

PENGANTAR FISIKA KUANTUM



LAMBANG SUBAGYO
ATIN NURYADIN

PENGANTAR FISIKA KUANTUM

Penulis : Lambang Subagiyo
Atin Nuryadin

Editor : Khairunnisa

Cover Desain : Andi Hafitz Khan

ISBN: 978-602-6834-XX-X

© 2018. Mulawarman University Press

Edisi : Maret 2018

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian
atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun tanpa izin
tertulis dari penerbit

Isi diluar tanggung jawab percetakan.

Subagiyo, L. dan Nuryadin, A. 2018. Pengantar Fisika
Kuantum. Mulawarman University Press.



Mulawarman
University PRESS

Penerbit

Mulawarman University PRESS

Gedung LP2M Universitas Mulawarman

Jl. Krayan, Kampus Gunung Kelua

Samarinda – Kalimantan Timur – INDONESIA 75123

Telp/Fax (0541) 747432, Email : mup@lppm.unmul.ac.id

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT penulis panjatkan atas limpahan rahmat, taufik dan karunianya sehingga buku yang berjudul "Pengantar Fisika Kuantum" ini telah dapat diselesaikan dengan baik. Buku ini disusun untuk membantu mahasiswa yang ingin memahami dasar dari fisika kuantum secara umum, dari sejarah fisika kuantum sampai dengan pengaplikasiannya.

Buku ini dimulai dari pembahasan tentang latar belakang lahirnya fisika kuantum. Pada bagian ini diuraikan beberapa eksperimen penting yang tidak bisa dijelaskan oleh fisika klasik, seperti radiasi benda hitam, efek fotolistrik dan hamburan Compton serta hipotesis de Broglie. Sehingga diperlukan teori baru untuk menjelaskan fenomena-fenomena tersebut. Dari sinilah muncul teori fisika kuantum untuk menjawab permasalahan tersebut. Selanjutnya dibahas beberapa usaha untuk menjelaskan sifat-sifat benda mikroskopis seperti eksperimen sinar-X, model atom Bohr, dualisme partikel-gelombang dan ketidakpastian Heisenberg.

Sebagai peralihan dari pembahasan sejarah munculnya fisika kuantum ke pembahasan penerapan teori fisika kuantum, dibahas tentang cara mendapatkan fungsi gelombang yang dimaksudkan untuk menjelaskan bagaimana keadaan sistem berubah terhadap waktu. Persamaan ini pada awalnya merupakan jawaban dari dualitas partikel-gelombang yang lahir dari gagasan de Broglie yang menggunakan persamaan kuantisasi cahaya Planck dan prinsip fotolistrik Einstein untuk melakukan kuantisasi pada orbit elektron. Selain itu, dibahas juga tentang penjabaran, karakteristik serta besaran fisik yang dapat diperoleh dari persamaan Schrodinger.

Pada bagian akhir buku ini, dibahas tentang penerapan persamaan Schrodinger pada kasus-kasus sederhana sehingga penyelesaiannya mudah dilakukan secara analitis, sehingga pembaca mudah untuk memahami prosedur umum dari pemecahan persamaan Schrodinger. Penerapan persamaan Schrodinger salah satunya digunakan untuk menelaah bagaimana nilai harap suatu besaran fisika berubah terhadap waktu. Contoh-contoh besaran yang digunakan dipilih sedemikian rupa, sehingga

dari hasil pemecahan persamaan Schrodinger kita dapat memahami persamaan dan perbedaan antara fisika klasik dan fisika kuantum dengan membandingkan hasil pemecahan tersebut. Selain itu dibahas juga tentang momentum sudut secara kuantum dan terapannya pada atom berelektron tunggal. Pembahasan momentum sudut merupakan pintu masuk yang baik untuk mempelajari gerak tiga dimensi berdasarkan fisika kuantum. Hal ini dimaksudkan untuk memberikan contoh nyata penerapan persamaan Schrodinger dalam ruang tiga dimensi dan akan lebih mudah dipahami karena sistem atom berelektron tunggal merupakan sistem yang sederhana.

Akhirnya penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada pihak-pihak yang berkontribusi pada penulisan buku ini, terutama kepada Project Implementation Unit (PIU)-IDB Universitas Mulawaraman yang telah membiayai penulisan buku ini. Penulis menyadari bahwa buku ini masih sangat jauh dari sempurna, oleh karena itu saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan buku ini. Semoga buku yang sederhana ini dapat memberikan manfaat yang besar bagi para pembaca.

Samarinda, Maret 2018

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR TABEL	x
BAB 1 RADIASI TERMAL DAN POSTULAT PLANCK	1
1. Radiasi Termal	1
2. Fenomena Fisis dalam Radiasi Benda Hitam.....	8
3. Rapat Moda Getar dalam Suatu Rongga	9
4. Rumus Rayleigh-Jeans untuk Radiasi Termal.....	15
5. Radiasi Termal Menurut Planck	18
6. Hukum Stefan-Boltzmann.....	24
7. Hukum Pergeseran Wien	27
BAB 2 TEORI KUANTUM EINSTEIN.....	31
1. Efek Fotolistrik dan Teori Kuantum Cahaya	31
2. Efek Compton.....	42
BAB 3 PEMBANGKITAN SINAR X	51
1. Mekanisme Pembangkitan Sinar-X	51
2. Spektrum Sinar-X.....	53
3. Proses Interaksi Sinar-X dengan Materi.....	59
4. Jenis Interaksi Sinar-X dengan Materi.....	62
BAB 4 MODEL ATOM HIDROGEN MENURUT BOHR	71
1. Pendahuluan	71
2. Model Atom Sebelum Model Atom Bohr.....	77
3. Model Atom Menurut Bohr.....	86
4. Koreksi Terhadap Hasil Teori Bohr	95
5. Model Atom Hidrogen Menurut Wilson-Sommerfeld	98
BAB 5 DUALISME PARTIKEL-GELOMBANG DAN PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG	109
1. Dualisme Partikel-Gelombang.....	109

	2. Postulat De Broglie.....	111
	3. Prinsip-Prinsip Ketidakpastian Heisenberg	127
BAB 6	PERSAMAAN GELOMBANG SCHRODINGER.....	141
	1. Pendahuluan	141
	2. Persamaan Gelombang Schrodinger	149
	3. Makna Fungsi Gelombang	151
	4. Ekspektasi.....	155
	5. Persamaan Schrodinger Bebas Waktu	154
	6. Sifat dan Perilaku Solusi Persamaan Gelombang Schrodinger Bebas Waktu.....	159
BAB 7	PEMECAHAN PERSAMAAN SCHRODINGER BEBAS WAKTU UNTUK POTENSIAL SEDERHANA	167
	1. Pendahuluan	167
	2. Partikel Bebas	168
	3. Partikel dalam Sumur Potensial Tak Berhingga	179
	4. Partikel dalam Potensial Tangga dengan $E < V_0$	187
	5. Partikel dalam Potensial Tangga dengan $E > V_0$	191
	6. Partikel dan Potensial Penghalang dengan $E < V_0$	196
	7. Partikel dan Potensial Penghalang dengan $E > V_0$	200
	8. Osilator Harmonik Sederhana	203
BAB 8	PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN	211
	1. Pendahuluan	211
	2. Memecahkan Persamaan Radial	217
	3. Analisis Persamaan Schrodinger	228
	4. Tinjauan Ulang Pemecahan Persamaan Schrodinger untuk Sistem Atom Hidrogen.....	230
BAB 9	PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN: PENGEMBANGAN KONSEP	237
	1. Pendahuluan	237
	2. Berbagai Operator dalam Sistem Persamaan Gelombang Schrodinger untuk Atom Hidrogen.....	238

3. Hubungan Antara Operator \hat{H} , \hat{L}_2 dan \hat{L}_z	257
BAB 10 PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA	
SISTEM ATOM HIDROGEN: SPINELEKTRON.....	
1. Elektron	259
2. Spin Elektron dan Permasalahan Nilai Eigen	262
3. Atom Hidrogen dengan Spin dalam Medan Magnet Luar	271
BAB 11 PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA	
SISTEM ATOM HIDROGEN: KAITAN SPIN DAN ORBITAL	
.....	275
1. Pendahuluan	275
2. Gerak Spin dan Orbital Elektron	277
3. Momentum Anguler Total dan Gambaran Kuantum	279
4. Nilai Eigen: Permasalahan Momentum Anguler Total ...	281
5. Evaluasi Energi Kopel $(\vec{S} \cdot \vec{L})$	282
6. Tinjauan Ulang Atom Hidrogen dalam Medan \vec{B} untuk Tiga Model.....	291
DAFTAR PUSTAKA	293

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Idealisasi benda hitam sempurna	4
Gambar 1.2	Distribusi radiasi spectral benda hitam sempurna	5
Gambar 1.3	Vektor gelombang dalam ruang 3 dimensi	10
Gambar 1.4	Elemen volume dalam ruang mode getar berupa kulit bola	14
Gambar 1.5	$\rho_T(f)$ menurut Reyleigh-Jeans	16
Gambar 1.6	Hubungan intensitas dan panjang gelombang radiasi benda hitam	25
Gambar 2.1	Efek foto listrik	34
Gambar 2.2	(a) Grafik kuat arus terhadap frekuensi pada intensitas cahaya yang berbeda. (b) Grafik potensial henti terhadap frekuensi	37
Gambar 2.3	Diagram skematis percobaan Compton	44
Gambar 2.4	Intensitas sinar-X terhambur terhadap panjang gelombang pada empat sudut berbeda	45
Gambar 2.5	Deskripsi hamburan Compton	47
Gambar 3.1	Skema alat pembangkit sinar-X	53
Gambar 3.2	Distribusi panjang gelombang sinar-X yang dihasilkan ketika electron-elektron 35 keV menabrak target molybdenum	54
Gambar 3.3	Mekanisme pembentukan spectrum sinar-x kontinyu ...	55
Gambar 3.4	Diagram tingkat energy atom molybdenum	58
Gambar 3.5	Proses penyerapan sinar-X	61
Gambar 3.6	Diagram proses produksi pasangan	67
Gambar 4.1	Komponen dasar dari spektograf prisma	72
Gambar 4.2	Komponen dasar dari spektograf prisma	73
Gambar 4.3	Model atom Thomson	79
Gambar 4.4	Susunan percobaan Rutherford	80
Gambar 4.5	Skema hamburan partikel pada lapisan tipis	82

Gambar 4.6	Perbandingan model atom Thomson dan Rutherford ...	84
Gambar 4.7	Diagram model atom hydrogen Bohr	88
Gambar 4.8	Elips pada sumbu p_x dan sumbu x	101
Gambar 4.9	Bentuk-bentuk orbit electron untuk tiga nilai bilangan kuantum utama	105
Gambar 4.10	Diagram tingkat energi	106
Gambar 5.1	Orbit electron pada atom Bohr dan kaitannya dengan gelombang berdiri de Broglie	113
Gambar 5.2	(a) Susunan percobaan Davisson-Germer (b) Grafik intensitas (jumlah elektron) terhadap akar kuadrat potensial	116
Gambar 5.3	Hamburan electron oleh pelat logam kristalin	118
Gambar 5.4	Pola difraksi electron yang dihamburkan atom-atom emas	119
Gambar 5.5	Superposisi linier dari dua fungsi gelombang	123
Gambar 5.6	Penjumlahan $\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)$ pada waktu t	124
Gambar 5.7	(a) Sebelum tumbukan dan (b) sesudah tumbukan antara foton dan electron saat pengamatan	132
Gambar 6.1	Kurva turunan kedua fungsi gelombang terhadap x	163
Gambar 7.1	Plot grafik untuk $\cos 2x$, $\cos 4x$ dan $\cos 6x$	175
Gambar 7.2	Penjumlahan gelombang $\cos 2x$, $\cos 4x$ dan $\cos 6x$	176
Gambar 7.3	Penjumlahan banyak gelombang dengan nilai k yang bervariasi	176
Gambar 7.4	Partikel dalam sumur potensial satu dimensi	180
Gambar 7.5	Fungsi gelombang $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ dan $\psi_3(x)$ serta rapat probabilitas $ \psi_3(x) ^2$	184
Gambar 7.6	Potensial tangga dengan $E < V_0$	187
Gambar 7.7	Grafik fungsi gelombang yang melewati penghalang potensial	189
Gambar 7.8	Potensial tangga $E > V_0$	191
Gambar 7.9	Potensial penghalang dengan $E < V_0$	196

Gambar 7.10	Grafik fungsi gelombang yang melewati potensial penghalang dengan $E < V_0$	198
Gambar 7.11	Potensial penghalang dengan $E > V_0$	200
Gambar 7.12	Grafik fungsi gelombang yang melewati potensial penghalang dengan $E > V_0$	202
Gambar 7.13	Kerapatan probabilitas untuk keadaan dasar osilator harmonik sederhana	207
Gambar 7.14	Tingkat energy untuk osilator harmonic sederhana	208
Gambar 8.1	Koordinat bola untuk atom hidrogen	213
Gambar 9.1	Diagram tingkat energy atom hidrogen	247
Gambar 9.2	Skema transisi electron	249
Gambar 9.3	Perbandingan transisi elektron dari 3p ke 2s tanpa dan dengan medan magnet \vec{B}	250
Gambar 9.4	Perbandingan transisi elektron dari 4d ke 3p tanpa dan dengan medan magnet \vec{B}	251
Gambar 9.5	Kuantisasi ruang bagi momentum sudut $\hbar\sqrt{6}$	253
Gambar 9.6	Gerak presesi pada medan magnet seragam	254
Gambar 10.1	Teknik Stern dan Gerlach menyelidiki kuantisasi ruang	260
Gambar 10.2	Spin electron up and down relative terhadap sumbu z	262
Gambar 10.3	Kuantitas ruang dan momentum anguler spin	264
Gambar 10.4	Diagram tingkat energy atom hidrogen	273
Gambar 11.1	Atom hidrogen, dari sudut pandang elektron	276
Gambar 11.2	Struktur halus hidrogen dengan kopel $(\vec{S} \cdot \vec{L})$	285

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1.	Garis spectrum hidrogen	74
Tabel 4.2.	Nilai m dan n untuk deret semua persamaan deret empiris	75
Tabel 4.3.	Nilai energi dan jari-jari lintasan orbit elektron sistem atom hidrogen	93
Tabel 6.1.	Skema perilaku $\psi(x)$	163
Tabel 8.1.	Beberapa fungsi Laguerre	226
Tabel 8.2.	Beberapa solusi persamaan radial untuk sistem atom hidrogen	227
Tabel 8.3.	Beberapa keadaan kuantum	233

BAB 1

RADIASI TERMAL DAN POSTULAT PLANCK

1. RADIASI TERMAL

Radiasi termal adalah radiasi gelombang elektromagnetik yang dipancarkan oleh permukaan sebuah benda yang intensitasnya berdasarkan temperaturnya. Sebagai contoh, permukaan logam yang dipanaskan maka akan terjadi pemancaran spektrum radiasi dari permukaan logam tersebut. Spektrum cahaya yang dipancarkan akan berubah warna dari merah tua hingga menjadi pijar apabila suhu logam terus ditingkatkan sampai titik leburnya. Perubahan warna tersebut mengindikasikan adanya pergeseran intensitas panjang gelombang cahaya dari harga maksimum ke yang lebih pendek (minimum). Spektrum radiasi termal tersebut telah menarik perhatian para fisikawan pada akhir abad ke-19, terutama karena teori-teori fisika yang ada pada saat itu tidak dapat menerangkan bentuk lengkung kurva radiasi termal tersebut.

Besaran intensitas radiasi termal sebagai fungsi frekuensi atau fungsi panjang gelombang dinamakan spektrum radiasi termal. Dari pengukuran spektrum radiasi termal permukaan suatu benda yang dipanaskan diketahui

2 | Radiasi Termal dan Postulat Planck

bahwa bentuk spektrumnya bergantung dari banyak faktor, seperti:

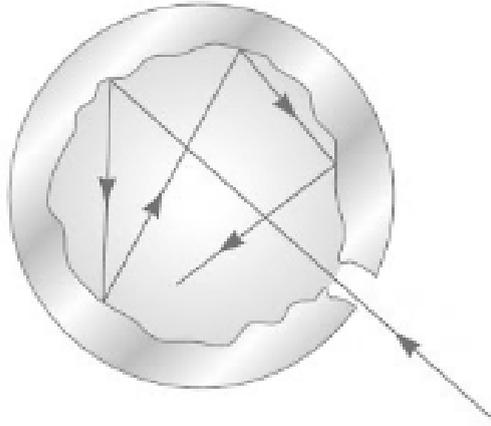
- suhu benda,
- sifat permukaan benda tersebut,
- bahan yang digunakan.

Percobaan-percobaan yang telah dilakukan menunjukkan bahwa pancaran total (meliputi semua panjang gelombang) yang berharga maksimum akan diperoleh apabila permukaan benda tersebut dilapisi dengan arang karbon yang tipis (berwarna hitam). Ditemukan bahwa pada keadaan tersebut spektrum radiasi hanya bergantung dari suhu benda, dan tidak lagi dari faktor-faktor lain seperti: bahan benda dan permukaan benda. Sebagai idealisasi, dalam fisika dikenal sebuah istilah yang disebut sebagai benda hitam sempurna. Benda hitam sempurna (*black body*) adalah suatu objek yang menyerap seluruh radiasi elektromagnetik yang jatuh kepadanya.

Menurut teori termodinamika, jika benda hitam sempurna berpijar, maka benda tersebut akan memberikan pancaran total yang maksimum bila dibandingkan dengan benda-benda lain yang memiliki suhu yang sama. Benda hitam sempurna dapat dimodelkan oleh benda berongga yang memiliki lubang kecil. Perhatikan benda logam yang mempunyai rongga seperti pada Gambar 1.1. Benda tersebut diberi suatu lubang sangat kecil pada dindingnya. Apabila seberkas cahaya berhasil masuk ke dalam rongga

melalui lubang kecil pada dindingnya, maka berkas tersebut akan mengalami pemantulan berkali-kali pada permukaan dinding dalam rongga. Kemungkinan berkas untuk dapat meninggalkan rongga tersebut adalah kecil, sampai akhirnya energi habis terserap. Dengan demikian lubang tersebut, dengan rongga di "belakangnya" merupakan benda hitam sempurna. Apabila lubang tersebut menjadi pemancar, maka pancaran (radiasi) itu pun mempunyai kualitas pancaran benda hitam sempurna.

Lubang akan menjadi pemancar apabila dinding dalam rongga dinaikkan suhunya. Jadi pancaran oleh lubang yang ada pada dinding logam yang berongga secara praktis merupakan pancaran oleh suatu benda hitam sempurna. Dengan menggunakan spektrometer dan dektektor cahaya, dapat diukur radiasi spektral $R_T(f)$ (intensitas) pada suhu T yang dipancarkan oleh suatu benda hitam sempurna. Jika fungsi distribusi radiasi spektral diberi simbol $R_T(f)$, maka $R_T(f)df$ adalah jumlah energi pancaran termal per satuan waktu per satuan luas permukaan benda pemancar, dalam selang frekuensi antara f dan $(f+df)$, dengan suhu permukaan pemancar sebesar T .



Sumber: Serway dan Jewett, 2007

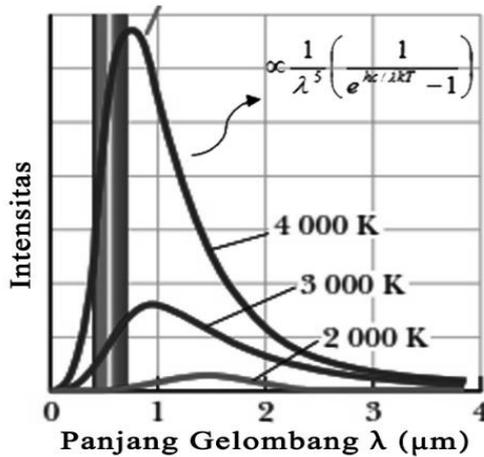
Gambar 1.1 Idealisasi benda hitam sempurna

Gambar 1.2 menunjukkan lengkung kurva distribusi radiasi spektral $R_T(f)$ untuk suatu permukaan hitam sempurna pada beberapa suhu yang berbeda. Lengkung kurva tersebut diperoleh melalui pengukuran hasil eksperimen, bukan digambar dari suatu persamaan teoritik tentang $R_T(f)$.

Pada akhir abad ke-19, para fisikawan tertarik untuk mencari perumusan lengkung radiasi benda hitam sempurna secara teoritis. Karena pada saat itu, lengkung kurva radiasi benda hitam sempurna hanya diperoleh berdasarkan hasil eksperimen. Dengan menggunakan hukum-hukum dan kaedah-kaedah fisika klasik yang telah diketahui, radiasi total (jumlah energi pancaran termal meliputi semua frekuensi per satuan luas per satuan waktu) dapat dirumuskan menjadi:

$$\int_0^{\infty} R_T(f) df = R_T \quad (1.1)$$

Persamaan (1.1) diperoleh melalui integrasi terhadap f dari $f=0$ sampai $f=\infty$. Secara grafik harga tersebut sama dengan luas permukaan di bawah lengkung kurva $R_T(f)$.



Sumber: *Physics for Scientists and Engineers, 2013*

Gambar 1.2 Distribusi radiasi spektral benda hitam sempurna

Dalam pengukuran eksperimental tentang radiasi termal oleh benda-benda hitam sempurna pada berbagai macam suhu T , telah diperoleh beberapa kaedah empiris yang sangat menarik, yaitu:

- a. Hukum Stefan, yang menyatakan bahwa radiasi total suatu benda hitam sempurna berbanding lurus dengan pangkat empat suhu mutlaknya.

$$R_T = \sigma T^4, \text{ dalam Watt/m}^2 \tag{1.2}$$

dengan:

R_T = radiasi total

T = suhu mutlak dalam K

6 | Radiasi Termal dan Postulat Planck

σ = tetapan stefan-boltzmann ($5,67 \times 10^{-8}$ Watt/
 m^2K^4)

Kadang–kadang hukum ini dinamakan juga Hukum Stefan-Boltzmann.

- b. Hukum Pergeseran Wien, yang menyatakan bahwa ada hubungan antara suhu suatu benda hitam sempurna T dan harga λ_{maks} , yaitu panjang gelombang untuk intensitas maksimum $R_T(\lambda)$. Hubungan empirik tersebut adalah:

$$\lambda_{maks}T = 2,898 \times 10^{-3}\text{mK} \quad (1.3)$$

Tetapan $2,898 \times 10^{-3}\text{mK}$ diatas diperoleh secara eksperimental.

Contoh 1.1

(a) Pada panjang gelombang berapakah sebuah benda pada suhu ruang ($T = 20^\circ\text{C}$) memancarkan radiasi termal maksimum? (b) Hingga suhu berapakah benda tersebut harus dipanaskan agar puncak radiasi termalnya berada pada daerah spektrum merah? (c) Berapa kali banyaknya radiasi termal yang dipancarkan benda tersebut pada suhu yang tertinggi?

Penyelesaian:

(a) Diketahui bahwa $T = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$, sehingga diperoleh

$$\lambda_{maks} = \frac{2,898 \times 10^{-3} \text{mK}}{293\text{K}} = 9,89 \mu\text{m}$$

(b) Panjang gelombang cahaya merah adalah $\lambda \cong 650 \text{ nm}$, sehingga diperoleh

$$T = \frac{2,898 \times 10^{-3} \text{mK}}{650 \times 10^{-9} \text{m}} = 4460 \text{ K}$$

(c) Karena intensitas radiasi total berbanding lurus terhadap T^4 , maka perbandingan radiasi termal total adalah

$$\frac{T_2^4}{T_1^4} = \frac{(4460)^4}{(293)^4} = 5,37 \times 10^4$$

Beberapa hal yang berkaitan dengan radiasi termal oleh benda hitam sempurna pada akhir abad ke-19 telah diketahui secara eksperimental, tetapi tidak ada keterangan secara teoretiknya. Hal-hal tersebut adalah:

1. Bentuk lengkung $R_T(f)$,
2. Hukum Stefan-Boltzman mengenai pancaran radiasi total oleh suatu benda hitam sempurna,
3. Hukum pergeseran Wien, mengenai hubungan antara λ_{maks} dan suhu mutlak T .

Ketika fakta eksperimental tentang radiasi termal oleh benda hitam sempurna telah diketahui, sesuatu yang kemudian harus dicari adalah suatu landasan atau kerangka teoretis tentang radiasi termal yang dapat menerangkan fakta-fakta eksperimentalnya. Ini yang merupakan tantangan pada akhir abad ke-19, untuk menerangkan landasan konseptual secara fisika. Pemantapan suatu landasan baru,

yang dapat menerangkan hal-hal yang menyangkut sistem atomik dan sistem sub-atomik, yaitu teori mekanika kuantum, berjalan selama 30 tahun. Masa tersebut ditandai oleh imajinasi dan kreativitas para ahli fisika, dan merupakan suatu periode dalam pengembangan ilmu fisika yang cukup menarik.

2. FENOMENA FISIS DALAM RADIASI BENDA HITAM

Dalam ruang rongga seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.1, gelombang cahaya bergerak dengan kecepatan cahaya c dari satu bagian dinding rongga ke bagian lainnya. Oleh karena itu, selalu ada energi dalam rongga tersebut. Rapat energi pada suhu T dinyatakan dengan oleh $\rho_T(f)$, dimana $\rho_T(f)df$ adalah jumlah energi dalam satu satuan volum dengan frekuensi yang terletak antara f dan $(f+df)$, untuk suatu rongga yang dindingnya bersuhu T .

Analisa tentang pancaran radiasi termal lebih mudah dilakukan melalui pengertian $\rho_T(f)$ daripada $R_T(f)$, oleh karena itu juga pembahasan dalam buku ini digunakan analisa melalui pendekatan $\rho_T(f)$.

Dari pembahasan termodinamika diketahui bahwa dalam keadaan setimbang berlaku hubungan antara radiasi spektral oleh suatu permukaan dan rapat energi dalam volume yang dekat pada permukaan, hubungan tersebut adalah:

$$R_T(f)\Delta f = \frac{c}{4}\rho_T(f)\Delta f \quad (1.4)$$

3. RAPAT MODA GETAR DALAM SUATU RONGGA

Dalam menelaah tentang radiasi termal dalam rongga, khususnya menelaah rapat energi dalam rongga, dianggap bahwa energi berasal dari osilator-osilator yang berada pada permukaan dinding rongga tersebut. Adanya osilator ini merupakan suatu pengandaian, dimana getarannya berkaitan dengan suhu dinding rongga.

Dimisalkan juga bahwa osilator-osilator ini yang memancarkan energi elektromagnetik ke dalam rongga. Untuk menelaah rapat moda getar, digunakan suatu rongga berbentuk kubus dengan sisi a , kemudian dicari rapat moda getar itu dengan mempergunakan syarat batas yang harus dipenuhi oleh vektor kuat medan listrik E pada dinding logam tersebut. Harga E pada dinding logam harus sama dengan nol.

Dalam keadaan setimbang maka dalam rongga logam akan ada gelombang tegak elektromagnetik. Secara umum moda gelombang tegak direpresentasikan sebagai:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \sin(\omega t) \quad (1.5)$$

dengan

\vec{k} = vektor gelombang

\vec{r} = kedudukan dalam ruang

ω = frekuensi radial

t = waktu

sedangkan

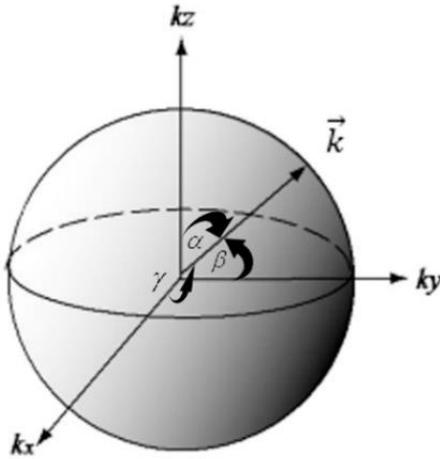
10 | Radiasi Termal dan Postulat Planck

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ adalah panjang gelombang

$\omega = 2\pi f$, adalah frekuensi

$c = \lambda f$, kecepatan rambat cahaya

Misalkan bahwa arah \vec{k} dengan sumbu x , sumbu y , dan sumbu z , adalah masing-masing α , β dan γ , seperti terlihat pada Gambar 1.3.



Sumber: *Thermal Design: Heat Sinks, Thermoelectrics, Heat Pipes, Compact Heat Exchangers and Solar Cells, 2010*

Gambar 1.3 Vektor gelombang dalam ruang 3 dimensi

Berdasarkan permisalan di atas, dapat dituliskan bahwa:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x \cos \alpha + k_y y \cos \beta + k_z z \cos \gamma \quad (1.6)$$

Sedangkan menurut geometri, antara α , β , dan γ terdapat hubungan berikut:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1$$

Dengan menggunakan $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, maka bentuk $\vec{k} \cdot \vec{r}$ dapat pula ditulis menjadi:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \pi \left\{ \frac{(2x \cos \alpha)}{\lambda} + \frac{(2y \cos \beta)}{\lambda} + \frac{(2z \cos \gamma)}{\lambda} \right\} \quad (1.7)$$

Syarat batas yang harus dipenuhi oleh \vec{E} pada dinding-dinding rongga adalah $\vec{E} \equiv 0$.

Untuk $x = 0$, $y = 0$, dan $z = 0$, jelas $\vec{E} = 0$, karena $(\vec{k} \cdot \vec{r}) = 0$, sehingga:

$$\vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \sin(\omega t) = 0 \quad (1.8)$$

Jika $x = a$, $y = a$, dan $z = a$, maka:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \pi \left\{ \frac{(2a \cos \alpha)}{\lambda} + \frac{(2a \cos \beta)}{\lambda} + \frac{(2a \cos \gamma)}{\lambda} \right\} \quad (1.9)$$

Persamaan (1.9) harus berharga nol baik untuk gelombang sebagai keseluruhan, maupun untuk setiap komponen gelombang itu dalam arah x , y , maupun z . Agar hal itu terjadi syarat yang diperlukan adalah:

$$\frac{(2a \cos \alpha)}{\lambda} = n_x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{(2a \cos \beta)}{\lambda} = n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{(2a \cos \gamma)}{\lambda} = n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Apabila hal itu dipenuhi, maka pasti:

$$(\vec{k} \cdot \vec{r}) = \pi(n_x + n_y + n_z) \quad (1.10)$$

akan berharga

$$(\vec{k} \cdot \vec{r}) = n\pi; \text{ dengan } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

dan syarat batas untuk \vec{E} pun terpenuhi.

Hal diatas memberikan bahwa:

$$\cos \alpha = \frac{n_x \lambda}{2a}$$

$$\cos \beta = \frac{n_y \lambda}{2a}$$

$$\cos \gamma = \frac{n_z \lambda}{2a}$$

yang harus memenuhi syarat geometri:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Berdasarkan hubungan di atas, maka dapat ditulis:

$$\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 [n_x^2 + n_y^2 + n_z^2] = 1 \quad (1.11)$$

atau

$$f = \frac{c}{2a} [n_x^2 + n_y^2 + n_z^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.12)$$

Jika dimisalkan:

$$n^2 \equiv [n_x^2 + n_y^2 + n_z^2]$$

maka

$$f = \frac{c}{2a} [n_x^2 + n_y^2 + n_z^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{2a} n \quad (1.13)$$

perlu diperhatikan bahwa n tidak perlu bilangan bulat, tetapi ditentukan oleh harga n_x , n_y , dan n_z .

Satu moda getar ditandai oleh perangkat bilangan (n_x , n_y , n_z). Misalkan (n_x , n_y , n_z) dinyatakan oleh (1,0,0), maka hal ini merepresentasikan suatu gelombang tegak dalam arah x dengan panjang gelombang $2a$. Jadi menghitung jumlah getar dapat dilakukan dengan menghitung banyaknya jumlah perangkat (n_x , n_y , n_z) tentunya ini dapat meningkat menjadi ∞ .

Yang lebih relevan adalah mencari jumlah mode getar yang mempunyai frekuensi antara f dan $(f+\Delta f)$, dimana:

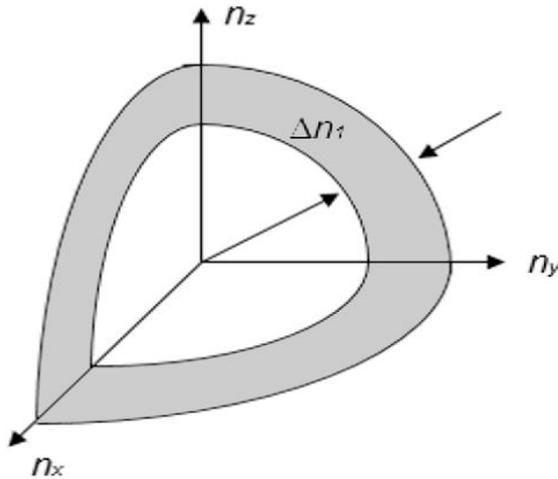
$$n_1 = (nx^2 + ny^2 + nz^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f = \frac{c}{2a} n_1 \quad (1.14)$$

$$\Delta f = \frac{c}{2a} \Delta n_1 \quad (1.15)$$

Jumlah moda getar yang terletak antara f dan $(f+\Delta f)$ sama besar dengan jumlah titik dalam ruang (n_x , n_y , n_z) yang

terletak dalam $\frac{1}{8}$ kulit bola dengan jari-jari n_1 dan tebal Δn_1 , seperti terlihat pada Gambar 1.4. Pendekatan ini telah dikenal dalam fisikastatistik.



Gambar 1.4 Elemen volume dalam ruang mode getar berupa kulit bola.

Jumlah titik tersebut adalah:

$$N_1(n_1)\Delta n_1 = \frac{1}{8} 4\pi n_1^2 \Delta n_1$$

Hal itu dapat dinyatakan dalam f dengan menggunakan hubungan pada Persamaan (1.14) dan (1.15), sehingga menjadi:

$$N_1(f)\Delta f = \frac{1}{8} 4\pi f^2 \left(\frac{2a}{c}\right)^3 \Delta f = \frac{4\pi a^3}{c^3} f^2 \Delta f \quad (1.16)$$

Tetapi volume rongga adalah $v = a^3$, sedangkan setiap getaran di atas memiliki 2 arah polarisasi. Oleh karena itu

jumlah getaran per satuan volume dengan frekuensi antara f dan $(f+\Delta f)$ adalah:

$$n(f)\Delta f = \frac{N_1(f)\Delta f}{a^3} = \frac{8\pi}{c^3} f^2 \Delta f \quad (1.17)$$

$n(f)$ adalah rapat moda getar gelombang elektromagnetik dalam rongga.

Salah satu cara untuk memperoleh rapat energi $\rho_T(f)$ adalah dengan memperhatikan $n(f)$ dimana energi rata-rata satu moda getar $\bar{\epsilon}$, sehingga diperoleh:

$$\rho_T(f) = \bar{\epsilon} n(f) \quad (1.18)$$

Rapat energi $\rho_T(f)$ diukur secara eksperimental sedangkan rapat moda getar $n(f)$ diperoleh berdasarkan teori medan elektromagnet, dan energi rata-rata satu moda getar $\bar{\epsilon}$ ditentukan secara teoritik dengan persamaan di atas.

4. RUMUS RAYLEIGH-JEANS UNTUK RADIASI TERMAL

Rayleigh dan Jeans menggunakan teori ekuipartisi energi untuk menentukan energi rata-rata satu moda getar $\bar{\epsilon}$. Osilator mempunyai dua derajat kebebasan, oleh karena itu energi rata-rata per osilator adalah:

$$\bar{\epsilon} = 2 \left(\frac{1}{2} \right) k_B T = k_B T \quad (1.19)$$

Dengan

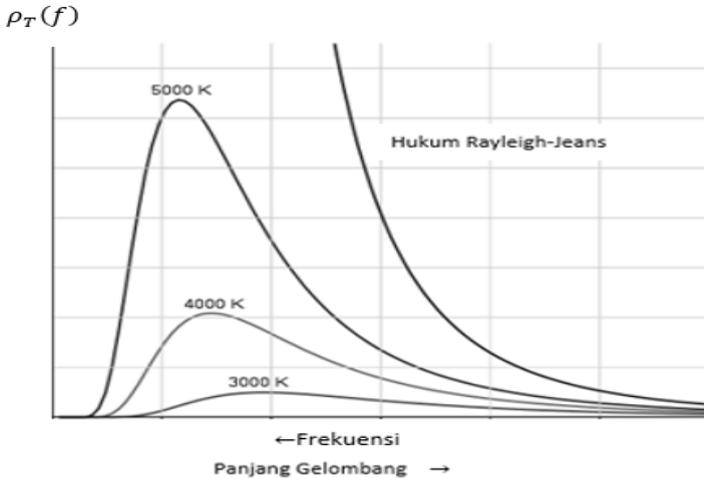
k_B = Tetapan Boltzmann

T = Suhu Mutlak

Setiap osilator berkaitan dengan satu moda getar, oleh karena itu rapat mode getar menjadi:

$$\rho_T(f) = \bar{\varepsilon} n(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3} k_B T \quad (1.20)$$

Apabila persamaan di atas digambarkan dalam bentuk grafik, maka akan diperoleh data statistik seperti pada Gambar 1.5.



Sumber: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Black_body.svg, 2010

Gambar 1.5 $\rho_T(f)$ menurut Reyleigh-Jeans

Pada Gambar 1.5 diatas, terlihat spektrum radiasi benda hitam untuk tiga suhu yang berbeda, yaitu 3000 K, 4000 K dan 5000 K. Diketahui bahwa puncak dari setiap kurva berpindah seiring dengan perubahan suhu. Pada frekuensi yang rendah, kurva teoritis rapat energi menurut Jeans dan Reyleigh berimpit dengan kurva secara

eksperimen. Tetapi pada frekuensi tinggi, kurva teoritis menyimpang sangat jauh dari kurva eksperimen.

Berdasarkan teori klasik yang dibangun oleh Rayleigh dan Jeans, jika f makin besar maka $\rho_T(f)$ juga makin besar, dan akan mendekati harga ∞ jika $f \rightarrow \infty$. Hal ini bertentangan dengan hasil eksperimen. Penyimpangan yang besar terjadi pada frekuensi yang tinggi sehingga penyimpangan ini dinamakan bencana ultraviolet (*UV catastrophe*).

Reyleigh-Jeans yang menggunakan teori ekuipartisi energi untuk menetapkan energi rata-rata per osilator $\bar{\epsilon}$, tidak memberikan hasil teoritik yang sesuai dengan eksperimen. Salah satu jalan keluar untuk mengatasi kebuntuan tersebut adalah dengan membuat anggapan bahwa pada getaran osilator tidak berlaku teori ekuipartisi energi. Anggapan tersebut sangat revolusioner pada saat itu, terutama karena teori tersebut, teori kinetik gas cukup mantap. Dapat pula dibuktikan secara eksperimental bahwa distribusi kecepatan Maxwell-Boltzmann berlaku bagi gas.

Langkah untuk tidak memberlakukan teori ekuipartisi pada getaran osilator dalam teori radiasi termal ternyata membuka suatu era baru bagi fisika. Era yang merupakan peralihan dari fisika klasik ke fisika modern yang dapat menerangkan peristiwa dan gejala fisika pada tingkat atom atau sub-atom. Era ini dimulai dari hipotesis yang dinyatakan oleh Planck yang bertentangan dengan teori klasik tentang gelombang elektromagnetik. Planck menyatakan sifat radiasi

adalah terkuantisasi atau diskrit, artinya energi radiasi hanya dapat ada dalam bentuk-bentuk paket energi tertentu dimana jumlah energi dalam setiap paket berbanding lurus dengan frekuensi energi radiasi itu.

5. RADIASI TERMAL MENURUT PLANCK

Untuk dapat sampai pada ungkapan teoritik tentang radiasi termal, Planck mengandaikan hal-hal berikut tentang osilator-osilator yang menjadi sumber energi pancaran termal, yaitu:

- a. Energi yang dapat dimiliki osilator tersebut tidak kontinu, melainkan berharga diskrit, yaitu kelipatan dari hf

$$\varepsilon = 0, hf, 2hf, 3hf, \dots, nhf \quad (1.21)$$

Dalam ungkapan tersebut h adalah suatu tetapan (yang kemudian dinamakan tetapan Planck), sedangkan f adalah frekuensi getaran.

- b. Sebaran energi osilator mematuhi distribusi Boltzmann, yaitu bahwa kemungkinan suatu osilator mempunyai energi antara ε dan $(\varepsilon + \Delta\varepsilon)$ adalah

$$\rho(\varepsilon)\Delta\varepsilon = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{k_B T} \Delta\varepsilon \quad (1.22)$$

Dengan k_B adalah tetapan Boltzmann ($1,3807 \times 10^{-23}$ J/K) dan T adalah suhu dinding.

Pengandaian poina di atas kurang masuk akal pada saat itu karena teori medan tidak mengenal kuantisasi energi. Hal ini merupakan suatu konsep yang baru.

Kuantisasi di akhir abad ke-19 sesungguhnya bukan hal yang baru, karena sudah dikenal bahwa materi itu terkuantisasi dalam atom dan molekul, demikian pula muatan listrik terkuantisasi dalam elektron-elektron.

Kita gunakan kedua pengandaian tersebut untuk menentukan $\bar{\varepsilon}$ yang sesuai dengan hipotesis Planck. Prosesnya memerlukan manipulasi aljabar yang cukup menarik. Energi rata-rata per osilator dapat dituliskan menjadi:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{nhf}{k_B T}}}{k_B T} nhf}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{nhf}{k_B T}}}{k_B T}} \quad (1.23)$$

Disini tidak digunakan integrasi karena spektrum energinya diskrit, tidak kontinu.

Dengan memisalkan $\alpha = \frac{hf}{k_B T}$, maka ungkapan diatas menjadi:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} n\alpha}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_B T} e^{-n\alpha}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} k_B T$$

Dengan mengevaluasi terlebih dahulu $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}, \text{ karena } e^{-\alpha} < 1 \quad (1.24)$$

Kemudian mengevaluasi $\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}$,

$$\frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = -n \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$$

dengan demikian, maka:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha} = -\alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \quad (1.25)$$

Akan tetapi $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = [1 - e^{-\alpha}]^{-1}$, sehingga:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha} &= -\alpha \frac{d}{d\alpha} [1 - e^{-\alpha}]^{-1} \\ &= \frac{\alpha e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Sehingga Persamaan (1.23) dapat ditulis menjadi:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\frac{\alpha e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2}}{\frac{1}{1 - e^{-\alpha}}} k_B T = \frac{\alpha e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})} k_B T \quad (1.27)$$

Karena $\alpha = \frac{hf}{k_B T}$, maka:

$$\bar{\epsilon} = \frac{hf}{(e^{hf/k_B T} - 1)} \quad (1.28)$$

Apabila diambil harga rata-rata energi osilator di atas, maka rapat energi (energi per satuan volume per satuan frekuensi) di dalam rongga menjadi:

$$\rho_T(f)\Delta f = \bar{\varepsilon}n(f)\Delta f = \frac{hf}{(e^{hf/k_B T} - 1)} \frac{8\pi}{c^3} f^2 \Delta f$$

$$\rho_T(f)\Delta f = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{(e^{hf/k_B T} - 1)} \Delta f \quad (1.29)$$

Ungkapan teoritik ditetapkan dengan menggunakan beberapa hal sebagai berikut:

- Menentukan jumlah moda getar dalam satuan volume rongga dengan menggunakan teori medan elektromagnetik khususnya tentang syarat-syarat yang harus di penuhi suatu gelombang dalam rongga yang ber dinding logam.
- Mengandaikan bahwa setiap moda getar dalam ruang rongga berkaitan dengan satu osilator yang ada pada permukaan dinding logam.
- Mengandaikan bahwa energi osilator hanya dapat memiliki harga yang diskrit, yaitu:

$$\varepsilon = 0, hf, 2hf, 3hf, \dots, nhf$$

- Mengandaikan bahwasebaran energi osilator mengikuti distribusi Boltzmann dimana probabilitas suatu isolator yang mempunyai energi antara ε dan $(\varepsilon + d\varepsilon)$ adalah:

$$P(\varepsilon)\Delta\varepsilon = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{k_B T} \Delta\varepsilon \quad (1.30)$$

Lengkung kurva teoritik yang diperoleh menggunakan hal-hal diatas sangat sesuai dengan data-data eksperimental tentang radiasi spektral oleh benda hitam sempurna. Kurva

yang ditarik berdasarkan rumus teoritik diatas berimpit dengan kurva yang di peroleh melalui hasil eksperimen.

Berdasarkan metode ilmiah yang biasa digunakan dalam fisika, pengandaian–pengandaian oleh Planck dan Einstein mengenai hakikat dari radiasi termal adalah benar, dan perangkat pengandaian tersebut dikenal sebagai postulat Planck. Hasil penelitian Planck dapat dirumuskan sebagai postulat Planck yaitu bahwa energi osilator harmonik dengan frekuensi f , terbatas pada harga-harga yang merupakan kelipatan dari hf yang bersifat diskrit. Planck menyebut satuan dasar energi hf tersebut sebagai “kuanta” atau “kuantum”.

Tetapan plank h kemudian diukur dengan teliti dan menghasilkan harga $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s. Tetapan Planck h sering dijumpai dalam ungkapan-ungkapan teori kuantum, dan boleh dikatakan merupakan ciri dari ungkapan-ungkapan fisika kuantum. Planck mengajukan konsep kuantisasi energi yang dapat dimiliki oleh osilator-osilator harmonik pada permukaan logam, dan bahwa energi dalam rongga tetap berbentuk gelombang. Selanjutnya Einstein menyarankan gagasan bahwa dalam ruang rongga, energi elektromagnetik juga berbentuk gumpalan energi yang kemudian dinamakan foton. Gagasan ini dilancarkan untuk dapat menerangkan efek fotolistrik (1905).

Planck mengajukan hipotesanya pada tanggal 14 Desember 1900 dalam suatu pertemuan ilmiah.

Hipotesisnya yang secara fundamental mengubah pandangan klasik ini, kemudian memberikan suatu penjelasan tentang landasan fisika untuk sistem atomik dan sub-atomik. Jadi 30 tahun sesudah hipotesis Planck, teori kuantum memperoleh bentuknya yang kita kenal sampai sekarang. Atas sumbangannya pada ilmu fisika, Max Planck memperoleh hadiah Nobel di tahun 1918.

Postulat Planck melandasi bentuk lengkung kurva rapat energi dalam rongga. Kesesuaian antara lengkung kurva ini dengan data eksperimental merupakan dukungan kuat dari postulat Planck. Selain itu, teori tersebut dapat diuji pada dua hukum eksperimental empiris, yaitu Hukum Stefan-Boltzmann dan Hukum Pergeseran Wien.

Contoh 1.2

Nyatakan densitas energi spektral untuk radiasi benda hitam berikut dalam panjang gelombang

$$\rho_T(f)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{(e^{hf/k_B T} - 1)} df$$

Penyelesaian:

Diketahui bahwa persamaan panjang gelombang

$$f = \frac{c}{\lambda} \rightarrow df = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

Selanjutnya, karena penambahan panjang gelombang diiringi dengan pengurangan frekuensi, maka

$$\rho_T(f)df = -\rho_T(\lambda)d\lambda$$

Melalui substitusi persamaan di atas ke persamaan $\rho_T(f)df$, maka diperoleh

$$\rho_T(\lambda)d\lambda = \frac{(8\pi hc\lambda^5)}{(e^{hf/k_B T} - 1)} d\lambda$$

6. HUKUM STEFAN-BOLTZMANN

Pada tahun 1879, Josef Stefan, ahli fisika dari Austria, melakukan eksperimen dengan tujuan untuk mengetahui sifat umum dari radiasi benda hitam. Josef Stefan menemukan bahwa daya total per satuan luas yang dipancarkan pada semua frekuensi oleh suatu benda hitam panas (intensitas total) adalah sebanding dengan pangkat empat dari suhu mutlaknya. Sehingga dapat dirumuskan menjadi:

$$I = e\sigma T^4 \quad (1.31)$$

Dimana I adalah intensitas radiasi pada permukaan benda hitam pada semua frekuensi, T adalah suhu mutlak benda, dan σ adalah tetapan Stefan-Boltzmann, yang bernilai $5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$. Seperti terlihat pada Gambar 1.6, diperlihatkan spektrum cahaya yang dipancarkan benda hitam sempurna pada beberapa suhu yang berbeda. Grafik tersebut memperlihatkan bahwa antara panjang gelombang yang diradiasikan dengan suhu benda memiliki hubungan yang sangat rumit. Untuk kasus benda panas yang bukan merupakan benda hitam, akan memenuhi hubungan yang

sama, hanya saja koefisien emisivitas yang dimiliki oleh benda tersebut lebih kecil daripada 1.

Intensitas merupakan daya per satuan luas, maka persamaan daya radiasi P dapat ditulis sebagai:

$$P = \frac{Q}{t} = e\sigma AT^4 \quad (1.32)$$

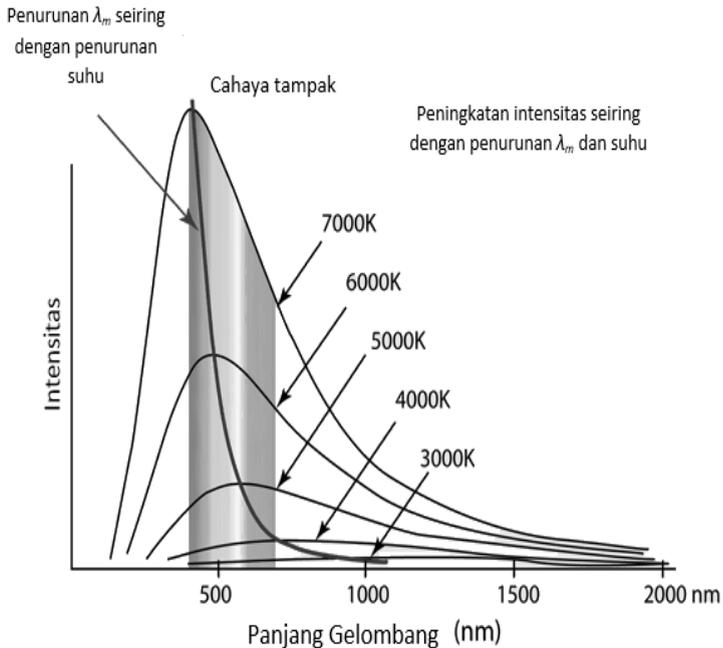
dengan:

Q = energi kalor (J)

A = luas permukaan benda (m^2)

e = koefisien emisivitas

T = suhu mutlak (K)



Sumber: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/wien.html>

Gambar 1.6 Hubungan intensitas dan panjang gelombang radiasi benda hitam

Beberapa tahun kemudian, berdasarkan teori gelombang elektromagnetik cahaya, Ludwig Boltzmann (1844-1906) secara teoritis menurunkan hukum yang diungkapkan oleh Joseph Stefan (1853-1893) dari gabungan termodinamika dan persamaan-persamaan Maxwell. Oleh karena itu, persamaan diatas dikenal juga sebagai Hukum Stefan-Boltzmann, yang menyatakan bahwa jumlah energi yang dipancarkan per satuan permukaan sebuah benda hitam dalam satuan waktu akan berbanding lurus dengan pangkat empat suhu termodinamikanya.

Contoh 1.3

Bandingkan laju radiasi kalor per satuan luas badan anda dengan yang diradiasikan oleh sebuah kursi dengan emisivitas yang sama. Anggap suhu badan anda 37°C dan suhu kursi 17°C .

Penyelesaian:

Laju radiasi kalor per satuan luas benda (sama dengan intensitas radiasi) dinyatakan oleh persamaan

$$P = e\sigma AT^4$$

$$T_b = (37 + 273)\text{K} = 310 \text{ K}$$

$$T_k = (17 + 273)\text{K} = 290 \text{ K}$$

Perbandingan daya radiasi badan dan kursi per satuan luas adalah:

$$\frac{\text{Intensitas radiasi badan}}{\text{Intensitas radiasi kursi}} = \frac{e\sigma AT_b^4}{e\sigma AT_k^4} = \frac{T_b^4}{T_k^4} = 1,30$$

7. HUKUM PERGESERAN WIEN

Untuk sebuah benda hitam, berlaku suatu hubungan antara panjang gelombang dengan suhu mutlak yang dinyatakan sebagai:

$$\lambda_m T = C \quad (1.33)$$

Dengan λ_m merupakan panjang gelombang yang sesuai dengan radiasi energi maksimum, T adalah suhu benda, dan C adalah tetapan pergeseran Wien yaitu sebesar $2,898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$. Hubungan tersebut disebut Hukum pergeseran Wien, yang dinyatakan oleh Wilhelm Wien (1864-1928).

Pada Gambar 1.6 di atas diperlihatkan grafik hubungan antara intensitas radiasi dan panjang gelombang radiasi benda hitam ideal pada lima suhu yang berbeda. Grafik ini dikenal sebagai grafik distribusi spektrum. Intensitas merupakan daya yang dipancarkan per satuan panjang gelombang. Ini merupakan fungsi panjang gelombang λ maupun suhu T , dan disebut distribusi spektrum.

Dari grafik terlihat bahwa puncak kurva penyebaran energi spektrum bergeser ke arah ujung spektrum panjang gelombang yang lebih pendek dengan semakin tingginya suhu. Perubahan warna pada benda menunjukkan perubahan intensitas radiasi benda. Melalui persamaan yang dikembangkan Wien mampu menjelaskan distribusi intensitas untuk panjang gelombang yang pendek, namun gagal untuk menjelaskan untuk panjang gelombang yang panjang. Hal itu menunjukkan bahwa radiasi elektromagnetik tidak dapat dianggap sederhana seperti proses termodinamika.

SOAL LATIHAN

1. Perhatikan bahwa hukum radiasi Planck dan hukum radiasi Rayleigh-Jeans identik pada frekuensi rendah atau temperatur tingg.
2. Perkirakan suhu permukaan matahari dari beberapa informasi berikut. Jari-jari matahari adalah $R_m = 2,0 \times 10^8$ m. Rata-rata jarak bumi-matahari adalah $R = 1,5 \times 10^{11}$ m. Daya per satuan luas (pada semua frekuensi) dari matahari diukur di bumi adalah 1400 W/m^2 . Anggap bahwa matahari adalah benda hitam.
3. Hukum pergeseran Wien dapat digunakan untuk mengukur suhu permukaan sebuah bintang. Dengan melakukan pengukuran rapat intensitas radiasi yang dipancarkan oleh bintang itu untuk berbagai panjang

gelombang, maka kita bisa memperoleh grafik untuk bintang yang kita amati. Dari grafik itu kita mendapatkan λ_{maks} . Andaikan spektrum sebuah bintang memiliki $\lambda_{maks} = 5,0 \times 10^{-7} \text{ m}$.

- (a) Berapakah suhu pada permukaan bintang itu?
 - (b) Berapakah intensitas radiasi keseluruhan yang dipancarkan oleh bintang itu bila emisivitas-nya 1?
 - (c) Dapatkah kita perkirakan jaraknya dari bumi bila I merupakan intensitas bintang itu diukur di permukaan bumi?
4. Balok bermassa 2 kg menempel pada ujung sebuah pegas tak bermassa. Pegas tersebut memiliki konstanta pegas $k = 25 \text{ N/m}$. Pegas diregangkan sepanjang 0,4 m dari titik kesetimbangan dan di lepaskan dari keadaan diam.
- (a) Tentukan energi total dari sistem dan frekuensi osilasi berdasarkan perhitungan klasik.
 - (b) Anggap energi osilator terkuantisasi, tentukan nomor kuantum n untuk sistem yang berosilasi tersebut.
5. Anggap matahari mengantarkan daya rata-rata persatuan luas sekitar $1,00 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ ke permukaan matahari.
- (a) Tentukan daya total yang sampai pada atap timah datar $8,00 \text{ m} \times 20,0 \text{ m}$. Anggap radiasi mengenai atap secara tegak lurus.
 - (b) Jika atap memantulkan sebagian radiasi dan terjadi pengantaran panas secara konduksi, konveksi dan

radiasi sampai terjadi kesetimbangan termal. Jika atap adalah benda hitam sempurna dan hanya menyimpan panas sebesar setengah dari radiasi yang datang melalui radiasi termal, berapakah suhu kesetimbangannya? Anggap suhu lingkungan adalah 298 K.

BAB 2

TEORI KUANTUM EINSTEIN

1. EFEK FOTOLISTRIK DAN TEORI KUANTUM CAHAYA

Dalam tahun 1870 Maxwell mengusulkan landasan teori mengenai listrik dan magnet. Teori tersebut terdiri atas 4 persamaan fundamental yang merangkum semua pengetahuan tentang listrik dan magnet pada saat itu. Persamaan-persamaan tersebut adalah:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad (2.4)$$

Dalam perangkat persamaan-persamaan diatas, \vec{E} dan \vec{B} merepresentasikan dua besaran pokok listrik dan magnet, yaitu kuat medan listrik \vec{E} dan induksi magnetik \vec{B} , sedangkan ρ dan \vec{J} mempresentasikan sumber medan-medan tersebut, yaitu muatan listrik ruang ρ dan rapat arus listrik \vec{J} .

Kontribusi besar Maxwell tentang perkembangan teori listrikan dan kemagnetan adalah keberhasilannya dalam menyatukan semua kaidah yang dikenal di bidang listrik dan

magnet. Landasan yang digunakan Maxwell adalah dengan mengelaborasi apa yang telah dirumuskan oleh Faraday (1791-1867). Berdasarkan persamaan-persamaan fundamental tersebut, Maxwell memperoleh sebuah solusi yang berupa persamaan gelombang. Berdasarkan hal tersebut maka muncul ramalan tentang adanya gelombang elektromagnetik, sesuatu yang belum teramati oleh para ilmuwan pada saat itu.

Selanjutnya, Heinrich Hertz (1857-1894) menyelidiki implikasi eksperimental dari persamaan-persamaan Maxwell. Hasil percobaan Herz pada sekolah tinggi teknik di Karlsruhe, menunjukkan adanya gelombang elektromagnetik. Berdasarkan karakteristik yang dimiliki selanjutnya, cahaya dapat diidentifikasi sebagai gelombang elektromagnetik. Sifat-sifat cahaya sebagai gelombang pada dasarnya telah ditemukan oleh ilmuwan sebelumnya, sekitar tahun 1871, seperti persamaan Young dan difraksi.

Meskipun penemuan sifat cahaya sebagai gelombang telah lama diketahui, namun baru sekitar abad ke-19, ada beberapa percobaan tentang cahaya dan listrik yang sulit dijelaskan dengan sifat gelombang dapat dijelaskan. Pada tahun 1888, dari hasil pengamatan Hallwachs terhadap keping logam Zn yang akan kehilangan muatan listrik negatifnya ketika disinari dengan cahaya ultraviolet, namun demikian jika muatan keping itu mula-mula positif, maka keping tidak mengalami kehilangan muatan. Hasil

eksperimen yang lain menunjukkan jika keping tidak bermuatan (netral) maka akan memperoleh muatan positif apabila disinari. Berdasarkan fakta-fakta tersebut dapat disimpulkan bahwa cahaya ultraviolet mampu melesatkan muatan listrik negatif dari permukaan keping logam yang netral. Gejala ini dinamakan efek fotolistrik.

Fenomena untuk menjelaskan efek foto listrik sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2.1. Instrumen yang diperlukan untuk menggambarkan fenomena ini terdiri atas tabung hampa udara yang dilengkapi dengan dua elektroda T dan C dan dihubungkan dengan sumber tegangan arus searah (DC). Pada keadaan awal ketika tidak ada penyinaran apapun, kondisi amperemeter tidak menunjukkan adanya arus listrik. Selanjutnya pada saat permukaan target T (Katoda) disinari dengan frekuensi tertentu maka amperemeter menunjukkan adanya arus listrik, yang memberi indikasi adanya aliran arus listrik. Aliran arus ini terjadi karena adanya elektron yang terlepas dari permukaan T bergerak menuju kolektor C (yang selanjutnya disebut elektron foto).

Apabila sumber tegangan diperkecil maka sedikit demi sedikit, arus listrik juga semakin mengecil dan jika tegangan terus diperkecil sampai nilainya negatif, ternyata pada saat tegangan mencapai nilai tertentu ($-V_0$), amperemeter menunjuk angka nol yang berarti tidak ada arus listrik yang mengalir atau tidak ada elektron yang keluar dari keping T .

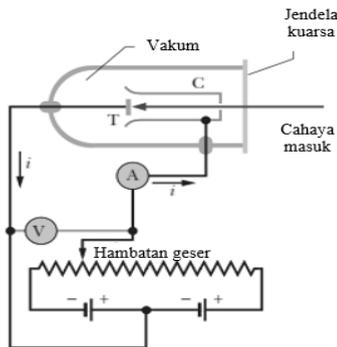
Potensial V_0 ini disebut sebagai potensial henti, yang nilainya tidak tergantung pada intensitas cahaya menyinari.

Beberapa hasil pengamatan mengenai efek fotolistrik adalah sebagai berikut:

- Energi kinetik elektron tidak bergantung pada intensitas cahaya. Energi kinetik dapat diukur secara eksperimen melalui hubungan:

$$EK = eV_0 \quad (2.5)$$

- Jika dibuat grafik besar potensial henti sebagai fungsi dari frekuensi cahaya yang digunakan untuk menyinari permukaan katoda, maka diperoleh suatu garis lurus. Hal ini menunjukkan bahwa untuk setiap macam bahan katoda, terdapat suatu harga frekuensi f_0 tertentu (frekuensi ambang), dimana bila digunakan frekuensi cahaya di bawah harga tersebut maka efek fotolistrik tidak lagi terjadi (pengamatan Millikan di tahun 1914 dan mendapat hadiah nobel di tahun 1923).



Sumber: *Fundamental of Physics Halliday & Resnick 10th Ed., 2014*

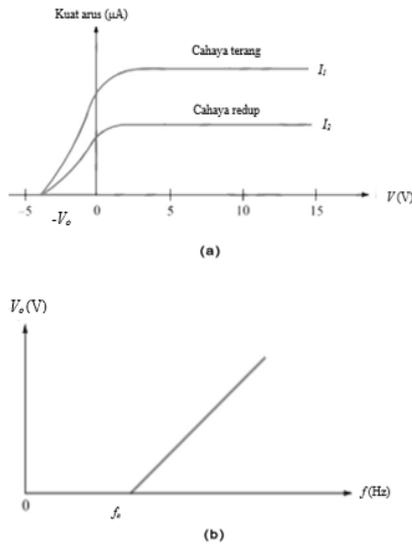
Gambar 2.1 Efek Foto Listrik

Penjelasan dari fenomena dari kedua pengamatan itu secara grafik dapat ditunjukkan pada Gambar 2.2. Kedua sketsa tersebut sangat penting untuk menjelaskan konsep dan rumusan pengertian mengenai paket energi cahaya atau dikenal dengan sebutan foton. Pada Gambar 2.2a, ditunjukkan bahwa V_0 tidak bergantung pada intensitas cahaya yang digunakan, hal ini berarti energi kinetik elektron yang mengalir juga tidak dipengaruhi oleh intensitas cahaya. Penggunaan intensitas cahaya yang lebih besar hanya akan memperbesar kuat arus yang dihasilkan, yang menandakan semakin banyak elektron yang mengalir.

Gambar 2.2b dapat menjelaskan bahwa elektron dapat terlepas pada frekuensi tertentu, sehingga disimpulkan bahwa ketika frekuensi yang digunakan adalah f_0 (frekuensi ambang) telah tercapai, maka dihasilkan energi kinetik minimum (nol) dari elektron. Selanjutnya energi kinetik elektron akan terus bertambah jika frekuensi yang digunakan lebih besar dari f_0 , dan tidak ada efek fotolistrik yang teramati jika frekuensi yang digunakan lebih kecil dari f_0 . Grafik eksperimental yang diperoleh oleh Millikan untuk katoda dengan permukaan natrium, frekuensi potongnya adalah sekitar $4,39 \times 10^{14}$ Hz.

Berdasarkan percobaan tersebut, Terdapat dua fakta eksperimental yang ternyata tidak dapat diterangkan dengan menggunakan teori gelombang cahaya, yaitu:

- a. Bahwa EK elektron besarnya ditentukan melalui pengukuran V_0 , dan tidak bergantung dari intensitas cahaya. Sedangkan menurut teori gelombang, vektor medan listrik \vec{E} dari gelombang cahaya yang dipergunakan akan bertambah besar apabila intensitas ditingkatkan. Oleh sebab itu, gaya $e\vec{E}$ pada elektron juga bertambah. Berdasarkan teori gelombang, energi kinetik EK juga bertambah apabila intensitas ditingkatkan, namun secara eksperimen hal itu tidak terpenuhi.
- b. Bahwa terdapat suatu frekuensi ambang f_0 , dimana pada semua frekuensi $f < f_0$ ternyata efek fotolistrik tidak terjadi meskipun intensitas sinar yang dipergunakan tinggi. Menurut teori gelombang, efek fotolistrik dapat terjadi untuk semua frekuensi asal intensitas cahaya cukup besar untuk melesatkan elektron keluar dari katoda. Hal ini juga tidak dapat dipenuhi secara eksperimental.



Sumber: *Modern Physics for Science and Engineering*, 2012.

Gambar 2.2 (a) Grafik kuat arus terhadap frekuensi pada intensitas cahaya yang berbeda. (b) Grafik potensial henti terhadap frekuensi

Dalam menerangkan fakta eksperimental tentang efek fotolistrik dengan teori yang baru, cahaya tidak dapat dianggap sebagai gelombang. Konsep tersebut merupakan representasi dari teori kuantum Einstein. Namun demikian dalam postulat Planck yang mengkuantisasi energi sebagai osilator, tetapi tetap memandang radiasi termal dalam rongga sebagai gejala gelombang. Agar efek fotolistrik dapat dijelaskan, maka Einstein memperluas konsep kuantisasi Planck. Dalam hal ini Einstein menggambarkan bahwa apabila suatu osilator dengan energi (nhf) pindah ke suatu keadaan dengan energi $[(n - 1)hf]$, maka osilator

tersebut memancarkan suatu paket energi elektromagnetik (foton). Dimana h merupakan konstanta Planck.

Menurut pandangan Einstein, terdapat beberapa karakteristik dari foton dalam proses fotolistrik, yaitu:

- a. Foton tidak meluas dalam ruang seperti gelombang, pada saat meninggalkan permukaan dinding rongga melainkan tetap terpusat (terkonsentrasi) dalam suatu volume yang sangat kecil.
- b. Foton merambat dengan kecepatan c .
- c. Paket energi foton terkait dengan frekuensi dari gelombang cahaya sesuai dengan hubungan $E = hf$.
- d. Dalam proses fotolistrik, sebuah foton secara keseluruhan diserap oleh elektron yang ada di permukaan logam.

Dari penjelasan di atas, jelas sekali bahwa di sini konsep gelombang tidak dipergunakan.

Teori kuantum Einstein digunakan untuk menjelaskan gejala fotolistrik. Hukum kekekalan energi apabila dipergunakan dalam proses fotolistrik, akan menghasilkan hubungan sebagai berikut:

$$hf = EK + W \quad (2.6)$$

Energi elektromagnetik dalam bentuk foton hf yang menumbuk permukaan katoda, kemudian diserap oleh elektron yang berada pada permukaan katoda tersebut. Seluruh energi foton diserap oleh satu buah elektron, apabila energi yang terserap hf cukup besar maka elektron akan

mampu untuk meninggalkan permukaan katoda. Dalam kejadian ini diperlukan energi untuk mengatasi gaya-gaya di permukaan katoda sebesar W . Selisih antara energi yang diserap hf dan energi yang diperlukan untuk mengatasi gaya permukaan W , akan menjadi energi kinetik elektron EK , seperti yang ditunjukkan oleh Persamaan (2.6). W adalah energi yang diperlukan elektron untuk melawan gaya tarik oleh ion-ion logam di permukaan dan energi kinetik yang hilang karena tumbukan-tumbukan elektron tersebut dalam logam. Apabila gaya tarik-menarik tersebut minimum dan juga tidak ada energi kinetik yang hilang karena tumbukan, maka W dapat dituliskan menjadi W_0 . W_0 adalah harga terendah untuk W .

Ketika W berharga minimum, W_0 , maka tentunya energi kinetik elektron akan berharga maksimum EK_{maks} . Hukum kekekalan energi akan memberikan:

$$hf = EK_{maks} + W_0 \quad (2.7)$$

W_0 disebut sebagai fungsi kerja bahan katoda yang bersangkutan, harganya khas untuk setiap macam logam.

Besarnya EK secara eksperimental dapat diukur melalui penentuan potensial henti V_0 . Karena energi kinetik dapat dituliskan seperti pada Persamaan (2.5), maka:

$$hf = eV_0 + W_0$$

atau

$$eV_0 = hf - W_0 \quad (2.8)$$

Berdasarkan persamaan tersebut terdapat hubungan yang linier antara V_0 dan f , seperti yang secara eksperimental diperoleh oleh Millikan. Dengan demikian dapat diterangkan kenapa V_0 tidak bergantung pada intensitas sinar.

Apabila $EK = 0$, artinya elektron meninggalkan permukaan logam dengan energi kinetik sama dengan nol, maka $V_0 = 0$, dan oleh karena itu:

$$hf_0 = W_0 \quad (2.9)$$

Dalam ungkapan diatas f_0 adalah frekuensi cahaya minimal yang mampu melesatkan elektron keluar dari permukaan logam, namun demikian elektron yang terlepas itu tidak memiliki energi kinetik ($EK = 0$) dan W_0 dapat diketahui secara pasti.

Apabila foton yang datang dengan frekuensi dimana $hf_0 < W_0$ maka foton tersebut tidak lagi mampu untuk melesatkan elektron keluar dari permukaan logam, hal ini ini berarti $f < f_0$, dimana f_0 merupakan frekuensi ambang. Dalam kejadian ini berapapun besarnya intensitas cahaya, maka tidak akan mampu melepaskan elektron dari katoda, karena frekuensi cahaya tersebut lebih kecil dari frekuensi ambang (f_0). Teori kuantum Einstein inilah yang dapat memberi penjelasan secara jelas tentang efek fotolistrik, bahwa frekuensi ambang f_0 tidak dapat dijelaskan dengan teori gelombang.

Contoh 2.1

Emiter dalam sebuah tabung fotolistrik memiliki panjang gelombang ambang 6000 \AA . Tentukan panjang gelombang cahaya yang datang pada tabung jika tegangan henti cahaya ini $2,5 \text{ V}$.

Penyelesaian:

Fungsi kerja adalah:

$$W_0 = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{6000 \text{ \AA}}$$

$$W_0 = 2,07 \text{ eV}$$

Persamaan fotolistrik memberikan:

$$eV_0 = hf - W_0$$

$$eV_0 = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

$$2,5 \text{ eV} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\lambda} - 2,07 \text{ eV}$$

$$\lambda = 2713 \text{ \AA}$$

Contoh 2.2

Kalium disinari dengan cahaya ultraviolet dengan panjang gelombang 2500 \AA . Jika fungsi kerja dari kalium adalah $2,21 \text{ eV}$, berapakah energi kinetik maksimum dari elektron yang emisikan?

Penyelesaian:

Persamaan fotolistrik memberikan

$$EK_{maks} = \frac{hc}{\lambda} - W_o$$

$$EK_{maks} = \frac{1,24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{2500 \text{ \AA}} - 2,21 \text{ eV}$$

$$EK_{maks} = 2,75 \text{ eV}$$

2. EFEK COMPTON

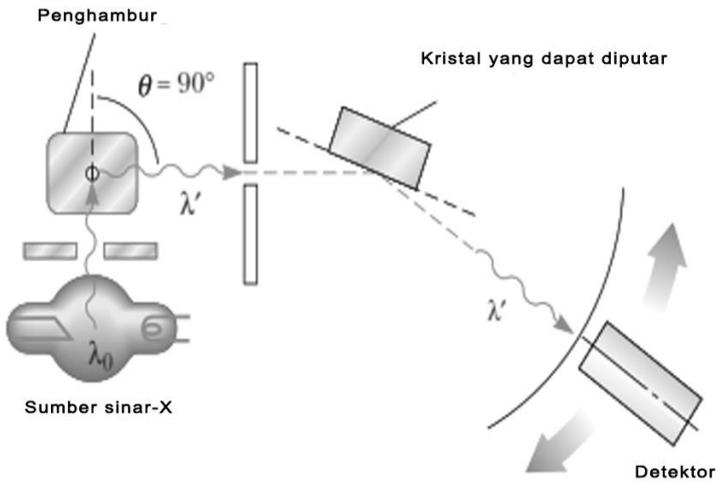
Dalam teori kuantum menyatakan bahwa perjalanan foton dalam ruang (dianggap dengan kecepatan c) tidak menyebar sebagaimana halnya dengan gelombang, tetapi tetap terkonsentrasi dalam bagian yang sangat kecil dalam ruang. Pada tahun 1923, Compton memberikan kesimpulannya mengenai hamburan sinar-X oleh materi. Dalam naskah ilmiahnya, "*A Quantum Theory of the Scattering of X-Ray Light Elements*", Compton menerangkan percobaannya tentang hamburan sinar-X.

Dalam percobaannya diamati bahwa panjang gelombang sinar-X yang terhambur berbeda dengan panjang gelombang sinar-X sebelum hamburan, perubahan panjang gelombang tersebut ternyata juga tergantung dari sudut hamburan. Compton menjelaskan bahwa teori yang dikembangkannya didasarkan pada pengandaian bahwa setiap elektron yang berperan dalam proses hamburan Compton terhadap foton cahaya secara. Teori ini juga berlandaskan pada hipotesis yang menyatakan bahwa kuantum-kuantum cahaya datang dari berbagai arah tertentu

dan dihamburkan pula dalam arah-arrah tertentu (tidak acak). Hasil eksperimen yang dilakukan untuk menjelaskan teori tersebut menunjukkan bahwa foton juga memiliki momentum linear. Kesimpulan tersebut memiliki dampak yang besar, karena foton juga ditandai dengan suatu besaran fisika yang lain, yaitu momentum linear.

Pada sketsa percobaan Compton yang ditunjukkan pada Gambar 2.3, Pada dasarnya dapat menjelaskan hasil eksperimennya tentang ketergantungan intensitas hamburan sinar-X terhadap panjang gelombang pada tiga sudut hambur yang berbeda, yaitu 45° , 90° , dan 135° . Panjang gelombang diukur dengan sebuah spektrometer kristal yang berputar, dan intensitas ditentukan melalui sebuah detektor. Sinar-X monokromatik dengan panjang gelombang $\lambda_0 = 0,71 \text{ \AA}$ dijadikan sebagai berkas sinar masuk. Target yang digunakan terbuat dari karbon yang memiliki nomor atom kecil, $Z = 12$. Hal ini disebabkan karena atom-atom dengan Z kecil memiliki elektron yang berikatan lemah dengan persentase yang lebih besar.

Grafik intensitas cahaya terhadap panjang gelombang dari hasil eksperimen ini dapat dilihat pada Gambar 2.4. Dari hasil pengamatannya terdapat dua puncak, seperti ditunjukkan pada gambar tersebut, satu puncak pada λ_0 dan pergeseran puncak pada panjang gelombang yang lebih besar λ' . Pergeseran puncak pada λ' disebabkan oleh hamburan sinar-X dari elektron-elektron yang hampir bebas.



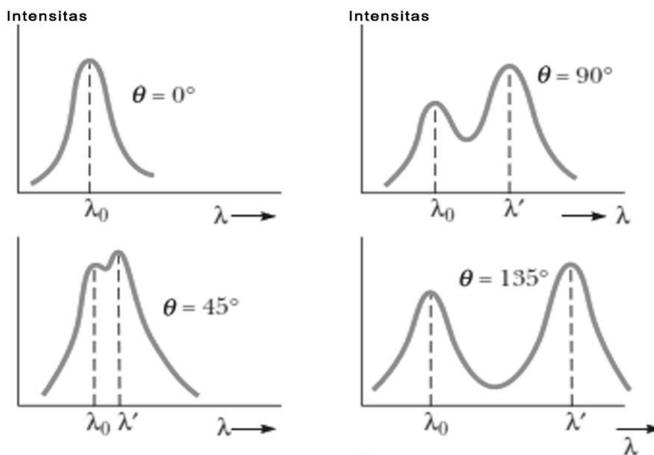
Sumber: *Modern Physics 3rd Ed., 2005*

Gambar 2.3 Diagram skematis percobaan Compton

Sinar-X yang telah menumbuk elektron akan kehilangan sebagian energinya yang kemudian terhambur dengan sudut hamburan sebesar θ terhadap arah semula. Berdasarkan hasil pengamatan ternyata sinar-X yang terhambur memiliki panjang gelombang yang lebih besar dari panjang gelombang sinar-X semula. Hal ini dikarenakan sebagian energinya terserap oleh elektron. Jika energi foton sinar X mula-mula hf dan energi foton sinar-X yang terhambur menjadi $(hf - hf')$ dalam hal ini $f > f'$, sedangkan panjang gelombang yang terhambur menjadi tambah besar yaitu $\lambda' > \lambda_0$. Jika diasumsikan bahwa sinar-X berperilaku seperti partikel, maka λ' diprediksi oleh Compton bergantung pada sudut.

Pada Gambar 2.4, terlihat bahwa panjang gelombang baru setelah hamburan λ' bergantung pada sudut hambur θ .

Puncak yang tidak bergeser pada λ_0 disebabkan oleh hamburan sinar-X dari elektron yang terikat kuat dengan atom-atom karbon. Compton dapat menerangkan terjadinya pergeseran panjang gelombang dengan menganggap bahwa berkas sinar-X terdiri dari foton-foton yang berperilaku sebagai partikel. Bahwa foton-foton itu dalam tumbukannya dengan elektron-elektron bahan penghambur mengikuti hukum-hukum mekanika.



Sumber: *Modern Physics 3rd Ed., 2005*

Gambar 2.4 Intensitas sinar-X terhambur terhadap panjang gelombang pada empat sudut berbeda

Untuk mengetahui momentum linier foton, digunakan teori kuantum Einstein yang menyatakan bahwa energi foton E bergantung dari frekuensi radiasi, yaitu:

$$E = hf \quad (2.10)$$

Sedangkan energi relativistik total suatu partikel yang bergerak dengan kecepatan v adalah:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.11)$$

Dimana m_0 adalah massa partikel apabila partikel tak bergerak dan c adalah kecepatan rambat cahaya. Karena kecepatan foton adalah c , dan energinya $E = hf$, maka m_0 harus sama dengan nol, jadi foton harus dianggap sebagai partikel dengan massa diam sama dengan nol.

Energinya hanya energi kinetik saja, sehingga pernyataan umum energi total adalah:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.12)$$

Untuk foton yang tidak bermassa, persamaan di atas menjadi:

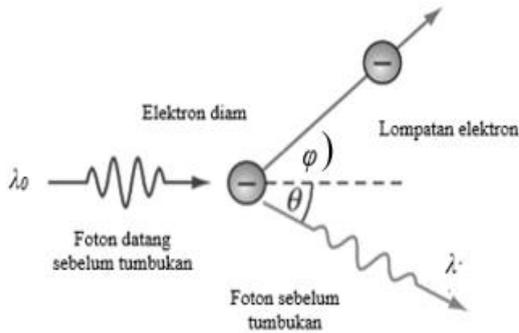
$$E^2 = p^2 c^2 \quad (2.13)$$

Dari ungkapan itu diperoleh bahwa:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (2.14)$$

Hubungan ini dipergunakan untuk menelaah tumbukan antara foton dan elektron.

Misalkan sebuah foton sinar-X menumbuk suatu elektron dari bahan penghambur. Karena energi foton sangat besar dibandingkan dengan energi ikatan elektron dalam bahan, maka secara praktis elektron dapat dianggap sebesar elektron bebas. Situasi awal situasi akhir diperlihatkan pada Gambar 2.5.



Sumber: Pearson Physics, 2009

Gambar 2.5 Deskripsi Hamburan Compton

Berdasarkan hukum kekekalan momentum linier pada arah x

$$p_0 = p_f \cos \theta + p_e \cos \varphi$$

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c} \cos \theta + p_e \cos \varphi \quad (2.15)$$

dan pada arah y

$$0 = p_e \sin \varphi - p_f \sin \theta$$

$$0 = p_e \sin \varphi - \frac{hf'}{c} \sin \theta \quad (2.16)$$

dimana p_e adalah momentum akhir elektron dan p_f adalah momentum akhir foton. Perkalian Persamaan (2.15) dan (2.16) dengan c masing-masing menghasilkan:

$$hf - hf' \cos \theta = p_f \cos \varphi \quad (2.17)$$

$$hf' \sin \theta = p_e c \sin \varphi \quad (2.18)$$

Kuadrat dari persamaan tersebut memberikan:

$$(hf - hf' \cos \theta)^2 = p_e^2 c^2 \cos^2 \varphi \quad (2.19)$$

$$(hf')^2 \sin^2 \theta = p_e^2 c^2 \sin^2 \varphi \quad (2.20)$$

Hasil penjumlahan kedua persamaan di atas memberikan

$$(hf)^2 - 2(hf)(hf') \cos \theta + (hf')^2 = p_e^2 c^2 \quad (2.21)$$

Dengan menggunakan hukum kekekalan energi, untuk elektron diketahui bahwa:

$$E = EK + m_0 c^2 \quad (2.22)$$

Dengan menyamakan persamaan di atas dengan Persamaan (2.12), maka diperoleh:

$$(EK + m_0 c^2)^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$p^2 c^2 = EK^2 + 2m_0 c^2 EK \quad (2.23)$$

Karena

$$EK = hf - hf' \quad (2.24)$$

maka diperoleh:

$$p_e^2 c^2 = (hf)^2 - 2(hf)(hf') + (hf')^2 + 2m_0 c^2 (hf - hf') \quad (2.25)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (2.25) pada Persamaan (2.21), maka diperoleh:

$$2m_0 c^2 (hf - hf') = 2(hf)(hf')(1 - \cos \theta) \quad (2.26)$$

Hubungan ini akan kita sederhanakan dalam panjang gelombang sebagai pengganti frekuensi dari persamaan di atas maka:

$$\frac{m_0 c}{h} \left(\frac{f}{c} - \frac{f'}{c} \right) = \left(\frac{f}{c} \right) \left(\frac{f'}{c} \right) (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{m_0 c}{h} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = \frac{(1 - \cos \theta)}{\lambda \lambda'}$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) \quad (2.27)$$

Dimana $\Delta \lambda$ adalah perubahan panjang gelombang sinar-X karena hamburan. Besaran λ_c dinamakan sebagai panjang gelombang Compton, yaitu:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,0243 \text{ \AA}$$

Hasil yang telah dipresentasikan dalam bentuk persamaan Compton, menyatakan bahwa perubahan panjang gelombang $\Delta \lambda$ hanya bergantung dari sudut hamburan θ dan tidak dari panjang gelombang maupun intensitas sinar-X.

Contoh 2.3

Tentukan fraksi perubahan panjang gelombang sinar-X yang mula-mula memiliki panjang gelombang 0,400 Å dan mengalami hamburan Compton pada sudut 90° dari sebuah elektron.

Penyelesaian:

Persamaan hamburan Compton memberikan:

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = (0,0243 \text{ \AA})(1 - \cos 90^\circ) = 0,0243 \text{ \AA}$$

sehingga

$$\frac{(\lambda' - \lambda_0)}{\lambda_0} = \frac{0,0243}{0,400} = 0,0608$$

SOAL LATIHAN

1. Sebuah permukaan natrium disinari oleh cahaya dengan panjang gelombang 0,300 nm. Fungsi kerja dari natrium adalah 2,46 eV. Tentukan
 - (a) Energi tiap foton dalam elektron volt.
 - (b) Energi kinetik maksimum dari elektron yang terlepas.
 - (c) Panjang gelombang *cutoff* dari natrium.
2. Eksperimen memperlihatkan bahwa fungsi kerja dari logam cesium adalah 2,10 eV. Tentukan frekuensi ambang dan panjang gelombang foton yang mampu memproduksi emisi foto dari cesium.
3. Jika energi maksimum yang diberikan pada sebuah elektron dalam hamburan Compton adalah 45 keV, berapakah panjang gelombang foton datang?
4. Sebuah foton dengan panjang gelombang 0,0500 nm terhambur pada sudut 30° . Tentukan panjang gelombang foton terhambur.
5. Dengan membandingkan hasil hamburan Compton antara cahaya tampak dan sinar-X, jelaskan kenapa dalam eksperimen hamburan Compton foton yang digunakan adalah foton sinar-X dan tidak menggunakan cahaya tampak.

BAB 3

SINAR-X

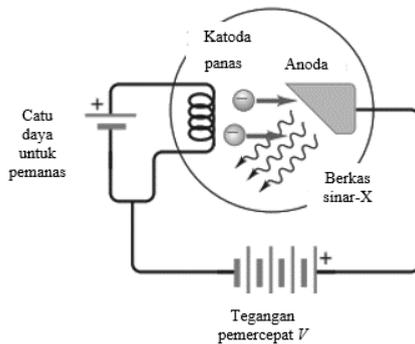
1. PEMBANGKITAN SINAR-X

Sinar-X merupakan radiasi elektromagnetik yang memiliki panjang gelombang sekitar $1 \text{ \AA} (= 10^{-10} \text{ m})$. Sinar -X juga diketahui sebagai radiasi elektromagnetik yang memiliki daya tembus yang sangat besar. Wilhelm Röntgen adalah penemu Sinar-X pada tahun 1895. Beliau adalah fisikawan berkewarganegaraan Jerman, dengan menggunakan alat yang sederhana sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3.1, menghasilkan radiasi sinar-X yang bermanfaat hingga saat ini.

Pembangkitan Sinar-X dapat terjadi apabila berkas elektron bebas berenergi (kinetik) tinggi menumbuk permukaan suatu logam dengan nomor atom Z yang tinggi, yang kemudian elektron dilepas dari katode melalui proses emisi termionik (*thermionic emission*). Agar elektron dapat terlepas diperlukan energi yang diperoleh dari pemanasan pada katoda pada temperatur yang sangat tinggi. Seperti pada efek fotolistrik, agar elektron dapat terlepas maka energi minimum yang harus diberikan kepada elektron dari katoda yang besarnya sama dengan fungsi kerja dari permukaan. Pada mekanisme ini, energi yang diberikan pada elektron berasal dari panas, bukan cahaya. Elektron

yang dipercepat menuju anoda oleh sebuah beda potensial V_{AC} . harus terjadi didalam ruang vakum, sehingga elektron dapat bergerak tanpa bertumbukan dengan molekul udara. Sinar -X baru akan dipancarkan dari permukaan anoda ketika V_{AC} bernilai sekitar beberapa ribu volt atau lebih. Anoda dapat didinginkan dengan air untuk menyalurkan kelebihan kalor yang timbul karena benturan berkas elektron dengan permukaan anoda. Apabila pendinginan itu tak dilakukan suhu anoda akan terus meningkat yang dapat menimbulkan peleburan.

Secara sederhana, anoda menghasilkan sinar-X dengan cara memperlambat elektron secara tiba-tiba. Proses ini dinamakan *bremssstrahlung* (bahasa Jerman untuk “radiasi pengereman”). Karena elektron mengalami percepatan yang sangat besar, elektron akan memancarkan banyak radiasi pada panjang gelombang yang pendek dalam rentang sinar-X, sekitar 10^{-9} sampai 10^{-12} m (1 nm sampai 1 pm). Sebagian besar elektron akan mengalami perlambatan akibat serangkaian tumbukan dan interaksi dengan atom-atom anoda, sehingga *bremssstrahlung* menghasilkan spektrum kontinyu dari radiasi elektromagnetik.



Sumber: *University Physics with Modern Physics 13th Ed.*, 2012.

Gambar 3.1 Skema alat pembangkit sinar-X

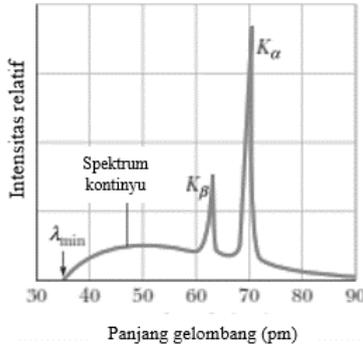
2. SPEKTRUM SINAR-X

a. Spektrum Kontinyu

Terdapat berbagai teknik untuk mengukur panjang gelombang sinar-X, salah satu cara yang terbaik adalah dengan menggunakan pemantulan sinar-X oleh suatu kisi kristal zat padat. Apabila konfigurasi atom-atom diketahui dan jarak antara atom-atom tersebut juga diketahui, maka kisi kristal tersebut dapat dipergunakan sebagai analisator panjang gelombang sinar-X.

Ketika target zat padat seperti tembaga dan tungsten ditembaki dengan elektron yang memiliki energi kinetik dalam rentang ke-V, maka sinar-X akan dipancarkan. Perhatian kita di sini adalah apa yang dapat diidentifikasi dari sinar ini mengenai atom yang menyerap atau memancarkan sinar tersebut. Gambar 3.2 menunjukkan panjang gelombang spektrum dari sinar-X yang dihasilkan ketika seberkas elektron-elektron 35 ke V jatuh pada target berupa molybdenum. Kita dapat melihat sebuah spektrum radiasi

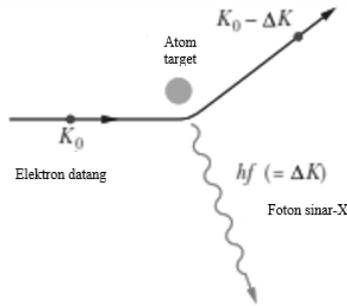
yang lebar dan kontinyu dengan dua puncak tajam pada panjang gelombang tertentu. Spektrum kontinyu dan puncak tajam tersebut terbentuk dengan mekanisme yang berbeda.



Sumber: *Fundamental of Physics Halliday & Resnick 10th Ed., 2014.*

Gambar 3.2 Distribusi panjang gelombang sinar-X yang dihasilkan ketika elektron-elektron 35 keV menabrak target molybdenum.

Pada Gambar 3.2 di atas, terlihat spektrum kontinyu membentang dari λ_{min} , abaikan kedua puncak yang menonjol. Anggap sebuah elektron dengan energi kinetik awal EK_0 menabrak atau berinteraksi dengan salah satu atom target, seperti pada Gambar 3.3. Elektron kemungkinan akan kehilangan sejumlah energi ΔEK , yang akan muncul sebagai energi foton sinar-X yang diradiasikan keluar dari tempat tumbukan.



Sumber: *Fundamental of Physics Halliday & Resnick 10th Ed., 2014.*

Gambar 3.3 Mekanisme pembentukan spektrum sinar-X kontinyu.

Elektron yang dihamburkan pada Gambar 3.3 di atas, yang energinya lebih rendah dari EK_0 , kemungkinan akan mengalami tumbukan untuk kedua kalinya dengan atom target, menghasilkan foton kedua dengan energi yang berbeda. Tumbukan elektron tersebut dapat terus berlanjut sampai elektron tersebut tidak bergerak lagi. Semua foton yang dihasilkan oleh tumbukan ini akan membentuk spektrum sinar-X kontinyu.

Sifat yang menonjol dari spektrum pada Gambar 3.2 adalah sesuatu yang disebut sebagai panjang gelombang potong λ_{min} (*cutoff wavelength*), batas dimana tidak terdapat lagi spektrum kontinyu. Panjang gelombang minimum ini berkaitan dengan sebuah tumbukan dimana elektron datang kehilangan semua energi kinetik awal EK_0 pada satu kali tumbukan dengan atom target. Pada dasarnya semua energi tersebut muncul sebagai energi dari sebuah foton tunggal dengan panjang gelombangnya (panjang gelombang sinar-X minimum yang mungkin) dapat diperoleh melalui persamaan:

$$K_0 = hf = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{K_0} \quad (3.1)$$

Karena $K_0 = eV_0$, maka Persamaan (3.1) dapat ditulis menjadi:

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV_0} \quad (3.2)$$

Jika panjang gelombang minimum λ_{min} dinyatakan dalam meter dan V_0 dalam volt, maka:

$$\lambda_{min} = \frac{12,42 \times 10^{-7}}{V_0} \quad (3.3)$$

Semakin tinggi beda potensial, maka semakin pendek pula panjang gelombang minimum. Panjang gelombang potong tidak bergantung pada material target. Sebagai contoh, jika target molybdenum diganti dengan target tembaga, semua sifat spektrum sinar-X karakteristik pada Gambar 3.2 akan berubah kecuali panjang gelombang potong.

b. Spektrum Karakteristik

Dua puncak yang diberi label K_α dan K_β pada Gambar 3.2 membentuk spektrum karakteristik dari material target. Puncak tersebut terbentuk melalui dua proses. Pertama, sebuah elektron berenergi menabrak sebuah atom pada target sehingga elektron tersebut menendang keluar satu atom bagian dalam. Jika elektron yang ditendang adalah

elektron pada kulit $n=1$ (kulit K), akan menghasilkan kekosongan pada kulit tersebut. Kedua, Sebuah elektron pada kulit yang lebih tinggi akan mengisi kekosongan pada kulit K tersebut, mengisi kekosongan tersebut. Jika elektron yang mengisi kekosongan tersebut adalah elektron dari kulit dengan $n=2$ (kulit L), radiasi yang dipancarkan adalah garis $K\alpha$ pada Gambar 3.2. Jika elektron pengisi berasal dari kulit dengan $n=3$ (kulit M), akan dihasilkan garis $K\beta$, dan seterusnya.

Gambar 3.4 menunjukkan diagram tingkat energi untuk molybdenum. Garis paling bawah ($E=0$) merepresentasikan atom netral pada keadaan dasarnya. Tingkat K (pada $E=20$ keV) merepresentasikan energi atom molybdenum dengan sebuah kekosongan pada kulit K -nya, tingkat L (pada $E=2,7$ keV) merepresentasikan atom dengan kekosongan pada kulit L -nya, dan seterusnya. Transisi $K\alpha$ dan $K\beta$ pada Gambar 3.4 menghasilkan dua puncak sinar-X pada Gambar 3.2. Garis spektrum $K\alpha$ misalnya, dihasilkan ketika elektron dari kulit L mengisi kekosongan pada kulit K . Peristiwa ini ditandai oleh panah pada Gambar 3.4, sebuah lubang yang berasal dari kulit K berpindah ke kulit L .

Pada atom berelektron banyak, inti bermuatan positif Ze di bungkus oleh muatan negatif dari elektron bagian dalam. Sehingga, elektron bagian terluar akan berinteraksi dengan muatan total yang lebih kecil dari muatan inti. Pernyataan

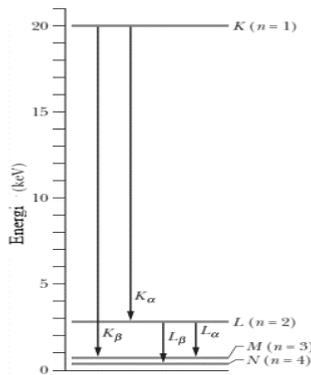
untuk energi yang diperbolehkan untuk atom berelektron banyak adalah:

$$E_n = -\frac{(1,36 \text{ eV})Z_{eff}^2}{n^2} \quad (3.4)$$

dimana Z_{eff} bergantung pada ℓ dan n . Sedangkan untuk transisi elektron yang berkaitan dengan pengisian kulit K yang kosong adalah:

$$E_k \approx -Z^2(1,36 \text{ eV}) \quad (3.5)$$

Apabila dipergunakan bahan anoda yang lain, maka di atas suatu beda potensial tertentu, juga terlihat puncak-puncak namun pada kedudukannya (λ) yang tidak sama dengan bahan molybdenum tadi. Karena ternyata bahwa setiap bahan mempunyai perangkat puncak-puncak yang tertentu kedudukannya, maka kedudukan puncak-puncak itu seolah-olah merupakan sidik jari yang memberi ciri pada bahan anoda. Puncak-puncak tersebut dinamakan garis-garis karakteristik, atau sinar-sinar karakteristik.



Sumber: *Fundamental of Physics Halliday & Resnick 10th Ed., 2014.*

Gambar 3.4 Diagram tingkat energi atom molybdenum

Contoh 3.1

Estimasi energi dan panjang gelombang sinar-x karakteristik yang dipancarkan oleh target tungsten ketika elektron turun dari kulit M ($n = 3$) ke kulit K ($n = 1$) yang kosong.

Penyelesaian:

Nomor atom tungsten adalah $Z = 74$.

Sehingga karena transisi berkaitan dengan kulit K maka

$$E_k \approx -74^2(1,36 \text{ eV}) = -7,4 \times 10^4 \text{ eV}$$

Kemudian untuk energi dari kulit M , karena ada 9 elektron yang melindungi muatan inti, maka diperoleh

$$E_n = -\frac{(1,36 \text{ eV})(74-9)^2}{(3)^2} = -6,4 \times 10^3 \text{ eV}$$

Sehingga energi yang dipancarkan oleh foton sinar-x adalah

$$hf = E_M - E_K = -6,4 \times 10^3 \text{ eV} - (-7,4 \times 10^4 \text{ eV}) = 68 \text{ keV}$$

3. PROSES INTERAKSI SINAR-X DENGAN MATERI

Ketika radiasi menumbuk bahan, ada bagian yang diteruskan, diserap, dan dihamburkan. Radiasi yang diteruskan dalam radiografi disebut sebagai radiasi primer, merupakan bagian radiasi yang berguna dalam pembentukan bayangan radiografi. Intensitas radiasi yang diteruskan dipengaruhi oleh tebal dan rapat jenis bahan serta energi radiasi.

Pada saat foton mengenai suatu materi maka akan terjadi interaksi yang mengakibatkan penyerapan atau penghamburan foton. Proses penyerapan foton dapat dilihat

pada Gambar 3.5. Proses penyerapan dan penghamburan akan berpengaruh pada pelemahan atau atenuasi dari foton tersebut yang disebabkan oleh kerapatan, ketebalan dan nomor atom bahan yang dilalui. Apabila radiasi elektromagnetik masuk ke dalam bahan, maka sebagian dari radiasi tersebut akan terserap oleh bahan. Sebagai akibatnya, intensitas radiasi setelah memasuki bahan penyerap lebih kecil dibandingkan intensitas semula, sehingga dapat dinyatakan dalam:

$$I_x < I_0$$

Pengurangan intensitas sinar-X ketika melewati absorber dengan ketebalan dx sama dengan intensitas sinar-X datang dikali dengan probabilitas dari berkas sinar-X akan dihentikan dalam absorber. Dimana probabilitas tersebut adalah:

$$P(\text{penyerapan dalam sepanjang } dx) = n\sigma dx \quad (3.6)$$

Dengan n adalah jumlah atom penyerap per satuan volum, σ luas penampang lintang penyerap dan dx adalah ketebalan bahan. Sehingga pengurangan intensitas sinar-X dapat ditulis menjadi:

$$dI = -I_0(n\sigma dx) \quad (3.7)$$

Tanda negatif menandakan adanya pengurangan intensitas. Melalui proses diferensial sederhana, diperoleh bahwa:

$$\frac{dI}{dx} = -I_0 n \sigma \quad (3.8)$$

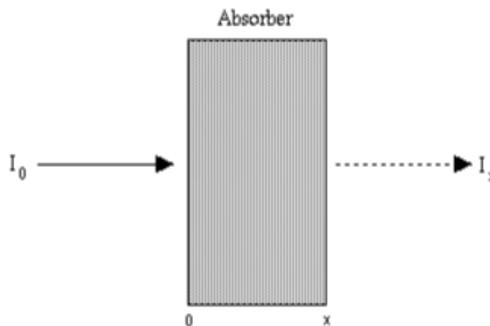
Ketika persamaan di atas diintegalkan akan menjadi:

$$I = I_0 e^{-n\sigma x} \quad (3.9)$$

Banyaknya atom/cm³ (n) umumnya dikombinasikan untuk menghasilkan koefisien atenuasi linier ($\mu = \sigma n$). Oleh karena itu, proses pelemahan radiasi elektromagnetik sinar-X dalam suatu bahan menyebabkan terjadinya pengurangan intensitas yang memenuhi persamaan:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (3.10)$$

Dimana I adalah intensitas radiasi elektromagnetik setelah melalui bahan, I_0 adalah intensitas radiasi elektromagnetik sebelum melalui bahan, μ adalah koefisien serapan bahan (koefisien atenuasi linier) dan x adalah ketebalan bahan.



Gambar 3.5 Proses penyerapan sinar-X

Interaksi sinar-X dengan materi akan terjadi bila sinar-X yang dipancarkan dari tabung dikenakan pada suatu objek. Sinar-X yang terpancar merupakan panjang gelombang elektromagnetik dengan energi yang cukup besar, tidak bermuatan listrik dan merambat menurut garis lurus. Bila sinar-X mengenai suatu objek, akan terjadi interaksi antara

foton dengan atom-atom dari objek tersebut. Interaksi ini menyebabkan foton akan kehilangan energi yang dimiliki oleh foton. Besarnya energi yang diserap tiap satuan massa dinyatakan sebagai satuan dosis serap, disingkat Gray. Dalam jaringan tubuh manusia, dosis serap dapat diartikan sebagai adanya 1 joule energi radiasi yang diserap 1 kg jaringan tubuh. Dimana $1 \text{ gray} = 1 \text{ joule/kg}$. Sinar-X memiliki panjang gelombang yang sangat pendek, sekitar 10^{-8} sampai 10^{-9} m. Semakin tinggi energinya maka semakin pendek panjang gelombangnya. Sinar-X dengan energi rendah cenderung berinteraksi dengan elektron dan energi tinggi cenderung berinteraksi dengan inti atom.

4. JENIS INTERAKSI SINAR-X DENGAN MATERI

a. Serapan dan Hamburan Sinar-X

Elektron yang menyerap energi sinar-X datang akan mengakibatkan elektron tersebut bervibrasi, dimana frekuensinya sama dengan frekuensi sinar-X datang. Kondisi demikian menyebabkan atom dalam keadaan tereksitasi, dan secepatnya elektron memancarkan energi ke segala arah dengan frekuensi sama dengan frekuensi sinar-X datang. Dalam proses hamburan ini terjadi atenuasi tanpa absorpsi.

Dalam hamburan koheren, foton berinteraksi dengan orbital elektron terikat (yaitu aksi gabungan dari keseluruhan atom). Hamburan koheren (efek Rayleigh) adalah suatu proses dimana gelombang elektromagnetik (sinar foton)

yang bekerja pada atom tersebar tanpa kehilangan energi. Selain itu, hamburan Rayleigh adalah proses fisika klasik dimana sinar-X dihamburkan secara keseluruhan oleh atom. Semua atom di dalam elektron berkontribusi dengan cara koheren. Energi Sinar-X tetap sama sebelum dan sesudah hamburan.

Elektron yang bervibrasi tetap terikat oleh inti dalam atom. Kemungkinan hamburan elastis meningkat pada elektron dengan energi ikat tinggi (elektron atom dengan nomor atom tinggi) atau bila energi foton dengan energi relatif rendah.

b. Efek Fotolistrik

Dalam proses fotolistrik energi foton sinar-X diserap oleh elektron dalam atom, sehingga elektron tersebut dilepaskan dari ikatannya dengan atom. Elektron yang keluar dari atom disebut elektron foto. Peristiwa efek fotolistrik ini terjadi pada energi radiasi rendah ($E < 1 \text{ MeV}$) dan nomor atom besar. Efek Fotolistrik terjadi jika foton mengenai elektron pada suatu orbit dalam atom, sebagian energi foton digunakan untuk mengeluarkan elektron dari atom dan sisanya dibawa oleh elektron sebagai energi kinetiknya. Seluruh energi foton dipakai dalam proses tersebut adalah

$$E = hf = EK + E_i \quad (3.11)$$

Dimana E_i adalah energi ikat elektron, EK adalah energi kinetik elektron.

c. Hamburan Compton

Seperti yang telah dijelaskan pada bahasan sebelumnya, pada peristiwa hamburan Compton terjadi tumbukan lenting sempurna antara sebuah foton dan sebuah elektron. Dalam suatu tumbukan antara sebuah foton sinar-X dan elektron bebas maka tidak mungkin semua energi foton dapat dipindahkan ke elektron jika momentum dan energi dibuat kekal.

Pada hamburan Compton, foton sinar-X berinteraksi dengan elektron terluar dari atom. Energi foton sinar-X diserap sebagian untuk melepaskan dan menggerakkan elektron, sehingga energi foton menjadi lebih rendah dan berubah lintasannya. Radiasi hamburan akan bergerak terus dan mengalami beberapa efek Compton sebelum akhirnya diserap menjadi efek fotolistrik. Efek Compton terjadi pada rentang energi antara 0,1 sampai 3 MeV.

Elektron yang dilepaskan itu disebut sebagai elektron Compton. Berdasarkan hukum kekekalan energi tentu saja energi elektron Compton E_e adalah selisih antara energi sinar-X mula-mula E_o dan energi sinar-X terhambur E_s , sehingga:

$$E_e = E_o - E_s \quad (3.12)$$

Sinar-x akan kehilangan energi maksimum (atau elektron Compton akan menerima tenaga maksimum) apabila terjadi tumbukan frontal dengan $\theta = 180^\circ$ terhadap elektron. Karena E_s dapat bervariasi antara sudut harga minimum

untuk $\theta = 0^\circ$ maka spektrum energi elektron Compton akan terbentang dari tenaga nol sampai suatu energi maksimum yang sedikit lebih kecil dari pada tenaga foton mula-mula. Di lain pihak, tenaga foton terhambur akan terbentang mulai dari tenaga foton-X mula-mula sampai ke suatu harga minimum yang selalu lebih kecil dari $\frac{1}{2}m_0c^2$ yaitu 0,257.

Dalam peristiwa hamburan Compton ini terjadi baik gejala serapan maupun gejala difusi/hamburan. Pada daerah energi sinar-X $\pm 1,6$ MeV, kedua gejala ini mempunyai probabilitas yang sama untuk terjadi. Pada daerah tenaga yang lebih tinggi dari 1,6 MeV gejala hamburan menjadi lebih penting. Dengan kata lain, fraksi energi yang hilang dari foton-foton berenergi rendah adalah cukup kecil karena hamburan yang terjadi hampir merupakan tumbukan lenting, tetapi kehilangan tenaga itu makin menjadi besar dengan naiknya energi sinar-X.

Efek Compton ikut berperan pada sebagian besar radiasi pendar yang terbentuk selama prosedur radiologi. Pada proses Compton, foton sinar-X berinteraksi dengan elektron luar yang terikat longgar dari atom objek yang teradiasi. Pada saat pengeluaran elektron, foton sinar-X mengeluarkan sebagian energi kinetiknya untuk mengungkit elektron dari selubung luar orbit. Elektron bebas, yang disebut elektron pendar Compton, memiliki energi kinetik dan dapat mengionisasi atom. Elektron ini kehilangan energi kinetiknya melalui interaksi dengan atom dan akhirnya

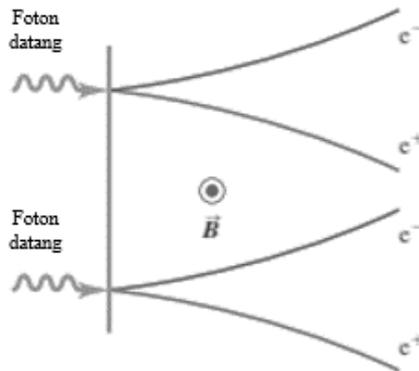
berkombinasi ulang dengan atom yang membutuhkan elektron lain. Keadaan ini biasa terjadi, beberapa mikrometer dari daerah interaksi Compton yang sebenarnya. Foton sinar-X yang melemah serta mengeluarkan sebagian energinya untuk membebaskan elektron dari orbit, akan tetap berjalan, tetapi dengan arah yang baru. Foton ini memiliki kemampuan untuk berinteraksi dengan atom lain baik dengan proses absorpsi fotoelektrik atau dengan pendar Compton. Pada radiologi diagnostik, kemungkinan interaksi Compton, sedikit berkurang bila energi foton sinar-X bertambah.

d. Produksi Pasangan

Efek lain dari sinar-X dengan panjang gelombang yang cukup pendek ketika ditembakkan pada sebuah target adalah produksi pasangan (*pair production*). Efek produksi pasangan adalah terjadinya pasangan positron $+e$ dan elektron $-e$ apabila foton dengan energi tertentu (energi minimum) berinteraksi dengan medan listrik inti atom. Transformasi produksi pasangan dapat dituliskan sebagai berikut:



Ilustrasi produksi pasangan dapat dilihat pada Gambar 3.6. Produksi pasangan pertama kali ditemukan oleh fisikawan Patrick Blackett dan Giuseppe Occhialini pada tahun 1933.



Sumber: Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics 13th Ed., 2012

Gambar 3.6 Diagram proses produksi pasangan

Pada saat bergerak dekat dengan sebuah inti, secara spontan foton akan menghilang dan energinya akan muncul kembali sebagai suatu positron dan elektron. Elektron dan positron harus diproduksi secara berpasangan untuk memenuhi hukum kekekalan muatan, dimana foton datang dengan muatan nol, sehingga pasangan elektron dan foton memiliki muatan total $(-e) + (+e) = 0$. Energi sinar-X yang cukup harus tersedia untuk memperoleh energi diam sebesar $2mc^2$ pada kedua partikel. Energi minimum yang harus tersedia tersebut adalah sebesar:

$$E_{min} = 2mc^2 = 2(9,109 \times 10^{-31}\text{kg})(2,998 \times 10^8\text{m/s})^2$$

$$E_{min} = 1,63 \times 10^{-13}\text{J} = 1,022 \text{ MeV}$$

Foton minimal harus memiliki energi sebesar 1,022 MeV untuk menghasilkan pasangan elektron-positron dengan energi masing-masing 0,51 MeV.

e. Anihilasi

Kejadian produksi pasangan yang telah dijelaskan di atas akan diikuti oleh hilangnya kedua partikel gabungan itu (hilang masa) dan berubah menjadi sepasang foton kembar yang disebut radiasi anihilasi, dengan transformasi sebagai berikut:

$$e^{-} + e^{+} \rightarrow f_1 + f_2 \quad (\text{anihilasi}).$$

Radiasi anihilasi (foton kembar) memiliki dua sifat utama. Pertama, arah masing-masing foton kembar saling berlawanan dengan sudut 180° , dan kedua, energi masing-masing foton sama yaitu sebesar 0,51 MeV. Disebut anihilasi karena jumlah energi kedua foton kembar adalah sama dengan besarnya energi foton mula-mula yang melakukan interaksi dengan atom.

Seperti terlihat pada hukum keseimbangan Einstein, $E = mc^2$, partikel dan energi memiliki hubungan. Energi dapat dirubah menjadi massa. Pada produksi pasangan, foton akan berjalan mendekati nukleus atom dari objek yang diradiasi dan hilang.

Positron diklasifikasikan sebagai bentuk antipartikel, karena tidak terdapat bebas di dunia. Positron merupakan partikel tidak stabil dan akan berinteraksi dengan elektron pertama yang ditemuinya. Pada proses anihilasi, positron bergabung dengan dan merusak elektron, partikel lawannya. Kedua partikel tersebut akan hilang dan mengeluarkan energinya dalam bentuk dua foton masing-masing berenergi

0,51 MeV yang bergerak dengan arah berlawanan. Di sini massa telah dirubah menjadi energi.

Kekekalan energi (relativistik) total pada proses anihilasi menghendaki:

$$2mc^2 = hf_1 + hf_2$$

Namun hukum kekekalan momentum linier mempersyaratkan:

$$0 = \frac{hf_1}{c} + \frac{hf_2}{c}$$

Sehingga diperoleh:

$$f_1 = f_2$$

dan proses transformasi dapat ditulis kembali menjadi:

$$e^- + e^+ \rightarrow 2f \quad (\text{anihilasi}).$$

Contoh 3.2

Tentukan energi dua foton yang dihasilkan ketika anihilasi terjadi antara elektron dan positron yang mula-mula diam.

Penyelesaian:

Karena momentum awal pasangan elektron-positron adalah nol, maka kedua foton harus bergerak dalam arah yang berlawanan dengan energi yang sama. Terapkan kekekalan energi sehingga diperoleh:

$$2m_0c^2 = 2E_\gamma$$

$$E_\gamma = m_0c^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

SOAL LATIHAN

1. HVL (*half-value thickness*) sebuah absorber menyatakan ketebalan yang akan menurunkan intensitas dari sebuah berkas partikel dengan faktor 2. Hitung HVL untuk timah, asumsikan bahwa panjang gelombang berkas sinar-x adalah 20 pm.
2. Ketika sinar-x $0,50 \text{ \AA}$ mengenai sebuah material, fotoelektron dari kulit K teramati bergerak dalam sebuah lingkaran dengan jari-jari 23 mm dalam sebuah medan magnet $2 \times 10^{-2} \text{ T}$. Berapakah energi ikat elektron kulit K ?
3. Ujung absorpsi K untuk Y ($Z = 39$) adalah $0,7277 \text{ \AA}$. Agar dapat menghasilkan emisi deret K dari Y , dibutuhkan sebuah potensial pemercepat minimal 13,039 kV. Tentukan h/e dari data ini.
4. Sebuah foton dengan panjang gelombang $0,0030 \text{ \AA}$ di dekat sebuah inti berat menghasilkan pasangan elektron-positron. Tentukan energi kinetik dari tiap partikel jika energi kinetik positron adalah dua kali elektron.
5. Anihilasi pasangan terjadi ketika elektron dan positron bertumbukan, menghasilkan dua foton $2,0 \text{ MeV}$ yang merambat dalam arah yang berlawanan. Tentukan energi kinetik dari elektron dan positron setelah tumbukan.

BAB 4

MODEL ATOM HIDROGEN MENURUT BOHR

1. PENDAHULUAN

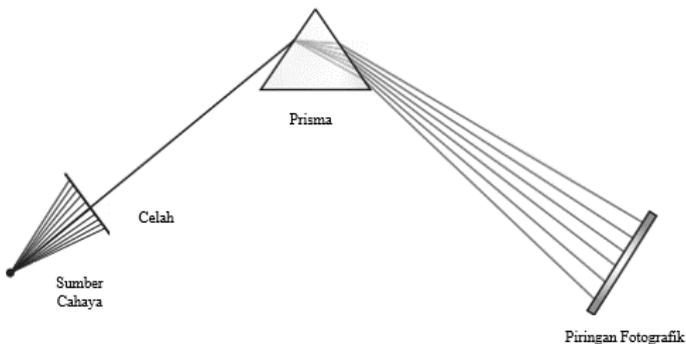
Konsep foton yang menggambarkan gelombang elektromagnetik sebagai berkas paket-paket energi yang berperilaku sebagai partikel memberikan suatu wawasan baru dalam menelaah tentang struktur atom, khususnya pembahasan mengenai proses-proses pada tingkat atom dan subatom. Oleh karena itu pembahasan tentang struktur atom tidak dapat lepas dari konsep-konsep yang berkembang pada tingkat mikro, baik tingkat atom maupun subatom.

Sebuah model atom yang baik tidak hanya mampu menjelaskan stabilitas jangka panjang dari kenetralan atom yang terdiri dari proton dan elektron, akan tetapi juga mampu menjelaskan spektrum radiasi elektromagnetik yang dipancarkan. Spektrum cahaya adalah susunan dari panjang gelombang cahaya, baik panjang gelombang kontinu maupun diskrit. Spektrum cahaya dapat diproduksi dengan memperoleh sinar sejajar dari cahaya yang datang dari sebuah sumber menggunakan sebuah celah (atau lensa) dan kemudian meneruskan sinar sejajar tersebut menembus sebuah prisma (atau kisi difraksi), sehingga sinar tersebut

72 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

terurai menjadi spektrum-spektrumnya, dan akhirnya terekam pada sebuah piringan fotografik.

Proses ini secara sederhana dapat dilihat pada Gambar 4.1. Spektrum dapat diklasifikasikan sebagai spektrum emisi atau absorpsi, bergantung pada bagaimana spektrum tersebut dihasilkan, apakah melalui emisi foton dari sebuah sistem atom atau melalui absorpsi foton datang pada sebuah sistem atom. Spektrum emisi dan absorpsi selanjutnya dapat dibagi dalam spektrum kontinyu atau garis, bergantung pada bagaimana cahaya terekam pada piringan fotografik, apakah muncul dalam bentuk panjang gelombang kontinyu atau sebagai sebuah paket diskrit panjang gelombang yang biasanya berupa garis. Spektrum emisi kontinyu dihasilkan dari foton yang diemisikan oleh sumber zat padat panas, sedangkan spektrum emisi garis dihasilkan dari foton yang diemisikan oleh gas panas sebagai sumber.



Sumber: Modern Physics for Science and Engineering, 2012.

Gambar 4.1 Komponen dasar dari spektrograf prisma

Salah satu hasil eksperimen yang sampai tahun 1913 yang tidak dapat diterangkan secara teoritik adalah spektrum

hidrogen. Karena kesederhanaannya, spektrum emisi garis dari gas hidrogen banyak diteliti oleh fisikawan pada akhir abad ke-19. Peralatan untuk mengukur spektrum cahaya sudah cukup berkembang pada saat itu. Pengamatan tentang spektrum yang dipancarkan oleh gas-gas yang panas menunjukkan suatu spektrum garis, yang mempunyai keteraturan sendiri.

Banyak upaya ilmuwan untuk mencari rumus empiris tentang keteraturan ini. Suatu rumus empiris mengenai garis-garis spektrum itu tentunya merupakan alat verifikasi terbaik untuk meneliti kebenaran tentang teori-teori mengenai spektrum gas. Pada tahun 1885, J.J Balmer seorang guru sekolah menengah di Swiss, berhasil menemukan suatu rumus (empiris) sederhana yang dapat menyatakan frekuensi garis-garis spektrum atom hidrogen. Khususnya, yang terletak dalam daerah tampak. Deret Balmer untuk spektrum garis atom hidrogen dengan panjang gelombang dalam nanometer dapat dilihat pada Gambar 4.2.



Sumber: *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9th Ed.*, 2014.

Gambar 4.2 Komponen dasar dari spektrograf prisma

74 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

Panjang gelombang garis-garis spektrum emisias hidrogen yang ditemukan secara akurat pada akhir abad ke-19 melalui pengukuran spektroskopi dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Garis spektrum hidrogen

Garis Spektrum Hidrogen	Panjang Gelombang(Å)
H _α	6562,8
H _β	4861,3
H _γ	4340,5
H _δ	4101,7
H _ε	3970,1
H _η	3889,1
H _∞	3645,6

Rumus Balmer untuk panjang-panjang gelombang dapat dijelaskan menggunakan persamaan empiris sederhana

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4.1)$$

dimana n adalah bilangan bulat 3, 4, 5, ..., dan R_H adalah sebuah konstanta, disebut sebagai konstanta Rydberg. Jika panjang gelombang dinyatakan dalam meter, maka R_H memiliki nilai

$$R_H = 1,0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Dengan menggunakan hubungan panjang gelombang dan frekuensi $c = \lambda f$, maka hubungan di atas dapat menjadi

$$f = \frac{c}{\lambda} = 3,289 \times 10^{15} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4.2)$$

dengan n bilangan bulat yang lebih besar dari 2.

Berbagai model yang diajukan untuk menerangkan rumus tentang garis-garis spektrum tersebut tidak berhasil. Pada tahun 1908 Paschen menemukan ada suatu deret lain

garis-garis spektrum hidrogen yang terletak di daerah inframerah. Deret tersebut memenuhi hubungan matematik sebagai berikut:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{4.3}$$

$$f = 3,289 \times 10^{15} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{4.4}$$

Dengan n suatu bilangan bulat yang lebih dari 3.

Deret garis spektrum Balmer dan Paschen dapat dikembalikan pada satu bentuk matematik sebagai berikut

$$f_{nm} = 3,289 \times 10^{15} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{4.5}$$

Dalam ungkapan tersebut deret Balmer muncul apabila diambil $m = 2$ dan n suatu bilangan bulat lebih besar dari pada 2, deret Paschen $m = 3$, dengan n bilangan bulat lebih besar dari pada 3. Persamaan (4.5) di atas juga berlaku untuk persamaan deret empiris lainnya, yaitu deret Lyman, Bracket dan Pfun. Tabel 4.2 di bawah ini memberikan harga m dan n untuk semua deret garis spektrum hidrogen yang diamati.

Tabel 4.2 Nilai m dan n untuk deret semua persamaan deret empiris

Deret	m	N
Lyman	1	2, 3, 4, 5, ...
Balmer	2	3, 4, 5, 6, ...
Paschen	3	4, 5, 6, 7, ...
Bracket	4	5, 6, 7, 8, ...
Pfun	5	6, 7, 8, 9, ...

76 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

Pada tahun 1890, ternyata Rydberg menemukan cara yang lebih mudah untuk menangani rumus deret yang sebelumnya telah ditemukan Balmer, yaitu dengan mengemukakan suatu besaran baru yang dinamakan resiprok panjang gelombang (*reciprocal wavelength*), yaitu:

$$K \equiv \frac{1}{\lambda} \quad (4.6)$$

Dengan ungkapan di atas, rumus matematis dari deret dapat ditulis menjadi:

$$K_{nm} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4.7)$$

Contoh 4.1

Carilah panjang gelombang dari transisi $n = 3$ ke $m = 2$ dan dari $n = 4$ ke $m = 2$

Penyelesaian:

Dari Persamaan (4.7) diperoleh

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Untuk transisi $n = 3$ ke $m = 2$

$$\frac{1}{\lambda} = (1,0973731 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$$

diperoleh

$$\lambda = 656,1 \text{ nm}$$

Untuk transisi $n = 4$ ke $m = 2$

$$\frac{1}{\lambda} = (1,0973731 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)$$

diperoleh

$$\lambda = 486,0 \text{ nm}$$

2. MODEL ATOM SEBELUM MODEL ATOM BOHR

Pada tahun 1803, John Dalton mengemukakan pendapatnya tentang atom. Teori atom Dalton didasarkan pada dua hukum, yaitu hukum kekekalan massa (hukum Lavoisier) dan hukum susunan tetap (hukum Proust). Lavoisier menyatakan bahwa “Massa total zat-zat sebelum reaksi akan selalu sama dengan massa total zat-zat hasil reaksi”. Sedangkan Proust menyatakan bahwa “Perbandingan massa unsur-unsur dalam suatu senyawa selalu tetap”. Dari kedua hukum tersebut Dalton mengemukakan pendapatnya tentang atom sebagai berikut:

- a. Atom merupakan bagian terkecil dari materi yang sudah tidak dapat dibagi lagi.
- b. Atom digambarkan sebagai bola pejal yang sangat kecil, suatu unsur memiliki atom-atom yang identik dan berbeda untuk unsur yang berbeda.
- c. Atom-atom bergabung membentuk senyawa dengan perbandingan bilangan bulat dan sederhana. Misalnya air terdiri atom-atom hidrogen dan atom-atom oksigen.
- d. Reaksi kimia merupakan pemisahan atau penggabungan atau penyusunan kembali dari atom-atom, sehingga atom tidak dapat diciptakan atau dimusnahkan.

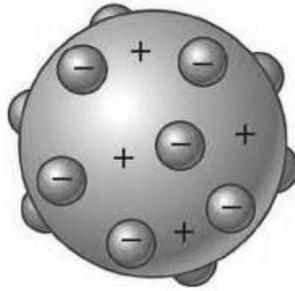
78 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

Kelemahan Teori Dalton adalah tidak menerangkan hubungan antara larutan senyawa dan daya hantar arus listrik. Pada tahun 1897 *J.J Thompson* (direktur Cavendish Laboratory di Cambridge University) berhasil mengeluarkan partikel-partikel bermuatan negatif (elektron) dari atom-atom, sehingga yang tertinggal hanyalah bagian yang bermuatan positif (ion). Hal tersebut diperolehnya melalui percobaan yang langsung.

Dengan demikian bahwa atom itu sendiri terdiri dari dua macam bagian, bagian yang bermuatan positif dan partikel-partikel sangat kecil yang bermuatan negatif. Atas dasar informasi ketika itu, Thompson membuat model atom sebagai berikut:

- a. Atom berupa bola yang bermuatan positif dengan adanya elektron yang bermuatan negatif di sekelilingnya.
- b. Muatan positif dan negatif pada atom besarnya sama. Hal ini menjadikan atom bermuatan netral. Suatu atom tidak mempunyai muatan positif atau negatif yang berlebihan.

Dalam model itu muatan positif dianggap tersebar merata, sedangkan muatan elektron adalah diskrit di titik-titik tertentu dalam zat bermuatan positif. Secara sederhana bentuknya seperti roti kismis, dimana elektron direpresentasikan oleh kismis-kismis dalam roti itu. Ilustrasi model atom Thomson dapat dilihat pada Gambar 4.3.



Sumber: www.ilmukimia.org, 2013.

Gambar 4.3 Model atom Thomson

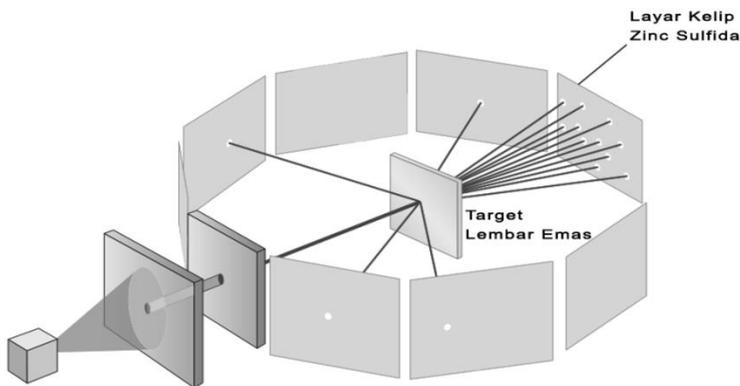
Muatan-muatan negatif (elektron) oleh muatan positifnya tertarik ke titik pusat atom, tetapi gaya tolak-menolak antar elektron menghambat terjadinya pemusatan tersebut. Elektron-elektron itu berada dalam keadaan setimbang. Gangguan pada sistem atom akan menyebabkan getaran elektron-elektron termasuk mengitari titik-titik kesetimbangannya. Getaran-getaran inilah yang memberikan frekuensi yang terpancar oleh atom-atom. Namun, hasil yang diperoleh Thomson dan para rekannya gagal untuk menerangkan garis-garis spektrum atom dengan menggunakan model atom tersebut. Spektrum yang diperoleh dari modelnya sangat berbeda dari spektrum yang dikenal. Selain itu, kelemahan model atom yang dikembangkan oleh Thomson ini juga tidak dapat menjelaskan susunan muatan positif dan negatif dalam bola atom tersebut.

Salah seorang murid Thomson yang bernama Ernest Rutherford (1871-1937) bekerja di Universitas Manchester (Inggris). Ernest Rutherford juga mempelajari struktur atom

80 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

dengan percobaannya, dimana suatu berkas partikel α ditembakkan pada suatu lapisan logam yang sangat tipis. Partikel-partikel α yang menebus lapisan tersebut ternyata tidak semuanya melewati lintasan yang segaris dengan arah datangnya partikel α pada saat sebelum menumbuk lapisan. Lintasan tersebut melengkung. Pelengkungan lintasan α dari arahnya semula sesudah melewati lapisan logam tipis dinamakan *Hamburan Rutherford*.

Secara skematik, susunan percobaan Rutherford dapat dilihat pada Gambar 4.4. Partikel α diperoleh dari sebuah sumber partikel α (unsur radioaktif seperti radium). Agar berkas tersebut cukup lurus maka dipergunakan sebuah kolimator dari bahan bernomor atom tinggi. Berkas sinar α yang tak melalui celah kolimator tersebut akan tertahan.



Sumber: Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics 13th Ed., 2012

Gambar 4.4 Susunan percobaan Rutherford

Pada lapis logam yang tipis berupa lembaran emas terjadi interaksi antara sinar α yang bermuatan positif dengan muatan listrik dalam zat lapisan, baik elektron maupun

muatan positif dalam atom (adanya inti atom belum terbukti di saat itu, gambaran atom masih berupa roti kismis). Partikel α yang terhambur diamati dengan menggunakan layar (berupa zinc sulfida) yang akan memberikan titik fluoresensi (berkelip) ketika ditumbuk oleh partikel α . Pengamatan mengenai hamburan tersebut dilakukan secara visual.

Gambaran umum untuk percobaan hamburan diperlihatkan pada Gambar 4.5. Berkas sejajar dari partikel datang akan dibelokkan oleh target ketika dihamburkan pada sebuah sudut θ tertentu relatif terhadap arah berkas datang. Rumus Rutherford untuk hamburan ini dinyatakan dalam penampang lintang diferensial (*differential cross section*) $d\sigma/d\Omega$, yang memenuhi hubungan berikut:

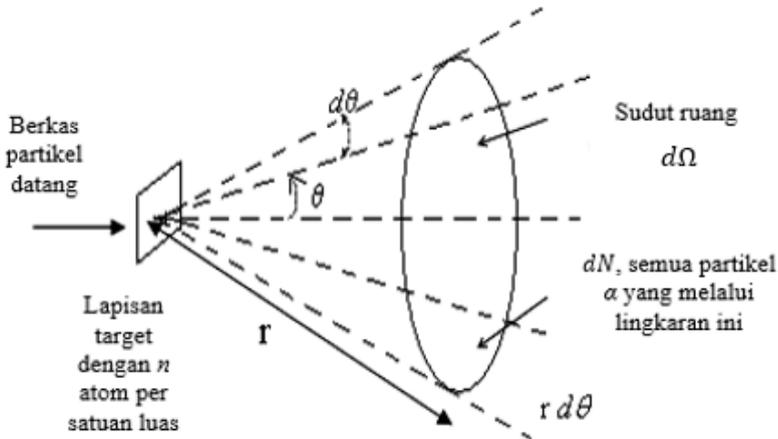
$$dN = Nnt \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (4.8)$$

Dengan dN adalah jumlah rata-rata partikel α yang dihambur ke dalam sudut ruang $d\Omega$ yang berada dalam arah hamburan θ , N adalah jumlah partikel α datang yang mengenai lapis logam dengan ketebalan t yang mengandung n pusat hamburan (inti atom) pada lapis tipis persatuan volum.

Secara umum, $d\sigma$ dapat dianggap sebagai luas efektif di sekitar pusat hamburan yang mana partikel datang pasti menabrak inti sehingga terhambur dalam arah $d\Omega$. Hal ini mudah untuk dipahami jika kita melihat total “luas target” adalah $nt d\sigma$ dan jumlah rata-rata partikel yang menumbuk

82 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

luasan tersebut adalah $Nnt d\sigma$. Dengan asumsi seluruh partikel dN muncul pada rentang $d\Omega$.



Gambar 4.5 Skema hamburan partikel pada lapisan tipis

Pada eksperimen yang sebenarnya, sebuah target dengan ketebalan t dan inti atom persatuan volum n tertentu, disinari dengan seberkas partikel kemudian dihitung jumlah partikel dN yang dihamburkan dalam sudut ruang yang berhingga $d\Omega$ yang berpusat pada Ω . Jika waktu dT diketahui, maka kemudian laju hamburan dapat dinyatakan melalui persamaan:

$$\frac{dN}{dT d\Omega} = \frac{N}{dT} nt \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (4.9)$$

dimana N/dT adalah laju berkas penyinaran selama pengukuran. Jika $d\Omega$ bernilai kecil, Persamaan (4.9) menunjukkan bagaimana mengukur perbandingan $dN/dTd\Omega$ dapat dibandingkan dengan penampang lintang.

Untuk menghitung sudut ruang, lebih mudah jika dianggap koordinat polar bola berpusat pada titik dimana berkas sinar datang menumbuk target, dengan sumbu polar di sepanjang arah berkas datang. Sehingga:

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (4.10)$$

Partikel α merupakan partikel yang cukup berat karena susunannya sebagai He^{2+} . Elektron merupakan partikel bermuatan negatif dengan massa yang lebih kecil dibandingkan dengan partikel α . Bagian atom yang paling berperan dalam hamburan adalah muatan positif atom itu sendiri yang berkaitan dengan bagian terbesar dari massa atom.

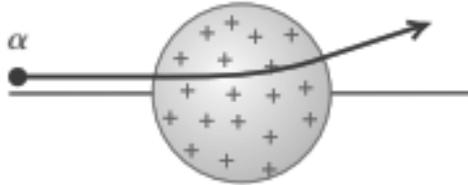
Kesesuaian antara model atom dengan hasil pengamatan tentang penampang lintang diferensial $d\sigma/d\Omega$ sebagai fungsi dari sudut hamburan θ , diperoleh apabila diandaikan bahwa:

- a. Interaksi yang mempengaruhi lintasan partikel α adalah interaksi antara partikel α secara elektrostatik dengan muatan positif atom.
- b. Muatan positif dan massa atom hanya menempati sebagian kecil dari ruang atom tersebut.

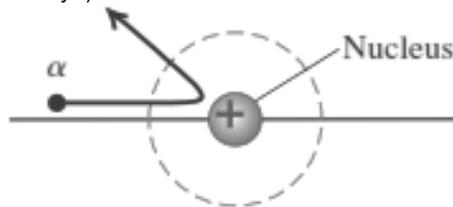
Perbedaan model atom Thomson dan Rutherford dapat dilihat pada Gambar 4.6, dimana model atom Thomson gagal menjelaskan hasil eksperimen tentang hamburan partikel α yang dilakukan oleh Rutherford.

84 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

- (a) Model atom Thomson: Partikel alfa dihamburkan hanya dalam sudut yang kecil



- (b) Model atom Rutherford: Partikel alfa dapat terhambur pada sudut yang besar oleh inti bermuatan positif yang padat (tidak digambar dalam skala yang sebenarnya)



Sumber: *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics 13th Ed., 2012*

Gambar 4.6 Perbandingan model atom Thomson dan Rutherford

Dengan demikian terdapat suatu gambaran yang sangat berbeda antara model atom Rutherford dengan model atom menurut Thomson. Seluruh muatan positif beserta massa atom (yang bukan elektron) terpusat disuatu volum kecil dalam ruang atom. Bagian massa yang padat dan bermuatan positif itu dinamakan inti atom. Elektron tidak lagi berdiam dalam massa atom, tetapi berada di luar inti dan mengelilingi inti atom seperti planet-planet yang mengelilingi matahari.

Percobaan hamburan Rutherford dan model yang dikembangkannya untuk dapat menerangkan hasil hamburan tersebut, akhirnya mengubah gambaran orang tentang struktur atom, dari model roti kismis ke model planet-

matahari. Namun terdapat suatu perbedaan yang besar dalam analogi antara elektron-inti dan sistem planet-matahari. Hal ini terletak pada gaya interaksi yang terlibat. Pada kasus atom, gaya yang bekerja adalah gaya elektromagnet sedangkan dalam sistem planet-matahari adalah gaya gravitasi.

Hukum dasar elektromagnet meramalkan bahwa muatan yang dipercepat akan memancarkan radiasi elektromagnet. Jadi menurut hukum klasik elektron yang mengelilingi inti atom akan senantiasa memancarkan radiasi elektromagnetik. Karena itu lintas edarnya makin lama akan semakin kecil sehingga akhirnya elektron akan masuk ke dalam inti. Teori klasik tentang elektromagnet dapat dipergunakan untuk menghitung waktu yang diperlukan untuk memancarkan semua energi kinetik dan potensial elektron menjadi radiasi elektromagnet. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa waktu tersebut adalah sebesar 10^{-8} detik, namun kenyataan yang terjadi tidak seperti itu. Jadi gambaran gerak planet untuk elektron mengelilingi inti atom tidak sesuai dengan teori klasik mengenai listrik dan magnet.

Menurut teori umum relativitas Einstein, planet-planet dalam lintasannya mengelilingi bumi juga memancarkan "gelombang gravitasi" yang juga mengurangi energinya. Tetapi karena kecilnya faktor ini, diperkirakan bahwa kehilangan energi pada sistem matahari hanya beberapa persen dari energi asli yang dimiliki sejak pembentukannya

5×10^9 tahun yang lalu. Hal ini sangat berbeda dengan elektron yang bergerak mengelilingi inti.

3. MODEL ATOM MENURUT BOHR

Pada tahun 1913 seorang fisikawan Denmark yang bekerja bersama Ernest Rutherford di Universitas Manchester membuat usulan revolusioner untuk menjelaskan stabilitas atom dan juga absorpsi spektrum garis. Fisikawan tersebut adalah Niels Bohr yang memiliki inovasi yang sangat besar dalam mengombinasikan konsep foton dengan gagasan fundamental yang baru. Menurut Bohr, sebuah atom hanya dapat memiliki energi dengan nilai tertentu. Hipotesisnya merupakan terobosan dari ide-ide pada abad ke-19.

Pendapat Bohr ketika di Manchester adalah bagaimana mengkuantisasi sistem atom yang pada dasarnya merupakan sistem mekanis. Pemikiran dari Bohr tersebut kira-kira sebagai berikut:

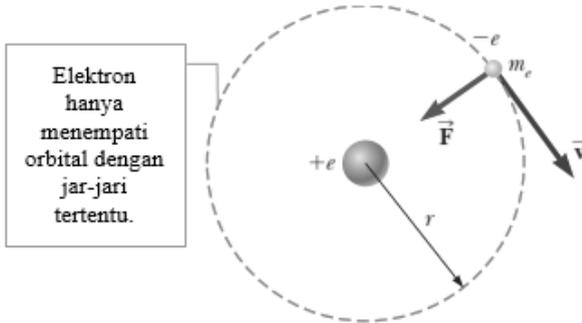
- a. Karena radiasi yang dipancarkan oleh atom itu terkuantisasi, maka seharusnya sistem atom yang menjadi sumber pancaran radiasi itu juga harus terkuantisasi.
- b. Apabila atom memancarkan suatu kuantum energi, tentunya sistem atom akan kehilangan energi sebanyak itu pula.

- c. Mengingat pernyataan pada poin b, maka selisih energi antara berbagai tingkat energi yang dimiliki sistem atom mempunyai harga-harga tertentu.

Berdasarkan pemikiran Bohr di atas, muncul “mekanika baru” yang berbeda dengan mekanika klasik, khususnya tentang atom. Mekanika baru ini memungkinkan adanya beberapa keadaan stabil untuk atom, dimana pada keadaan tersebut elektron dalam atom tidak memancarkan radiasi elektromagnet meskipun elektron tersebut melakukan gerak lingkaran (atau eliptik) mengelilingi inti atom. Hal ini tidak sejalan dengan teori elektromagnet, tetapi akan memberi jalan pada pemahaman tentang mekanika baru.

Pada permulaan abad ke-20, masih belum dipahami kenapa atom pada sebuah elemen memancarkan atau menyerap radiasi dengan panjang gelombang tertentu saja. Pada tahun 1913 Bohr mengajukan penjelasan tentang spektrum atom hidrogen yang mencakup beberapa sifat dari teori yang baru saja diterima pada saat itu. Model atom hidrogen Bohr mencakup asumsi-asumsi dasar sebagai berikut:

- a. Elektron bergerak pada orbit berbentuk lingkaran ketika mengelilingi inti atom, seperti diperlihatkan pada Gambar 4.7. Gerak elektron tersebut dipengaruhi oleh gaya tarik Coulomb yang menghasilkan percepatan sentripetal elektron sesuai dengan keadaan mekanika klasik.



Sumber: College Physics 9th Ed., 2012

Gambar 4.7 Diagram model atom hidrogen Bohr

Asumsi pertama ini memberikan susunan atom hidrogen dan gaya yang berkerja antara inti atom dan elektron.

- b. Atom hidrogen terdiri dari sebuah elektron yang bergerak dalam suatu orbit (lintasan edar). Orbit elektron dalam atom hidrogen yang stabil hanyalah yang mempunyai harga momentum angular L yang merupakan kelipatan dari tetapan Planck dibagi 2π , yaitu:

$$L = m_o v r = n \hbar \quad (4.11)$$

dimana n adalah bilangan bulat dan $\hbar = h/2\pi$. Asumsi ini memberikan kuantisasi sistem atom, dimana yang dikuantisasikan adalah momentum angular L (kuantisasi ini juga mengkuantisasi lintas edar).

- c. Dalam orbit yang stabil, elektron yang mengelilingi inti atom tidak memancarkan energi elektromagnet sehingga energi totalnya tidak berubah. Asumsi ini menyatakan bahwa dalam orbit yang stabil elektron tidak memancarkan energi elektromagnetik.
- d. Energi elektromagnetik akan dipancarkan oleh sistem atom jika suatu elektron yang melintasi orbit stabil

dengan energi E_i "loncat" ke suatu orbit stabil lainnya berenergi E_f . Radiasi elektromagnet yang dipancarkan memiliki frekuensi f yang besarnya:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} \quad (4.12)$$

Asumsi ini menyatakan bahwa dalam transisi dari suatu orbit stabil ke yang lainnya, elektron memancarkan energi elektromagnetik (foton) dengan frekuensi yang sesuai dengan beda energi atom pada dua keadaan stabil diatas.

Berdasarkan empat asumsi diatas, kita dapat menghitung energi yang diperbolehkan dan panjang gelombang emisi dari atom hidrogen menggunakan model yang digambarkan pada Gambar 4.7, dimana elektron bermassa m_o bergerak dalam orbit lintasan berbentuk lingkaran dengan jari-jari r dan kecepatan orbit v . Gaya elektromagnet bekerja antara inti (bermuatan $+Ze$) dan elektron (bermuatan $-e$) dan gaya tersebut adalah gaya sentripetal, sehingga berlaku:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_o v^2}{r} \quad (4.13)$$

Hubungannya diatas memberikan

$$m_o v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Ze^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Ze^2}{m_o r} \quad (4.14)$$

90 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

Energi total elektron E , terdiri dari energi kinetik EK , dan energi potensial EP , sehingga berdasarkan hukum kekekalan energi:

$$E = EK + EP$$

Dimana energi kinetik adalah:

$$EK = \frac{1}{2} m_o v^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_o} \frac{Ze^2}{r} \quad (4.15)$$

dan energi potensial listrik atom adalah:

$$EP = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{(-e)(Ze)}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Ze^2}{r} \quad (4.16)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.15) dan (4.16) pada hukum kekekalan energi di atas, maka diperoleh:

$$E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_o} \frac{Ze^2}{r} \quad (4.17)$$

dimana tanda negatif menunjukkan bahwa elektron terikat pada proton.

Menurut asumsi kedua, momentum anguler orbit elektron L terkuantisasi, yaitu $L = m_o vr = n\hbar$, sehingga jari-jari orbit elektron juga terkuantisasi sebagai:

$$r_n = \frac{n\hbar}{m_o v} \quad (4.18)$$

Kuadrat dari Persamaan (4.19) menghasilkan:

$$r_n^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m_o^2 v^2}$$

Karena diketahui Persamaan (4.14), maka diperoleh rumus kuantisasi untuk radius orbit:

$$r_n^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m_o^2} \frac{4\pi\epsilon_o m_o r_n}{Ze^2}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Ze^2m_o} n^2 \quad (4.19)$$

Substitusi Persamaan (4.19) ke Persamaan (4.17) maka diperoleh ungkapan untuk energi elektron

$$E = -\frac{m_oZ^2e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (4.20)$$

Apabila dievaluasi dua tetapan di atas, maka diperoleh radius bohr a_o

$$a_o = -\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2m_o} = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (4.21)$$

dan juga diperoleh tetapan:

$$\frac{m_o e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = 2,17 \times 10^{-13} \text{ Joule} = 13,6 \text{ eV} \quad (4.22)$$

Hasil telaah memberikan jari-jari dan energi atom (energi elektron) yang terkuantisasi masing-masing adalah:

$$r_n = a_o n^2 = (5,29 \times 10^{-11}) n^2 \text{ m} = 0,529 n^2 \text{ \AA} \quad (4.23)$$

$$E_n = -2,17 \times 10^{-13} \frac{1}{n^2} \text{ Joule} = -13,6 \frac{1}{n^2} \text{ eV} \quad (4.24)$$

Bilangan bulat n memenuhi

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

n dinamakan bilangan kuantum utama. Perlu diperhatikan bahwa dalam penurunan diatas digunakan $Z=1$ (atom hidrogen).

Contoh 4.2

Hitunglah kedua panjang gelombang terpanjang deret Balmer ion berilium terionisasi tiga kali ($Z = 4$).

Penyelesaian:

Radiasi deret Balmer berakhir pada $n = 2$, kedua panjang gelombang tersebut berkaitan dengan transisi $m = 3$ ke $n = 2$ dan $m = 4$ ke $n = 2$. Energi dan panjang gelombang radiasi yang bersangkutan adalah:

$$E_3 - E_2 = -(13,6 \text{ eV})(4^2) \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) = 30,2 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{30,2 \text{ eV}} = 41,0 \text{ nm}$$

$$E_4 - E_2 = -(13,6 \text{ eV})(4^2) \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right) = 40,8 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{40,8 \text{ eV}} = 30,4 \text{ nm}$$

Kedua radiasi ini berada dalam daerah ultraviolet.

Nilai jari-jari lintasan orbit elektron dan energi sistem atom hidrogen sebagai fungsi n dicantumkan dalam Tabel 4.3. Lintasan orbit yang terkecil diperoleh untuk $n = 1$, untuk lintasan orbit tersebut energi ikatan elektron dalam atom adalah paling besar. Apabila $n = \infty$, elektron tidak lagi mengitari inti atom, pada keadaan seperti ini atom tersebut terionisasi.

Tabel 4.3 Nilai energi dan jari-jari lintasan orbit elektron sistem atom hidrogen

N	E_n (eV)	r_n (Å)
1	-13,60	0,529
2	-3,40	2,12
3	-1,51	4,76
4	-0,85	8,46
5	-0,54	13,22
.	.	.
.	.	.
∞	0	∞

Inti atom terdapat pada pusat lingkaran orbit elektron dan memiliki muatan $+Ze$, sedangkan elektron melingkari pusat inti dan dapat mempunyai beberapa harga r_n tertentu. Menurut asumsi keempat dari Bohr di atas, semua transisi dari suatu orbit ke orbit lain (misalnya ke $n = 2$ untuk deret Balmer), akan memancarkan radiasi elektromagnetik dengan frekuensi:

$$f_{m,2} = \frac{E_m - E_n}{h} = \frac{E_m - E_2}{h}$$

dengan $m = 3, 4, 5, \dots$. Dengan menggunakan Persamaan (4.24), diperoleh:

$$\begin{aligned}
 f_{m,2} &= \frac{1}{h} \left[-\frac{13,6}{m^2} - \left(-\frac{13,6}{2^2} \right) \right] (1,60 \times 10^{-19}) \\
 f_{m,2} &= \frac{(1,60 \times 10^{-19})(13,6)}{6,63 \times 10^{-34}} \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right] \\
 f_{m,2} &= 3,282 \times 10^{15} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Begitu juga deret Paschen diperoleh jikadigunakan $n = 3$ dan $m > 3$, sehingga:

94 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

$$f_{m,2} = 3,282 \times 10^{15} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (4.26)$$

dan begitu juga untuk deret-deret yang lainnya.

Secara teori, Persamaan (4.26) berasal dari:

$$f_{mn} = \frac{Z^2 m_o e^4}{32 \pi^2 \epsilon_o^2 \hbar^2 h} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (4.27)$$

Dengan $Z = 1$ untuk atom hidrogen, maka:

$$f_{mn} = \frac{m_o e^4}{(4\pi)^3 \epsilon_o^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (4.28)$$

Sedangkan resiprok panjang gelombang:

$$K_{mn} = \frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{f_{mn}}{c} = \frac{m_o e^4}{(4\pi)^3 \epsilon_o^2 \hbar^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (4.29)$$

Apabila tetapannya dievaluasi, maka diperoleh:

$$\frac{m_o e^4}{(4\pi)^3 \epsilon_o^2 \hbar^3 c} = 1,0894 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$
$$K_{mn} = 1,0894 \times 10^7 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (4.30)$$

Perbedaan dengan tetapan Rydberg ($R_H = 1,0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$) yang diperoleh secara empiris adalah sekitar $- 6,7 \text{ ‰}$. (sangat kecil).

Hasil perhitungan dengan dengan mempergunakan model atom hidrogen menghasilkan:

- Ungkapan teoritik tentang $K_{m,n}$ yang tepat sama dengan rumus empiris untuk $K_{m,n}$.
- Harga perhitungan R_H yang sama dengan penetapan R_H secara empiris.

Model atom Bohr untuk hidrogen mampu memberikan penjelasan tentang spektrum garis radiasi yang

dipancarkannya, serta ramalan tentang frekuensi radiasi yang sesuai dengan hasil eksperimen.

Apabila atom berada dalam keadaan yang dinyatakan dengan bilangan kuantum $n = 1$, maka dikatakan bahwa atom tersebut berada pada tingkat dasarnya (*ground state*). Hal tersebut mudah untuk dimengerti, karena pada keadaan tersebut keadaan ikatan antara elektron dan inti atom paling kuat. Apabila $n = 2, 3, \dots < \infty$, atom dikatakan berada dalam keadaan tereksitasi (*excited state*). Untuk $n = \infty$, elektron tidak lagi menjadi bagian sistem, dalam hal demikian atom terionisasi (*ionized*).

Sangatlah jelas kesesuaian antara teori atom hidrogen menurut Bohr dan pengamatan eksperimental tentang garis spektrum radiasi atom hidrogen. Hal tersebut menjadikan keempat postulat Bohr sangat kokoh dalam usaha untuk mencari dasar-dasar suatu “mekanika baru” yang dapat menerangkan permasalahan pada tingkat atom dan sub-atom. Sebagaimana diuraikan sebelumnya, keempat postulat Bohr berpijak pada hal-hal fundamental yang menonjol di bidang fisika pada awal abad ke-20.

4. KOREKSI TERHADAP HASIL TEORI BOHR

Secara garis besar teori Bohr tentang atom hidrogen memberikan ramalan yang benar tentang spektrum garis hidrogen. Meskipun hasilnya cukup baik dibandingkan dengan hasil pengukuran secara eksperimen, namun beberapa koreksi harus dilakukan. Koreksi-koreksi ini tidak

mengubah secara fundamental rumus-rumus tentang spektrum hidrogen, artinya tidak banyak mengubah hasil-hasil perhitungannya.

a. Koreksi karena massa inti atom berhingga

Perhitungan energi atom E_n didasarkan pada anggapan bahwa massa inti sama dengan tak berhingga. Dalam kenyataannya massa proton $M \approx 1836 m_o$. Permasalahan ini dapat diatasi dengan mengganti besaran massa elektron pada persamaan-persamaan sebelumnya dengan massa tereduksi μ ,

$$\mu = \frac{m_o M}{m_o + M} \quad (4.31)$$

Pada bahasan atom hidrogen sebelumnya, kita memperlakukan inti sebagai objek yang dikelilingi oleh elektron. Padahal, kenyataannya terdapat saling interaksi antara inti dan elektron, sistem gabungannya dapat bergerak bebas. Gerak sistem tersebut secara klasik dapat dinyatakan sebagai gerak benda tunggal dengan massa yang terkonsentrasi pada pusat massa, dimana massa benda tunggal tersebut adalah massa tereduksi pada Persamaan (4.31). Disebut massa tereduksi karena besarnya lebih kecil dari m_o . Koreksinya terhadap harga R_H adalah 5×10^{-4} , begitu juga terhadap E_n . Jelas bahwa koreksi ini sangat kecil.

b. Koreksi relativistik

Untuk mengetahui efek relativistik, besaran yang terkait adalah kecepatan relatif terhadap kecepatan cahaya,

$\beta=v/c$. Dari Persamaan (4.15) dan (4.18) yang telah dijelaskan di atas diperoleh ungkapan untuk v , yaitu:

$$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{n\hbar} \tag{4.32}$$

Dari Persamaan (4.32), kecepatan terbesar didapat jika $n = 1$, sehingga:

$$v_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar} = 2,18 \times 10^{-6} \text{m/s} = 7,3 \times 10^{-3} c$$

Dari hasil di atas diperoleh bahwa:

$$\beta = \frac{v}{c} = 7,3 \times 10^{-3} \tag{4.33}$$

$$\beta^2 = 5,3 \times 10^{-5}$$

Oleh karena itu, hubungan massa relativistik dan massa diam elektron dapat kita tuliskan menjadi:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{4.34}$$

Perubahan energi E_n yang terjadi karena perubahan massa elektron karena efek relativistik, hanyalah di sekitar 10^{-4} . Koreksi ini bernilai kecil.

Gambaran yang baru akan diperoleh apabila kita tidak membatasi diri pada orbit berupa lingkaran, tetapi mulai menggunakan kemungkinan orbit yang berbentuk elips. Orbit yang berbentuk elips juga merupakan solusi apabila gaya interaksi bekerja dengan kebergantungan fungsional terhadap r sebagai $1/r^2$. Hal ini menjadi pokok perhatian dalam model Sommerfeld.

5. MODEL ATOM HIDROGEN MENURUT WILSON-SOMMERFELD

Kuantisasi Planck untuk osilator atom dan kuantisasi Bohr untuk atom dengan satu elektron memunculkan pertanyaan tentang keberadaan mendasar hubungan antara dua kondisi kuantisasi ini. Pada tahun 1916 William Wilson dan Arnold Sommerfeld mengumumkan sebuah aturan umum untuk kuantisasi semua sistem fisika dengan koordinat yang memiliki fungsi periodik terhadap waktu. Aturan tersebut adalah:

$$\oint P_q dq = n_q h \quad (4.35)$$

dimana dq adalah koordinat generalisasi yang sangat kecil (*infinitesimal generalized coordinate*), P_q adalah momentum generalisasi yang berhubungan dengan koordinat, n_q adalah bilangan kuantum yang mengambil bilangan integral, dan integralnya dalam satu siklus lengkap dari koordinat generalisasi. Hal terpenting dari aturan kuantisasi ini adalah fungsinya dalam memperluas penggunaan teori kuantum lama pada semua sistem yang menunjukkan kebergantungan periodik terhadap waktu. Aturan ini sangat umum dan mampu untuk memprediksi kondisi kuantisasi Bohr dan Planck melalui analisis langsung dari model sederhana.

Untuk contoh spesifik penggunaan dari aturan kuantisasi Wilson-Sommerfeld, kita akan meninjau model atom Bohr dimana elektron bergerak dengan gerakan periodik pada

orbit lingkaran di sekitar inti atom pada ruang tetap. Koordinat terbaik digunakan untuk model atom hidrogen Bohr adalah koordinat polar r dan θ . Sesuai dengan Persamaan (4.35), kuantisasi radial untuk elektron diberikan oleh:

$$\oint m \frac{dr}{dt} dr = n_r h \quad (4.36)$$

dimana r adalah jari-jari orbit elektron. Karena jari-jari konstan, $r = r(t)$, kemudian $dr/dt = 0$ dan ruas kiri persamaan (4.36) menjadi 0. Jadi, tidak ada kondisi kuantisasi muncul dari koordinat- r .

Kuantisasi gerak melingkar diperoleh melalui:

$$p_\theta = I_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad (4.37)$$

dimana momen inersia diberikan oleh:

$$I_\theta = mr^2 \quad (4.38)$$

dan kecepatan sudut ditunjukkan oleh:

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \quad (4.39)$$

Substitusi Persamaan (4.38) dan (4.39) ke Persamaan (4.37) maka diperoleh:

$$p_\theta = mr^2 \omega \quad (4.40)$$

Persamaan kuantisasi Wilson-Sommerfeld menjadi:

$$\begin{aligned} \oint P_q dq &= \oint P_\theta d\theta = n_\theta h \\ mr^2 \omega \oint d\theta &= n_\theta h \end{aligned} \quad (4.41)$$

100 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

Satu siklus penuh koordinat lingkaran diperoleh dengan mengambil nilai θ dari 0 sampai 2π . Sehingga Persamaan 4.41 menjadi:

$$mr^2\omega \oint_0^{2\pi} d\theta = n_\theta h \quad (4.42)$$

Integral persamaan di atas dan substitusi $v=\omega r$ menghasilkan:

$$mvr = n_\theta \hbar$$

Hasil ini sangat sesuai dengan kuantisasi Bohr untuk momentum sudut elektron seperti pada Persamaan (4.12).

Sebagai contoh kedua dari aplikasi aturan kuantisasi Wilson-Sommerfeld, perhatikan osilator harmonik klasik yang berorientasi sepanjang sumbu- x . Energi total suatu osilator harmonik, E adalah:

$$E = EK + EP \quad (4.43)$$

dengan energi potensial $EP = \frac{1}{2}kx^2$, dan energi kinetik $EK = \frac{p_x^2}{2m}$.

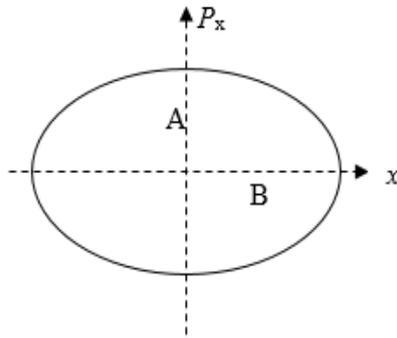
Persamaan (4.43) di atas dapat ditulis sebagai:

$$1 = \frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} \quad (4.44)$$

Apabila dimisalkan bahwa:

$$A \equiv \sqrt{2mE} \text{ dan } B \equiv \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

Dalam suatu sistem koordinat dengan sumbu p_x dan sumbu x , persamaan di atas merupakan suatu lengkung berbentuk elips dengan sumbu utama sepanjang A dan B , seperti diperlihatkan pada Gambar 4.8. Luas elips tersebut adalah πAB .



Gambar 4.8 Elips pada sumbu p_x dan sumbu x

Luas elips itu dapat dinyatakan sebagai:

$$\oint P_x dx = \pi AB \tag{4.45}$$

Dari permisalan A dan B , diperoleh bahwa:

$$AB = \sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} = \frac{2E}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{4.46}$$

$$\pi AB = \frac{2\pi E}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{4.47}$$

Dari teori tentang osilator $k/m = \omega^2$ atau $(k/m)^{1/2} = 2\pi f$, maka diperoleh:

$$\pi AB = \frac{2\pi E}{2\pi f} = \frac{E}{f} \tag{4.48}$$

Hasil integral $\oint p_x dx$ untuk suatu osilator harmonik adalah:

$$\oint P_x dx = \frac{E}{f} \tag{4.49}$$

Jika perumusan kuantisasi secara umum dari Wilson-Sommerfeld diterapkan, maka:

$$\oint P_x dx = n_x h$$

$$n_x h = \frac{E}{f}$$

Sehingga diperoleh kuantisasi Planck:

$$E = n_x h f$$

Gagasan kuantisasi ini cukup "aneh", tetapi memberikan cara untuk mengkuantisasikan sistem mekanik.

Sommerfeld meluaskan orbit atom Bohr sampai pada orbit yang berbentuk elips. Dalam kasus ini, secara esensial elektron masih berputar dalam satu bidang datar. Dalam hal ini ada 2 koordinat generalisasi, yaitu r dan θ . Apabila kaidah Wilson-Sommerfeld diterapkan untuk mengkuantisasikan sistem, maka diperoleh perangkat persamaan $\oint P_\theta d\theta = n_\theta h$ dan $\oint P_r dr = n_r h$. Jadi, keadaan sistem ditentukan oleh 2 bilangan kuantum, n_θ dan n_r . Karena momentum sudut kekal, kita dapat menuliskan kembali

$$\oint P_\theta d\theta = \oint L d\theta = L \oint d\theta = 2\pi L = n_\theta h$$

$$L = \frac{n_\theta h}{2\pi} = n_\theta \hbar \quad (4.50)$$

dimana $n_\theta = 1, 2, 3, \dots$. Kondisi kuantisasi ini sama dengan kondisi yang diperoleh untuk orbit lingkaran. Untuk orbit lingkaran, komponen radial dari momentum sudut p_r , sama dengan 0 dan bilangan kuantum n_r juga harus sama dengan nol. Nilai n_r tidak sama dengan nol untuk orbit elips dengan sumbu semi-mayor a dan sumbu semi-minor b . Untuk orbit

tersebut, kita dapat mengevaluasi dan menentukan integral p_r menggunakan:

$$\oint P_r dr = 2\pi L \left(\frac{a}{b} - 1 \right) = n_r h \quad (4.51)$$

Eksentrisitas ε orbit ellips ditentukan menggunakan:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2} \quad (4.52)$$

Orbit lingkaran memiliki eksentrisitas nol. Perkalian eksentrisitas dan jarak antara pusat ellips dan salah satu titik fokus dimana proton terletak a , pada posisi dimana komponen radial momentum linier elektron $r = a(1 \pm \varepsilon)$ sama dengan nol. Pada posisi ini, energi total elektron akan sama dengan energi potensial dan energi kinetik rotasi (yang dapat dinyatakan dalam momentum angular elektron)

$$E = EP(r) + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} \quad (4.53)$$

Momentum sudut L dapat dinyatakan dalam bilangan kuantum n_θ dan n_r

$$L = n_\theta \hbar = \frac{n_r \hbar}{\frac{a}{b} - 1}$$

Sehingga, kedua bilangan kuantum saling berkaitan satu sama lain melalui hubungan:

$$n_\theta \left(\frac{a}{b} - 1 \right) = n_r \quad (4.54)$$

Persamaan ini dapat ditulis kembali sebagai hubungan antara a dan b , menjadi:

$$n_\theta(a - b) = n_r b$$

104 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

$$\begin{aligned} an_{\theta} &= (n_{\theta} + n_r)b = bn \\ b &= a \frac{n_{\theta}}{n} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Bilangan bulat n disebut sebagai bilangan kuantum utama, bilangan bulat n_{θ} disebut bilangan kuantum azimut. Sumbu semi-mayor a dapat di hitung menggunakan kondisi untuk stabilitas mekanik orbit elips, dimana:

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Ze^2 \mu} \quad (4.56)$$

Meskipun kita tidak menurunkan hasil ini, namun kita dapat secara cepat memeriksa bahwa hasil tersebut konsisten dengan sebuah orbit lingkaran dengan stabilitas yang mensyaratkan:

$$\begin{aligned} F_{electric} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{a^2} = \frac{\mu v^2}{a} = \frac{1}{a} \frac{a^2 \mu^2 v^2}{a^2 \mu} = \frac{L^2}{a^3 \mu} \\ a &= \frac{4\pi\epsilon_0 L^2}{Ze^2 \mu} = \frac{4\pi\epsilon_0 n_{\theta}^2 \hbar^2}{Ze^2 \mu} = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Ze^2 \mu} \end{aligned}$$

Energi total sistem adalah sama dengan:

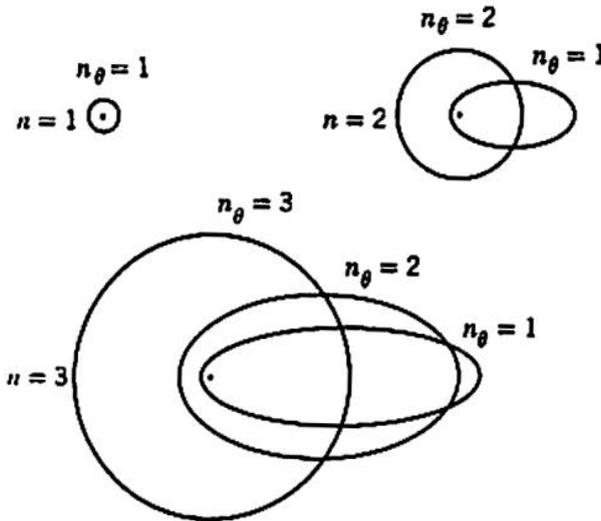
$$E = - \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mu (Ze^2)^2}{2n^2 \hbar^2} \quad (4.57)$$

Bentuk-bentuk orbit elektron untuk tiga nilai n ditunjukkan pada Gambar 4.9. Berdasarkan Persamaan (4.57), elektron pada dua orbit untuk $n = 2$ memiliki energi yang sama. Orbit-orbit ini dikatakan berdegenerasi. Eksperimen menunjukkan bahwa orbit yang berbeda untuk nilai n tertentu memiliki perbedaan energi yang kecil. Untuk menjelaskan perbedaan energi ini kita harus membicarakan orbit menggunakan

mekanika relativistik, hal ini membawa kita pada pernyataan energi sebagai berikut:

$$E = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu(Ze^2)^2}{2n^2\hbar^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left[\frac{1}{n_\theta} - \frac{3}{4n} \right] \right\} \quad (4.58)$$

Pada persamaan ini, α adalah konstanta struktur-halus (*fine structure constant*) yang bernilai sekitar 1/137. Seperti yang kita lihat, orbit-orbit dengan n yang sama tetapi n_θ berbeda akan memiliki energi berbeda dan degenerasi telah dihilangkan.



Gambar 4.9 Bentuk-bentuk orbit elektron untuk tiga nilai bilangan kuantum utama

Pemisahan tingkat energi bernilai kecil. Sebagai contoh orbit $n = 2$. Perbedaan antara dua orbit yang mungkin adalah sama dengan:

$$\Delta E = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu(Ze^2)^2}{2n^2\hbar^2} \left\{ \frac{\alpha^2}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{3}{8} \right) \right] \right\}$$

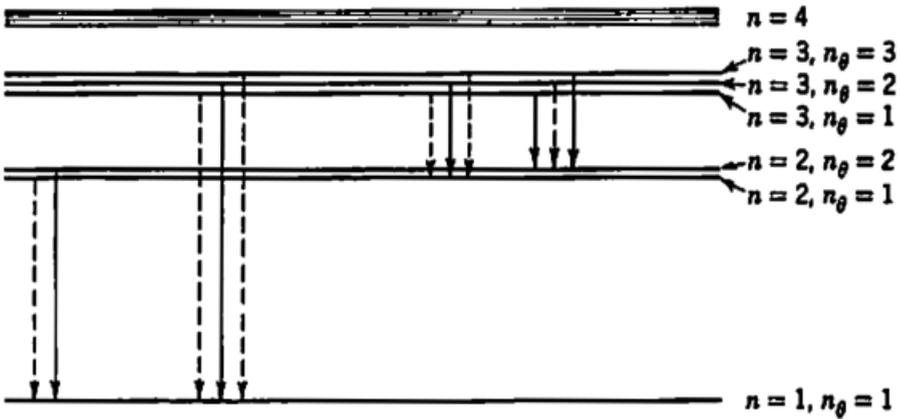
106 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

$$\Delta E = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu(Ze^2)^2}{2n^2\hbar^2} \left\{\frac{\alpha^2}{4}\right\} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\mu(Ze^2)^2}{2n^2\hbar^2} \{1 \times 10^{-5}\}$$

Beberapa tingkat energi dihitung menggunakan pernyataan relativistik untuk E yang diperlihatkan pada diagram tingkat energi pada Gambar 4.10. Panjang gelombang yang diukur untuk atom hidrogen sesuai dengan prediksi yang dibuat menggunakan pernyataan relativistik untuk E .

Panah putus-putus pada Gambar 4.10 menunjukkan transisi yang pada dasarnya mungkin tetapi tidak teramati. Berdasarkan bilangan-bilangan kuantum keadaan yang terlibat dalam transisi, kita dapat menyimpulkan bahwa transisi hanya terjadi jika:

$$n_{\theta i} - n_{\theta f} = \pm 1$$



Gambar 4.10 Diagram tingkat energi

SOAL LATIHAN

1. Secara klasik, sebuah elektron dalam sebuah orbit mengelilingi proton yang diam akan memenuhi hukum

ketiga Kepler, yang memiliki bentuk $T^2 = (\text{konstanta})r^3$. Dimana T adalah periode orbit elektron dan r adalah jarak rata-rata antara elektron dan proton. Dengan menganggap orbit berbentuk lingkaran, tunjukkan bahwa konstanta pada hukum Kepler di atas untuk model atom hidrogen Rutherford adalah $16\pi^3\epsilon_0 m/e^2$.

2. Tentukan panjang gelombang untuk garis spektrum hidrogen ketiga, keempat dan kelima dari deret Lyman.
3. Elektron dalam sebuah atom hidrogen yang diam melakukan transisi dari $m = 2$ ke $n = 1$ keadaan dasar.
 - (a) Tentukan panjang gelombang, frekuensi dan energi (eV) dari foton yang diemisikan.
 - (b) Perhitungan pada (a) mengasumsikan bahwa semua transisi dari $m = 2$ ke $n = 1$ dilakukan oleh foton, namun hal ini secara teknik salah karena sebagian energi berubah menghasilkan gerakan hantakan pada atom. Dengan menggunakan kekekalan momentum sistem atom dan foton, dan dengan mengasumsikan bahwa energi hantakan atom sangat kecil dibandingkan dengan energi transisi dari $m = 2$ ke $n = 1$, tentukan momentum dan energi dari hantakan atom hidrogen.
4. Tentukan panjang gelombang terpanjang dan energinya dari foton yang diemisikan pada deret Balmer. Tentukan juga Panjang gelombang terpendek yang dari foton yang diemisikan pada deret Balmer.

108 | Model Atom Hidrogen Menurut Bohr

5. Sejumlah elektron dengan energi 12,2 eV ditembakkan pada atom hidrogen dalam sebuah tabung pelepasan gas (*gas discharge tube*). Tentukan panjang gelombang dari garis-garis yang dapat diemisikan oleh hidrogen.

BAB 5

DUALISME PARTIKEL-GELOMBANG DAN PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG

1. DUALISME PARTIKEL-GELOMBANG

Dalam fisika, dualisme gelombang-partikel menyatakan bahwa cahaya dan partikel masing-masing memperlihatkan kedua sifat, yaitu sifat gelombang dan sifat partikel. Ide awal dualisme berakar pada perdebatan tentang sifat cahaya dan partikel sejak 1600-an, ketika teori cahaya yang diusulkan oleh Christiaan Huygens bertentangan dengan teori yang diusulkan oleh Isaac Newton. Melalui hasil kerja Albert Einstein, Louis de Broglie dan lainnya, sekarang ini telah diterima bahwa seluruh objek memiliki sifat gelombang dan partikel (meskipun fenomena ini hanya dapat terdeteksi dalam skala kecil, seperti atom).

Hipotesis Planck mengenai osilator harmonik sederhana, teori kuantum Einstein tentang cahaya, dan teori hamburan Compton, mendukung gagasan dasar bahwa cahaya terkuantisasi dan dalam beberapa proses fisik berperilaku seperti partikel. Berikut ini adalah sifat-sifat dasar cahaya sebagai partikel yang telah diketahui:

- a. energi dan kehadiran cahaya (foton) terkonsentrasi dalam suatu volume dalam ruang, dan tidak menyebar ke semua arah (tidak menyebar seperti gelombang),

- b. tidak memiliki massa diam, sehingga bisa bergerak dengan laju cahaya c ,
- c. memenuhi hubungan $E = hf$, $p = h/\lambda$, dan $E = pc$. Meskipun tidak memiliki massa diam, cahaya (foton) memiliki energi dan momentum, sehingga dapat "bertumbukan" dengan partikel materi lain, contohnya elektron,
- d. dapat dipengaruhi oleh gravitasi seperti halnya partikel-partikel penyusun materi.

Semua sifat partikel yang disebutkan diatas berpijak pada landasan eksperimental yang kokoh. Selain sifat-sifat di atas, dalam interaksinya dengan sistem mekanis, foton tunduk pada hukum-hukum mekanika.

Konsep cahaya sebagai gelombang juga mempunyai landasan eksperimental. Terdapat beberapa sifat cahaya yang hanya dapat diterangkan jika menganggap cahaya sebagai gelombang, khususnya gelombang elektromagnetik. Sifat-sifat cahaya tersebut diantaranya adalah dapat mengalami pemantulan, pembiasan, interferensi dan difraksi. Sebagai gelombang, cahaya dapat dicirikan oleh beberapa hal, yaitu:

- a. kecepatan rambat dan kecepatan fasa,
- b. panjang gelombang atau (frekuensi).

Beberapa gejala fisik hanya dapat diterangkan dengan menganggap bahwa cahaya berperilaku sebagai gelombang, dan beberapa gejala fisik yang lain ditekankan pada perilakunya sebagai partikel. Hal ini dinamakan sebagai

dualisme cahaya. Dualisme cahaya adalah adanya dua macam sifat cahaya, dalam beberapa kejadian fisik segala sesuatunya dapat diterangkan dengan menganggap cahaya berperilaku sebagai gelombang, sedangkan beberapa gejala fisik lainnya hanya dapat diterangkan berdasar perilakunya sebagai partikel. Meskipun adanya dualisme tersebut, tidak pernah dua sifat tersebut muncul sekaligus dalam suatu peristiwa fisika.

2. POSTULAT DE BROGLIE

Pada tahun 1924, Louis de Broglie dalam disertasinya mengusulkan bahwa elektron mungkin memiliki sifat-sifat gelombang. Menurut de Broglie, jika diketahui bahwa cahaya memiliki sifat gelombang dan partikel, maka seharusnya partikel khususnya elektron dapat bersifat gelombang. Pemikiran inilah yang kemudian diteliti dan dikembangkan hingga mengubah sudut pandang fisikawan mengenai hakikat partikel dan gelombang. De Broglie hanya membuat hipotesis atau teori, dan tidak pernah membuktikan elektron bersifat gelombang melalui eksperimen.

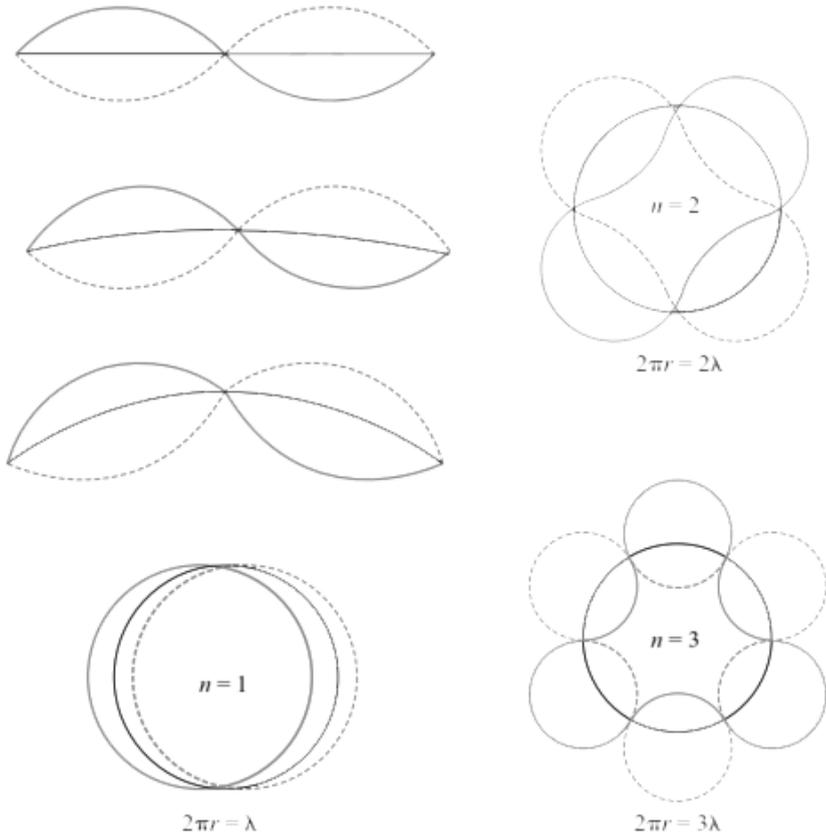
Menurut hipotesis de Broglie, frekuensi dan panjang gelombang dari sebuah gelombang yang terkait dengan partikel masing-masing ditentukan melalui energi E dan momentum p partikel, melalui

$$f = \frac{E}{h} \quad (5.1)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (5.2)$$

Panjang gelombang λ sebuah partikel yang dihitung menurut persamaan tersebut disebut panjang gelombang de Broglie. Hipotesis de Broglie menjelaskan bahwa partikel khusus seperti elektron yang dipercepat dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya akan memiliki momentum karena kecepatannya, serta dengan adanya momentum tersebut, elektron memiliki panjang gelombang. Adanya panjang gelombang inilah yang menyebabkan partikel yang bergerak cepat bersifat sebagai gelombang.

Karena pada saat itu model atom Bohr sudah mantap dalam konsepnya, maka hal tersebut menjadi salah satu pokok de Broglie. Dalam gambaran de Broglie, elektron yang mengelilingi inti atom Bohr didampingi oleh gelombang materi (gelombang pandu). Kuantisasi momentum angular menurut Bohr $L_n = n\hbar$, sebetulnya sama dengan pemenuhan syarat resonansi gelombang materi terhadap panjang lintasan orbit elektron tersebut di dalam atom. Artinya pada orbit Bohr yang pertama, panjang lintasan orbit sama dengan satu panjanggelombang. Panjang lintasan orbit kedua sama dengan dua panjang gelombang pengarah, dan seterusnya. Orbit elektron pada atom Bohr dan kaitannya dengan gelombang berdiri de Broglie dapat dilihat pada Gambar 5.1.



Sumber: *Modern Physics for Science and Engineering*, 2012.

Gambar 5.1 Orbit elektron pada atom Bohr dan kaitannya dengan gelombang berdiri de Broglie

Kuantisasi momentum sudut menurut Bohr akan memberikan bahwa:

$$\begin{aligned}
 L_n &= n\hbar \\
 m_o v r_n &= n\hbar \\
 r_n &= \frac{n\hbar}{m_o v}
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

dapat pula di tulis sebagai:

$$2\pi r_n = \frac{nh}{m_o v} = n\lambda
 \tag{5.4}$$

Jadi, untuk bilangan kuantum utama sebesar n , maka dalam gambaran atom Bohr, panjang lintasan orbit adalah n kali panjang gelombang. Oleh karena itu, panjang gelombang materi λ , adalah:

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{p} \quad (5.5)$$

Disini terlihat kesejajaran antara radiasi dan perilaku gelombang materi. Hipotesis ini berkenaan dengan sifat gelombang dari partikel yang diperlukan untuk perkembangan teori kuantum modern selanjutnya.

Interferensi dan difraksi merupakan dua penunjuk khas perilaku gelombang. Sehingga dengan melakukan dua percobaan tersebut akan menampakkan apakah partikel bersifat sebagai gelombang atau tidak. Peneliti dahulu melakukan percobaan dengan partikel berukuran besar, namun dengan panjang gelombang de Broglie yang sangat kecil maka pola gelap terang tidak tampak pada layar. Partikel sebesar atom atau sub atom dapat digunakan untuk melakukan percobaan difraksi dan interferensi. Berdasarkan hal tersebut, dapat disimpulkan bahwa atom-atom, yang ukurannya dalam orde 10^{-10} m, merupakan objek difraksi yang sangat baik bagi gelombang yang panjang gelombangnya juga dalam orde 10^{-10} m. Jadi verifikasi hipotesis de Broglie harus dilakukan melalui bukti bahwa partikel yang bergerak memperlihatkan gejala-gejala tersebut diatas.

Berdasarkan hasil perhitungan, karena kecilnya nilai h (konstanta Planck), maka hanya partikel berukuran atom

atau inti atom yang perilakugelombangnya dapat teramati. Sehingga untuk benda berukuran besar bila dipercepat dengan kecepatan mendekati cahaya juga akan memiliki sifat gelombang namun panjang gelombang yang teramati sangat kecil. Panjang gelombang kecil mengakibatkan pengamat sulit melihat sifat gelombang partikel.

Di tahun 1926, berkas elektron yang ditembakkan pada kristal digunakan sebagai cara untuk menguji perilaku gelombang materi. Kisi kristal dengan jarak antar atom sebesar beberapa angstrom merupakan kisi yang baik untuk difraksi gelombang materi yang menyertai elektron. Apabila tetapan kisi kristal a (jarak antar atom berdekatan) memiliki nilai sekitar panjang gelombang λ , maka (kalau memang ada) peristiwa difraksi dapat diamati. Jika tetapan kisi $a = 1 \text{ \AA}$, maka panjang gelombang yang diperlukan juga sekitar 1 \AA , maka momentum linier elektron

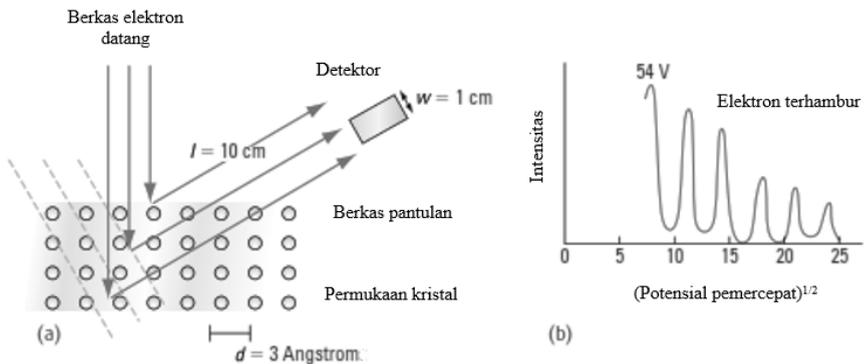
$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{10^{-10}} = 6,63 \times 10^{-24} \text{ kg. m/s}^2$$

dan energi yang diperlukan

$$EK = \frac{p^2}{2m_o} = \frac{6,63 \times 10^{-24} \text{ kg. m/s}}{2(9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 2,41 \times 10^{-17} \text{ J} = 150 \text{ eV}$$

Percobaan yang berhasil menunjukkan difraksi berkas elektron, adalah yang dilakukan oleh Davisson-Germer di tahun 1927 di Amerika Serikat. Dimana pembuktian hipotesis de Broglie datang secara cepat dan tidak disengaja. Tujuan awal dari eksperimen yang dilakukan oleh Davisson dan Germer adalah untuk menyelidiki bagaimana elektron

terhambur setelah menumbuk permukaan logam yang berbeda-beda. Untuk menghindari pembentukan lapisan oksida, hamburan dilakukan dalam tabung hampa udara. Dalam satu percobaan pada permukaan nikel, tabung hampa udara retak sehingga udara masuk ke dalam tabung tanpa sepengetahuan Davisson dan Germer. Permukaan nikel teroksidasi menjadi sebuah pola kristal. Apa yang Davisson dan Germer amati adalah pola yang sangat membingungkan, dimana hamburan terjadi pada beberapa arah dan tidak terjadi pada arah lainnya. Pola tersebut muncul seperti pola terang dan gelap. Bentuk sederhana dari susunan percobaan Davisson dan Germer secara skematis digambarkan pada Gambar 5.2(a).



Sumber: Pearson Physics, 2009

Gambar 5.2(a) Susunan percobaan Davisson-Germer (b) Grafik intensitas (jumlah elektron) terhadap akar kuadrat potensial

Pada Gambar 5.2(a), suatu penembak elektron menghasilkan suatu berkas elektron. Besarnya energi kinetik elektron dalam berkas itu diatur dengan mengatur besarnya

potensial antara anoda dan katoda. Berkas elektron diarahkan pada sasaran yang terbuat dari bahan nikel, Elektron yang dihambur oleh sasaran ini kemudian dikumpulkan oleh kolektor, yang juga sekaligus menjadi detektor arus elektron. Kolektor dapat dipindahkan kedudukannya, sehingga dapat diperoleh pengamatan mengenai besarnya arus kolektor sebagai fungsi dari sudut hamburan.

Untuk meneliti hakikat gelombang dari elektron, mula-mula seberkas elektron dipercepat melalui suatu potensial V , hingga mencapai energi kinetik tidak relativistik

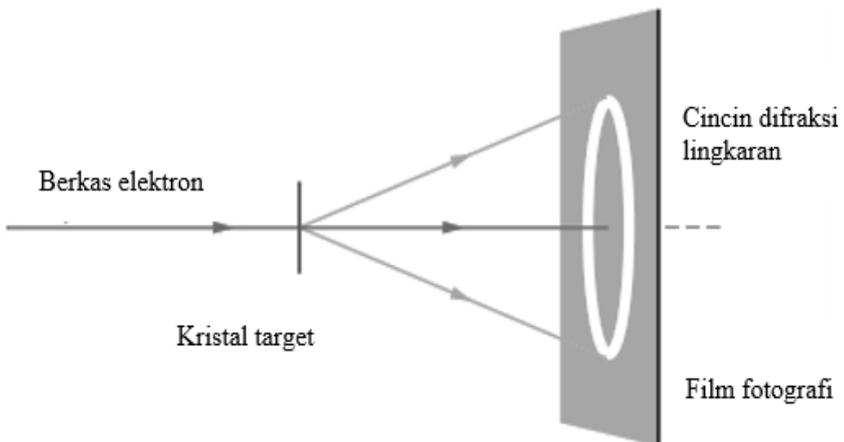
$$EK = eV \quad (5.6)$$

dan momentum

$$p = \sqrt{2mEK} \quad (5.7)$$

Pada Gambar 5.2(b) diperlihatkan grafik hubungan antara Intensitas dan akar kuadrat potensial pemercepat. Intensitas yang tinggi menunjukkan bahwa terdapat banyak elektron yang dihamburkan pada daerah tersebut, menghasilkan daerah terang atau interferensi konstruktif. Begitu juga pada intensitas yang rendah dapat diinterpretasikan sebagai titik gelap atau interferensi destruktif. Mekanika gelombang melukiskan berkas elektron-elektron ini sebagai suatu gelombang dengan panjang gelombang $\lambda = h/p$. Berkas suatu gelombang ini menumbuk sebuah kristal dengan cara yang sama seperti berkas sinar-X.

Sifat atau perilaku gelombang dari suatu berkas elektron dapat juga ditinjau melalui hamburan elektron yang menembus suatu lapis logam yang sangat tipis, seperti diperlihatkan pada Gambar 5.3. Suatu berkas elektron dengan energi tertentu ditembakkan pada suatu cuplikan logam sangat tipis yang kristalin. Elektron yang dihambur terekam pada suatu flat fotografi. Pada pelat fotografi ini terlihat pola difraksi elektron. Gambar 5.4 menunjukkan pola difraksi yang ditangkap oleh layar dengan elektron sebagai objek difraksi dengan bahan sasaran adalah kristal emas.



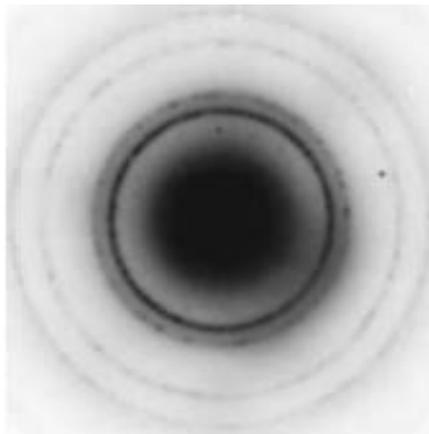
Sumber: *Fundamental of Physics Halliday & Resnick 10th Ed., 2014.*

Gambar 5.3 Hamburan elektron oleh pelat logam kristalin

Pada Gambar 5.4 terlihat titik terang yang menyatakan suatu interferensi maksimum. Pola yang ditunjukkan sama dengan pola difraksi menggunakan sinar-X. Kesamaan ini memberikan bukti kuat bagi kesamaan perilaku gelombang dari elektron dan sinar-X. Bukti kesamaan pola difraksi antara partikel elektron dan sinar-X ini, tidak hanya terbatas pada elektron atau sub atom lain. Perilaku gelombang dari

partikel tidak hanya terbatas pada elektron saja, partikel apapun dengan momentum p memiliki pula panjang gelombang de Broglie $\lambda = h/p$. Elektron hanya contoh gejala umum, sebab dengan ukuran yang sangat kecil dapat menghasilkan panjang gelombang de Broglie yang besar. Panjang gelombang yang besar memudahkan dalam melakukan pengamatan. Gejala difraksi maupun interferensi tidak teramati sebelum tahun 1920 sebab pada masa itu belum ada peralatan yang memadai untuk melakukan percobaan tersebut. Panjang gelombang yang berkaitan dengan difraksi elektron dapat dihitung secara langsung menggunakan difraksi Bragg,

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (5.8)$$



Sumber: Pearson Physics, 2009

Gambar 5.4 Pola difraksi elektron yang dihamburkan atom-atom emas

Perhitungan yang dipergunakan dalam difraksi sinar X akhirnya dapat menentukan panjang gelombang elektron-elektron dalam berkas. Besarnya panjang gelombang yang

diperoleh dari eksperimen ternyata sama dengan harga yang diperoleh dengan menggunakan postulat de Broglie.

Contoh 5.1

Pada sebuah eksperimen difraksi elektron menggunakan tegangan pemercepat 54 V, sebuah intensitas maksimum terjadi pada $\theta = 50^\circ$. Difraksi sinar-X menandakan bahwa jarak antar atom target adalah $d = 2,18 \times 10^{-10} \text{ m} = 0,218 \text{ nm}$. Energi kinetik elektron diabaikan sebelum dipercepat. Tentukan panjang gelombang elektron

Penyelesaian:

Panjang gelombang elektron adalah:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mEK}}$$

$$\lambda = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2(9,109 \times 10^{-31} \text{ kg})(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})(54 \text{ V})}}$$

$$\lambda = 1,7 \times 10^{-10} \text{ m}$$

atau dengan cara alternatif langsung menggunakan Persamaan (5.8)

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

$$(1)\lambda = 2d \sin \theta$$

$$\lambda = 2(2,18 \times 10^{-10} \text{ m}) \sin 50^\circ$$

$$\lambda = 1,7 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Contoh 5.2

Tentukan energi minimum foton yang dapat digunakan jika kita ingin mengamati sebuah objek berukuran $2,5 \text{ \AA}$, dan tentukan juga energi elektron jika yang digunakan adalah elektron bukan foton.

Penyelesaian:

Energi minimum foton yang dapat digunakan adalah

$$E_{min} = hf_{min} = \frac{hc}{\lambda_{maks}}$$

$$E_{min} = \frac{12,40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{2,5 \text{ \AA}}$$

$$E_{min} = 4,96 \times 10^3 \text{ eV}$$

Energi minimum elektron yang dapat digunakan adalah

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}}$$

$$K_{min} = \frac{h^2}{2m_0\lambda_{maks}^2}$$

$$K_{min} = \frac{(hc)^2}{2(m_0c^2)\lambda^2}$$

$$K_{min} = \frac{(12,4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}{2(0,511 \times 10^6 \text{ eV})(2,5 \text{\AA})^2}$$

$$K_{min} = 24,1 \text{ eV}$$

Dalam usaha untuk memahami makna fisik dari gelombang partikel, kita akan mempertimbangkan gerak gelombang yang paling sederhana. Gelombang de Broglie menyebar sepanjang sumbu x positif dengan kecepatan

sudut ω , panjang gelombang λ , dan amplitudo konstan A dapat ditunjukkan oleh:

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (5.9)$$

Dalam upaya melokalisasi gelombang, mari kita pertimbangkan untuk menambahkan dua gelombang seperti di atas. Jika gelombang pertama diwakili oleh

$$\Psi_1(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (5.10)$$

dan gelombang kedua diwakili oleh

$$\Psi_2(x, t) = A \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t] \quad (5.11)$$

maka superposisi linier dari kedua fungsi tersebut diberikan oleh

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)$$

$$\Psi(x, t) = A\{\cos(kx - \omega t) + \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t]\} \quad (5.12)$$

dengan menggunakan definisi:

$$\alpha \equiv kx - \omega t \quad \text{dan} \quad \beta \equiv (k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t \quad (5.13)$$

dan identitas trigonometri

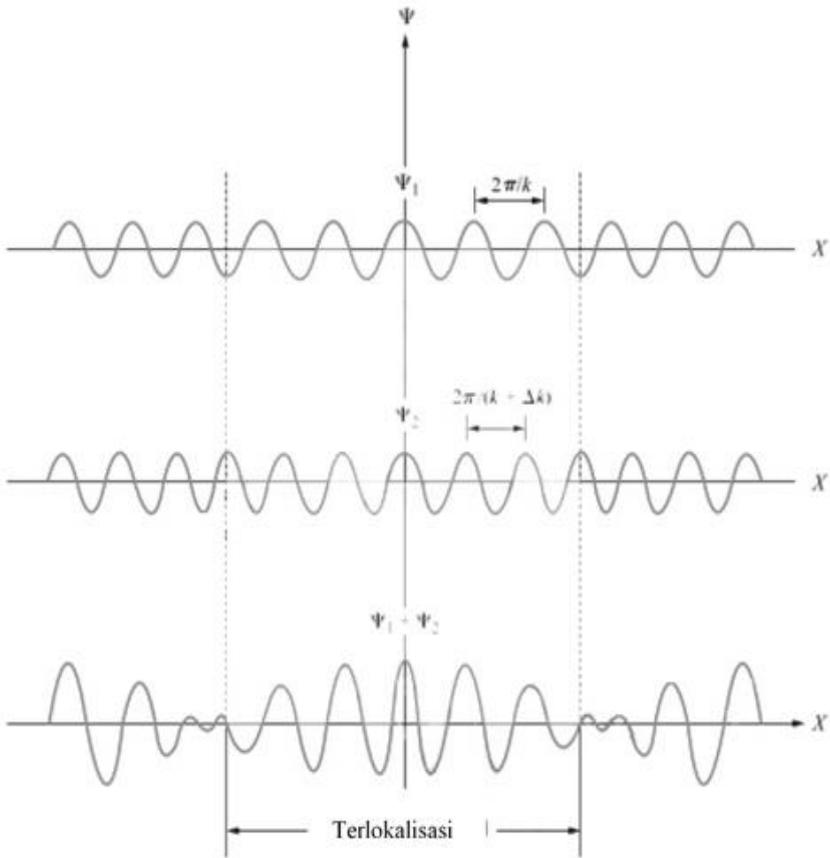
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (5.14)$$

maka kita peroleh hasil yang menarik, yaitu:

$$\Psi(x, t) = 2A \left[\cos\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2}\right)t \right] \cos\left(-\frac{\Delta k}{2}x + \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$$

$$\Psi(x, t) = 2A \left[\cos\left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\omega + \frac{\Delta \omega}{2}\right)t \right] \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \quad (5.15)$$

Penjumlahan dua gelombang monokromatis dengan amplitudo sama dan frekuensi yang sedikit berbeda secara kualitatif diperlihatkan pada Gambar 5.5.



Sumber: *Modern Physics for Science and Engineering*, 2012.

Gambar 5.5 Superposisi linier dari dua fungsi gelombang

Dengan menganggap $\Delta k \ll k$ dan $\Delta \omega \ll \omega$, maka Persamaan (5.15) menjadi:

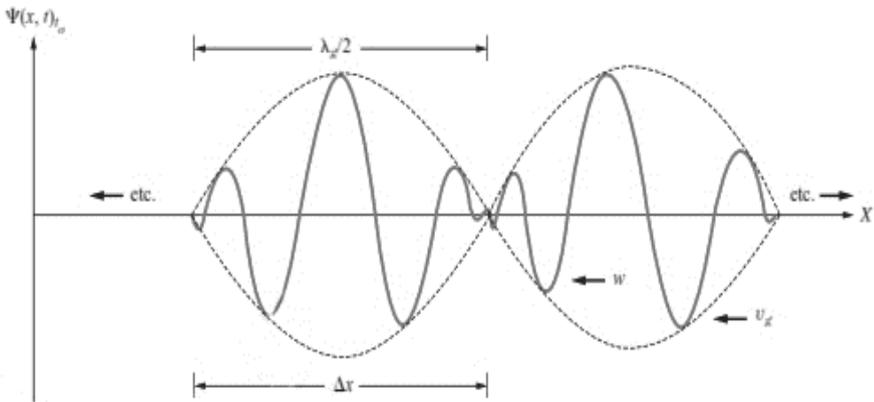
$$\Psi(x, t) = 2A \cos(kx - \omega t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \quad (5.16)$$

dimana $\cos(kx - \omega t)$ mewakili gelombang fasa dan $\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$ mewakili gelombang grup, dengan:

$$k_g \equiv \frac{\Delta k}{2} \tag{5.17}$$

$$\omega_g \equiv \frac{\Delta \omega}{2} \tag{5.18}$$

Gelombang fasa dan gelombang grup diperlihatkan pada Gambar 5.6.



Sumber: *Modern Physics for Science and Engineering*, 2012.

Gambar 5.6 Penjumlahan $\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)$ pada waktu $t = t_0$

Kecepatan grup v_g secara sederhana dinyatakan oleh:

$$v_g \equiv \lambda_g f_g \tag{5.19}$$

Hubungannya dengan energi dan momentum diperoleh melalui:

$$v_g \equiv \lambda_g f_g = \frac{\lambda_g}{2\pi} 2\pi f_g \tag{5.20}$$

$$v_g = \frac{\omega_g}{k_g} = \frac{\Delta \omega / 2}{\Delta k / 2}$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\hbar\Delta\omega}{\hbar\Delta k} = \frac{\Delta E}{\Delta p} \quad (5.21)$$

Berdasarkan hal tersebut, kecepatan grup dapat dinyatakan dalam bentuk diferensial

$$v_g = \frac{dE}{dp} \quad (5.22)$$

Kecepatan fase w , dinyatakan oleh persamaan

$$w \equiv \lambda f \quad (5.23)$$

yang juga dapat dinyatakan dalam energi dan momentum sebagai:

$$w \equiv \lambda f = \frac{\lambda}{2\pi} 2\pi f$$

$$w = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} \quad (5.24)$$

Kecepatan partikel v seperti yang telah kita ketahui memiliki persamaan:

$$v \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (5.25)$$

Dengan menggunakan hubungan:

$$\Delta x = \frac{\lambda_g}{2} = \frac{2\pi/k_g}{2} = \frac{\pi}{k_g}$$

Substitusi dari Persamaan (5.17) ke persamaan di atas akan menghasilkan persamaan:

$$\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta k} \quad (5.26)$$

Persamaan (5.26) sangat berguna dalam pembahasan tentang prinsip ketidakpastian Heisenberg dalam subbab selanjutnya.

Energi non-relativistik dari partikel klasik yang telah kita ketahui adalah:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (5.27)$$

Berdasarkan Persamaan (5.27), maka diperoleh hubungan kecepatan fase dengan kecepatan partikelnya sebagai berikut:

$$w = \frac{v}{2} \quad (5.28)$$

Dengan mengambil diferensial dari Persamaan (5.27), maka diperoleh:

$$dE = \frac{2p dp}{2m} = \frac{p dp}{m} \quad (5.29)$$

Penyusunan ulang Persamaan (5.29) ini memberikan hasil:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

yang secara tidak langsung memberikan makna bahwa:

$$v_g = v \quad (5.30)$$

Persamaan (5.30) menunjukkan bahwa kecepatan grup dari gelombang de Broglie yang berkaitan dengan sebuah partikel selalu sama dengan kecepatan partikel klasik. Berdasarkan Persamaan (5.30), maka diperoleh hubungan antara kecepatan fase w dan kecepatan grup v_g , yaitu:

$$w = \frac{v_g}{2} \quad (5.31)$$

3. PRINSIP-PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG

Ketika melakukan pengukuran terhadap posisi dan kecepatan sebuah partikel pada waktu tertentu, maka kita akan selalu dihadapkan dengan ketidakpastian pengukuran yang dilakukan dalam sebuah eksperimen. Menurut mekanika klasik, kemungkinan untuk mendapatkan hasil pengukuran yang tepat selalu ada. Dengan kata lain, pada prinsipnya dimungkinkan untuk membuat pengukuran dengan ketidakpastian yang kecil secara bebas. Namun, teori kuantum memprediksi, bagaimanapun juga kemungkinan semacam itu tidak ada sama sekali. Pada tahun 1927 Werner Heisenberg memperkenalkan gagasan ini, yang sekarang dikenal sebagai prinsip ketidakpastian. Prinsip tersebut menyatakan bahwa jika pengukuran posisi partikel dibuat dengan ketelitian Δx dan pengukuran momentum linier secara bersamaan dilakukan dengan presisi Δp_x , maka hasil perkalian dari dua ketidakpastian ini tidak akan pernah lebih kecil dari $h/4\pi$, atau

$$\Delta x \Delta p_x \geq h/4\pi \quad (5.32)$$

Dengan kata lain, secara fisika tidak mungkin mengukur posisi dan momentum linier sebuah partikel secara bersamaan dengan teliti. Jika Δx sangat kecil, maka Δp_x bernilai besar, dan sebaliknya.

Untuk mendapatkan Persamaan (5.32), kita mulai dari persamaan umum fungsi gelombang $\Psi(x, t)$ seperti pada Persamaan (5.9), yaitu:

$$\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Karena frekuensi sudut didefinisikan $\omega = 2\pi f$ dan bilangan gelombang $k = 2\pi/\lambda$, serta $E = hf$ dan $\lambda = h/p$, maka kita dapat mensubstitusikan keempat persamaan ini pada persamaan gelombang di atas, sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} - 2\pi f t\right) \\ \Psi(x, t) &= A \cos\frac{1}{\hbar}(px - Et) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Karena $\Psi(x)$ adalah sebuah fungsi gelombang, maka kita dapat menuliskannya sebagai deret Fourier, yaitu:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \cos kx dk \quad (5.34)$$

atau

$$\Psi(x) = \mathcal{F}[g(k)] \quad (5.35)$$

Untuk mencari koefisien di atas, maka kita harus menganggap momentum klasiknya adalah nilai rata-rata dari seluruh momentum yang mungkin membentuk semacam kurva distribusi probabilitas. Secara khusus, pada distribusi normal berarti probabilitasnya adalah $P_k = A_k e^{-(k-k_o)/2\sigma_k^2}$. Berdasarkan hal tersebut, maka dapat dituliskan:

$$g(k) = \sqrt{P_k} = \sqrt{A_k} e^{-(k-k_o)/4\sigma_k^2} \quad (5.36)$$

Sekarang, anggap kuadrat harga mutlak dari fungsi gelombang adalah $|\Psi(x)|^2$. Besaran tersebut adalah distribusi probabilitas, yang menyatakan posisi paling mungkin dari sebuah partikel. Jika kita misalkan x_o adalah posisi paling mungkin dari sebuah partikel, maka distribusi

normalnya adalah $P_x = A_x e^{-(x-x_0)/2\sigma_x^2}$. Sekarang, kita akan menyatakan pembungkus dari sebuah fungsi f adalah f_{env} . Karena P_x kebetulan adalah pembungkus bagian atas dari $|\Psi(x)|^2$, maka:

$$\Psi(x)_{env} = \sqrt{P_x} = \sqrt{A_x} e^{-(x-x_0)^2/(4\sigma_x^2)} \tag{5.37}$$

Selain itu, $\int_{-\infty}^{\infty} P_x dk = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$, karena jumlah total dari semua probabilitas harus sama dengan 1. Ini berarti kita dapat mencari koefisien A_x dengan menggunakan normalisasi sederhana, sehingga diperoleh:

$$A_x = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \tag{5.38}$$

Sekarang kita menyatakan $\Psi(x) = \mathcal{F}g(k)$ dalam bentuk:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \cos kx dk \tag{5.39}$$

dankonjugat Fourier dapatditulis sebagai berikut:

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \cos kx dk \tag{5.39}$$

Substitusi Persamaan (5.36) dan (5.37) ke Persamaan (5.39), maka diperoleh:

$$\sqrt{A_k} e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_x \sqrt{2\pi}}} e^{-(x-x_0)^2/(4\sigma_x^2)} \cos kx dk \tag{5.40}$$

Karena fungsi $\Psi(x) \cos kx$ adalah fungsi genap, integralnya dari negatif tak berhingga sampai ke positif tak berhingga dapat disederhanakan menjadi dua kali integral dari nol

sampai ke tak berhingga. Integralnya dapat dicari pada tabel integral, yaitu:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

Pada kasus $\Psi(x)$, kita perhatikan bahwa kita mungkin untuk memilih $x_0 = k_0 = 0$, dan kita juga mempunyai $a^2 = \frac{1}{4\sigma_x^2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2\sigma_x}$ dan $b = k$. Berdasarkan hal di atas, maka integral dari Persamaan (5.40) adalah:

$$\begin{aligned} \sqrt{A_k} e^{-k^2/4\sigma_k^2} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_x}} e^{-x^2/(4\sigma_x^2)} \cos kx \, dx \\ \sqrt{A_k} e^{-k^2/4\sigma_k^2} &= \frac{2\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{1}{2\sigma_x}\right)} e^{-k^2/(4(1/4\sigma_x^2))} \end{aligned} \tag{5.41}$$

Berdasarkan persamaan di atas maka $\sqrt{A_k}$ dan $\frac{2\sqrt{\pi}}{2(1/2\sigma_x)}$ adalah sama, sehingga kita peroleh:

$$e^{-k^2/4\sigma_k^2} = e^{-k^2/(4(1/4\sigma_x^2))} \tag{5.42}$$

Sekarang kita ambil natural log dari kedua ruas, sehingga kita peroleh:

$$-\frac{k^2}{4\sigma_k^2} = -\frac{k^2}{4\left(\frac{1}{4\sigma_x^2}\right)} \tag{5.43}$$

Persamaan (5.43) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= -\frac{1}{4\sigma_x^2} \\ \sigma_k \sigma_x &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5.44}$$

Seperti yang kita ketahui bahwa $k = p/\hbar$, maka:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2} \quad (5.45)$$

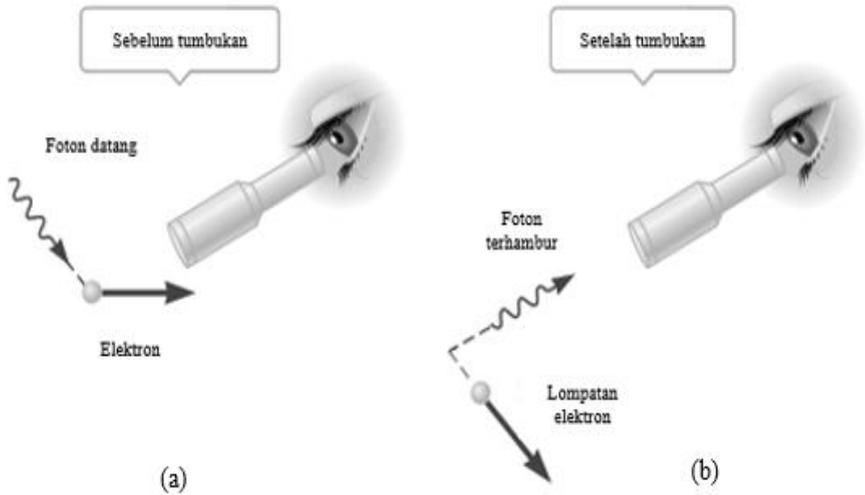
Ingat bahwa ini hanya benar jika distribusi probabilitas adalah normal. Jika tidak, maka $\sigma_x \sigma_p$ akan menjadi lebih besar. Hal ini berarti kita dapat menuliskan hukum yang lebih umum untuk ketidakpastian Heisenberg, yaitu:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_p &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Persamaan di atas merupakan bentuk lain dari Persamaan (5.32).

Untuk memahami asal usul fisika dari prinsip ketidakpastian, pertimbangkan eksperimen pemikiran berikut yang diperkenalkan oleh Heisenberg. Misalkan kita ingin mengukur posisi dan momentum linear elektron seakurat mungkin. Kita mungkin bisa melakukannya dengan melihat elektron dengan mikroskop cahaya yang kuat. Bagi kita untuk melihat elektron dan menentukan lokasinya, paling tidak satu foton dari cahaya harus memantul pada elektron, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.7 (a), dan melewati mikroskop ke mata kita, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.7(b). Ketika mengenai elektron, bagaimanapun juga foton mentransfer beberapa momentum yang tidak diketahui ke elektron. Jadi, dalam usaha untuk menemukan posisi elektron dengan sangat akurat (yaitu dengan membuat Δx sangat kecil), cahaya yang digunakan akan mengubah

pengukuran momentum elektron menjadi semakin tidak pasti (membuat Δp_x sangat besar).



Sumber: *College Physics 9th Ed., 2012*

Gambar 5.7 (a) sebelum tumbukan dan (b) sesudah tumbukan antara foton dan elektron saat pengamatan

Sekarang kita akan mencari prinsip ketidakpastian Heisenberg menggunakan metode yang lebih sederhana. Foton yang masuk memiliki momentum h/λ . Sebagai hasil dari tumbukan, foton mentransfer sebagian atau seluruh momentumnya ke elektron sepanjang sumbu x . Oleh karena itu, ketidakpastian momentum elektron setelah tabrakan sama besarnya dengan momentum foton yang masuk, $\Delta p_x = h/\lambda$. Selanjutnya, karena foton juga memiliki sifat gelombang, kita berharap dapat menentukan posisi elektron melalui panjang gelombang cahaya yang digunakan untuk

melihatnya, jadi $\Delta x = \lambda$. Mengalikan kedua ketidakpastian ini memberikan

$$\Delta x \Delta p_x = \lambda \left(\frac{h}{\lambda} \right) = h \quad (5.47)$$

Nilai h mewakili minimum dari hasil kali ketidakpastian. Karena ketidakpastian selalu bisa lebih besar dari minimum ini, kita memiliki:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h \quad (5.48)$$

Terlepas dari faktor numerik $1/4\pi$ yang diperkenalkan oleh analisis Heisenberg yang lebih tepat, ketidaksetaraan ini sesuai dengan Persamaan (5.32).

Dari pembahasan yang telah kita lakukan di atas, sebenarnya tidak ada yang spesial dari sumbu x . Dalam situasi tiga dimensi dengan koordinat x , y , dan z juga terdapat hubungan ketidakpastian untuk masing-masing koordinat dan komponen momentumnya yang sesuai, yaitu $\Delta x \Delta p_x \geq h$, $\Delta y \Delta p_y \geq h$ dan $\Delta z \Delta p_z \geq h$. Namun, ketidakpastian dalam satu koordinat sama sekali tidak ada hubungannya dengan ketidakpastian dalam komponen momentum yang berbeda. Misalnya, Δx tidak terkait secara langsung dengan Δp_y , begitu juga dengan koordinat yang lainnya.

Bentuk lain dari hubungan ketidakpastian menetapkan batasan pada akurasi dimana energi E suatu sistem dapat diukur dalam interval waktu yang terbatas Δt

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} \quad (5.49)$$

Dari hubungan yang ditunjukkan oleh Persamaan (5.49) dapat disimpulkan bahwa energi suatu partikel tidak dapat diukur dengan sangat presisi dalam interval waktu yang sangat singkat. Oleh karena itu, ketika sebuah elektron dipandang sebagai partikel, prinsip ketidakpastian memberitahu kita bahwa:

- Posisi partikel dan kecepatannya tidak dapat kita ketahui secara tepat pada waktu yang bersamaan dan
- energinya dapat menjadi tidak pasti selama periode yang diberikan oleh $\Delta t = h / (4\pi\Delta E)$.

Contoh 5.3

Kelajuan sebuah elektron adalah $5,00 \times 10^3$ m/s yang diukur dengan akurasi 0,00300%. Tentukan ketidakpastian minimum untuk menentukan posisi elektron tersebut.

Penyelesaian:

Anggap gerak dalam arah x, maka:

$$p_x = m_e v$$

$$p_x = (9,11 \times 10^{-31} \text{kg})(5,00 \times 10^3 \text{m/s})$$

$$p_x = (4,56 \times 10^{-27} \text{kg} \cdot \text{m/s})$$

Ketidakpastian momentum adalah:

$$\Delta p_x = 0,000030 p_x = 0,000030 (4,56 \times 10^{-27} \text{kg} \cdot \text{m/s})$$

$$\Delta p_x = (1,37 \times 10^{-31} \text{kg} \cdot \text{m/s})$$

sehingga

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p_x} = \frac{6,626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}{4\pi \left(1,37 \times 10^{-31} \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} = 0,385 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$\Delta x \geq 0,385 \text{ mm}$$

Ada cara alternatif untuk memahami prinsip ketidakpastian Heisenberg dalam hal sifat gelombang. Pertimbangkan perambatan gelombang elektromagnetik sinusoidal dalam arah x positif dengan medan listriknya terpolarisasi ke arah y . Jika gelombang memiliki panjang gelombang λ , frekuensi f dan amplitude A , kita dapat menulis fungsi gelombang sebagai:

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (5.50)$$

Dalam ungkapan ini bilangan gelombangnya adalah $k = 2\pi/\lambda$ dan frekuensi sudutnya adalah $\omega = 2\pi f$. Kita bisa memikirkan bahwa fungsi gelombang pada Persamaan (5.50) sebagai deskripsi dari sebuah foton dengan panjang gelombang dan frekuensi yang pasti. Dari segi k dan ω kita bisa mengekspresikan momentum dan energi foton sebagai:

$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (5.51)$$

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar \omega \quad (5.52)$$

Sehingga

$$\Psi(x, t) = A \sin[(p_x x - Et)/\hbar] \quad (5.53)$$

Karena fungsi gelombang ini memiliki nilai momentum p_x yang pasti, maka tidak ada ketidakpastian dalam nilai momentum atau $\Delta p_x = 0$. Berdasarkan prinsip ketidakpastian Heisenberg, jika Δp_x nol, maka Δx harus tidak terhingga. Memang, gelombang yang digambarkan oleh Persamaan (5.53) memanjang sepanjang sumbu x dan memiliki amplitudo yang sama di mana-mana. Konsekuensinya, ketika kita ingin mengetahui momentum foton secara tepat maka kita tidak mengetahui posisi foton itu berada.

Dalam situasi praktis kita selalu mengetahui di mana foton berada. Untuk menggambarkan situasi ini, kita membutuhkan fungsi gelombang yang lebih terlokalisasi dalam ruang. Kita bisa membuat fungsi tersebut dengan menggabungkan dua atau lebih fungsi gelombang sinusoidal. Untuk membuat lebih sederhana, kita hanya mempertimbangkan gelombang yang merambat dalam arah x positif. Sebagai permisalan, terdapat dua fungsi gelombang $\Psi_1(x, t)$ dan $\Psi_2(x, t)$. Kedua fungsi gelombang sinusoidal memiliki bentuk seperti pada Persamaan (5.53), namun dengan panjang gelombang dan frekuensi yang sedikit berbeda, sehingga kedua fungsi tersebut memiliki nilai yang berbeda untuk p_{x1} dan p_{x2} serta untuk nilai energy E_1 dan E_2 . Fungsi gelombang total jika kedua fungsi gelombang tersebut ditambahkan adalah:

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)$$

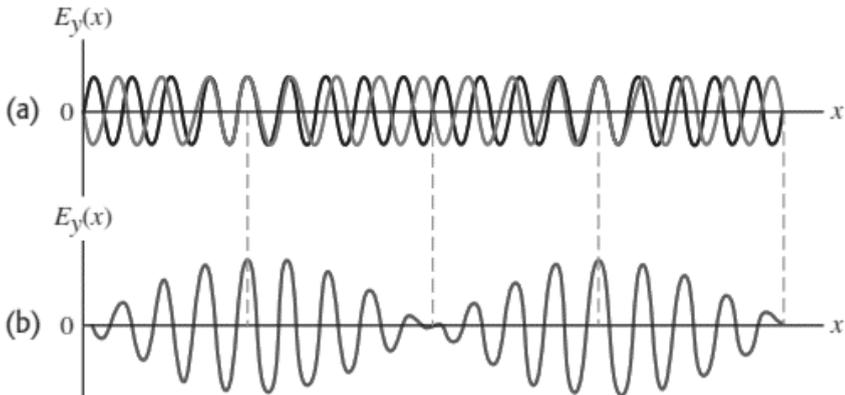
$$\Psi(x, t) = A_1 \sin[(p_{x1}x - E_1t)/\hbar] + A_2 \sin[(p_{x2}x - E_2t)/\hbar]$$

(5.54)

Pertimbangkan fungsi gelombang seperti ini untuk saat tertentu, misalkan $t = 0$. Sehingga persamaan di atas menjadi:

$$\Psi(x, t = 0) = A_1 \sin(p_{x1}x/\hbar) + A_2 \sin(p_{x2}x/\hbar) \quad (5.55)$$

Gambar 5.8(a) adalah grafik dari fungsi gelombang individu pada $t = 0$ untuk kasus $A_2 = -A_1$, dan Gambar 5.8(b) menggambarkan penjumlahan dari fungsi gelombang gabungan $\Psi(x, t)(x, t = 0)$ yang diberikan oleh Persamaan 5.41. Bila kita menggabungkan dua gelombang sinusoidal dengan frekuensi yang sedikit berbeda, gelombang yang dihasilkan akan menunjukkan variasi amplitudo yang tidak ada dalam gelombang aslinya. Dengan cara yang sama, foton diwakili oleh fungsi gelombang pada Persamaan (5.40) dan paling mungkin ditemukan di daerah dengan amplitudo fungsi gelombang paling besar. Artinya, foton terlokalisasi. Namun, momentum foton tidak lagi memiliki nilai yang pasti karena kita mulai dengan dua nilai momentum yang berbeda, p_{x1} dan p_{x2} . Ini sesuai dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg, dengan mengurangi ketidakpastian dalam posisi foton, kita telah meningkatkan ketidakpastian dalam momentumnya.



Sumber: Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics 13th Ed., 2012

Gambar 5.8(a) Dua gelombang sinusoidal yang memiliki nilai bilangan gelombang berbeda dan (b) Superposisi gelombang-gelombang tersebut

Penggabungan gelombang juga menunjukkan bahwa ada prinsip ketidakpastian yang melibatkan energi dan waktu. Untuk melihat mengapa demikian, bayangkan ketika kita mengukur fungsi gelombang gabungan yang dijelaskan oleh Persamaan (5.40) pada posisi tertentu, misalkan $x = 0$, selama periode waktu tertentu. Pada $x = 0$, fungsi gelombang dari Persamaan (5.55) menjadi:

$$\Psi(x = 0, t) = A_1 \sin(-E_1 t/\hbar) + A_2 \sin(-E_2 t/\hbar)]$$

$$\Psi(x = 0, t) = -A_1 \sin(E_1 t/\hbar) - A_2 \sin(-E_2 t/\hbar)] \quad (5.56)$$

Apa yang diukur pada $x = 0$ adalah kombinasi dari dua osilasi medan listrik dengan frekuensi sudut yang sedikit berbeda $\omega_1 = E_1/\hbar$ dan $\omega_2 = E_2/\hbar$. Ini persis dengan fenomena layangan. Amplitudo medan gabungan naik dan turun, sehingga foton yang digambarkan oleh medan ini terlokalisasi pada waktu dan juga pada posisi tertentu. Foton

paling mungkin ditemukan pada saat amplitudonya besar. Konsekuensi dari usaha melokalisasi foton pada waktu tertentu adalah bahwa gelombang tersebut tidak memiliki energi yang pasti. Sebaliknya, jika foton digambarkan oleh gelombang sinusoidal seperti pada Persamaan (5.39) yang memang memiliki energi yang pasti namun memiliki amplitudo yang sama setiap saat, sehingga kita tidak tahu kapan foton akan muncul pada $x = 0$. Jadi semakin teliti kita mengetahui energi foton maka posisi kita akan mengamati fotonnya semakin menjadi tidak pasti.

SOAL LATIHAN

1. Anggap bahwa momentum dari sebuah partikel tertentu dapat diukur dengan akurasi satu per seribu. Tentukan ketidakpastian minimum dari posisi partikel jika partikel adalah:
 - (a) Bermassa 5×10^{-3} kg yang bergerak dengan kecepatan 2 m/s.
 - (b) Sebuah elektron yang bergerak dengan kecepatan $1,8 \times 10^8$ m/s.
2. Tentukan kelajuan dan energi kinetik dari sebuah neutron ($m = 1,675 \times 10^{-27}$ kg) dengan panjang gelombang de Broglie $\lambda = 0,200$ nm, yang juga merupakan jarak umum dari antar atom pada kristal. Bandingkan energi ini dengan energi kinetik translasi rata-rata dari molekul gas ideal pada suhu ruang ($T = 293$ K).

3. Tunjukkan bahwa kecepatan yang memiliki ketidakpastian yang besar yang disebabkan oleh prinsip ketidakpastian tidak memiliki efek pada objek makroskopik (objek yang besar jika dibandingkan dengan atom). Buktikan hal tersebut pada kasus bola 100 g terkurung dalam ruang pada jarak 15 m pada salah satu sisi. Anggap bola bergerak dengan kecepatan 2,0 m/s sepanjang sumbu x.
4. Estimasi energi kinetik sebuah elektron yang terkurung dalam sebuah inti berukuran $1,0 \times 10^{-14}$ m dengan menggunakan prinsip ketidakpastian.
5. Tentukan panjang gelombang dan frekuensi de Broglie yang berkaitan dengan sebuah peluru bermassa 1 gram bergerak dengan kecepatan 663 m/s.

BAB 6

PERSAMAAN GELOMBANG SCHRODINGER

1. PENDAHULUAN

Fisika kuantum telah berhasil menerangkan spektrum garis atom hidrogen, dan menunjukkan bahwa pada gejala fisika di tingkat atom dan sub atom berlaku berbagai pandangan, prinsip, dan kaedah yang sangat berbeda dengan apa yang berlaku untuk sistem-sistem fisika makro. Teori kuantum lama masih sangat bersifat khusus dan ternyata tidak dapat dipergunakan untuk gejala-gejala non-periodik pada tingkat atom. Sehingga diperlukan suatu teori mekanika kuantum yang baru, yang lebih umum sifatnya dan juga lebih komprehensif.

Sampai pada tahun 1926 permasalahan fisika masih berkaitan dengan bagaimana mendapatkan suatu persamaan gerak untuk suatu sistem fisika pada tingkat atomik maupun sub atomik. Kita berbicara tentang persamaan, karena pada akhirnya hukum-hukum dan kaidah fisika dirumuskan dalam bentuk matematika, seperti persamaan Maxwell, persamaan Bernoulli, dan lain-lain. Benar tidaknya persamaan mekanika kuantum tersebut didasarkan pada kesesuaian hasil teoritiknya dengan hasil pengamatan, karena fisika adalah ilmu yang bersifat kuantitatif.

Ada beberapa hal penting yang harus ada dalam teori mekanika baru, yang sebagian besar merupakan hal-hal mendasar dari teori kuantum lama. Hal-hal tersebut adalah sebagai berikut:

1. Konsep klasik tentang lintasan tidak lagi berlaku untuk suatu sistem fisika kuantum, yang berlaku hanyalah suatu deskripsi statistik tentang kebolehjadian kedudukan partikel di suatu titik dalam ruang (prinsip Heisenberg),
2. Dualisme partikel-gelombang,
3. Apabila partikel dilambangkan sebagai suatu gelombang, maka untuk gelombang tersebut berlaku prinsip superposisi gelombang, yaitu apabila Ψ_1 dan Ψ_2 merupakan solusi persamaan gelombang, maka $\Psi = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2$ juga merupakan solusi (dimana C_1 dan C_2 adalah tetapan).

4. Postulat de Broglie dan teori kuantum Einstein

$$\lambda = h/p \text{ dan } \varepsilon = hf$$

5. Hukum kekelan energi (kasus non-relativistik)

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

dengan p adalah momentum linier, m adalah massa partikel dan V adalah energi potensial

6. Untuk V yang konstan, E dan p harus pula konstan dan partikel dinyatakan sebagai gelombang berjalan yang monokromatik (de Broglie).

Jadi dalam mencari persamaan yang baru ini, hal-hal diatas merupakan hal penting yang harus terlingkupi.

Dalam pembahasan yang pada akhirnya berpusat pada persamaan gelombang Schondinger, ditempuh jalan yang lebih menekankan pada kerangka logis dari persamaan tersebut, bukan suatu jalan analitik. Yang terpenting adalah penghayatan tentang kerangka konseptualnya, dengan sedikit mengenyampingkan urutan langkah-langkah yang formal dan lebih analitik. Formalisme yang lebih dalam akan mudah diikuti apabila kerangka konseptualnya telah di pahami. Jadi harus selalu diingat bahwa apa yang disajikan berikut bukanlah penurunan persamaan gelombang Schrodinger.

2. PERSAMAAN GELOMBANG SCHRODINGER

Pendekatan yang dilakukan oleh Schrodinger adalah melalui penggambaran gelombang, terutama karena perilaku gerak partikel dapat dimisalkan sebagai suatu gelombang sebagaimana yang dihipotesiskan oleh de Broglie.

Hubungan antara gelombang cahaya dan gelombang partikel dinyatakan sebagai $\lambda = h/p$. Pengetahuan mengenai berbagai gejala gelombang sudah dikenal secara luas sebelumnya, termasuk penggambarannya dalam bentuk persamaan diferensial (parsial) dan solusinya. Pengetahuan inilah yang kemudian dimanfaatkan.

Gelombang cahaya dapat dipresentasikan sebagai berikut:

$$\varphi(x, t) = E_o \sin(kx - \omega t) \tag{6.1}$$

144 | Persamaan Gelombang Schrodinger

dengan E_o adalah kuat medan listrik, ω adalah frekuensi sudut dan k adalah bilangan gelombang yaitu:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{r} \quad (6.2)$$

Persamaan (6.1) adalah persamaan gelombang cahaya untuk perambatan dalam satu dimensi. Kita ambil terlebih dahulu gerak suatu elektron dalam ruang dengan potensial $V = 0$. Diketahui bahwa sebagai gerak gelombang, penggambarannya adalah sebagai gelombang berjalan yang monokromatik.

Ambil kasus satu dimensi yang dapat dijelaskan oleh persamaan berikut:

$$\varphi(x, t) = A_o \sin(kx - \omega t) \quad (6.3)$$

A_o belum diketahui maknanya, tetapi k dan ω dapat dikaitkan dengan teori Einstein dan Postulat de Broglie. Kedua besaran tersebut dapat diperoleh melalui:

$$E = \frac{p_x^2}{2m_o} \quad (6.4)$$

Sehingga

$$\omega = \frac{p_x^2}{2m_o \hbar} \quad (6.5)$$

dan

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p_x}{\hbar} \quad (6.6)$$

Substitusi Persamaan (6.5) dan (6.6) ke Persamaan (6.3) menghasilkan:

$$\varphi(x, t) = A_o \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2}{2m_o \hbar} t\right) \quad (6.7)$$

dengan p_x adalah momentum antar elektron dan m_o adalah massa elektron.

Misalkan bahwa bentuk persamaan diferensialnya adalah:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \tag{6.8}$$

maka akan diperoleh:

$$\alpha = \frac{p_x^2}{4m_o^2} \tag{6.9}$$

sehingga persamaan akhirnya berbentuk:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{p_x^2}{4m_o^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \tag{6.10}$$

Hasil tersebut tidak digunakan karena ada variabel dinamik muncul dalam persamaan diferensialnya yaitu p_x . Yang lebih mudah ditangani adalah bentuk persamaan dimana di dalamnya hanya muncul tetapan-tetapan fisik, sedangkan variabel dinamik terkandung dalam fungsi gelombangnya. Oleh karena itu dicari alternatif lain, melalui persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \tag{6.11}$$

apabila dicoba maka, $\Psi(x, t) = A_o \sin\left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2}{2m_o \hbar} t\right)$ bukan merupakan solusi, namun yang merupakan solusinya adalah:

$$\Psi(x, t) = A_o \exp \left[i \left(\frac{p_x x}{\hbar} - \frac{p_x^2}{2m_o \hbar} t \right) \right] \tag{6.12}$$

Substitusi Persamaa (6.11) ke (6.10) memberikan:

$$\gamma = \frac{i\hbar}{2m_o} \quad (6.13)$$

Dengan demikian diperoleh persamaan diferensial

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{i\hbar}{2m_o} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (6.14)$$

Solusi dari persamaan ini adalah Persamaan (6.12). Hasil penting mengenai apa yang baru diperoleh adalah:

- persamaan tak mengandung variabel dinamik, dan
- fungsi gelombang berbentuk kompleks.

Hasil yang diperoleh dapat dikembangkan dalam model 3 dimensi, sehingga menghasilkan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{i\hbar}{2m_o} \nabla^2 \psi \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 \psi \end{aligned} \quad (6.15)$$

Schrodinger mengatakan bahwa persamaan gelombang kuantum adalah persamaan yang berkaitan dengan operator-operator, dan persamaan gerak klasik merupakan persamaan yang berkaitan dengan variabel dinamik. Persamaan operator dapat diperoleh dari persamaan klasik dengan menggunakan postulat Schrodinger. Prosedur tersebut adalah sebagai berikut:

- Tuliskan persamaan gerak klasik sebagai hubungan antara energi E , momentum linear \vec{p} , dan potensial V .
- Ubahlah persamaan klasik diatas menjadi persamaan operator dengan mengganti E dengan $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, \vec{p} dengan $-i\hbar \vec{\nabla}$ dan \vec{r} dengan \vec{r} .

c. Operator-operator dalam persamaan itu kemudian bekerja pada fungsi gelombang ψ , dan kemudian persamaan gelombang tersebut diselesaikan.

Selanjutnya, tinjau partikel yang mengalami gaya \vec{F} yang dapat dituliskan sebagai gradien dari energi potensial $V(\vec{r}, t)$

$$\vec{F} = -\nabla V(r, t) \tag{6.16}$$

Oleh karena itu, energi total partikel E dapat diungkapkan sebagai:

$$E = \frac{p^2}{2m_o} + V(\vec{r}, t) \tag{6.17}$$

Kemudian persamaan gerak kuantum partikel di dalam potensial $V(\vec{r}, t)$ diberikan oleh:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \tag{6.18}$$

Persamaan (6.18) ini dikenal sebagai persamaan gelombang Schrodinger untuk partikel di dalam potensial $V(\vec{r}, t)$. Dalam banyak hal, sistem fisis dapat didekati dengan model satu dimensi. Persamaan Schrodinger satu dimensi berbentuk:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t) \tag{6.19}$$

Secara umum, karena energi E dapat dinyatakan dalam Hamiltonian

$$E = H(\vec{r}, \vec{p}, t) \tag{6.20}$$

maka Persamaan (6.18) dapat ditulis menjadi:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(\vec{r}, i\hbar \nabla, t) \psi \tag{6.21}$$

Hamiltonian H sekarang berperan sebagai operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \quad (6.22)$$

yang bekerja pada fungsi gelombang $\psi(\vec{r}, t)$. Dalam persamaan Schrodinger, satu-satunya besaran yang membedakan satu sistem dengan sistem lainnya adalah $V(\vec{r}, t)$, yaitu ungkapan matematis energi potensial sistem.

Terdapat beberapa aspek penting pada struktur matematis persamaan Schrodinger, yaitu:

- a. Adanya bilangan imajiner i dalam persamaan Schrodinger menandakan bahwa persamaan Schrodinger adalah persamaan diferensial dalam ruang kompleks. Hal ini berarti dalam menyelesaikan persamaan Schrodinger akan dihasilkan solusi berupa fungsi kompleks dengan variabel real (posisi dan waktu). Bilangan imajiner ini menyebabkan fungsi gelombang tidak memiliki makna fisik secara langsung.
- b. Persamaan Schrodinger merupakan persamaan diferensial linear, baik terhadap ruang maupun waktu. Jika fungsi gelombang Ψ_1 dan Ψ_2 merupakan solusi persamaan Schrodinger, maka $\Psi = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2$ juga merupakan solusi (dimana C_1 dan C_2 adalah tetapan). Untuk membuktikan pernyataan tersebut, substitusikan $\Psi = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2$ ke Persamaan (6.19) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial(C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2)}{\partial t} &= C_1 \left[-\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2 \Psi_1(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi_1(x, t) \right] \\
 &+ C_2 \left[-\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2 \Psi_2(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi_2(x, t) \right] \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [C_1 \Psi_1(x, t) + C_2 \Psi_2(x, t)] \\
 &\quad + V(x, t) [C_1 \Psi_1(x, t) + C_2 \Psi_2(x, t)] \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t)
 \end{aligned}$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa $\Psi(x, t)$ benar-benar merupakan penyelesaian persamaan Schrodinger untuk sistem yang sama.

- c. Persamaan Schrodinger merupakan persamaan diferensial orde satu terhadap waktu t . Kenyataan ini menunjukkan bahwa perubahan fungsi gelombang terhadap waktu bersifat deterministik. Artinya jika kita mengetahui fungsi gelombang pada t tertentu, misalnya $t = t_0$, maka fungsi gelombang pada t berikutnya dapat diketahui secara pasti.

3. MAKNA FUNGSI GELOMBANG

Dalam persoalan yang sesungguhnya Hamiltonian suatu sistem diketahui atau diberikan. Mengacu pada persamaan Schrodinger yang merupakan persamaan diferensial, jelas persoalannya sekarang adalah mencari solusi ψ dari persamaan tersebut. Jadi, fungsi gelombang ψ merupakan kuantitas teoritis fundamental di dalam mekanika

kuantum. Meskipun demikian, seandainya fungsi gelombang ψ sudah diperoleh, apa makna dari fungsi gelombang tersebut.

Jawaban permasalahan di atas diberikan oleh Max Born pada tahun 1926. Max Born mempostulatkan hubungan antara rapat probabilitas $P(\vec{r}, t)$ dan fungsi gelombang $\psi(\vec{r}, t)$, yaitu apabila t dipandang sebagai waktu dimana sebuah partikel menempati posisinya dengan fungsi gelombang $\psi(\vec{r}, t)$, maka besarnya probabilitas $P(\vec{r}, t)d\vec{r}$, dimana partikel ditemukan di x dan $(\vec{r} + d\vec{r})$ adalah $\Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)d\vec{r}$. Dari pernyataan di atas, dapat dirumuskan persamaan berikut:

$$\Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = P(\vec{r}, t) \quad (6.23)$$

yang merupakan kerapatan probabilitas. Secara lebih spesifik persamaan di atas dapat dituliskan menjadi:

$$P(\vec{r}, t)dV = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV \quad (6.24)$$

Persamaan (6.24) menyatakan kemungkinan untuk mendapatkan partikel yang dideskripsikan oleh $\Psi(\vec{r}, t)$ yang berada dalam volume dV di sekitar posisi \vec{r} pada saat t .

Untuk kasus satu dimensi, probabilitas dapat ditulis menjadi

$$P(x, t)dx = |\Psi(x, t)|^2 dx \quad (6.25)$$

yang menyatakan probabilitas partikel yang dideskripsikan oleh fungsi gelombang $\Psi(\vec{r}, t)$, berada di antara x dan $x + dx$ pada saat t .

Statistik menuntut bahwa probabilitas menemukan partikel tersebut pada suatu saat tertentu dalam ruang

jumlahnya adalah 1 (partikel memang ada di dalam ruang), sehingga:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{r}, t) dx = 1 \tag{6.26}$$

Fungsi gelombang yang memenuhi syarat Persamaan (6.26) dikatakan sebagai fungsi gelombang ternormalisasi.

4. EKSPEKTASI

Batasan mengenai rapat probabilitas $P(\vec{r}, t)$ memungkinkan untuk memperkirakan (dalam artian statistik) harga rata-rata kedudukan partikel pada satu saat tertentu. Harga rata-rata tersebut dinamakan nilai harap, atau nilai ekspektasi, yang ditulis sebagai $\langle x \rangle$. Jadi:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x, t) dx \tag{6.27}$$

atau dalam notasi mekanika kuantum, menjadi:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t)x\Psi(x, t) dx \tag{6.28}$$

Menurut pengertian statistik, persamaan di atas untuk $\Psi(x, t)$ tidak ternormalisasi dapat ditulis kembali menjadi:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t)x\Psi(x, t) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) dx} \tag{6.29}$$

Dengan normalisasi fungsi gelombang $\Psi(x, t)$, bentuk ini akan berubah menjadi bentuk sebelumnya (tanpa penyebut). Dengan demikian jika ditentukan harga ekspektasi suatu fungsi dari x , misalkan $f(x)$, maka dapat diperoleh melalui:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) f(x) \Psi(x, t) dx \quad (6.30)$$

Variable x pada Persamaan (6.28) adalah suatu variabel dinamik menurut kerangka mekanika klasik. Besaran x merupakan variabel dinamik apabila berada dalam fungsi $\Psi(x, t)$, tetapi merupakan operator apabila berada antara $\Psi^*(x, t)$ dan $\Psi(x, t)$. Integrasinya dilakukan terhadap variabel dinamik x .

Untuk x , operator x yang bekerja pada $\Psi(x, t)$ sama efeknya dengan mengalikan x dengan fungsi $\Psi(x, t)$ menjadi $x\Psi(x, t)$. Perbedaan antara memandang x sebagai operator dan sebagai variabel dinamis tidak menghasilkan $\langle x \rangle$ yang berbeda.

Keadaan sangat berbeda dengan momentum linear, variabel dinamikanya adalah P_x dan operatornya adalah $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Persamaan $\langle P_x \rangle$ dapat dicari dengan menggunakan hubungan pada Persamaan (6.30), maka diperoleh:

$$\langle P_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, t) dx \quad (6.31)$$

Hal ini dapat dilanjutkan dengan menghitung $\langle E \rangle$, karena diketahui bahwa menurut postulat Schrodinger, operator untuk E adalah $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, sehingga:

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(x, t) dx \quad (6.32)$$

Dalam ungkapan diatas kedudukan operator tidak dapat ditukar, mengubah posisi operator memberikan makna yang berlainan pada ungkapan dalam tanda integral, kecuali untuk operator x .

Secara umum dapat diberikan batasan tentang harga ekspektasi untuk suatu fungsi $f(x, p, t)$, yaitu apabila $f(x, p, t)$ merupakan suatu besaran dinamis yang bergantung pada variabel dinamis x, p, t dan dipergunakan untuk menguraikan gerak suatu partikel yang berkaitan dengan fungsi gelombang $\Psi(x, t)$, maka harga ekspektasi diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \langle f(x, p_x, t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) f_{op} \left(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, t \right) \Psi(x, t) dx \end{aligned} \tag{6.33}$$

dengan f_{op} diperoleh dari $f(x, p_x, t)$ dengan menggantikan semua p_x dengan $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Jika hal tersebut diterapkan pada ungkapan energi, maka memberikan harga ekspektasi energi yaitu:

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \Psi(x, t) dx \tag{6.34}$$

Untuk partikel yang bergerak dalam ruang 3 dimensi, persamaan di atas menjadi:

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(\vec{r}, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) d\vec{r} \tag{6.35}$$

Persamaan di atas dapat diungkapkan dalam koordinat kartesian, dimana $d\vec{r}$ menjadi $dx dy dz$ atau dalam koordinat

polar, dimana $d\vec{r}$ menjadi $r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$. Semuanya dengan batas-batas integrasi yang sesuai.

5. PERSAMAAN SCHRODINGER BEBAS WAKTU

Tidak mungkin kita dapat menurunkan persamaan Schrodinger dengan cara fisika klasik. Jika pertama-tama kita mulai dengan mempertimbangkan sebuah partikel dengan massa m bergerak dalam potensial $V(\vec{r}, t)$ kita dapat mengekspresikan persamaan gerak kuantum partikel sebagai:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 \Psi + V(\vec{r}, t) \Psi \quad (6.36)$$

Persamaan (6.36) diketahui sebagai persamaan Schrodinger bergantung waktu.

Jika diandaikan terlebih dahulu bahwa variabel dapat dipisahkan, yaitu bahwa:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\varphi(t) \quad (6.37)$$

maka substitusi Persamaan (6.37) ke Persamaan (6.36) akan memberikan:

$$\begin{aligned} i\hbar \psi(\vec{r}) \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_o} \varphi(t) \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}) \varphi(t) \\ i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 \psi(\vec{r}) \right. \\ &\quad \left. + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}) \right] \frac{1}{\psi(\vec{r})} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Perhatikan ruas kiri dan kanan dari persamaan diatas. Bagian kiri hanya merupakan fungsi dari variabel t ,

sedangkan ruas kanan hanya fungsi dari variabel \vec{r} . Persamaan diatas hanya benar untuk setiap harga t dan setiap harga \vec{r} , jika dan hanya jika masing-masing ruas itu merupakan suatu tetapan. Kita misalkan tetapan tersebut adalah E . Maka untuk penyelesaian ruas kanan

$$i\hbar \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = E\varphi(t) \tag{6.39}$$

dan

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \tag{6.40}$$

Selesaikanlah terlebih dahulu persamaan pertama

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi(t)$$

sehingga diperoleh:

$$\varphi(t) = \exp\left[-\frac{iE}{\hbar} t\right] \tag{6.41}$$

Apabila solusi persamaan kedua adalah $\psi(\vec{r})$, maka dari Persamaan (6.37) diperoleh:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left[-\frac{iE}{\hbar} t\right] \tag{6.42}$$

Persamaan ini merupakan pemecahan potensial $V(\vec{r})$ tidak bergantung waktu. Untuk memperoleh makna dari E , maka Persamaan (6.40) tersebut dapat ditulis dalam bentuk operatornya menjadi:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 + V(\vec{r})\right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 + V(\vec{r})\right] = \left[\frac{p^2}{2m_o} + V(\vec{r})\right] = H \tag{6.43}$$

Dimana H adalah operator yang dapat diperoleh dari fungsi Hamiltonian pada Persamaan (6.22). Sehingga dapat ditulis menjadi

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (6.44)$$

Persamaan (6.44) ini disebut sebagai persamaan karakteristik atau persamaan nilai eigen dengan $\psi(\vec{r})$ sebagai fungsi eigen dan H adalah operator diferensial dari energi. E adalah nilai eigen dari operator H , karena itu E disebut juga sebagai energi eigen dan ditafsirkan sebagai energi partikel.

Sebagai ilustrasi, pada tahap ini fungsi gelombang yang diketahui hanyalah untuk arah yang bergerak dalam ruang bebas ($V = 0$). Misalkan partikel bergerak dalam arah satu dimensi saja, dalam hal ini dipilih arah x . Operator H dinyatakan oleh:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Fungsi eigen untuk operator di atas mempunyai bentuk umum

$$\Psi(x) = A_o \exp(ikx)$$

dengan k adalah sebuah tetapan. Perkalian antara operator H dan $\Psi(x)$ memberikan

$$H\Psi(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_o} \Psi(x)$$

Dengan menggunakan hubungan $H\Psi(x) = E\Psi(x)$ maka nilai eigen energi memenuhi

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_o}$$

dimana diperoleh persamaan gelombang total

$$\Psi(x, t) = A_o \exp(ikx) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Karena $p_x = \hbar k$ dan $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_o} = \frac{p_x^2}{2m_o}$, maka diperoleh

$$\Psi(x, t) = A_o \exp\left[i\left(\frac{xp_x}{\hbar} - \frac{p_x^2 t}{2m_o \hbar}\right)\right]$$

Jika kita ambil perkalian $\Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$, maka $\Psi^*\Psi = |A_o^2|$. Dapat disimpulkan bahwa $\Psi^*\Psi$ tidak dapat dinormalisasikan. Fungsi gelombang berjalan monokromatik seperti yang dibahas diatas tersebar diseluruh daerah x , dari $-\infty$ ke $+\infty$, artinya tempat kedudukannya dalam ruang tidak dapat ditentukan. Hal ini memang sesuai dengan prinsip ketakpastian Heisenberg. Sebuah gelombang monokromatik mempunyai harga λ yang tunggal, berarti hanya ada satu pula harga p_x yang sesuai dengan $p_x = \frac{h}{\lambda}$, oleh karena itu $\Delta p_x = 0$ dan sebagai konsekuensinya $\Delta x = \infty$.

Untuk arah satu dimensi, persamaan Schrodinger bebas waktu dapat dirumuskan menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{6.45}$$

Contoh 6.1

Dengan menggabungkan postulat de Broglie dan Schrodinger dan menggunakan fungsi gelombang partikel bebas $\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$, turunkan persamaan Schrodinger satu dimensi bergantung waktu.

Penyelesaian:

Dengan menggabungkan postulat schrodinger ($E = \frac{p^2}{2m} + V$) dengan postulat de Broglie ($p = \hbar k$, $E = \hbar \omega$) diperoleh

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x, t)$$

Kuantitas-kuantitas ω dan k^2 pada persamaan ini dapat diganti dengan turunan parsial fungsi gelombang partikel bebas, yaitu dengan:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi \rightarrow \omega = \frac{i}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi \rightarrow k^2 = \frac{i}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Substitusi ke dalam persamaan di atas, sehingga diperoleh persamaan Schrodinger satu dimensi bergantung waktu, yaitu

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t)\psi(x, t)$$

Contoh 6.2

Anggap sebuah partikel dalam keadaan diam memiliki persamaan keadaan yang merupakan kombinasi linier dari dua keadaan stasioner

$$\psi(x, 0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$$

Dimana konstanta c_1 dan keadaan ψ_1 adalah real. Tentukan fungsi gelombang $\psi(x, t)$ pada waktu t , tentukan juga rapat probabilitasnya.

Penyelesaian:

Untuk fungsi gelombang bergantung waktu adalah

$$\psi(x, t) = c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

Dimana E_1 dan E_2 adalah energi yang berkaitan dengan ψ_1 dan ψ_2 .

Densitas probabilitasnya adalah:

$$|\psi(x, t)|^2 = (c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar})(c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar})$$

$$|\psi(x, t)|^2 = c_1^2\psi_1^2 + c_2^2\psi_2^2 + c_1c_2\psi_1\psi_2 \cos[E_1 - E_2]t/\hbar$$

6. SIFAT DAN PRILAKU SOLUSI PERSAMAAN GELOMBANG SCHRODINGER BEBAS WAKTU

Melalui pembahasan mengenai persamaan gelombang Schrodinger dalam memecahkan persoalan fisika tingkat atom dan sub atom yang telah kita lakukan, kita baru berada dalam tahap pengembangan konsep dan proses teoritis. Proses teoritis ini masih panjang dan melalui lika-liku baru yang sangat berbeda dengan yang telah dikenal dalam

mekanika dan fisika klasik. Untuk langkah selanjutnya dibahas sifat dan perilaku umum solusi persamaan gelombang Schrodinger bebas waktu. Kita belum dapat membahas solusinya karena hal tersebut masih bergantung pada potensial V_x .

Yang penting pada pembahasan kali ini adalah pemecahan solusi umum dari permasalahan nilai eigen Schrodinger yang ditunjukkan pada Persamaan (6.43) dan (6.44). Secara alamiah pemecahan permasalahan nilai eigen memberikan harga E (energi total) yang terkuantisasi. Hal ini sangat penting karena justru kuantisasi ini yang tidak muncul pada persamaan gerak klasik. Kuantisasi yang disebutkan diatas terjadi untuk $\Psi(\vec{r})$ dengan bentuk-bentuk tertentu saja, atau dengan kata lain untuk $\Psi(\vec{r})$ yang mempunyai sifat dan perilaku tertentu saja. Solusi dari $\Psi(\vec{r})$ yang demikian itu merupakan solusi yang dapat diterima.

Untuk memudahkan maka dalam pembahasan selanjutnya akan digunakan satu dimensi saja, yaitu x . Berdasarkan hal tersebut, maka fungsi gelombang dapat dinyatakan sebagai $\Psi(x)$. Agar solusi dari persamaan gelombang $\Psi(x)$ dapat diterima, maka $\Psi(x)$ harus memenuhi sifat-sifat berikut:

- a. Kontinuitas: Solusi dari persamaan gelombang $\Psi(x)$ dan turunan pertamanya $\frac{d\Psi(x)}{dx}$ harus kontinyu untuk semua nilai x .

- b. Dapat dinormalisasi: Solusi dari persamaan gelombang $\Psi(x)$ harus memiliki kuadrat yang dapat diintegrasikan. Kuadrat dari persamaan gelombang dalam seluruh ruang harus konstanta yang berhingga sehingga fungsi gelombangnya dapat dinormalisasi untuk memberikan $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$.
- c. Linieritas: Karena linieritas dari persamaan gelombang $\Psi(x)$, jika diberikan dua solusi independen $\phi_1(x)$ dan $\phi_2(x)$, kita dapat membuat solusi lain dengan mengambil superposisi yang sesuai dari kedua solusi tersebut $\phi(x) = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x)$, dimana $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$ untuk memastikan normalisasi.

Fungsi $\Psi(x)$ yang memenuhi syarat di atas merupakan fungsi yang berkelakuan baik (*well-behaved function*). Apabila fungsinya bersifat demikian maka diharapkan bahwa besaran (variabel dinamis) yang ditentukan berdasarkan fungsi itu, juga berkelakuan baik, yaitu berhingga dan berharga tunggal. Tentunya dapat dipahami bahwa untuk sistem fisika tingkat atomik juga harus memiliki besaran momentum linier, momentum sudut dan energi yang berharga tunggal dan berhingga.

Terdapat beberapa alasan yang digunakan untuk mempersyaratkan sifat-sifat di atas pada $\Psi(x)$. Perhatikan ungkapan berikut:

$$\langle p_x \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x, t) \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] \Psi(x, t) dx$$

atau

$$\langle p_x \rangle = -i\hbar \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) dx$$

Persamaan di atas tentunya harus berharga tunggal dan berhingga, oleh karena itu maka $\Psi(x, t)$ dan $\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x}$ harus pula berharga tunggal dan berhingga untuk seluruh interval x . Kemudian sebagai konsekuensi agar $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ berhingga untuk seluruh interval x , maka $\Psi(x)$ harus kontinyu.

Perhatikanlah persamaan Schrodinger bebas waktu pada Persamaan (6.45). Persamaan tersebut dapat pula ditulis sebagai:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = \frac{2m_0}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi(x) \quad (6.46)$$

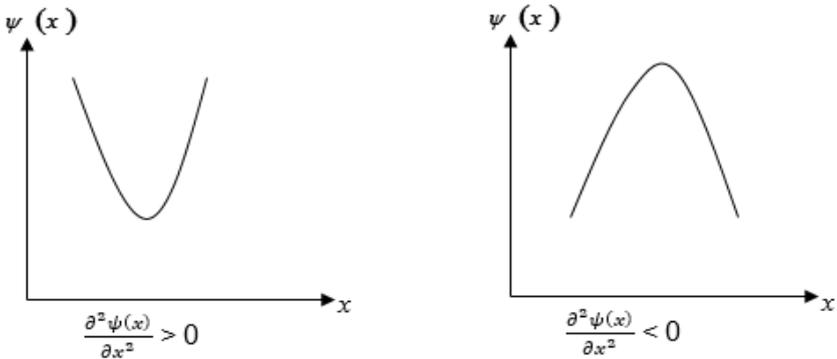
Apabila dalam persamaan diatas $V(x)$, E maupun $\psi(x)$ berhingga, maka tentunya $\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}$ juga berhingga. Oleh karena itu $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$ harus kontinyu. Jadi persyaratan bahwa $\psi(x)$ merupakan fungsi berkelakuan baik datang sebagai syarat-syarat keharusan fisika, agar ungkapan matematik yang dipergunakan untuk menggambarkan situasi tersebut bernilai fisika. Dari ungkapan persamaan gelombang Schrodinger bebas-waktu pada Persamaan (6.46), terlihat bahwa sifat fungsi $\psi(x)$ ditentukan oleh nilai $\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}$ maupun nilai $[V(x) - E]$.

Jika dianggap kita mempunyai fungsi $\psi(x)$, maka ada informasi yang dapat ditarik tentang perilaku $\psi(x)$ apabila diketahui nilai $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}$, yaitu bahwa jika:

$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} > 0$, maka kurva $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}$ cekung ke atas

$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} < 0$, maka kurva $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}$ cekung ke bawah

Hal tersebut dilukiskan secara sistematis pada Gambar 6.1. Oleh karena itu harga $[V(x) - E]$ dapat berharga positif atau negatif, sedangkan harga $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}$ ditentukan baik oleh harga $\psi(x)$ maupun $[V(x) - E]$. Secara skematik perilaku $\psi(x)$ dilukiskan dalam Tabel 6.1.



Gambar 6.1 Kurva turunan kedua fungsi gelombang terhadap x

Tabel 6.1 Skema perilaku $\psi(x)$

Kondisi			Kurva
$\psi(x) > 0$	$[V(x) - E] < 0$	$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} < 0$	

Kondisi		Kurva
	$[V(x) - E] > 0$	$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} > 0$
	$[V(x) - E] < 0$	$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} > 0$
$\psi(x) < 0$	$[V(x) - E] > 0$	$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} < 0$

Dari pembahasan yang telah dilakukan, telah diketahui postulat Schrodinger yang merupakan semacam prosedur dan resep tentang cara memperoleh persamaan gerak pada tingkat atom dari persamaan gerak yang klasik. Dalam mencari persamaan gerak yang berlaku pada tingkat atom, telah dimasukkan pula teori kuantum lama yang meliputi, postulat de Broglie, teori kuantum Einstein, prinsip ketidakpastian Heisenberg, dan hal-hal lain yang berkaitan. Apabila pada kasus klasik, apa yang dipresentasikan oleh fungsi gelombang telah diketahui dari awal, namun tidaklah demikian halnya dengan fungsi gelombang yang muncul dalam persamaan gelombang Schrodinger. Kemudian

diinterpretasikan (dipostulatkan) oleh Born bahwa fungsi gelombang berkaitan dengan rapat probabilitas.

SOAL LATIHAN

1. Tunjukkan bahwa meskipun $\psi(x, t)$ pada umumnya adalah fungsi kompleks, maka hasil perkalian $\psi^*(x, t)$ dan $\psi(x, t)$ selalu menghasilkan fungsi real.
2. Verifikasi bahwa fungsi eigen $\psi(x) = Ae^{ikx} + B^{-ikx}$ adalah solusi persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu.
3. Fungsi gelombang satu partikel diberikan oleh

$$\psi(x, 0) = Ce^{-|x|/x_0}$$

dimana C dan x_0 adalah konstanta.

- (a) Tentukan konstanta C dalam x_0 jika fungsi gelombang ternormalisasi.
 - (b) Tentukan probabilitas partikel untuk ditemukan pada interval $-x_0 \leq x \leq x_0$.
4. Fungsi gelombang satu partikel yang bergerak sepanjang sumbu x diberikan oleh

$$\psi(x) = Ce^{-|x|} \sin \alpha x$$

- (a) Tentukan konstanta C jika fungsi gelombang ternormalisasi
 - (b) Jika $\alpha = \pi$, hitung kemungkinan untuk mendapatkan partikel berada di sebelah kanan titik $x = 1$.
5. Jika diberikan fungsi gelombang $\psi(x) = Ae^{ikx} + B^{-ikx}$, dimana k adalah positif.

166 | Persamaan Gelombang Schrodinger

- (a) Tentukan apakah ini adalah fungsi gelombang Schrodinger tidak bergantung waktu yang valid untuk partikel bebas dalam keadaan stasioner.
- (b) Tentukan energi yang berkaitan dengan fungsi gelombang ini.

BAB 7

PEMECAHAN PERSAMAAN SCHRODINGER BEBAS-WAKTU UNTUK BEBERAPA POTENSIAL SEDERHANA

1. PENDAHULUAN

Persamaan gelombang Schrodinger bebas-waktu

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (7.1)$$

sangat bergantung dari potensial $V(\vec{r})$. Dalam bab ini akan dibahas solusi persamaan tersebut untuk beberapa potensial yang sangat sederhana, dengan fungsi eigen yang bersifat harmonik (eksponensial dalam ix , sinus dan kosinus) dan fungsi eksponensial biasa dalam x . Kasus ini sangat mirip dengan partikel bebas.

Maksud dari contoh-contoh yang dibahas dalam bab ini adalah untuk memahami hal-hal yang paling dasar dan umum yang harus dilakukan dalam mencari solusi persamaan gelombang Schrodinger. Terutama tentang persyaratan yang ditekankan pada fungsi eigen, yaitu persyaratan untuk fungsi berkelakuan baik (*well-behaved function*). Disamping itu juga memberikan pandangan tentang sifat-sifat sistem fisika tingkat atom dan sub atom.

Secara berurutan dalam pembahasan kali ini akan dibahas tentang hal-hal berikut:

- a. Partikel bebas

- b. Partikel dalam sumur potensial dengan dinding yang tak berhingga satu dimensi.
- c. Partikel dan potensial tangga satu dimensi.
- d. Partikel dan potensial penghambat.

Langkah klasik yang biasanya diambil dalam perkuliahan kuantum adalah membahas osilator harmonik dan sistem atom hidrogen.

2. PARTIKEL BEBAS

Partikel yang memiliki energi potensial konstan, dengan kata lain potensial yang dimilikinya tidak bergantung pada posisi partikel, maka dapat dikatakan bahwa partikel tersebut dalam keadaan bebas dan tidak mengalami gaya. Jika kondisi ini terjadi maka terdapat dua kemungkinan keadaan gerak partikel, yaitu diam atau bergerak lurus beraturan. Kasus dimana partikel dalam keadaan diam merupakan kasus yang tidak penting untuk ditelaah lebih lanjut sehingga dalam pembahasan kali ini kita akan membicarakan kasus yang kedua saja, yaitu partikel dalam keadaan bergerak lurus beraturan.

Partikel bebas bergerak dalam ruang apabila tidak ada potensial yang mempengaruhinya. Dalam fisika klasik partikel ini akan bergerak dalam kecepatan konstan, namun dalam fisika kuantum kecepatan partikel menjadi tidak terduga. Permasalahan nilai eigen untuk gerak partikel satu dimensi adalah:

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{7.2}$$

Persamaan di atas mempunyai operator sangat sederhana, yaitu:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 \quad (7.3)$$

Jika Persamaan (7.3) dinyatakan dalam keadaan satu dimensi, misalnya arah x , maka diperoleh:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (7.4)$$

Dengan menggunakan definisi operator pada Persamaan (7.4), maka Persamaan (7.2) dapat ditulis kembali menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad (7.5)$$

atau

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = \frac{2m_o}{\hbar^2} E\psi(x)$$

Dengan memisalkan $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = -k^2\psi(x)$, maka persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$k^2\psi(x) = \frac{2m_o}{\hbar^2} E\psi(x) \quad (7.6)$$

sehingga diperoleh:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_o} \quad (7.7)$$

dan

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o E} \quad (7.8)$$

Salah satu solusi yang merupakan fungsi eigen dari Hamiltonian H adalah

$$\psi(x) = e^{ikx} \quad (7.9)$$

Dengan memasukkan ketergantungan gerak partikel terhadap waktu, maka Persamaan (7.9) dapat kita tulis menjadi:

$$\Psi(x, t) = e^{ikx} e^{-i\omega t} = e^{i(kx - \omega t)} \quad (7.10)$$

Menurut pembahasan gelombang, ini adalah suatu gelombang datar yang bergerak dalam arah x dengan harga x yang semakin besar. Selanjutnya nilai harap dari momentum adalah:

$$\langle P_x \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) dx \quad (7.11)$$

dimana

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) = ike^{i(kx - \omega t)} = ik\Psi(x, t) \quad (7.12)$$

Oleh karena itu

$$\langle P_x \rangle = \hbar k \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx = \hbar k = \sqrt{2m_o E} \quad (7.13)$$

Hasil diatas sesuai dengan rumusan de Broglie bahwa partikel bebas adalah gelombang berjalan yang membawa momentum sebesar $p = \hbar k$.

Sekarang pandang fungsi $\psi(x) = e^{-ikx}$, yang juga merupakan solusi persamaan Schrodinger bebas waktu. Fungsi gelombang totalnya diperoleh dengan memasukkan besaran waktu yang menunjukkan ketergantungan terhadap waktu, yaitu:

$$\Psi(x, t) = e^{-i(kx+\omega t)} \quad (7.14)$$

Menurut pembahasan tentang gelombang, ini merupakan gelombang datar yang bergerak dalam arah x dengan nilai yang semakin kecil (ke arah kiri). Harga nilai harap dari momentum $\langle P_x \rangle$ adalah:

$$\langle P_x \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) dx \quad (7.15)$$

Dalam kasus ini

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(kx+\omega t)} = -ik\Psi(x, t) \quad (7.16)$$

Sehingga diperoleh bahwa:

$$\langle P_x \rangle = -i\hbar(-ik) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) dx = -\hbar k \quad (7.17)$$

Hasil diatas juga sesuai dengan rumusan de Broglie, dimana tanda negatif menunjukkan arah yang berlawanan dengan arah positif.

Jadi bentuk solusi umum untuk persoalan gerak partikel dalam ruang bebas medan adalah:

$$\Psi(x, t) = A_1 e^{i(kx-\omega t)} + A_2 e^{-i(kx+\omega t)} \quad (7.18)$$

Persamaan di atas memiliki vektor gelombang yang besarnya $k = \frac{\sqrt{2m_0 E}}{\hbar}$ apabila energi partikel tersebut adalah E . Tentunya dengan mengambil $A_2 = 0$ diperoleh gelombang yang merambat ke kanan, dan $A_1 = 0$ untuk gelombang yang merambat kekiri.

Rapat probabilitas dari persamaan gelombang yang hanya merambat ke kanan adalah:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)dx = A_1^*A_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \quad (7.19)$$

yang tentunya akan berharga tak berhingga, apabila A_1 berharga berhingga. Mengambil $A_1 = 0$ tidak merupakan solusi, karena ini berarti gelombangnya tidak ada. Hal ini menandakan bahwa fungsi gelombang belum ternormalisasi. Untuk itu kita kembali kepada interpretasi solusi $\Psi(x, t)$ dan makna dari $P_{\Psi(x,t)}$. Makna dari $P_{\Psi(x,t)}$ jelas, dan didalamnya terkandung keharusan bahwa $\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Psi(x,t)}dx = 1$ adalah mutlak.

Sekarang kita akan meninjau fungsi eigen $\Psi(x, t) = A_1 e^{i(kx - \omega t)}$ yang merupakan gelombang monokromatik yang bergerak dalam arah x yang positif. Gelombang monokromatik, hanya digambarkan oleh satu panjang gelombang saja, yaitu $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Gelombang monokromatik juga berarti hanya memiliki satu harga momentum linier saja, yaitu $p_x = \frac{h}{\lambda}$. Jika posisi partikel tidak diketahui secara tepat, partikel tersebut berada diantara $x = -\infty$ sampai $x = +\infty$.

Pada kenyataannya partikel berada dalam bagian yang terbatas dalam ruang, dengan nilai x yang berhingga. Tidak ada partikel bebas berada di seluruh ruang. Yang ada adalah partikel tersebut bebas dalam ruang yang terbatas. Hal ini berarti potensial konstan hanya ada dalam interval ruang

tertentu. Misalkan partikel berada dalam daerah antara $x = -l/2$ dan $x = +l/2$. Jika dibuat normalisasi dalam daerah itu, khususnya pada titik-titik batasnya, maka:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx = 1 \quad (7.20)$$

dengan penjabaran menjadi:

$$\begin{aligned} A^* A \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx &= 1 \\ |A|^2 &= l \\ A &= \sqrt{l} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Sehingga bentuk fungsi ternormalisasinya adalah:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{i(kx - \omega t)} \quad (7.22)$$

Potensial yang dalam interval tertentu berupa suatu konstanta dan dalam interval lainnya berupa konstanta lain disebut potensial kotak. Persamaan di atas dinamakan normalisasi kotak (*box normalization*), karena partikel dianggap berada dalam kotak. Jadi $\Psi(x, t)$ terbatas kehadirannya dalam suatu daerah, sepanjang l yang berpusat di titik asal $x = 0$.

Pada kasus partikel bebas, tidak ada syarat batas karena potensial V sama dengan nol di semua daerah, sehingga nilai k dapat bernilai berapa saja. Di batas daerah seperti yang dijelaskan di atas, $\Psi(x, t)$ harus memenuhi

syarat batas. Oleh karena itu besaran k bukan lagi merupakan besaran yang boleh memiliki nilai sembarang, melainkan dibatasi pada nilai-nilai tertentu.

Syarat batas untuk Persamaan (7.21) secara periodik mensyaratkan partikel terkurung antara $\pm l/2$ yang dipenuhi jika:

$$\Psi(x, t) = \Psi(x + l, t) \quad (7.23)$$

atau

$$\frac{1}{\sqrt{l}} e^{i(kx - \omega t)} = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{i(k(x+l) - \omega t)}$$

yang berarti bahwa:

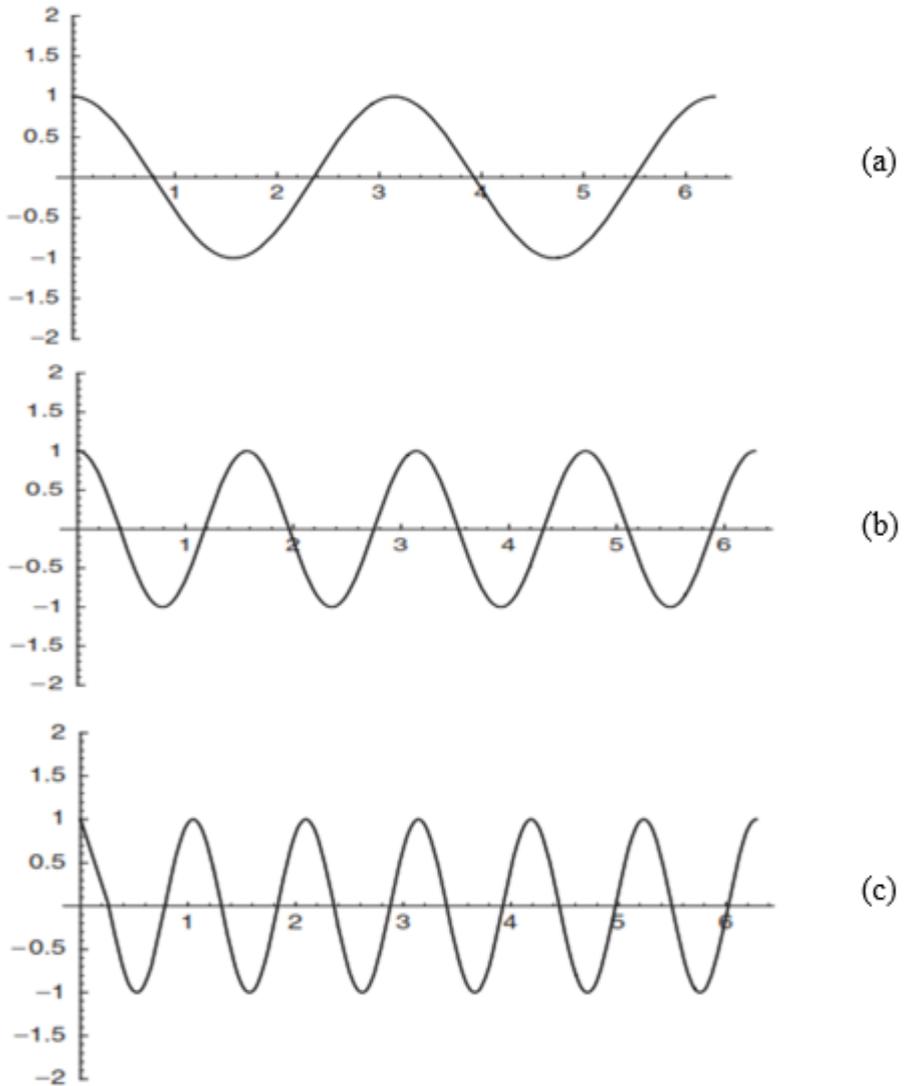
$$1 = (\cos kl + i \sin kl) \quad (7.24)$$

Ruas kiri adalah bilangan real dan ruas kanan mengandung bilangan imajiner, sehingga bagian bilangan imajiner tersebut harus sama dengan nol. Hal ini akan dipenuhi jika:

$$kl = 2\pi n, \quad \text{atau} \quad k = \frac{2\pi n}{l} \quad (7.25)$$

dengan $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Dengan hasil ini maka diketahui bahwa nilai k adalah diskrit.

Sekarang tinjau fungsi gelombang bebas waktu pada Persamaan (7.9). Kemudian ketika kita masukan nilai k yang berbeda-beda pada persamaan tersebut maka akan diperoleh beberapa bentuk gelombang seperti terlihat pada Gambar 7.1.

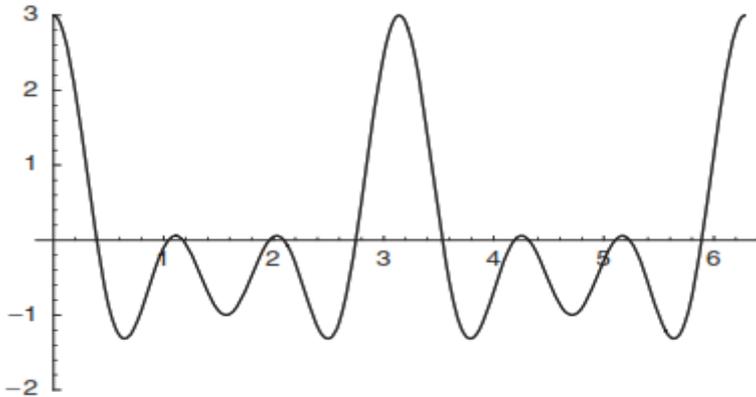


Sumber: *Quantum Mechanics Demystified a Self-Teaching Guide*, 2006

Gambar 7.1 Plot grafik untuk $\cos 2x$, $\cos 4x$ dan $\cos 6x$

Jika ketiga bentuk gelombang pada Gambar 7.1 dijumlahkan, amplitudo gelombang akan bertambah di beberapa titik dan berkurang di titik lainnya (Gambar 7.2),

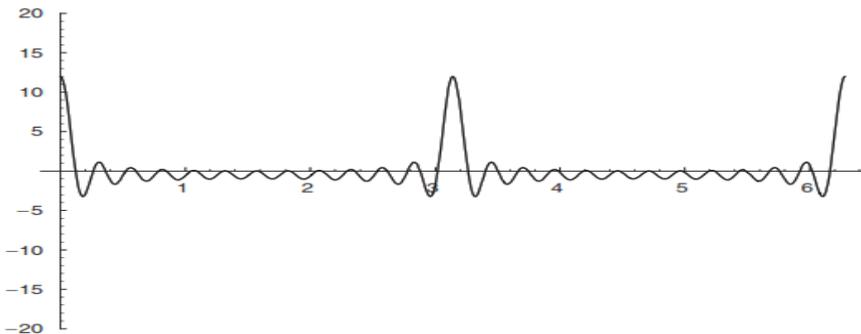
sehingga kemudian kita akan memperoleh bentuk gelombang yang terlokalisasi.



Sumber: *Quantum Mechanics Demystified a Self-Teaching Guide*, 2006

Gambar 7.2 Penjumlahan gelombang $\cos 2x$, $\cos 4x$ dan $\cos 6x$

Sekarang jika kita menjumlahkan banyak gelombang dengan nilai k yang berbeda-beda, paket gelombang akan menjadi sangat terlokalisasi, seperti terlihat pada Gambar 7.3. Untuk partikel bebas, proses penjumlahan seperti ini akan memberikan paket gelombang terlokalisasi.



Sumber: *Quantum Mechanics Demystified a Self-Teaching Guide*, 2006

Gambar 7.3 Penjumlahan banyak gelombang dengan nilai k yang bervariasi

Karena kita ketahui bahwa $E = \omega\hbar$, Persamaan (7.10) dapat ditulis menjadi:

$$\Psi(x, t) = e^{i(kx - Et/\hbar)} \quad (7.26)$$

Dengan menggunakan Persamaan (7.13), maka kita peroleh persamaan frekuensi sudut

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (7.27)$$

sehingga

$$\Psi(x, t) = e^{i(kx - \hbar k^2 t/2m)} \quad (7.28)$$

Paket gelombang diperoleh dengan cara mengalikan Persamaan (7.28) dengan fungsi gelombang ruang momentum $\phi(k)$ dan diintegrasikan terhadap nilai k

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ik(x - \hbar t/2m)} dk \quad (7.29)$$

Dengan menggunakan Persamaan (7.27), maka diperoleh kecepatan fasa gelombang, yaitu:

$$v_{fasa} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}} \quad (7.30)$$

dan kecepatan grup gelombang, yaitu:

$$v_{grup} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} \quad (7.31)$$

Karena diketahui bahwa kecepatan fasa gelombang adalah $\frac{1}{2}$ kali kecepatan partikel klasik ($v_{klasik} = \sqrt{2E/m}$), maka

dikatakan bahwa kecepatan grup menyatakan kecepatan partikel klasik yang sebenarnya.

Contoh 7.1

Misalkan $\psi_1(x) = \cos(2x)$ dan $\psi_2(x) = \cos(10x)$. Tentukan dan gambarkan gelombang paket yang terbentuk dari superposisi kedua gelombang tersebut.

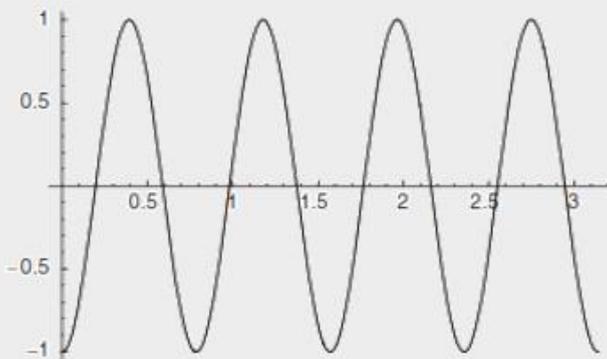
Penyelesaian:

Bentuk paket gelombang dengan menggunakan identitas trigonometri:

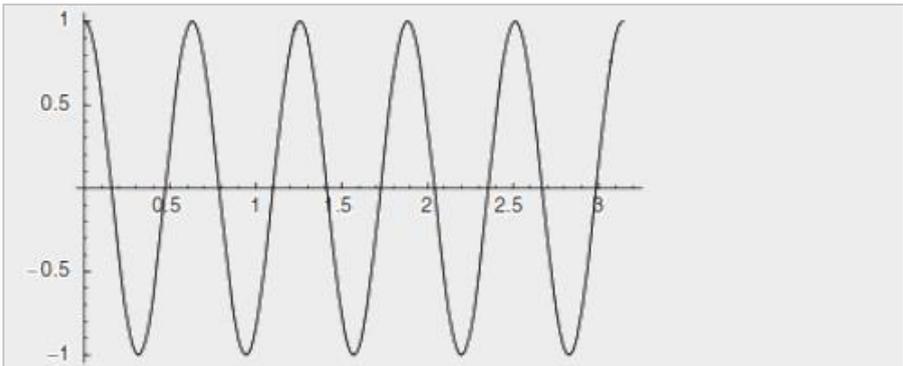
$$\cos(A) - \cos(B) = -2 \sin \frac{A + B}{2} \sin \frac{A - B}{2}$$

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) = \cos(10x) - \cos(2x) = -2 \sin(6x) \sin(4x)$$

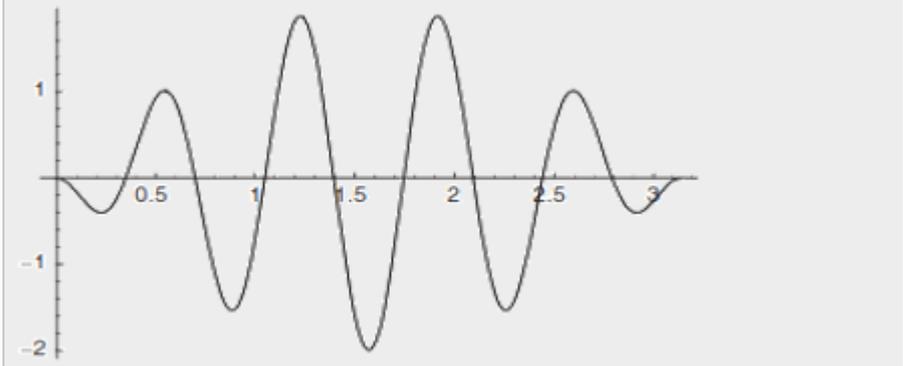
Plot untuk $\psi_2(x)$:



Plot untuk $\psi_1(x)$:



Plot untuk $\psi_1(x) + \psi_2(x)$:

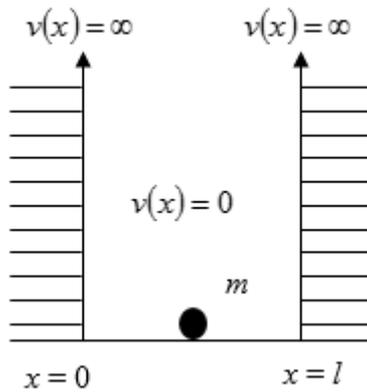


Plot di atas menggambarkan gelombang yang terlokalisasi.

3. PARTIKEL DALAM SUMUR POTENSIAL TAK BERHINGGA

Secara fisika klasik suatu partikel yang ditempatkan dalam sumur potensial dengan dinding yang tak berhingga tingginya, tentunya tidak akan dapat keluar dari sumur tersebut. Berapapun energi $E (E < \infty)$ yang diberikan pada partikel itu, tidak cukup besar untuk dipergunakan partikel dalam melewati dinding potensial tersebut.

Secara skematis pada kasus satu dimensi keadaannya dapat digambarkan seperti Gambar 7.4.



Gambar 7.4 Partikel dalam sumur potensial satu dimensi

Secara klasik, jika suatu partikel dengan energi E berada dalam sumur potensial tersebut maka partikel itu akan bergerak dari kiri ke kanan dan kemudian dalam arah sebaliknya. Perubahan arah momentum linier terjadi setiap kali partikel menumbuk dinding potensial yang amat tinggi tersebut.

Potensial yang telah kita bahas di atas tidak tergantung waktu, oleh karena itu berlaku persamaan gelombang Schrodinger bebas waktu

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial t^2} + V(x, t) \psi(x) = E \psi(x) \tag{7.32}$$

Dengan fungsi potensial sebagai berikut:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < l \\ \infty, & x \leq 0 \text{ dan } x \geq l \end{cases} \tag{7.33}$$

Untuk daerah $x \leq 0$ dan $x \geq l$ diketahui bahwa $V(x) = \infty$. Probabilitas kehadiran partikel dalam daerah itu adalah nol, oleh karena itu:

$$\psi(x) = 0 \quad \text{untuk } x \leq 0 \text{ dan } x \geq l \quad (7.34)$$

Solusi dari permasalahannya terletak didaerah $0 < x < l$ dimana $V(x) = 0$. Jika menggunakan permisalan pada Persamaan (7.8), maka dapat dituliskan:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + k^2 \psi(x) = 0 \quad (7.35)$$

yang dalam hal ini mempunyai solusi berbentuk:

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (7.36)$$

atau dapat ditulis juga menjadi:

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (7.37)$$

Syarat batas di $x = 0$ pada Gambar 7.4, memberikan hubungan:

$$\psi(0) = 0 + B(1) = 0$$

yang mengharuskan $B = 0$. Oleh Karena itu solusi persamaan gelombang menjadi:

$$\psi(x) = A \sin(kx) \quad (7.38)$$

Selanjutnya, syarat batas di $x = l$ pada Gambar 7.4, memberikan hubungan:

$$\psi(l) = A \sin(kl) = 0$$

Hal ini akan dipenuhi jika $kl = n\pi$, dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ atau

$$k = \frac{n\pi}{l} \quad (7.39)$$

Dengan menggunakan Persamaan (7.7) maka diperoleh:

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} = n^2 E_1 \quad (7.40)$$

dengan

$$E_1 = \frac{h^2}{8ml^2} \quad (7.41)$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa energi partikel tidak kontinyu seperti dalam fisika klasik melainkan diskrit, yaitu kuadrat bilangan bulat kali dengan energi terendah E_1 . Keadaan dengan energi terendah disebut keadaan dasar (*ground state*).

Substitusi Persamaan (7.39) ke Persamaan (7.38) akan memberikan persamaan:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \quad (7.42)$$

Konstanta A ditentukan melalui proses normalisasi, yaitu partikel pasti berada di dalam sumur. Karena itu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_0^l A \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \left(A \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\psi(x)dx = \int_0^l A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = A^2 \left(\frac{l}{2}\right)$$

sehingga

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

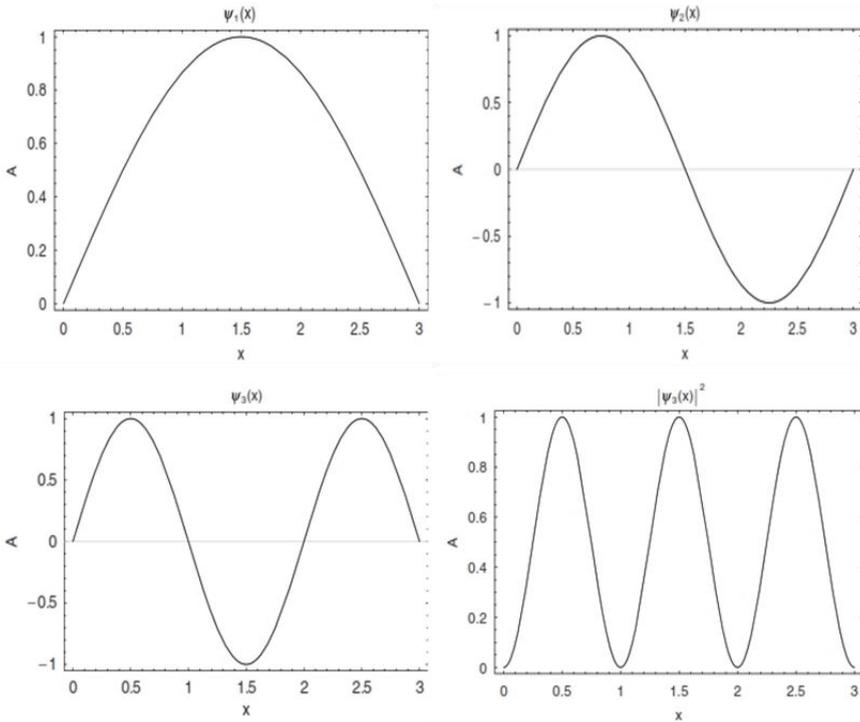
Dengan demikian, fungsi gelombang ternormalisasi untuk partikel yang terperangkap dalam sumur potensial satu dimensi berukuran l diberikan oleh:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (7.43)$$

Oleh karena itu, fungsi gelombang partikel yang berada pada keadaan dasarnya adalah:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (7.44)$$

Grafik fungsi gelombang partikel untuk n_1, n_2 dan n_3 dalam kotak serta rapat probabilitas partikel untuk n_3 diberikan oleh Gambar 7.5. Seperti yang kita ketahui bahwa $E_n = n^2 E_1$, semakin besar n maka semakin besar nilai energinya yang berarti semakin besar frekuensi gelombangnya. Kuadrat dari fungsi gelombang memberikan rapat probabilitas. Kita dapat mengatakan bahwa intensitas dari gelombang rapat probabilitas pada titik yang diberikan sebanding dengan kemungkinan untuk menemukan partikel pada titik tersebut. Semakin besar intensitas gelombang rapat probabilitas pada suatu titik maka semakin besar juga kemungkinan untuk menemukan partikel pada titik tersebut.



Sumber: *Quantum Mechanics Demystified a Self-Teaching Guide*, 2006
Gambar 7.5 Fungsi gelombang $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ dan $\psi_3(x)$, serta rapat probabilitas $|\psi_3(x)|^2$

Jika partikel berada pada keadaan tereksitasi pertama, $\psi_2(x)$, maka posisi rata-rata partikel adalah:

$$\langle x \rangle_{\psi_2} = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin^2 \left(\frac{2\pi}{l} x \right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l x \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{4\pi}{l} x \right) \right\} dx = \frac{l}{2}$$

Kemudian, momentum rata-rata partikel berada pada keadaan tereksitasi pertama $\psi_2(x)$ adalah:

$$\langle x \rangle_{\psi_2} = \int_0^l \sin \left(\frac{2\pi}{l} x \right) \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{l} x \right) dx$$

$$\langle x \rangle_{\psi_2} = \frac{4\pi i \hbar}{l^2} \int_0^l \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) dx = 0$$

Kedua hasil di atas berlaku untuk semua $\psi_n(x)$ dan dapat diperkirakan melalui Gambar 7.5 untuk $|\psi_3(x)|^2$. Pertama, peluang untuk partikel berada di sebelah kiri titik tengah ($l/2$) dan di sebelah kanannya sama. Karena itu secara rata-rata partikel berada di titik tengah $l/2$. Kedua, akibat keadaan pertama ini maka kemungkinan partikel bergerak ke kanan dan ke kiri adalah sama. Dengan demikian momentum-momentumnya saling meniadakan atau momentum rata-rata sama dengan nol.

Contoh 7.2

Sebuah elektron terperangkap dalam suatu daerah satu dimensi sepanjang $1,0 \times 10^{-10} \text{ m}$.

- Berapa banyak energi yang harus dikerahkan untuk mengeksitasi elektron dari keadaan dasar ke keadaan eksitasi pertama?
- Pada keadaan dasar, berapakah probabilitas untuk menemukan elektron dalam daerah dari $x = 0,090 \times 10^{-10} \text{ m}$ hingga $0,110 \times 10^{-10} \text{ m}$?
- Pada keadaan eksitasi pertama, berapakah probabilitas untuk menemukan elektron antara $x = 0$ dan $x = 0,250 \times 10^{-10} \text{ m}$?

Penyelesaian:

(a)

$$E_1 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} = \frac{(1)^2 (3,14)^2 (1,05 \times 10^{-34})^2}{2(9,1 \times 10^{-31} \text{kg})(10^{-10})^2}$$

$$E_1 = 6,0 \times 10^{-10} \text{J} = 37 \text{eV}$$

Pada keadaan dasar, energinya adalah E_1 . Pada keadaan eksitasi pertama, energinya adalah $4E_1$. Jadi, beda energi yang harus dikerahkan adalah $3E_1$ atau 111 eV.

(b) Probabilitas keadaan dasar

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi^*(x)\psi(x)dx = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi^*(x)\psi(x)dx = \left[\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l}\right) \right]_{x_1}^{x_2} = 0,0038$$

$$= 0,38\%$$

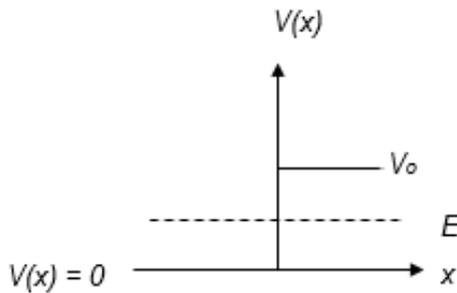
(c) Probabilitas keadaan tereksitasi pertama

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi^*(x)\psi(x)dx = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi^*(x)\psi(x)dx = \left[\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4\pi} \sin \frac{4\pi x}{l}\right) \right]_{x_1}^{x_2} = 0,25 = 25\%$$

4. PARTIKEL DALAM POTENSIAL TANGGA DENGAN $E < V_0$

Partikel-partikel bermassa m ditembakkan dari kiri ke kanan, dan bergerak di dalam potensial tangga seperti yang diperlihatkan pada Gambar 7.6. Pada subbab ini kita akan membahas partikel dengan energi total lebih kecil dari potensial tangga $E < V_0$. Menurut mekanika klasik, partikel dengan energi E yang lebih rendah dari V_0 , akan dipantulkan kembali kekiri. Partikel tidak dapat berada dalam daerah $x > 0$.



Gambar 7.6 Potensial tangga dengan $E < V_0$

Sekarang kita akan membahas terlebih dahulu daerah $x < 0$, dimana $V(x) = 0$. Pada daerah ini persamaan Schrodinger menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\psi_I(x)}{dx^2} = E\psi_I(x) \quad (7.45)$$

Solusi umumnya berbentuk:

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{untuk } x < 0 \quad (7.46)$$

Dengan harga $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0 E}$.

Dalam daerah $x > 0$ dimana $V(x) = V_o$ dan $E < V_o$, maka akan diperoleh:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + V_o\psi_{II}(x) = E\psi_{II}(x)$$

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [V_o - E]\psi_{II}(x) = 0 \tag{7.47}$$

Dengan mengambil permisalan:

$$\frac{d^2\psi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [V_o - E]\psi_{II}(x) = 0 \tag{7.48}$$

Solusi umumnya akan berbentuk:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-qx} + De^{qx} \tag{7.49}$$

dengan harga $q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o(V_o - E)}$.

Kemudian pada $\psi(x)$ diberlakukan syarat-syarat berikut agar berperilaku baik diseluruh interval x

- a. $\psi(x)$ berhingga, oleh karena itu $D = 0$. Apabila $D \neq 0$, maka $\psi(x)$ dapat bernilai tak berhingga apabila $x = \infty$.

Sehingga Persamaan (7.49) menjadi:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-qx} \quad \text{untuk } x < 0 \tag{7.50}$$

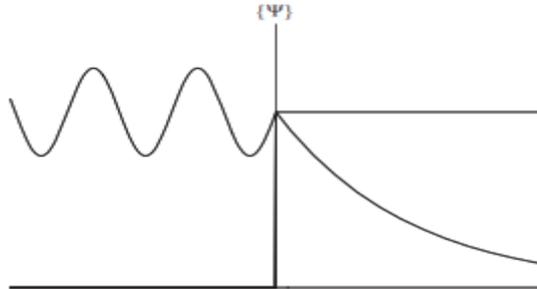
- b. $\psi(x)$ berharga kontinyu, juga di $x = 0$. Oleh karena itu ada hubungan antara koefisien $A + B = C$.
- c. $\psi'(x)$ juga kontinu di $x = 0$

didaerah $x < 0 \rightarrow \psi'_I(x) = ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}$

didaerah $x > 0 \rightarrow \psi'_{II}(x) = -qCe^{-qx}$

Persamaan (7.46) dan Persamaan (7.50) menunjukkan bahwa pada sisi kiri penghalang, fungsi gelombang adalah berosilasi, sedangkan sisi kanan penghalang fungsi

gelombang meluruh secara eksponensial. Ilustrasi dari bentuk gelombang dapat dilihat pada Gambar 7.7.



Gambar 7.7 Grafik fungsi gelombang yang melewati penghalang potensial

Syarat kontinyu di $x = 0$ adalah

$$ikA - ikB = -qC = -q(A + B) \quad (7.51)$$

Dengan memecahkan Persamaan (7.51), maka diperoleh:

$$B = \frac{ik + q}{ik - q} A \quad \rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{1 - i\frac{q}{k}}{1 + i\frac{q}{k}} \quad (7.52)$$

Kemudian dengan menggunakan $A + B = C$, maka akan diperoleh:

$$C = A + B = A + \frac{ik + q}{ik - q} A = A \frac{i2k}{ik - q} \quad \rightarrow \quad \frac{C}{A} = \frac{i2k}{ik - q} \quad (7.53)$$

Persyaratan-persyaratannya agar $\psi(x)$ berperilaku baik di atas pada akhirnya memberikan solusi:

$$\psi_I(x) = A \left(e^{ikx} + \frac{ik + q}{ik - q} e^{-ikx} \right) \quad (7.54)$$

dan

$$\psi_{II}(x) = A \frac{i2k}{ik - q} e^{-qx} \quad (7.55)$$

Kemudian dapat pula dicari fungsi gelombang total pada daerah $x < 0$ sebagai berikut:

$$\psi_I(x, t) = A \left(e^{i(kx - \omega t)} + \frac{ik + q}{ik - q} e^{-i(kx + \omega t)} \right) \quad (7.56)$$

suku pertama ruas kanan adalah gelombang yang merambat ke kanan (gelombang datang) dan suku kedua ruas kanan adalah gelombang yang merambat ke kiri (gelombang pantul). Sedangkan untuk daerah $x \geq 0$, diperoleh

$$\psi_{II}(x, t) = A \frac{i2k}{ik - q} e^{-qx} e^{-i\omega t} \quad (7.57)$$

Koefisien pemantulan atau reflektansi, yaitu besarnya peluang partikel dipantulkan, menurut fisika gelombang adalah:

$$R = \left| \frac{B^* B}{A^* A} \right| = \frac{A^2 \left(\frac{ik+q}{ik-q} \right) \left(\frac{-ik+q}{-ik-q} \right)}{A^2} = 1 \quad \text{untuk } E < V_o \quad (7.58)$$

Hal ini sesuai dengan gambaran klasik dimana sesuai dengan dugaan bahwa tidak ada partikel melewati penghalang potensial karena koefisien pemantulannya adalah 100%.

Sekarang tinjau probabilitas partikel di daerah disebelah kanan atau daerah $x \geq 0$ adalah:

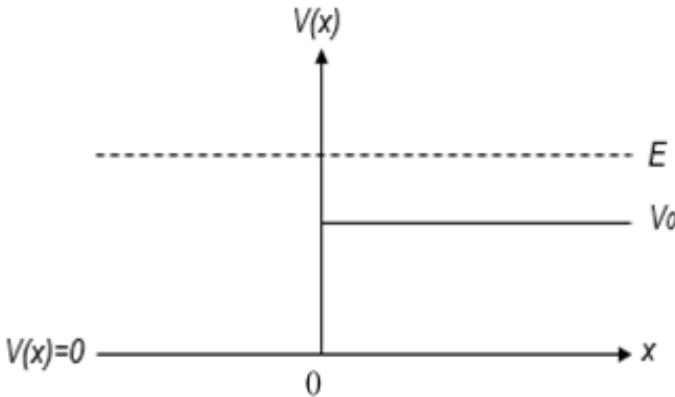
$$\Psi_{II}^*(x, t) \Psi_{II}(x, t) = C^* C e^{-2qx} \quad (7.59)$$

Harga ini akan mendekati 0 apabila $x \rightarrow \infty$, tetapi hal ini menyatakan bahwa terdapat kemungkinan adanya partikel di daerah dimana $E < V_o$ (ada penetrasi partikel ke dalam penghalang). Hal ini sangat berbeda dengan fisika klasik,

yang secara nyata menolak kehadiran partikel di daerah $x > 0$. Penembusan dinding potensial atau *barrier penetration* hanya mungkin dalam pandangan kuantum. Karena $R = 1$ maka partikel pasti dipantulkan dan kehadiran partikel di daerah terlarang hanyalah sementara.

5. PARTIKEL DALAM POTENSIAL TANGGA DENGAN $E > V_0$

Potensial yang tergambar pada Gambar 7.8 adalah situasi dimana energi partikel lebih besar dari energi potensial $E > V_0$.



Gambar 7.8 Potensial tangga dengan $E > V_0$

Persamaan Schrodinger bebas-waktu di daerah $x < 0$ adalah:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E\psi(x) \tag{7.60}$$

Sedangkan di daerah $x > 0$ adalah:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = (E - V_o)\psi(x) \quad (7.61)$$

Masing-masing persamaan di atas memberikan solusi

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{untuk } x < 0 \quad (7.62)$$

Dengank $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o E}$, dan

$$\psi_{II}(x) = Ce^{iqx} + De^{-iqx} \quad \text{untuk } x < 0 \quad (7.63)$$

dengan $q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o(E - V_o)}$.

Semua suku yang muncul dalam Persamaan (7.62) dan (7.63) merupakan fungsi gelombang bidang. Suku yang bereksponen positif menyatakan keadaan partikel yang bergerak ke kanan maka suku yang bereksponen negative menyatakan keadaan partikel yang bergerak kekiri. Selanjutnya kita akan menganggap bahwa partikel bergerak kekanan dari suatu titik di $x < 0$.

Terdapat beberapa kondisi partikel dalam potensial tangga dengan $E > V_o$, yaitu:

- a. Partikel datang dari kiri menuju ke kanan pada potensial tangga di $x = 0$ mungkin mengalami hambatan sehingga terjadi pemantulan. Tetapi di $x > 0$ tidak ada gelombang yang merambat ke kiri, oleh karena itu $D = 0$. Persamaan (7.63) menjadi:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{iqx} \quad \text{untuk } x < 0 \quad (7.64)$$

- b. Syarat fungsi berkelakuan baik, yaitu bersifat kontinyu di $x = 0$ memberikan $A + B = C$.

c. Syarat fungsi berkelakuan baik berikutnya adalah turunan pertama fungsi gelombang $\psi'(x)$ kontinu di $x = 0$, maka

$$ikA - ikB = iqC \quad \text{atau} \quad k(A - B) = qC \quad (7.65)$$

Jadi ada dua persamaan untuk tiga koefisien, semua akan dinyatakan dalam A , yaitu dengan menggunakan hubungan $A + B = C$ dan Persamaan (7.65), maka diperoleh:

$$B = \frac{k - q}{k + q}A \quad \text{dan} \quad C = \frac{2k}{k + q}A \quad (7.66)$$

Oleh karena itu fungsi eigen yang dicari adalah:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + A\frac{k - q}{k + q}e^{-ik_1x} \quad \begin{array}{l} \text{untuk } x \leq \\ 0 \end{array} \quad (7.67)$$

$$\psi(x) = A\frac{2k}{k + q}e^{ik_2x} \quad \begin{array}{l} \text{untuk } x \geq \\ 0 \end{array} \quad (7.68)$$

Gunakan teori gelombang klasik untuk menentukan koefisien refleksi R dan koefisien transmisi T , yaitu:

$$R = \frac{\sqrt{1} |B^*B|}{\sqrt{1} |A^*A|} = \frac{\frac{(k-q)^*}{(k+q)^*} A^* \frac{(k-q)}{(k+q)} A}{A^*A}$$

Sehingga diperoleh koefisien refleksi

$$R = \frac{(k - q)^2}{(k + q)^2} \quad (7.69)$$

Persamaan diatas menyatakan bahwa koefisien refleksi tidak sama dengan 1. Hal ini berarti bahwa ada peluang bagi partikel untuk diteruskan. Persamaan (7.69) mengindikasikan bahwa terdapat peluang bagi partikel untuk dipantulkan kembali ke daerah $x < 0$. Adanya peluang partikel dipantulkan ini tentu bertentangan dengan fisika klasik.

Sebab, menurut fisika klasik partikel pasti diteruskan karena gaya penghalang yang dirasakan partikel terlalu kecil dibandingkan energi totalnya.

Selanjutnya koefisien transmisi, yaitu perbandingan rapat arus peluang bagi partikel diteruskan terhadap rapat arus peluang bagi partikel datang adalah:

$$T = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \left| \frac{C^*C}{A^*A} \right| = \frac{q}{k} \left(\frac{iq}{k+q} \right)^2 = \frac{4kq}{(k+q)^2} \quad (7.70)$$

Sehingga

$$R + T = \frac{(k-q)^2}{(k+q)^2} + \frac{4kq}{(k+q)^2} = 1 \quad (7.71)$$

Sesuai dengan kekekalan probabilitas.

Persamaan koefisien refleksi pada Persamaan (7.69) dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan yang memuat besaran E pada kasus $E \gg V_0$. Hali ini dapat dilakukan dengan menggunakan definisi k dan q , sehingga Persamaan (7.69) dapat dituliskan menjadi:

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - V_0/E}}{1 + \sqrt{1 - V_0/E}} \right)^2 \quad (7.72)$$

Persamaan (7.72) menunjukkan bahwa semakin besar nilai E maka semakin kecil nilai R . Jika $E \gg V_0$ sehingga $V_0/E \approx 0$, maka $R = 0$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa tinjauan kuantum sama dengan tinjauan klasik jika energi partikel jauh lebih besar daripada tinggi potensial tangga.

Dengan menggunakan hasil untuk k dan q , diperoleh perbandingan antara bilangan gelombang antara dua daerah $x < 0$ dan $x > 0$, yaitu:

$$\frac{k^2}{q^2} = \frac{\frac{1}{\hbar^2} 2m_o E}{\frac{1}{\hbar^2} 2m_o (E - V_o)} = \frac{E}{E - V_o} = 1 - \frac{E}{V} \quad (7.73)$$

Contoh 7.3

Jika terdapat seribu elektron yang masing-masing berenergi 27 eV ditembakkan ke arah daerah bertangga potensial dengan ketinggian 24 eV. Hitung Jumlah elektron yang berbalik ketika elektron-elektron tersebut sampai pada tangga potensial.

Penyelesaian:

Energi elektron $E = 27 \text{ eV}$

Tangga Potensial $V_o = 24 \text{ eV}$

Koefisien refleksi untuk $E > V_o$ adalah

$$R = \frac{(k - q)^2}{(k + q)^2}$$

Dengan menggunakan $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o E}$ dan $q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o (E - V_o)}$, maka

$$R = \frac{\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o E} - \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o (E - V_o)}\right)^2}{\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o E} + \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o (E - V_o)}\right)^2}$$

$$R = \frac{(\sqrt{E/(E - V_0)} - 1)^2}{(\sqrt{E/(E - V_0)} + 1)^2} = \frac{(\sqrt{27 \text{ eV} / (27 \text{ eV} - 24 \text{ eV})} - 1)^2}{(\sqrt{27 \text{ eV} / (27 \text{ eV} - 24 \text{ eV})} + 1)^2}$$

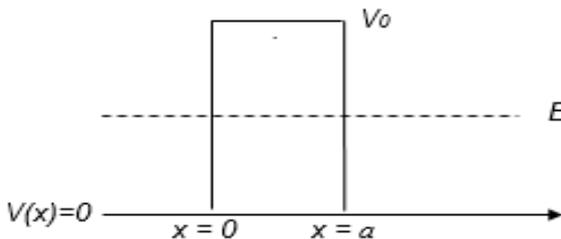
$$= 0,25$$

Sehingga, ada sejumlah N

$$N = R \cdot 1000 = 250 \text{ elektron}$$

6. PARTIKEL DAN POTENSIAL PENGHALANG DENGAN $E < V_0$

Sekarang tinjau penghalang potensial yang dilewati partikel yang digambarkan seperti yang pada Gambar 7.9. Lebar penghalang yang dimaksud adalah a sedangkan tingginya adalah V_0 . Energi total elektron adalah E , harganya lebih kecil dari tinggi penghalang V_0



Gambar 7.9 Potensial penghalang dengan $E < V_0$

Daerah x dibatasi dalam 3 bagian, yaitu daerah I, II dan III dengan fungsi eigen masing-masing. Daerah I adalah daerah pada $x < 0$, mempunyai fungsi eigen

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{untuk } x < 0 \quad (7.74)$$

Dengan $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0 E}$. Kemudian daerah II adalah daerah dalam $0 < x < a$, mempunyai fungsi eigen

$$\psi_{II}(x) = Ce^{qx} + De^{-qx} \quad \text{untuk } 0 < x < a \quad (7.75)$$

Dengan $q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_o(E - V_o)}$. Terakhir daerah III adalah daerah pada $x > a$, mempunyai fungsi eigen

$$\psi_{III}(x) = Ee^{ikx} \quad \text{untuk } x > 0 \quad (7.76)$$

dengan anggapan tidak ada gelombang yang merambat ke kiri didaerah III. Kehadiran solusi $\psi_{III}(x)$ yang tidak nol untuk $x > a$ ini dikenal dengan fenomena penerowongan (*tunneling phenomena*), sekaligus yang membedakannya dari partikel klasik. Persyaratan kontinyu $\psi(x)$ dan $\psi'(x)$ di $x = 0$ akan memberikan hubungan:

$$A + B = C + D \quad (7.77)$$

$$ik(A - B) = q(C - D) \quad (7.78)$$

dan di $x = a$ akan memberikan hubungan:

$$Ce^{qa} + De^{-qa} = Ee^{ika} \quad (7.79)$$

$$q(Ce^{qa} - De^{-qa}) = ikEe^{ika} \quad (7.80)$$

Dari keempat persamaan di atas akan diperoleh hubungan:

$$A = E \left(\cosh qa - i \frac{(k^2 - q^2)}{2kq} \sinh qa \right) e^{ika} \quad (7.81)$$

$$B = E \left(i \frac{(q^2 - k^2)}{2kq} \sinh qa \right) e^{ika} \quad (7.82)$$

$$C = E \frac{q + ik}{2q} e^{ika} e^{-qa} \quad (7.83)$$

$$D = E e^{qa} \left(1 - \frac{q - ik}{2q} \right) e^{ika} \quad (7.84)$$

Keempat persamaan di atas memberikan batasan untuk masing-masing konstanta A , B , C , D dan E . Pada

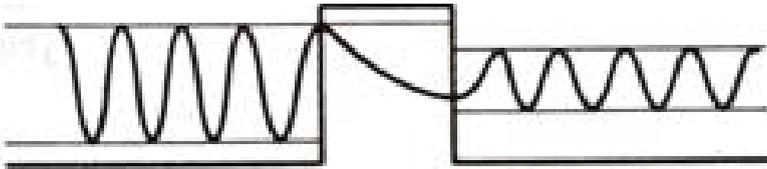
persamaan-persamaan tersebut telah ditunjukkan bahwa semua konstanta telah dinyatakan dalam E . Dengan menggunakan persamaan-persamaan tersebut, penyelesaian umum dari persamaan gelombang untuk potensial penghalang dengan $E < V_0$ (Persamaan (7.74), (7.75) dan 7.76)) akan menjadi penyelesaian khusus, yaitu:

$$\psi_I(x) = E \left(\frac{A}{E} e^{ikx} + \frac{B}{E} e^{-ikx} \right) \text{ untuk } x \leq 0 \quad (7.85)$$

$$\psi_{II}(x) = E \left(\frac{C}{E} e^{qx} + \frac{D}{E} e^{-qx} \right) \text{ untuk } 0 \leq x \leq a \quad (7.86)$$

$$\psi_{III}(x) = E e^{ikx} \quad \text{untuk } x \geq a \quad (7.87)$$

dimana $\frac{A}{E}, \frac{B}{E}, \frac{C}{E}, \frac{D}{E}$ masing-masing sesuai dengan Persamaan (7.81), (7.82), (7.83) dan (7.84). Grafik fungsi gelombang yang melewati potensial penghalang dengan $E < V_0$ diperlihatkan pada Gambar 7.10.



Gambar 7.10 Grafik fungsi gelombang yang melewati potensial penghalang dengan $E < V_0$

Dengan menggunakan Persamaan (7.81) dan (7.82) maka dapat kita peroleh koefisien refleksi, yaitu:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k^2 - q^2)^2 \sinh^2 qa}{4k^2 q^2 + (k^2 + q^2)^2 \sinh^2 qa} \quad (7.82)$$

dan koefisien transmisi dinyatakan

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{4k^2 q^2}{4k^2 q^2 + (k^2 + q^2)^2 \sinh^2 qa} \quad (7.83)$$

Persamaan di atas mengindikasikan adanya peluang bagi partikel untuk sampai didaerah III melalui daerah II, yang secara klasik tidak mungkin terjadi. Peristiwa penembusan oleh partikel inidinamakan efek penerowongan (*tunneling effect*).

Berdasarkan Persamaan (7.83), kita ketahui bahwa besarnya koefisien transmisi juga bergantung padalebar tanggul. Untuk kasus dimana q sangat besar, maka nilai $\sinh qa$ akan bernilai sangat besar sehingga sumbangan suku pertama pada penyebut persamaan tersebut dapat diabaikan. Selanjutnya, pada batasan ini nilai fungsi $\sinh qa = \frac{1}{2}(e^{qa} - e^{-qa}) \approx \frac{1}{2}e^{qa}$ dan $k^2 - q^2 \approx q^2$. Sehingga pada kasus ini koefisien transmisinya menjadi:

$$T \approx \frac{16k^2}{\alpha^2} e^{-2qa} = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{2a\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}} \quad (7.84)$$

Persamaan (7.84) mengindikasikan bahwa nilai koefisien transmisi berkurang secara eksponensial terhadap pertambahan lebar tanggul.

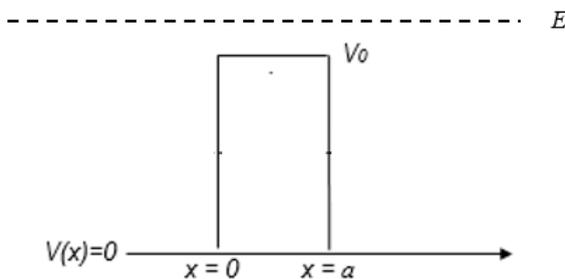
Sekarang kita akan membahas kebergantungan peluang penerobosan terhadap lebar tanggul secara kualitatif. Seperti yang telah kita ketahui bahwa fungsi gelombang didaerah II merupakan kombinasi fungsi-fungsi hiperbolise qx dan e^{-qx} . Pada persamaan tersebut, fungsi e^{-qx} lebih dominan dibandingkan fungsi e^{qx} . Hal ini disebabkan karena berdasarkan Persamaan (7.83) dan (7.84) kita peroleh hubungan:

$$\frac{E}{C} = \frac{q - ik}{q + ik} e^{2qa} \quad (7.85)$$

Hubungan di atas menunjukkan bahwa amplitudo fungsi e^{-qx} (yaitu D) lebih besar daripada amplitudo fungsi e^{-qx} (yaitu C), sehingga dapat disimpulkan bahwa perilaku fungsi gelombang di daerah II ditentukan oleh perilaku fungsi e^{-qx} . Fungsi ini hanya efektif di daerah $x < 1/q$, sebab untuk $x > 1/q$ amplitudonya dapat diabaikan. Konsekuensinya, jika lebar tanggul a kurang dari $1/q$ maka amplitudo gelombang di bagian kanan tanggul masih tersisa cukup besar. Akibatnya fungsi gelombang di daerah III juga memiliki amplitude yang cukup besar. Hal ini berdampak pada besarnya peluang bagi partikel untuk sampai di daerah III.

7. PARTIKEL DAN POTENSIAL PENGHALANG DENGAN $E > V_0$

Fungsi potensial dan energi partikel digambarkan pada Gambar 7.11. Lebar penghalang adalah a sedangkan tingginya adalah V_0 . Energi total partikel adalah E , dengan harga $E > V_0$.



Gambar 7.11 Potensial penghalang dengan $E > V_0$

Untuk $E > V_0$ maka persamaan q menjadi $q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0(V_0 - E)} = iK$, dengan $K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0(E - V_0)}$. Sehingga solusi umum untuk daerah $0 < x < a$ juga mengalami perubahan. Lengkapannya yaitu:

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{untuk } x < 0 \quad (7.86)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{iKx} + De^{-iKx} \quad \text{untuk } 0 \leq x \leq a \quad (7.87)$$

$$\psi_{III}(x) = Ee^{ikx} \quad \text{untuk } x > a \quad (7.88)$$

Dengan menerapkan syarat kontinuitas (ψ) dan $\psi'(x)$ di $x = 0$ akan memberikan hubungan:

$$A + B = C + D \quad (7.89)$$

$$k(A - B) = K(C - D) \quad (7.90)$$

dan di $x = a$ akan memberikan hubungan:

$$Ce^{iKa} + De^{-iKa} = Ee^{ika} \quad (7.91)$$

$$K(Ce^{iKa} - De^{-iKa}) = kEe^{ika} \quad (7.92)$$

Dari keempat persamaan di atas akan diperoleh hubungan:

$$A = E \left(\cos Ka - i \frac{(k^2 - K^2)}{2kK} \sin Ka \right) e^{ika} \quad (7.93)$$

$$B = E \left(i \frac{(K^2 - k^2)}{2kK} \sinh Ka \right) e^{ika} \quad (7.94)$$

$$C = E \frac{K + k}{2K} e^{i(k-K)a} \quad (7.95)$$

$$D = E \left(1 - \frac{K - k}{2K} e^{ika} \right) e^{i(k+K)a} \quad (7.96)$$

Keempat persamaan di atas memberikan batasan untuk masing-masing konstanta A , B , C , D dan E . Pada persamaan-persamaan tersebut telah ditunjukkan bahwa

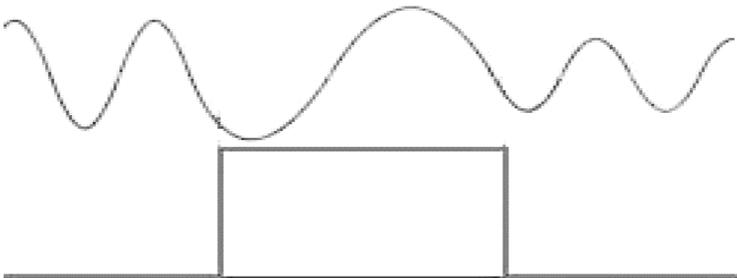
semua konstanta telah dinyatakan dalam E . Dengan menggunakan persamaan-persamaan tersebut, penyelesaian umum dari persamaan gelombang untuk potensial penghalang dengan $E > V_0$ (Persamaan (7.86), (7.87) dan 7.88)) akan menjadi penyelesaian khusus, yaitu:

$$\psi_I(x) = E \left(\frac{A}{E} e^{ikx} + \frac{B}{E} e^{-ikx} \right) \quad \text{untuk } x \leq 0 \quad (7.97)$$

$$\psi_{II}(x) = E \left(\frac{C}{E} e^{iKx} + \frac{D}{E} e^{-iKx} \right) \quad \text{untuk } 0 \leq x \leq a \quad (7.98)$$

$$\psi_{III}(x) = E e^{ikx} \quad \text{untuk } x \geq a \quad (7.99)$$

dimana $\frac{A}{E}, \frac{B}{E}, \frac{C}{E}, \frac{D}{E}$ masing-masing sesuai dengan Persamaan (7.93), (7.94), (7.95) dan (7.96). Grafik fungsi gelombang yang melewati potensial penghalang dengan $E > V_0$ diperlihatkan pada Gambar 7.12.



Gambar 7.12 Grafik fungsi gelombang yang melewati potensial penghalang dengan $E > V_0$

Dengan menggunakan Persamaan (7.93) dan (7.94) maka dapat kita peroleh koefisien refleksi, yaitu:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k^2 - K^2)^2 \sin^2 Ka}{4k^2 K^2 + (k^2 - K^2)^2 \sin^2 Ka} \quad (7.100)$$

dan koefisien transmisi dinyatakan:

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1^2 K^2}{4k^2 K^2 + (k^2 - K^2)^2 \sin^2 Ka} \quad (7.101)$$

Dengan menggunakan nilai dari k dan K maka kita peroleh koefisien transmisi dalam bentuk lain, yaitu:

$$T = \frac{4E(E - V_0)}{4E(E - V_0) + V_0^2 \sin^2 \left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)} \right)} \quad (7.102)$$

Persamaan (7.102) menunjukkan bahwa, untuk nilai E dan V_0 tertentu, koefisien transmisi bergantung secara periodik terhadap lebar tanggula. Nilai maksimum T adalah 1, dan ini terjadi jika $a = \frac{n\pi}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)}$ dengan n sebarang bilangan bulat positif.

8. OSILATOR HARMONIK SEDERHANA

Osilator harmonik adalah salah satu sistem model yang paling penting dalam fisika kuantum. Sebuah osilator harmonik adalah permissalan dari sebuah partikel yang tunduk pada gaya pemulih yang sebanding dengan perpindahan dari partikel tersebut. Dalam fisika klasik persamaan osilator harmonik sederhana dinyatakan oleh:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (7.103)$$

Konstanta k adalah konstanta osilator. Semakin besar k maka semakin besar gaya pemulih untuk perpindahan partikel tertentu dari posisi kesetimbangan (dimisalkan $x = 0$). Solusi sederhana untuk perpindahan x diberikan oleh:

$$x = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (7.104)$$

karena

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Besaran $\sqrt{k/m}$ berperan penting dalam besaran frekuensi sudut melalui persamaan:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{k/m} \quad (7.105)$$

Semakin besar konstanta osilator, maka semakin tinggi frekuensi osilasi, dan jika semakin besar massa, maka semakin kecil frekuensi osilasi.

Pembahasan tentang gerak harmonik fisika kuantum dimulai dari spesifikasi persamaan Schrodinger. Dengan menggunakan gaya pemulih linier yang telah dijelaskan di atas, maka energi potensial klasik adalah:

$$V = - \int F dx = - \int (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (7.106)$$

sehingga kita bisa menuliskan persamaan Schrodinger menjadi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{1}{2} kx^2 \psi(x) = E\psi(x) \quad (7.107)$$

Untuk mempermudah pemahaman, kita akan membahas gerakan dalam satu dimensi saja, dimana V dan ψ adalah fungsi dari x . Semua solusi dari Persamaan (7.107) harus menuju nol untuk limit $x \rightarrow +\infty$ dan $x \rightarrow -\infty$. Fungsi yang paling sederhana yang memenuhi kondisi ini adalah $\psi(x) = Ae^{-ax^2}$. Konstanta a dan energi E dapat ditemukan dengan mensubstitusikan fungsi ini ke Persamaan (7.107). Kita mulai dengan mengevaluasi $\frac{d^2}{dx^2} \psi(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \psi(x) &= \frac{d}{dx} Ae^{-ax^2} = -2ax(Ae^{-ax^2}) \\ \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) &= -2a(Ae^{-ax^2}) - 2ax(-2ax)(Ae^{-ax^2}) \\ &= (-2a + 4a^2x^2)Ae^{-ax^2} \end{aligned}$$

Substitusikan hasil di atas ke Persamaan (7.107), sehingga diperoleh:

$$\frac{\hbar^2 a}{m} - \frac{2a^2 \hbar^2}{m} x^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E \quad (7.108)$$

Persamaan (7.108) bukanlah sebuah persamaan yang harus diselesaikan untuk x , karena kita mencari solusi yang valid untuk setiap nilai x , tidak hanya untuk satu nilai x tertentu. Agar persamaan ini berlaku untuk sebarang x , koefisien x^2 harus dihilangkan dan konstanta yang tersisa harus sama.

Misalnya, perhatikan persamaan $bx^2 = c$. Ini akan berlaku bagi sebarang dan semua nilai x jika dan hanya jika keduanya $b = 0$ dan $c = 0$. Sehingga:

$$-\frac{2a^2\hbar^2}{m} + \frac{1}{2}k = 0 \quad (7.109)$$

dan

$$\frac{\hbar^2 a}{m} = E \quad (7.110)$$

yang akan menghasilkan:

$$a = \frac{\sqrt{km}}{2\hbar} \quad (7.111)$$

dan

$$E = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{k/m} \quad (7.112)$$

Kita juga dapat menuliskan energi dalam bentuk frekuensi sudut klasik $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, sehingga menjadi:

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \quad (7.113)$$

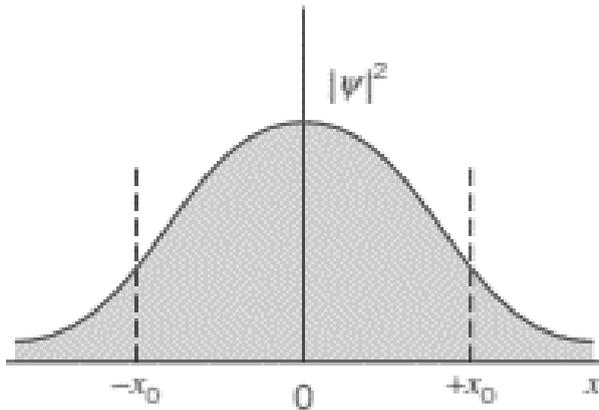
Koefisien A ditemukan melalui normalisasi. Hasilnya adalah:

$$A = \left(\frac{m\omega_0}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \quad (7.114)$$

Fungsi gelombang lengkap dari keadaan dasar (*ground state*) adalah:

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\sqrt{km}}{2\hbar}x^2} \quad (7.115)$$

Kerapatan probabilitas untuk fungsi gelombang ini diilustrasikan pada Gambar 7.13. Perlu dicatat bahwa, seperti halnya sumur potensial berhingga, kemungkinan kerapatan probabilitasnya menembus ke wilayah terlarang di luar titik balik klasik di $x = \pm x_0$ (di wilayah ini energi potensial lebih besar dari E).



Sumber: *Modern Physics 3rd Ed.*, 2012.

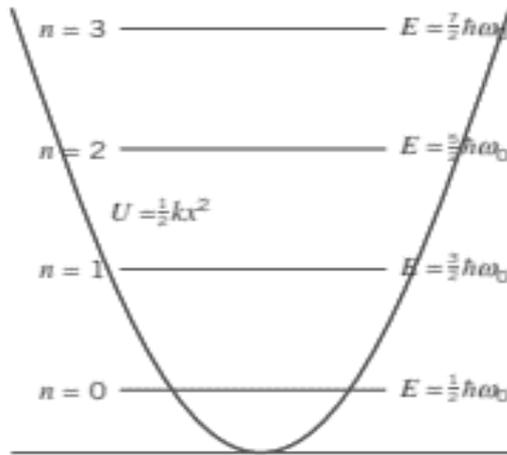
Gambar 7.13 Kerapatan probabilitas untuk keadaan dasar osilator harmonik sederhana.

Solusi yang telah kita temukan hanya sesuai untuk keadaan dasar dari osilator. Solusi umum yang sebenarnya adalah berbentuk $\psi_n(x) = Af_n(x)e^{-ax^2}$, dimana $f_n(x)$ adalah sebuah polinomial dalam x dengan pangkat tertinggi x adalah x^n . Energi yang sesuai dengan solusi ini adalah:

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 \quad \text{dengan } n = 0,1,2, \dots \quad (7.116)$$

Tingkat energi ini ditunjukkan pada Gambar 7.14. Perhatikan bahwa jarak antar tingkat memiliki selang jarak yang sama. Hal ini berbeda dengan energi potensial sumur

potensial satu dimensi. Semua solusi untuk masing-masing tingkat energi memiliki sifat yang sama dimana rapat probabilitas menembus ke wilayah terlarang di luar titik balik klasik. Semua rapat probabilitas berosilasi seperti gelombang sinus di antara titik balik dan berkurang menuju nol seperti fungsi e^{-ax^2} .



Sumber: *Sumber: Modern Physics 3rd Ed., 2012.*

Gambar 7.14 Tingkat energi untuk osilator harmonik sederhana.

Contoh 7.4

Sebuah elektron terikat dalam suatu ruang oleh sebuah gaya pegas dengan konstanta pegas efektif $k = 95,7 \text{ eV/nm}^2$.

- tentukan energi keadaan dasarnya.
- berapakah energi yang harus diserap agar elektron dapat loncat dari keadaan dasar ke keadaan tereksitasi kedua?

Penyelesaian:

- Keadaan dasarnya adalah

$$E = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = \frac{1}{2} \hbar \sqrt{k/m} = \frac{1}{2} \hbar c \sqrt{k/mc^2}$$

$$E = \frac{1}{2} (197 \text{ eV} \cdot \text{nm}) \sqrt{\frac{95,7 \text{ eV/nm}^2}{0,511 \times 10^6 \text{ eV}}}$$

$$E = 1,35 \text{ eV}$$

- (b) Perbedaan antara tingkat energi yang berdekatan adalah $\hbar \omega_0 = 2,70 \text{ eV}$ untuk semua tingkat energi, sehingga energi yang harus diserap agar electron dapat pergi dari keadaan dasar ke keadaan tereksitasi kedua adalah $\Delta E = 2 \times 2,70 \text{ eV} = 5,40 \text{ eV}$.

SOAL LATIHAN

1. Sebuah partikel bebas memiliki fungsi gelombang awal

$$\psi(x, 0) = A e^{-a|x|}$$

dimana A dan a adalah konstanta riil positif. Tentukan nilai A agar $\psi(x, 0)$ ternormalisasi.

2. Fungsi gelombang sebuah partikel yang terkurung dalam batas $0 \leq x \leq a$ pada keadaan dasar adalah

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Dimana A adalah konstanta normalisasi. Tentukan A dan tentukan probabilitas partikel tersebut ditemukan pada interval $\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{3a}{4}$.

3. Suatu elektron terperangkap di dalam kotak satu dimensi dengan panjang 1 \AA . Tentukan
 - a. Energi tingkat dasar elektron tersebut

b. Besar peluang untuk menemukan elektron di daerah

$$\frac{1}{2}\text{\AA} < x < \frac{3}{4}\text{\AA}.$$

4. Jika potensial tangga diberikan oleh:

$$V_x = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \leq 0 \\ V_0, & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

a. Tentukan koefisien refleksi untuk kasus $E < V_0$.

b. Tentukan koefisien refleksi untuk kasus $E > V_0$.

5. Jika potensial tangga diberikan oleh:

$$V_x = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \leq 0 \\ V_0, & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

Tentukan koefisien transmisi untuk potensial tangga tersebut pada kasus $E > V_0$, dan tunjukkan bahwa $T + R = 1$.

BAB 8

PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN

1. PENDAHULUAN

Hal yang terpenting dalam memahami materi pada bagian ini adalah penguasaan tentang cara menyelesaikan persamaan diferensial parsial, khususnya tentang *spherical harmonics* dan polinom Legendre. Tanpa kemampuan tentang hal tersebut, susah untuk dapat memperoleh penelaahan yang mendalam tentang solusi persamaan gelombang Schrodinger untuk sistem atom hidrogen (yang sederhana).

Dalam bab ini, pembahasan akan dilakukan dengan batasan sebagai berikut:

1. Permasalahan fisika dan representasinya secara Matematika.
2. Struktur persamaan gelombang Schrodinger untuk sistem atom hidrogen.
3. Solusi persamaan gelombang Schrodinger dan persyaratannya.
4. Normalisasi fungsi gelombang.

Model atom hidrogen merupakan model atom yang paling sederhana yang terdiri atas sebuah orbit elektron dan

sebuah muatan positif di inti berupa proton. Model dasar atom hidrogen adalah sebagai berikut:

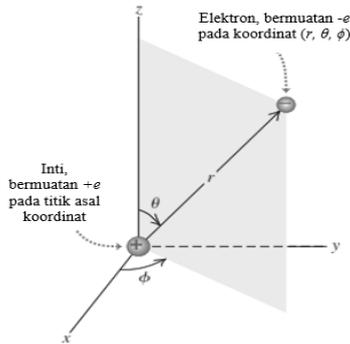
- a. Suatu elektron dengan muatan listrik e dan massa m_o , mengelilingi suatu inti yang bermuatan positif $+Ze$. Karena terdapat pengaruh gaya Coulomb, maka potensialnya adalah:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.1)$$

- b. Massa inti atom hidrogen M , dianggap sangat besar terhadap massa elektron m_o , sehingga pusat massa berimpit dengan posisi inti.

Fungsi potensial pada Persamaan (8.1) mempunyai cakupan bola, oleh karena itu koordinat bola dipergunakan sebagai sistem koordinat acuannya. Sketsa koordinat (x, y, z) dan koordinat (r, θ, ϕ) ditunjukkan pada Gambar 8.1. Transformasi koordinat bola ke koordinat kartesian dilakukan dengan menggunakan hubungan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (8.2)$$



Sumber: Sears and Zemansky's *University Physics with Modern Physics 13th Ed.*, 2012

Gambar 8.1 Koordinat bola untuk atom hidrogen

Sebaliknya transformasi koordinat kartesian ke koordinat bola dilakukan dengan menggunakan hubungan

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 \theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
 \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x}
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

Contoh 8.1

Konversikan titik pada koordinat bola $(r, \theta, \phi) = (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ menjadi koordinat kartesian.

Penyelesaian:

Titik x , y dan z masing-masing adalah

$$x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2 \cos \frac{\pi}{4}$$

Sehingga, koordinat kartesian adalah $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$.

Fungsi Hamiltonian (fungsi energi total) yang menggambarkan sistem atom hidrogen tersebut adalah:

$$E = \frac{p^2}{2m_o} + V(r) \quad (8.4)$$

Operator Hamiltoniannya adalah:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \nabla^2 + V(r) \quad (8.5)$$

Dengan ∇^2 adalah operator Laplace, yaitu:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.6)$$

Dalam koordinat bola operator Laplace yang dijelaskan di atas akan berbentuk:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (8.7)$$

Sehingga dalam koordinat bola, operator Hamiltonian berbentuk:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_o r} \quad (8.8)$$

Dengan demikian persamaan gelombang Schrodinger untuk model atom H yang sederhana adalah:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_o} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] - \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_o r} \Psi \\ = E\Psi \end{aligned} \quad (8.9)$$

Pada persamaan di atas, digunakan Ψ sebagai notasi singkat untuk merepresentasikan $\Psi(r, \theta, \phi)$.

Andaikan bahwa dapat dilakukan pemisahan variabel sehingga solusi persamaan gelombang untuk atom hidrogen dapat ditulis sebagai berikut:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \tag{8.10}$$

Bagian fungsi $R(r)$ dinamakan sebagai bagian radial sedangkan $Y(\theta, \phi)$ dinamakan bagian anguler. Substitusi bentuk di atas pada Persamaan (8.9) akan menghasilkan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_o} \left[\frac{Y}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] + VRY = ERY \tag{8.11}$$

Apabila seluruhnya dikalikan dengan $-\frac{2m_o r^2}{\hbar^2} \frac{1}{R(r)Y(\theta, \phi)}$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m_o r^2}{\hbar^2} [E - V]R \\ = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] \end{aligned} \tag{8.12}$$

Karena ruas kiri hanya terdiri dari variabel r sedangkan ruas kanan hanya bergantung dari variabel θ dan ϕ , dan apabila keduanya selalu harus sama, maka masing-masing ruas itu sama dengan suatu tetapan yang kita misalkan saja λ .

Dari uraian diatas diperoleh dua perangkat persamaan, yaitu:

a. Persamaan radial

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m_o r^2}{\hbar^2} [E - V]R = \lambda R \tag{8.13}$$

b. Persamaan angular

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -\lambda Y \quad (8.14)$$

dengan $Y(\theta, \phi)$ sebagai fungsi angular.

Andaikan lagi bahwa $Y(\theta, \phi)$ masih dapat lagi menjadi dua bagian dengan variabel yang terpisah, yaitu:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (8.15)$$

Substitusi dalam persamaan angular akan memberikan:

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -\lambda \Theta \Phi \quad (8.16)$$

Perkalian Persamaan (8.16) dengan $\sin^2 \theta \frac{1}{\Theta \Phi}$ akan menghasilkan:

$$\frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad (8.17)$$

Pemisahan variabel θ dan ϕ akan menghasilkan dua perangkat persamaan yang masing-masing adalah konstanta, jika diambil konstanta A , maka persamaan menjadi sebagai berikut:

a. Persamaan untuk $\Phi(\phi)$ merupakan fungsi dari ϕ

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -A \quad (8.18)$$

b. Persamaan untuk $\Theta(\theta)$ merupakan fungsi dari θ

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = A \quad (8.19)$$

2. MEMECAHKAN PERSAMAAN RADIAL

Persamaan radial pada Persamaan (8.13) yang berkaitan dengan persamaan gelombang Schrodinger untuk atom hidrogen. Dengan memisalkan:

$$\lambda = \ell(\ell + 1) \tag{8.20}$$

maka Persamaan (8.13) menjadi:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V - E]R = \ell(\ell + 1)R \tag{8.21}$$

Kemudian dengan mendefinisikan:

$$u(R) \equiv rR(r) \rightarrow R(r) = \frac{u(r)}{r} \tag{8.22}$$

maka:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) \\ \frac{dR}{dr} &= \left[r \frac{dr}{dr} - u \right] \frac{1}{r^2} \end{aligned} \tag{8.23}$$

Mengalikan Persamaan (8.23) dengan r^2 didapatkan:

$$r^2 \frac{dR}{dr} = r \frac{du}{dr} - u \tag{8.24}$$

lalu Persamaan (8.24) diturunkan terhadap r maka:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \left(\frac{dR}{dr} \right) \right) = \frac{d}{dr} \left[r \frac{du}{dr} - u \right] = \frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{du}{dr} = r \frac{d^2u}{dr^2} \tag{8.25}$$

Persamaan (8.25) disubstitusikan ke Persamaan (8.21) sehingga:

$$r \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V - E]R = \ell(\ell + 1)R$$

$$r \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{2mr}{\hbar^2} [V - E]u = \ell(\ell + 1)R \quad (8.26)$$

Persamaan (8.26) dikalikan dengan $-\frac{\hbar^2}{2mr^2}$, maka:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d^2u}{dr^2} - [V - E]u &= -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \ell(\ell + 1)R \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + Vu + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \ell(\ell + 1)u &= Eu \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \ell(\ell + 1) \right] u &= Eu \end{aligned} \quad (8.27)$$

Persamaan (8.27) ini bentuknya mirip dengan persamaan Schrodinger tidakbergantung waktu, hanya saja ada penambahan suku pada potensialnya.

Dengan menggunakan persamaan potensial pada Persamaan (8.1) dengan menggunakan $Z = 1$ untuk atom hidrogen maka diperoleh:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \ell(\ell + 1) \right] u &= Eu \\ -\frac{\hbar^2}{2mE} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 Er} + \frac{\hbar^2}{2mEr^2} \ell(\ell + 1) \right] u &= u \end{aligned} \quad (8.28)$$

Didefinisikan suatu konstanta k yang bernilai real positif untuk keadaan terikat ($E < 0$)

$$k^2 \equiv -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad (8.29)$$

Maka Persamaan (8.29) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 k^2 r} - \frac{1}{k^2} \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right] u &= u \\ \frac{1}{k^2} \frac{d^2u}{dr^2} = \left[1 - \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 k^2 r} - \frac{\ell(\ell + 1)}{(kr)^2} \right] u \end{aligned} \quad (8.30)$$

Lalu didefinisikan lagi suatu besaran ρ dan ρ_o , dengan:

$$\rho \equiv kr \text{ dan } \rho_o \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2k} \tag{8.31}$$

Maka $d\rho = kdr$ dan $d\rho^2 = k^2dr^2$, sehingga Persamaan (8.30) menjadi:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \left[1 - \frac{\rho_o}{\rho} + \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} \right] u \tag{8.32}$$

Solusi dari persamaan ini diperoleh dengan mencari solusi-solusi pada daerah ekstrim, yaitu pada $\rho \rightarrow \infty$ dan pada $\rho \rightarrow 0$ jika $\rho \rightarrow \infty$ maka suku dalam tandakurung siku mendekati satu, sehingga:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = u \tag{8.33}$$

Persamaan di atas adalah persamaan diferensial orde dua, sehingga solusinya:

$$u(\rho) = Ae^{-\rho} + Be^{\rho} \tag{8.34}$$

Oleh karena pada saat $\rho \rightarrow \infty$ suku Be^{ρ} menjadi tidak berhingga maka B haruslah nol. Jadi, solusi untuk ρ besar adalah:

$$u(\rho) \approx Ae^{-\rho} \tag{8.35}$$

saat $\rho \rightarrow 0$ maka suku $\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}$ menjadi dominan, Persamaan (8.32) mendekati:

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} = \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} u \tag{8.36}$$

Solusi Persamaan (8.36) adalah:

$$u(\rho) = C\rho^{\ell+1} + D\rho^{-\ell} \tag{8.37}$$

Namun suku $D\rho^{-1}$ menjadi tidak berhingga jika $\rho \rightarrow 0$ sehingga solusi yang memenuhi adalah:

$$u(\rho) \approx C\rho^{\ell+1} \tag{8.38}$$

Dengan diperolehnya solusi-solusi pada daerah ekstrim, maka solusi umum dari Persamaan (8.36) dimisalkan merupakan hasil perkalian dari solusi-solusi pada daerah ekstrim dan suatu fungsi yang bergantung pada ρ , yaitu $v(\rho)$

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1}e^{-\rho}v(\rho) \tag{8.39}$$

Melalui hasil ini, persamaan radial sebelumnya, yaitu persamaan (8.36) kita nyatakan dalam fungsi $v(\rho)$. Untuk itu, diferensialkan $u(\rho)$ terhadap ρ maka diperoleh hasil:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\rho} &= \frac{d(\rho^{\ell+1}e^{-\rho})}{d\rho}v + (\rho^{\ell+1}e^{-\rho})\frac{dv}{d\rho} \\ \frac{du}{d\rho} &= [(\ell + 1)\rho^{\ell} - \rho^{\ell+1}e^{-\rho}]v + (\rho^{\ell+1}e^{-\rho})\frac{dv}{d\rho} \\ \frac{du}{d\rho} &= \rho^{\ell}e^{-\rho} \left[(\ell + 1 - \rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right] \end{aligned} \tag{8.40}$$

Didiferensialkan sekali lagi $u(\rho)$ terhadap ρ

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\rho^2} &= \frac{d(\rho^{\ell}e^{-\rho})}{d\rho} \left[(\ell + 1 - \rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right] + \rho^{\ell}e^{-\rho} \frac{d}{d\rho} \left[(\ell + 1 - \rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right] \\ \frac{d^2u}{d\rho^2} &= [\ell\rho^{\ell-1}e^{-\rho} - \rho^{\ell}e^{-\rho}] \left[(\ell + 1 - \rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right] \\ &\quad + \rho^{\ell}e^{-\rho} \left\{ -v + \left[(\ell + 1 - \rho) \frac{dv}{d\rho} \right] + \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} \right\} \\ \frac{d^2u}{d\rho^2} &= \rho^{\ell}e^{-\rho} \left\{ \ell\rho^{-1} \left[(\ell + 1 - \rho)v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right] - (\ell + 1 - \rho)v - \rho \frac{dv}{d\rho} - v \right. \\ &\quad \left. + (\ell + 1 - \rho) \frac{dv}{d\rho} + \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\rho^2} &= \rho^\ell e^{-\rho} \left\{ \frac{\ell(\ell+1)}{\rho} v - \ell v + \ell \frac{dv}{d\rho} - (\ell+1-\rho)v - \rho \frac{dv}{d\rho} - v + (\ell+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} \right\} \\ \frac{d^2u}{d\rho^2} &= \rho^\ell e^{-\rho} \left\{ \left[-2\ell - 2 + \rho + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho} \right] v + 2(\ell+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} \right\} \end{aligned} \quad (8.41)$$

Persamaan (8.38) dan Persamaan (8.40) kemudian disubstitusikan ke Persamaan (8.32), sehingga

$$\begin{aligned} \rho^\ell e^{-\rho} \left\{ \left[-2\ell - 2 + \rho + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho} \right] v + 2(\ell+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} \right\} \\ &= \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] \rho^{\ell+1} e^{-\rho} v \\ \rho^\ell e^{-\rho} \left\{ \left[-2\ell - 2 + \rho + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho} \right] v + 2(\ell+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} \right\} \\ &= \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] \rho^\ell e^{-\rho} \rho v \\ \left[-2\ell - 2 + \rho + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho} \right] v + 2(\ell+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} &= \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] \rho v \\ \left[-2\ell - 2 + \rho + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho} \right] v - \left[\rho - \rho_0 + \frac{\ell(\ell+1)}{\rho} \right] v + 2(\ell+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} &= 0 \\ \rho \frac{d^2v}{d\rho^2} + 2(\ell+1-\rho) \frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(\ell+2)]v &= 0 \end{aligned} \quad (8.42)$$

Persamaan ini adalah persamaan radial dalam fungsi $v(\rho)$. Solusi persamaan (8.42) kita asumsikan dapat kita nyatakan dalam bentuk deret pangkat yaitu:

$$v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j \quad (8.43)$$

Selanjutnya adalah menentukan koefisien dari deret ini, yaitu a_0, a_1, a_2 , dst. Untuk mendapat koefisien-koefisien tersebut, pertama kita menentukan turunan pertama $v(\rho)$ terhadap ρ kemudian menentukan turunan keduanya.

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j \rho^{j-1} \tag{8.44}$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=-1}^{\infty} (j + 1) a_{j+1} \rho^j$$

$$\frac{dv}{d\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} (j + 1) a_{j+1} \rho^j$$

$$\frac{d^2v}{d\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j + 1) a_{j+1} \rho^{j-1} \tag{8.45}$$

Substitusi Persamaan (8.43), Persamaan (8.44) dan Persamaan (8.45) ke Persamaan (8.42) maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} j(j + 1) a_{j+1} \rho^j + 2(\ell + 1) \sum_{j=0}^{\infty} (j + 1) a_{j+1} \rho^j - 2 \sum_{j=0}^{\infty} j a_j \rho^j \\ + [\rho_0 - 2(\ell + 1)] \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j = 0 \end{aligned} \tag{8.46}$$

Dari Persamaan (8.46), penjumlahan koefisien-koefisien deret pangkat, diperoleh:

$$j(j + 1) a_{j+1} + 2(\ell + 1)(j + 1) a_{j+1} - 2j a_j + [\rho_0 - 2(\ell + 1)] a_j = 0 \tag{8.47}$$

$$(j + 1)(j + 2\ell + 2) a_{j+1} = (2(j + \ell + 1) - \rho_0) a_j \tag{8.48}$$

$$a_{j+1} = \left\{ \frac{2(j + \ell + 1) - \rho_0}{(j + 1)(j + 2\ell + 2)} \right\} a_j \tag{8.49}$$

Persamaan rekursi inilah yang di gunakan untuk menentukan koefisien-koefisien dari deret pangkat $v(\rho)$. Misalkan $a_0 = A$, dan untuk j besar (j besar bersesuaian dengan ρ besar)

maka suku dengan pangkat besar mendominasi deret), jadi dari persamaan (8.49) diperoleh:

$$a_{j+1} = \frac{2j}{j(j+1)} a_j = \frac{2}{j+1} a_j \tag{8.50}$$

dan

$$a_j = \frac{2^j}{j!} A \tag{8.51}$$

dengan hasil pada Persamaan (8.51) maka Persamaan (8.43) menjadi:

$$v(\rho) = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = A e^{2\rho} \tag{8.52}$$

dan dengan hasil ini maka Persamaan (8.39) menjadi:

$$u(\rho) = C_0 \rho^{\ell+1} e^{\rho} \tag{8.53}$$

Perhatikan dengan seksama hasil ini. Hasil ini menjadi tidak berhingga untuk ρ besar, maka satu-satunya jalan adalah dengan menganggap koefisien a_j memiliki nilai maksimum, yaitu $a_{j_{maks}}$ dan koefisien yang lebih tinggi darinya bernilai nol

$$a_{j_{maks}+1} = 0 \tag{8.54}$$

dari Persamaan (8.49) diperoleh:

$$2(j_{maks} + \ell + 1) - \rho_0 = 0 \tag{8.55}$$

didefinisikan bilangan baru

$$n \equiv j_{maks} + \ell + 1 \tag{8.56}$$

sehingga:

$$\rho_0 = 2n \tag{8.57}$$

Berdasarkan hubungan yang telah kita peroleh di atas, maka dapat ditentukan tingkat-tingkat energi dari elektron dalam Atom Hidrogen. Dari definisi k dan ρ_0 sebelumnya:

$$k^2 \equiv -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{dan} \quad \rho_0 \equiv \frac{me^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2k}$$

maka diperoleh:

$$E = -\frac{me^4}{8\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2\rho_0^2} \quad (8.58)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (8.57) ke persamaan (8.58) maka persamaan energi menjadi:

$$E_n = -\left[\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right]\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \quad (8.59)$$

dengan

$$E_1 = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \quad (8.60)$$

n disebut dengan bilangan kuantum utama. Ini adalah Formula Bohr yang terkenal itu.

Kemudian dari definisi k dan ρ_0 dan Persamaan (8.57) juga diperoleh:

$$k = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (8.61)$$

dengan

$$a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0,592 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (8.62)$$

a disebut sebagai jari-jari atom Bohr.

Selanjutnya solusi untuk $R(r)$ belum kita dapatkan, untuk itu dari Persamaan (8.61) dan definisi $\rho \equiv kr$ sebelumnya, maka diperoleh hubungan:

$$\rho \equiv \frac{r}{an} \tag{8.63}$$

maka diperoleh:

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{r} \rho^{\ell+1} e^{-\rho} v(\rho) \tag{8.64}$$

Fungsi gelombang untuk hidrogen diberi label oleh tiga bilangan kuantum (n , ℓ , dan m)

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \tag{8.65}$$

dengan $R_{n\ell}$ seperti pada Persamaan (8.64) dan $v(\rho)$ adalah polinomial dengan pangkat $j_{maks} = n - \ell - 1$ dalam ρ , yang koefisien ditentukan (hingga faktor normalisasi keseluruhan) dengan rumus rekursi.

Akhirnya Fungsi gelombang ternormalisasi Atom Hidrogen adalah:

$$\begin{aligned} \psi_{n\ell m} &= \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n - \ell - 1)!}{2n[(n + 1)!]^3}} e^{-\left(\frac{r}{na}\right)} \left(\frac{2r}{na}\right)^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1} \left(\frac{2r}{na}\right) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \end{aligned} \tag{8.66}$$

dengan $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}$ adalah polinomial Laguerre terasosiasi dan untuk sebarang nilai n , nilai ℓ yang mungkin diperoleh $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Analisa tentang pemecahan persamaan radial di atas memberikan hasil-hasil sebagai berikut:

- a. Ada solusi yang dapat dipergunakan apabila ditetapkan suatu tetapan baru n yang bernilai

$$n = (\ell + 1), (\ell + 2), (\ell + 3), \dots$$

- b. Bentuk solusi persamaan radial dimaksud di atas adalah

$$R_{n\ell}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n - \ell - 1)!}{2n[(n + 1)!]^3}} e^{-\left(\frac{r}{na}\right)} \left(\frac{2r}{na}\right)^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na}\right) \tag{8.67}$$

Dengan adalah radius Bohr, yaitu $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_0e^2}$, sedangkan

$L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}$ adalah fungsi Laguerre. Beberapa fungsi Laguerre dapat dilihat pada Tabel 8.1. Selain menggunakan Tabel 8.1, dapat juga diperoleh melalui formula Rodrigues

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) \tag{8.68}$$

- c. Persamaan radial ini juga memberikan harga untuk energi sistem atom hidrogen. Harga energi E ini ternyata bergantung dari n sebagai $E_n = -\frac{m_0 Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2}$, dengan $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Tabel 8.1 Beberapa fungsi Laguerre

n	ℓ	$L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(x)$
1	0	$L_0^1(x) = 1$
	0	$L_1^1(x) = 2 - x$
2	1	$L_0^3(x) = 1$
	0	$L_2^1(x) = 3 - 3x + (1/2)x^2$
	1	$L_1^3(x) = 4 - x$
3	2	$L_0^5(x) = 1$
	0	$L_3^1(x) = 4 - 6x + 2x^2 - (1/4)x^3$
	1	$L_2^3(x) = 10 - 5x + (1/2)x^2$
	2	$L_1^5(x) = 6 - x$
4	3	$L_0^7(x) = 1$

Rumus energi E_n , untuk sistem atom hidrogen yang diperoleh dengan menerapkan metode Schrodinger ternyata tepat sama dengan hasil yang diperoleh dengan mempergunakan postulat-postulat Bohr. Rumus energi yang dimaksud, sebagaimana juga rumus tingkat energi menurut Bohr, dapat menerangkan dengan jelas harga-harga panjang gelombang yang dipancarkan oleh atom-atom hidrogen. Oleh karena itu kesesuaian antara pengamatan dan perhitungan berdasarkan teori sangat memperkuat keyakinan orang tentang kemampuan metode Schrodinger dalam penelaahan sistem-sistem fisika tingkat atom dan sub atom.

Di bawah ini dicantumkan beberapa solusi persamaan radial untuk sistem atom hidrogen $R_{n\ell}$, seperti yang dapat kita lihat pada Tabel 8.2.

Hal yang harus diperhatikan dalam menggunakan Tabel 8.2 adalah:

- a. $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_0e^2} = 0,529 \text{ \AA}$, adalah jari-jari Bohr.
- b. Fungsi-fungsi dinormalisasi, artinya bahwa $\int_0^\infty (R_{n\ell}(r))^2 r^2 dr = 1$.

Tabel 8.2 Beberapa solusi persamaan radial untuk sistem atom hidrogen

n	ℓ	$R_{n\ell}$
1	0	$2a^{-3/2}e^{-r/a}$
2	0	$(1/\sqrt{2}) a^{-3/2}(1 - r/2a)e^{-r/2a}$
	1	$(1/2\sqrt{6}) a^{-3/2}(r/a)e^{-r/2a}$
3	0	$(2/\sqrt{27}) a^{-3/2}6(1 - 2r/3a + 2r^2/27a^2)e^{-r/3a}$
	1	$(4/9\sqrt{6}) a^{-3/2}(2r/3a)(1 - r/6a)e^{-r/3a}$
	2	$(1/9\sqrt{30}) a^{-3/2}(2r/3a)(1 - r/6a)e^{-r/3a}$

3. ANALISIS PERSAMAAN SCHRODINGER

Solusi dari fungsi radial diperoleh berdasarkan kenyataan bahwa persamaan diferensial Schrodinger untuk R ternyata merupakan persamaan Laguerre. Tahap berikutnya adalah tahap normalisasi, untuk menentukan tetapan yang ada di depan fungsi gelombang tersebut. Persamaan gelombang ψ tidak mempunyai makna secara fisis, namun kuadrat besaran $|\psi|^2$ (atau sama dengan $\psi^* \psi$ jika ψ kompleks) yang dicari pada suatu tempat tertentu pada suatu saat tertentu pula merupakan peluang untuk mendapatkan benda tersebut pada posisi itu pada saat itu.

Solusi persamaan gelombang Schrodinger untuk sistem atom hidrogen ditandai oleh 3 bilangan bulat, yaitu n , ℓ , dan m . Oleh karena itu ketiga bilangan tersebut dicantumkan dalam notasi solusi persamaan Schrodinger yaitu pada Persamaan (8.65). Fungsi gelombang tersebut dinormalisasikan sehingga:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (R_{n\ell}(r))^2 \psi_{lm}^* \psi_{lm} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 1 \quad (8.69)$$

Persamaan (8.69) di atas kita peroleh karena elemen volumenya adalah:

$$d\tau = (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\phi) \quad (8.70)$$

Karena θ dan ϕ adalah fungsi ternormalisasi, probabilitas yang sebenarnya $P(r)dr$ untuk mendapatkan elektron atom

hidrogen pada suatu tempat r dan $r + dr$ dari inti dapat kita peroleh melalui persamaan:

$$P(r)dr = r^2 |R_{n\ell}(r)|^2 dr \quad (8.71)$$

Contoh 8.2

Tentukan probabilitas untuk menemukan elektron pada jarak r dari inti dalam keadaan dasar.

Penyelesaian:

Fungsi radial keadaan dasar ($n = 1$) atom hidrogen adalah

$$R_{10}(r) = 2a^{-3/2} e^{-r/a}$$

Maka probabilitas per satuan panjang untuk mendapatkan elektron pada jarak r dari inti

$$P(r) = r^2 |R_{10}(r)|^2 = r^2 R_{10}^*(r) R_{10}(r) = \frac{4r^2}{a^3} e^{-2r/a}$$

Contoh 8.3

Buktikan bahwa jarak paling mungkin dari elektron pada keadaan $n = 2$, $\ell = 1$ ke titik asal adalah $4a$.

Penyelesaian:

Pada tingkat $n = 2$, $\ell = 1$, rapat probabilitas adalah

$$P(r) = r^2 |R_{21}(r)|^2 = r^2 \frac{r^2}{24a^5} e^{-r/a}$$

Kita ingin menghitung di mana fungsi ini mencapai maksimumnya, dengan cara yang umum, kita menghitung dulu turunan pertama $P(r)$ dan kemudian menyamakannya dengan nol:

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{1}{24a^5} \frac{d}{dr} \left[r^4 e^{-\frac{r}{a}} \right] = \frac{1}{24a^5} \left[4r^3 e^{-\frac{r}{a}} + r^4 \left(-\frac{1}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}} \right] = 0$$

$$\frac{1}{24a^5} e^{-r/a} \left[4r^3 - \frac{r^4}{a} \right] = 0$$

Satu-satunya pemecahan yang menghasilkan suatu maksimum adalah $r = 4a$.

4. TINJAUAN ULANG PEMECAHAN PERSAMAAN SCHRODINGER UNTUK SISTEM ATOM HIDROGEN.

Persamaan gelombang Schrodinger untuk atom hidrogen adalah:

$$\hat{H}\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = E\psi_{lm}(r, \theta, \phi) \quad (8.72)$$

dengan

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.73)$$

Ternyata mempunyai solusi yang berbentuk:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R(r)\psi(\theta, \phi)$$

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (8.74)$$

Bentuk tersebut yang ternyata diperoleh melalui pemisahan variabel memberikan perangkat persamaan diferensial biasa yang saling berkaitan yang telah diperoleh pada Persamaan (8.13) untuk persamaan radial $R(r)$, Persamaan (8.18) untuk persamaan anguler $\Phi(\phi)$ dan Persamaan (8.19) untuk persamaan anguler $\Theta(\theta)$. Ternyata bahwa tiga perangkat persamaan diferensial di atas, mempunyai solusi yang berguna bagi sistem atom hidrogen,

apabila dipenuhi beberapa syarat mengenai λ dan A , sebagai berikut:

- a. Persamaan untuk $\Phi(\phi)$ yang mempunyai keberkalaan 2π , mempersyaratkan bahwa:

$$A = m^2 \text{ dengan } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (8.75)$$

- b. Persamaan untuk $\Theta(\theta)$ dengan $A = m^2$, mempersyaratkan bahwa:

$$\lambda = \ell(\ell + 1), \text{ dengan } \ell = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.76)$$

dan bahwa:

$$|m| \leq \ell \quad (8.77)$$

- c. Jadi, fungsi *spherical harmonics* $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ ditandai oleh dua tetapan ℓ dan m , yang tertentu harganya. Sehingga perlu diberi indeks menjadi $Y_{lm}(\theta, \phi) = \Theta_{lm}(\theta)\Phi_l(\phi)$.

- d. Persamaan radial memberikan solusi untuk $R(r)$ yang berguna dalam penelaahan atom hidrogen apabila dipenuhi pula suatu persyaratan, yaitu adanya suatu bilangan yang dapat berharga $n = (\ell + 1), (\ell + 2), \dots$. Solusi persamaan radial itu ditandai oleh dua tetapan, yaitu n dan ℓ , dengan solusi seperti pada Persamaan (8.21)

$$R_{n\ell}(r) = \left\{ \left(\frac{2}{na_0} \right)^3 \frac{n - \ell - 1}{2n(n + \ell)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2r}{na_0} \right)^\ell e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right)$$

sehingga :

$$\psi_{nlm} = \left\{ \left(\frac{2}{na_0} \right)^3 \frac{n - \ell - 1}{2n(n + \ell)!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2r}{na_0} \right)^\ell e^{-\frac{r}{na_0}} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

dengan $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}$ adalah *polinomial Laguerre terasosiasi* dengan $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Memberikan harga energi E dari sistem hidrogen. Harga energi ini ditandai oleh bilangan tetap n seperti ditunjukkan pada Persamaan (8.58).

- e. Ternyata bahwa E_n di atas sama dengan apa yang diperoleh dengan menggunakan postulat-postulat Bohr. E_n memberikan kuantisasi energi total, ramalan tentang garis spektrum radiasi hidrogen berdasarkan rumus teoritis sesuai dengan kenyataan.
- f. Pada akhirnya ada tiga buah bilangan yang memberi ciri pada solusi persamaan Schrodinger untuk sistem atom hidrogen, yaitu n, ℓ, m . Ketiga bilangan ini berkait satu dengan lainnya sebagai berikut:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm \ell$$

Dimana untuk harga ℓ tertentu terdapat $(2\ell + 1)$ harga m .

Ketiga bilangan bulat itu dinamakan bilangan kuantum, yang secara khusus diberikan nama sebagai berikut:

n = bilangan kuantum utama

ℓ = bilangan kuantum azimuth

m = bilangan kuantum magnetik

- g. Setiap perangkat bilangan kuantum (n, ℓ, m) menggambarkan suatu keadaan khusus sistem atom

hidrogen (keadaan kuantum). Setiap keadaan kuantum ditandai oleh perangkat (n, ℓ, m) tertentu.

Pada Tabel 8.3 di bawah ini disertakan suatu beberapa contoh keadaan kuantum.

Tabel 8.3 Beberapa keadaan kuantum

Bilangan kuantum yang menandai keadaan kuantum			Jumlah perangkat bilangan kuantum yang berbeda	
n	ℓ	m	dengan n dan ℓ tertentu $(2\ell + 1)$	dengan n tertentu n^2
1	0	0	1	1
2	0	0	1	4
2	1	-1	3	4
2	1	0	3	4
2	1	1	3	4

- h. Seperti telah dinyatakan maka setiap keadaan kuantum sistem atom hidrogen ditandai oleh perangkat biangan kuantum (n, ℓ, m) . Ternyata bahwa untuk atom hidrogen energi total hanya bergantung dari bilangan kuantum utama n ,

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{elektron-volt} \tag{8.78}$$

Ini berarti bahwa keadaan kuantum yang berbeda, tetapi yang memiliki bilangan kuantum utama yang sama, memiliki energi total yang sama. Misalkan empat keadaan kuantum yang dinyatakan dengan perangkat:

$$(2,0,0); (2,1,-1); (2,1,0); (2,1,-1)$$

semuanya memiliki energi yang sama besar, yaitu:

$$E_2 = -\frac{13,6}{2} \text{ eV} = -3,4 \text{ eV}$$

Ini dinamakan degenerasi energi, yaitu satu harga energi yang memiliki beberapa fungsi eigen yang berbeda. Contoh diatas, $E_2 = -3,4 \text{ eV}$, dapat direpresentasikan dengan salah satu dari empat fungsi eigen di bawah ini:

$$\begin{aligned} &\psi_{200}(r, \theta, \phi); \psi_{210}(r, \theta, \phi) \\ &\psi_{211}(r, \theta, \phi); \psi_{21-1}(r, \theta, \phi) \end{aligned}$$

Fungsi gelombang yang tertulis di atas dinamakan sebagai fungsi eigen degenerasi, dengan degenerasi lipat empat (*four-fold degeneracy*).

- i. Energi degenerasi terjadi karena ruang lingkup yang tinggi dalam problem fisiknya. Dalam kasus atom hidrogen, ruang lingkupnya berbentuk bola. Ruang lingkup ini dapat dibuat lebih rendah, misalnya dengan menempatkan atom hidrogen tersebut dalam medan magnet luar. Kehadiran medan magnet ini meniadakan ruang lingkup bola. Ternyata bahwa dalam hal seperti ini degeneracy terangkat, dan energi total ditentukan tidak hanya oleh n tetapi juga oleh m .

Contoh 8.4

Untuk bilangan kuantum $n = 3$, tuliskan fungsi eigen dengan semua nilai ℓ dan m yang mungkin.

Penyelesaian:

Untuk $n = 3$, maka:

$$\ell = 0, 1, 2$$

sedangkan untuk ℓ tertentu ada $(2\ell + 1)$ harga m . Sehingga fungsi eigen yang mungkin adalah:

$$n = 3$$

ℓ	m	$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)$
0	0	$\psi_{400}(r, \theta, \varphi)$
1	-1	$\psi_{41-1}(r, \theta, \varphi)$
1	0	$\psi_{410}(r, \theta, \varphi)$
1	1	$\psi_{411}(r, \theta, \varphi)$
2	-2	$\psi_{42-2}(r, \theta, \varphi)$
2	-1	$\psi_{42-1}(r, \theta, \varphi)$
2	0	$\psi_{420}(r, \theta, \varphi)$
2	1	$\psi_{421}(r, \theta, \varphi)$
2	2	$\psi_{422}(r, \theta, \varphi)$

Total ada $3^2 = 9$ keadaan

Pada bab ini telah kita pelajari penerapan persamaan Schrodinger pada sistem atom yang paling sederhana yaitu atom hidrogen. Selain itu juga kita telah bahas solusi persamaan gelombang Schrodinger dan persyaratannya serta normalisasi dari persamaan fungsi gelombang tersebut. Namun, pembahasan tentang penerapan persamaan Schrodinger pada sistem atom hidrogen masih belum

selesai. Pembahasan ini akan kita lanjutkan pada bab-bab selanjutnya, terutama tentang pengembangan konsep penerapan persamaan Schrodinger pada sistem atom hidrogen, spin elektron dan kaitan spin tersebut dengan orbital elektron.

SOAL LATIHAN

1. Tentukan koordinat kartesian dari posisi sebuah partikel jika diketahui bahwa koordinat bola dari posisi partikel tersebut adalah $(8, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.
2. Jika diketahui sebuah partikel negatif berupa elektron di dalam atom berada pada keadaan $n = 1$, $\ell = 0$. Tentukanlah probabilitas untuk menemukan elektron tersebut di dalam daerah antara inti atom dan jari-jari Bohr a .
3. Jika diberikan bilangan kuantum sebesar 4, tuliskanlah fungsi eigen dari keadaan tersebut dengan semua nilai ℓ dan m yang mungkin dimiliki.
4. Normalisasi persamaan radial yang dinyatakan oleh R_{20} dan buatlah fungsi ψ_{200} .
5. Jika diketahui bahwa fungsi gelombang dari sebuah elektron di dalam atom hidrogen yang berada pada keadaan dasar adalah $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, maka tentukan nilai paling mungkin untuk r . Gunakan anggapan bahwa elektron dapat dipastikan berada di antara r dan $r + dr$.

BAB 9

PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN: PENGEMBANGAN KONSEP

1. PENDAHULUAN

Pada bab sebelumnya telah diuraikan tentang solusi persamaan Schrodinger untuk sistem atom hidrogen dan telah diperoleh bahwa solusinya ditandai oleh tiga bilangan bulat (n, ℓ , dan m) yang dinamakan perangkat bilangan kuantum. Bentuk solusinya juga telah dibahas dalam bab sebelumnya. Dengan demikian fungsi bilangan atom hidrogen telah diketahui.

Bab ini khusus ditujukan untuk meningkatkan makna dari persamaan gelombang Schrodinger untuk atom hidrogen, artinya bagaimana persamaan itu dapat diinterpretasikan dalam suatu kerangka konseptual yang lebih mendasar. Penjelasan ini merupakan pengembangan konseptual, tidak saja dalam telaah sistem atom hidrogen, tetapi juga dalam mekanika kuantum sendiri. Namun sebenarnya yang harus kita temukan adalah makna persamaan gelombang Schrodinger untuk atom hidrogen, sehingga diperoleh gambaran yang lebih komprehensif tentang landasan, metodologi dan teknik mekanika kuantum.

Dalam bab ini tetap dipergunakan model dasar tentang sistem atom hidrogen. Tahap pembahasannya adalah sebagai berikut:

- a) Operator momentum anguler pangkat dua, operator komponen z momentum anguler dan operator Hamilton H , dalam persamaan gelombang.
- b) Fungsi eigen dan harga eigen untuk operator H , L^2 dan L_z .
- c) Sistem atom hidrogen sederhana dalam medan magnet luar yang homogen.
- d) Hubungan antara operator H , L^2 dan L_z .

Pembahasan dalam bab ini ditekankan pada tingkat struktur, oleh karena itu yang terpenting adalah elemen-elemen dalam sistem persamaan gelombang Schrodinger antar atom hidrogen dan hubungan antara elemen-elemen tersebut. Yang dimaksud dengan elemen di sini adalah operator-operator, fungsi-fungsi dan harga-harga eigen.

2. BERBAGAI OPERATOR DALAM SISTEM PERSAMAAN GELOMBANG SCHRODINGER UNTUK ATOM HIDROGEN

Operator Hamiltonian untuk atom hidrogen (model sederhana) yang diperoleh pada bab sebelumnya adalah:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - V(r) \tag{9.1}$$

Fungsi eigen untuk operator H adalah:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{9.2}$$

dengan nilai eigen:

$$E = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon)^2 2\hbar^2 n^2} \tag{9.3}$$

Ternyata bahwa H di atas dapat diberi makna yang lebih luas. Perluasan makna tersebut ternyata memberikan landasan bertolak yang lebih konseptual.

Sebelum meningkat lebih jauh perlu diperoleh terlebih dahulu bentuk L^2 dan L_z dalam koordinat bola. Batasan momentum anguler adalah:

$$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \tag{9.4}$$

Sehingga diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{i}(yp_z - zp_y) - \vec{j}(xp_z - zp_x) \\ + \vec{k}(yp_x - zp_y) \end{aligned} \tag{9.5}$$

Dalam hubungannya dengan telaah sistem atom hidrogen, \vec{r} merupakan vektor kedudukan elektron terhadap inti atom dan \vec{p} adalah vektor momentum linier gerak elektron terhadap inti atom.

Menggunakan postulat Schrodinger tentang pembentukan operator, diperoleh:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \tag{9.6}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Langkah berikutnya adalah mentrasformasikan tiga bentuk di atas dalam koordinat bola. Oleh karena itu dipergunakan transformasi berikut:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \theta \sin \phi & \theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9.7) \\ z &= r \cos \theta & \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Turunan Persamaan (9.7) untuk x , y dan z menghasilkan:

$$\begin{aligned} dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \cos \phi d\phi \quad (9.8) \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Dengan memecahkan Persamaan (9.8) untuk dr , $d\theta$ dan $d\phi$, akan kita peroleh:

$$\begin{aligned} dr &= \sin \theta \cos \phi dx + \sin \theta \sin \phi dy + \cos \theta dz \\ d\theta &= \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi dx + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi dy - \frac{1}{r} \sin \theta dz \quad (9.9) \end{aligned}$$

$$d\phi = -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} dx + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} dy$$

Dari Persamaan (9.8) dan Persamaan (9.9) diperoleh:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \cos \phi \cos \theta \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin \phi}{r \cos \theta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \sin \phi \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \sin \phi \cos \theta \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{r} \sin \theta \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

yang kemudian akan menghasilkan:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \sin \phi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (9.13)$$

Dengan menggunakan hubungan-hubungan di atas maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_y &= i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Operator untuk pangkat duanya momentum anguler L^2 adalah:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (9.15)$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, ternyata diperoleh bahwa:

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (9.16)$$

Sekarang perhatikanlah persamaan nilai eigen untuk atom hidrogen

$$H\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = E\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) \quad (9.17)$$

Dengan pemisahan variabel persamaan di atas dapat dijadikan dua persamaan diferensial yang berkaitan, yaitu persamaan radial dan persamaan anguler, maka bentuk persamaan anguler tersebut adalah:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{\ell m} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y_{\ell m} = -\ell(\ell + 1)Y_{\ell m} \quad (9.18)$$

Dengan menggunakan hasil yang diperoleh pada Persamaan (9.16), persamaan radial di atas dapat ditulis sebagai:

$$L^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (9.19)$$

Dilihat dari bentuk persamaan tersebut, dapat dikatakan bahwa bentuknya adalah suatu persamaan nilai eigen untuk operator L^2 , dengan fungsi eigen $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ dan nilai eigen $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$.

Operator L^2 tidak mengandung operator $r, \frac{\partial}{\partial r}$ atau operator lain yang secara eksplisit berkaitan dengan r . Oleh karena itu:

$$L^2 \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) L^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

$$L^2 \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell + 1) R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

$$L^2 \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = \ell(\ell + 1) \hbar^2 \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) \quad (9.20)$$

Jadi $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi)$ juga merupakan fungsi eigen dari L^2 , sehingga:

$$L^2 \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell + 1) \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) \quad (9.21)$$

Nilai eigennya adalah $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$. Jelas juga bahwa harga ekspektasi $\langle L^2 \rangle$ sama dengan nilai eigen untuk L^2 .

Kemudian operator L_z adalah komponen momentum anguler dalam arah sumbu-z dalam sistem koordinat bola. Persamaan operator L_z diperlihatkan pada Persamaan (9.14), yaitu:

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Karena L_z hanya bergantung pada turunan pertama yang berkaitan dengan koordinat ϕ , maka pemecahan dari persamaan nilai eigen-nya adalah hal yang sederhana. Jika nilai eigen-nya diberi simbol m , maka kita peroleh:

$$L_z \Phi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \Phi = m\hbar \Phi \quad (9.22)$$

Persamaan yang kita peroleh di atas akan mengarahkan kita kepada persamaan:

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = im d\phi$$

$$\ln \Phi = im\phi \quad (9.23)$$

Dengan kata lain, melalui normalisasi persamaan di atas maka diperoleh:

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{im\phi} \quad (9.24)$$

Jika L_z beroperasi pada fungsi anguler $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, maka akan diperoleh:

$$L_z Y_{\ell m}(\theta, \phi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{\ell m}(\theta, \phi) = m\hbar Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (9.25)$$

karena:

$$L_z \Phi = -i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -i\hbar \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial e^{im\phi}}{\partial \phi} = \hbar m \frac{1}{\sqrt{2}} e^{im\phi} = m\hbar \Phi \quad (9.26)$$

dimana $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ yang disebut sebagai bilangan kuantum magnetik. Karena L_z tidak mengandung operator atau pun turunan-turunannya, maka

$$L_z \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = m\hbar \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) \quad (9.27)$$

Oleh karena itu, $\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi)$ juga merupakan fungsi eigen dari L_z dengan nilai eigen $m\hbar$. Seperti juga halnya dengan L^2 , maka harga ekspektasi $\langle L^2 \rangle$ juga sama dengan nilai eigen

L_z , yaitu $m\hbar$. Dapat disimpulkan bahwa, operator L^2 dan L_z kedua-duanya mempunyai fungsi eigen yang sama.

Contoh 9.1

Jika diberikan fungsi gelombang sebagai berikut

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{211}(\vec{r}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{21-1}(\vec{r})$$

Tentukan nilai rata-rata dari L^2 untuk keadaan tersebut.

Penyelesaian:

$$L^2 Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

Persamaan diatas hanya bergantung pada bilangan kuantum orbital, maka

$$L^2 \psi_{211}(\vec{r}) = 2\hbar^2 \psi_{211}(\vec{r})$$

dan

$$L^2 \psi_{21-1}(\vec{r}) = 2\hbar^2 \psi_{21-1}(\vec{r})$$

Sehingga

$$\langle L^2 \rangle = \int \psi^* L^2 \psi dV$$

$$\langle L^2 \rangle = \int \psi^* \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} \{-2\psi_{211} + 2\psi_{21-1}\} dV$$

$$\langle L^2 \rangle = \int \frac{\hbar^2}{2} \{2\psi_{211}^* \psi_{211} + 2\psi_{21-1}^* \psi_{21-1}\} dV$$

$$\langle L^2 \rangle = 2\hbar^2$$

Contoh 9.2

Jika diberikan fungsi gelombang sebagai berikut

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{211}(\vec{r}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{21-1}(\vec{r})$$

Jika dilakukan pengukuran L_z . Tentukan hasil-hasil yang mungkin dan tentukan probabilitas masing-masing hasil tersebut.

Penyelesaian:

$$L_z \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = m\hbar \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi)$$

Persamaan diatas hanya bergantung pada bilangan kuantum magnetik, maka

$$L_z \psi_{211}(\vec{r}) = \hbar \psi_{211}(\vec{r})$$

dan

$$L_z \psi_{21-1}(\vec{r}) = -\hbar \psi_{21-1}(\vec{r})$$

Sehingga hasil-hasil yang mungkin adalah \hbar dan $-\hbar$, dengan probabilitas masing-masing:

untuk \hbar

$$P_{\hbar} = \int \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \psi_{211}^* \psi_{211} dV = \frac{1}{2}$$

untuk $-\hbar$

$$P_{-\hbar} = \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \psi_{21-1}^* \psi_{21-1} dV = \frac{1}{2}$$

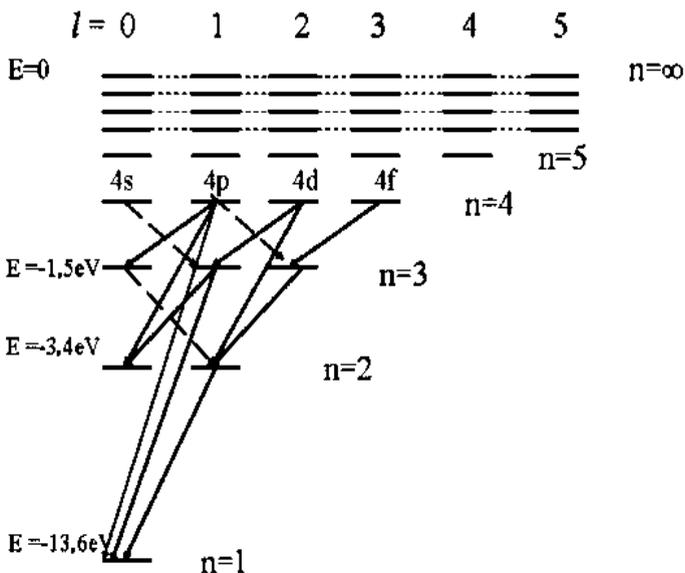
Pergeseran harga energi atom hidrogen karena atom itu ditempatkan dalam medan magnetik luar \vec{B} adalah

$$\Delta E = (g_L \mu_B B) m \tag{9.28}$$

dimana g_L adalah faktor orbital yaitu 1. Ternyata bahwa:

- a. Semua keadaan kuantum dengan bilangan kuantum magnetik $m = 0$, tidak berubah energinya apabila atom tersebut ditempatkan dalam medan magnet luar \vec{B} .
- b. Apabila keadaan kuantum dinyatakan dengan bilangan kuantum magnetik $m > 0$, maka $\Delta E > 0$. Energi sistem meningkat apabila atom ditempatkan dalam medan \vec{B} luar.
- c. Sebaliknya terjadi $\Delta E < 0$, apabila $m < 0$.

Sebelum kita menunjukkan bagaimana sistem atom hidrogen bergeser di bawah pengaruh medan magnet luar \vec{B} , diberikan terlebih dahulu di bawah ini bagaimana menggambarkan secara skematik berbagai tingkat energi, untuk berbagai bilangan kuantum n dan ℓ .



Sumber: <http://ocw.tufts.edu/>, 2006.

Gambar 9.1 Diagram tingkat energi atom hidrogen

Dalam arah vertikal ditempatkan energi dengan harga bilangan kuantum utama n yang berlainan. Mulai dengan tingkat dengan $n = 1$, yang energinya $E = -13,6$ eV. Tingkat teratas adalah tingkat bilangan kuantum utama $n = \infty$. Hal ini sesuai dengan keadaan terionisasi dengan $E = 0$.

Tingkat energi dengan n yang sama dan ℓ yang berbeda ditempatkan dengan arah horizontal. Seperti yang diketahui, maka semua tingkat energi dengan n yang sama, meskipun ℓ -nya berlainan, akan erimpit. Seumpamanya kita pilih tingkat energi dengan $n = 4$, maka diperoleh:

1 fungsi eigen dengan $\ell = 0$

3 fungsi eigen dengan $\ell = 1$ ($m = -1, 0, +1$)

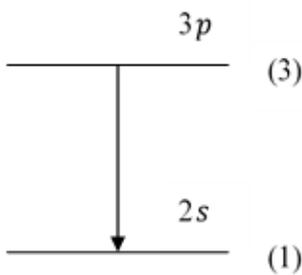
5 fungsi eigen dengan $\ell = 2$ ($m = -2, -1, 0, +1, +2$)

7 fungsi eigen dengan $\ell = 3$ ($m = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$)

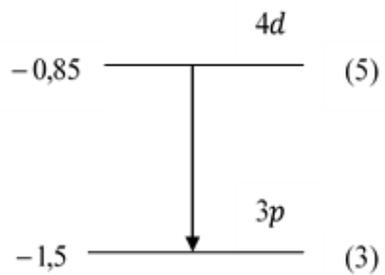
Keadaan tersebut dinyatakan oleh tanda s, p, d dan f yang masing-masing memiliki nilai 1, 3, 5 dan 7. Jadi, jika semua ℓ yang berlainan dikumpulkan, maka keadaan tingkat $n = 4$ tersebut adalah $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, atau n^2 .

Transisi dari suatu keadaan dapat pula digambarkan dengan skema yang vertikal. Sebagai contoh digambarkan pada Gambar 9.2 di bawah, transisi dari keadaan $(3, 1, m')$ ke $(2, 0, m)$ dan dari keadaan $(4, 2, m')$ ke $(3, 1, m)$. Transisi ini terjadi tanpa medan \vec{B} luar. Jika transisi di atas terjadi di daerah yang terdapat medan magnet luar \vec{B} , maka peristiwa yang terjadi digambarkan pada Gambar 9.3. Pergeseran tingkat energi $\Delta E = (g_L \mu_B B)m$, dimana $m = +1$ atau -1 . Tanpa

medan magnet luar, energi transisi adalah $E_3 - E_2 = [-1,5 + 3,4] \text{ eV} = 1,9 \text{ eV}$. Oleh karena itu, pada satu garis spektrum dengan medan magnet luar \vec{B} , terdapat tiga energi transisi yang berlainan, masing-masing yaitu $1,9 \text{ eV} + \Delta E$; $1,9 \text{ eV}$ dan $1,9 \text{ eV} - \Delta E$. Sehingga akan terlihat 3 garis spektrum. Bila diperhatikan bahwa tingkat dasar tidak mengurai karena $m = 0$.

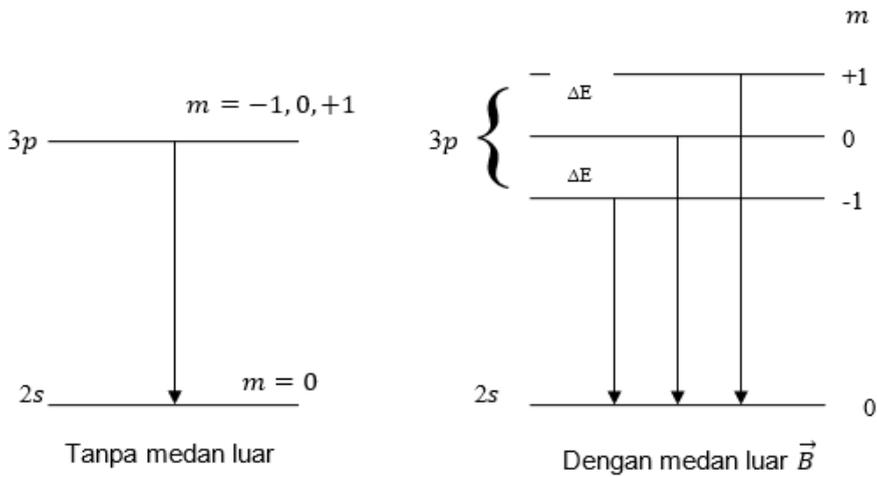


Transisi dari
 $(3, 1, m') \rightarrow (2, 0, m)$
 Tanpa medan \vec{B} luar



Transisi dari
 $(4, 2, m') \rightarrow (3, 1, m)$
 Tanpa medan \vec{B} luar

Gambar 9.2 Skema transisi elektron



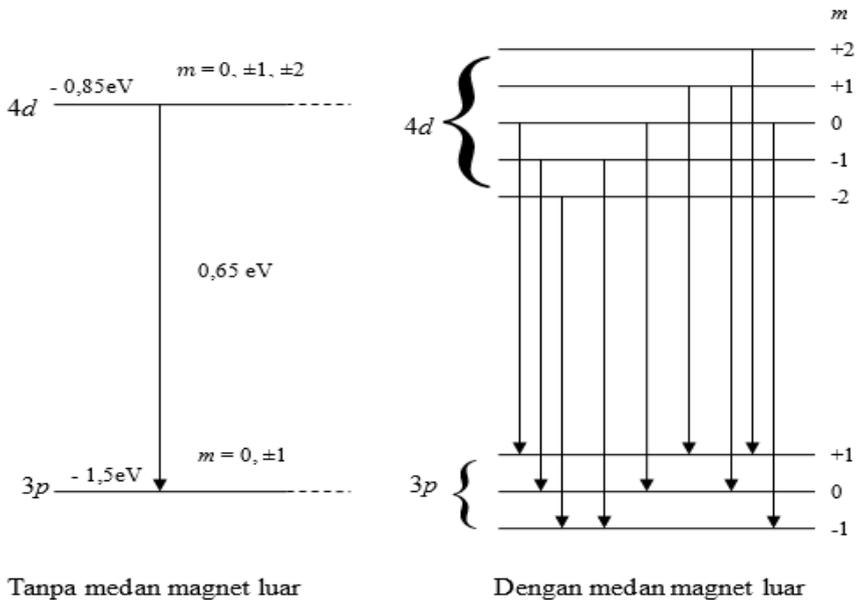
Gambar 9.3 Perbandingan transisi elektron dari 3p ke 2s tanpa dan dengan medan magnet \vec{B}

Hal yang sama dilakukan untuk transisi kedua, seperti yang diilustrasikan pada Gambar 9.4. Ternyata bahwa tidak semua transisi diperkenankan. Ada aturan seleksi untuk transisi dipol, yaitu $\Delta\ell = \pm 1$ dan $\Delta m = 0, \pm 1$. Kehadiran medan magnet luar \vec{B} menyebabkan pergeseran harga energi sistem atom hidrogen dengan

$$\Delta_m E = (g_L \mu_B B) m = \Delta_1 E m \tag{9.29}$$

dengan $\Delta_1 E \cong g_L \mu_B B$. Dengan adanya medan, akan ada energi transisi $0,65 \text{ eV} + \Delta_1 E$; $0,65 \text{ eV}$ dan $0,65 \text{ eV} - \Delta_1 E$. Jadi, dalam spektrum hanya terlihat tiga garis dengan panjang gelombang λ yang berbeda. Ketiga garis tersebut berasal dari sembilan buah transisi dari (4d) ke (3d). Jadi, satu garis tunggal dalam spektrum pancaran atom hidrogen mengurai menjadi triplet dibawah pengaruh medan magnet luar \vec{B} yang homogen. Dibawah pengaruh medan magnet

yang cukup besar, pemisahan ini dapat diamati, disebut sebagai efek Zeeman.



Gambar 9.4Perbandingan transisi elektron dari 4d ke 3p tanpa dan dengan medan magnet \vec{B}

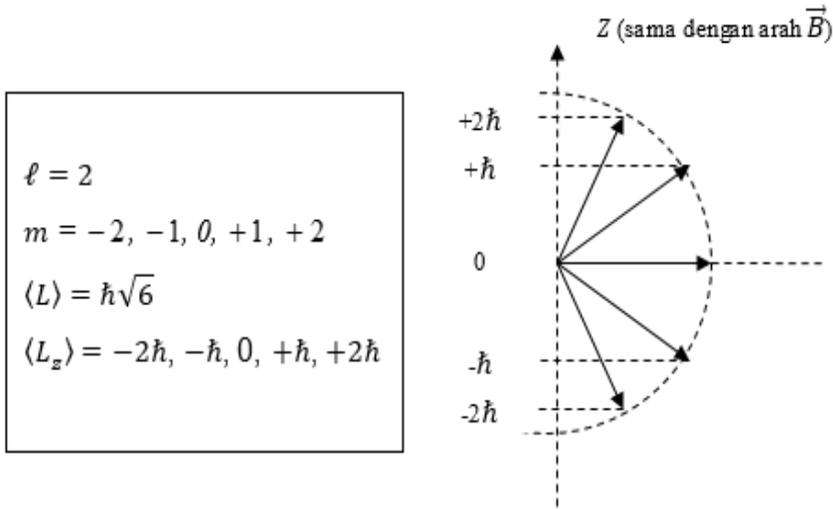
Dalam butir ini akan kita telaah lebih lanjut pengaruh medan magnet luar pada sistem atom hidrogen. Pergeseran harga energi atom hidrogen berasal dari energi potensial yang diperoleh momen dipol magnet (elektron berputar mengelilingi inti) dalam medan magnet luar.

Energi pergeseraan yang dijelaskan di atas adalah terkuantisasi yang memberikan petunjuk bahwa arah momentum angular (momentum sudut) \vec{L} terkuantisasi dalam ruang yang dipengaruhi \vec{B} . Dalam ruang bebas tidak ada ruang yang khusus, semua arah sama keadaanya dan \vec{L}

mempunyai kedudukan sebarang dalam ruang. Juka kemudian dalam ruang tersebut diadakan medan magnet luar \vec{B} , maka terjadi perubahan ruang sifat tersebut. Ruang lingkup awal yang berupa ruang lingkup bola berubah menjadi ruang lingkup yang lebih rendah.

Karena interaksi antara $\vec{\mu}_L$ dan \vec{B} menghasilkan pergeseran energi total atom hidrogen yang terkuantisasi, maka atom hidrogen mengenal arah-arrah tertentu dalam ruang, khususnya bagi arah momentum anguler \vec{L} terhadap arah \vec{B} (yang diambil sebagai arah sumbu z yang positif).

Diketahui bahwa $\langle L^2 \rangle = \hbar^2 \ell(\ell + 1)$, artinya besar momentum anguler adalah $\hbar\sqrt{\ell(\ell + 1)}$. Sedangkan $\langle L_z \rangle$, yaitu komponen \vec{L} dalam arah z adalah $m\hbar$, dengan $m = -\ell, -(\ell - 1), -(\ell - 2), \dots, -1, 0, +1, \dots, (\ell - 1)$. Sebagai contoh, ambillah suatu kasus dengan $\ell = 2$, besarnya momentum anguler adalah $\hbar\sqrt{6}$. Sedangkan proyeksinya dalam arah $-z$ adalah $-2\hbar, -\hbar, 0, +\hbar, +2\hbar$, seperti terlihat pada Gambar 9.5.



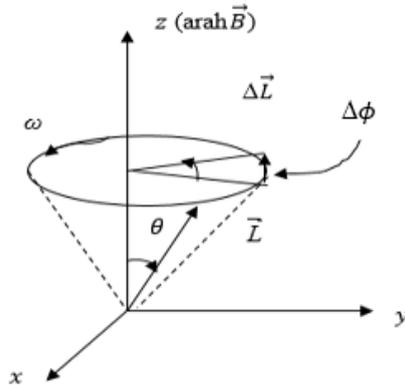
Gambar 9.5 Kuantisasi ruang bagi momentum sudut $\hbar\sqrt{6}$

Ternyata bahwa arah \vec{L} terkuantisasi apabila ada medan magnet luar hadir dalam ruang. Kehadiran suatu medan magnet yang homogen dalam ruang akan mengkuantisasi arah momentum angular \vec{L} dalam ruang tersebut. Kuantisasi arah momentum angular itu akan terekam sebesar pergeseran energi total atom. Selain kuantisasi tersebut, ternyata bahwa \vec{L} juga akan melakukan gerak precesi mengelilingi sumbu z . Dibawah pengaruh suatu induksi magnetik \vec{B} , suatu elektron atom hidrogen yang memiliki momen dipol magnetik $\vec{\mu}_L$, akan mengalami momen gaya (klasik) sebesar

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}_L \times \vec{B} = -\frac{g_L \mu_B}{\hbar} \vec{L} \times \vec{B} \tag{9.30}$$

Menurut hukum mekanika klasik impuls momen gaya $\vec{\tau} \Delta t$ memberikan perubahan \vec{L} dari sistem. Dalam ungkapan

diatas Δt adalah waktu dan $\Delta \vec{L}$ adalah momentum anguler. Sedangkan $\Delta \phi$ adalah seperti dalam sketsa pada Gambar 9.6.



Gambar 9.6 Gerak preresi \vec{L} pada medan magnet seragam
Sehingga,

$$|\vec{\tau}| = |\vec{L}| \left(\frac{\Delta \phi}{\Delta t} \right) \sin \theta = |\vec{L}| \omega_L \sin \theta \quad (9.31)$$

dimana ω_L adalah frekuensi perputaran \vec{L} mengelilingi sumbu z.

Besar momen gaya $\vec{\tau}$ pada Persamaan (9.30) dituliskan menjadi:

$$|\vec{\tau}| = g_L \frac{\mu_B}{\hbar} BL \sin \theta \quad (9.32)$$

Dengan membandingkan Persamaan (9.31) dan (9.32) didapatkan:

$$g_L \frac{\mu_B}{\hbar} BL \sin \theta = L \omega_L \sin \theta$$

sehingga diperoleh frekuensi preresi atau frekuensi larmor ω_L yaitu:

$$\omega_L = g_L \frac{\mu_B}{\hbar} B \tag{9.33}$$

atau apabila digunakan notasi vektor menjadi:

$$\vec{\omega}_L = -g_L \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B} \tag{9.34}$$

Besar frekuensi ini mempunyai manfaat yang praktis, seperti umpamanya menentukan besarnya induksi magnetik \vec{B} . Pengukuran tersebut dikembalikan pada pengukuran frekuensi.

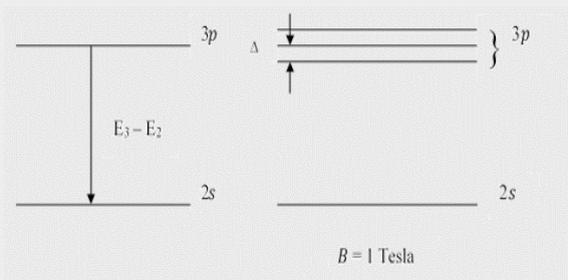
Contoh 9.3

Jika atom hidrogen ditempatkan di dalam sebuah medan magnet berkekuatan 3×10^4 gauss = 1 tesla.

- Tentukan pergeseran panjang gelombang dari foton ($3d$) ke ($2s$).
- Tentukan frekuensi Larmor.
- Tentukan orbital momentum angular untuk elektron tingkat $3p$.

Penyelesaian:

Gambar transisi elektron dari $3p$ ke $2s$



- Energi foton adalah

$$E_3 - E_2 = -\frac{13,6}{9} - \left(-\frac{13,6}{4}\right) = 1,89 \text{ eV} = 3,01 \times 10^{-19} \text{ Joule}$$

Frekuensi dan panjang gelombang yang berkaitan dengan transisi ini adalah

$$f = \frac{E_3 - E_2}{h} = 4,56 \times 10^{14} \text{Hz}$$

$$\lambda_{32} = \frac{c}{f_{32}} = 0,66 \times 10^{-6} \text{m}$$

Kemudian

$$\mu_B = 9,27 \times 10^{-24} \text{Joule/Tesla}$$

Perubahan energi dari tingkat-tingkat energi baru adalah

$$\Delta E = (g_L \mu_B B) m = 1 \times 9,27 \times 10^{-24} \times 1 = 9,27 \times 10^{-14} \text{Joule}$$

Karena

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

maka

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda \rightarrow \Delta \lambda = -\frac{\lambda^2}{hc} \Delta E$$

Pergeseran panjang gelombang menjadi

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= -\frac{(0,66 \times 10^{-6})^2}{(6,63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)} (9,27 \times 10^{-14}) \\ &= 2,0 \times 10^{-11} \text{m} \end{aligned}$$

$$\Delta \lambda = 0,20 \text{ \AA}$$

b. Untuk frekuensi Larmor

$$\omega_L = 2\pi f_L = g_L \frac{\mu_B}{\hbar} B = \frac{9,27 \times 10^{-24}}{1,054 \times 10^{-34}} = 8,80 \times 10^{10} \text{Hz}$$

c. Besarnya orbital momentum anguler untuk electron tingkat 3p

$$\langle L \rangle = \hbar \sqrt{2} = 1,49 \times 10^{-34} \text{kg m}^2/\text{s}$$

3. HUBUNGAN ANTARA OPERATOR \hat{H}, \hat{L}_2 dan \hat{L}_z

Telah diperoleh bahwa operator \hat{L}^2 dan \hat{L}_z pada Persamaan (9.16) dan (9.14) adalah:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$$

dan

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Tetapi perkalian kedua operator tersebut menghasilkan:

$$\hat{L}_z \cdot \hat{L}^2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right]$$

$$\hat{L}_z \cdot \hat{L}^2 = \left[-\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] (-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi})$$

$$\hat{L}_z \cdot \hat{L}^2 = \hat{L}^2 \cdot \hat{L}_z \tag{9.35}$$

Sehingga diperoleh bahwa $\hat{L}^2 \cdot \hat{L}_z - \hat{L}_z \cdot \hat{L}^2 = 0$, yang dapat ditulis menjadi:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \tag{9.36}$$

Dikatakan bahwa operator \hat{L}^2 dan \hat{L}_z berkomutasi. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa juga:

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0 \tag{9.37}$$

dan

$$[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0 \tag{9.38}$$

Operator \hat{H} , \hat{L}^2 dan \hat{L}_z adalah operator yang berkomutasi sesamanya.

SOAL LATIHAN

1. Hitunglah persamaan panjang gelombang dari foton $2p - 1s$ apabila atom hidrogen ditempatkan dalam sebuah medan magnet berkekuatan 2,00 T.
2. Suatu elektron di dalam medan Coulomb dari suatu proton mempunyai keadaan yang dinyatakan oleh fungsi gelombang

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{6} \{ \psi_{100}(\vec{r}) + 3\psi_{211}(\vec{r}) - \psi_{210}(\vec{r}) + \sqrt{10}\psi_{21-1}(\vec{r}) \}$$

Tentukan nilai rata-rata L^2 dan L_z dari elektron.

3. Jika diberikan fungsi gelombang sebagai berikut

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{210}(\vec{r}) - \frac{1}{2}\psi_{211}(\vec{r}) + \frac{1}{2}\psi_{21-1}(\vec{r})$$

Jika dilakukan pengukuran L_z . Tentukan hasil-hasil yang mungkin dan tentukan probabilitas masing-masing hasil tersebut.

4. Dua partikel bermassa m menempel pada kedua ujung batang kaku tak bermassa sepanjang a . Sistem bebas untuk berputar pada ruang tiga dimensi di sekitar pusat massa tetap. Buktikan bahwa energi-energi yang diperbolehkan pada rotor kaku tersebut adalah:

$$E_n = \frac{\hbar^2 n(n+1)}{ma^2}$$

dimana $n = 1, 2, 3, \dots$. Gunakan pernyataan energi klasik untuk menyatakan momentum anguler.

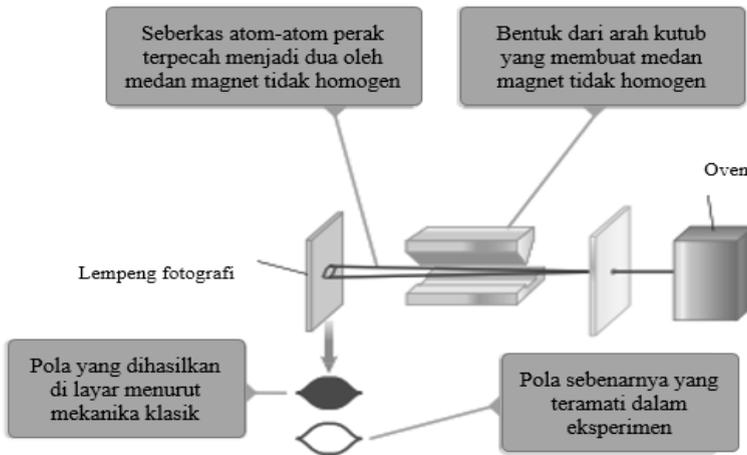
5. Buktikan bahwa $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.

BAB 10

PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN: SPIN ELEKTRON

1. ELEKTRON

Dalam percobaan Otto Stern dan Walter Gerlach tentang pengukuran momen dipol magnetik dari atom-atom perak yang ditunjukkan oleh suatu berkas atom perak dilewatkan melalui suatu medan \vec{B} tidak homogen yang arahnya tegak lurus terhadap berkas tersebut, seperti diperlihatkan pada Gambar 10.1. Hasil percobaan yang dilakukan pada tahun 1922 tersebut menunjukkan adanya kuantisasi ruang bagi momen dipol magnetik atom perak. Kemudian pada tahun 1927 Philips dan Taylor menggunakan berkas Hidrogen bersuhu rendah (jadi sebagian besar atomnya mempunyai $\ell = 0$ dan $m = 0$), dan melewatinya melalui suatu sistem eksperimental seperti yang dilakukan oleh Stern dan Gerlach.



Sumber: *Modern Physics for Science and Engineering*, 2012.

Gambar 10.1 Teknik Stern dan Gerlach menyelidiki kuantisasi ruang

Ternyata masih terjadi kuantisasi ruang untuk atom hidrogen dengan $\ell = 0$ dan $m = 0$, khususnya dua arah yang berlainan. Karena $\langle L \rangle = 0$, dan $\langle L_z \rangle = 0$ juga, maka tidak mungkin peristiwa ini berasal dari lintas orbital elektron yang mengelilingi atom. Mereka berpendapat bahwa elektron itu berputar mengelilingi sumbunya (sendiri), seperti perputaran bumi mengelilingi sumbunya dalam perjalanannya mengelilingi matahari. Ini dinamakan gerak spin elektron (*electron spin*). Momen dipol magnetiknya adalah:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{S} \quad (10.1)$$

dengan $\vec{\mu}_s$ adalah momen dipol magnetik, g_s adalah magneton Bohr dan \vec{S} adalah momentum anguler spin elektron mengelilingi sumbunya sendiri. Kemungkinan yang ada bahwa momen dipol magnetik yang teramati berasal dari

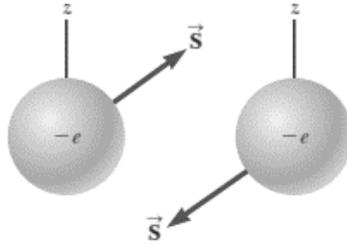
inti atom. Apabila benar, maka perkiraannya akan berada di daerah $\sim \frac{e\hbar}{2M}$, dengan M adalah masa inti.

Goudsmit dan Uhlenbeck mempelajari garis-garis spektrum hidrogen dan logam alkali. Mereka menemukan bahwa garis-garis tertentu pada spektrum optik hidrogen dan atom alkali menunjukkan adanya pasangan-pasangan garis yang sangat berdekatan. Ini dinamakan sebagai struktur halus.

Sommerfeld dapat menerangkan struktur halus ini dengan menggunakan model atom Bohr, dengan mengandaikan bahwa struktur halus dalam spektrum atom hidrogen terjadi karena perubahan harga massa elektron yang bergerak dengan kecepatan yang sangat tinggi. Namun penjelasan tersebut tidak dapat menerangkan struktur halus pada spektrum optik atom alkali. Oleh karena itu kebenaran pengandaian Sommerfeld diragukan.

Untuk dapat menerangkan struktur halus tersebut, Goudsmit dan Uhlenbeck menyarankan pengandaian bahwa elektron memiliki momentum anguler dan momen dipol magnetik yang intrinsik, yang mempunyai komponen z yang dinyatakan oleh bilangan kuantum s . Dimana m_s hanya dapat mempunyai dua harga, yaitu $+\frac{1}{2}$ dan $-\frac{1}{2}$, pengandaian ini dapat dilihat pada Gambar 10.2. Apabila pengandaian tersebut diterima maka untuk elektron dalam atom hidrogen diperlukan empat bilangan kuantum yang menyatakan keadaan kuantum elektron tersebut, yaitu:

- n = bilangan kuantum utama
- ℓ = bilangan kuantum orbital
- m = bilangan kuantum magnetik, sering ditulis juga m_l
- m_s = bilangan kuantum spin, $m_s = \pm \frac{1}{2}$



Sumber: *Modern Physics for Science and Engineering*, 2012.
Gambar 10.2 Spin elektron up dan down relatif terhadap sumbu z .

2. SPIN ELEKTRON DAN PERMASALAHAN NILAI EIGEN

Untuk menerapkan spin elektron ini dalam kerangka teoritik yang telah dikembangkan untuk atom hidrogen sebelumnya, secara sistematis terdapat tiga langkah yang digunakan. Pertama, momen dipol magnetik spin dinyatakan seperti pada Persamaan (10.1), yaitu:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

dimana vektor \vec{S} dinamakan spin elektron (analog dengan \vec{L} untuk orbital momentum angular).

Kedua, analog dengan \vec{L} , kita katakan bahwa besarnya \vec{S} diberikan oleh:

$$\langle S \rangle = \hbar \sqrt{s(s+1)} \tag{10.2}$$

demikian pula komponen z dari \vec{S} yang besarnya:

$$\langle S_z \rangle = m_s \hbar \quad (10.3)$$

dimana juga s terkait dengan m_s , khususnya m_s mempunyai dua harga yang memiliki selisih 1 ($\Delta m_s = 1$), sedangkan harganya terletak antara $-s$ dan $+s$ karena ternyata bahwa berkas atom hidrogen mengurai menjadi 2 komponen di bawah pengaruh medan magnet luar. Kemungkinanannya adalah:

$$m_s = -1/2, +1/2 \quad \text{dan} \quad s = 1/2 \quad (10.4)$$

Pengukuran secara eksperimental menunjukkan bahwa $g_s m_s = \pm 1$, sehingga diperoleh bahwa faktor spin $g_s = 2$.

Ketiga, apabila gerak spin dimasukkan dalam sistem atom hidrogen, tentu gerak tersebut harus direpresentasikan dengan suatu “fungsi”, katakanlah χ_{ms} , dimana apabila operator spin \hat{S} dan \hat{S}_z beroperasi pada fungsi tersebut digunakan ketentuan sebagai berikut:

$$\hat{S}^2 \chi_{ms} = s(s+1)\hbar^2 \chi_{ms} = 3/4\hbar^2 \chi_{ms} \quad (10.5)$$

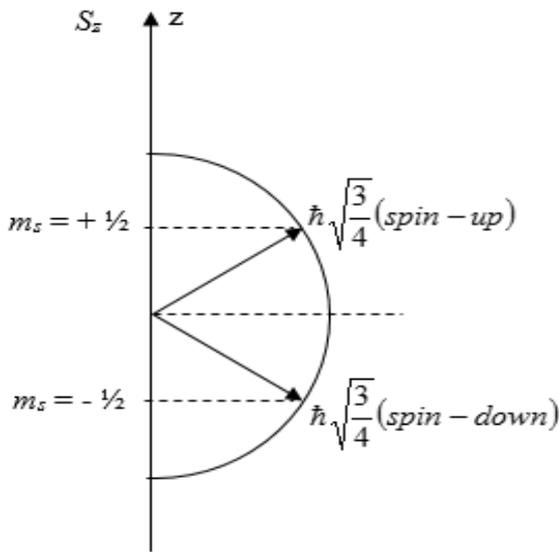
$$\hat{S}_z \chi_{ms} = m_s \hbar \chi_{ms} \quad (10.6)$$

Hanya ada dua fungsi spin, yaitu:

$$\chi_+ \text{ apabila } m_s = +1/2 \quad (10.7)$$

$$\chi_- \text{ apabila } m_s = -1/2$$

Operator \hat{S} dan \hat{S}_z hanya bekerja pada λ_+ dan λ_- , dan tidak pada fungsi dari koordinat (r, θ, ϕ) . Demikian pula operator diferensial biasa tidak bekerja terhadap fungsi χ_{ms} . Pada Gambar 10.3 disajikan suatu model tentang spin \vec{S} dan komponennya dalam arah z yang analog dengan kuantisasi arah momentum anguler.



Gambar 10.3 Kuantitas ruang momentum anguler spin

Oleh karena itu representasi model atom hidrogen dimana juga spin elektron turut diperhitungkan dan direpresentasikan oleh:

$$\psi_{n\ell m_\ell m_s} = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)\chi_{m_s} \quad (10.8)$$

Bilangan kuantum magnetik m ditandai dengan indeks ℓ untuk membedakannya dari bilangan kuantum magnetik spin m_s .

Fungsi gelombang $\psi_{n\ell m_\ell m_s}$ dapat ditulis menggunakan notasi sebagai $|n \ell m_\ell m_s\rangle$. Dalam model yang telah disusun, maka berlaku hubungan nilai eigen

$$\hat{H}|n \ell m_\ell m_s\rangle = E_n|n \ell m_\ell m_s\rangle \quad (10.9)$$

$$\hat{L}^2|n \ell m_\ell m_s\rangle = \ell(\ell + 1)\hbar^2|n \ell m_\ell m_s\rangle \quad (10.10)$$

$$\hat{L}_z|n \ell m_\ell m_s\rangle = m_\ell\hbar|n \ell m_\ell m_s\rangle \quad (10.11)$$

$$\hat{S}^2 |n \ell m_\ell m_s\rangle = s(s + 1)\hbar^2 |n \ell m_\ell m_s\rangle \quad (10.12)$$

$$\hat{S}_z |n \ell m_\ell m_s\rangle = m_s \hbar |n \ell m_\ell m_s\rangle \quad (10.13)$$

Untuk $|n \ell m_\ell m_s\rangle$, karena normalisasi harus dipenuhi, maka:

$$\langle n \ell m_\ell m_s | n \ell m_\ell m_s \rangle = 1 \quad (10.14)$$

$$\langle \chi_+ | \chi_+ \rangle = 1 \quad (10.15)$$

$$\langle \chi_- | \chi_- \rangle = 1 \quad (10.16)$$

Karena $m_s = +\frac{1}{2}$ dan $m_s = -\frac{1}{2}$ adalah 2 keadaan kuantum yang berlainan, maka keduanya independen satu dari yang lainnya, sehingga:

$$\langle \chi_+ | \chi_- \rangle = \langle \chi_- | \chi_+ \rangle = 0 \quad (10.17)$$

Karena hanya dipengaruhi bilangan kuantum spin dan magnetik, secara singkat Persamaan (10.12) dan (10.13) dapat ditulis menjadi:

$$\hat{S}^2 |m_s m_\ell\rangle = s(s + 1)\hbar^2 |m_s m_\ell\rangle \quad (10.18)$$

$$\hat{S}_z |m_s m_\ell\rangle = m_s \hbar |m_s m_\ell\rangle \quad (10.19)$$

Keadaan umum dari partikel dengan spin-1/2 dapat dinyatakan dalam bentuk matriks 2x2,

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \quad (10.20)$$

dengan:

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ untuk spin-up dan } \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ untuk spin-down} \quad (10.21)$$

Operator \hat{S}^2 jika bekerja pada fungsi χ , maka diperoleh

$$\hat{S}^2 \chi_+ = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_+ \text{ dan } \hat{S}^2 \chi_- = \frac{3}{4} \hbar^2 \chi_- \quad (10.22)$$

Jika dinyatakan operator \hat{S}^2 dalam bentuk matriks, maka:

$$\hat{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

persamaan pertama menyatakan:

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehingga $c = \frac{3}{4} \hbar^2$ dan $e = 0$. Persamaan kedua menyatakan:

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix}$$

sehingga $f = \frac{3}{4} \hbar^2$ dan $d = 0$. Kesimpulannya:

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.23}$$

Mirip dengan

$$\hat{S}_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \chi_+ \quad \text{dan} \tag{10.24}$$

$$\hat{S}_z \chi_- = -\frac{\hbar}{2} \chi_-$$

dan akan menghasilkan

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.25}$$

Dapat didefinisikan sebuah operator yang disebut sebagai operator tangga, yang dinyatakan sebagai

$$\hat{S}_{\pm} = \hat{S}_x \pm i \hat{S}_y \tag{10.26}$$

Ketika operator tangga bekerja pada nilai eigen \hat{S}^2 dan \hat{S}_z maka diperoleh

$$\hat{S}_{\pm} |m_s m_\ell\rangle = \hbar \sqrt{m_s(m_s + 1) - m_\ell(m_\ell \pm 1)} |m_s, m_\ell \pm 1\rangle \tag{10.27}$$

Untuk spin-1/2, maka diketahui bahwa $m_s = 1/2$. Dengan menggunakan arah z sebagai arah referensi, komponen z nomor kuantum dapat diambil dari dua kemungkinan

$$m_\ell = \frac{1}{2} \text{ dan } m_\ell = -\frac{1}{2}$$

Sehingga untuk mempermudah penulisan, didefinisikan

$$\begin{aligned} |m_s m_\ell\rangle &= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = |+\rangle = |\uparrow\rangle \\ |m_s m_\ell\rangle &= \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = |-\rangle = |\downarrow\rangle \end{aligned} \tag{10.28}$$

Contoh 10.1

Tentukan semua kombinasi momentum individual tanpa interaksi dari dua partikel dengan spin-1/2.

Penyelesaian:

Partikel pertama dengan

$$m_{s1} = \frac{1}{2}$$

$$m_{\ell1} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Maka $|m_s m_\ell\rangle$ diberikan oleh

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \text{ dan } \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

dan partikel kedua dengan

$$m_{s2} = \frac{1}{2}$$

$$m_{\ell2} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Maka $|m_s m_\ell\rangle$ diberikan oleh

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \text{ dan } \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Pasangan bebastanpinteraksinya $|m_{s1}m_{\ell1}\rangle|m_{s2}m_{\ell2}\rangle$ adalah $|\frac{11}{22}\rangle|\frac{11}{22}\rangle, |\frac{11}{22}\rangle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle|\frac{11}{22}\rangle$ dan $|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rangle$

Dengan menggunakan operator tangga, maka diperoleh pernyataan untuk operator \hat{S}_+ dan \hat{S}_- berikut:

$$\begin{aligned}\hat{S}_+\chi_- &= \hbar\chi_+ \\ \hat{S}_-\chi_+ &= \hbar\chi_- \\ \hat{S}_+\chi_+ &= \hat{S}_-\chi_- = 0\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\hat{S}_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.29}$$

$$\hat{S}_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.30}$$

Dari Persamaan (10.26) diperoleh bahwa:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \quad \text{dan} \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2i}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-)$$

Sehingga:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10.31}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{10.32}$$

Contoh 10.2

Diketahui bahwa keadaan partikel dengan spin-1/2 berada adalah:

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tentukan probabilitas untuk mendapatkan $\frac{\hbar}{2}$ dan $-\frac{\hbar}{2}$ jika dilakukan pengukuran S_z .

Penyelesaian:

Diketahui bahwa

$$\mathbf{a} = (\mathbf{1} + i)/\sqrt{6} \text{ dan } \mathbf{b} = 2/\sqrt{6}$$

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1+i}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1+i}{\sqrt{6}} |+\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}} |-\rangle$$

Sehingga untuk S_z , probabilitas untuk mendapatkan $\frac{\hbar}{2}$ adalah

$$\langle +|x\rangle = \langle +| \left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 |+\rangle + \langle +| \left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 |-\rangle = \left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}$$

dan probabilita untuk mendapatkan $-\frac{\hbar}{2}$

$$\langle -|x\rangle = \langle -| \left| \frac{1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 |+\rangle + \langle -| \left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 |-\rangle = \left| \frac{2}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}$$

Contoh 10.3

Pada contoh soal 10.1, tentukan probabilitas untuk mendapatkan $\frac{\hbar}{2}$ dan $-\frac{\hbar}{2}$ jika dilakukan pengukuran S_x .

Penyelesaian:

Kita harus mengetahui terlebih dahulu nilai dan vektor eigen dari S_x . Persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinan dia atas akan mendapatkan

$$\lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$$

$$\lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

Vector eigen diperoleh melalui

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Melalui normalisasi diperoleh

$$\chi_+^x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{nilai eigen } +\frac{\hbar}{2})$$

$$\chi_-^x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{nilai eigen } -\frac{\hbar}{2})$$

Sehingga kita kombinasi liniernya dalam bentuk

$$\chi = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \chi_+^x + \frac{a-b}{\sqrt{2}} \chi_-^x$$

Dengan menggunakan persamaan di atas, diperoleh untuk

S_x , probabilitas untuk mendapatkan $\frac{\hbar}{2}$ adalah

$$\frac{1}{2} \left| \frac{3+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{5}{6}$$

dan probabilitas untuk mendapatkan $-\frac{\hbar}{2}$

$$\frac{1}{2} \left| \frac{-1+i}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{6}$$

3. ATOM HIDROGEN DENGAN SPIN DALAM MEDAN MAGNET LUAR

Momen dipol magnetik total atom hidrogen dapat dinyatakan:

$$\vec{\mu}_H = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S \quad \text{dimana } H \text{ adalah hidrogen} \quad (10.33)$$

Sehingga dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_H &= -\frac{eg_\ell}{2m_o} \vec{L} - \frac{eg_s}{2m_o} \vec{S} \\ \vec{\mu}_H &= -\frac{e}{2m_o} (g_\ell \vec{L} + g_s \vec{S}) \end{aligned} \quad (10.34)$$

Karena diketahui bahwa $g_\ell = 1$ dan $g_s = 2$, maka Persamaan (10.33) menjadi:

$$\vec{\mu}_H = -\frac{e}{2m_o} (\vec{L} + 2\vec{S}) \quad (10.35)$$

energi potensial atom hidrogen dalam medan magnet luar \vec{B} dalam arah sumbu z adalah:

$$\begin{aligned} V_B &= -\vec{\mu}_H \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_o} (\vec{L} \cdot \vec{B} + 2\vec{S} \cdot \vec{B}) \\ \hat{V}_B &= -\frac{eB}{2m_o} (\hat{L}_z + 2\hat{S}_z) \end{aligned} \quad (10.36)$$

Dalam ungkapan di atas V_B adalah potensial, \vec{B} dalam medan magnet luar. Pernyataan pada Persamaan (10.36) adalah bentuk operator energi potensial.

Jika bahwa H adalah operator Hamiltonian sistem atom yang bebas, dan H' adalah operator Hamiltonian sistem atom dalam medan luar \vec{B} , maka:

$$\hat{H}' = \hat{H} + \hat{V}_B \quad (10.37)$$

Untuk keadaan kuantum $|n \ l \ m_\ell \ m_s\rangle$ diperoleh:

$$\hat{H}'|n l m_\ell m_s\rangle = \hat{H}|n l m_\ell m_s\rangle + \hat{V}_B|n l m_\ell m_s\rangle \quad (10.38)$$

Sehingga diperoleh:

$$\langle E' \rangle = \langle E \rangle + \langle n l m_\ell m_s | \hat{V}_B | n l m_\ell m_s \rangle \quad (10.39)$$

Apabila dinyatakan bahwa:

$$\Delta E = \langle E' \rangle - \langle E \rangle \quad (10.40)$$

maka:

$$\Delta E = \frac{eB}{2m_o} \langle n l m_\ell m_s | L_z + 2S_z | n l m_\ell m_s \rangle$$

$$\Delta E = \frac{eB}{2m_o} [\langle n l m_\ell m_s | L_z | n l m_\ell m_s \rangle + \langle n l m_\ell m_s | 2S_z | n l m_\ell m_s \rangle] \quad (10.41)$$

Sehingga akhirnya diperoleh:

$$\Delta E = \frac{eB}{2m_o} (m_\ell + 2m_s) \quad (10.42)$$

Jadi kehadiran medan luar \vec{B} menyebabkan terjadinya pergeseran energi total sistem atom hidrogen sebesar

$$\Delta E = \frac{eB}{2m_o} (m_\ell + 2m_s) = \frac{B\mu_B}{\hbar} (m_\ell + 2m_s) \quad (10.43)$$

Dalam Gambar 10.4 diperlihatkan keadaan kuantum dengan bilangan kuantum utama yang berlainan di tempatkan dalam suatu susunan yang vertikal. Setiap kolom dalam diagram tersebut sesuai dengan bilangan kuantum orbital (ℓ) yang sama.

E_n (ev)	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
-0,54 (n=5)	5s  (2)	5p  (5)	5d  (7)
-0,85 (n=4)	4s  (2)	4p  (5)	4d  (7)
-1,5 (n=3)	3s  (2)	3p  (5)	3d  (7)
-3,4 (n=2)	2s  (2)	2p  (5)	
-13,6 (n=1)	1s  (2)		

Gambar 10.4 Diagram tingkat energi atom hidrogen

Garis sebelah kiri adalah tingkat energi tanpa medan luar dan garis sebelah kanan memperlihatkan tingkat energi yang terurai di bawah pengaruh medan induksi magnetic \vec{B} . Angka dalam tanda kurung di samping tingkat energi yang terurai adalah jumlah tingkat energi yang berbeda untuk tingkat energi terkait di bawah pengaruh medan induksi magnetik \vec{B} .

Misalkan pada 3p, terdapat 5 tingkat energi yang berbeda untuk 6 perangkat bilangan kuantum. Jika dimisalkan:

$$\Delta E = \frac{B\mu_B}{\hbar} (m_\ell + 2m_s) = A(m_\ell + 2m_s) \quad (10.44)$$

maka perangkat kuantum tersebut dapat dilihat pada Tabel 10.1. Aturan seleksi yang berlaku adalah:

$$\Delta \ell = \pm 1$$

$$\Delta m_\ell = 0, \pm 1$$

$$\Delta m_s = 0$$

Tabel 10.1 Perangkat bilangan kuantum pada $3p$

ΔE	n	ℓ	m_ℓ	m_s
$+2A$	3	1	+1	$+\frac{1}{2}$
$+A$	3	1	0	$+\frac{1}{2}$
0	3	1	+1	$-\frac{1}{2}$
0	3	1	-1	$+\frac{1}{2}$
$-A$	3	1	0	$-\frac{1}{2}$
$-2A$	3	1	-1	$-\frac{1}{2}$

SOAL LATIHAN

1. Tuliskan perangkat bilangan kuantum pada $3d$.
2. Elektron di dalam atom hidrogen mempunyai momentum sudut dan juga mempunyai spin. Untuk $\ell = 1$, tentukan semua kombinasi momentum individual tanpa interaksi.
3. Tentukan vektor eigen dan nilai eigen untuk \hat{S}_y .
4. Sebuah partikel dalam keadaan $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$
 - (a) Tentukan probabilitas pengukuran spin-up dan spin-down dalam arah z .
 - (b) Tentukan probabilitas pengukuran spin-up dan spin-down dalam arah y .
5. Sebuah sistem dengan spin-1/2 berada dalam keadaan

$$|\psi\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{3}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |-\rangle$$

Jika spin diukur dalam arah z , tentukan probabilitas menemukan $\pm\hbar/2$.

BAB 11

PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA SISTEM ATOM HIDROGEN: KAITAN SPIN DAN ORBITAL

1. PENDAHULUAN

Penyajian tentang metode Schrodinger pada sistem atom hidrogen telah dilakukan secara bertahap, yaitu sebagai berikut:

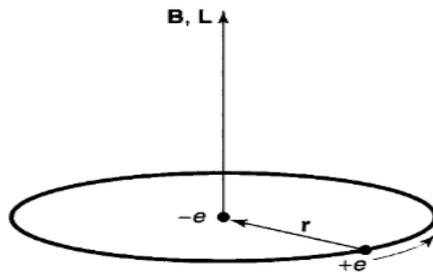
- a. Pada model yang paling sederhana, dengan satu elektron yang berputar dalam ruang mengelilingi inti yang bermuatan $+Ze$.
- b. Model yang dimana perhatian terutama ditujukan kepada interpretasi tentang beberapa hal yang berkaitan dengan bentuk matematika persamaan Schrodinger.
- c. Model yang lebih disempurnakan dimana diperhitungkan gerak spinelektron.

Dalam bagian ini, akan dikemukakan model yang lebih disempurnakan lagi, dimana diperhitungkan juga hubungan yang ada antara gerak spin elektron dan gerak elektron tersebut mengelilingi inti atom $+Ze$ (gerak orbital).

Bila antara \vec{L} dan \vec{S} tidak ada interaksi, maka dalam ruang bebas (tanpa medan gaya luar) tidak ada momen gaya yang bekerja, baik pada \vec{L} maupun pada \vec{S} . Dalam

keadaan itu tak terjadi kuantisasi ruang, baik bagi \vec{L} maupun bagi \vec{S} .

Penelaahan yang seksama sesungguhnya menunjukkan adanya interaksi antara gerak elektron mengelilingi sumbunya (diwakili dengan besaran \vec{S}). Interaksi tersebut terlihat apabila diperhatikan gerak relatif antara elektron dan inti atom. Anggaplah bahwa elektron yang tidak bergerak, dan bahwa inti atom mengelilingi elektron tersebut, seperti ditunjukkan pada Gambar 11.1. Dalam pandangan ini, massa inti tidak dianggap tak berhingga.



Sumber: *Introduction to Quantum Mechanics 2nd Ed.*, 2005

Gambar 11.1 Atom hidrogen, dari sudut pandang elektron

Dari permisalan diatas, gerak inti dapat diekuivalenkan dengan suatu arus listrik melingkar dengan rapat arus:

$$\vec{j} = -Ze\vec{v} \quad (11.1)$$

Menurut teori medan elektromagnet, besarnya induksi magnetik \vec{B} ditempat elektron berada adalah:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} = -\frac{Ze\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{V} \times \vec{r}}{r^3} \quad (11.2)$$

dengan μ_o adalah permeabilitas magnetik (dalam vakum). Tetapi dari teori medan diketahui pula bahwa kuat medan ditempat elektron oleh muatan inti $+Ze$ adalah:

$$\vec{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_o} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (11.3)$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{4\pi\epsilon_o}{Ze} \vec{E} \quad (11.4)$$

Eliminasi Persamaan (11.4) pada Persamaan (11.2), maka akan menghasilkan:

$$\vec{B} = -\frac{4\pi\epsilon_o Ze\mu_o}{Ze} \frac{1}{4\pi} \vec{V} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \vec{V} \times \frac{\vec{F}_e}{e} \quad (11.5)$$

Karena:

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_o\mu_o} \quad (11.6)$$

$$\vec{F}_e = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad (11.7)$$

Sedangkan momentum angular orbital elektron adalah:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -\vec{p} \times \vec{r} = -m_o(\vec{v} \times \vec{r}) \quad (11.8)$$

sehingga induksi magnetik ditempat elektron adalah:

$$\vec{B}_i = -\frac{4\pi\epsilon_o Ze\mu_o}{Ze} \frac{1}{4\pi} \vec{V} \times \vec{E} = \frac{1}{em_o c^2} \left[\frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right] \vec{L}_i \quad (11.9)$$

2. GERAK SPIN DAN ORBITAL ELEKTRON

Energi potensial V_{SL} untuk momen dipol spin elektron dalam medan \vec{B}_i internal yang berasal dari gerak relatif inti atom terhadap elektron adalah:

$$V_{SL} = \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_i = \frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B}_i \quad (11.10)$$

Ternyata bahwa apabila keadaan dikembalikan pada situasi dimana elektron bergerak dan inti atom tidak bergerak, ternyata ada transformasi yang memberikan hasil:

$$V_{SL} = \frac{g_s \mu_B}{2\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B}_i \quad (11.11)$$

yang kemudian dapat ditulis sebagai:

$$V_{SL} = \frac{g_s \mu_B}{2\hbar} \frac{1}{em_o c^2} \left[\frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right] \vec{S} \cdot \vec{L}_i \quad (11.12)$$

yang pada akhirnya berbentuk:

$$V_{SL} = \frac{1}{2m_o^2 c^2} \frac{1}{r} \left[\frac{dV(r)}{dr} \right] (\vec{S} \cdot \vec{L}_i) \quad (11.13)$$

inilah yang dinamakan kopel spin-orbit atau *spin-orbit coupling*, atau $(\vec{S} \cdot \vec{L})$ *coupling*. Kopel $(\vec{S} \cdot \vec{L})$ ini mengubah gambaran gerak elektron dari yang telah dibahas sebelumnya.

Apabila ikatan \vec{L} dan \vec{S} kuat, maka \vec{L} dan \vec{S} masing-masing berinteraksi langsung dengan medan magnet luar. Dengan ikatan kuat \vec{L} dan \vec{S} akan berpadu menjadi angular momentum total \vec{T} , dimana dapat dinyatakan sebagai:

$$\vec{T} = \vec{L} + \vec{S} \quad (11.14)$$

3. MOMENTUM ANGULER TOTAL DAN GAMBARAN KUANTUM

Apabila ada hubungan antara \vec{L} dan \vec{S} , maka \vec{L} dan \vec{S} terkait membentuk momentum anguler total seperti diperlihatkan pada Persamaan (11.14). Kuantisasi ruang terjadi untuk \vec{T} , jadi bilangan kuantum untuk model dengan kopel \vec{S}, \vec{L} adalah j dan m_j . Bilangan kuantum j berkaitan dengan besarnya \vec{T} dan m_j dengan kuantisasi ruang yang dituruti oleh j .

Langkah-langkah yang ditempuh dalam menemukan model matematis untuk \vec{T} adalah identik dengan untuk \vec{L} dan untuk \vec{S} . Apabila j berkait dengan panjangnya \vec{T} , dan m_j dengan komponen \vec{T} dalam arah z , maka ini berarti:

$$\langle T^2 \rangle = j(j + 1)\hbar^2 \quad (11.15)$$

$$\langle T_z \rangle = m_j \hbar \quad (11.16)$$

dengan harga: $m_j = -j, -(j - 1), -(j - 2), \dots, -1, 0, +1, \dots, (j - 1), j$.

Kemudian dicari hubungan antara j dengan ℓ dan s . Kita misalkan pertambahan 2 momentum anguler \vec{T}_1 dan \vec{T}_2 menjadi $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ kemudian diketahui bahwa:

$$\langle T^2 \rangle = j(j + 1)\hbar^2$$

$$\langle T_1^2 \rangle = j_1(j + 1)\hbar^2$$

$$\langle T_2^2 \rangle = j_2(j_2 + 2)\hbar^2$$

Sekarang \vec{T} berharga maksimum apabila \vec{T}_1 dan \vec{T}_2 sejajar, maka $j_{maks} = j_1 + j_2$. Kemudian \vec{T} berharga minimum apabila \vec{T}_1 dan \vec{T}_2 berlawanan arah, sehingga $j_{min} = j_1 - j_2$. Jika $j_1 > j_2$ sehingga harga \vec{T} yang dinyatakan sebagai $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$, mungkin mempunyai harga $j = j_{maks}, (j_{maks} - 1), (j_{maks} - 2), \dots, (j_{min} + 1), j_{min}$.

Contoh 11.1

Tentukan $\langle T^2 \rangle$ dan $\langle T_z \rangle$ untuk keadaan $\ell = 2$ dan $s = \frac{1}{2}$.

Penyelesaian:

Harga j yang mungkin untuk keadaan tersebut adalah $j = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ sehingga $m_j = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$. Selain itu harga harga j yang mungkin adalah $j = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ dengan $m_j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$. Sehingga untuk $j = \frac{5}{2}$

$$\langle T^2 \rangle = \frac{5}{2} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \hbar^2$$

$$\langle T_z \rangle = \frac{5\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}, -\frac{3\hbar}{2}, -\frac{5\hbar}{2}$$

dan untuk $j = \frac{3}{2}$

$$\langle T^2 \rangle = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \hbar^2$$

$$\langle T_z \rangle = \frac{3\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}, -\frac{3\hbar}{2}$$

4. NILAI EIGEN: PERMASALAHAN MOMENTUM ANGULER TOTAL

Apabila hubungan kuat yang berperan adalah \vec{T} dan bukan \vec{S} lagi. Jadi representasi dengan perangkat bilangan kuantum n, ℓ, m_ℓ dan m_s tidak dapat dipergunakan lagi. Apabila dalam presentasi yang baru, \vec{T} dan \vec{T}_z mengikuti kuantisasi, maka harus disusun himpunan fungsi eigen dengan perangkat bilangan kuantum n, ℓ, j dan m_j . Katakanlah bahwa eigen function yang belum diketahui itu dinyatakan dengan $|n \ell j m_j\rangle$.

Ada teori lanjut tentang mekanika kuantum bahwa himpunan $\{|n \ell j m_j\rangle\}$ yang dicari itu dapat dibangun dari himpunan $\{|n \ell m_\ell m_s\rangle\}$, untuk harga n dan ℓ yang sesuai. Himpunan itupun ortogonal dan dapat dinormalisasikan. Disini kita tidak memperlakukan bentuk $(n \ell j m_j)$, tetapi menetapkan bahwa fungsi tersebut dapat dibentuk dari $\{|n \ell j m_j\rangle\}$ dan memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

$$\hat{H}|n \ell j m_j\rangle = E_n |n \ell j m_j\rangle \quad (11.17)$$

$$\hat{T}^2 |n \ell j m_j\rangle = j(j + 1)\hbar^2 |n \ell j m_j\rangle \quad (11.18)$$

$$\hat{T}_z |n \ell j m_j\rangle = m_j \hbar |n \ell j m_j\rangle \quad (11.19)$$

Jadi jelas permasalahan nilai eigen untuk \hat{H}, \hat{T}^2 dan \hat{T}_z dengan fungsi eigen $|n \ell j m_j\rangle$, dimana nilai eigen masing-masing diperlihatkan pada persamaan di atas.

5. EVALUASI ENERGI KOPEL($\vec{S} \cdot \vec{L}$)

Apabila $H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(r)$ dengan $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$,

maka di dalam medan magnet homogen dengan induksi magnetik \vec{B} , energi total atom hidrogen menjadi:

$$\hat{H}' = \hat{H} + V_{SL} \quad (11.20)$$

dengan V_{SL} dinyatakan pada Persamaan (11.13). Dalam sistem dengan pertautan $\vec{S} \cdot \vec{L}$ yang kuat, maka dipergunakan fungsi eigen $|n \ell j m_j\rangle$.

Energi E_n sistem atom hidrogen adalah nilai eigen dari \hat{H} . Harga energi sistem atom hidrogen dengan medan induksi magnet \vec{B} menjadi:

$$\langle E' \rangle = \langle n \ell j m_j | H' | n \ell j m_j \rangle \quad (11.21)$$

Jadi:

$$\begin{aligned} \langle E' \rangle &= \langle n \ell j m_j | H | n \ell j m_j \rangle + \langle n \ell j m_j | V_{SL} | n \ell j m_j \rangle \\ \langle E' \rangle &= E_n + \langle n \ell j m_j | V_{SL} | n \ell j m_j \rangle \end{aligned} \quad (11.22)$$

Sehingga pergeseran harga energi karena pengaruh \vec{B} adalah:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle E' \rangle - E_n \\ \Delta E &= \langle n \ell j m_j | V_{SL} | n \ell j m_j \rangle \end{aligned} \quad (11.23)$$

Langkah berikutnya adalah evaluasi $\langle V_{SL} \rangle$, dari Persamaan (11.14) diketahui bahwa:

$$\vec{T} = \vec{L} + \vec{S}$$

Sehingga:

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = \vec{L} \cdot \vec{L} + 2\vec{S} \cdot \vec{L} + \vec{S} \cdot \vec{S}$$

sehingga hubungan operatornya menjadi:

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} [T^2 - L^2 - S^2] \quad (11.24)$$

Jika operator di atas dioperasikan pada $|n \ell j m_j\rangle$, maka:

$$(\vec{S} \cdot \vec{L})|n \ell j m_j\rangle = \frac{1}{2} \left[j(j+1)\hbar^2 - \ell(\ell+1)\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 \right] |n \ell j m_j\rangle \quad (11.25)$$

dimana diperoleh bahwa:

$$\langle n \ell j m_j | (\vec{S} \cdot \vec{L}) | n \ell j m_j \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (11.26)$$

Persamaan diatas dapat diterapkan untuk menentukan $\langle V_{SL} \rangle$ dengan menggunakan Persamaan (11.13), sehingga diperoleh:

$$\langle V_{SL} \rangle = \frac{\hbar^2}{4m_o^2c^2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle \quad (11.27)$$

dengan:

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle = \langle n \ell j m_j | \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} | n \ell j m_j \rangle \quad (11.28)$$

yang dapat dievaluasi untuk harga n dan ℓ tertentu

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle_{n\ell} = \int_0^\infty r^2 dr R_{n\ell}^* \left\{ \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right\} R_{n\ell} \quad (11.29)$$

Harus diingat bahwa $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ sehingga apabila digunakan notasi:

$$A_o = \frac{\hbar^2}{4m_o^2c^2} \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle \quad (11.30)$$

maka akan diperoleh:

$$\Delta E_{SL} = \langle V_{SL} \rangle = A_o \left[j(j + 1) - \ell(\ell + 1) - \frac{3}{4} \right] \quad (11.31)$$

Karenas $= \frac{1}{2}$, maka ada dua kemungkinan harga untuk j , yaitu $j = \ell + \frac{1}{2}$ dan $j = \ell - \frac{1}{2}$. Jadi ΔE juga bergantung dari dua kemungkinan tersebut apabila:

$$\begin{aligned} \text{a. } j = \ell + \frac{1}{2} &\rightarrow = \left[j(j + 1) - \ell(\ell + 1) - \frac{3}{4} \right] = \ell \\ \text{b. } j = \ell - \frac{1}{2} &\rightarrow = \left[j(j + 1) - \ell(\ell + 1) - \frac{3}{4} \right] = -(\ell + 1) \end{aligned} \quad (11.32)$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \text{a. } \Delta E = A_o \ell, &\text{ apabila } j = \ell + \frac{1}{2} \\ \text{b. } \Delta E = -A_o(\ell + 1), &\text{ apabila } j = \ell - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (11.33)$$

Jadi untuk kasus spin sejajar dengan \vec{L} , disebut sebagai spin-up yaitu:

$$E_{\uparrow} = E_n + A_o \ell \quad (11.34)$$

Untuk kasus spin berlawanan dengan arah \vec{L} , yaitu spin-down, maka:

$$E_{\downarrow} = E_n - A_o(\ell + 1) \quad (11.35)$$

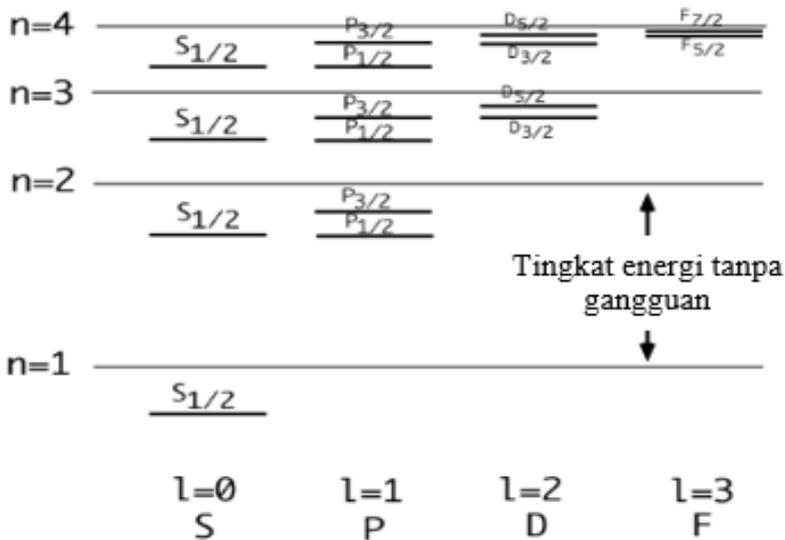
Harus selalu diingat bahwa pergeseran harga energi yang disebutkan diatas disebabkan oleh medan magnet internal \vec{B}_i yang berasal dari interaksi dengan inti atom, jadi bukan karena pengaruh medan magnet luar.

Persamaan (11.31) sebenarnya dapat ditulis menjadi

$$\Delta E_{SL} = \langle V_{SL} \rangle = \frac{E_n^2}{mc^2} \left[\frac{n \left(j(j + 1) - \ell(\ell + 1) - \frac{3}{4} \right)}{\ell \left(\ell + \frac{1}{2} \right) (\ell + 1)} \right]$$

$$\Delta E_{SL} = \langle V_{SL} \rangle = \frac{E_n^2}{mc^2} 2n \left[\frac{1}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right] \quad (11.36)$$

Pada Gambar 11.2 digambarkan sketsa tentang tingkat-tingkat energi sistem atom hidrogen dimana diperhitungkan kopel $(\vec{S} \cdot \vec{L})$.



Gambar 11.2 Struktur halus hidrogen dengan kopel $(\vec{S} \cdot \vec{L})$

Kaedah seleksi yang berlaku adalah:

$$\Delta \ell = \pm 1$$

$$\Delta j = 0, \pm 1$$

$$\Delta m_j = 0, \pm 1$$

Berdasarkan relativitas khusus, energi kinetik elektron yang bermassa m dan bergerak dengan kecepatan v adalah:

$$K \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} \quad (11.37)$$

dimana p adalah momentum. Suku pertama adalah pernyataan non-relativistik biasa untuk energi kinetik, sedangkan suku kedua adalah koreksi relativistik orde terendah untuk energi tersebut. Dengan menggunakan teori gangguan, diperoleh bahwa:

$$\Delta E_{rel} = -\frac{E_n^2}{2mc^2} \left(\frac{4n}{\ell + \frac{1}{2}} - 3 \right) \quad (11.38)$$

Koreksi energi tersebut tidak memecah tingkat energi, namun hanya menghasilkan pergeseran energi diakibatkan oleh efek spin-orbit. Sehingga koreksi energi total adalah:

$$E = \Delta E_{SL} + \Delta E_{rel} \quad (11.39)$$

$$E_{nj} = -\frac{1,36\text{eV}}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) \right] \quad (11.40)$$

dimana :

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137,036} \quad , \text{ tetapan struktur halus} \quad (11.41)$$

Nilai eigen komponen z untuk momentum angular orbital dan spin (m_ℓ dan m_s) bukan lagi merupakan bilangan kuantum yang baik, namun yang menjadi bilangan kuantum yang baik adalah n, ℓ, s, j dan m_j .

Sekarang dicari pergeseran energi apabila model atom hidrogen dengan kopel ($\vec{S} \cdot \vec{L}$) yang luas dimampatkan dalam medan \vec{B} luar yang besar. Metode yang dipergunakan sama dengan yang sebelumnya, dengan mengalihkan perhatian

dari perangkat bilangan kuantum (n, ℓ, m_ℓ, m_s) ke (n, l, j, m_j) . Momen dipol magnetik total berasal dari:

a. Gerak elektron mengelilingi inti atom (gerak orbital).

Besarnya magnetik dari komponen ini adalah:

$$\vec{\mu}_\ell = -\frac{e}{2m_o} g_\ell \vec{L} \quad \text{dimana } g_\ell = 1 \quad (11.42)$$

b. Gerak spin elektron dengan momen dipol magnetik

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m_o} g_s \vec{S} \quad \text{dimana } g_s \approx 2 \quad (11.43)$$

Sehingga momen dipol total mekanik adalah

$$\vec{\mu}_H = \vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s \quad (11.44)$$

$$\vec{\mu}_H = -\frac{e}{2m_o} [g_\ell \vec{L} + g_s \vec{S}]$$

$$\vec{\mu}_H = -\frac{e}{2m_o} [\vec{L} + 2\vec{S}] \quad (11.45)$$

Bentuk diatas menunjukkan bahwa $\vec{\mu}_H$ tidak sejajar dengan \vec{J} .

Karena arah \vec{J} merupakan suatu arah yang bermakna j merupakan bilangan kuantum dalam (n, l, j, m_j) , maka kita

cari dahulu komponen $\vec{\mu}_H$ dalam arah \vec{J} . Komponen itu dinyatakan dengan $[\vec{\mu}_H]_J$. Dengan menggunakan aljabar vektor sederhana, maka diperoleh:

$$[\vec{\mu}_H]_J = (\vec{\mu}_H \vec{J}_o) \vec{J}_o \quad (11.46)$$

dengan \vec{J}_o vektor satuan dalam arah \vec{J} , dimana:

$$\vec{J}_o = \frac{\vec{J}}{J} \quad (11.47)$$

oleh karena itu:

$$[\vec{\mu}_H]_J = -\frac{e}{2m_o} \{(\vec{L} + 2\vec{S})\vec{J}\} \frac{\vec{J}}{J^2} \quad (11.48)$$

karena $\vec{L} = \vec{J} - \vec{S}$ dan $\vec{J} \cdot \vec{J} = J^2$ maka:

$$[\vec{\mu}_H]_J = -\frac{e}{2m_o} \left\{ 1 + \frac{\vec{S} \cdot \vec{J}}{J^2} \right\} \vec{J} \quad (11.49)$$

bilangan kuantum dalam sistem hanyalah (n, l, j, m_j) . Oleh karena itu dalam ungkapan diatas, \vec{S} harus dieliminasi. Hal ini dapat dilakukan melalui hubungan $\vec{L} = \vec{J} - \vec{S}$, dan diperoleh:

$$\begin{aligned} L^2 &= J^2 + S^2 - 2\vec{J} \cdot \vec{S} \\ \vec{J} \cdot \vec{S} &= \frac{1}{2} [J^2 + S^2 - L^2] \end{aligned} \quad (11.50)$$

sehingga:

$$[\vec{\mu}_H]_J = -\frac{e}{2m_o} \left\{ 1 + \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} \right\} \vec{J} \quad (11.51)$$

Energi potensial momen dipol magnetik adalah:

$$V_B = -[\vec{\mu}_H]_J \cdot \vec{B} \quad (11.52)$$

Dengan \vec{B} merepresentasikan induksi magnet medan luar. Ungkapan untuk operatornya adalah

$$\hat{V}_B = \frac{eB}{2m_o} \left\{ 1 + \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2} \right\} J_z \quad (11.53)$$

arah Z diambil sama dengan arah \vec{B} . Karena operator \hat{V}_B diketahui, maka dapat dicari $\langle V_B \rangle$ melalui

$$\begin{aligned} \langle V_B \rangle &= \langle n \ell j m_j | \hat{V}_B | n \ell j m_j \rangle \\ \langle V_B \rangle &= \frac{eB}{2m_o} \left[1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)} \right] m_j \end{aligned} \quad (11.54)$$

Pernyataan di dalam kurung disebut sebagai faktor Lande', yaitu:

$$g \equiv \left[1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)} \right] \quad (11.55)$$

Ada 2 kemungkinan arah spin, yaitu spin up $(+\frac{1}{2})$ dan spin down $(-\frac{1}{2})$. Masing-masing memberikan $j = \ell + \frac{1}{2}$ dan $j = \ell - \frac{1}{2}$. Faktor Lande' untuk kedua kasus tersebut masing-masing adalah:

$$g_{\pm} \equiv \left[1 \pm \frac{1}{(2\ell+1)} \right] \quad (11.56)$$

Jadi, untuk kasus:

a. Spin-up

$$j = \ell + \frac{1}{2} \text{ dan } g \equiv \left[1 + \frac{1}{(2\ell+1)} \right]$$

$$\langle V_B \rangle = \frac{eB}{2m_o} \left[1 + \frac{1}{(2\ell+1)} \right] m_j \quad (11.57)$$

b. Spin-down

$$j = \ell - \frac{1}{2} \text{ dan } g \equiv \left[1 - \frac{1}{(2\ell+1)} \right]$$

$$\langle V_B \rangle = \frac{eB}{2m_o} \left[1 - \frac{1}{(2\ell+1)} \right] m_j \quad (11.58)$$

Dalam teori mekanika kuantum lanjut, spin elektron tidak perlu ditampilkan secara khusus. Dalam pendekatan relativistik, unsur spin akan muncul dengan sendirinya. Penampilan spin elektron diperlukan apabila relativitas tidak dipertimbangkan, jadi teori mekanika kuantum yang tak-relativistik. Dengan munculnya spin tersebut dapat diterangkan gejala-gejala yang diamati dalam spektrum pancaran atom hidrogen.

Struktur halus yang telah disebutkan sebelumnya memberikan pergeseran harga energi yang hampir sama dengan $\langle V_{SL} \rangle$. Sumber struktur halus adalah efek relativistik, karena berubahnya massa elektron terhadap kecepatannya. Baik $\langle V_{SL} \rangle$ maupun struktur halus bersumber pada relativitas, tetapi dari aspek yang berlainan.

Contoh 11.2

Tentukan 8 keadaan dengan $n = 2$ atau $|2 \ell j m_j\rangle$.

Penyelesaian:

Untuk $n = 2$, $\ell = 0$, $s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ dimana

$$j = |j - s|, \dots, |j + s| = \frac{1}{2}$$

Untuk $n = 2$, $\ell = 1$, $s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ dimana

$$j = |j - s|, \dots, |j + s| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

Sehingga 8 keadaan tersebut adalah

$$|1\rangle = |2 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \qquad |5\rangle = |2 1 \frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle$$

$$|2\rangle = |2 0 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \qquad |6\rangle = |2 1 \frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

$$|3\rangle = |2 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \qquad |7\rangle = |2 1 \frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle$$

$$|4\rangle = |2 1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \qquad |8\rangle = |2 1 \frac{3}{2} -\frac{3}{2}\rangle$$

6. TINJAUAN ULANG ATOM HIDROGEN DALAM MEDAN \vec{B} UNTUK TIGA MODEL.

Interaksi antara inti $+Ze$ dan elektron $-e$ diberikan oleh potensial coulomb $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Potensial tersebut memiliki ruang lingkup berupa bola, sedangkan solusi persamaan nilai eigen-nya mempunyai degenerasi. Permasalahan persamaan nilai eigen dapat dipelajari secara lebih mendalam dengan menurunkan degenerasinya, antara lain dengan menurunkan ruang lingkup potensialnya. Penurunan kesetangkupan dapat diperoleh dengan menempatkan atom hidrogen tersebut dalam suatu medan magnet luar. Derajat ruang lingkup potensial turun dan oleh karena itu degenerasi solusinya juga akan berkurang.

Sistem atom hidrogen yang ditempatkan dalam ruang dengan induksi magnet \vec{B} , maka interaksi antara momen dipol magnetik atom hidrogen itu dan medan \vec{B} menghasilkan energi potensial $V_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, dengan $\vec{\mu}$ adalah momen dipol magnetik atom hidrogen. Dalam analisis yang telah dilakukan, ada berbagai “sumber” momen dipol magnetik. “Sumber” tersebut sesuai dengan tingkat kerumitan model atom hidrogen yang dipergunakan. Sumber momen dipol magnetik untuk berbagai model atom hidrogen diperlihatkan pada Tabel 11.1.

Tabel 11.1 Sumber momen dipol magnetik untuk berbagai model atom hidrogen

Model	Sumber	Persamaan
Dasar	Elektron yang mengelilingi inti atom (elektron orbital)	$\vec{\mu}_\ell = -\frac{e}{2m_o} g_\ell \vec{L}$
Model dengan spin	Orbital elektron dan spin elektron tersebut, masing-masing independent	$\vec{\mu}_\ell = -\frac{e}{2m_o} g_\ell \vec{L}$ dan $\vec{\mu}_s = -\frac{e}{2m_o} g_s \vec{S}$
Model dengan kopel $\vec{S} \cdot \vec{L}$	Paduan elektron orbital dan spin elektron	$\vec{\mu}_H = \vec{\mu}_\ell + \vec{\mu}_s$ sehingga $\vec{\mu}_H = -\frac{e}{2m_o} [\vec{L} + 2\vec{S}]$

SOAL LATIHAN

1. Tentukan $\langle T^2 \rangle$ dan $\langle T_z \rangle$ untuk keadaan $\ell = 3$ dan $s = \frac{1}{2}$.
2. Tentukan energi tiap keadaan untuk 8 keadaan $n = 2$ atau $|2 \ell j m_j\rangle$, yang dibahas pada Contoh 11.
3. Jika notasi 3P_0 menandakan nomor kuantum momentum anguler total dalam bentuk ${}^{2s+1}L_J$. Tentukan nilai bilangan kuantum S , L dan J yang mungkin jika terjadi kopel $\vec{S} \cdot \vec{L}$.

DAFTAR PUSTAKA

- Ackroyd, J.E., Anderson, M., Berg C., dan Martin, B.E, Pearson Physics, Pearson Education, Canada, 2009.
- Burns, M.L., Modern Physics for Science and Engineering, Physics Curriculum & Instruction Inc, Woodhill Drive Lakeville, 2012.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., dan Laloe, F., Quantum Mechanics Vol. 1, John Willey & Sons, New York, 1991.
- Constantinescu, F., dan Magyari E., Problem in Quantum Mechanics, Pergamon Press, Oxford, 1971.
- Griffiths, D.J., Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall, New Jersey, 2005.
- Halliday, D., Resnick, R., dan Walker, J., Fundamentals of Physics Extended, Wiley, New York, 2007
- Krane, K., Modern Physics, John Wiley & Sons Inc, New York, 2012.
- Lee, H., Thermal Design: Heat Sinks, Thermoelectrics, Heat Pipes, Compact Heat Exchangers, and Solar Cells, John Wiley & Sons, Inc.: New Jersey, 2010.
- McMahon, D., Quantum Mechanics Demystified, McGraw-Hill Education, New York, 2006.

- Pandiangan, P., dan Sumardi, Y., Pengantar Fisika Kuantum, Universitas Terbuka, Jakarta, 2008.
- Powell, J.L., dan Crasemann, B., Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company Inc, London, 1961.
- Purwanto, A., Pengantar Fisika Kuantum, Citra Media, Surabaya, 2016.
- Serway, R.A., dan Jewet, J.W, Physics for Scientists and Engineers, Brooks Cole, Boston, 2013.
- Serway, R.A., Moses, C.J., dan Moyer, C.A, Modern Physics, Brooks Cole, Belmont, 2005.
- Serway, R.A., dan Vuille, C, College Physics, Brooks Cole, Boston, 2011.
- Young, H.D., Freedman, R.A., dan Ford, A.L., Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics, Addison-Wesley, San Fransisco, 2011.
- Zetiteli, N., Quantum Mechanics: Concepts and Applications, Wiley, New York, 2009.