AUGUSTE MIQUEL

ÉLÈVE

DE

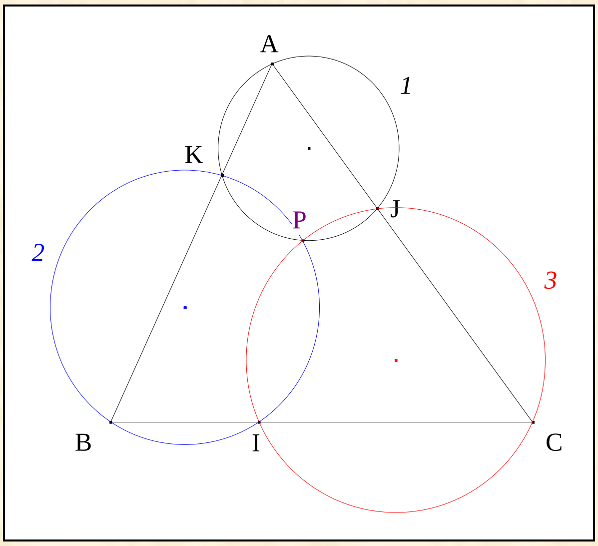
L'INSTITUTION BARBET

À

PARIS EN 1836

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente Auguste Miquel, élève de l'institution Barbet en 1836, ainsi que ses remarquables et fructueux résultats.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents Auguste Miquel, pupil of the Barbet institution in 1836, and his remarkable and fruitful results.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/10/2012 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. Auguste Miquel 2

B. L'institution Barbet 3

C. Les résultats 4

I. Le pivot
1. Réciproque **2** (pivot) et Théorème **I**
2. Réciproque **1**
3. Archive

II. Le point de Miquel ou Théorème **II**
III. La droite de Miquel
IV. Le cercle de Miquel
V. Le pentagramme de Miquel ou Théorème **III**
VI. Le théorème des six cercles

D. Récolte 23

I. L'antipoint de Steiner et le cercle de Miquel
1. Une monienne brisée
2. Concours Général de 1873 – Classe de troisième
3. Trois céviennes concourantes sur le cercle circonscrit
4. Le P-cercle de Mannheim
5. Trois céviennes concourantes sur le cercle de Miquel
6. L'antipoint de Steiner

II. Le triangle de Miquel
1. Un triangle directement semblable à OaObOc
2. Un triangle homothétique à OaObOc

III. Un quadrilatère cyclique
1. I.M.O. 1982, day **2** Problem **2**

E. Appendice 42
1. Deux triangles semblables
2. Deux triangles semblables

F. Annexe 45
1. Le cercle des milieux des moniennes
2. Un triangle de Möbius
3. Une monienne diamétralement brisée

A. AUGUSTE MIQUEL

Son nom est associé au théorème du pivot

Auguste Miquel est né à Albi (Tarn, France) en 1816.
Il obtient son baccalauréat de lettres, puis de sciences (1834-1835) à Toulouse.
Ayant pris connaissance dans les *Annales* **XVIII** de Gergonne de 1827-1828 de l'énoncé sans démonstration d'un théorème de Jakob Steiner, articulé en dix propositions[2], l'élève Auguste Miquel de l'institution Barbet à Paris commence en 1836 par en écrire quelques démonstrations dans l'éphémère journal mathématique *Le Géomètre* fondé par Antoine Philippe Guillard.
Pour les passionnés d'histoire, l'origine du théorème du *pivot* reste très obscur ; il a été démontré par Auguste Miquel en 1838 dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville et peu de géomètres de cette époque, ont vu qu'il allait devenir la pierre angulaire d'un grand nombre de théorèmes à venir.
En 1838, il publie dans le *Journal* de Liouville plusieurs articles concernant la théorie des courbes et les intersections de cercles et de sphères.
Selon Antonio Gutierrez[3], Auguste Miquel a été Régent i.e. professeur adjoint à Nantua en 1838, puis professeur de 1844 à 1846 au Collège de Castres où il publie en 1844 et 1846, un mémoire de géométrie en trois parties.
Il enseigne par la suite dans le Gard au collège de Bagnols-sur-Cèze et du Vigan.

Notons que Isaac Moisevitch Yaglom considère que

---

[2] F. G.-M., Livre II, *Exercices de Géométrie*, 6-ième Édition (1920) ; rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 301.
[3] http://agutie.homesread.com/.

la proposition concernant le théorème des Six cercles de Miquel, est assez élégante mais ne paraît pas particulièrement féconde, simple théorème comme il y en a beaucoup en géométrie. Cependant les conséquences qu'on peut tirer de cette figure peuvent, sans exagération, être qualifiées de remarquables.

Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, William Clifford donne de ce théorème, une extension remarquable dont l'intérêt réside essentiellement dans son caractère récurrent, mais sa démonstration est purement analytique. En 1916, Henri-Léon Lebesgue publie dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* un article intitulé *Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford* dans lequel il a le mérite d'introduire une notation numérique pour les droites, leurs points d'intersection et les cercles, et de montrer qu'il existe un lien entre le *Pentagramme* de Miquel et le théorème des *Six cercles* alors qu'Eugène Catalan, Auguste Miquel, Paul Terrier et William Clifford ne l'avaient pas vu.

Auguste Miquel décède en 1851.

B. L'INSTITUTION BARBET

Jean François Barbet est né le 15 juin 1799 à Pagnoz, près de Salins (Jura, France).
Fils d'un paysan-propriétaire, maire de son pays pendant trente ans, et de Jeanne Trochet, Jean-François Barbet a la possibilité de suivre des études. Vers 1820, il entre à l'École Normale Supérieure dans la section scientifique. Après la suppression de l'École par la Restauration, il suit des cours à la faculté de Médecine à Paris. A cette époque, il est mis en relation avec la famille Briot, de Saint Hyppolyte, dans la Haute vallée du Doubs, dont le père avait occupé un emploi à la cours de Murat à Naples. Celui-ci devait être parent du tanneur de même nom, dont le fils est devenu un mathématicien connu. Il s'amouracha de la fille Briot, l'épousa en 1827, abandonna ses études médicales, et racheta à Paris, la même année, l'ancienne pension Brissaud, probablement avec la dot de sa femme.

Rappelons que cette institution privée secondaire pour garçons fondée en 1803 par André Marie Ruinet, rue de la Harpe dans le 5$^{\text{ème}}$, transférée au 3, impasse des Feuillantines toujours dans le 5$^{\text{ème}}$ a été reprise en 1820 par son gendre Jean Baptiste Brissaud.

Jean-François Barbet commence par sélectionner sa clientèle dans le sens de la rentabilité et vers 1840 l'institution devient célèbre pour faire recevoir ses élèves à l'École Polytechnique, Centrale, Normale supérieure, St-Cyr, de la Marine, forestière. Les élèves suivaient les cours de Mathématiques spéciales au collège St-Louis, de préférence les cours de Delisle surnommé "le père Pancu" car il parlait de "perpenculaire" au lieu de perpendiculaire et de Vincent. Précisons que le mathématicien Eugène Catalan a donné un cours particulier à l'institution Barbet pour mieux préparer les élèves aux concours.

En 1864, Jean-François Barbet vend les bâtiments de l'institution à la ville de Paris et l'aventure de cet établissement privé prend fin.
En 1872, il reçoit la Légion d'Honneur.
Il décède ruiné le 16 mai 1880 au 17 rue des Ursulines (qui deviendra le n°5), dans sa maison qu'il avait fait bâtir.

A Pagnoz, il laissera une trace de sa bienveillance en faisant édifier un lavoir sur lequel figure un médaillon, le représentant avec son père.

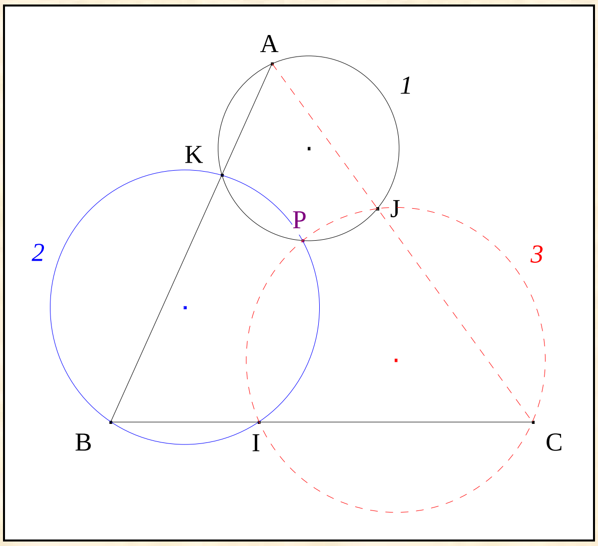
Pour terminer, notons que Jean François Barbet a eu au moins une fille, Antoinette Delphine, qui obtint en 1844 le diplôme de maîtresse de pension.

C. LES RÉSULTATS

1. Réciproque 2 et Théorème I

VISION

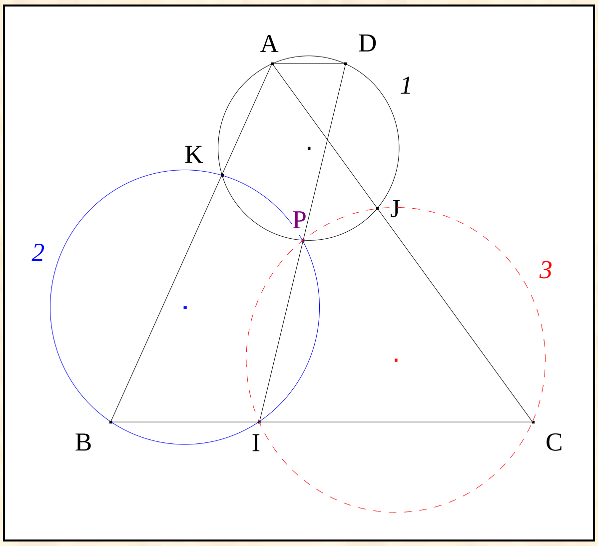
Figure :



Traits :	*1, 2, 3*	trois cercles deux à deux sécants,
	K, P	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I	l'un des deux points d'intersection de *2* et *3*,
	J	l'un des deux points d'intersection de *3* et *1*,
	A	un point de *1*,
	B	le second point d'intersection de (AK) avec *2*
et	C	le second point d'intersection de (BI) avec *3*.

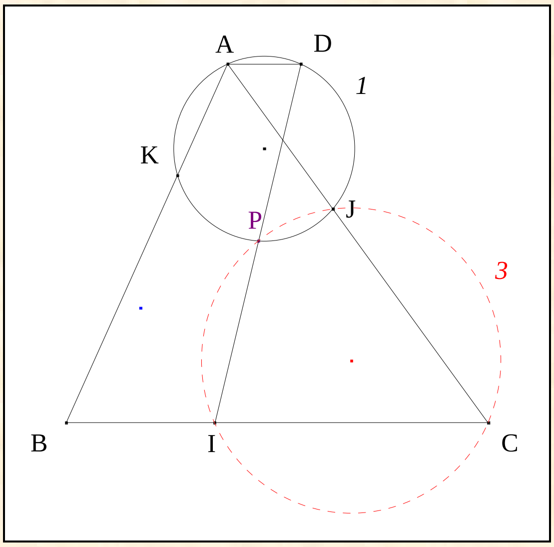
Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons D le second point d'intersection de la monienne (IP) avec *1*.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base K et P, les moniennes (AKB) et (DPI), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AD) // (BIC).



- Le cercle *1*, les points de base J et P, les moniennes naissantes (AJC) et (DPI), les parallèles (AD) et (CI), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, J, P, C et I sont cocycliques.

- **Conclusion :** *3* passe par P.

Scolies : **(1)** P est "le pivot de ABC relativement à *1*, *2*, *3*"
ou encore
"le point de Miquel de ABC relativement à *1*, *2*, *3*"

(2) IJK est "le triangle de Miquel de ABC"

(3) *1*, *2*, *3* sont "les cercles de Miquel de ABC".

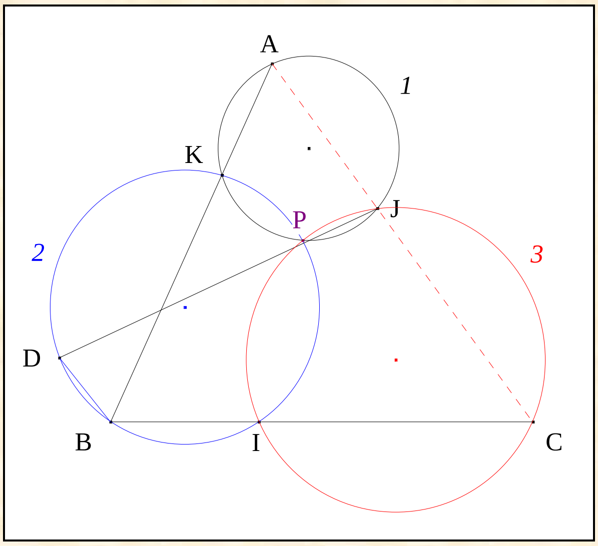
Énoncé traditionnel :

si, *les sommets I, J, K d'un triangle sont situés respectivement sur les droites latérales (BC), (CA), (AB) d'un triangle ABC*
alors, *les cercles circonscrits aux triangles ARJ, BPK et CQI, sont concourants.*

Note historique : le nom de "pivot" a été donné par Henri Georges Forder [4].

Commentaire : la condition nécessaire connu aujourd'hui sous le nom du "théorème du pivot" correspond à la "Reciproque **2**" de l'article d'Auguste Miquel [5].
Pour Auguste Miquel, ce résultat était juste un lemme pour aborder son "merveilleux pentagone".

VISUALISATION SUFFISANTE

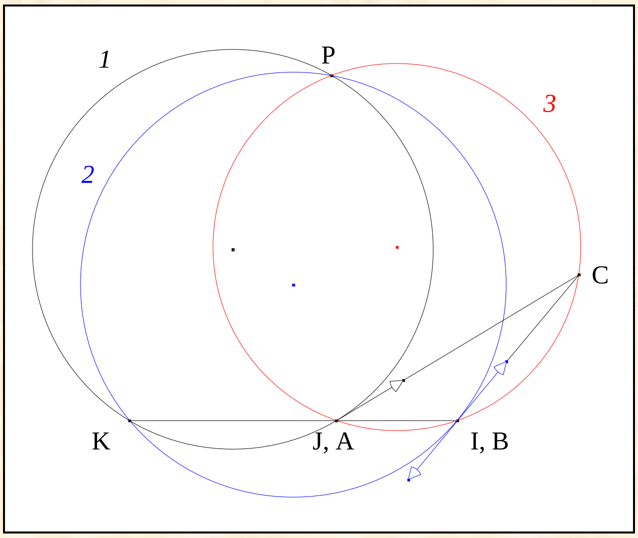


- Notons D le second point d'intersection de (JP) avec *2*.
- Les cercles *1* et *2*, les points de base K et P, les moniennes (AKB) et (JPD), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AJ) // (BD).
- Les cercles *2* et *3*, les points de base I et P, les moniennes (BIC) et (DPJ), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BD) // (CJ).
- Par transitivité de la relation //, (AJ) // (CJ) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (AJ) et (CJ) sont confondues.
- **Conclusion :** (CJA) est une monienne de *3* et *1*.

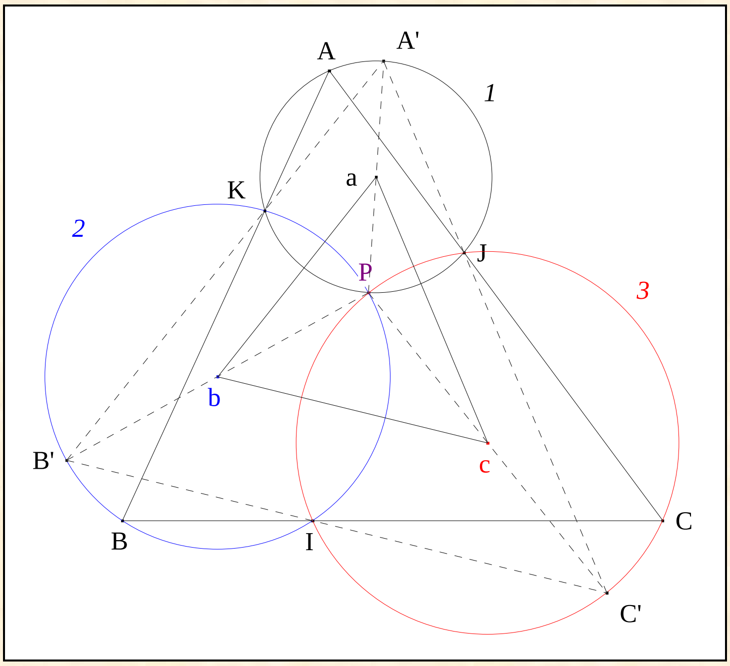
Scolies : **(1)** l'équivalence reste vraie dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.

---

[4] Forder H. G., *Geometry*, Hutchinson, Londres (1960) 17 ; *Higher Course Geometry*, Cambridge Press (1949)
[5] Miquel Aug., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (Oct. 1838) 485-487.

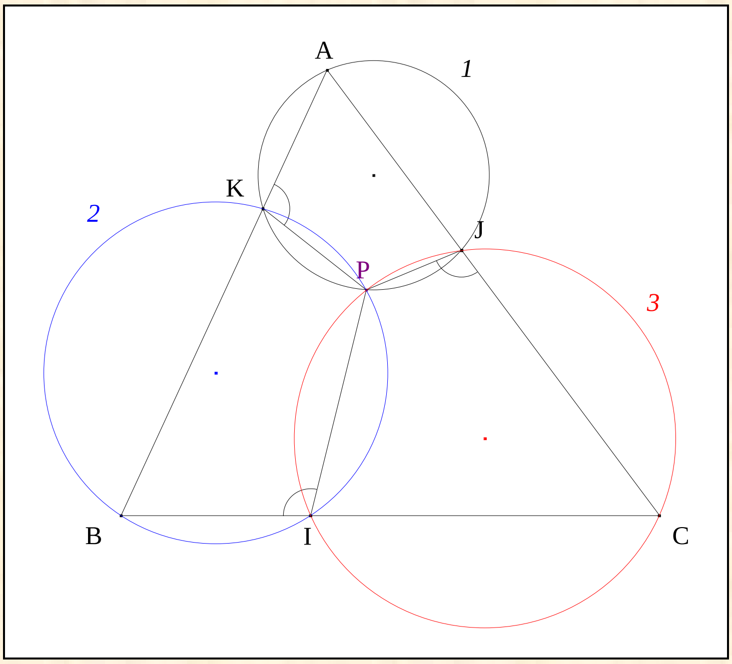


(2) Trois triangles semblables



les triangles ABC, A'B'C', abc sont semblables

(3) Trois isoclines ou "l'angle de Miquel de ABC"



<PKA = <PIB = <PJC

(4) Une équivalence angulaire

3 passe par P *si, et seulement si,* <JAK + <KBI + <ICJ = 0 (mod 180).

Commentaire : la condition suffisante connu aujourd'hui
sous le nom du "théorème des trois cercles concourants"
correspond au "Théorème **I**" de l'article d'Auguste Miquel [6].

Note historique : peu de géomètres contemporains d'Auguste Miquel, n'avaient pressenti que ce résultat allait devenir la source d'un grand nombre de théorèmes.

Archive :

MIQUEL, A.
Théorèmes de Géométrie.
Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 485-487.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1838_1_3_A36_0>

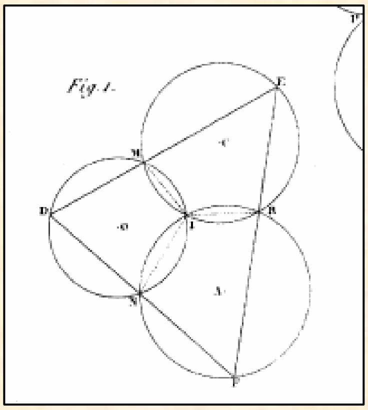
[6] Miquel Aug., Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. **1**, **3** (Oct. 1838) 485-487.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR A. MIQUEL.

THÉORÈME I. Lorsque trois circonférences de cercle A, O, C (Pl. II fig. 1) se coupent en un même point I; si l'on joint un point F d l'une d'elles A, aux points N et R où cette même circonférence A rencontre de nouveau les deux autres O et C; les points D et E où le droites FN et FR couperont de nouveau les circonférences O et C seront en ligne droite avec la seconde intersection M de ces deux circonférences O et C.

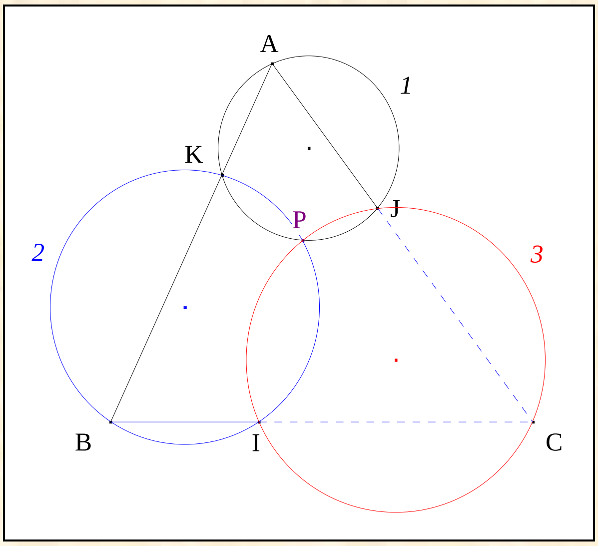
Réciproque 2. Trois points M, N, R étant pris respectivement su chacun des côtés d'un triangle DEF; si l'on fait passer une circonférence de cercle par chaque sommet et par les deux points qui s trouvent sur les deux côtés qui aboutissent à ce sommet; les trois circonférences ainsi obtenues se couperont en un même point I.



2. Réciproque 1

VISION

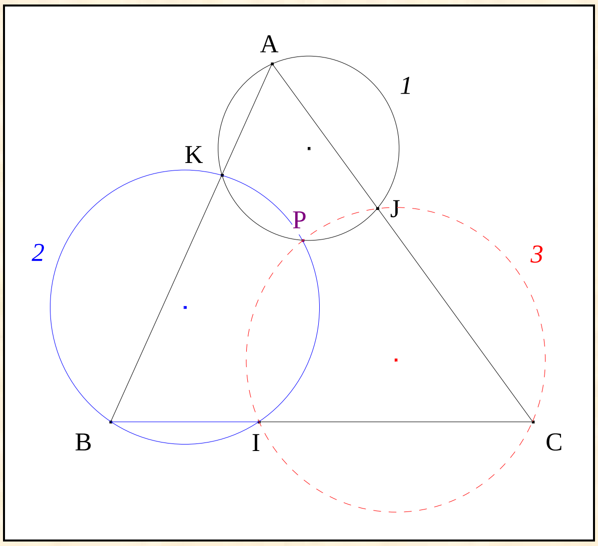
Figure :



Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles concourants,
P ce point de concours,
I, J, K les seconds points d'intersection resp. de *2* et *3*, *3* et *1*, *1* et *2*,
A un point de *1*,
B le second point d'intersection de (AK) avec *2*
et C le point d'intersection de (BI) et (AJ).

Donné : C est sur *3*.

VISUALISATION



- D'après **C. I. 1.** Réciproque **2**, *3* passe par P.
- **Conclusion :** *3* passe par C.

Archive :

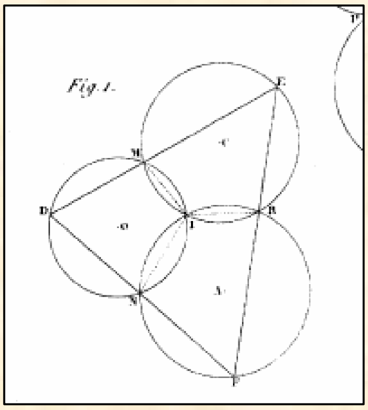
MIQUEL, A.
Théorèmes de Géométrie.
Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 3 (1838), p. 485-487.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1838_1_3_A36_0>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR A. MIQUEL.

Réciproque I. Lorsque trois circonférences de cercle se coupent en un même point I, si par la seconde intersection M de deux de ces circonférences, on mène une droite DME jusqu'à la rencontre de chacune

de ces circonférences O et C aux points D et E; et si l'on joint respectivement chacun de ces points D et E aux points N et R où chacun des deux circonférences O et C coupe de nouveau la troisième circonférence A; les droites DN et ER, ainsi menées, se rencontreront en un point F de cette troisième circonférence A.



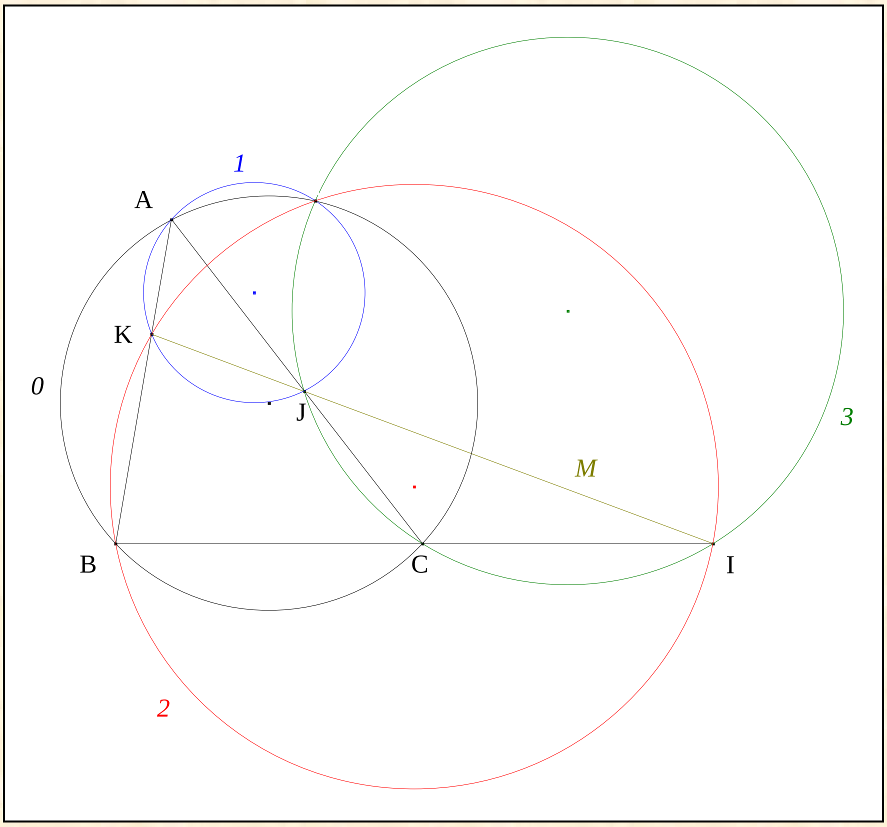
II. LE POINT DE MIQUEL - WALLACE

OU

THÉORÈME II

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne de ABC,
	I, J, K	les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	0	le cercle circonscrit à ABC,
et	*1, 2, 3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.

Donné : *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.[7]

VISUALISATION

- D'après **C. I. 1.** Le théorème du pivot
  appliqué au triangle ABC relativement à I, J et K, *1*, *2* et *3* sont concourants.

- D'après **C. I. 1.** Le théorème du pivot
  appliqué au triangle AKJ relativement à B, I et C, *3*, *2* et *0* sont concourants.

[7] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. **1**, part **I** (1804) 170.

- **Conclusion :** *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

- Notons M ce point de concours.

Scolies : **(1)** ABC et *M* détermine un "delta"

(2) M est "le point de Miquel du delta déterminé ABC et *M* "

Énoncé traditionnel :

si, *quatre droites se coupant deux à deux forment quatre triangles*
alors, *les cercles circonscrits à chacun de ces triangles sont concourants.*

Note historique : le nom attribué au point M a été donné en 1878 par le géomètre Seligmann Kantor de Vienne (Autriche).
Précisons que ce résultat attribué à Auguste Miquel [8], puis à Jacob Steiner [9], est de William Wallace [10].
Notons que ce résultat correspond à la question **1°** à démontrer de Jacob Steiner sur le quadrilatère complet ; pour cette raison, ce résultat est aussi connu en anglais sous le nom de "The Steiner-Miquel theorem" en anglais.

Contexte : cette situation s'inclut dans la chaîne de Clifford.

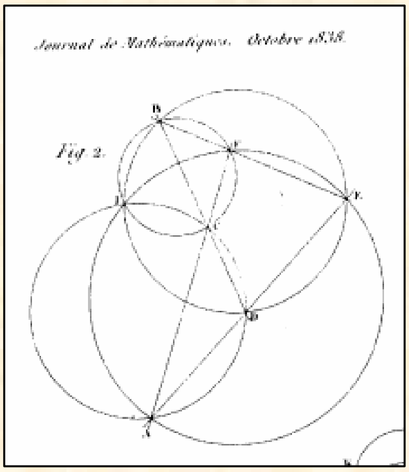
Archive :

MIQUEL, A.
Théorèmes de Géométrie.
Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 485-487.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1838_1_3_A36_0>

THÉORÈME II. Si l'on circonscrit des circonférences de cercle au quatre triangles ADC, CBF, AEF, BDE (fig. 2) que forment les côt d'un quadrilatère complet ADEFBC, les quatre circonférences ain obtenues se couperont en un même point I.

---

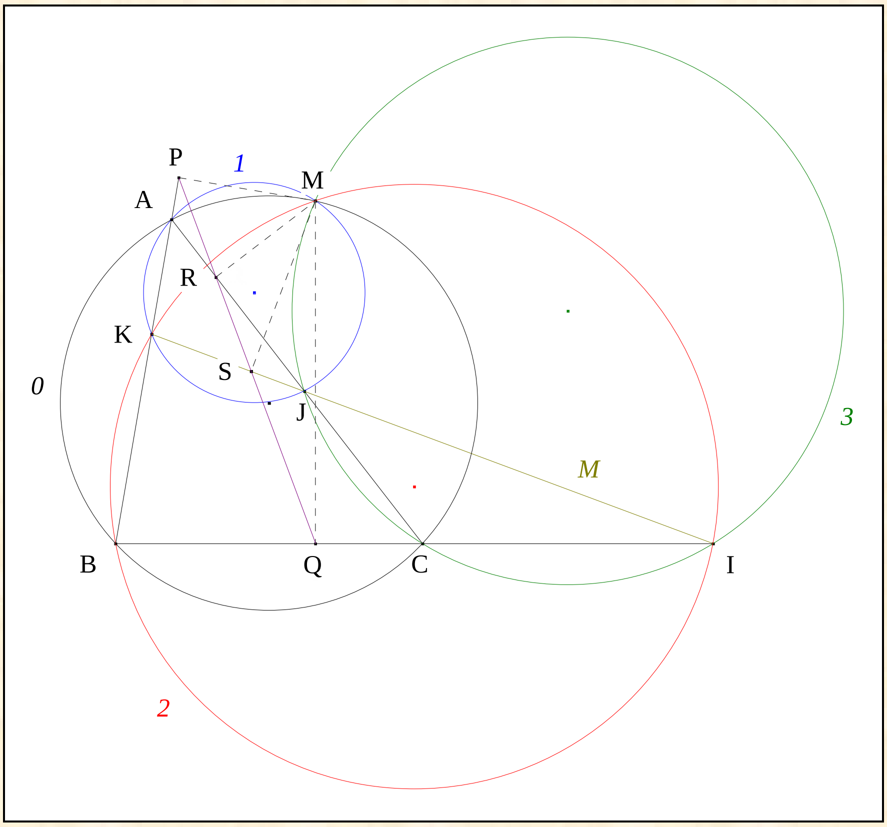
8 Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de Mathématiques* de Liouville, vol. **3** (1838) 485-487.
9 Steiner J., *Annales* de Gergonne **18** (1827-28) 302-303, Questions 1°, 2°, 3°, 4°.
10 Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. **1**, part **I** (1804) 170.


Journal de Mathématiques. Octobre 1838.
Fig. 2.
B
F
E
G
A

III. LA DROITE DE MIQUEL

VISION

Figure :

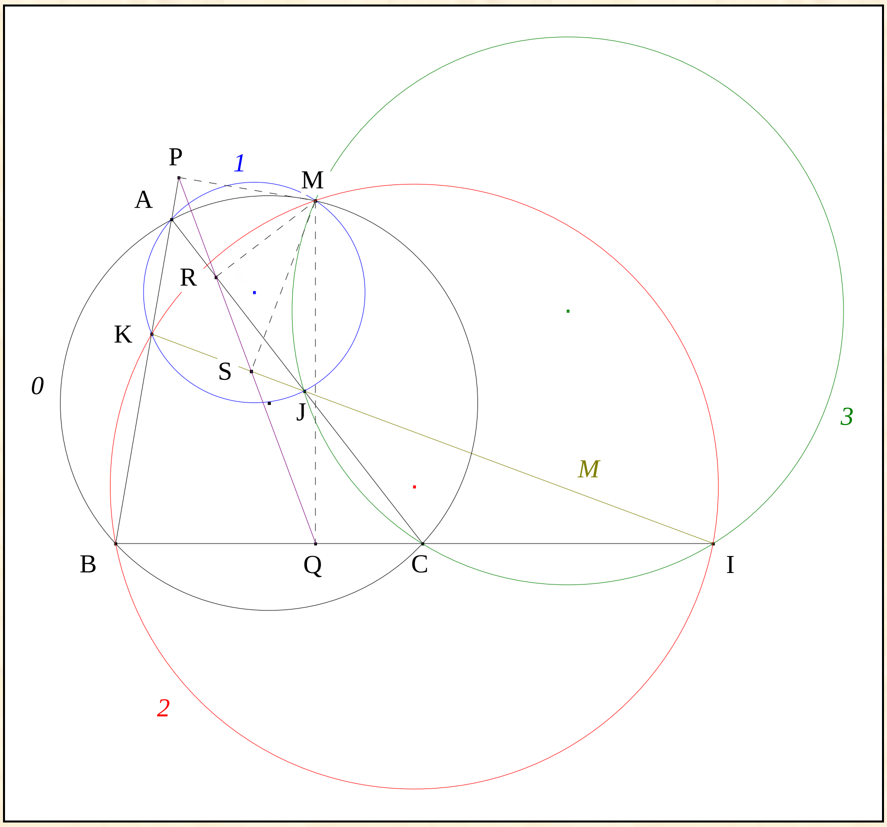


Traits : ABC un triangle,
M une ménélienne de ABC,
I, J, K les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
0 le cercle circonscrit à ABC,
1, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI.
M le point de Miquel
et P, Q, R, S les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur (BC), (CA), (AB) et *M*.

Donné : P, Q, R et S sont alignés. [11]

VISUALISATION

[11] Miquel A., *Le Géomètre* (1836).



- **Scolie :** M est le point de concours de *1*, *2*, *3* et *0*.

- D'après "La droite de Simson-Wallace ",
  (1) (PQR) est la M-droite de Simson relativement à ABC.

  (2) (QRS) est la M-droite de Simson relativement à AKJ.

- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, (PQR) = (QRS).

- **Conclusion :** P, Q, R et S sont alignés.

Scolies : **(1)** (PQRS) est "la droite de Miquel du delta déterminé par ABC et *M* ".

(2) Jean-Pierre Ehrmann, la dénomme "droite pédale"
et Isaac Moisevitch Yaglom "droite de Wallis [12] d'un delta" du fait que les travaux de celui-ci était très proche du résultat.

Énoncé traditionnel :

les pieds des perpendiculaires abaissés du point de Miquel
sur les droites latérales du triangle et sur la ménélienne,
sont alignés.

Note historique : suite aux 10 questions de Jacob Steiner [13] posées en 1827-28 dans les *Annales* de Gergonne, Auguste Miquel a répondu en 1836 aux quatre premières dans la revue *Le Géomètre*.

---

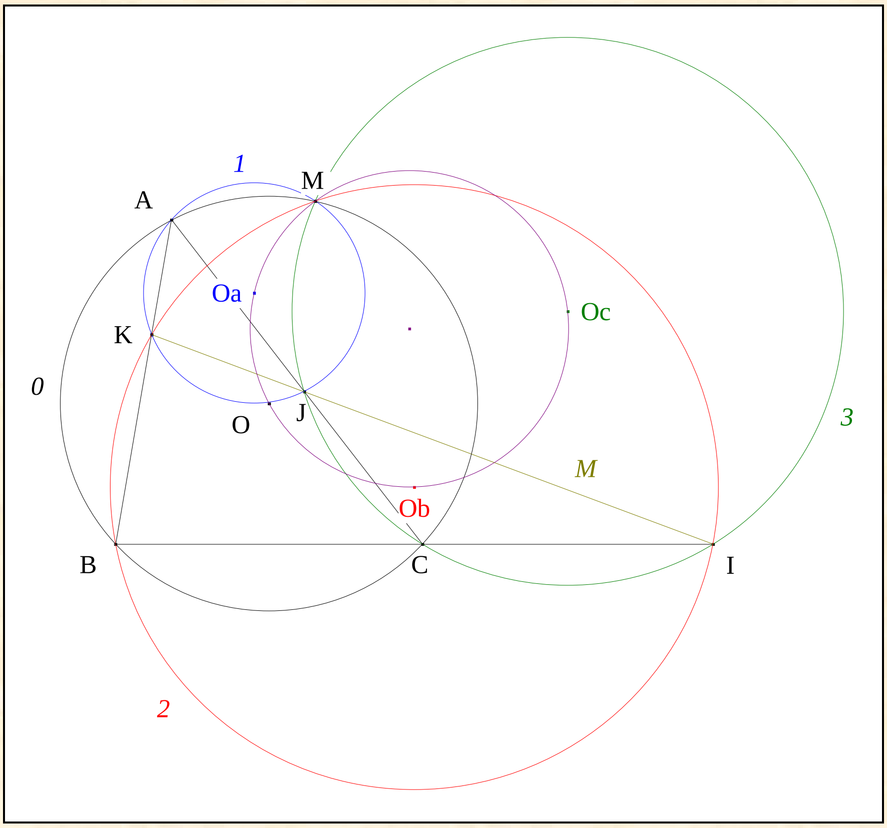
12 Wallis John (1616-1703) est l'un des prédécesseurs d'Isaac Newton.
13 Steiner J., Questions 1°, 2°, 3°, 4°, *Annales* **18** (1827-28) 302-303

Notons que ce résultat correspond à la question **3°** à démontrer.
Certains auteurs ont procédé de même et le Leybourn's *Mathematical Repository* [14] comme les *Nouvelles Annales* ont relaté leurs résultats.

IV. LE CERCLE DE MIQUEL

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne de ABC,
	I, J, K	les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	0, 1, 2, 3	les cercles circonscrits resp. aux triangles ABC, AKJ, BIK, CJI,
	O, Oa, Ob, Oc	les centres resp. de *0, 1, 2, 3*,
et	M	le point de Miquel du delta déterminé par ABC et *M*.

Donné : O**,** Oa, Ob, Oc et M sont cocycliques. [15]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [16]

---

[14] Davies T. S., Réponse à la question **555**, Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. **VI** (1835).
[15] Miquel A., *Le Géomètre* (1836).
[16] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G. vol. **2**, p. 10-11 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Scolie : le cercle passant par O**,** Oa, Ob, Oc et M est "le cercle de Miquel de ABC et *M* ".
Ce cercle est aussi connu sous le nom de

* cercle de Steiner
* "cercle des centres" d'après William Gallatly [17]
* "cercle des huit points" après que J. G. Hermes ait découvert trois autres points sur ce cercle
* "cercle circumcentrique" d'après John Wentworth Clawson [18].
* Cercle des centres des cercles circonscrits aux triangles d'un delta

Énoncé traditionnel :

les centres des cercles circonscrits
aux
quatre triangles formés par quatre droites qui se coupent deux à deux,
appartiennent à un même cercle.

Note historique : suite aux 10 questions de Jacob Steiner [19] posées en 1827-28, Auguste Miquel a répondu en 1836 aux quatre premières dans la revue *Le Géomètre*.
Certains auteurs ont procédé de même et le Leybourn's *Mathematical Repository* [20] comme les *Nouvelles Annales* ont relaté leurs résultats.
Notons que ce résultat correspond à la question **2°** à démontrer.

Pour plus de précision, Thomas Stephen Davies [21] avait déjà relaté et prouvé ce résultat en 1835. Probablement avait-il trouvé ce résultat indépendamment de Jacob Steiner car sa solution de la Question **524** dans le même volume du *Repository*, nous permet de le penser.
L'historien John Sturgeon Mackay [22] arrive à la même conclusion en s'appuyant sur une question posée ayant trait au quadrilatère complet, posée par T. S. Davies en 1821 dans le *Leeds Correspondent*.

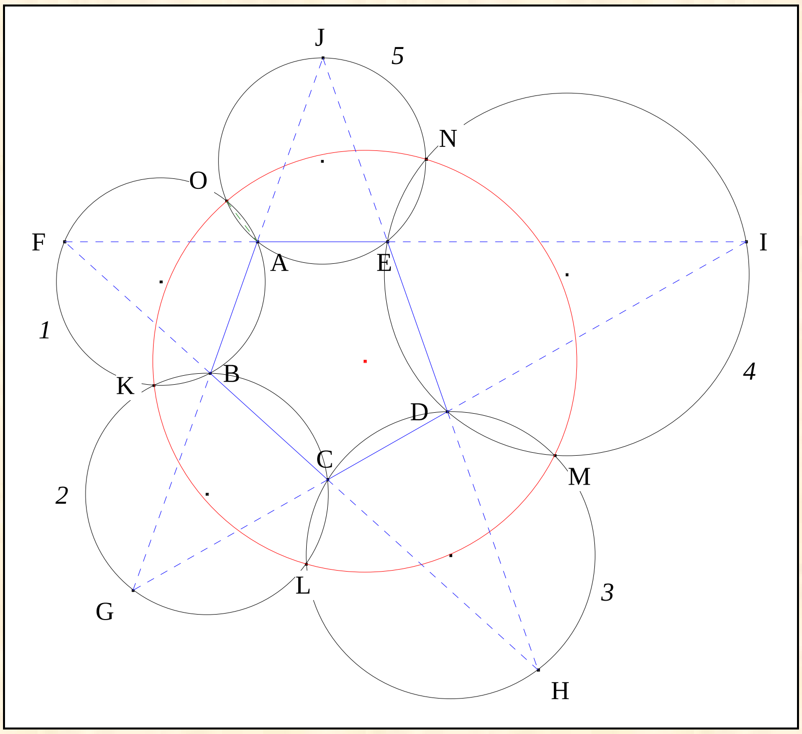
---

[17] Gallatly W., Modern Geometry of the Triangle, London, N. D., (1922) 5.
[18] Clawson J. W., The Complete Quadrilateral, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., vol. **20**, N°**4** (Jul.,1919) 232-261.
[19] Steiner J., Questions 1°, 2°, 3°, 4°, *Annales* **18** (1827-28) 302-303.
[20] Davies T. S. (1794 ?-1851), Réponse à la question 555, Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. **VI** (1835).
[21] Davies T. S., Question **555**, *Leybourn's Mathematical Repository*, vol. **6** (1835).
[22] Mackay J. S., *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. **9**, (1890) 83-91.

V. LE PENTAGRAMME DE MIQUEL

VISION

Figure :



Traits : ABCDE un pentagone convexe,
F, G, H, I, J le point d'intersection resp. de (AE) et (BC), (BA) et (CD), (CB) et (DE), (DC) et (EA), (ED) et (AB),
1, *2*, *3*, *4*, *5* les cercles circonscrits resp. des triangles FBA, GCB, HDC, IED, JAE
et K, L, M, N, O les seconds points d'intersection resp. de *1* et *2* , *2* et *3*, *3* et *4* , *4* et *5* , *5* et *1* .

Donné : K, L, M, N et O sont cocycliques. [23]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [24]

Énoncé traditionnel :

si, *l'on circonscrit les triangles formés par chacun des côtés d'un pentagone convexe et les prolongements des côtés adjacents*
alors, *les cinq points d'intersection de ces cercles sont sur une même cercle.*

Note historique : Miquel a découvert en 1938 ce résultat à partir d'une idée d'Eugène Catalan.
La présente visualisation s'inspire de celle de Léon Lebesgue [25].

---

[23] Miquel A., *Journal de Liouville*, 1e série, vol. **III** (1838) 485 ; http://portail.mathdoc.fr/JMPA/
Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, 1e série, vol. **X** (1844) 347 ; http://portail.mathdoc.fr/JMPA/

[24] Ayme J.-L., Les pentagrammes de Miquel et Morley, G.G.G. vol. **4**, p. 1-3 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

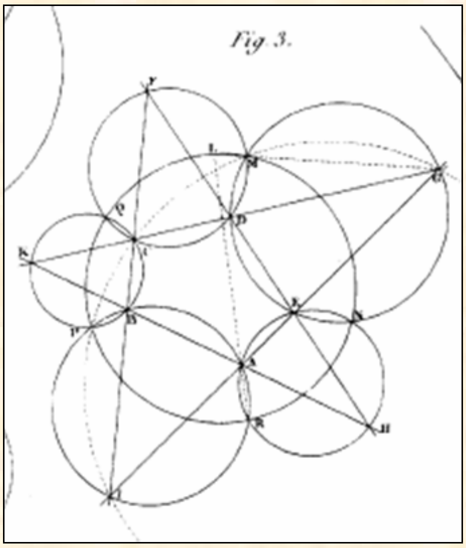
[25] Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916) ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

Pour terminer, rappelons cette anecdote : lors d'une rencontre du président chinois Jiang Zemin avec des étudiants de Macau en 2001, celui-ci leur a posé ce problème [26].

Commentaire : les centres de *1*, *2*, *3*, *4* et *5* ne sont pas nécessairement sur *8*.

Archive :

Théorème III. Soit un pentagone quelconque ABCDE (fig. 5), dont on prolonge les côtés jusqu'à leur mutuelle intersection aux points I, K, F, G, H. Si l'on circonscrit des circonférences de cercle aux cinq triangles IAB, KBC. . . formés par un côté et par les prolongements des deux côtés qui lui sont adjacents, je dis que les cinq nouveaux points P, Q, M, N, R résultant de l'intersection de deux circonférences consécutives, se trouvent sur une même circonférence de cercle.

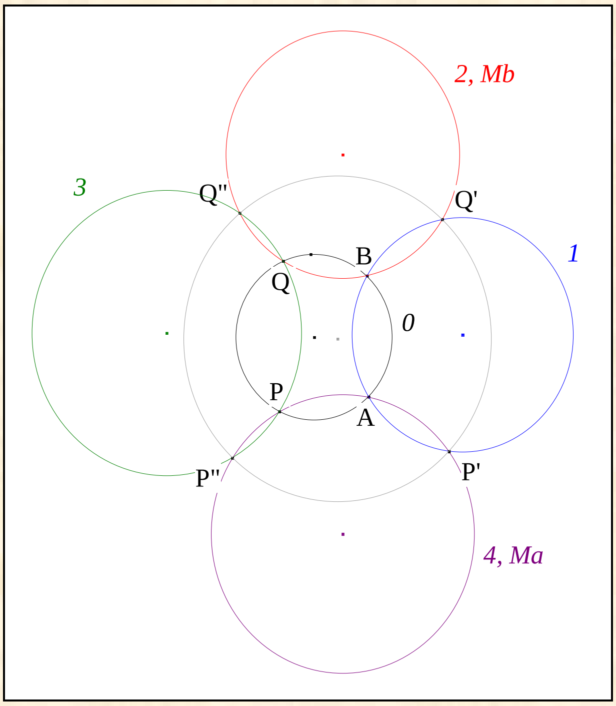


VI. LE THÉORÈME DES SIX CERCLES

VISION

Figure :

[26] Revue chinoise de Hong Kong, *Mathematical Excalibur* vol. **6**, **1** (2001) 1-2 ; http://www.math.ust.hk/excalibur/



Traits : *0*, *1* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *0* et *1*,
2 un cercle passant par B,
Q, Q' les seconds points d'intersection de *2* resp. avec *0* et *1*,
4 un cercle passant par A,
P, P' les seconds points d'intersection de *4* resp. avec *0* et *1*,
3 un cercle passant par P et Q,
et P'', Q'' les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *4* et *2*.

Donné : P', Q', P'' et Q'' sont cocycliques. [27]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [28]

Énoncé traditionnel : les cercles qui ont pour cordes les côtés d'un quadrilatère cyclique se recoupent en quatre points cocycliques.

Archive :

[27] Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, **1**e série, vol. I**X** (1844) 20-27

[28] Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. vol. **2**, p. 8-13 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

8. *Lorsque quatre circonférences de cercle se coupent consécutivement deux à deux sur une même circonférence de cercle, leurs quatre autres points d'intersection se trouvent aussi sur une même circonférence de cercle.*

Soient les quatre circonférences AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'A'A, *fig.* 2, qui se coupent sur une même circonférence ABCD, je dis que les quatre points A'B'C'D' sont aussi sur une même circonférence de cercle. En effet, puisque dans tout quadrilatère inscrit au cercle, la somme de deux angles opposés est égale à deux angles droits, nous avons

$$\text{angle } A'AB = 2d - A'B'B,$$
$$\text{angle } C'CB = 2d - C'B'B.$$

Ajoutant membre à membre, on a

$$A'AB + C'CB = A'B'C';$$

24 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

on obtiendrait de même

$$A'AD + C'CD = A'D'C'.$$

Ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, il vient

$$BAD + DCB = A'B'C' + A'D'C'.$$

Or puisque les quatre points A, B, C, D sont sur une même circonférence de cercle, on a

$$BAD + DCB = 2d;$$

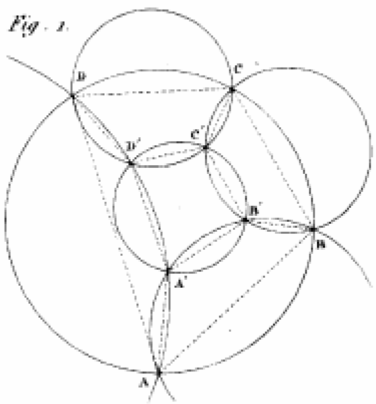
donc on aura aussi

$$A'B'C' + A'D'C' = 2d.$$

Ce qui nous apprend que les quatre points A'B'C'D' sont situés sur une même circonférence de cercle.

Journal de Mathématiques. Novembre. 1838.

Fig. 1.



D. RÉCOLTE

I. L'ANTIPOINT DE STEINER

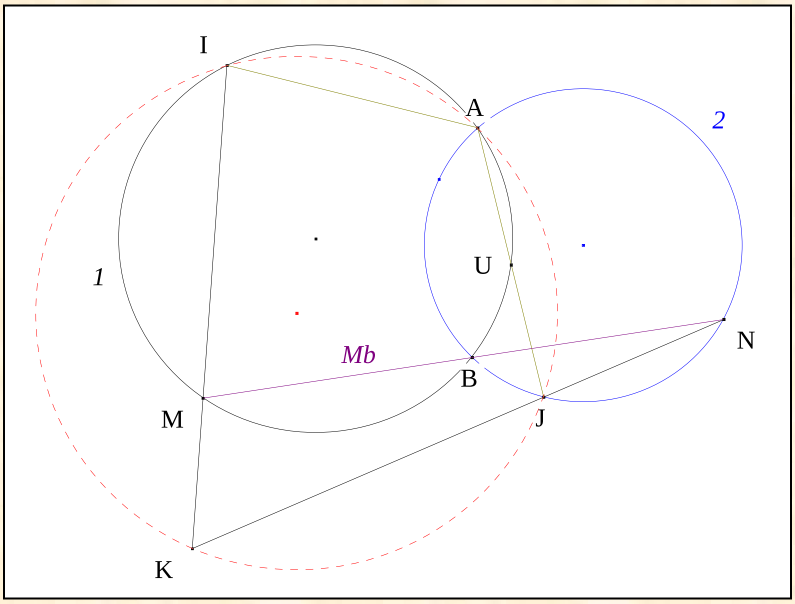
ET

LE CERCLE DE MIQUEL

1. Une monienne brisée

VISION

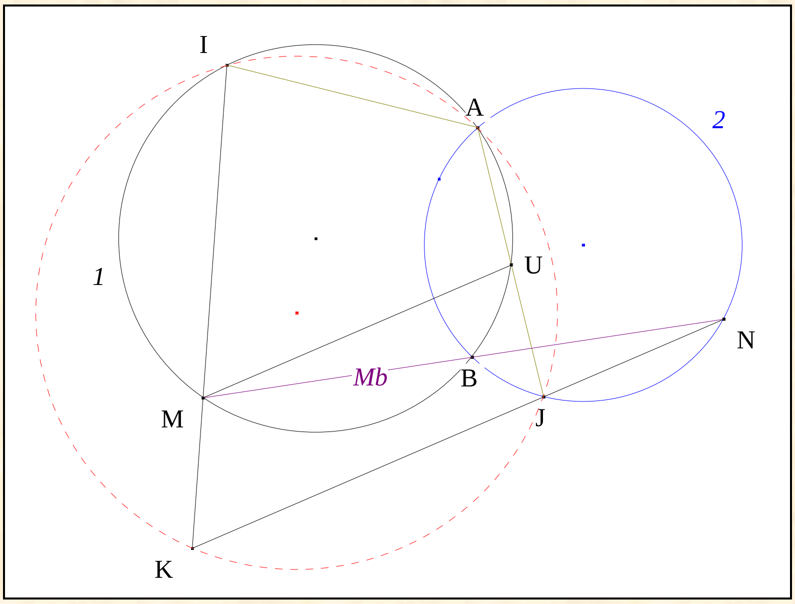
Figure :



Traits : *1, 2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
I, J deux points resp. de *1, 2* tels que (IAJ) soit une monienne brisée en A,
Mb une monienne passant par B,
M, N les points d'intersection de *D* resp. avec *1, 2*
et K le point d'intersection de (IM) et (JN)

Donné : I, A, J et K sont cocycliques.

VISUALISATION



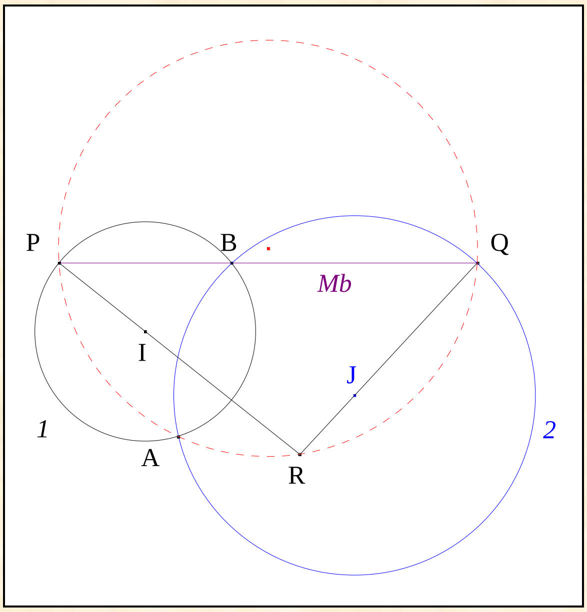
- Les cercles *1* et *2*, les points de base A et B, les moniennes (UAJ) et (MBN), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (UM) // (KJN).

- **Conclusion :** le cercle *1*, les points de base I et A, les moniennes naissantes (MIK) et (UAJ), les parallèles (MU) et (KJ), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, I, A, J et K sont cocycliques.

2. Concours Général de 1873 – Classe de troisième

VISION

Figure :

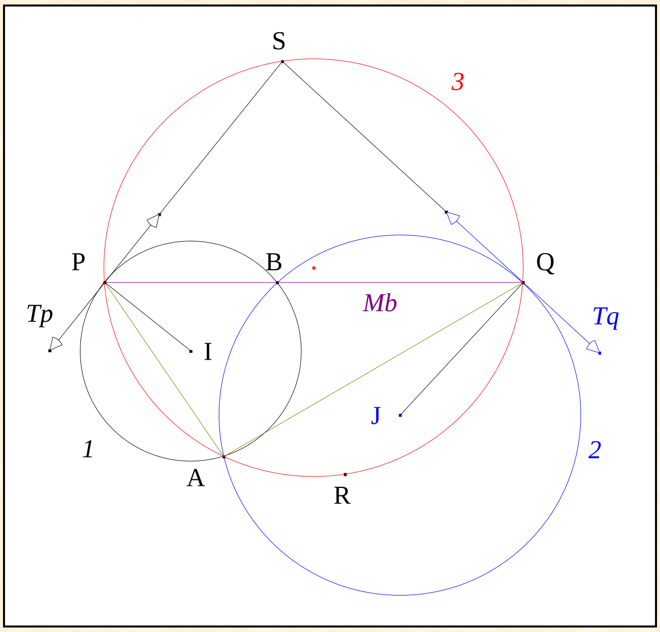


Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
I, J les centres resp. de *1*, *2*,

	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	Mb	une monienne passant par B,
	P, Q	les seconds points d'intersection de *Mb* resp. avec *1*, *2*
et	R	le point d'intersection des droites diamétrales (PI) et (QJ).

Donné : R, P, Q et A sont cocycliques.

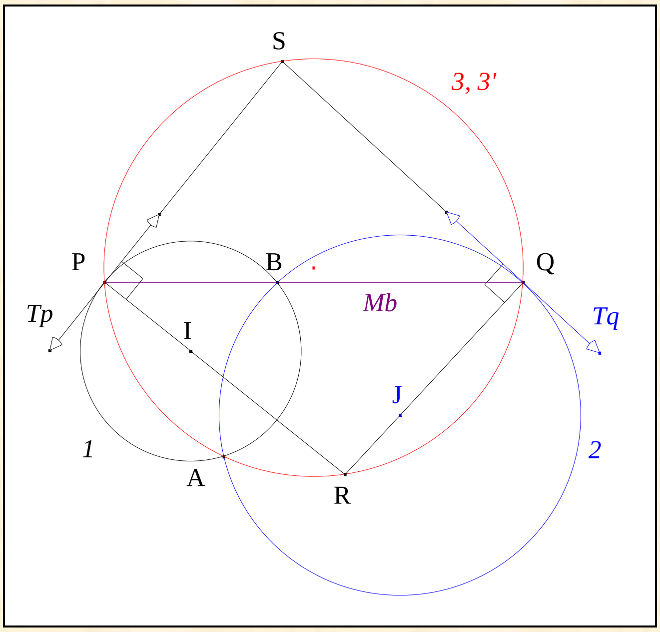
VISUALISATION



- Notons *Tp*, *Tq* les tangentes à *1*, *2* resp. en P, Q
  et S le point d'intersection de *Tp* et *Tq*.

- D'après **D. I. 1.** Une monienne brisée, P, A, Q et S sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.



- Le quadrilatère PRQS ayant deux angles opposés supplémentaires, est cyclique ;

en conséquence, P, R, Q et S sont cocycliques.

- Notons *3'* ce cercle.

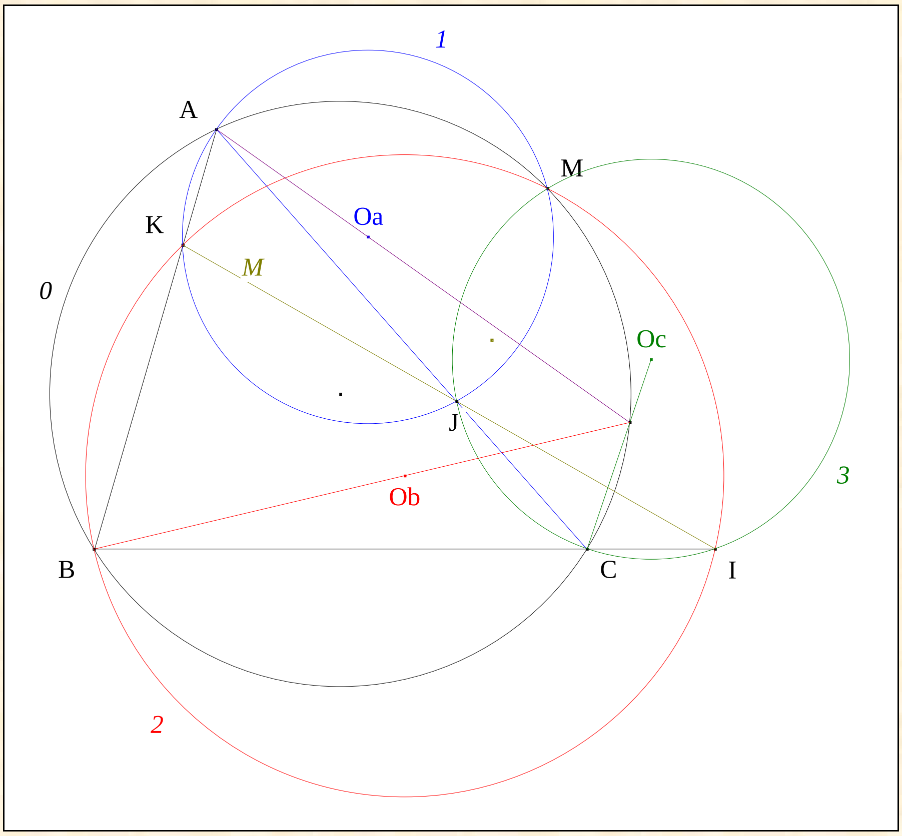
- **Scolies :** **(1)** il n'existe qu'un seul cercle passant par trois points
  (2) *3* et *3'* sont confondus.

- **Conclusion :** R, P, Q et A sont cocycliques.

3. Trois céviennes concourantes sur le cercle circonscrit

VISION

Figure :



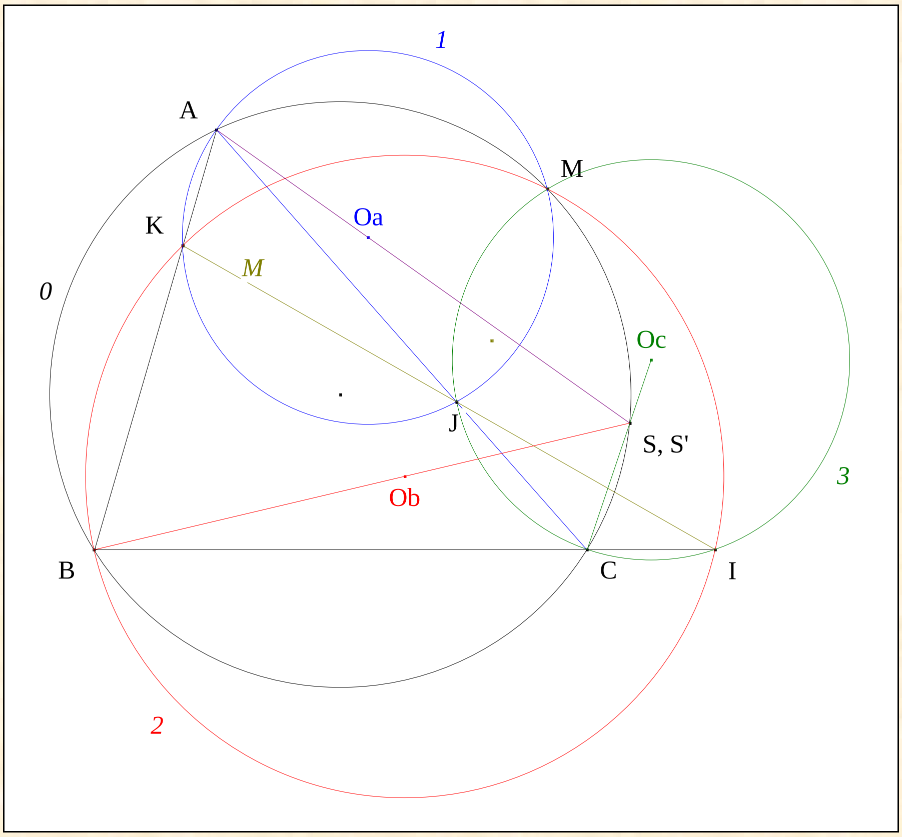
Traits : ABC un triangle,
M une ménélienne de ABC,
I, J, K les points d'intersection de *M* resp. (BC), (CA), (AB),
1, *2*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI,
Oa, Ob, Oc les centres resp. de *1*, *2*, *3*,
et M le point de Miquel du delta déterminé par ABC et *M*.

Donné : (AOa), (BOb) et (COc) concourent sur *0*. [29]

---

[29] Clawson J. W., The Complete Quadrilateral, *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., vol. **20**, N°**4** (Jul. 1919) 232-261 ; résultat (5) p. 235.

VISUALISATION



- Notons S le point d'intersection de (AOa) et (BOb),
  et S' le point d'intersection de (BOb) et (COc).

- D'après **D. I. 2.** Concours Général de 1873

  appliqué aux cercles * *1* et *2*, S est sur *0*

  * *2* et *3*, S' est sur *0* ;

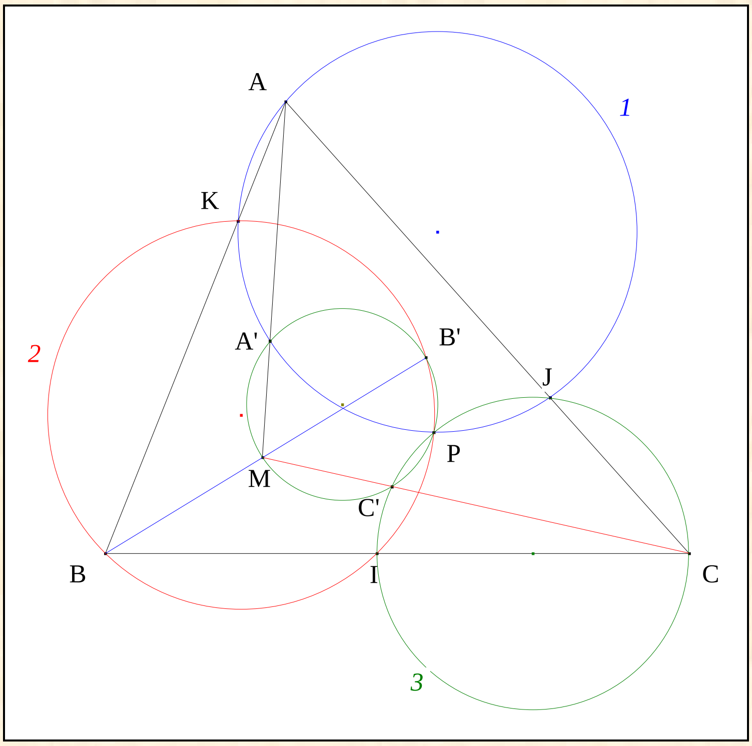
  en conséquence, S' et S sont confondus.

- **Conclusion :** (AOa), (BOb) et (COc) concourent sur *0*.

4. Le P-cercle de Mannheim

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I, J, K trois points resp. de (BC, (CA), (AB),
1, *2*, *3* les cercles circonscrits aux triangles AKJ, BIK, CJI,
P le pivot de ABC relativement à *1*, *2*, *3*,
M un point,
et A', B', C' les seconds points d'intersection de (MA), (MB), MC) resp. avec *1*, *2*, *3*.

Donné : A', B', C', M et P sont cocycliques.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [30]

Scolie : le cercle obtenu est "le M-cercle de Mannheim de ABC relativement à I, J, K".

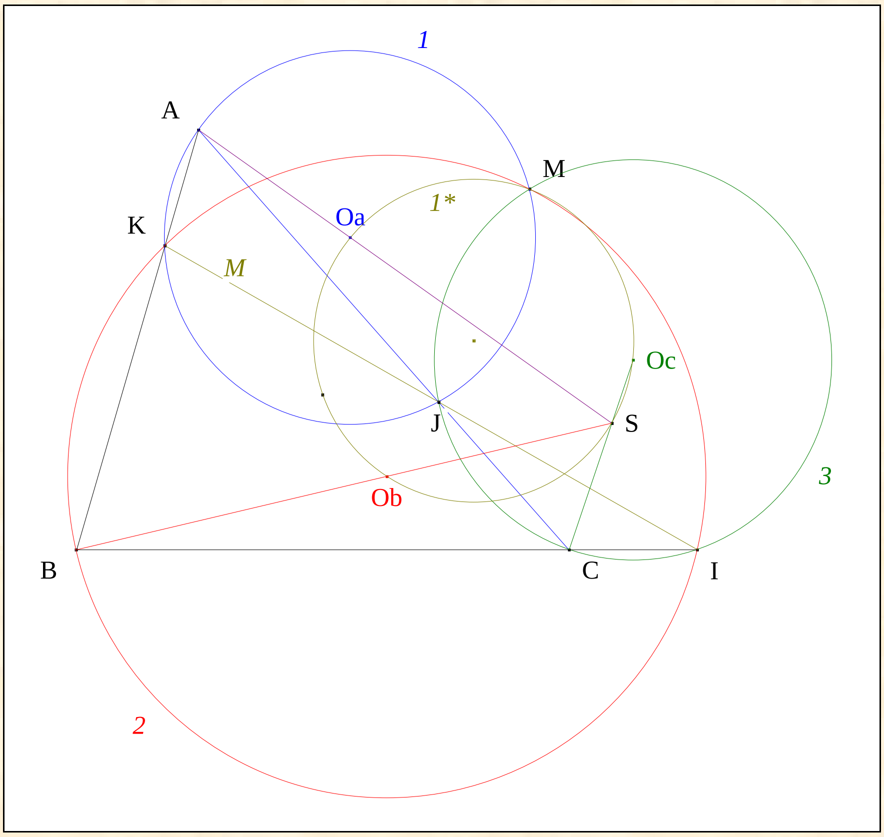
Note historique : Gaston Darboux a été parmi les "solver" de ce résultat avec W. J. Greenstreet en proposant une solution angulaire.
Igor Sharygin a choisi cette figure pour la jaquette de son livre *Problemas de geometria* [31].

5. Trois céviennes concourantes sur le cercle de Miquel

VISION

Figure :

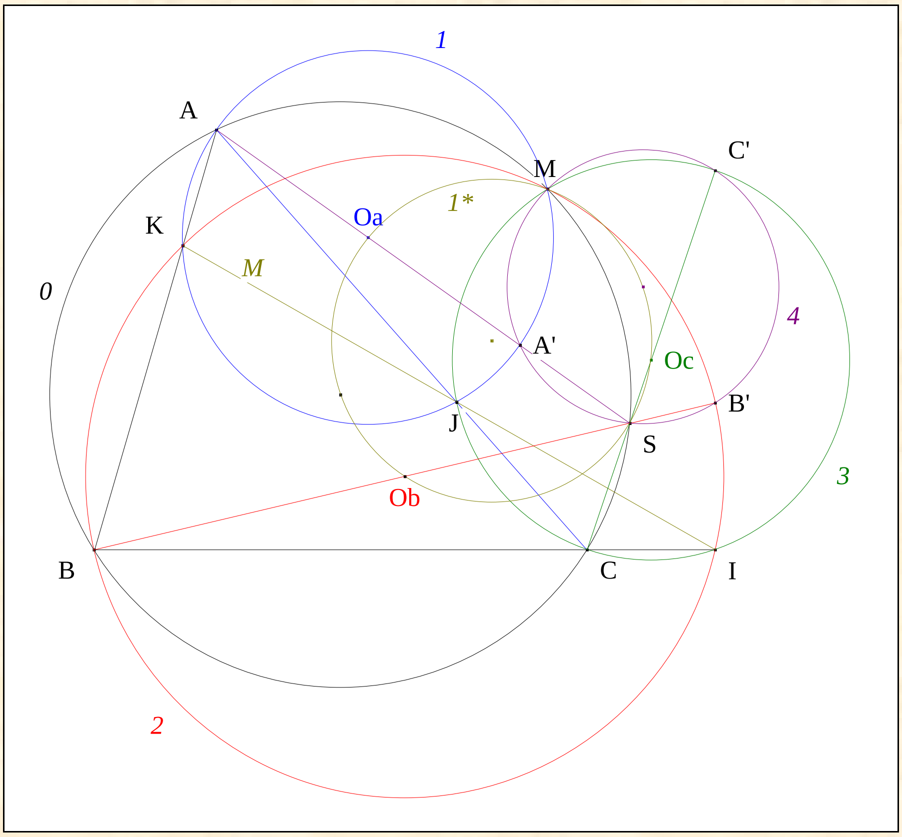
[30] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim…, G.G.G. vol. **2**, p. 6-9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[31] Sharygin I. a choisi cette figure pour la jaquette de son livre *Problemas de geometria*, Editions Mir., 1986, Moscou.



Traits :	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne de ABC,
	I, J, K	les points d'intersection de *M* resp. (BC), (CA), (AB),
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI,
	Oa, Ob, Oc	les centres resp. de *1*, *2*, *3*,
	M	le point de Miquel du delta déterminé par ABC et *M*,
	S	le point de concours de (AOa), (BOb), (COc)
et	*1**	le cercle de Miquel du delta.

Donné : S est sur *1**.

VISUALISATION



- Notons A', B', C' les seconds points d'intersection de (SAOa), (BOb), (COc) resp. avec *1*, *2*, *3*.

- D'après **D. I. 4.** Le cercle de Mannheim, A', B', C', M et S sont cocycliques.

- Notons *4* ce S-cercle de Mannheim
  et *0* le cercle circonscrit à ABC.

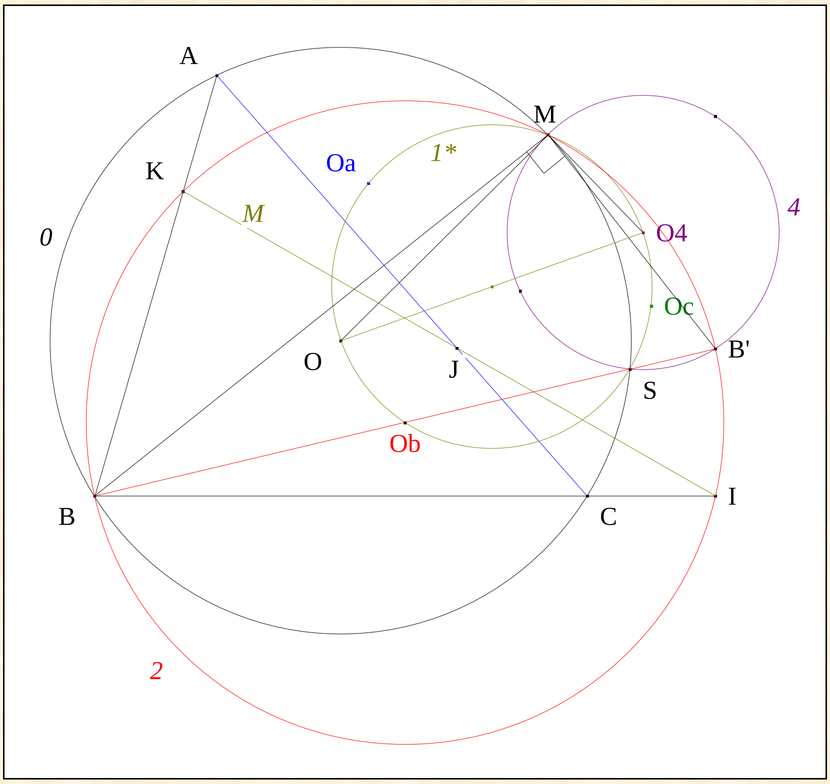
- **Scolie :** Oa, Ob, Oc sont resp. les milieux de [AA'], [BB'], [CC'].

- D'après "Le cercle des milieux" (Cf. Annexe **1**), Oa, Ob, Oc, M et S sont cocycliques i.e. sur *1**.

- **Conclusion :** S est sur *1**.

Scolies : **(1)** S est le second point d'intersection de *0* et *1**

(2) le centre de *4*



- Notons O, O4 les centres resp. de *0*, *4*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (MB) ⊥ (MB').

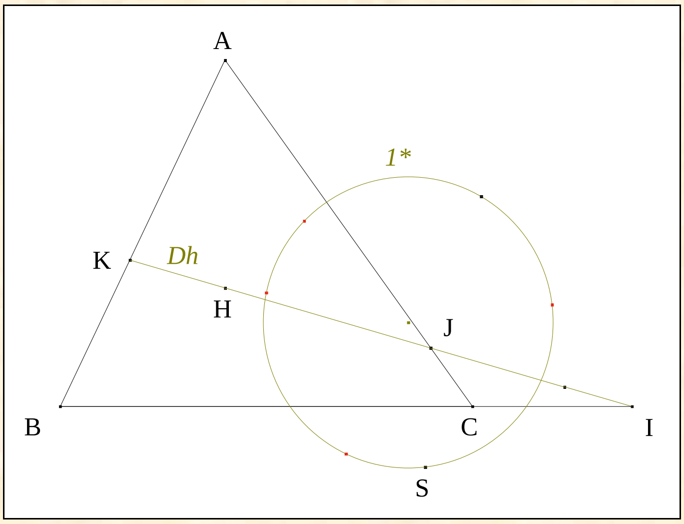
- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **2**) appliqué à *0* et *4*, (MO) ⊥ (MO4)

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", O4 est sur *1**.

6. L'antipoint de Steiner

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
Dh une droite passant par H,
I, J, K les points d'intersection de *Dh* resp. (BC), (CA), (AB),
*1** le cercle de Miquel de ABC relativement à *Dh*
et S l'antipoint de Steiner de ABC relativement à *Dh*.

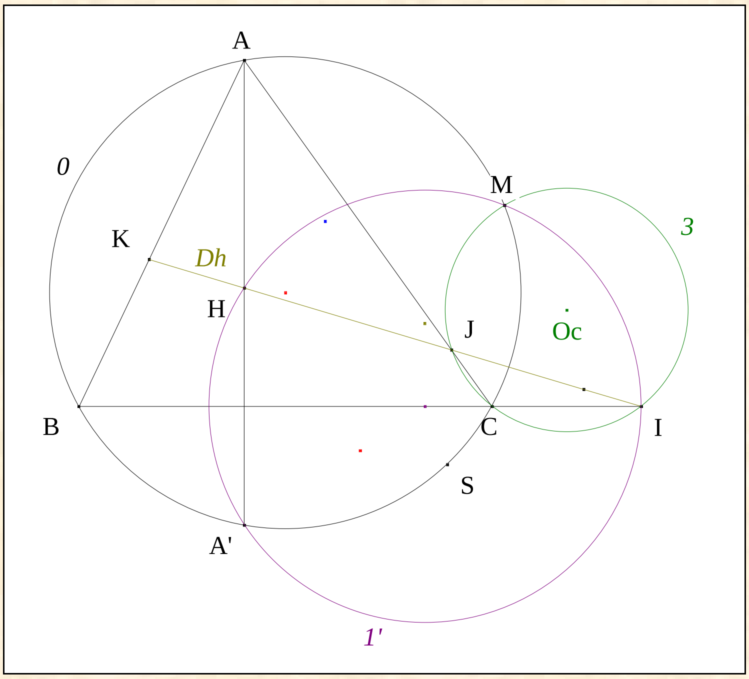
Donné : S est sur *1**.

VISUALISATION

Commentaire : les symétriques d'une droite passant par l'orthocentre d'un triangle par rapport aux côtés de celui-ci, concourent en un point situé sur le cercle circonscrit de ce triangle.
Ce point de concours est l'antipoint de Steiner de cette droite relativement au triangle.
Une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [32].

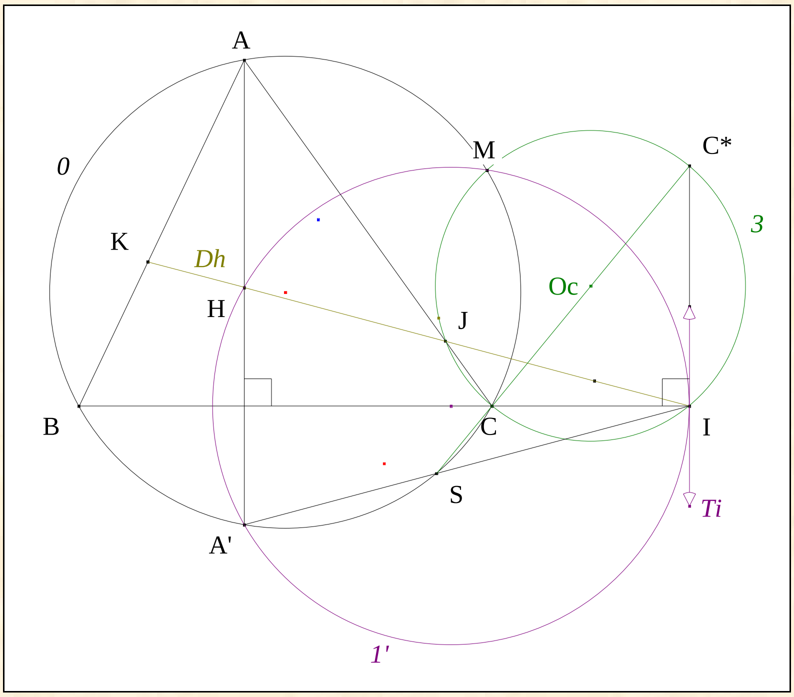
---

[32] Ayme J.-L., Les points jumeaux de P. H. Schoute, G.G.G. vol. **2**, p. 1-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons *0*, *3* les cercles circonscrits resp. aux triangles ABC, CJI,
  Oc le centre de *3*,
  M le point de Miquel du delta déterminé par ABC et *M*,
  A' le second point d'intersection de (AH) avec *0*
  et *1'* le cercle passant par A', H, I.

- D'après **C. I. 1.** Réciproque **2** (Pivot**)**
  appliqué au triangle AHJ avec A' sur (AH), I sur (HJ), C sur (JA), *1'* passe par M.



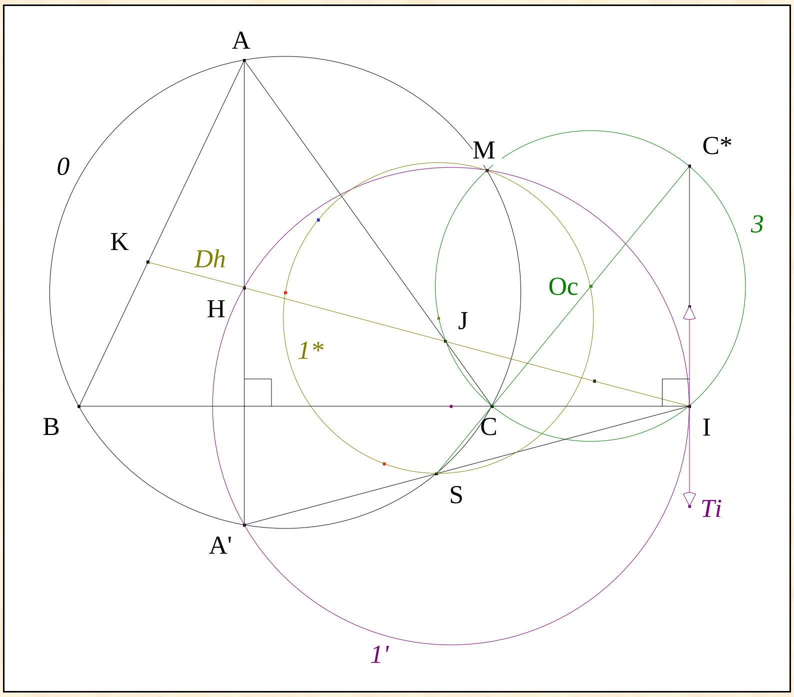
- Notons *Ti* la tangente à *1'* en I
  et C* le second point d'intersection de *Ti* avec *3*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (C*C) passe par Oc.

- **Scolie :** S est sur *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté"
  et par définition de l'antipoint de Steiner, A', S et I sont alignés.

- D'après **C. I. 1.** Réciproque **2**
  appliqué au triangle SIC* avec *0* et *1'* et *3*, (C*OcC) passe par S.



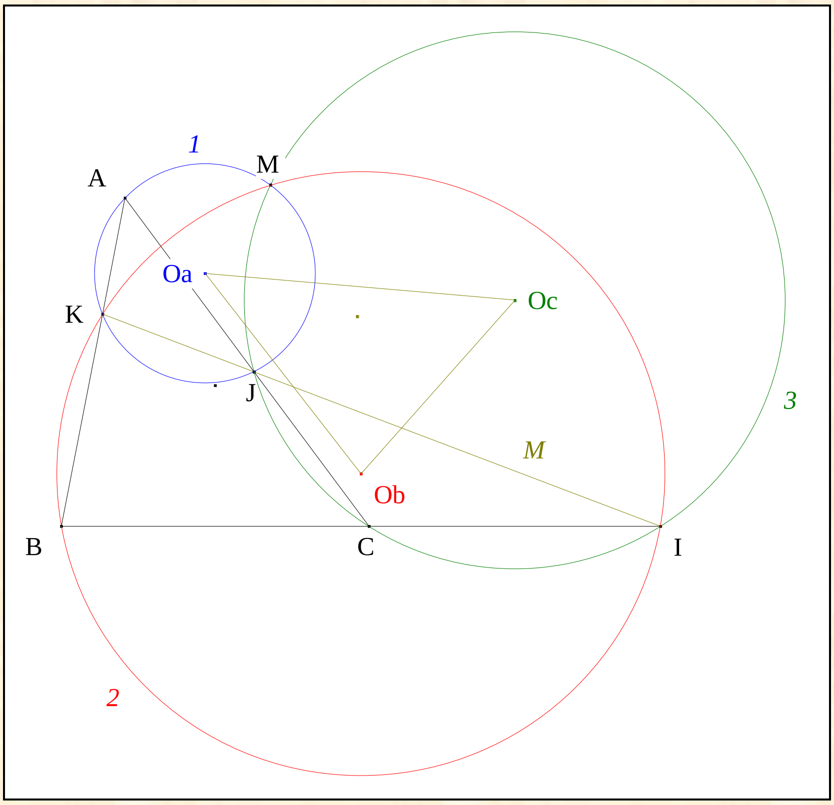
- **Conclusion :** d'après **D. I. 5.** Trois céviennes concourantes sur le cercle de Miquel, S est sur *1**.

II. LE TRIANGLE DE MIQUEL

1. Un triangle semblable à OaObOc

VISION

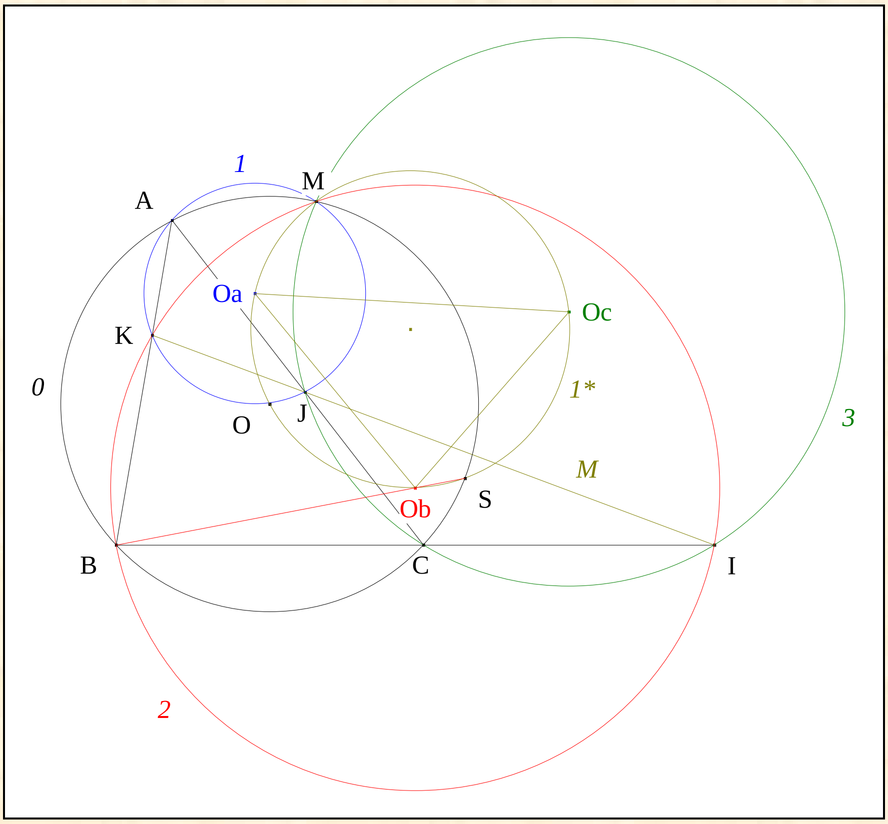
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne de ABC,
	I, J, K	les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	1, *2*, *3*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AKJ, BIK, CJI,
	Oa, Ob, Oc	les centres resp. de *1*, *2*, *3*,
et	M	le point de Miquel du delta déterminé par ABC et *M*.

Donné : le triangle OaObOc est directement semblable à ABC.

VISUALISATION



- Notons 0 le cercle circonscrit à ABC
  *1** le cercle de Miquel du delta déterminé par ABC et *M*,
  et S le point de concours de (AOa), (BOb) et (COc).

- D'après **D. I. 3.** Trois céviennes concourantes sur le cercle circonscrit
  et **D. I. 6.** L'antipoint de Steiner, S est sur *0* et *1**.

- Une chasse angulaire à **Π** près :

  * le quadrilatère OaObSOc étant cyclique, <ObOaOc = <ObMOc ;

  * d'après "Un triangle de Möbius" appliqué à *2* et *3*, <ObMOc = <BAC ;

  * par transitivité de la relation =, <ObOaOc = <BAC.

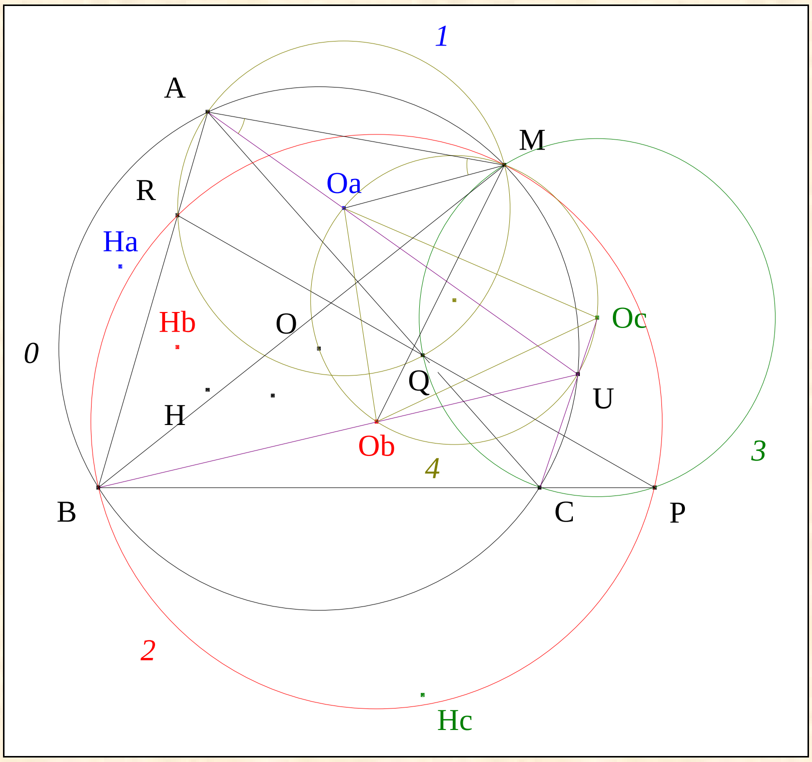
- Mutatis mutandis, nous montrerions que <OcObOa = <CBA
  <OaOcOb = <ACB.

- **Conclusion :** par définition, le triangle OaObOc est directement semblable à ABC.

Scolies : **(1)** OaObOc est "le triangle de Miquel du delta déterminé par ABC et *M* "

(2) par définition, OaObOc et ABC sont en perspective de centre U

(3) trois angles égaux

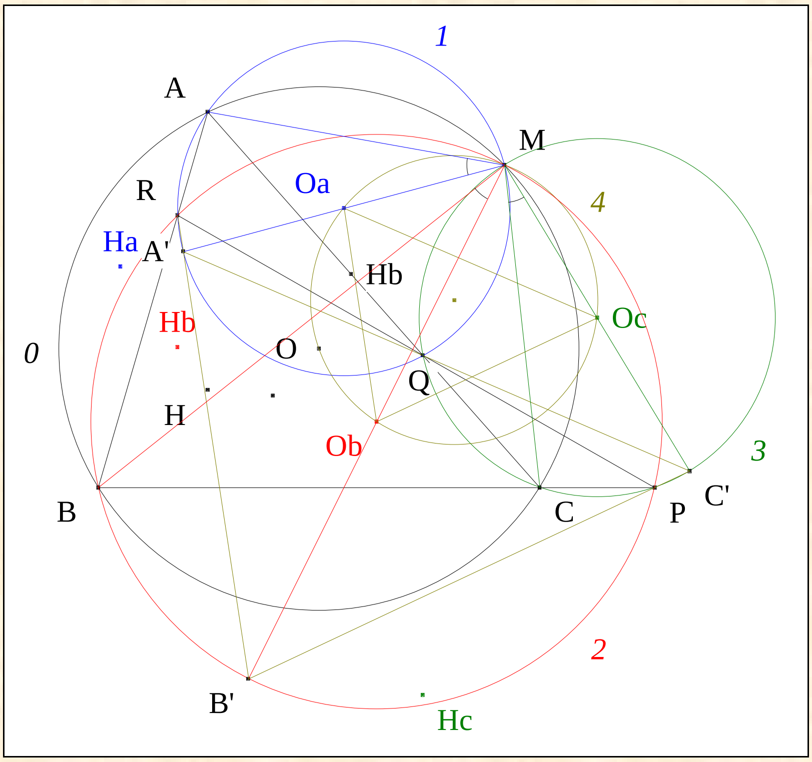


- Une chasse angulaire à Π près :
  le triangle OaMA étant isocèle en Oa, <AMOa = <OaAM ;
  nous avons : <OaAM = <UAM ;
  d'après le théorème de l'angle inscrit, <UAM = <UBM ;
  nous avons : <UBM = <ObBM ;
  le triangle ObMB étant isocèle en Ob, <ObBM = <BMOb ;
  par transitivité de la relation =, <AMOa = <BMOb.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que <BMOb = <CMOc.

- **Conclusion :** <AMOa = <BMOb = <CMOc.

(4) Nature de M



- D'après "Une monienne diamétralement brisée" (Cf. Annexe **3**),
  appliqué à **(1)** *2* et *3*, (B'C') passe par P
  (2) *3* et *1*, (C'A') passe par Q
  (3) *1* et *2*, (A'B') passe par R.

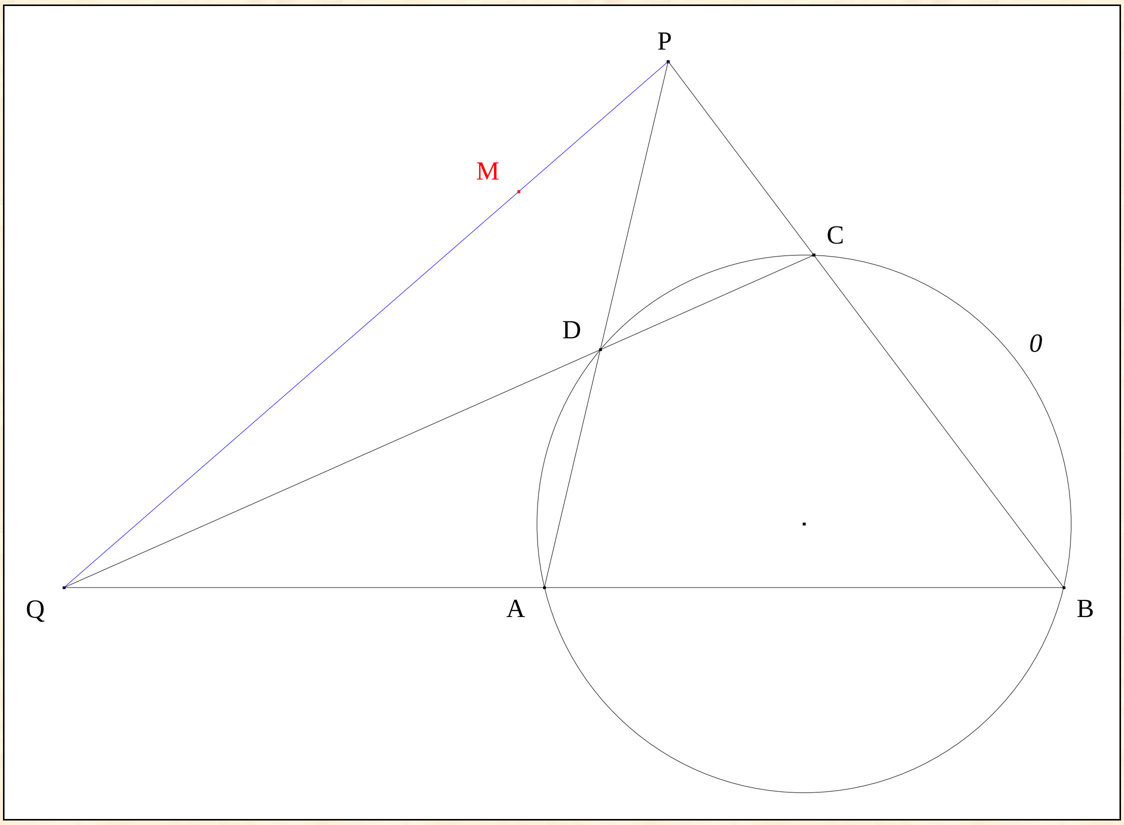
- **Conclusion :** d'après **B. 4.** Scolie 1, M est le centre de similitude de OaObOc et ABC.

III. UN QUADRILATÈRE CYCLIQUE

1. I.M.O. 1982, day 2, Problem 2

VISION

Figure :

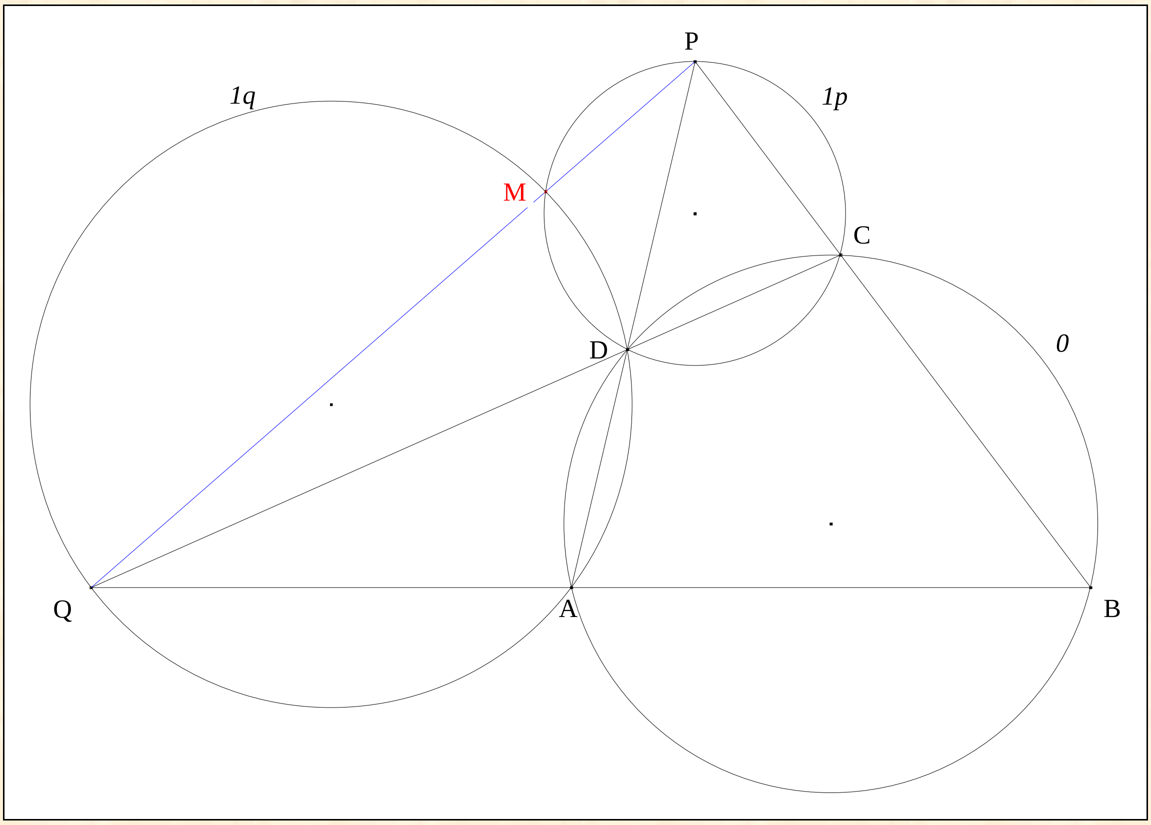


Traits :	ABCD	un quadrilatère cyclique,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	P, Q	les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), (AB) et (CD),
et	M	le point de Miquel du delta déterminé par PAB et (QCD).

Donné : M est sur (PQ). [33]

VISUALISATION

[33] About Miquel point, AoPS du 21/07/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=490016

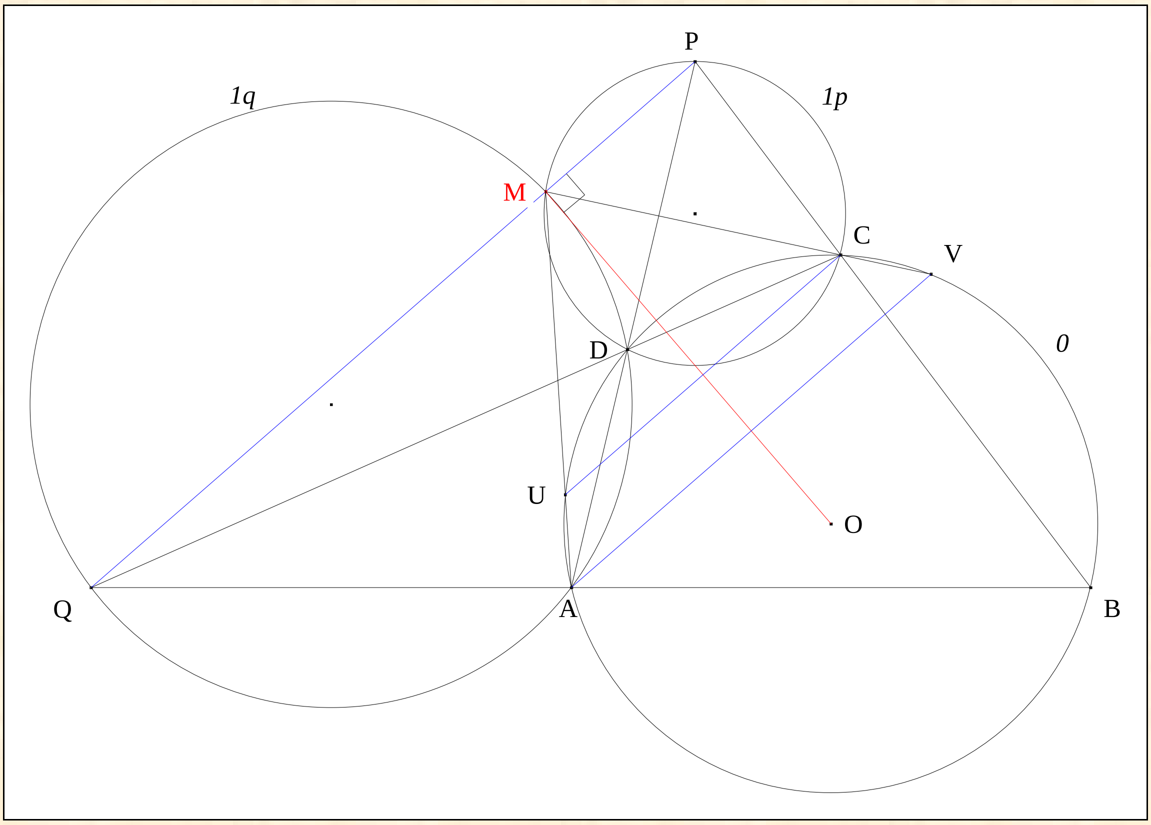


- Notons *1p*, *1q* les cercles circonscrits resp. aux triangles PCD, QAD.

- D'après **C. I. 1.** Le théorème du pivot
  appliqué au triangle PAB relativement à Q, C et D, *1p* et *1q* passent par M.

- **Conclusion :** d'après **C. I. 1.** Réciproque **2**
  appliqué au triangle PQB avec *1p* et *0* et *1q*, M est sur (PQ).

Scolie : deux perpendiculaires



- Notons O le centre de *0*
  et U, V les seconds points d'intersection resp. de (MA), (MC) avec *0*.

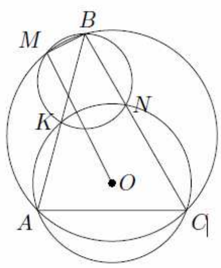
- D'après "Le théorème **0** de Reim"
  appliqué aux cercles *0* et *1p*, (AV), (CU) et (PM) sont parallèles entre elles.

- Le quadrilatère AVCU étant un trapèze cyclique, est isocèle ;
  en conséquence, (OM) ⊥ (AV) ;
  nous avons : (AV) // (PMQ).

- **Conclusion :** d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (OM) ⊥ (PQ).

Archive :

(IMO 1985) A circle with center O passes through the vertices A and C of triangle ABC and intersects segments AB and BC again at distinct points K and N, respectively. The circumcircles of triangles ABC and KBN intersects at exactly two distinct points B and M. Prove that $\angle OMB = 90°$.

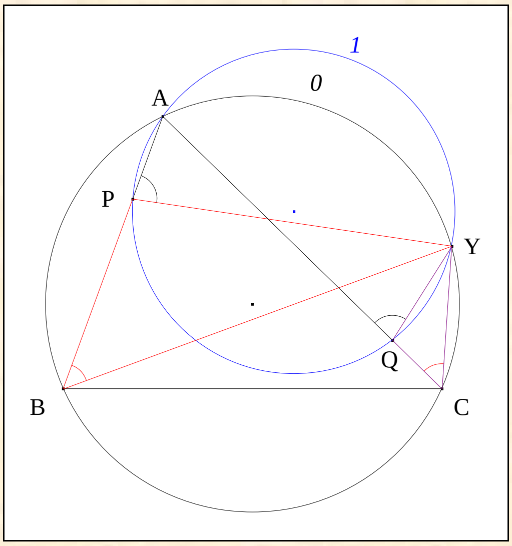


E. APPENDICE

1. Deux triangles semblables

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P, Q deux points resp. sur [AB], [AC],
1 le cercle circonscrit au triangle APQ
et Y le second point d'intersection de *1* et *0*.

Donné : les triangles intermédiaires YPB et YCQ sont semblables.

VISUALISATION

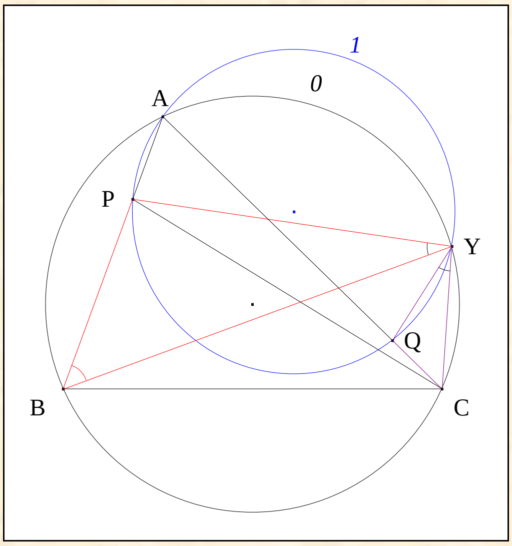
- Deux chasses angulaires :

  * par "Angles inscrits", <YPA = <YQA
  * par supplémentarité, <BPY = <CQY.

  * par "Angles inscrits", <YBA = <YCA
  * par une autre écriture, <YBP = <YCQ.

- **Conclusion :** les triangles YPB et YCQ sont semblables.

Scolie : deux isogonales

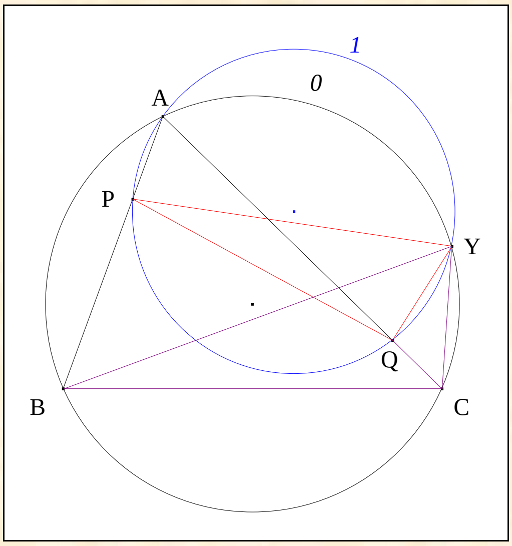


- **Conclusion :** (YB) et (YQ) sont deux Y-isogonales du triangle YPC.

2. Deux triangles semblables

VISION

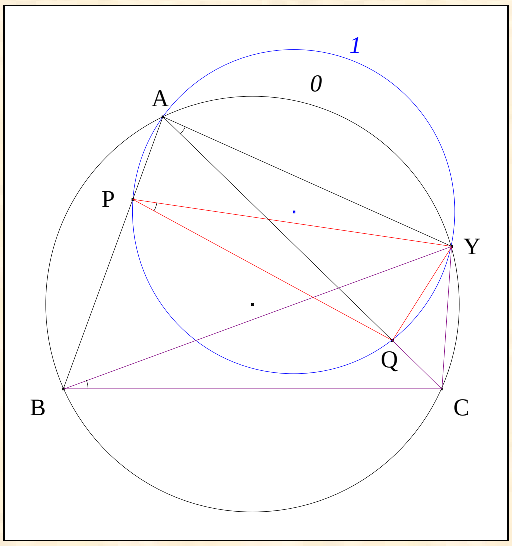
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : les triangles YPQ et YBC sont semblables.

VISUALISATION



- Une chasse angulaire :

*	par "Angles inscrits",	<QPY = <QAY
*	par une autre écriture,	<QAY = <CAY
*	par "Angles inscrits",	<CAY = <CBY
*	par transitivité de =,	<QPY = <CBY.

- (YB) et (YQ) étant deux Y-isogonales du triangle YPC, <PYQ = <BYC.

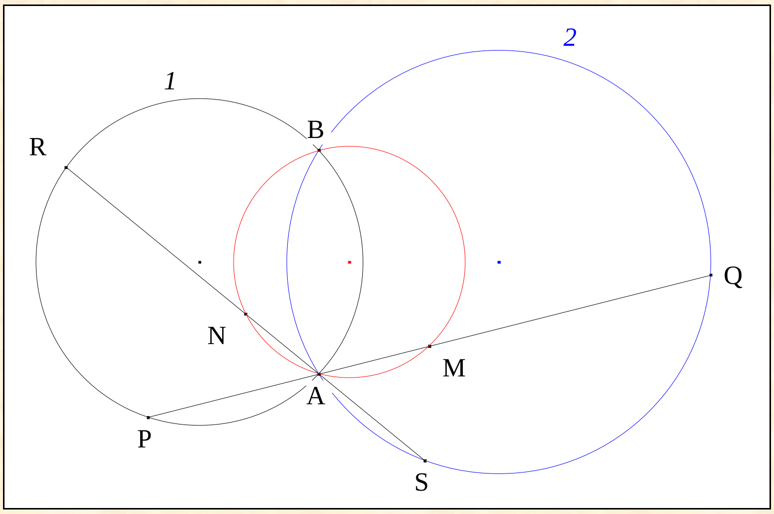
- **Conclusion :** les triangles YPQ et YBC sont semblables.

F. ANNEXE

1. Le cercle des milieux des moniennes

VISION

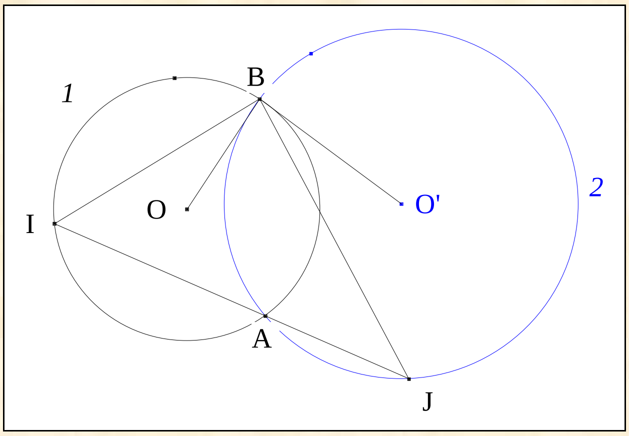
Figure :



Traits :		*1*, *2*	deux cercles sécants,
		A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
		P, R	deux points de *1*,
		Q, S	les seconds points d'intersection resp. de (AP), (AR) avec *2*
	et	M, N	les milieux resp. de [PQ], [RS].

Donné : M, N, A et B sont cocycliques.

2. Un triangle de Möbius [34]



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,

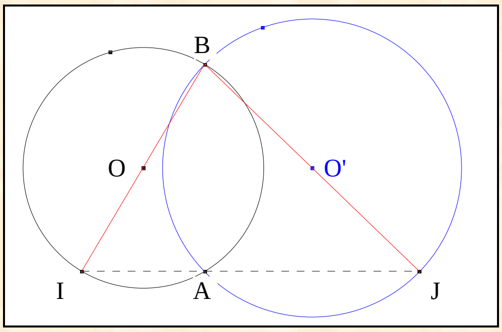
---

[34] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.

et (IBJ) une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

3. Une monienne diamétralement brisée



Traits : *1* , *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
I le second point d'intersection de (BO) avec *1*
et J le second point d'intersection de (BO') avec *2*.

Donné : I, A et J sont alignés.