Bac Terminale C Orléans septembre 1976

Quels sont, s'il en existe, les endomorphismes d'un espace vectoriel dont le noyau et l'image sont deux sous-espaces donnés ? Tel est le thème de ce problème. La partie A étudie un exemple en dimension 2, la partie B propose une généralisation en dimension 2 ou 3. Le sujet original est complété par une partie C de mon invention traitant deux cas non évoqués dans le sujet original.

1. Le sujet

V étant un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3 et $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ en étant deux sous-espaces vectoriels donnés, on se propose d'étudier l'ensemble E des endomorphismes de **V** de noyau $\mathbf{V}_1$ et d'image $\mathbf{V}_2$.

A. Dans cette partie, **V** est un plan vectoriel

V est un plan vectoriel de base $B=\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$, $\mathbf{V}_1$ est la droite vectorielle de base $\overrightarrow{v_1}=\vec{i}+\vec{j}$ et $\mathbf{V}_2$ est la droite vectorielle de base $\overrightarrow{v_2}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ où a et b sont deux réels non tous deux nuls.

1. ***On suppose que*** $a\neq b$.

1.1. Montrer que $\left(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right)$ est une base de **V**.

1.2. Soit p la projection vectorielle sur $\mathbf{V}_2$ parallèlement à $\mathbf{V}_1$. Est-ce que p est élément de E ?

1.3. Soit f un élément de E. Ecrire sa matrice dans la base $\left(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\right)$. En déduire que f est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une projection vectorielle que l'on déterminera. Y a-t-il commutativité de la composition ?

1.4. Démontrer que E est égal à l'ensemble H des endomorphismes $h\circ p$, où h décrit l'ensemble des homothéties vectorielles de **V**.

1.5. E est-il stable pour la loi de composition des applications ? Même question pour l'addition des applications.

1.6. Montrer que l'application $\begin{cases} H\to E \\ h\mapsto \Phi(h)=h\circ p \end{cases}$ est un isomorphisme de groupe, les ensembles H et E étant munis de la loi de composition des applications de **V** dans **V**. Préciser l'élément neutre de $(E,\circ)$ et l'élément symétrique d'un élément donné de E.

2. ***On suppose que*** $a = b$

2.1. Peut-on définir la projection vectorielle p de la question **A1** ?

2.2. Soit f_1 l'endomorphisme de **V** dont la matrice dans la base B est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que f_1 est un élément de E.

2.3. Soit f un endomorphisme de **V** de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base B. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d pour que f soit élément de E.

2.4. En déduire que E est égal à l'ensemble des endomorphismes $h \circ f_1$ où h décrit H. L'ensemble E est-il stable pour la loi de composition des applications ?

B. Dans cette partie, **V** est un espace vectoriel de dimension 2 ou 3.

Si f est élément de E, on notera $\ker f = \mathbf{V}_1$ et $\operatorname{Im} f = \mathbf{V}_2$

1. Donner un exemple de sous-espaces $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ tels que E soit l'ensemble vide. On supposera dans la suite du problème que E n'est pas l'ensemble vide.

2. f et g étant deux éléments de E :

2.1. Montrer que $\mathbf{V}_1 \subset \ker(g \circ f)$ et que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \mathbf{V}_2$

2.2. Si $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1$, montrer que $\forall\, \vec{v} \in \mathbf{V},\ g \circ f(\vec{v}) = \vec{0}$. E est-il stable pour la composition des applications ?

2.3. Si $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ sont deux sous-espaces supplémentaires de **V**, montrer que $\forall\, \vec{v} \in Ker(g \circ f),\ \ f(\vec{v}) = \vec{0}$ et montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \mathbf{V}_2$. E est-il stable pour la composition des applications ?

3. On suppose que $\mathbf{V}_2$ est une droite vectorielle de **V** et que $\mathbf{V}_1$ est un sous-espace supplémentaire de $\mathbf{V}_1$ dans **V**.

3.1. Montrer que pour tout endomorphisme f appartenant à E : $f(\mathbf{V}_2) \subset \mathbf{V}_2$. En déduire que pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbf{V}_2$, $f(\vec{v})$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3.2. Démontrer que la restriction de f à $\mathbf{V}_2$ est une homothétie vectorielle.

3.3. Montrer que E est l'ensemble des endomorphismes $h \circ p$ où h décrit l'ensemble des homothéties vectorielles de **V** et où p est la projection vectorielle sur $\mathbf{V}_2$ parallèlement à $\mathbf{V}_1$.

Fin du sujet original Orléans-Tours C 1976

Partie C : Pour aller plus loin.

Deux cas n'ont pas été étudiés dans le sujet original : en dimension 3, le cas où l'un des sous-espaces est un plan vectoriel et l'autre une droite vectorielle incluse dans ce plan.

1. On suppose que $\mathbf{V}_1$ est une droite vectorielle et que $\mathbf{V}_2$ est un plan vectoriel, la droite vectorielle $\mathbf{V}_1$ étant incluse dans le plan vectoriel $\mathbf{V}_2$

Soit $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ une base de **V** choisie de telle sorte que $\mathbf{V}_1$ soit la droite vectorielle $\mathbf{Vect}\left(\vec{e}_1\right)$ de base $\vec{e}_1$ et que $\mathbf{V}_2$ soit le plan vectoriel $\mathbf{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ de base $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$.

1.1. Montrer que si f appartient à E, alors il existe quatre réels a, b, c, d tels que la matrice de f dans la base $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ soit la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. Réciproquement, soit f un endomorphisme de **V** dont la matrice dans la base $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre nombre réels. À quelle condition portant sur a, b, c, d l'endomorphisme f appartient-il à E ?

1.3. E est-il stable pour la composition des applications ?

2. On suppose que $\mathbf{V}_2$ est une droite vectorielle et que $\mathbf{V}_1$ est un plan vectoriel, la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$ étant incluse dans le plan vectoriel $\mathbf{V}_1$

Soit $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ une base de **V** choisie de telle sorte que $\mathbf{V}_2$ soit la droite vectorielle $\mathbf{Vect}\left(\vec{e}_1\right)$ de base $\vec{e}_1$ et que $\mathbf{V}_1$ soit le plan vectoriel $\mathbf{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ de base $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$.

2.1. Soit f_1 l'endomorphisme de **V** ayant pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que f_1 appartient à E.

2.2. Montrer que f appartient à E si et seulement si il existe une homothétie vectorielle h de **V** telle que : $f = h \circ f_1$. L'ensemble E est-il stable pour la loi de composition des applications ?

2. Eléments de correction

A. Dans cette partie, V est un plan vectoriel

1. ***On suppose que*** $a \neq b$.

1.1. La famille $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ est une famille de deux éléments d'un espace vectoriel de dimension 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que cette famille soit une base est que cette famille soit libre.

La matrice de $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ dans la base B est la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et le déterminant de cette matrice est égal à $b-a$. Dans l'hypothèse où $a \neq b$, ce déterminant est non nul. La famille $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ est une famille libre.

Il s'agit d'une base.

1.2. Soit p la projection vectorielle sur $\mathbf{V}_2$ parallèlement à $\mathbf{V}_1$.

Par définition d'une projection vectorielle d'un plan vectoriel, p a pour noyau la droite vectorielle $\mathbf{V}_1$ et pour ensemble de vecteurs invariants la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$ et la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$ des vecteurs invariants par p coïncide avec l'image de p. La projection vectorielle p est élément de E.

On note que la matrice de p dans la base $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3. Soit f un élément de E.

Puisque le noyau de f est la droite vectorielle $\mathbf{V}_1$ de base $\overrightarrow{v_1} = \vec{i} + \vec{j}$, $f\left(\overrightarrow{v_1}\right) = \vec{0}$.

Puisque l'image de f est la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$ de base $\overrightarrow{v_2} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$, l'image de $\overrightarrow{v_2}$ par f appartient à $\mathbf{V}_2$ et il s'agit d'un vecteur non nul de $\mathbf{V}_2$ (sinon, f serait l'application nulle, deux vecteurs d'une base de $\mathbf{V}$ ayant pour image le vecteur nul). Il existe un réel non nul k tel que : $f\left(\overrightarrow{v_2}\right) = k\,\overrightarrow{v_2}$.

La matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)$ est la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

On en déduit que f est la composée de l'homothétie vectorielle h_k de rapport k et de la projection vectorielle p (dans l'ordre que l'on voudra, $f = h_k \circ p = p \circ h_k$ car une homothétie vectorielle d'un espace vectoriel commute avec tout endomorphisme de cet espace)

1.4. Désignons par H_p l'ensemble des endomorphismes $h \circ p$ où h appartient à H.

$E \subset H_p$ d'après la question précédente et réciproquement $H_p \subset E$ car tout endomorphisme du type $h \circ p$ a le même noyau et le même ensemble image que p (puisque une homothétie vectorielle de $\mathbf{V}$ laisse globalement stable tout sous-espace de $\mathbf{V}$), donc est élément de E. Donc $E = H_p$.

1.5. Soient $h \circ p$ et $h' \circ p$ deux éléments de E. Leur composée est l'application $(h' \circ p) \circ (h \circ p)$.

Par associativité : $(h' \circ p) \circ (h \circ p) = h' \circ (p \circ h) \circ p$.

Vu qu'il y a dans cette circonstance commutativité de la composition : $p \circ h = h \circ p$ et par suite $(h' \circ p) \circ (h \circ p) = h' \circ (h \circ p) \circ p = (h' \circ h) \circ (p \circ p)$.

D'une part $h' \circ h$ est une homothétie vectorielle par stabilité de l'ensemble des homothéties vectorielles pour la loi de composition et d'autre part $p \circ p = p$, propriété remarquable d'une projection vectorielle.

$(h' \circ p) \circ (h \circ p) = (h' \circ h) \circ p$ est un élément de *E*, l'ensemble *E* est stable pour la loi de composition des applications. En revanche *E* n'est pas stable pour l'addition des applications car la somme de $h \circ p$ et de $(-h) \circ p$ où $-h$ désigne l'homothétie vectorielle dont le rapport est l'opposé de celui de *h* n'est autre que l'application nulle, qui n'appartient pas à *E*.

1.6. La question **1.4** a montré que l'application $h \mapsto \Phi(h) = h \circ p$ était effectivement une application de *H* dans *E* puisque nous y avons vu que $H_p \subset E$, et la question **1.3** a montré que cette application est surjective puisque nous y avons vu que $E \subset H_p$ **.**

D'après la démonstration faite dans la question **1.5** : $[\Phi(h')] \circ [\Phi(h)] = \Phi(h' \circ h)$, ce qui exprime que l'application Φ est un endomorphisme de groupe.

Il reste à vérifier l'injectivité.

Supposons que $\Phi(h') = \Phi(h)$. Si tel est le cas, alors en particulier $(h' \circ p)(\overrightarrow{v_2}) = (h \circ p)(\overrightarrow{v_2})$ et donc $h'(\overrightarrow{v_2}) = h(\overrightarrow{v_2})$. Les deux homothéties vectorielles *h* et *h'* coïncidant pour un vecteur non nul, elles coïncident : $h' = h$. L'application Φ est un isomorphisme de groupe.

L'élément neutre de $(E, \circ)$ est l'image de l'élément neutre de *H*, c'est la projection vectorielle *p* elle-même et l'élément symétrique d'un élément donné $h \circ p$ de *E* est l'élément $h^{-1} \circ p$ où h^{-1} est l'homothétie vectorielle de rapport inverse de celui de *h*, car : $(h^{-1} \circ p) \circ (h \circ p) = \Phi(h^{-1}) \circ \Phi(h) = \Phi(h^{-1} \circ h) = \Phi(I_d) = p$

2. ***On suppose que*** $a = b$

Cette hypothèse équivaut ici au fait que $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1$.

2.1. On ne peut plus définir la projection vectorielle *p* de la question **A1** car un même sous-espace vectoriel non réduit au zéro ne peut pas être simultanément le noyau d'une application linéaire et l'ensemble de ses vecteurs invariants.

2.2. Soit f_1 l'endomorphisme de **V** dont la matrice dans la base *B* est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

L'image de f_1 est le sous-espace engendré par les images des vecteurs de la base *B*. Les vecteurs de base ont pour images, respectivement, $\overrightarrow{v_1}$ et $-\overrightarrow{v_1}$. Ces deux vecteurs sont liés et engendrent la droite vectorielle $\mathbf{V}_1$.

$\operatorname{Im} f_1 = \mathbf{V}_1$.

Puisque l'image de *f* est de dimension 1, son noyau est aussi de dimension 1, c'est une droite vectorielle dont il suffit de trouver une base. Or, $f_1(\overrightarrow{v_1}) = f_1(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{0}$: le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ est un vecteur du noyau de *f* : $\ker f_1 = \mathbf{V}_1$

f_1 est un élément de E car il a pour noyau $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1$ et pour image $\mathbf{V}_1$. On remarque que, l'image de f étant en même temps son noyau, $f_1 \circ f_1 = O_V$ (l'application nulle sur $\mathbf{V}$)

2.3. Il est nécessaire que $f\left(\vec{v_1}\right) = f\left(\vec{i} + \vec{j}\right) = \vec{0}$. Or $f\left(\vec{v_1}\right) = f\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

Il est nécessaire que : $\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases}$

Il est nécessaire aussi que les images des vecteurs de la base B appartiennent à $\mathbf{V}_1$, c'est-à-dire que les vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ soient colinéaires à $\vec{v_1} = \vec{i} + \vec{j}$, ce qui conduit aux conditions : $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$.

Il est donc nécessaire que le système des quatre équations : $\begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \\ a-b=0 \\ c-d=0 \end{cases}$ soit vérifié. Ce système admet une infinité de solutions en (a, b, c, d) qui peuvent s'exprimer en fonction de l'un des quatre nombres a, b, c ou d : $b = a \quad c = d = -a$. C'est-à-dire que la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si la matrice dans la base B d'un endomorphisme f est de cette forme, alors de deux choses l'une, ou bien $a = 0$ et f est l'application nulle qui n'appartient pas à E, ou bien $a \neq 0$ et alors f admet $\mathbf{V}_1$ aussi bien pour noyau que pour image, dans ce cas f appartient à E.

Des conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit élément de E sont que la matrice de f soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ où a est un réel non nul.

2.4. Il apparaît que f appartient à E si et seulement si il existe un réel non nul a tel que $f = h_a \circ f_1$ où, comme il a déjà été précisé, h_a est l'homothétie vectorielle de rapport a. Quand a décrit $\mathbf{R}^*$, h_a décrit H en entier ; donc E est l'ensemble des endomorphismes $h \circ f_1$ où h décrit H.

Une homothétie commutant avec tout endomorphisme : $(h' \circ f_1) \circ (h \circ f_1) = (h' \circ h) \circ (f_1 \circ f_1) = O_V$.

La composée de deux éléments de E est l'application nulle, E n'est pas stable pour la composition des applications.

B. Dans cette partie, V est un espace vectoriel de dimension 2 ou 3.

Si f est élément de E, on notera $\ker f = \mathbf{V}_1$ et $\operatorname{Im} f = \mathbf{V}_2$

1. D'après l'équation aux dimensions[1], pour tout endomorphisme f de $\mathbf{V}$: $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbf{V})$.

Pour donner un contre-exemple de sous-espaces tels que E soit l'ensemble vide, il suffit de choisir deux sous-espaces dont les dimensions ne satisfont pas cette équation.

Ainsi, en dimension 3, les cas où $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ sont deux droites vectorielles, ou bien deux plans vectoriels, conviennent comme contre-exemple..

En dimension 2, les cas où l'un des sous-espaces est une droite vectorielle et l'autre ou bien $\mathbf{V}$ tout entier ou bien réduit au zéro conviennent aussi comme contre-exemple.

2. f et g étant deux éléments de E :

2.1. Pour tous endomorphismes f et g d'un espace vectoriel quelconque : $\ker f \subset \ker(g \circ f)$. En effet, si un vecteur a déjà pour image par f le vecteur nul, si on compose par n'importe quel endomorphisme (peu importe d'ailleurs que cet endomorphisme appartienne à E ou non), l'image obtenue est le vecteur nul.

Ici par hypothèse, $Ker\, f = \mathbf{V}_1$. Donc $\mathbf{V}_1 \subset \ker(g \circ f)$.

Pour tous endomorphismes f et g d'un espace vectoriel quelconque : $\operatorname{Im} g \supset \operatorname{Im}(g \circ f)$. En effet, si un vecteur est l'image d'un autre par $g \circ f$, il est l'image par g de l'image par f de cet autre vecteur (peu importe que f appartienne à E ou non) ; tout vecteur image d'un autre par $g \circ f$ appartient à $\operatorname{Im} g$.

Ici par hypothèse, $\operatorname{Im} g = \mathbf{V}_2$. Donc $\mathbf{V}_2 \supset \operatorname{Im}(g \circ f)$

2.2. De façon générale, du fait que f et g appartiennent à E, entre autres hypothèses remarquons que : $\operatorname{Im} f = \mathbf{V}_2$ et $Ker\, g = \mathbf{V}_1$

Dans le cas particulier où $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1$:

Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbf{V}$: $f(\vec{v}) \in \mathbf{V}_2$ puisque par hypothèse $\operatorname{Im} f = \mathbf{V}_2$.

Mais $\operatorname{Im} f = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 = \ker g$. Donc : $f(\vec{v}) \in \ker g$ et par suite $g \circ f(\vec{v}) = \vec{0}$

La composée de deux endomorphismes appartenant à E est l'endomorphisme nul, E n'est pas stable pour la composition. C'est le résultat que nous avions trouvé en dimension 2.

Cependant, ce cas ne va pas se produire en dimension 3 puisque la somme des dimensions de $\mathbf{V}_1$ et de $\mathbf{V}_2$ doit être égale à 3 : les deux sous-espaces ne peuvent pas être égaux, ils sont de dimensions différentes.

[1] Théorème : Soient $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n et f une application linéaire de $\mathbf{E}$ vers un espace vectoriel $\mathbf{F}$ (de dimension finie ou on, peu importe). Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ et l'image de f est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbf{F}$ et : $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbf{E}$. Telle est « l'équation aux dimensions » entre le noyau et l'image d'une application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie. Cette équation a un réel intérêt car, en déterminant l'un ou l'autre des deux sous-espaces $\ker f$ ou $\operatorname{Im} f$, on obtient en même temps des informations sur l'autre sous-espace. En l'occurrence on en connaît d'avance la dimension.

2.3. Des inclusions $\mathbf{V}_1 \subset Ker(g \circ f)$ et $\mathbf{V}_2 \supset \mathrm{Im}(g \circ f)$, on déduit, de façon générale, que $\dim(\mathbf{V}_1) \leq$ gjulia $\dim(\ker(g \circ f))$ et $\dim(\mathbf{V}_2) \geq \dim(\mathrm{Im}(g \circ f))$

Si $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{V}$: $\dim(\mathbf{V}_1) + \dim(\mathbf{V}_2) = \dim(\mathbf{V})$

Soit de façon générale soit $\vec{v} \in \ker(g \circ f)$.

- D'une part , $f(\vec{v}) \in \ker g$ c'est-à-dire, puisque g appartient à E, $f(\vec{v}) \in \mathbf{V}_1$.
- D'autre part , $f(\vec{v}) \in \mathrm{Im} f$ c'est-à-dire, puisque f appartient à E, $f(\vec{v}) \in \mathbf{V}_2$.

En conséquence : $f(\vec{v}) \in (\mathbf{V}_2 \cap \mathbf{V}_1)$

Si on suppose que $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{V}$, alors leur intersection est réduite au seul vecteur gj nul et dans ce cas, $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Il en résulte que $\ker g \circ f \subset \ker f = \mathbf{V}_1$

Si on résume la situation :

- $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ sont deux sous-espaces supplémentaires, donc la somme de leurs dimensions est égale à celle de $\mathbf{V}$.
- $\ker(g \circ f) = \mathbf{V}_1$
- L'équation aux dimensions : $\dim(\ker(g \circ f)) + \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \dim(\mathbf{V}_1) + \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)) = \dim(\mathbf{V})$
- D'après la question **B2.1**, $\mathrm{Im}(g \circ f) \supset \mathbf{V}_2$

$\mathrm{Im}(g \circ f)$ est un sous-espace qui contient $\mathbf{V}_2$ et qui a la même dimension que lui : ces deux sous-espaces sont confondus. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathbf{V}_2$

Mais nous avons vu en **2.1** l'inclusion réciproque : $\ker g \circ f \supset \mathbf{V}_1$. Finalement, $\ker g \circ f = \mathbf{V}_1$

Nous avons établi que la composée de deux éléments de E est un endomorphisme qui a pour noyau $\mathbf{V}_1$ et pour image $\mathbf{V}_2$: la composée de deux éléments de E appartient à E, l'ensemble E est stable pour la loi de composition.

3.1. *Cette question a déjà été traitée en dimension 2 dans la partie A. Le cas « intéressant » ici est le cas, en dimension 3, où $\mathbf{V}_1$ est une droite vectorielle et $\mathbf{V}_2$ un plan vectoriel.*

Pour tout f élément de E, $\mathrm{Im} f = \mathbf{V}_2$.

Puisque $\mathbf{V}_2$ est inclus dans $\mathbf{V}$, son image par f est incluse dans l'image par f de $\mathbf{V}$: $f(\mathbf{V}_2) \subset \mathrm{Im} f = \mathbf{V}_2$.

Par hypothèse, $\mathbf{V}_2$ est une droite vectorielle : pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbf{V}_2$, $f(\vec{v})$ et $\vec{v}$ appartiennent à une même droite vectorielle, ces vecteurs sont colinéaires.

3.2. Soit $\overrightarrow{v_2}$ un vecteur directeur de la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$. D'après la question précédente, $f(\overrightarrow{v_2})$ est colinéaire à $\overrightarrow{v_2}$, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $f(\overrightarrow{v_2}) = k\,\overrightarrow{v_2}$. Alors pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbf{V}_2$, tel que $\vec{v} = x\,\overrightarrow{v_2}$, $f(\vec{v}) = f(x\,\overrightarrow{v_2}) = x\, f(\overrightarrow{v_2}) = x(k\,\overrightarrow{v_2}) = k(x\,\overrightarrow{v_2}) = k\,\vec{v}$

La restriction de f à $\mathbf{V}_2$ est soit l'homothétie vectorielle de rapport k (si $k \neq 0$) soit l'application nulle, éventualité ${}_{gj}$ qu'il reste à éliminer.

Par hypothèse, $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{V}_2$ sont deux sous-espaces supplémentaires, donc leur intersection est réduite au seul vecteur nul. Vu que $\overrightarrow{v_2}$ un vecteur directeur de la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$, il s'agit d'un vecteur de $\mathbf{V}_2$ non nul. Il n'appartient pas au noyau $\mathbf{V}_1$ de $\mathbf{V}$: le réel k est un réel non nul, la restriction de f à $\mathbf{V}_2$ est toujours une homothétie vectorielle.

3.3. La projection vectorielle p dont il est question appartient clairement à E puisque $\mathbf{V}_1$ est son noyau et que $\mathbf{V}_2$ constitue l'ensemble de ses vecteurs invariants. Elle est telle que la restriction de p à $\mathbf{V}_2$ est l'application identique de $\mathbf{V}_2$.

Puisque une homothétie vectorielle de $\mathbf{V}$ laisse globalement invariant tout sous-espace de $\mathbf{V}$, pour toute homothétie vectorielle h, $h \circ p$ admet le même noyau $\mathbf{V}_1$ et la même image $\mathbf{V}_2$ que l'application p, donc $h \circ p$ appartient à E.

Réciproquement, si f appartient à E, sa restriction à $\mathbf{V}_2$ est une certaine homothétie vectorielle h_k de rapport k. Les deux applications f et $h_k \circ p$ coïncident à la fois sur $\mathbf{V}_2$ et sur $\mathbf{V}_1$: coïncidant sur deux sous-espaces supplémentaires, elles sont identiques, $f = h_k \circ p$.

L'ensemble E est exactement l'ensemble des endomorphismes $h \circ p$ où h décrit l'ensemble des homothéties vectorielles de $\mathbf{V}$.

Partie C : Pour aller plus loin.

1.1. Soit $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ une base de **V** choisie de telle sorte que $\mathbf{V}_1$ soit la droite vectorielle $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}\right)$ de base $\vec{e_1}$ et que $\mathbf{V}_2$ soit le plan vectoriel $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ de base $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

Si f appartient à E, le vecteur $\vec{e_1}$ est un vecteur du noyau, c'est-à-dire que $f\left(\vec{e_1}\right)=\vec{0}$ et les images des deux autres vecteurs de base sont $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$, c'est-à-dire que leurs images sont combinaisons linéaires des vecteurs $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$. Il existe deux réels a et b tels que $f\left(\vec{e_2}\right)=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}$ et de même il existe deux réels c et d tels que $f\left(\vec{e_3}\right)=c\vec{e_1}+d\vec{e_2}$. La matrice dans la base $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. Réciproquement, si f a une matrice de cette forme, son noyau contient $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}\right)$ et son image est engendrée par les deux images des vecteurs $\left(\vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$. La dimension de $\operatorname{Im} f$ dépend du rang de la famille des deux vecteurs images $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si cette famille est de rang 1 (cas $ad-bc=0$ de vecteurs liés), alors $\operatorname{Im} f$ et de rang 1, c'est une droite vectorielle incluse dans $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ et le noyau de f est un plan contenant $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}\right)$. Dans ce cas, f n'appartient pas à E.

Si cette famille est de rang 2 (cas $ad-bc\neq 0$ de vecteurs indépendants), alors $\operatorname{Im} f$ et de rang 2, c'est $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ et le noyau de f est $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}\right)$. Dans ce cas, f appartient à E.

Ainsi, f appartient à E si et seulement si sa matrice dans la base $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec en outre la condition $ad-bc\neq 0$.

1.3. Si f et g sont deux éléments de E, de matrices respectives $\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & a' & c' \\ 0 & b' & d' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$, alors $g\circ f$ a pour matrice dans cette base le produit des deux matrices, c'est-à-dire la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a'b & a'd \\ 0 & b'b & b'd \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le déterminant des quatre nombres $\begin{vmatrix} a'b & a'd \\ b'b & b'd \end{vmatrix}$ est égal à zéro, et cela quels que soient *a', b', b, d*. Cette matrice n'est donc pas celle d'un élément de *E*.

En effet, $\ker(g \circ f)$ a une dimension au moins égale à 2 et l'ensemble $\mathrm{Im}(g \circ f)$ a une dimension au plus égale à 1. Par conséquent, $g \circ f$ n'appartient pas à E

L'ensemble *E* n'est pas stable pour la loi de composition.

NB. Voici un cas où les inclusions $\mathbf{V}_1 \subset \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathbf{V}_2$ sont des inclusions strictes.

2. On suppose que $\mathbf{V}_2$ est une droite vectorielle et que $\mathbf{V}_1$ est un plan vectoriel, la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$ étant incluse dans le plan vectoriel $\mathbf{V}_1$

Soit $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$ une base de **V** choisie de telle sorte que $\mathbf{V}_2$ soit la droite vectorielle $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}\right)$ de base $\vec{e_1}$ et que $\mathbf{V}_1$ soit le plan vectoriel $\mathbf{Vect}\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ de base $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

2.1. f_1 ayant pour matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, son noyau contient les deux vecteurs $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ donc contient le plan vectoriel $\mathbf{V}_1$ et le vecteur $\vec{e_3}$ a pour image le vecteur $\vec{e_1}$, donc $\mathrm{Im}\, f_1$ contient la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$.. La somme des dimensions de ces deux sous-espaces étant égale à 3, nécessairement le noyau est de dimension exactement 2, il s'agit exactement de $\mathbf{V}_1$, et est l'image est de dimension exactement 1, il s'agit exactement de $\mathbf{V}_2$: $\ker f_1 = \mathbf{V}_1$ et $\mathrm{Im}\, f_1 = \mathbf{V}_2$

L'endomorphisme f_1 appartient à *E.*

2.2. Si *h* est une homothétie vectorielle, soit *k* son rapport (réel non nul donc). $h \circ f_1$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right)$. Par le même raisonnement que ci-dessus, $h \circ f_1$ a pour noyau $\mathbf{V}_1$ et pour image $\mathbf{V}_2$. C'est un élément de *E*. (On peut aussi justifier par le fait qu'une homothétie vectorielle de **V** laisse globalement invariant tout sous-espace de **V**, c'est en particulier le cas de $\mathbf{V}_1$ et de $\mathbf{V}_2$)

Réciproquement, soit *f* un élément de *E*. Les images par *f* des deux vecteurs $\left(\vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ sont le vecteur nul puisque ces deux vecteurs appartiennent au noyau de *f* et l'image par *f* du vecteur $\vec{e_3}$ appartient à la droite vectorielle $\mathbf{V}_2$, elle est colinéaire au vecteur $\vec{e_1}$. Il existe un réel *k* tel que : $f\left(\vec{e_3}\right) = k\,\vec{e_1}$. Ce réel *k* est nécessairement non nul, sinon les images par *f* des trois vecteurs de base étant nulles, *f* serait l'application nulle. (*On peut faire le parallèle ave la question **B3***).

Si h_k désigne l'homothétie vectorielle de rapport *k*, l'application *f* coïncide avec $h_k \circ f_1$ pour les trois vecteurs de base. Ces applications $_{gj}$ sont donc identiques : $f = h_k \circ f_1$

E est l'ensemble des endomorphismes de la forme $h \circ f_1$, où *h* décrit l'ensemble des homothéties vectorielles de **V**.

Du seul fait que $f_1 \circ f_1$ est l'application nulle, *E* n'est pas stable pour la loi de composition.