrt{p_1\cdots p_n},$$

где p_i — попарно различные простые, линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Изложенное ниже рассуждение распространяется на общий случай, почему мы его и приводим, хотя существует элементарное доказательство.

Утверждение равносильно следующему:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n. \tag{1}$$

В самом деле, написанный выше набор чисел есть не что иное, как базис векторного пространства $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ над $\mathbb{Q}$. Равенство (1) выражает тот факт, что расширение каждым следующим числом нетривиально.

Докажем равенство (1). Предположим противное: найдутся такие простые $p_1, \ldots p_{i+1}$, что расширение $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_i})$ с помощью $\sqrt{p_{i+1}}$ тривиально.

Возьмём наименьшее n такое, что для некоторого натурального k и различных простых чисел $p_1, \ldots, p_{n+k}$

$$\sqrt{p_{n+1}\cdots p_{n+k}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}).$$

(Очевидно, что $n \leqslant i$. При этом возможно, что $n < i$.)

Пусть

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}}), \quad \mathbb{E}_1 = \mathbb{F}(\sqrt{p_n}), \quad \mathbb{E}_2 = \mathbb{F}(\sqrt{p_{n+1}\cdots p_{n+k}}).$$

Имеется включение $\mathbb{E}_1 \supseteq \mathbb{E}_2$. Степень расширения $\mathbb{E}_1$ над $\mathbb{F}$ равна 2. При этом $\mathbb{E}_2$ имеет такую же степень расширения над $\mathbb{F}$, так как нетривиально ввиду минимальности n. Следовательно, $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2$.

Далее нам потребуется

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — любое поле характеристики* 0, *а m, n — его элементы, не являющиеся квадратами. Тогда если $\mathbb{F}(\sqrt{m}) = \mathbb{F}(\sqrt{n})$, то $\sqrt{n} = \alpha\sqrt{m}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$.*

Доказательство леммы. Заметим, что

$$\{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{F}\} = \mathbb{F}(\sqrt{n}) = \mathbb{F}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{F}\}.$$

Рассмотрим автоморфизмы поля $\mathbb{F}(\sqrt{n})$, оставляющие $\mathbb{F}$ на месте:

$$\varphi\colon a + b\sqrt{n} \mapsto a - b\sqrt{n}, \quad \psi\colon a + b\sqrt{m} \mapsto a - b\sqrt{m}.$$

Количество таких автоморфизмов равно степени расширения, т. е. двум. Один из них тождественный, и так как $\varphi \neq \mathrm{id}$ и $\psi \neq \mathrm{id}$, получаем, что $\varphi = \psi$.

Так как $\sqrt{n}$ — элемент из $\mathbb{F}(\sqrt{m})$, найдутся такие $a, b \in \mathbb{F}$, что $\sqrt{n} = a + b\sqrt{m}$. После применения φ к левой части и ψ к правой равенство сохранится. Следовательно, мы можем написать систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{n} = a + b\sqrt{m}, \\ -\sqrt{n} = a - b\sqrt{m}. \end{cases}$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, получаем: $2\sqrt{n} = 2b\sqrt{m}$. □

Окончание доказательства теоремы 1. Применим лемму для $p_{n+1}, \ldots, p_{n+k}$ и p_n. Получим, что

$$\sqrt{p_n} = \alpha\sqrt{p_{n+1} \ldots p_{n+k}}, \quad \alpha \in \mathbb{F}.$$

Домножим обе части на $\sqrt{p_{n+1} \ldots p_{n+k}}$:

$$\sqrt{p_n \ldots p_{n+k}} = \alpha p_{n+1} \ldots p_{n+k}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{p_n \ldots p_{n+k}} \in \mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_{n-1}}),$$

что противоречит минимальности выбранного нами n. □

§ 3. Показатель корня — простое число

Перейдём к случаю, где все корни одной и той же простой степени, и сразу будем доказывать независимость над круговым полем.

Теорема 2. *Пусть p — простое число. Тогда корни p-й степени из натуральных чисел, свободных от p-х степеней (т. е. чисел, для которых степень вхождения каждого простого меньше, чем p), линейно независимы над $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/p))$.*

Доказательство. Пусть

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right),$$

т. е. ω — корень p-й степени из 1.

Аналогично предыдущему, утверждение теоремы сводится к следующему факту:

$$\left[\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[p]{p_1}, \ldots, \sqrt[p]{p_n}) : \mathbb{Q}(\omega)\right] = p^n.$$

Нужная нам линейная независимость вытекает из описания базиса пространства $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[p]{p_1}, \ldots, \sqrt[p]{p_n})$ над $\mathbb{Q}(\omega)$. Возьмём, как в § 2, наименьшее n, для которого найдутся натуральное k, различные простые числа $p_1, \ldots, p_{n+k}$ и натуральные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, меньшие чем p и такие, что

$$\sqrt[p]{p_{n+1}^{\alpha_1} \cdots p_{n+k}^{\alpha_k}} \in \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[p]{p_1}, \ldots, \sqrt[p]{p_n}).$$

Такое n существует. Действительно, рассмотрим наименьшее n такое, что при присоединении ещё одного корня p-й степени из простого числа p_{n+1} степень расширения окажется меньше p. Минимальный многочлен для $\sqrt[p]{p_{n+1}}$ над построенным полем делит

$$x^p - p_{n+1} = \prod (x - \omega^i \cdot \sqrt[p]{p_{n+1}}),$$

т. е. его свободный член имеет вид $\omega^k \cdot \sqrt[p]{p_{n+1}^l}$, где $l < p$, и тем самым мы нашли в построенном поле радикал нужного вида.

Заметим, что $n > 0$. Предположим, что $\mathbb{Q}(\omega)$ содержит нецелый $\sqrt[p]{m}$. Однако

$$[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] < [\mathbb{Q}(\sqrt[p]{m}) : \mathbb{Q}],$$

так как левая часть равна $\varphi(p) = p - 1$ (неприводимый многочлен, аннулирующий ω, — это многочлен деления круга $1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$; подробности см., например, в [1]), а правая равна p (учитывая, что p простое). Противоречие[1)].

Как и раньше, пусть $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\omega)(\sqrt[p]{p_1}, \ldots, \sqrt[p]{p_{n-1}})$. Ясно, что

$$\mathbb{F}(\sqrt[p]{p_n}) \supseteq \mathbb{F}\left(\sqrt[p]{p_{n+1}^{\alpha_1} \cdots p_{n+k}^{\alpha_k}}\right).$$

[1)] В доказательстве теоремы 2 мы только в этом месте пользуемся простотой показателя степени.

Заметим, что $[\mathbb{F}(\sqrt[p]{p_n}) : \mathbb{F}] = p$. Действительно, минимальный многочлен для $\sqrt[p]{p_n}$ делит $x^p - p_n = \prod(x - \omega^i \cdot \sqrt[p]{p_n})$. Следовательно, его свободный член, принадлежащий $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\omega)(\sqrt[p]{p_1}, \ldots, \sqrt[p]{p_{n-1}})$, имеет вид $\omega^k \cdot \sqrt[p]{p_n^l}$. В силу минимальности выбранного n

$$p = l = [\mathbb{F}(\sqrt[p]{p_n}) : \mathbb{F}].$$

Напомним классический факт.

Пусть $\mathbb{F}$ — любое поле. Тогда если $\mathbb{F}(\alpha) \supseteq \mathbb{F}(\beta)$ и оба расширения являются расширениями Галуа, то автоморфизмы поля $\mathbb{F}(\alpha)$, которые сохраняют элементы поля $\mathbb{F}$, переводят β в сопряжённый элемент.

Теперь мы готовы доказать ключевую лемму, которая нам потребуется и в доказательстве следующих теорем.

Лемма 2 (основная лемма). *Пусть $\mathbb{F}$ — любое подполе в $\mathbb{C}$, содержащее примитивный корень m-й степени из 1, а n, k — элементы из $\mathbb{F}$, не являющиеся m-ми степенями. Тогда если $\mathbb{F}(\sqrt[m]{n}) \supseteq \mathbb{F}(\sqrt[m]{k})$, то $\sqrt[m]{k} = \alpha \cdot \sqrt[m]{n^l}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$ и $l < m$.*

Доказательство. Пусть степени расширений $\mathbb{F}(\sqrt[m]{n})$ и $\mathbb{F}(\sqrt[m]{k})$ равны a и b соответственно,

$$\mathbb{F}(\sqrt[m]{n}) = \left\{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \sqrt[m]{n} + \ldots + \alpha_{a-1} \cdot \sqrt[m]{n^{a-1}}\right\} \supseteq$$
$$\supseteq \left\{\beta_0 + \beta_1 \cdot \sqrt[m]{k} + \ldots + \beta_{b-1} \cdot \sqrt[m]{k^{b-1}}\right\} = \mathbb{F}\left(\sqrt[m]{k}\right).$$

Тогда найдём такие $\alpha_0, \ldots, \alpha_{a-1} \in \mathbb{F}$, что

$$\sqrt[m]{k} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \sqrt[m]{n} + \ldots + \alpha_{a-1} \cdot \sqrt[m]{n^{a-1}}.$$

Существует лишь a автоморфизмов, действующих на $\mathbb{F}(\sqrt[m]{n})$ и сохраняющих элементы из $\mathbb{F}$, и все они переводят $\sqrt[m]{n}$ и $\sqrt[m]{k}$ в сопряжённые (т. е. в другие корни минимальных многочленов).

Опишем сопряжённые этим числам. Минимальные многочлены для $\sqrt[m]{n}$ и $\sqrt[m]{k}$ должны делить $x^m - n$ и $x^m - k$ соответственно. Поэтому сопряжённые для $\sqrt[m]{n}$ и $\sqrt[m]{k}$ равны $\omega^i \cdot \sqrt[m]{n}$ для каких-то $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и $\omega^j \cdot \sqrt[m]{k}$ для каких-то $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ соответственно. Пусть $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{a-1}\}$ — подмножество в $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ такое, что $\omega^{\beta_i} \cdot \sqrt[m]{n}$ являются сопряжёнными для $\sqrt[m]{n}$, причём $\beta_0 = 0$. Для каждого $i = 0, 1, \ldots, a-1$ существует автоморфизм, который переводит $\sqrt[m]{n}$ именно в $\omega^{\beta_i} \cdot \sqrt[m]{n}$.

На обе части равенства

$$\sqrt[m]{k} = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \sqrt[m]{n} + \ldots + \alpha_{a-1} \cdot \sqrt[m]{n^{a-1}}$$

будем действовать всевозможными автоморфизмами: сначала применим тождественный, потом переводящий $\sqrt[m]{n}$ в $\omega^{\beta_1}\cdot\sqrt[m]{n}$, потом переводящий $\sqrt[m]{n}$ в $\omega^{\beta_2}\cdot\sqrt[m]{n}$, и так далее. Получится система уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt[m]{k} = \alpha_0 + \alpha_1\cdot\sqrt[m]{n} + \ldots + \alpha_{a-1}\cdot\sqrt[m]{n^{a-1}}, \\ \omega^{\gamma_1}\cdot\sqrt[m]{k} = \alpha_0 + \alpha_1\omega^{\beta_1}\cdot\sqrt[m]{n} + \ldots + \omega^{(m-1)\beta_1}\alpha_{a-1}\cdot\sqrt[m]{n^{a-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega^{\gamma_{a-1}}\cdot\sqrt[m]{k} = \alpha_0 + \alpha_1\omega^{\beta_{a-1}}\cdot\sqrt[m]{n} + \ldots + \omega^{(m-1)\beta_{a-1}}\alpha_{a-1}\cdot\sqrt[m]{n^{a-1}}. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу этой системы, считая величины $\sqrt[m]{n^i}$ неизвестными, а $\alpha_i\omega^{\beta_j}$ коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{a-1} \\ \alpha_0(\omega^{\beta_1})^0 & \alpha_1(\omega^{\beta_1})^1 & \alpha_2(\omega^{\beta_1})^2 & \ldots & \alpha_{a-1}(\omega^{\beta_1})^{a-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0(\omega^{\beta_{a-1}})^0 & \alpha_1(\omega^{\beta_{a-1}})^1 & \alpha_2(\omega^{\beta_{a-1}})^2 & \ldots & \alpha_{a-1}(\omega^{\beta_{a-1}})^{a-1} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем матрицу следующим образом. Удалим нулевые столбцы, а каждый из остальных столбцов разделим на соответствующее ему α_i. Рассмотрим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & \ldots & 1^{a-1} \\ (\omega^{\beta_1})^0 & (\omega^{\beta_1})^1 & (\omega^{\beta_1})^2 & \ldots & (\omega^{\beta_1})^{a-1} \\ (\omega^{\beta_2})^0 & (\omega^{\beta_2})^1 & (\omega^{\beta_2})^2 & \ldots & (\omega^{\beta_2})^{a-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\omega^{\beta_{a-1}})^0 & (\omega^{\beta_{a-1}})^1 & (\omega^{\beta_{a-1}})^2 & \ldots & (\omega^{\beta_{a-1}})^{a-1} \end{pmatrix}.$$

Это матрица Вандермонда, поэтому её определитель не равен 0. А наша (преобразованная) матрица получается из этой матрицы выбрасыванием некоторых столбцов, поэтому все её столбцы линейно независимы. В этом случае матрица приводится элементарными преобразованиями строк к виду, где в какой-то строке ровно одно ненулевое число. Если мы проведём те же элементарные преобразования с уравнениями системы, то выразим какой-то $\sqrt[m]{n^i}$ в виде линейной комбинации левых частей уравнений, т. е. в виде $\alpha\cdot\sqrt[m]{k}$, что и требуется. □

Окончание доказательства теоремы 2. В силу леммы существуют такие $\alpha \in \mathbb{F}$ и $l < p$, что

$$\alpha\cdot\sqrt[p]{p_n^l} = \sqrt[p]{p_{n+1}^{\alpha_1}\ldots p_{n+k}^{\alpha_k}}.$$

Домножив обе части на правую часть в $(p-1)$-й степени, мы получим противоречие с минимальностью n. $\square$

§ 4. Показатель корня — нечётное число

Итак, мы решили задачу для простых показателей степеней. Докажем теперь то же самое для равных нечётных.

Теорема 3. *Пусть m — нечётное натуральное число. Корни m-й степени из натуральных чисел, свободных от m-х степеней, линейно независимы над $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/m))$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 2 мы пользовались простотой показателя корня *только* когда доказывали, что $\mathbb{Q}(\omega)$ не содержит никаких корней соответствующей степени из какого-либо натурального числа (см. замечание 2). Так что достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть m — целое число. Тогда $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/m))$ не содержит никакого $\sqrt[n]{k}$, если этот корень не является квадратным.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/m))$ при некотором m содержит какой-то $\sqrt[n]{k}$, причём этот корень нельзя сократить, т. е. k не является точной l-й степенью ни для какого l, делящего n.

Для любого абелева расширения Галуа любое промежуточное поле между ним и основным полем также является абелевым расширением основного поля. Расширение $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/m))$ абелево и при этом нормально, так как является полем разложения многочлена x^m-1.

Так как оно нормально и содержит $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{k})$, то оно содержит и поле $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{k}, \exp(2\pi i/n))$. Остаётся установить, что последнее не является абелевым расширением. Для этого укажем два его автоморфизма φ и ψ, которые не коммутируют.

Автоморфизм φ — обычное комплексное сопряжение, автоморфизм ψ строится несколько сложнее. Докажем, что

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{k}, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right) : \mathbb{Q}\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right)\right] > 2.$$

Прежде всего,

$$\left[\mathbb{Q}\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right) : \mathbb{Q}\right] = \varphi(n),$$

потому что минимальный многочлен для $\exp(2\pi i/n)$ — это многочлен деления круга, имеющий степень $\varphi(n)$. Далее,

$$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{k}, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right) : \mathbb{Q}\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right)\right] = \frac{\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{k}, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right) : \mathbb{Q}\right]}{\left[\mathbb{Q}\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right) : \mathbb{Q}\right]} =$$

$$= \frac{\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{k}, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right) : \mathbb{Q}(\sqrt[n]{k})\right] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[n]{k}) : \mathbb{Q}]}{\varphi(n)} =$$

$$= \frac{\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{k}, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right) : \mathbb{Q}(\sqrt[n]{k})\right] \cdot n}{\varphi(n)} \geqslant \frac{2 \cdot n}{\varphi(n)} > 2.$$

Предпоследнее неравенство следует из того, что мы к $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{k})$ присоединили $\exp(2\pi i/n)$, причём $\exp(2\pi i/n)$ не лежит в $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{k})$ ввиду того, что $\exp(2\pi i/n)$ не вещественно при $n > 2$.

Мы показали, что у $\sqrt[n]{k}$ имеется не менее двух сопряжённых над $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/n))$. Хотя бы один из них не вещественный. Соответствующий автоморфизм мы и обозначим через ψ.

Найденные два автоморфизма не коммутируют. Действительно,

$$\varphi\left(\psi(\sqrt[n]{k})\right) = \overline{\psi\left(\varphi(\sqrt[n]{k})\right)},$$

причём по построению это не вещественное число. □

Вместе с леммой 3 доказана и теорема 3. □

§ 5. Независимость над $\mathbb{Q}$

Теперь докажем ту же теорему для чётных m и не над $\mathbb{Q}(\omega)$, а над $\mathbb{Q}$.

Теорема 4. *Пусть m — любое натуральное число. Корни m-й степени из натуральных чисел, свободных от m-х степеней, линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Замечание 1. Если в утверждении теоремы заменить поле $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/m))$, как в теореме 3, то оно станет неверным — например,

$$\sqrt[4]{4} \in \mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \subset \mathbb{Q}\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)\right).$$

Доказательство. Воспользовавшись леммами 2 и 3, докажем утверждение в несколько шагов. В силу теоремы 3 будем считать, что m чётно. Положим

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right).$$

Шаг 1

Докажем, что если последовательно расширять $\mathbb{Q}(\omega)$ корнями m-й степени из простых чисел, то каждое следующее расширение будет либо степени m, либо степени $m/2$.

Предположим, что это не так. Будем действовать, как в § 3. Возьмём снова наименьшее n, для которого существуют натуральное k, различные простые числа $p_1, \dots, p_{n+k}$ и натуральные числа, меньшие чем m, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, такие что

$$\sqrt[m]{p_{n+1}^{\alpha_1} \cdots p_{n+k}^{\alpha_k}} \in \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{p_1}, \dots, \sqrt[m]{p_n}), \tag{2}$$

причём, в отличие от предыдущих рассуждений, потребуем ещё, чтобы

$$\sqrt[m]{p_{n+1}^{\alpha_1} \cdots p_{n+k}^{\alpha_k}}$$

не являлся квадратным корнем, т. е. какое-то α_i было отлично от $m/2$.

Во-первых, покажем, что такое n существует. Возьмём какое-то расширение $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{p_1}, \dots, \sqrt[m]{p_l})$, степень которого оказалась меньше, чем $m/2$, над полем $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{p_1}, \dots, \sqrt[m]{p_{l-1}})$. Как в доказательстве теоремы 2 получаем, что свободный член минимального многочлена для $\sqrt[m]{p_l}$ имеет вид $\omega^i \cdot \sqrt[m]{p_l^j}$ и не является квадратным корнем, так как иначе многочлен окажется степени $m/2$. Значит, $n = l - 1$ подходит (но может найтись и меньшее значение). Во-вторых, заметим, что $n > 0$, так как по лемме 3 в $\mathbb{Q}(\omega)$ нет неквадратных корней.

Теперь по лемме 2 найдём такое

$$\alpha \in \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{p_1}, \dots, \sqrt[m]{p_{n-1}}),$$

что

$$\sqrt[m]{p_{n+1}^{\alpha_1} \cdots p_{n+k}^{\alpha_k}} = \alpha \cdot \sqrt[m]{p_n^l}.$$

Домножив обе части на $\sqrt[m]{p_n^{l(m-1)}}$, получим, что

$$\sqrt[m]{p_n^{l(m-1)} p_{n+1}^{\alpha_1} \cdots p_{n+k}^{\alpha_k}} \in \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{p_1}, \dots, \sqrt[m]{p_{n-1}}),$$

что противоречит минимальности n.

Шаг 2

На этом шаге мы построим множество квадратных корней из натуральных чисел, которое порождает все квадратные корни, лежащие в $\mathbb{Q}(\omega)$.

Заметим, что в поле $\mathbb{Q}(\omega)$ лежит конечное количество квадратных корней из чисел, свободных от квадратов, потому что по теореме 1 они линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Далее, все эти корни можно представить в виде

$$\sqrt{q_1 q_2 \cdots q_{a_1}}, \ \sqrt{q_{1+a_1} \cdots q_{a_2}}, \ \dots, \ \sqrt{q_{1+a_{k-1}} \cdots q_{a_k}},$$

где q_i простые. Естественно, все эти a_k простых чисел не обязательно различны. Исходя из этого множества корней, построим некоторое другое.

Сначала возьмём простое число q_1 и выделим все корни, в которые оно входит, кроме $\sqrt{q_1 q_2 \ldots q_{a_1}}$. Умножим их на $\sqrt{q_1 q_2 \ldots q_{a_1}}$. Если какую-то целую часть можно вынести за знак корня, то уберём её, и если осталось целое число, то удалим его из множества. Таким образом, мы добились того, что q_1 написано только под первым знаком корня. Далее такими же преобразованиями добьёмся того, что под каждым оставшимся знаком корня одно из простых будет *уникально*, (т. е. оно не будет написано ни под каким другим знаком корня).

Получилось некоторое множество корней

$$\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_{b_1}},\ \sqrt{p_{1+b_1} \cdots p_{b_2}},\ \ldots,\ \sqrt{p_{1+b_{l-1}} \cdots p_{b_l}}. \tag{3}$$

Пронумеруем простые числа под знаками корней так, чтобы простые вида p_{b_i} являлись уникальными.

Заметим, что в поле

$$\mathbb{Q}\big(\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_{b_1}},\ \sqrt{p_{1+b_1} \cdots p_{b_2}},\ \ldots,\ \sqrt{p_{1+b_{l-1}} \cdots p_{b_l}}\big)$$

в силу его построения содержатся все квадратные корни, которые были в $\mathbb{Q}(\omega)$. Также заметим, что по теореме 1 степень этого расширения равна 2^l.

Шаг 3

На этом шаге мы поймём, как будет возрастать степень расширения при последовательном присоединении (в каком-то заданном порядке) корней m-й степени из простых чисел.

Будем расширять $\mathbb{Q}(\omega)$ корнями m-х степеней из простых чисел в следующем порядке. Сначала расширим по очереди корнями из простых, появляющихся в (3), кроме простых с номерами b_i, которые уникальны, и докажем, что каждое следующее расширение имеет степень m (п. 3а). Затем опять же по очереди расширим поле корнями из простых с номерами b_i и покажем, что каждое следующее расширение имеет степень $m/2$ (п. 3б). А дальше уже будем расширять корнями из всех остальных простых в любом порядке и докажем, что каждое следующее расширение имеет степень m (п. 3в). Скомбинировав эти результаты, наконец докажем теорему 4 (шаг 4).

а) Пусть мы расширяем корнями из простых чисел $r_1, \ldots, r_s$, содержащихся в (3), причём среди них нет уникальных простых $p_{b_1}, \ldots, p_{b_l}$. Предположим, что какое-то расширение корнем $\sqrt[m]{r_k}$ имеет степень, меньшую чем m, т. е., как доказано на шаге 1, степень $m/2$. Это означает, что величина $(\sqrt[m]{r_k})^{m/2} = \sqrt{r_k}$ содержится в предыдущем расширении.

Рассмотрим тогда первое расширение вида

$$\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_i}), \tag{4}$$

в котором содержится число вида $\sqrt{t}$, где t — произведение каких-то чисел из множества $\{r_{i+1}, \ldots, r_s\}$.

Заметим, что такое $\sqrt{t}$ не содержится в $\mathbb{Q}(\omega)$ из-за того, что мы не присоединяли уникальные простые, а все корни в $\mathbb{Q}(\omega)$ выражаются в виде произведения каких-то корней из (3).

По лемме 2 получаем $\sqrt{t} = \alpha \cdot \sqrt[m]{r_i^j}$, где $\alpha \in \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_{i-1}})$ и j делит m.

Докажем, что $j = m/2$. Действительно, разделим на α и возведём обе части в квадрат. Получаем, что

$$\sqrt[m]{r_i^{2j}} \in \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_{i-1}}).$$

Но ввиду минимальности i расширение $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_{i-1}})$ корнем $\sqrt[m]{r_i}$ должно иметь степень m, поэтому $\sqrt[m]{r_i^v}$ при $v < m$ не содержится в поле $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_{i-1}})$. Отсюда $\sqrt{t} = \alpha\sqrt{r_i}$. Домножив обе части на $\sqrt{r_i}$, получим

$$\sqrt{tr_i} \in \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_{i-1}}),$$

что противоречит минимальности i.

б) В этом пункте мы докажем, что если последовательно расширять $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_s})$ числами вида $\sqrt[m]{p_{b_i}}$, то каждое следующее расширение будет иметь степень $m/2$.

Это утверждение является прямым следствием из шагов 1 и 2. В самом деле, из построения множества корней, содержащихся в (3), видно, что квадратные корни $\sqrt{p_{1+b_{i-1}}}, \ldots, \sqrt{p_{b_i-1}}$, а также корень $\sqrt{p_{1+b_{i-1}} \cdots p_{b_i}}$, содержатся уже в $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_s})$.

Поэтому $\sqrt[m]{p_{b_i}^{m/2}}$ содержится в $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{r_1}, \ldots, \sqrt[m]{r_s}, \sqrt[m]{p_{b_1}}, \ldots, \sqrt[m]{p_{b_{i-1}}})$. Следовательно, степень расширения этого поля числом $\sqrt[m]{p_{b_i}}$ меньше m, т. е. согласно шагу 1 равна $m/2$.

в) В этом пункте мы докажем, что если последовательно расширять поле $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[m]{p_1}, \ldots, \sqrt[m]{p_{b_l}})$ корнями m-й степени из простых, не содержащихся в (3), в любом порядке, то каждое следующее расширение будет иметь степень m.

Пусть мы расширяем корнями m-й степени из простых чисел $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Предположим, что расширение поля

$$\mathbb{Q}\big(\omega, \sqrt[m]{p_1}, \ldots, \sqrt[m]{p_{b_l}}, \sqrt[m]{s_1}, \ldots, \sqrt[m]{s_{k-1}}\big)$$

числом $\sqrt[m]{s_k}$ оказалось степени $m/2$.

Возьмём первое расширение из цепочки, которое содержит $\sqrt{n}$, где n удовлетворяет двум условиям:

- n свободно от квадратов;
- у n найдётся такой простой делитель, корнем из которого мы в этой цепочке ещё не расширяли, и он не равен $p_1, \ldots, p_{b_l}$.

  Такое n существует, так как s_k обладает обоими указанными свойствами.

  Далее по лемме 2 получим, что

$$\sqrt{n} = \alpha \cdot \sqrt[m]{p^j},$$

где p — последний элемент, корнем из которого мы расширяли, а α лежит в поле (обозначим его $\mathbb{F}$), которое было получено до присоединения корня из p.

Если n делится на p, то разделим обе части на $\sqrt{p}$ и возьмём в качестве n новое число под корнем в левой части, а в качестве j — новый показатель в степени числа p под корнем.

Заметим, что $j \neq m$, так как мы взяли первое расширение с такими условиями. Предположим, что $j \neq m/2$. Тогда расширим $\mathbb{F}$ корнями m-й степени из всех простых чисел, делящих n. Полученное поле $\mathbb{K}$ содержит $\sqrt[m]{p^j}$ и $p = \sqrt[m]{p^m}$. Тогда $\mathbb{K}$ содержит $\sqrt[m]{p}$ в степени меньшей, чем $m/2$. Следовательно, $[\mathbb{K}(\sqrt[m]{p}) : \mathbb{K}] < m/2$, что противоречит результату первого шага.

Итак, $j = m/2$, т. е. $\sqrt{n} = \alpha\sqrt{p}$. Домножив обе части на $\sqrt{p}$, получим $\sqrt{np} = \alpha p$. Следовательно, $\sqrt{np} \in \mathbb{F}$.

Предположим, что n не делится на p. Тогда число np обладает указанными выше свойствами. Во-первых, оно свободно от квадратов. Во-вторых, np делится на простое нужного вида (ибо делится на все делители числа n).

Пусть теперь n делится на p. Тогда число n/p принадлежит $\mathbb{F}$ и обладает нужными свойствами. Во-первых, оно свободно от квадратов. Во-вторых, оно делится на все делители числа n, кроме p. Следовательно, у него есть простой делитель нужного вида, а именно тот же, что и для n (число p не является таким делителем для n, так как корень из него мы в цепочке расширений присоединяли).

В обоих случаях мы получили противоречие с минимальностью расширения.

Шаг 4

На этом шаге мы докажем утверждение теоремы.

Предположим, что для некоторого поля $R = \mathbb{Q}(\sqrt[m]{w_1}, \ldots, \sqrt[m]{w_n})$, где все w_i простые, выполнено неравенство $[R : \mathbb{Q}] < m^n$. В цепочке 3, построенной на шаге 3, найдётся расширение L, содержащее R. Пусть L получено из $\mathbb{Q}$ присоединением k радикалов m-й степени из простых чисел. Тогда L получается из R присоединением $k-n$ таких радикалов, поэтому $[L:R] \leqslant m^{k-n}$. Следовательно,

$$[L:\mathbb{Q}] = [L:R]\cdot[R:Q] < m^{k-n}\cdot m^n = m^k.$$

Теперь докажем, что $[L:\mathbb{Q}] \geqslant m^k$, тем самым получив нужное противоречие.

Пусть $\mathbb{K}$ — подполе в $\mathbb{Q}(\omega)$, получившееся присоединением к $\mathbb{Q}$ всех тех квадратных корней из натуральных чисел, которые содержатся в поле $\mathbb{Q}(\omega)$. Положим $[\mathbb{K}:\mathbb{Q}] = 2^l$. Как следует из доказанного на шаге 3, $[\mathbb{L}:\mathbb{Q}(\omega)] = m^k/2^l$. Отсюда

$$[\mathbb{L}:\mathbb{Q}] = [\mathbb{L}:\mathbb{K}]\cdot[\mathbb{K}:\mathbb{Q}] \geqslant [\mathbb{L}:\mathbb{Q}(\omega)]\cdot[\mathbb{K}:\mathbb{Q}] = \frac{m^k}{2^l}\cdot 2^l = m^k,$$

что и требовалось. □

Выведем из теоремы 4 основной факт.

Теорема 5. *Числа $1, \sqrt[m_1]{n_1}, \sqrt[m_2]{n_2}, \ldots, \sqrt[m_k]{n_k}$ обязательно линейно независимы над $\mathbb{Q}$, если каждый радикал $\sqrt[m_i]{n_i}$ нельзя сократить (т. е. n_i не является точной l-й степенью, где l — делитель числа m_i) и каждое n_i свободно от m_i-х степеней.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют такие γ_i, что

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \sqrt[m_i]{n_i} = 0.$$

Пусть $M = m_1\cdot\ldots\cdot m_k$ и $\alpha_i = m_1\cdot\ldots\cdot m_{i-1}m_{i+1}\cdot\ldots\cdot m_k = M/m_i$. Тогда

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i\cdot\sqrt[m_i]{n_i} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i\cdot\sqrt[M]{n_i^{\alpha_i}}.$$

Все $n_i^{\alpha_i}$ свободны от M-х степеней, так как n_i свободны от m_i-х степеней.

Заметим, что не все $n_i^{\alpha_i}$ различны, так как иначе мы придём к противоречию с теоремой 4. Значит, найдутся такие i, j, что $n_i^{\alpha_i} = n_j^{\alpha_j}$, т. е.

$$n_i^{M/m_i} = n_j^{M/m_j}.$$

Следовательно, $\sqrt[m_i]{n_i} = \sqrt[m_j]{n_j}$, но так быть не может, так как радикалы по условию несократимы. □

§ 6. Заключение

В данной работе были приведены альтернативные доказательства классических результатов. Но такими же методами можно исследовать менее изученные области. Например, для нечётного m можно вычислить группу Галуа расширения $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/m))$ числами $\{\sqrt[m]{p_1}, \ldots, \sqrt[m]{p_n}\}$. Из теоремы 3 следует, что она изоморфна прямой сумме n экземпляров группы $\mathbb{Z}_m$.

Вероятно, приведёнными методами вычисляется и соответствующая группа Галуа для чётного m.

Список литературы

[1] *Белов А. Я.* О круговых многочленах // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 181–184.

[2] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2021. С. 465–477.

[3] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968. Гл. 8.

[4] *Besicovitch A. S.* On the Linear Independence of Fractional Powers of Integers // J. Lond. Math. Soc. 1940. V. 15, № 1. P. 3–6.

[5] *Richards I.* An Application of Galois Theory to Elementary Arithmetic // Adv. in Math. 1974. V. 13, № 3. P. 268–273.

Иван Евгеньевич Воробьёв, ВШЭ, студент факультета математики
s19b1_vorobiov@179.ru

Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Пусть число p простое. Есть неограниченный запас бусинок n цветов. Сколько можно составить различных ожерелий, содержащих ровно p бусинок? Два ожерелья, переводящиеся друг в друга поворотом, считаются одинаковыми. Выведите из результата задачи **малую теорему Ферма**: *если p простое, n натуральное, то n^p сравнимо с n по модулю p*. (*Фольклор*)

2. Любой ли трёхгранный угол имеет сечение, являющееся правильным треугольником? (*Фольклор*)

3. Даны два конечных частично упорядоченных множества M и N, а также отображение $f\colon M \to N$ с таким свойством, что любая пара срав-

нимых элементов M переходит в пару несравнимых, а любая пара несравнимых элементов переходит в пару сравнимых. Докажите, что элементы $x_i \in M$ можно так занумеровать числами от 1 до $|M|$ и расставить в ряд таким образом, что $x_i \prec x_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$ и при этом x_i стоит левее x_j.

(*Е. М. Вечтомов, А. Я. Канель-Белов*)

4. Пусть λ — число, меньшее единицы, а последовательность c_n задана рекуррентно:

$$c_0 = 0, \quad c_{k+1} = \frac{1}{2}\left(c_k + \sqrt{c_k^2 + 4\lambda^{k+1}(1-\lambda)}\right).$$

Предел этой последовательности обозначим $c(\lambda)$. Найдите предел $c(\lambda)$, если λ стремится к единице слева. (*Д. Р. Гайфулин*)

5. а) Дана полоса $2 \times n$, заполненная знаками $+$ и $-$. За одну операцию разрешается поменять знаки в одном столбце, строке или диагонали. Каково минимальное число операций, гарантированно достаточное для того, чтобы сделать все знаки плюсами?

б) Тот же вопрос для полосы $3 \times n$. (*А. Я. Канель-Белов*)

6. Докажите, что радикальный центр трёх полувписанных окружностей треугольника (т. е. окружностей, которые касаются двух сторон треугольника и его описанной окружности) лежит на прямой OI, где O — центр описанной окружности, а I — центр вписанной окружности.

(*К. В. Козеренко*)

7. Докажите равенства

а) $\cos\frac{8\pi}{35} + \cos\frac{12\pi}{35} + \cos\frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5} + \sqrt{7}\sin\frac{2\pi}{5}\right)$. (*В. А. Сендеров*)

б)
$$\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{7\pi}{19} + \cos\frac{11\pi}{19}} + \sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + \cos\frac{17\pi}{19}} + \\ + \sqrt[3]{\cos\frac{9\pi}{19} + \cos\frac{13\pi}{19} + \cos\frac{15\pi}{19}} = \\ = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - 3\sqrt[3]{7} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49} + 18\sqrt[3]{7} - 25} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49} + 18\sqrt[3]{7} - 44}}.$$

(*С. В. Маркелов*)

в)
$$\sqrt[5]{\frac{\cos(2\pi/11)\cos(4\pi/11)}{\cos^2(16\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(4\pi/11)\cos(8\pi/11)}{\cos^2(32\pi/11)}} + \\ + \sqrt[5]{\frac{\cos(8\pi/11)\cos(16\pi/11)}{\cos^2(2\pi/11)}} + \sqrt[5]{\frac{\cos(16\pi/11)\cos(32\pi/11)}{\cos^2(4\pi/11)}} + \\ + \sqrt[5]{\frac{\cos(32\pi/11)\cos(2\pi/11)}{\cos^2(8\pi/11)}} =$$

$$= \sqrt[5]{276 + 170\sqrt[5]{11} - 40\sqrt[5]{11^2} - 80\sqrt[5]{11^3} - 15\sqrt[5]{11^4}}.$$

(*С. В. Маркелов, К. И. Пименов*)

8. (Албанское неравенство.) Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Докажите, что
$$\sqrt[3]{AD \cdot BE \cdot CF} \geqslant \sqrt[3]{AB \cdot CD \cdot EF} + \sqrt[3]{BC \cdot DE \cdot FA}.$$
Для каких шестиугольников достигается равенство? (*Dorlir Ahmeti*)

9. (По мотивам леммы Сарда.) а) Пусть f — дифференцируемая функция, определённая на $\mathbb{R}$. Пусть A — множество точек x, где $f'(x) = 0$. Может ли $f(A)$ быть множеством всех чисел?

   Пусть f — действительнозначная гладкая функция на плоскости, A — множество точек, в которых обе её частные производные равны 0. Может ли $f(A)$ быть множеством всех чисел, если

   б) f — класса гладкости C^2?

   в) f — класса гладкости C^1? (*И. В. Митрофанов*)

10. а) (Открытый вопрос.) Дан многочлен $P(n)$ с целыми коэффициентами. Верно ли, что обязательно найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что все простые делители числа $P(n)$ строго меньше n? (*С. В. Конягин*)

    Покажите, что такое n обязательно найдётся, если

    б) $P(n) = n^k - 1$; (*С. В. Конягин*)

    в) $P(n) = an^k + b$; (*С. В. Конягин*)

    г) P — квадратный трёхчлен (уже для кубического ответ неизвестен). (*А. Я. Канель-Белов*)

11. *Бесконечной равномерно гладкой дугой* будем называть траекторию точки, которая начала движение по плоскости в момент времени $t = 0$ и движется со скоростью 1 и с ускорением, не превосходящим 1. (Иными словами, это образ гладкого отображения $\gamma\colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}^2$ с условиями $|\dot{\gamma}(t)| = 1$ и $|\ddot{\gamma}(t)| \leqslant 1$ при всех $t \geqslant 0$).

    Пусть внутри ограниченной области нарисована *несамопересекающаяся* бесконечная равномерно гладкая дуга $\gamma(t)$. Обязательно ли найдётся такая точка x этой дуги, что любая достаточно маленькая окружность с центром в точке x пересекает дугу $\gamma(t)$ ровно в двух точках? (*Н. Н. Константинов*)

12. Покажите, что группа с тремя образующими a, b, c и соотношениями $bab^{-1} = a^2$, $cbc^{-1} = b^2$, $aca^{-1} = c^2$ тривиальна. (*Фольклор*)

13. Внутри тетраэдра единичного объёма находится параллелепипед. Каков максимально возможный его объём? (*А. Я. Канель-Белов*)

14. Натуральные попарно различные $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots b_n$ таковы, что для любого непустого подмножества индексов $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ число $2020! + \sum_{i \in I} a_i$ делится на $\sum_{i \in I} b_i$. Для какого наибольшего n это возможно?
(*В. Брагин, М. Сагафьян*)

15. (По мотивам статьи Д. Ревелла[1].) В каждой целой точке прямой имеется лампочка. Каждая лампочка может находиться в одном из двух состояний — ВКЛ и ВЫКЛ. Изначально все лампочки выключены. В момент времени $t = 0$ в точке с координатой 0 находится безумный фонарщик. Каждую минуту он производит в указанном порядке следующие действия:

а) случайным образом изменяет или не изменяет состояние лампочки в той целой точке, в которой находится;

б) случайным образом перемещается одну из двух соседних целых точек.

Все 4 варианта действий на каждом ходу равновероятны. Обозначим $F(n)$ вероятность того, что в момент времени $t = n$ ситуация такая же, как и в начале, т. е. фонарщик находится в точке 0, а все лампочки погашены. Докажите, что для некоторых положительных c_1 и c_2 при всех n выполнено двойное неравенство

$$e^{-c_1 n^{1/3}} < F(2n) < e^{-c_2 n^{1/3}}.$$

(*И. В. Митрофанов*)

Уточнение формулировок

Приводим уточнённые формулировки задач 20.4 (выпуск 20, с. 250) и 26.4′(б) (выпуск 27, с. 248).

Задача 20.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентой порядка* k, если для некоторых $b_1, \ldots, b_k$ при всех $n \geqslant k$ выполняется равенство $b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0$. Пусть $b_0 = 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i. Докажите, что либо последовательность $\{a_n\}$ содержит член, имеющий не менее 2016 различных простых делителей, либо множество натуральных чисел разбивается на непересекающиеся арифметические прогрессии, на каждой из которых наша рекуррента пропорциональна геометрической прогрессии.

Задача 26.4′(б). Обобщите и решите задачу из п. (а) для случая попадания $k+1$ птички в $(k-1)$-мерное подпространство.

---

[1] *Revelle D.* Heat Kernel Asymptotics on the Lamplighter Group // Electron. Commun. Probab. 8 (2003), 142–154.

Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 2 (с. 216, см. решение: выпуск 4, с. 221) опубликована

Задача 2.3. Пусть $a_0 = a$, $a_{n+1} = a^{a_n}$, q — произвольное натуральное число, большее 1. Докажите, что последовательность остатков от деления a_n на q стабилизируется (т. е. все остатки, начиная с некоторого, равны).

(*Фольклор*)

Решение этой задачи основано на том факте, что при последовательном применении функции Эйлера $\varphi(n)$ мы в конце концов получаем единицу. В этой связи возникает следующий вопрос.

Задача 2.3$'$. *Пусть (a_i) — бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел, удовлетворяющая условию:*

$$\textit{для каждого номера } i > 0 \textit{ выполняется равенство } \varphi(a_i) = a_{i-1}. \qquad (*)$$

Опишите все такие последовательности.

(*К. С. Зюбин, ученик МАОУ СОШ № 32, Томск*)

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 6, с. 140–142) опубликована

Задача 2.7. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1{,}99; +1{,}99]$?

(*А. Я. Канель*)

Ей родственна

Задача 2.7′. *У многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что $P(x)$ делит многочлен вида $x^n - 1$ для некоторого n.*

(*М. Л. Концевич*)

В выпуске 3 (с. 232, см. решение: выпуск 4, с. 223) опубликована

Задача 3.1. Пусть A, B, C — произвольные матрицы размера 2×2. Докажите тождество Холла: $[[A,B]^2, C] = 0$. (Через $[A,B] \overset{\mathrm{def}}{=} AB - BA$ обозначается *коммутатор*.) (*Фольклор*)

Это означает, что $[A,B]^2$ есть *центральный полином* от матриц второго порядка, т. е. принимает только скалярные значения.

Тождество Капелли C_n порядка n — равенство нулю некоммутативного многочлена

$$C_n(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \ldots y_{n-1} x_{\sigma(n)} y_n.$$

В любой n-мерной алгебре $C_{n+1} \equiv 0$, в частности в $n \times n$-матрицах $C_{n^2+1} \equiv 0$.

Задача 3.1′. *Докажите, что следующие многочлены от $n \times n$-матриц являются центральными.*

а) Многочлен Размыслова[1)]

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n^2} C(x_1, \ldots, x_{n^2}; y_{i+1}, \ldots, y_{n^2}, y_1, \ldots, y_i).$$

б) Многочлен Форманека. *Пусть*

$$\vec{x}(\vec{n}) = (x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k}), \quad G_{\vec{n},k}(\vec{x}, \vec{y}) = C_k(\vec{x}(\vec{n}), \vec{y}),$$
$$\tau(x_1, \ldots, x_k) = (x_2, \ldots, x_k, x_1).$$

Тогда

$$F_n(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{s=1}^{n} G_{\vec{n},k}(\tau^s(\vec{x}), \vec{y}).$$

[1)] Многочлен Размыслова Z_k можно представлять себе так. Запишем слагаемые многочлена C_{n^2} по кругу. Будем разрывать круг во всевозможных местах сразу после вхождения одной из переменных x_i и сложим результаты.

в) *Для матриц порядка k над полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов централен* многочлен Латышева — Шмелькина

$$c(x) = \Big(\frac{x^{q^k} - x}{P(x)}\Big)^{(q^k-1)k} \cdot \prod_{m=1}^{k-1} (x^{q^m} - x)^{(q^k-1)k},$$

где $P(x)$ — любой неприводимый многочлен степени k над полем $\mathbb{F}_q$.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 18, с. 262) опубликована

Задача 3.5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена. (*Теорема Гаусса — Люка*)

Имеется задача на схожий сюжет:

Задача 3.5$'$. *Даны многочлены P, Q степени n с вещественными корнями $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$ соответственно. Пусть*

$$z_1 < \ldots < z_{n-1}, \quad t_1 < \ldots < t_{n-1}$$

— корни производных P' и Q' соответственно, и пусть кроме того $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n$. Докажите, что $z_1 < t_1 < z_2 < t_2 < \ldots < z_{n-1} < t_{n-1}$.

(*Фольклор*)

В выпуске 4 (с. 216, см. решение: выпуск 5, с. 228–229) опубликована

Задача 4.8. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$F(x + y) = A(x) + B(x)C(y).$$

(*А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин*)

Функциональные уравнения появляются в задачах разного содержания. Дж. Максвелл исследовал распределение частиц по скоростям. Для функции плотности распределения $F(\vec{v})$ он предположил следующее:

- $F(\vec{v}) = \Phi(|\vec{v}|^2)$ (изотропность пространства),
- $F(\vec{v}) = \phi(v_x^2)\phi(v_y^2)\phi(v_z^2)$ (независимость распределений координат вектора $\vec{v}$).

Таким образом он пришёл к следующему функциональному уравнению:

Задача 4.8$'$. *Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного*:

$$\Phi(a + b + c) = \phi(a)\phi(b)\phi(c). \qquad \text{(Дж. Максвелл)}$$

В выпуске 7 (с. 187, см. решение: выпуск 9, с. 229) опубликована

Задача 7.1. Известно, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ и $|x_i - y_i| \leqslant \varepsilon$ при всех i; $z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_n$ — результат переупорядочивания набора $\{y_i\}_{i=1}^n$ в порядке возрастания. Докажите, что $|x_i - z_i| \leqslant \varepsilon$ при всех i. (*И. Н. Сергеев*)

В этой связи хотелось бы напомнить классику:

Задача 7.1′. а) *Физкультурники построены в n колонн и m шеренг. В каждой колонне они стоят по росту. Верно ли, что если в шеренгах их расставить по росту, то и в колоннах они останутся стоять по росту*?

б) *Физкультурники построены в* 20 *колонн и в* 10 *шеренг. В каждой колонне отметили самого высокого, а в каждой шеренге — самого низкого. Затем среди самых высоких отметили самого низкого* (*Ваню*), *а среди самых низких — самого высокого* (*Петю*). *Может ли Петя оказаться выше Вани*? (*Фольклор*)

В выпуске 10 (с. 279, см. решение: выпуск 14, с. 277–278) опубликована

Задача 10.9. Пусть G — группа порядка $2^n(2k+1)$, содержащая элемент порядка 2^n. Докажите, что множество элементов нечётного порядка является подгруппой. (*Заочный конкурс памяти Кирилла Дочева*)

На международной студенческой олимпиаде IMC 2020 была предложена задача 7 на схожую тему:

Задача 10.9′. *Пусть G — группа, $n \geqslant 2$, H_1, H_2 — такие её подгруппы, что $[G : H_1] = [G : H_2] = n$ и $[G : (H_1 \cap H_2)] = n(n-1)$. Докажите, что H_1 и H_2 сопряжены в G.* (*Здесь $[G : H]$ есть* индекс *группы G по подгруппе H, т. е. число левых смежных классов xH в G. Подгруппы H_1 и H_2* сопряжены, *если $g^{-1}H_1 g = H_2$ для некоторого $g \in G$.*)

(*И. И. Богданов, А. Д. Матушкин*)

В различных учебниках для школьников и студентов много красивых фактов и теорем. Призывая учащуюся молодёжь доставать изюм из булочки (и присылать в редакцию), приведём пример такого рода:

Задача 10.9″. а) *Докажите, что p-группа имеет нетривиальный центр.* (*Термином* p-группа *обозначается группа, в которой порядки всех элементов — степени простого числа p.* Центром *группы называется множество её элементов, перестановочных со всеми элементами группы.*)

б) *Пусть группа G имеет порядок $|G| = p^k q$, $(q, p) = 1$, p — простое число. Тогда в G существует подгруппа H порядка p^k, причём количество таких H сравнимо с* 1 *по модулю p и все они сопряжены.*

(*Теорема Силова*)

В выпуске 10 (с. 280, см. решение: выпуск 11, с. 149–158) опубликована

Задача 10.10. Среди k монет есть одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее. За какое минимальное число взвешиваний можно определить фальшивую монету на чашечных весах без гирь, если при этом а) требуется узнать, легче она или тяжелее; б) не требуется узнать это. (*А. М. Яглом, И. М. Яглом*)

Следующая задача ей родственна по методу решения:

Задача 10.10$'$. а) *Из 11 шаров два радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нём хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Докажите, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров, а за 7 проверок их всегда можно обнаружить.* (*Фольклор*)

б) (Задача на исследование.) *Аналогичный вопрос для n шаров, из которых 2 радиоактивны. Найдите минимальное число проверок.*

в) (Задача на исследование.) *Аналогичный вопрос для n шаров, из которых k радиоактивны. Получите оценки (верхние и нижние) на минимальное число проверок.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 10 (с. 280, см. решение: настоящий выпуск, с. 251–254) опубликована

Задача 10.12. Квадрат разбит на треугольники равной площади. Докажите, что их число чётно. (*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 10.12$'$. а) *n-мерный куб разбит на симплексы равного объёма. Докажите, что их число делится на $n!$.*

б) *Правильный пятиугольник разбит на треугольники равной площади. Докажите, что их число делится на 5. Что можно сказать в случае правильного n-угольника при произвольном n?*

в) *Докажите, что не всякий выпуклый четырёхугольник можно разбить на треугольники равной площади.*

г) *Исследуйте вопрос о разбиении на четырёхугольники и, более общо, на k-угольники равной площади.*

д) *Исследуйте вопрос о разбиении правильных многогранников на симплексы равного объёма.* (*А. Я. Белов*)

В выпуске 11 (с. 162, см. решение: выпуск 13, с. 186, а также выпуск 14, с. 278) опубликована

Задача 11.1. Вычислить $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)}$. (*М. Панов*)

Есть много любителей считать определённые интегралы (в числе их был, например, академик Л. Д. Ландау). Приведём несколько задач на эту тему:

Задача 11.1′. *Вычислите*:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x+x^2)}{x-x^2}\,dx$; (*Пирмурат Гурбанов, Международный университет гуманитарных наук и развития, Ашхабад*)

б) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(4-\sin^2 x)\,dx$;

г) $\int\limits_0^1 \Bigl(\int\limits_0^{1-y} y^k x^m (1-x-y)^n dx\Bigr) dy$;

д) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}$;

е) $\int\limits_0^\infty (e^{-x}-e^{-2x})\frac{dx}{x}$.

ж) *Классика из ТФКП*: $\mathrm{si}(\infty)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

з) *При каком x выполняется равенство* $\int\limits_0^x \frac{dt}{t^{1+\ln t}}=\int\limits_x^\infty \frac{dt}{t^{1+\ln t}}$?

и) *Докажите равенство* $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t \ln t}{t}dt=\frac{\pi}{2}\Gamma'(1)$.

(*Фольклор*)

В выпуске 13 (с. 179, см. решение: выпуск 21, с. 278–282) опубликована

Задача 13.5. Известно, что в любом треугольнике расстояние между центрами O и I описанной и вписанной окружностей выражается через их радиусы R и r с помощью *формулы Эйлера*: $OI^2=R^2-2Rr$. Докажите обобщение этой формулы: если в треугольник вписан эллипс с фокусами F_1, F_2 и малой осью l, то

$$R^2l^2=(R^2-OF_1^2)(R^2-OF_2^2).$$

(*А. А. Заславский*)

Продолжением темы служит

Задача 13.5′. *Треугольник вписан в окружность радиуса R и описан около эллипса с тем же центром и полуосями a, b.*

а) *Докажите, что* $R = a + b$.

б) *Найдите расстояние между центром описанной окружности и ортоцентром треугольника.* (*А. А. Заславский*)

Задача 13.5$''$. *Треугольник описан около окружности радиуса* r *и вписан в эллипс с тем же центром и полуосями* a, b.

а) *Докажите, что* $1/r = 1/a + 1/b$.

б) *Найдите радиус описанной окружности треугольника.*

(*А. А. Заславский*)

В выпуске 27 (с. 242) опубликована

Задача 13.6$'$. а) Пусть A — матрица второго порядка. Тогда

$$\det(A) = \frac{\mathrm{Tr}^2(A) - \mathrm{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) Пусть A — матрица n-го порядка. Тогда $\det(A)$ есть многочлен S_n с рациональными коэффициентами от величин $\mathrm{Tr}(A^k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

(*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 13.6$''$. а) *Положим*

$$t_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Пусть $R\left(t_1^{(n)}, \ldots, t_{n+1}^{(n)}\right) = 0$. *Докажите, что* R *делится на* S_{n+1}. (*Многочлен* S_m *определён выше, в п.* б) *задачи* 13.6$'$.)

б) *Положим*

$$t_k^{(n,m)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k - \sum_{j=n+1}^{m+n} x_i^k.$$

Докажите, что существует такой многочлен Q_{n+1}, *что если*

$$R\left(t_1^{(n,m)}, \ldots, t_{m+n+1}^{(n,m)}\right) = 0,$$

то R *делится на* Q_{n+1}. (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 21 (с. 272, см. решение: настоящий выпуск, с. 256–258) опубликована

Задача 21.5. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что при всяком целом x найдётся такое целое y, что $P(x) = Q(y)$. Докажите, что найдётся такой многочлен $R(x)$, что $P(x) = Q(R(x))$ при всех x. Что будет, если условие задачи ослабить, т. е. потребовать, чтобы указанное y нашлось для бесконечно многих целых x? (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение использует асимптотическое разложение в окрестности бесконечности неявной функции, заданной уравнением $P(x) = Q(y)$. В этой связи полезно обсудить более общее утверждение:

Задача 21.5′. а) *Неявная функция* $y(x)$ *задана уравнением* $P(x, y) = 0$, *где* $P(x, y)$ *— многочлен от двух переменных. Тогда* y *разлагается в* ряд Пюизо, *у которого «хвост» (состоящий из членов с отрицательными степенями* x*) сходится в окрестности бесконечности*:

$$y = a_m x^{m/n} + \ldots + a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-k/n},$$

где n *зависит от* P.

б) (Продолжение нормирования.) *Пусть* $Q(x)$ *— многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом* 1, *неприводимый над* $\mathbb{Z}$; $\overline{Q}(x)$ *— его (покоэффициентная) редукция по модулю* p; $\overline{R}(x)$ *— неприводимый многочлен над* $\mathbb{Z}_p$, *делящий* $\overline{Q}(x)$; $R(x)$ *— неприводимый многочлен над* $\mathbb{Z}$, *с редукцией* $\overline{R}(x)$; z *— его корень. Тогда для некоторого* n *уравнение* $Q(x) = 0$ *имеет решение в степенных рядах* $\sum_{k=0}^{\infty} H_k(z) p^{k/n}$. (*Фольклор*)

В выпуске 21 (с. 273, см. решение: выпуск 26, с. 221–248) опубликована

Задача 21.11. Пусть $a, b > 0$, $M = \dfrac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$. Докажите равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+M^2)(x^2+G^2)}}. \qquad \text{(\textit{К. Ф. Гаусс})}$$

Следующая задача также связана с эллиптическими интегралами:

Задача 21.11′. *Пусть* $a < b < c < d$ *и* $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. *Докажите равенство*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{|P(x)|}} = \int\limits_c^d \frac{dx}{\sqrt{|P(x)|}}. \qquad \text{(\textit{Фольклор})}$$

В выпуске 22 (с. 232, см. решение: выпуск 23, с. 236–238) опубликована

Задача 22.4. Дана кососимметрическая матрица A. Докажите, что некоторая нетривиальная линейная комбинация её столбцов с неотрицательными коэффициентами образует вектор, все координаты которого неотрицательны. (*И. В. Митрофанов*)

Следующая задача относится к определителям таких матриц:

Задача 22.4′. *В квадратной матрице на пересечении* i*-й строки и* j*-го столбца при* $i > j$ *стоит переменная* x_{ij}, *при* $i < j$ *стоит* $-x_{ij}$, *а при*

$i = j$ стоит 0. Докажите, что её определитель есть квадрат многочлена от переменных x_{ij}. (*Теорема Пфаффа*)

В выпуске 24 (с. 175–176) опубликована

Задача 24.2. а) Пусть 0 — притягивающая точка непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ (т. е. $0 < |f'(0)| < 1$). Положим $k = f'(0)$. Докажите существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k^n} =: G(x_0)$$

для всех x_0 из некоторой окрестности нуля, непрерывность функции G и тождество

$$G(k \cdot G^{(-1)}(x)) = f(x).$$

б) Докажите, что если f бесконечно дифференцируема, то и G тоже бесконечно дифференцируема.

в) Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}{2} \cdots = \frac{4-x^2}{\sqrt{2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}}.$$

(*А. Я. Канель-Белов*)

С этим сюжетом связана

Задача 24.2′. а) *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентно*:

$$x_0 = a \in (0; 1), \quad x_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-x_n}}{2}.$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n x_n$.

б) *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентно*:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{1+x_n}.$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n/x_n)$.

в) *Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентно*:

$$x_0 = a \in (0; 1), \quad x_{n+1} = \sin(x_n).$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} x_n$. (*Фольклор*)

В выпуске 24 (с. 176, см. решение: выпуск 27, с. 260–262) опубликована

Задача 24.9. а) Дана последовательность $a_n, n = 1, 2, \ldots$. Известно, что при всех $\gamma > 1$ выполнено равенство $\lim_{m\to\infty} a_{[\gamma^m]} = 0$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? (Здесь $[x]$ означает целую часть числа x.) (*Фольклор*) б) Назовём число $\beta \in [0,1]$ *хорошим*, если $\beta = \lim_{n\to\infty}\{\alpha^n\}$ при некотором $\alpha > 1$ (здесь $\{x\}$ означает дробную часть числа x). Докажите, что множество хороших чисел не более чем счётно. (*А. Я. Канель-Белов*)

С ней связана

Задача 24.9$'$. *Обозначим через $r(x)$ расстояние от x до ближайшего целого числа. Даны числа $a > 1$ и $b \neq 0$ такие, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r(ba^k) < 1.$$

Докажите, что a является алгебраическим *числом, т. е. корнем многочлена с целыми коэффициентами.* (*Ш. Пизо*)

В выпуске 25 (с. 169) опубликована

Задача 25.10. Докажите, что если функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(0, 2\pi)$, то для любого натурального n выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \geqslant 0.$$

(*Г. Харди — В. Рогозинский, предложил С. Асхабов*)

Вот ещё одна задача, связывающая свойства функции с коэффициентами её ряда Фурье.

Задача 25.10$'$. *Докажите, что если функция $f(x)$ убывает в интервале $(0, 2\pi)$, то для любого целого $n \geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \geqslant 0.$$

(*Г. Харди — В. Рогозинский, предложил С. Асхабов*)

В выпуске 26 (с. 265, см. решение: выпуск 27, с. 263–265) опубликована

Задача 26.1. Найдите предел

$$\lim_{t\to 1-0} \sqrt{1-t}\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2}\right).$$

(*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 26.1$'$. а) *Сравнивая сумму $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ с интегралом $\int_1^k \frac{1}{x}\,dx$, докажите, что*

$$n! \sim \sqrt{2c\cdot n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

для некоторого c. (*Абрахам де Муавр*) б) *Оценивая биномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k}$ *с помощью пункта* а), *воспользовавшись равенством* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ *и интегралом Гаусса*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},$$

покажите, что константа c *из предыдущего пункта равна* π.

(*Джеймс Стирлинг*)

в) *Докажите, что*

$$n!=\sqrt{2\pi\cdot n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{1+\sum_{k=1}^{\infty}a_kn^{-k}},$$

при этом все a_k — *рациональные числа.* (*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 234, решение см. настоящий выпуск, с. 261–262) опубликована

Задача 27.3. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

Продолжением темы служит

Задача 27.3′. а) *На круглом торте лежит несколько неперекрывающихся круглых шоколадок. Докажите, что торт можно разрезать на выпуклые части так, чтобы в каждой части было по одной шоколадке. Верно ли аналогичное утверждение для треугольных шоколадок*?

б) *В выпуклой булке запечено несколько изюминок в форме шаров. Верно ли, что булку можно разрезать на выпуклые части так, чтобы в каждой части было по одной изюминке*? (*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 234) опубликована

Задача 27.4. *Дробно-кубическое отображение* — это отображение вида

$$z\to\frac{a_1z^3+b_1z^2+c_1z+d_1}{a_2z^3+b_2z^2+c_2z+d_2}.$$

Всегда ли его можно представить в виде суперпозиции отображений вида $z\to z^2$, $z\to z^3$, $z\to az+b$, $z\to 1/z$? (*А. Я. Канель-Белов*)

Сюжет этой задачи связан с тринадцатой проблемой Гильберта о представлении функции в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных, а решение задачи предваряет более сложную ситуацию.

Задача 27.4$'$. а) *Докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция от трёх переменных, не представимая в виде суперпозиции бесконечно дифференцируемых функций меньшего числа переменных.*

б) *Докажите, что существует липшицева функция от трёх переменных, не представимая в виде суперпозиции липшицевых функций меньшего числа переменных.* (*Функция называется* липшицевой, *если существует константа C такая, что если расстояние между точками x, y равно $\rho(x, y)$, то $\rho(f(x), f(y)) \leqslant C \cdot \rho(x, y)$.*)

(*А. Н. Колмогоров, А. Г. Витушкин*)

в) *Докажите, что* (*вообще говоря, разрывная*) *функция от трёх переменных, определённая на единичном кубе, представима в виде суперпозиции функций от двух переменных.* (*Фольклор*)

Комментарий. Вопрос о представлении непрерывных функций суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных составляет тематику тринадцатой проблемы Гильберта.

В выпуске 27 (с. 235) опубликована

Задача 27.10. Даны числа $1, 2, \ldots, \lfloor e \cdot n! \rfloor$. Докажите, что их нельзя разбить на n классов так, чтобы ни в одном классе не выполнялось равенство $a = b + c$. (*И. Шур*)

Развитием темы служит

Задача 27.10$'$. *Даны числа* $1, 2, \ldots, N$. *Докажите, что при достаточно большом* N *их нельзя разбить на* 2021 *класс так, чтобы ни в одном классе не выполнялось равенство* $x_1 = x_2 + \ldots + x_{100}$.

(*Обобщённая теорема Шура*)

К статье «Каверзная задача»

В статье «Каверзная задача» (с. 88–96 данного выпуска) теорема на с. 89 сначала опровергается (с. 90–91), а затем доказывается (с. 91–94). Какое из двух рассуждений ошибочно, и в чём состоит ошибка?

Решения задач из прошлых выпусков

9.7. Условие. Обозначим через P множество натуральных чисел вида n^k, где $n > 1, k > 1$. Найти сумму обратных чисел из P, уменьшенных на единицу, т. е.

$$\sum_{x\in P}\frac{1}{x-1}. \qquad (\textit{Л. Эйлер})$$

Ответ: 1.

Решение. Сначала заметим, что этот ряд сходится, так как

$$\begin{aligned}\sum_{x\in P}\frac{1}{x-1} &< 2\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3^k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4^k}+\ldots\right) = \\ &= 2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)+\left(\left(\frac{1}{2^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\ldots\right) < \\ &< 4\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right) < 4\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\right) = \\ &= 4\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\right) = 4.\end{aligned}$$

Для натурального $n > 1$ обозначим через $a(n)$ наименьшее натуральное, целая степень которого равна n. Например, $a(6) = 6$ и $a(100) = 10$. Нетрудно видеть, что $a(n) \notin P$ и если n — степень натурального числа m, не принадлежащего P, то $m = a(n)$.

Обозначим

$$f(z) := \frac{1}{2-1}z^2 + \frac{1}{3-1}z^3 + \frac{1}{5-1}z^5 + \ldots,$$

где суммирование происходит по всем натуральным $k > 1$, не принадлежащим P. Этот ряд при $|z| < 1$ сходится.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}1 + f(z) &= 1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)z^2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots\right)z^3 + \ldots = \\ &= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^{a(k)} + \ldots\end{aligned}$$

Обозначим

$$g(z) := z^2 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{3}z^4 + \frac{1}{4}z^5 + \ldots \quad \text{и} \quad h(z) := g(z) - f(z),$$

т. е.

$$h(z) = \sum_{k\in P} \frac{1}{k-1} z^k.$$

Легко видеть, что все эти ряды сходятся при $|z| < 1$, а кроме того,

$$h(1) = \sum_{k\in P} \frac{1}{k-1} = \lim_{z\to 1-0} h(z).$$

Имеем

$$1 - h(z) = 1 + f(z) - g(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}(z^{a(k)} - z^{k+1}). \qquad (*)$$

Покажем, что при $z \to 1-0$ сумма этого ряда стремится к нулю. Положим

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}(z^{a(k)} - z^{k+1}) = S_1(z) + S_2(z),$$

где S_1 — сумма по всем $k \in P$, а S_2 — сумма по остальным k.

Сначала разберёмся с $S_1(z)$. Так как ряд

$$\sum_{k\in P} \frac{1}{k-1} < h(1) < \infty,$$

ряды $\sum_{k\in P} \frac{1}{k} z^{a(k)}$ и $\sum_{k\in P} \frac{1}{k} z^{k+1}$ равномерно сходятся на $z \in [0; 1]$. Отсюда

$$\lim_{z\to 1-0} \sum_{k\in P} \frac{1}{k}(z^{a(k)} - z^{k+1}) = \lim_{z\to 1-0} \sum_{k\in P} \frac{1}{k} z^{a(k)} - \lim_{z\to 1-0} \sum_{k\in P} \frac{1}{k} z^{k+1} = \sum_{k\in P} \frac{1}{k} - \sum_{k\in P} \frac{1}{k} = 0.$$

Теперь оценим $S_2(z)$:

$$S_2(z) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}(z^k - z^{k+1}) = \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} z^k(1-z) + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k (1-z),$$

где индекс K, зависящий от z, мы уточним позднее. Имеем

$$\sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} z^k (1-z) < (1-z) \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} <$$

$$< (1-z)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) < 2(1-z)\log_2(K),$$

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k (1-z) < \frac{1-z}{K}(z^{K+1} + z^{K+2} + \ldots) = \frac{z^{K+1}}{K} < \frac{1}{K}.$$

При $z \to 1-0$ можно подобрать $K = K(z)$ так, чтобы $K(z)$ стремилось к бесконечности, а $(1-z)\log_2 K$ к нулю. Таким образом, $\lim_{z\to 1-0} S_2(z)=0$.

Итак, предел суммы $(*)$ равен 0, и потому

$$\sum_{x\in P}\frac{1}{x-1} = \lim_{z\to 1-0} h(z) = 1. \qquad (\textit{И. В. Митрофанов})$$

10.12. Условие. Квадрат разбит на треугольники равной площади. Докажите, что их число чётно. (*Фольклор*)

Решение. Эта задача появилась в «American Mathematical Monthly» в 1965 г. (предложена Фредом Ричманом) и решена Паулем Монски в 1970 г. (*Monsky P.* On Dividing a Square into Triangles // Amer. Math. Monthly. 1970. V. 77, № 2. P. 161–164).

Начнём с неформального пояснения идеи. В обычном (вещественном) мире точки A, B, C коллинеарны, если векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ равно нулю. Оно равно площади соответствующего параллелограмма. То же явление наблюдается и в мире, связанном с остатками по модулю 2. В данном случае получается, что тройки вершин треугольников коллинеарны по модулю 2, что противоречит неколлинеарности вершин единичного квадрата. Для установления связи между вещественным миром и миром остатков по модулю 2 нам потребуется 2-адическая норма[1)].

Проведём подробное доказательство. Пусть единичный квадрат разбит на $2n+1$ треугольник равной площади, и пусть вершины квадрата A, B, C, D имеют координаты $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ соответственно. Рассмотрим сначала разбиение на треугольники, удовлетворяющее следующим двум условиям.

1. Разбиение является *триангуляцией*, т. е. любые два треугольника разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону (иными словами, на сторонах треугольника разбиения нет вершин, кроме вершин данного треугольника.)
2. Все вершины треугольников имеют рациональные координаты.

Мы раскрасим все вершины треугольников в три цвета в зависимости от степеней вхождения двойки в их координаты, а затем воспользуемся известным фактом из комбинаторной топологии.

Если p — простое число, то *p-адической нормой* на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ называется функция $|\cdot|_p$, определённая следующим

[1)] Взаимосвязь между вещественным миром и мирами остатков затронута в статье: *Ковальджи А. К.*, *Канель-Белов А. Я.* Занятия по математике — листки и диалог // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 206–233.

образом. Если рациональное число r представляется в виде $r = p^a \cdot k/m$, где a целое, а числа k и m взаимно просты с p, то положим $|r|_p := p^{-a}$. Также положим $|0|_p := 0$. Несложно проверить, что для любых рациональных x и y выполняется $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$ и $|x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)$. Из второго свойства следует, что если $|x|_p > |y|_p$, то $|x+y|_p = |x|_p$, этим мы будем пользоваться.

Нам потребуется 2-адическая норма $|\cdot|_2$. Опишем с её помощью, как красить вершины треугольников. Точка с координатами (x, y) красится в

- *белый цвет*, если $|x|_2, |y|_2 < 1$;
- *синий цвет*, если $|x|_2 \geqslant |y_2|$ и $|x|_2 \geqslant 1$;
- *красный цвет*, если $|y|_2 > |x_2|$ и $|y|_2 \geqslant 1$.

Отметим, что вершина A — белая, B — красная, вершины C и D — синие. Кроме того, на отрезке $[AD]$ нет красных точек, на отрезках $[BC]$ и $[CD]$ нет белых, на отрезке $[AB]$ нет синих.

Воспользуемся классической *леммой Шпернера* в следующей формулировке.

Пусть даны многоугольник и его триангуляция, причём все вершины триангуляции покрашены в один из трёх цветов — белый, синий или красный. Тогда совпадают чётности двух чисел: количества треугольников с вершинами трёх цветов и количества отрезков на границе многоугольника, у которых одна вершина синяя, а другая — белая.

В нашей ситуации бело-синие отрезки есть только на отрезке $[AD]$ и их там нечётное количество. Поэтому найдётся хотя бы один треугольник PQR с разноцветными вершинами. Пусть вершина P — белая, Q — синяя, R — красная. Для векторного произведения $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ имеем

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \det\begin{pmatrix} x_Q - x_P & x_R - x_P \\ y_Q - y_P & y_R - y_P \end{pmatrix} = (x_Q - x_P)(y_R - y_P) - (y_Q - y_P)(x_R - x_P).$$

При этом

$$|x_Q - x_P|_2 \geqslant 1, \quad |y_R - y_P|_2 \geqslant 1,$$

так что

$$|(x_Q - x_P)(y_R - y_P)|_2 \geqslant 1.$$

Кроме того,

$$|x_Q - x_P|_2 = |x_Q|_2 \geqslant |y_Q|_2 = |y_Q - y_P|_2$$

и

$$|y_R - y_P|_2 = |y_R|_2 > |x_R|_2 = |x_R - x_P|_2,$$

поэтому

$$|(x_Q - x_P)(y_R - y_P)|_2 > |(y_Q - y_P)(x_R - x_P)|_2.$$

Следовательно,
$$|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|_2=|(x_Q-x_P)(y_R-y_P)-(y_Q-y_P)(x_R-x_P)|_2=|(x_Q-x_P)(y_R-y_P)|_2\geqslant 1.$$

Площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{PR}$, равна $2/(2n+1)$, т. е. удвоенной площади треугольника. С другой стороны, она равна $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$, так что $|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|_2<1$, что противоречит предыдущему.

Итак, мы решили задачу для триангуляций с рациональными координатами вершин треугольников разбиения. Рассмотрим теперь триангуляцию с произвольными координатами вершин, не обязательно рациональными.

Напомним, что (комплексное) *алгебраическое число* — это число, являющееся корнем какого-то ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

Лемма. *Пусть дана система полиномиальных уравнений с алгебраическими коэффициентами, т. е. набор равенств вида $p_i(z_1,\ldots,z_s)=0$, где p_i — многочлены от переменных $z_1,\ldots,z_s$, коэффициенты которых суть алгебраические числа. Если эта система имеет решение в комплексных числах, то она имеет и решение в алгебраических числах.*

Для доказательства этой леммы нам потребуется

Ослабленная теорема Гильберта о нулях. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле, и пусть $p_1,\ldots,p_k$ — набор полиномов с коэффициентами из K от переменных $z_1,\ldots,z_s$. Тогда следующие два условия эквивалентны.*

1. *Не существует набора $z_1,\ldots,z_s$, обращающего в нуль все многочлены p_i.*
2. *Существует такой набор многочленов $q_1,\ldots,q_k$ с коэффициентами из K, что $p_1q_1+\ldots+p_kq_k=1$.*

Из ослабленной теоремы Гильберта сразу следует наша лемма. Действительно, применим теорему к полю комплексных алгебраических чисел. Если у системы нет алгебраического решения, то можно найти такие многочлены $q_1,\ldots,q_k$ с алгебраическими коэффициентами, чтобы выполнялось условие 2. Но тогда у многочленов $p_1,\ldots,p_k$ не может быть и общего комплексного корня — противоречие.

Вернёмся к нашей триангуляции. Площадь каждого треугольника разбиения — многочлен с рациональными коэффициентами степени не выше 2 от координат вершин триангуляции. Запишем систему, состоящую из всех полученных уравнений. Согласно доказанному, у неё есть решение в алгебраических числах. Заметим, что эти числа не обязаны быть координатами вершин какой-то триангуляции квадрата, в частности потому, что могут не быть действительными. Но так как они удовлетворяют той же системе уравнений, площади треугольников выражаются через них так же, как через координаты вершин.

Неархимедово нормирование — это функция $\|\cdot\|$ на элементах поля или кольца, принимающая положительные значения вне нуля (и нуль в нуле) и такая, что $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ и $\|x + y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$. Известно, что *на поле алгебраических чисел существует неархимедово нормирование, являющееся продолжением p-адической нормы* (см. *Ленг С.* «Алгебра», М.: Мир, 1968, с. 339–340). Пользуясь этим, определим 2-адические нормы всех найденных чисел, а затем раскрасим вершины триангуляции в три цвета, действуя так же, как в случае рациональных координат. Таким же образом с помощью леммы Шпернера найдём разноцветный треугольник PQR и снова получим противоречие, рассматривая 2-адические нормы чисел. Поскольку наши алгебраические числа не обязательно являются действительными, несколько теряется геометрический смысл векторного произведения как ориентированной площади параллелограмма. Но доказательство всё равно проходит слово в слово, так как мы работаем именно с алгебраической координатной записью векторного произведения (с многочленом от координат вершин триангуляции).

Наконец, покажем, как модифицировать доказательство, если разбиение на треугольники не является триангуляцией (на сторонах треугольников могут быть вершины других треугольников). Тогда можно «вставить» вырожденные треугольники нулевой площади между треугольниками исходного разбиения, так что получится триангуляция. К системе полиномиальных уравнений добавим условия, что площади новых треугольников равны 0, и будем действовать как раньше. Так как $|0|_2 < 1$, новые треугольники тоже не могут оказаться разноцветными.

(*А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов*)

14.1. Условие. Дано бесконечное периодическое слово W минимального периода n и два его одинаковых подслова длины $n-1$. Докажите, что их начальные буквы находятся на расстоянии, кратном n. (*А. Я. Белов*)

Решение. Заметим, что количество букв каждого сорта в любом периоде одинаково. Следовательно, если мы знаем $n-1$ букву, то оставшаяся буква восстанавливается однозначно. Поэтому участок длины $n-1$ однозначно определяет, вместе с каждой последующей буквой, и весь оставшийся «хвост» слова W. Аналогичные рассуждения справедливы и для начального куска. Следовательно, сдвиг, переводящий подслово в равное ему, продолжается до сдвига всего слова W. Поскольку n — минимальный период слова W, величина этого сдвига кратна n.

(*И. В. Митрофанов*)

Комментарий. Известно, что несовпадающие периодические последовательности периодов m, n соответственно не могут иметь общий кусок длины $m+n-1$. Данный факт имеет большое значение в алгебре (см., например, *Адян С. И.* «Проблема Бёрнсайда и тождества в группах», М.: Наука, 1975; *Ольшанский А. Ю.* «Геометрия определяющих соотношений в группах», М.: Наука, 1989; *Белов А. Я., Борисенко В. В., Латышев В. Н.* «Мономиальные алгебры» (Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематический обзор, 2002, вып. 26, с. 35–214)). Соответствующие задачи (автор А. Я. Канель-Белов) были предложены на 16-м Турнире городов: осень 1994 г., основной вариант, задача 5 для 10–11 кл. и задача 5 для 8–9 кл. (*А. Я. Белов*)

14.4. Условие. Докажите, что при любых натуральных $n \geqslant l$ выполняется тождество:

$$\frac{1}{l!}\sum_{\sum\limits_{i=1}^{l} k_i=n;\, k_i\geqslant 1}\frac{1}{k_1\cdot\ldots\cdot k_l}=\sum_{\sum\limits_{i=1}^{l} k_i=n;\, k_i\geqslant 1}\frac{1}{k_1(k_1+k_2)\cdot\ldots\cdot(k_1+\ldots+k_l)}.$$

(*И. Никокошев*)

Решение. Обозначим сумму в левой части $f(n,l)$, а сумму в правой части $g(n,l)$. Можно считать, что $f(n,l)=g(n,l)=0$ при $n<l$. Очевидно, при любом n верно, что $f(n,1)=g(n,1)=1/n$. Тождественное совпадение f и g будет доказано, если мы покажем, что для f и g выполняются одинаковые рекуррентные соотношения:

$$f(n,l)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}f(i,l-1) \quad \text{и} \quad g(n,l)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}g(i,l-1).$$

Рассмотрим бесконечный степенной ряд

$$\frac{1}{l!}\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\right)^l.$$

Непосредственно проверяется, что при z^n после раскрытия скобок и приведения подобных будет стоять в точности $f(n,l)$. После дифференцирования по z получим

$$\frac{1}{(l-1)!}\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\right)^{l-1}(1+z+z^2+\ldots).$$

С одной стороны, коэффициент при z^{n-1} равен $nf(n,l)$. С другой стороны, так как в выражении

$$\frac{1}{(l-1)!}\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\right)^{l-1}$$

коэффициент при z^k равен $f(k,l-1)$, имеем

$$nf(n,l) = f(1,l-1) + \ldots + f(n-1,l-1).$$

Чтобы получить соотношение на g, заметим, что в определении $g(n,l)$ сумма всех слагаемых с фиксированным значением k_l равна $\frac{1}{n}g(n-k_l,l-1)$. Суммируя по k_l от 1 до $n-1$, получаем нужную формулу.

(*И. В. Митрофанов*)

20.4′ (выпуск 26, с. 272). Условие. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных k, что при всех натуральных n число $k\cdot 2^n+1$ — составное. (*С. В. Конягин*)

Решение. Эйлер заметил, что $2^{2^5}+1$ делится на 641: $2^{2^5}+1=641s$, где s взаимно просто с 641. Возьмём такое $k>1$, что k сравнимо с 1 по модулям 3, 5, 17, 257, $2^{2^4}+1, s$ и кроме того $k\equiv -1 \pmod{641}$. В силу китайской теоремы об остатках существует бесконечно много таких k.

Тогда числа вида $k\cdot 2^n+1$ при $n=1,2,4,8,16$ делятся на 2^n+1 и при этом $k\cdot 2^n+1>2^n+1$, так что все эти числа составные. При $n=32$ величина $k\cdot 2^n+1$ делится на s и больше s. Далее, при $n>5$ числа вида $k\cdot 2^{2^n}+1$ делятся на 641. Задача решена.

Комментарий. Гаусс установил, что если число p простое, то правильный p-угольник строится циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $p=2^{2^k}+1$. При $k\leqslant 4$ все числа вида $2^{2^k}+1$ простые, примеры простых чисел такого вида при $k>4$ неизвестны.

(*А. Я. Белов*)

21.5. Условие. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что при всяком целом x найдётся такое целое y, что $P(x)=Q(y)$. Докажите, что найдётся такой многочлен R, что $P(x)=Q(R(x))$ при всех x. Что будет, если условие задачи ослабить, т. е. потребовать, чтобы указанное y нашлось для бесконечно многих целых x? (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Нам потребуется

Предложение 1. *Пусть P, Q — многочлены и $P(x)=Q(y)$. Тогда x разлагается в* ряд Пюизо, *у которого «хвост» (т. е. члены с отрицательными степенями y) сходится в окрестности бесконечности*:

$$x = a_m y^{m/n} + \ldots + a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{-k/n}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k, \quad Q(y) = \sum_{k=0}^{l} d_k y^k.$$

Перепишем равенство $P(x)=Q(y)$ в в виде

$$x\cdot\sqrt[m]{\sum_{k=0}^{m}c_{m-k}x^{-k}}=y^{n/m}\cdot\sqrt[n]{\sum_{l=0}^{n}d_{m-l}y^{-l}}.$$

Сделав замену $y=t^m$ и разделив обе части на подходящие константы, получим равенство вида

$$x\cdot\sqrt[m]{1+c'_1x^{-1}+\ldots+c'_mx^{-m}}=\lambda\cdot t^n\cdot\sqrt[n]{1+d'_1t^{-m}+\ldots+d'_nt^{-l\cdot m}}.$$

Асимптотическое разложение в окрестности бесконечности сведём к разложению в окрестности нуля, сделав замену $u=x^{-1}$, $v=t^{-1}$. Имеем

$$\frac{u}{\sqrt[m]{1+c'_1u+\ldots+c'_mu^m}}=\lambda^{-1}\cdot\frac{v^n}{\sqrt[n]{1+d'_1v^m+\ldots+d'_nv^{l\cdot m}}}.$$

Иначе говоря, $F(u)=G(v)$, где F, G — аналитические функции в окрестности нуля, $F(0)=G(0)=0$, $F'(0)=1\neq 0$. Тогда $u=H(v):=F^{(-1)}\circ G(v)$ в окрестности нуля также является аналитической функцией по теореме об обратной функции, причём $H(0)=0$. Иными словами, для некоторых h_k

$$H(v)=\sum_{k=1}^{\infty}h_kv^k,$$

причём ряд сходится в окрестности нуля. Пусть $h_1=\ldots=h_{r-1}=0$, $h_r\neq 0$ $(r\geqslant 1)$. Подставляя $x=u^{-1}$, $y=v^{-n}$, имеем для некоторых $h'_1,h'_2,\ldots$:

$$x=\frac{y^{r/n}}{1-(h'_1y^{-1/n}+h'_2y^{-2/n}+\ldots+)}.$$

Воспользовавшись при всех достаточно больших x разложением

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{l=0}^{\infty}t^n,$$

сходящимся в окрестности нуля, подставляя $t=h'_1y^{-1/n}+h'_2y^{-2/n}+\ldots+$ и раскрывая скобки, получаем равенство (1). Предложение доказано. $\square$

Рассмотрим *оператор конечной разности*

$$f\to\Delta(f)\colon\Delta(f)(x)=f(x+1)-f(x).$$

Нам понадобится

Лемма 2. (а) *Пусть $k>s$, где k натуральное, s положительное вещественное, $k>s$. Тогда $\Delta^{(k)}(x^s)\to 0$ при $x\to\infty$.*

(б) $\Delta^{(k)}(f)\equiv 0$ *тогда и только тогда, когда f — многочлен степени меньше k.*

(в) *Пусть $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Тогда $\Delta^{(k)}(f(x))\to 0$ при $x\to\infty$.*

Предложение 3. *Линейная комбинация алгебраических функций есть снова алгебраическая функция. Алгебраическая функция, имеющая бесконечно много нулей, — тождественный нуль.* □

Завершим *решение задачи* 21.5. Пусть $P(x)=Q(y)$, т. е. $y=Q^{(-1)}\circ P(x)$. Тогда

$$y=a_mx^{m/n}+\ldots+a_0+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{-k/n}.$$

Применим лемму 2(в) к «хвосту» под знаком суммы и лемму 2а к остальным слагаемым. Для достаточно больших k имеем $\Delta^{(k)}(y)\to 0$ при $x\to\infty$. Из условия задачи следует, что если x — целое, то $y=L(x):=Q^{(-1)}\circ P(x)$ тоже целое, поэтому $\Delta^{(k)}(L)(x)=0$ при всех достаточно больших целых x и k. Из предложения 3 получаем $\Delta^{(k)}(L)(x)\equiv 0$ при всех достаточно больших вещественных x и достаточно больших k. Значит, $L(x)$ — многочлен по лемме 2б. Теперь достаточно положить $R=L=Q^{(-1)}\circ P$.

Остаётся показать, что если не требовать целочисленности y *при всех* x, то утверждение задачи перестаёт быть верным. Достаточно заметить, что *уравнение Пелля*, например $2x^2+1=y^2$, имеет бесконечно много целочисленных решений, но при этом $\sqrt{2x^2+1}$ не является многочленом. Задача решена.

Упражнение. Докажите, что если многочлены P и Q принимают целые значения в одних и тех же точках, то либо их сумма, либо их разность есть величина постоянная.

Комментарий. Идея *разностного дифференцирования* активно используется при решении олимпиадных задач. Приведём их подборку.

1. Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы пяти кубов целых чисел. Обобщите это утверждение для 2021-х степеней.
2. Длина n-го прыжка кузнечика равна n^{2021}, а вот направление он может выбирать произвольно. Докажите, что он может посетить все целые точки.
3. Докажите, что отрезок можно раскрасить в красный и синий цвета так, что для любого многочлена степени 2021 интеграл по красной области равен интегралу по синей области.
4. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n}x^k$ есть многочлен $(k+1)$-й степени от n.
5. Докажите лемму 2.
6. Если многочлен $P(x_1,\ldots,x_n)$ принимает рациональные значения при всех целых значениях переменных, то все его коэффициенты рациональны.

7. Если многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ принимает целые значения при всех целых значениях переменных, то он является линейной комбинацией многочленов вида $\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i}{k_i}$.
8. Докажите, что
$$\Delta^{(k)}(f)(x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+k-i).$$

(*А. Я. Канель-Белов*)

22.5$''$(а) (выпуск 27, с. 245). Условие. Существует ли многочлен от k переменных, устанавливающий инъекцию множества точек с целыми координатами в множество целых чисел? (*С. Б. Гашков*)

Ответ: существует.

Решение. Возьмём симплекс с целочисленными вершинами $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$, $j = 1, \dots, n+1$, и выберем натуральные числа $n_1 \gg n_2 \gg \ldots \gg n_{n+1}$. Нетрудно проверить, что многочлен
$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_{ij})^2\right)^{n_j}$$
обладает нужным свойством (поскольку две различные точки находятся на разном расстоянии хотя бы от одной из вершин симплекса).

Комментарий. Итак, инъекция осуществлена, осуществить сюръекцию несложно (проекция на первую координату), а вот биекция проблематична — см. выпуск 26, с. 259–262, 282–284.

(*А. Я. Канель-Белов*)

23.3. Условие. Может ли быть, что три человека, находящиеся на расстоянии 0, 1 и 2 от начала дороги, пройдут, не обгоняя друг друга, до точек, находящихся на расстоянии 1000, 1001 и 1002 от начала дороги так, чтобы последний всё время видел первого, но ни в какой момент не видел второго (дорога идёт в одном направлении по горизонтали, но может подниматься и спускаться)? (*Н. Н. Константинов*)

Ответ: могут.

Решение. Пусть дорога имеет такой вид, как сплошная ломаная на схематическом рис. 1. Три человека вначале находятся в точках A, B, C, а в конце в точках A_1, B_1, C_1. Опишем их движение поэтапно.

1. Первый смещается в точку A'.
2. Третий смещается в точку C'.
3. Второй переходит в точку B_1.

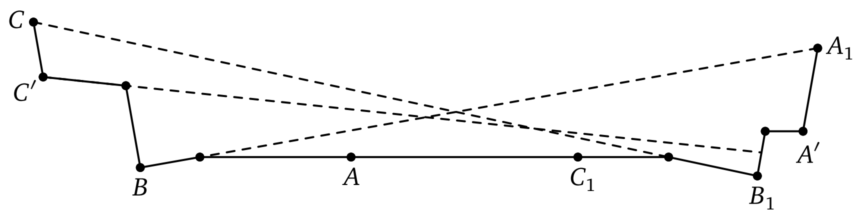


Рис. 1

4. Первый переходит в точку A_1.

5. Наконец, третий переходит в точку C_1.

В любой момент первый и третий видят друг друга, но не видят второго.

(*Н. Н. Константинов. Записал А. Я. Канель-Белов на лекции при отборе на Всесоюзную математическую олимпиаду*)

25.1$'$ (выпуск 27, с. 247–248). Условие. Профессор доказывает равносильность n утверждений. Он задаёт своим аспирантам темы диссертационной работы вида: *Докажите, что из утверждения с номером k следует утверждение с номером l.* Нельзя защищать диссертацию, являющуюся прямым логическим следствием из защищённых ранее. Какое максимальное число аспирантов может защитить профессор? (*Фольклор*)

Ответ: $\dfrac{n(n-1)}{2}+1$.

Решение. Докажем, что большее количество диссертаций защитить нельзя. Прежде всего заметим, что если имеется не больше n диссертаций, в которых выводилось утверждение A_i или, наоборот, из A_i выводилось некоторое другое утверждение, то, выбросив все такие защиты, получим аналогичную ситуацию с меньшим числом утверждений, так что дело завершает индукция. Итак, пусть для любого A_i количество связанных с ним диссертаций не меньше $n+1$.

Рассмотрим граф с вершинами $A_1, \ldots, A_n$; ребро между A_i и A_j проводится, если были защищены обе диссертации, которые их связывают. Тогда из каждой вершины A_i выходит не менее двух рёбер (иначе количество диссертаций, в которых фигурировало утверждение A_i, не больше n). Следовательно, имеется цикл некоторой длины k. Но это невозможно: ребру можно сопоставить пару противоположных стрелок (защит диссертаций), и среди $2k$ стрелок, отвечающих рёбрам цикла, найдётся последняя по времени. Тогда соответствующая диссертация является следствием из ранее защищённых. Получили противоречие.

(*А. Я. Канель-Белов*)

27.2. Условие. Первоначально во всех целых точках числовой прямой расставлены натуральные числа. На первом шаге между каждыми двумя соседними числами записывается их среднее арифметическое, а исходные числа стираются. На втором шаге с записанными числами проделывается та же операция, и так далее. Оказалось, что все числа, которые мы получаем на каждом шаге, натуральные. Можно ли утверждать, что на некотором шаге все числа равны между собой? (*Фольклор*)

Ответ: нет, это утверждать нельзя.

Решение. Поместим в точку с координатой n число $4(n+c)^2+d$, где c и d — натуральные числа. Тогда между числами $4(n+c)^2+d$ и $4(n+c+1)^2+d$ будет на следующем шаге стоять число

$$\frac{4(n+c)^2+d+4(n+c+1)^2+d}{2}=4\Big(n+c+\frac{1}{2}\Big)^2+d+1.$$

Отметим, что к величине c добавилась константа $1/2$, а к величине d прибавилась константа 1.

Если же провести k таких операций, то произойдёт сдвиг на $k/2$ и добавится константа k. Возникнет расположение чисел $4(n+c+k/2)^2+d+k$. При $d=0$ все эти числа будут натуральными. Задача решена.

27.3. Условие. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. а) Докажем несколько более сильное утверждение: некоторую фигуру можно выдвинуть, если разрешено двигать фигуры только в одном направлении — назовём его направлением вертикально вверх. Будем считать, что фигура A *накрывает* фигуру B, если фигуру B нельзя параллельно перенести вертикально вверх, не задев фигуры A. Нетрудно убедиться, что тогда фигура B аналогичному выдвижению вверх фигуры A не мешает, в силу выпуклости.

Допустим, ни одну фигуру выдвинуть вертикально вверх нельзя. Тогда для каждой фигуры существует накрывающая. Поскольку фигур конечное число, найдётся такой цикл из фигур, что каждая из них накрывается следующей. Из всех таких циклов возьмём тот, в котором наименьшее число фигур — не меньше трёх, ввиду сказанного выше. Рассмотрим три фигуры из этого цикла: A накрывает B, B накрывает C. Если бы A накрывала C, то цикл можно было бы сократить, что невозможно в силу его минимальности. Значит, в нашем цикле каждая фигура накрывается только следующей за ней фигурой.

Рассмотрим теперь проекции фигур цикла на проведённую над всей конструкцией горизонтальную прямую. Получится система отрезков, каждый из которых имеет общие точки только с двумя отрезками, отвечающими предыдущей и следующей фигурам цикла. Это возможно лишь в случае трёх отрезков. Но тогда некоторая точка покрыта всеми тремя отрезками, т. е. проходящая через неё вертикальная прямая пересекает все три фигуры. Рассмотрим самую верхнюю точку пересечения прямой с этими фигурами. Она принадлежит отрезку, содержащемуся в одной из фигур, и каждая из двух других при движении вверх пересечёт этот отрезок, т. е. по определению она накрыта данной фигурой. Значит, эти три фигуры не образуют цикл. Получили противоречие.

б) Проведём плоскость вне системы шаров. Выберем шар, центр которого ближе всего к плоскости. Ясно, что его можно выдвинуть по направлению к этой плоскости. Это решение непосредственно переносится на случай многомерного пространства.

(*А. Я. Канель-Белов, И. А. Иванов-Погодаев*)

Поправка

В выпуске 27 при публикации статьи И. Х. Сабитова «Хорошо ли мы знаем векторное произведение?» допущена погрешность в библиографии на с. 98. Последние позиции должны выглядеть следующим образом:

[4] *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

[5] *Hsiung Ch.-Ch.* A First Course in Differential Geometry. New York: John Wiley & Sons, 1981.

На с. 89 в сноске ссылка на [4], а на с. 94 в третьей строке ссылка на [5].

Информация для авторов

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Издание публикует материалы по различным областям математики, а также по проблемам её истории и преподавания, интересные и доступные указанной аудитории.

2. Сборник «Математическое просвещение» не публикует существенно новые научные результаты, оценка которых доступна лишь специалистам в соответствующей области. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

3. Материалы принимаются по электронной почте на адрес `matpros@yandex.ru` в виде двух файлов (`pdf` и `tex`) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в `Word`.

4. Просим обратить внимание, что материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

5. Просим авторов кратко пояснять в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

6. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html`

7. В конце статьи необходимо указать для каждого из авторов:

— фамилию, имя, а также отчество (если есть) полностью,

— место работы/обучения,

— электронный адрес для публикации.

8. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение (хотя бы набросок).

9. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый, просим обращаться по адресу `matpros@yandex.ru`

Научно-популярное издание

Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 28

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619–08–30, 647–01–89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Подписано в печать 29.10.2021 г. Формат $70\times100\,{}^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 16,5. Тираж 800 экз. Заказ №

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+