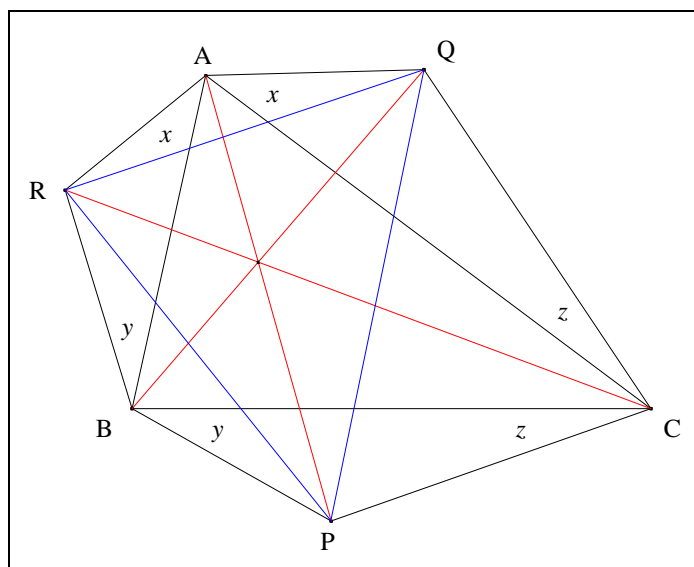


LE THÉORÈME DE JACOBI

UNE NOUVELLE APPROCHE SYNTHÉTIQUE

†

Jean - Louis AYME



Résumé.

L'auteur propose une nouvelle approche synthétique du théorème de Carl Friedrich Jacobi en mettant successivement en œuvre les théorèmes d'Otto Hesse et de Floor van Lamoën.

Une dizaine d'illustrations sont présentées concernant les points de Fermat, Napoléon, Vecten, de Villiers, Gray, Kosnitza, Kiepert, Kariya...

Une autre approche, à savoir celle de Kostas Vittas, revisitée par l'auteur est présentée.

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

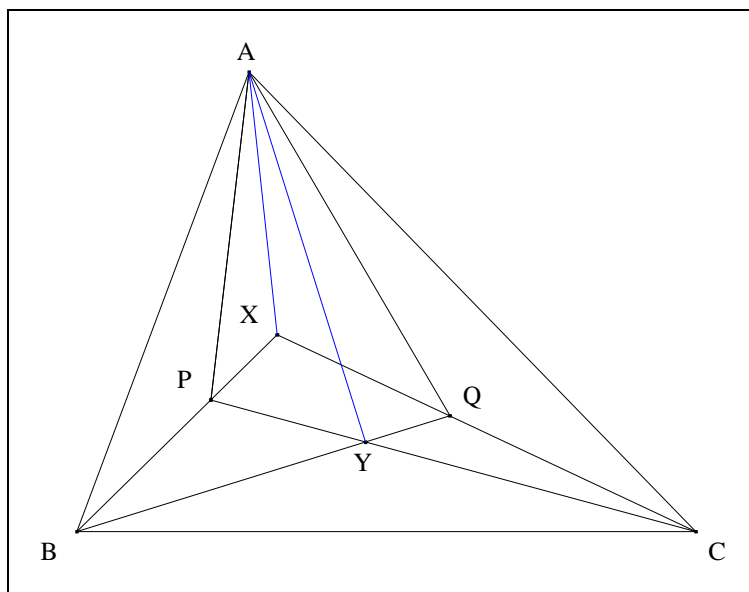
Sommaire	
A. Le théorème de Hesse	2
1. Deux isogonales	2
2. Le théorème de Hesse	4
3. Une courte biographie d'Otto Hesse	6
B. Le théorème desmique de van Lamoen	6
1. Le produit desmique de deux triangles	6
2. Une courte biographie de Floor van Lamoen	9
C. Le théorème de Jacobi	9
1. Un triangle de Jacobi	9
2. Le théorème de Jacobi	10
3. Une courte biographie de C. F. A. Jacobi	13
D. La récolte	13
1. Les deux points de Fermat	13
2. Les deux points de Napoléon	14
3. Les deux points de Vecten	15
4. Les deux points de de Villiers	16
5. Les deux points de Gray	18
6. Le point de Kosnitza	19
7. Les points de Kiepert	20
8. Les points de Kariya	22
9. Sur une idée d'Antreas Hatzipolakis	23
10. Sur une idée de Kosta Vitas	23
E. Appendice	24
1. Une autre approche	24
2. Kostas Vitas revisité par l'auteur	24
F. Annexe	28

A. LE THÉORÈME DE HESSE

1. Deux isogonales

VISION

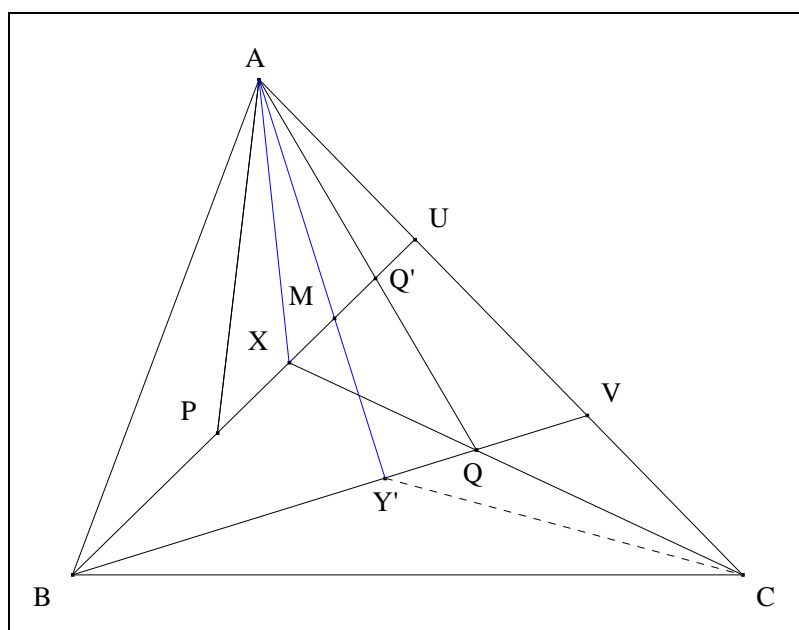
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P, Q deux points tels que (AP) et (AQ) soient deux A-isogonales de ABC
et X, Y les points d'intersection resp. de (BP) et (CQ), de (BQ) et (CP).

Donné : (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de ABC.

VISUALISATION



• Notons Q', U, V les points d'intersection de (AQ) et (BP), de (BP) et (AC), de (BQ) et (AC),
et M, Y' le point de (BP) tel que (AX) et (AM) soient deux A-isogonales de ABC
le point d'intersection de (BQ) et (AM).

• Considérons la quaterne (B, X, P, U) ;
par symétrie d'axe la A-bissectrice de ABC, $(B, X, P, U) = (U, M, Q', B)$;
par projectivité de pôle A, $(U, M, Q', B) = (V, Y', Q, B)$.

• Par définition de l'égalité de deux pinceaux, $(C ; V, Y', Q, B) = (A ; V, Y', Q, B)$;

ou encore,

$$(A ; V, Y', Q, B) = (A ; U, M, Q', B) ;$$

par symétrie d'axe la A-bissectrice de ABC,

$$(A ; U, M, Q', B) = (A ; B, X, P, U) ;$$

par permutation¹,

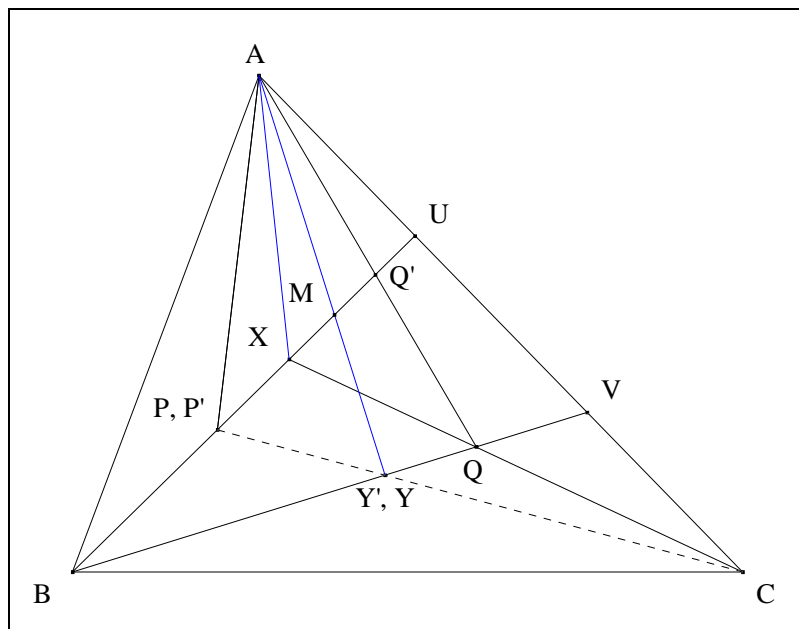
$$(A ; B, X, P, U) = (A ; X, B, U, P) ;$$

par permutation²,

$$(A ; X, B, U, P) = (A ; U, P, X, B) ;$$

par transitivité de la relation =,

$$(C ; V, Y', Q, B) = (A ; U, P, X, B).$$



- Notons P' le point d'intersection de (CY') et (AP) .
- Les deux derniers pinceaux ayant le rayon $(CV) = (AU)$ en commun, les points d'intersection de (CY') et (AP) , de (CQ) et (AX) , de (CB) et (AB) sont alignés
i.e. P', X et B sont alignés ;
en conséquence, P' et P sont confondus ;
il s'en suit que Y' et Y sont confondus.
- **Conclusion :** (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de ABC.

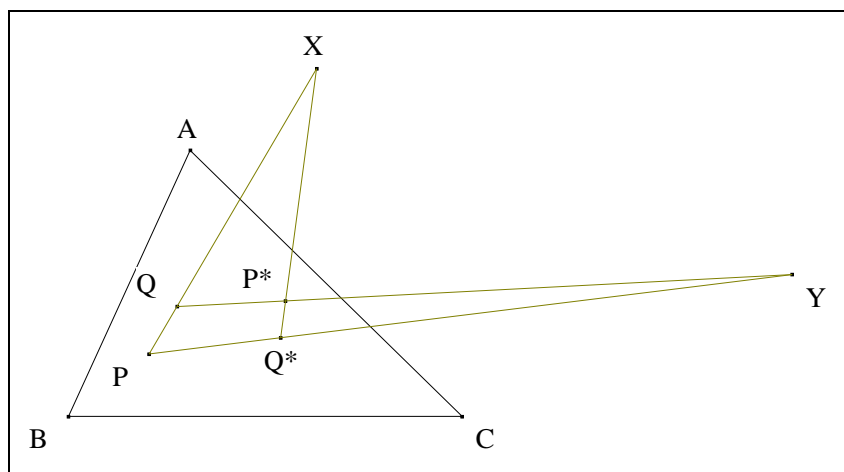
Commentaire : Darij Grinberg a proposé deux preuves, l'une métrique et l'autre basée sur le théorème de l'involution de Desargues.

2. Le théorème de Hesse

VISION

Figure :

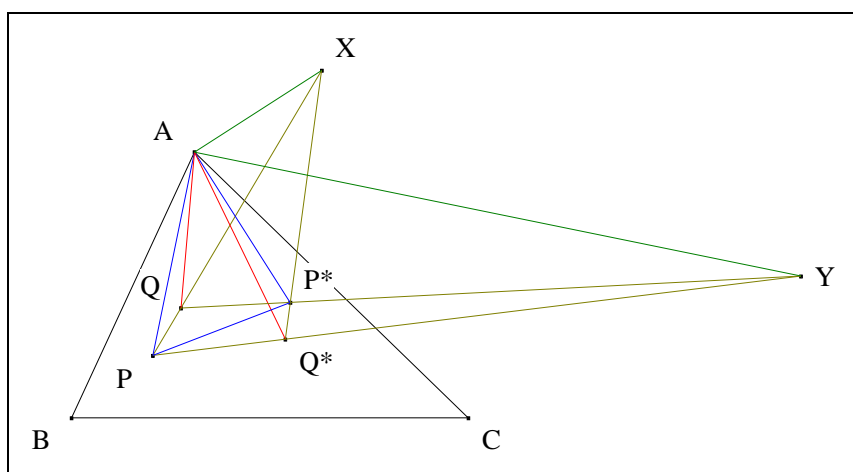
¹ La quaterne ne change pas si l'on permute en même temps le premier avec le deuxième point, le troisième avec le quatrième.
² La quaterne ne change pas si l'on permute les deux premiers points avec les deux derniers.



Traits : ABC un triangle,
 P un point,
 P* l'isogonal de P relativement à ABC,
 Q un point,
 Q* l'isogonal de Q relativement à ABC
 et X, Y les points d'intersection resp. de (PQ) et (P*Q*), de (PQ*) et (P*Q).

Donné : X et Y sont deux points isogonaux de ABC.³

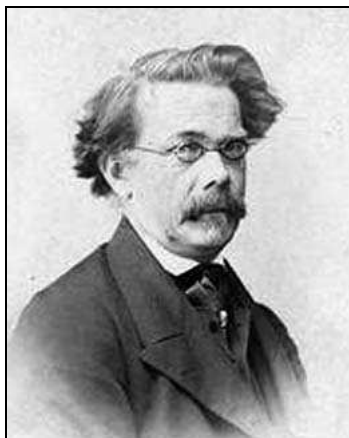
VISUALISATION



- **Scolies :** (1) (AP) et (AP*) sont deux A-isogonales de ABC
 (2) (AQ) et (AQ*) sont deux A-isogonales de ABC.
- D'après A. 1. Deux isogonales, appliqué au triangle APP* et aux points Q et Q*,
 en conséquence, (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de APP* ;
 (AX) et (AY) sont deux A-isogonales de ABC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BX) et (BY) sont deux B-isogonales de ABC
 (CX) et (CY) sont deux A-isogonales de ABC.
- **Conclusion :** X et Y sont deux points isogonaux de ABC.

³ Hesse L. O., *Journal de Crelle* vol. 20 (1840).

3. Une courte biographie d'Otto Hesse



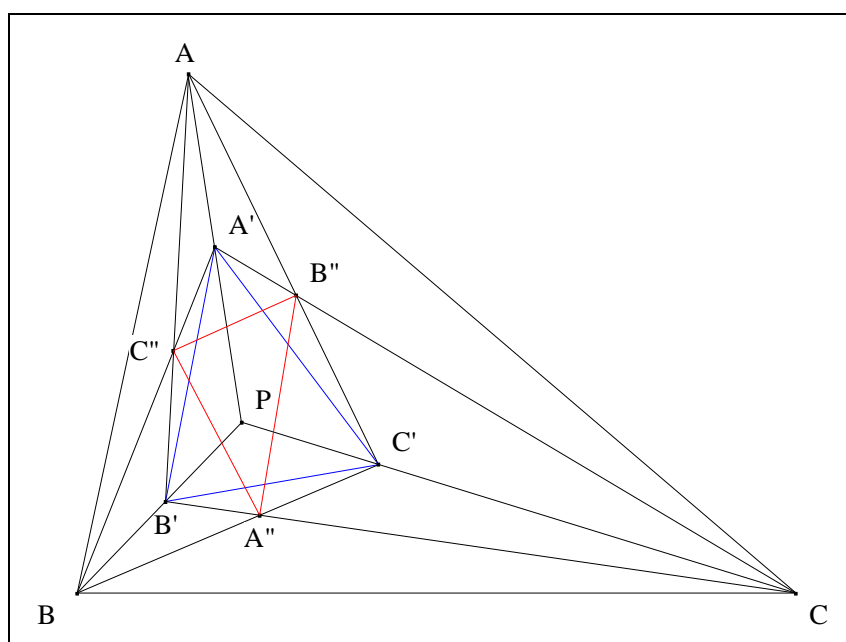
Ludwig Otto Hesse est né à Königsberg (Prusse, aujourd'hui Kaliningrad, Russie), le 22 avril 1811. Étudiant, puis professeur dans une école de commerce de Königsberg, il devient à partir de 1845, professeur de l'Université de cette ville. De 1856 à 1868, il professe à l'Université d'Heidelberg avant d'enseigner à l'École polytechnique de Munich. A partir de 1868, il devient membre de l'Académie bavaroise des sciences. Il décède le 4 août 1874 à Munich (Allemagne).

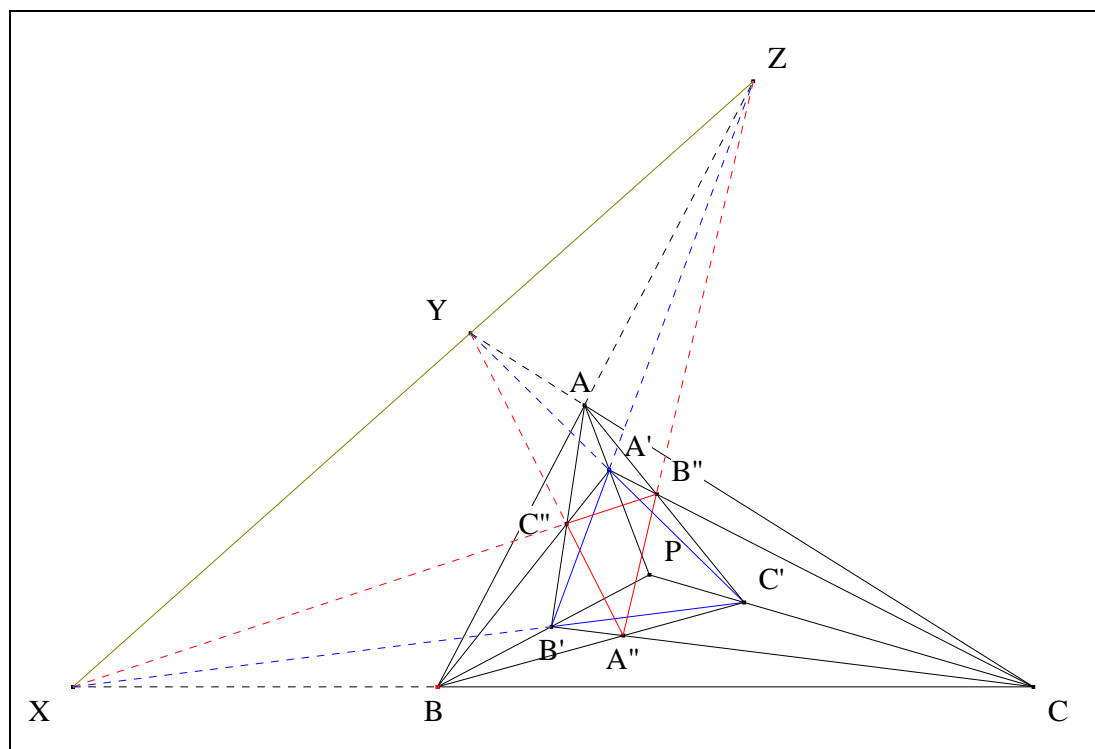
B. LE THÉORÈME DESMIQUE DE VAN LAMOEN

1. Le produit desmique de deux triangles

VISION

Figure :





- Notons Y, Z les points d'intersection resp. de (CA) et $(C'A')$, de (AB) et $(A'B')$.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que
 - (1) $(YA''C'')$ est l'axe de la perspective entre $BC'A'$ et $B'CA$
 - (2) $(ZB''A'')$ est l'axe de la perspective entre $CA'B'$ et $C'CB$.
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe), appliqué à ABC et $A'B'C'$, (XYZ) est l'axe de la perspective entre ABC et $A'B'C'$.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe), ABC et $A''B''C''$ sont perspectifs.

- Scolies :**
- (1) $A''B''C''$ est, en anglais, le cross-triangle de ABC et $A'B'C'$;
 $A''B''C''$ est aussi le produit desmique de ABC et $A'B'C'$.
 - (2) $ABC, A'B'C', A''B''C''$ ayant le même axe de perspective, les centres de perspective sont alignés.

Commentaire : en considérant les trois triangles pris deux à deux, Floor van Lamoen interprète sa figure comme étant la projection de trois tétraèdres⁵ ayant leurs sommets alignés. Ce faisceau de tétraèdres, en anglais desmic tetrahedrons, a conduit par projection à une figure desmique.

Note historique : Floor van Lamoen a trouvé ce résultat en octobre 1997 par ordinateur. Le terme desmic (en vérité desmique) a été introduit par le mathématicien grec Cyparissos Stephanos⁶ qui a basé son choix en relation avec le mot français faisceau

⁵ Altshiller-Court N., On desmic tetrahedra, *Mathematical Gazette*, 3 (1935) 97-99

⁶ Cyparissos Stephanos naît en 1857 sur l'île de Kea (Grèce). Il obtient son doctorat en 1878 à l'université d'Athènes, puis va à Paris où il obtient deux ans après, un second doctorat. De retour en Grèce, il enseigne à l'université d'Athènes, à l'École d'Ingénieur et aussi à l'Académie militaire.

lors d'un article⁷ publié à Paris, dans lequel il utilise l'expression "desmiko schima" qui deviendra "desmisch".

2. Une courte biographie de van Lamoen



Computer exploration is nice. Proving is even nicer⁹

Floor van Lamoen est né le 15 juillet 1966 à Leiden (Pays-Bas). Il grandit à Leeuwarden, puis quitte le Gymnasium de cette ville en 1984 pour aller étudier les sciences et la didactique à l'université d'Amsterdam. En août 1995, il enseigne l'informatique à St. Willibrord college à Goes. C'est dans cette ville qu'il rencontre Lyanne, sa future femme. Il se marie le 16 mai 1997 et devient père d'une fille, Nuriye, le 14 février 2000.

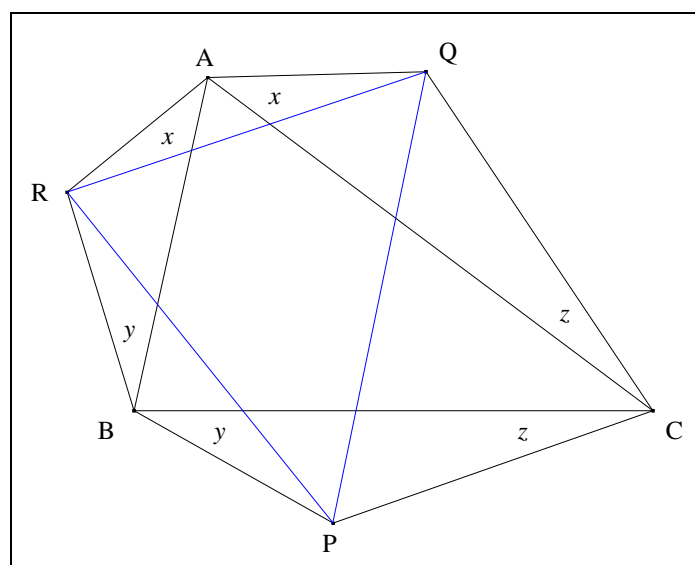
C. LE THÉORÈME DE JACOBI

1. Un triangle de Jacobi

VISION

Figure :

⁷ Il décède à Athènes en 1917.
⁸ Stephanos C., Sur les Systèmes desmiques de trois tétrèdres, Paris, (1879).
<http://home.wxs.nl/~lamoen/>.
⁹ Floor's apothegm. Antreas Hatzipolakis ajoute : synthetic proving is the ultimate...



Finition : ABC un triangle,
 PCB, QAC, RBA trois triangles extérieurs (ou bien intérieurs) à ABC tels que
 $\angle PBC = \angle ABR (= y), \angle QCA = \angle BCP (= z), \angle RAB = \angle CAQ (= x)$.

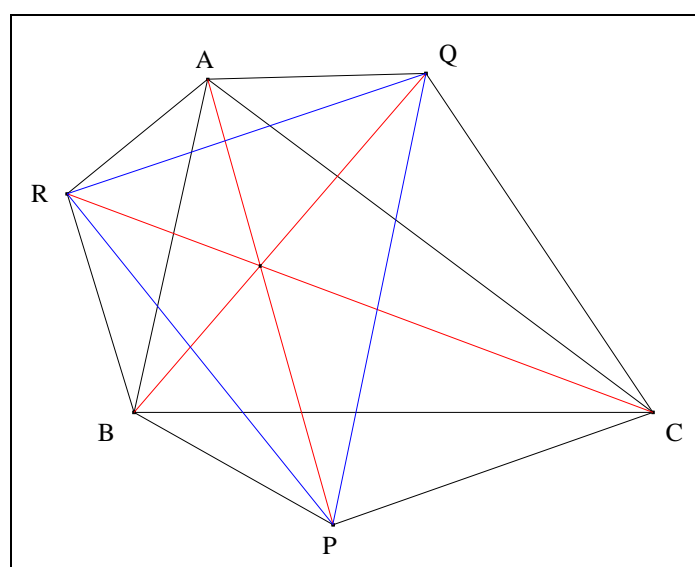
Définition : PQR est "un triangle de Jacobi de ABC ".

Commentaire : il va de soi que les angles x, y et z sont non nuls.

2. Le théorème de Jacobi

VISION

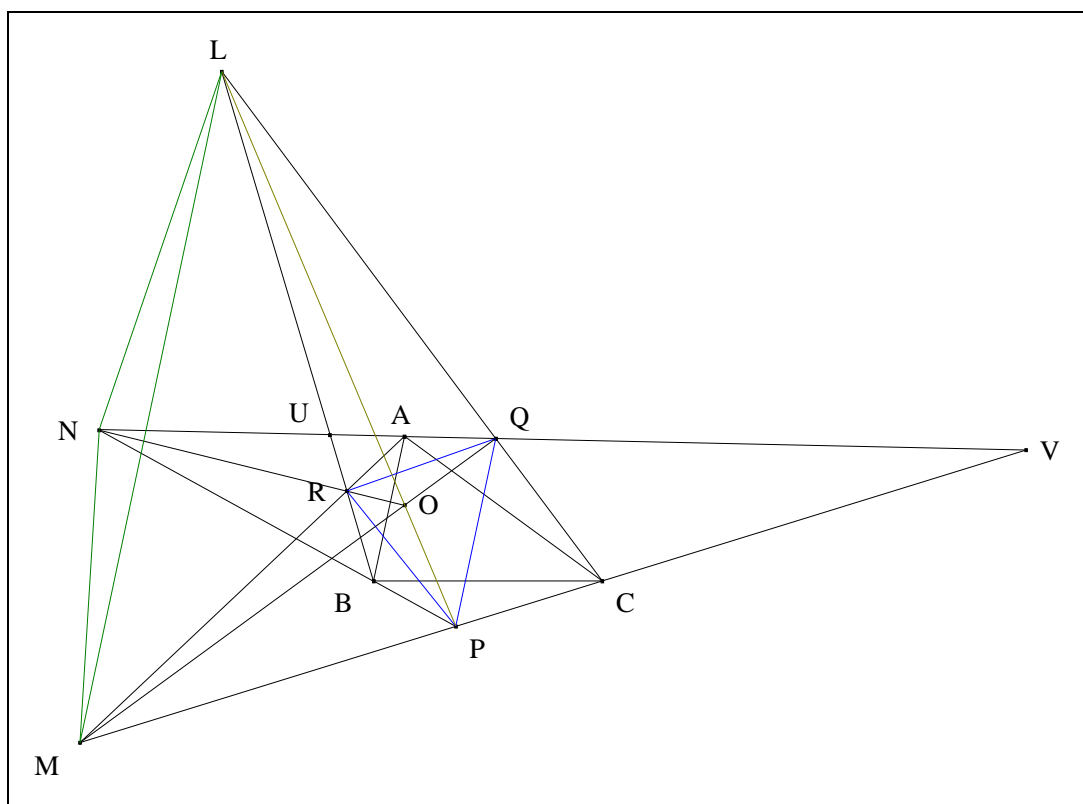
Figure :



Traits : ABC un triangle
 et PQR un triangle de Jacobi relativement à ABC .

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.¹⁰

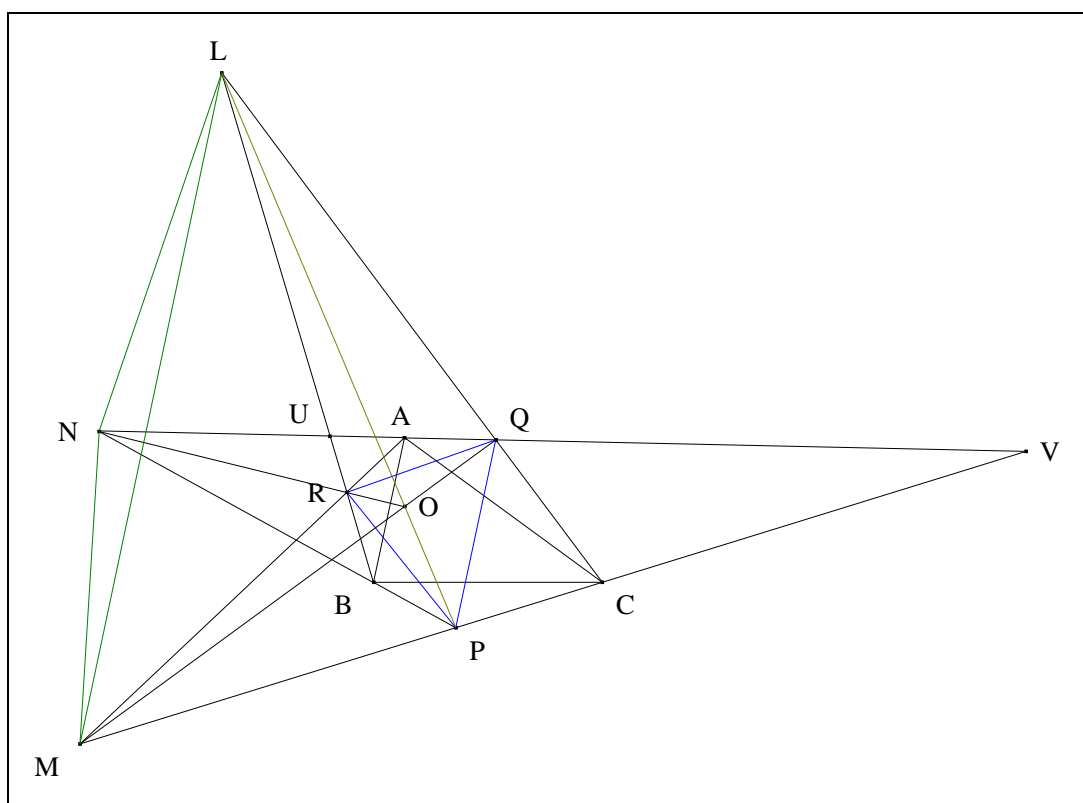
VISUALISATION¹¹



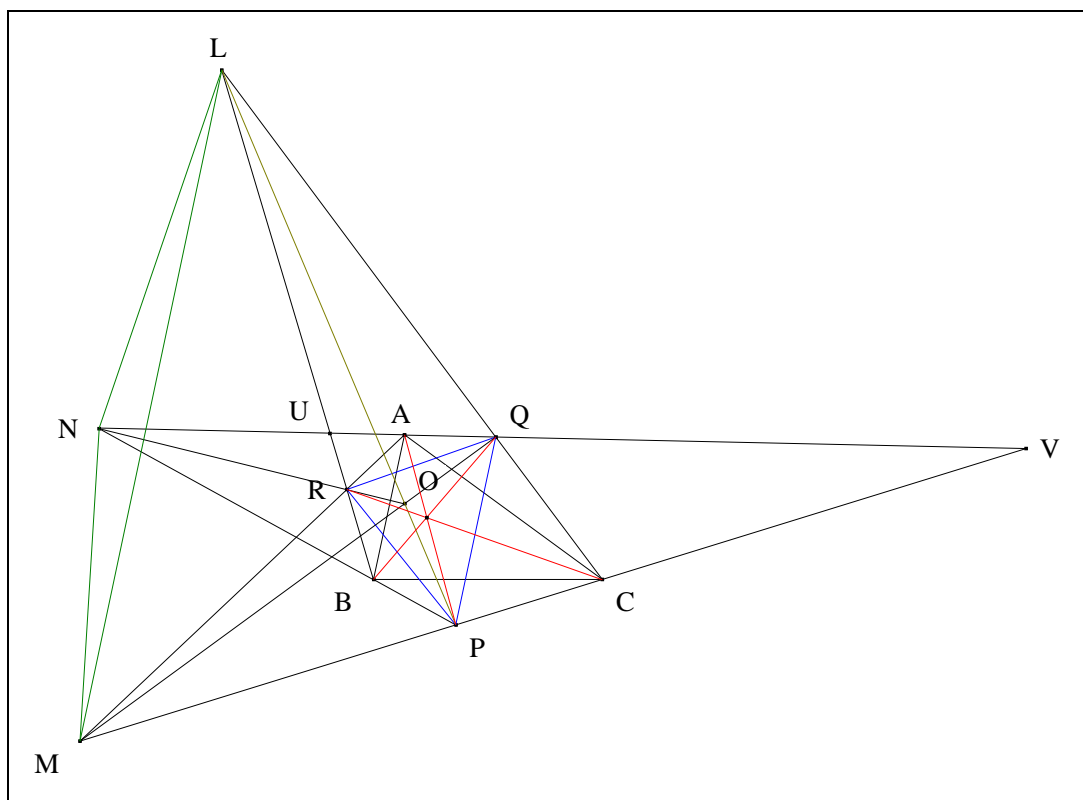
- Notons L, U, N, V, M, O les points d'intersection resp. de (BR) et (CQ), de (BR) et (AQ), de (AQ) et (BP), de (AQ) et (CP), de (CP) et (AR), de (QM) et (RN).
- **Scolies :**
 - (1) (BP) et (BR) sont deux B-isogonales de ABC
 - (2) (CP) et (CQ) sont deux C-isogonales de ABC.
- D'après A. 2. Le théorème de Hesse, (AP) et (AL) sont deux A-isogonales de ABC.
- Par symétrie par rapport à la A-bissectrice de ABC, $(A ; B, L, R, U) = (A ; C, P, V, M)$.
- Par changement d'origine et par permutation des deux premiers points et des deux derniers points, nous avons, $(N ; B, L, R, U) = (Q ; C, P, V, M) = (Q ; P, C, M, V)$.
- **Scolies :** ces trois pinceaux ont le rayon (NU) en commun.
- D'après Desargues "Un rayon en commun", P, L et O sont alignés.
- **Conclusion partielle :** par définition, les triangles LMN et PQR sont en perspective de centre O.

¹⁰ Jacobi C. F. A., *De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis*, Naumburg (1825).

¹¹ Ayme J.-L. (07/04/2007).



- **Scolie :** ABC est le triangle desmique de LMN et PQR .
- D'après B. Le théorème desmique de van Lamoen, scolie 2", ABC et PQR sont perspectifs.



- **Conclusion :** par définition, (AP) , (BQ) et (CR) sont concourantes.

- Scolies :**
- (1) ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de Jacobi" en Allemagne, de "Théorème de Fermat-Toricelli généralisé" en France, de "Isogonal theorem" ou de "Isogonic theorem" en Angleterre.
 - (2) Observons que le théorème de Jacobi ne donne pas la nature du point de concours.

Commentaire : la preuve classique présentée dans de nombreux manuels de Géométrie a recours au théorème de Céva.
Vers 1916, Trajan Lalesco¹² propose une preuve basée sur l'emploi des coordonnées trilineaires.
En 2007, Kostas Vittas¹³ propose une remarquable preuve en s'appuyant sur "le théorème des trois cordes" de Monge.

Note historique : la preuve présentée s'inspire de celle de A. Robson¹⁴ concernant le théorème de Morley sur les trisectrices.

3. Une courte biographie de C. F. A. Jacobi

Carl Friedrich Andreas Jacobi est né en 1795.

Après des études de théologie, de Philologie et de Mathématiques à Iéna et à Göttingen (Allemagne), il enseigne au Gymnasium de Brandebourg. Ses talents de pédagogue, le conduit à enseigner dans l'institution d'élite de Schulpforte, un faubourg de Bad Kösen (Saxe-Anhalt, Allemagne) en octobre 1819. En parallèle, il donne des leçons de latin et d'hébreu. Poussant ses élèves les plus doués, il leurs enseigne dans des cours particuliers, des notions hors programme...

Réputé comme un professeur sévère et peu aimable, cet excellent pédagogue qu'il ne faut pas confondre avec Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), est resté fidèle à son Gymnasium en refusant un poste aux universités de Leipzig et de Kiel (Allemagne).

Après le départ à la retraite de Jacobi, la renommée de Schulpforte était si grande que Lejeune Dirichlet proposa de le remplacer par Karl Weierstrass qui enseignait à Braunsberg, par C. F. Meyer de Königsberg, par Hermann Grassmann de Settin et Th. Schönemann de Brandebourg. Pour la petite histoire, aucun de ces quatre aspirants n'obtinrent son poste ; il fut remplacé par Friedrich Buchbinder (1823-1899).

Jacobi décède en 1855.

D. LA RÉCOLTE

Commentaires : les exemples proposés sont une application directe du théorème de Jacobi.

1. Les deux points de Fermat

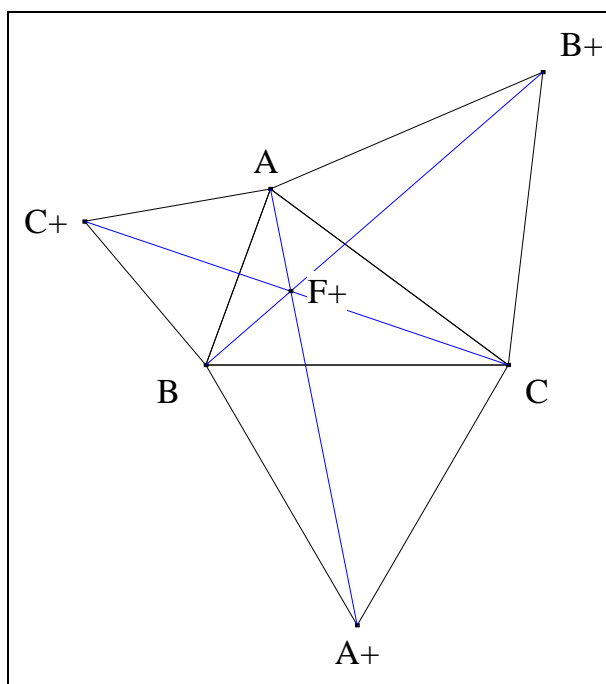
VISION

¹² Lalesco T., *La Géométrie du Triangle*, Bucharest (1916) Rééditions Jacques Gabay, Paris (1987) p. 43.

¹³ Vittas K., A not difficult concurrency, *Mathlinks* du 22/06/2007 ; <http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=870445󔠭>.

¹⁴ Robson A., *The Mathematical Gazette* 11 (1922-23) 310-311.

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 $BA+C$, $CB+A$, $AC+B$ trois triangles équilatéraux resp. extérieurs à ABC .

Donnés : $(AA+)$, $(BB+)$ et $(CC+)$ sont concourantes.

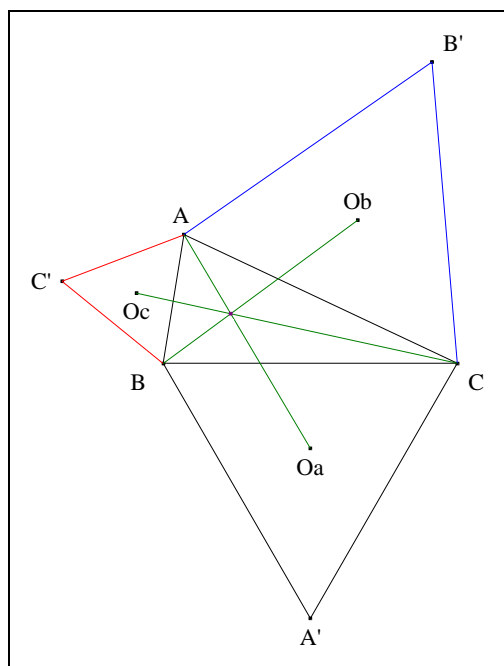
Conseil : $A+B+C+$ est un triangle de Jacobi de ABC .

- Scolies :**
- (1) dans cette situation externe, ce point de concours est "le premier point de Fermat de ABC " ; il est répertorié sous X_{13} chez ETC et est noté $F+$.
 - (2) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur" ; le point de concours est "le second point de Fermat de ABC " ; il est répertorié sous X_{14} chez ETC et est noté $F-$.
 - (3) Ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de Fermat-Torricelli".

2. Les deux points de Napoléon

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 A'CB, B'AC, C'BA trois triangles équilatéraux resp. extérieurs à ABC
 et Oa, Ob, Oc les centres resp. de A'CB, B'AC, C'BA.

Donné : (AOa), (BOb) et (COc) sont concourantes.

Conseil : OaObOc est un triangle de Jacobi de ABC.

- Scolies :**
- (1) dans cette situation externe, ce point de concours est "le premier point de Napoléon de ABC" ; il est répertorié sous X_{17} chez ETC et est noté Nap+.
 - (2) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur" ; le point de concours est "le second point de Napoléon de ABC" ; il est répertorié sous X_{18} chez ETC et est noté Nap-.
 - (3) L'auteur renvoie le lecteur à l'article concernant "Le premier point de Napoléon".¹⁵

3. Les deux points de Vecten¹⁶

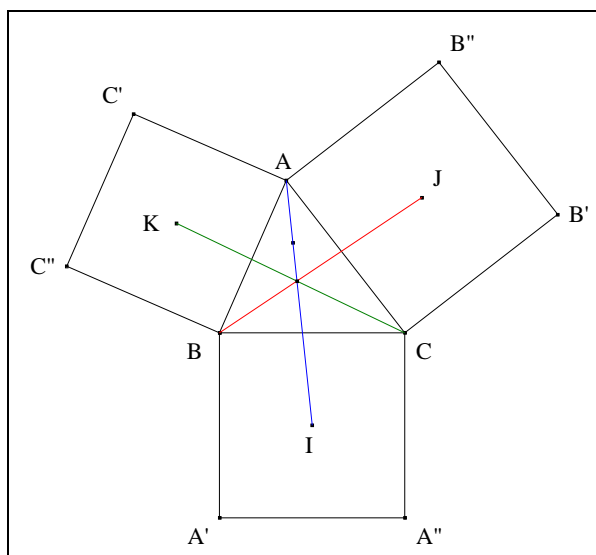
VISION

Figure :

¹⁵ Ayme J.-L., Le premier point de Napoléon, G.G.G. vol. 5, p. 1-5 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme/>.

¹⁶ Vecten, Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales, *Annales* de Gergonne VII (1816-17) 321-324, proposition 4.

Ayme J.-L., La figure de Vecten, G.G.G. vol. 5 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme/>



Traits : ABC un triangle,
 $CB'B''A, AC'C''B, BA'A''C$ trois carrés resp. extérieurs à ABC ,
 et I, J, K les centres resp. de $BA'A''C, CB'B''A, AC'C''B$.

Donnés : $(AI), (BJ)$ et (CK) sont concourantes.¹⁷

Conseil : IJK est un triangle de Jacobi de ABC .

Note historique : Ernst Wilhelm Grebe a été le premier en 1840, puis en 1850, à nommer ce point de concours sous le nom de "point de Vecten".

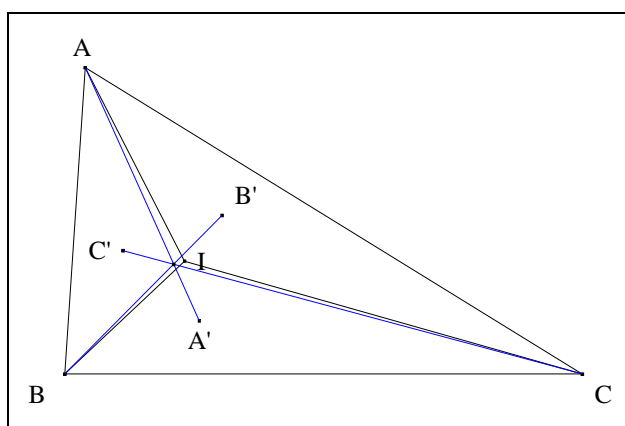
- Scolies :**
- (1) dans cette situation externe, ce point de concours est "le premier point de Vecten de ABC " ou "le point extérieur de Vecten de ABC ".
 Il est répertorié sous X_{485} chez ETC et est noté V_n par John Conway, n étant l'initiale de normal.
 - (2) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur" ;
 le point de concours est "le second point de Vecten de ABC ".
 Il est répertorié sous X_{486} chez ETC et est noté V_s par John Conway, s étant l'initiale de "switched".

4. Les deux points de de Villiers

VISION

Figure :

¹⁷ Barisien E.-N., *Journal de Mathématiques élémentaires* (1893) n° 541 ;
 solution : Droz-Farny A., *Journal de Mathématiques élémentaires* (1894) 236 ;

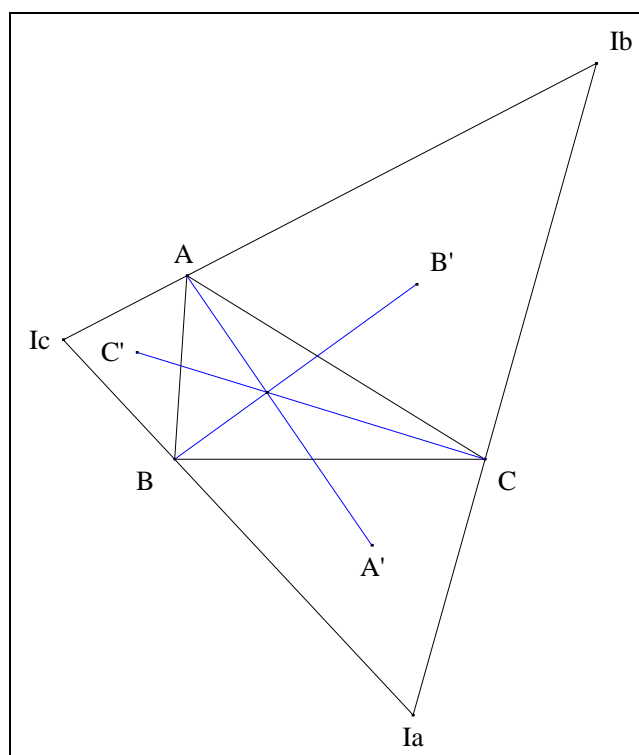


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
et A', B', C' les centres resp. des triangles BCI, CAI, ABI.

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.¹⁸

Conseil : A'B'C' est un triangle de Jacobi de ABC.

- Scolies :**
- (1) dans cette situation où I est en anglais le "incenter" de ABC, ce point de concours est "le premier point de de Villiers de ABC". Il est répertorié sous X_{1127} chez ETC.
 - (2) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace I par les A, B, C-excentres de ABC'' ;



¹⁸ de Villiers M., A dual to Kosnita's theorem, *Mathematics & Informatics Quarterly* 6 (3) (sept. 1996) 169-171.

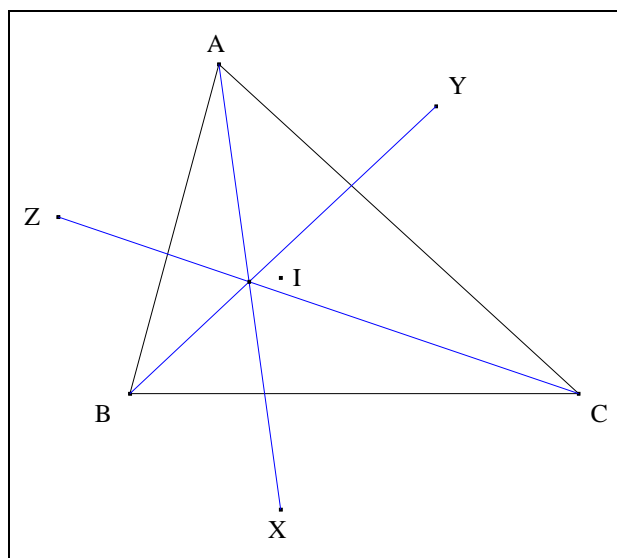
le point de concours est "le second point de de Villiers de ABC".
Il est répertorié sous X_{1128} chez ETC.

Note historique : ce résultat attribué à Michael de Villiers¹⁹ par Clark Kimberling a aussi été mentionné par Steve Sigur et Antreas hatzipolakis en ce qui concerne I et par Darij Grinberg²⁰ pour le cas des excentres.
Pour être plus précis, l'auteur à trouvé dans la revue *Mathesis* de 1928 que le résultat pour le cas de I avait été trouvé par Émile Lemoine²¹.

5. Les deux points de Gray

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC
et X, Y, Z les symétriques de I resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

Donné : (AX), (BY), (CZ) sont concourantes.²²

Conseil : XYZ est un triangle de Jacobi de ABC.

Scolies : (1) dans cette situation où I est en anglais le "incenter" de ABC, ce point de concours est "le point de Gray de ABC".
Il est répertorié sous X_{79} chez ETC.
Darij Grinberg a donné le nom de Gray à ce point de concours suite à une communication de Gray sur le site de Ricardo Barroso²³.

¹⁹ <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html>.

²⁰ Grinberg D., The isogonal theorem, *Mathforum* du 14/08/2002 ;

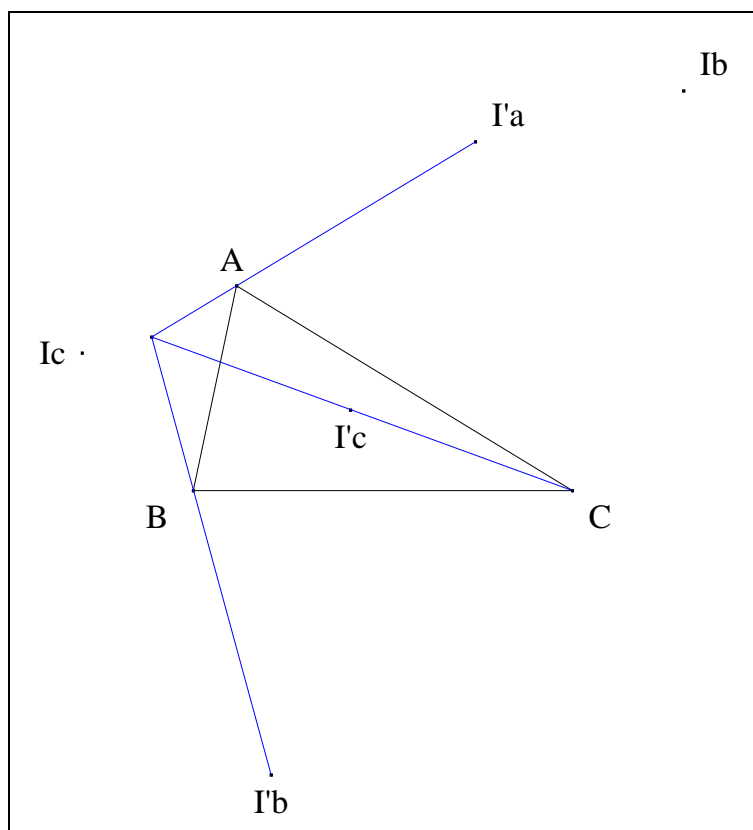
<http://sdp.mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=1069933&tstart=0>

²¹ Lemoine E., *Mathesis* (1928) 435.

²² Grinberg D., Gray point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # 6491 du 19/09/2001 ;

Ayme J.-L., Le point de Gray, G.G.G. vol. 2 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme/>.

- (2) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace I par les A, B, C-excentres de ABC'' ;



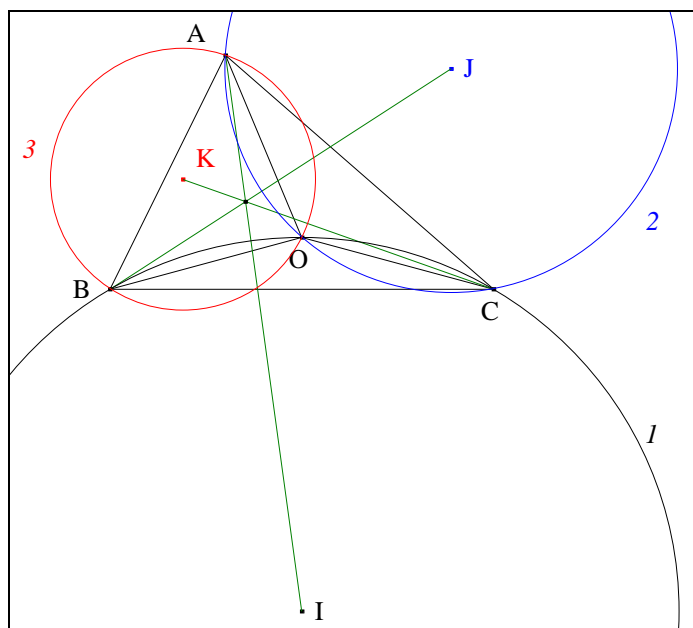
le point de concours est répertorié sous X_{80} chez ETC et a été trouvé par Darij Grinberg.²⁴

6. Le point de Kosnitza

VISION

Figure :

²³ <http://www.pdipas.us.es/r/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol39uno.htm>
²⁴ Grinberg D., Gray point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # 6491 du 19/09/2001 ;
 Ayme J.-L., Le point de Gray, G.G.G. vol. 2 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme/>



Traits : ABC un triangle,
 O le centre du cercle circonscrit à ABC,
 1, 2, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles OBC, OCA, OAB
 et I, J, K les centres de 1, 2, 3.

Donné : (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Conseil : partir du triangle IJK et considérer ABC comme étant un triangle de Jacobi de IJK. Cette idée de procéder revient à Michael de Villiers.²⁵

Scolie : ce point de concours, noté Ks, est "le point de Kosnita de ABC" ; il est répertorié sous X_{54} chez ETC²⁶.

7. Les points de Kiepert

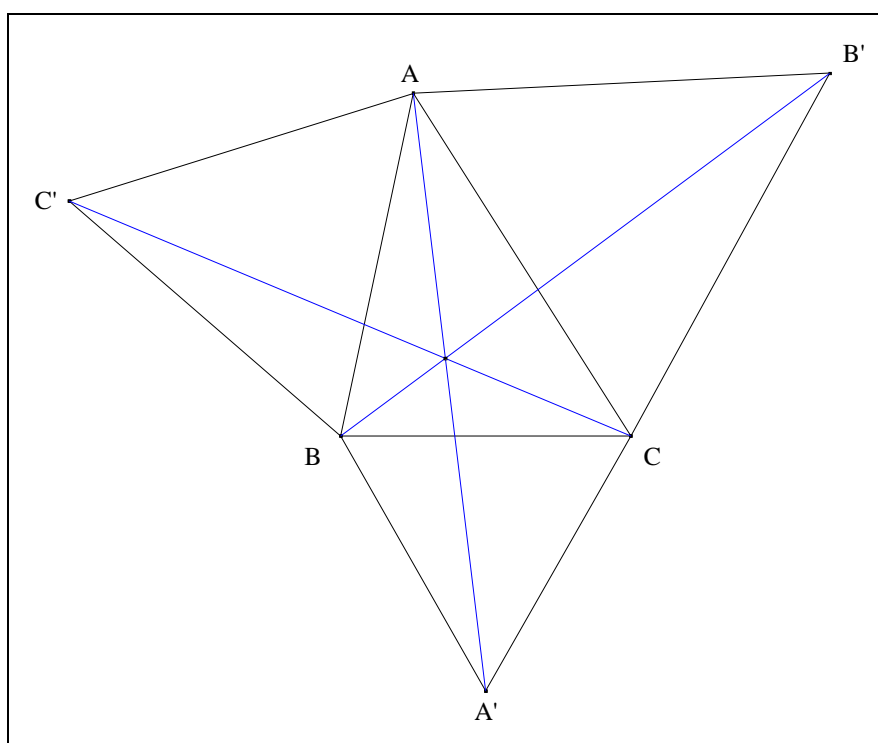
VISION

Figure :

²⁵ de Villiers M., A dual to Kosnita's theorem, *Mathematics & Informatics Quarterly* 6 (3) (sept. 1996) 169-171 ;

Ayme J.-L., Le point de Kosnita, G.G.G. vol. 1 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme/>.

²⁶ <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html#X54>.



Traits : ABC un triangle
 et A'CB, B'AC, C'BA trois triangles isocèles semblables, extérieurs à ABC.

Donné : (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.²⁷

Conseil : A'B'C' est un triangle de Jacobi de ABC.

- Scolies :**
- (1) le résultat reste inchangé lorsqu'on remplace "extérieur" par "intérieur".
 - (2) En notant φ à $2 \cdot \pi$ près, l'angle à la base des triangles isocèles, ce point de concours est "le φ -point de Kiepert de ABC".
 - (3) Le point médian de ABC est "le 0-point de Kiepert de ABC".

Note historique : en 1868, Émile Lemoine²⁸ pose ce problème :

construire un triangle , connaissant les sommets des triangles équilatéraux construits sur les côtés.

Une solution est donnée par Ludwig Kiepert en 1869 alors qu'il était doctorant à Berlin sous la direction de Weierstrass.

Dans sa solution de nature barycentrique, il envisage la situation où l'un des sommets du triangle A'B'C' se déplace :

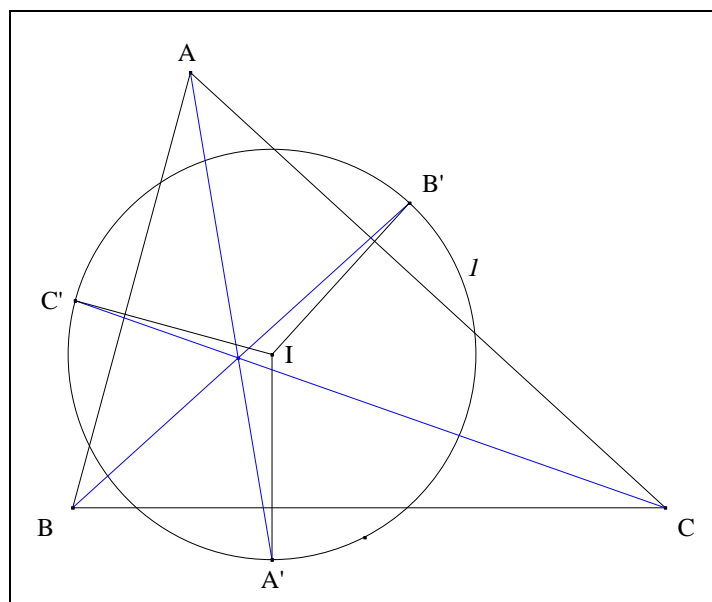
le point de concours des droites décrit une conique, l'hyperbole de Kiepert, passant par le point médian, par l'orthocentre et le point de Fermat du triangle.

²⁷ Kiepert L., Solution de la question 864, *Nouvelles annales de Mathématiques* 8 (1869) 40-42.
²⁸ Lemoine E., Question 864, *Nouvelles annales de Mathématiques* 7 (1868) 191.

8. Les points de Kariya

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 I le centre de ABC,
 I un cercle de centre I,
 P_a, P_b, P_c les perpendiculaires resp. à (BC), (CA), (AB) passant par I
 et A', B', C' les points d'intersection resp. de P_a, P_b, P_c avec I
 tels que les triangles $A'CA, B'AC, C'BA$ soient extérieurs à ABC.

Donné : $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.²⁹

Conseil : $A'B'C'$ est un triangle de Jacobi de ABC.

Scolies :

- (1) dans cette situation où les triangles sont extérieurs à ABC, ce point de concours est "un point de Kariya de ABC".
- (2) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".
- (3) Si k est le rayon de I , alors nous parlerons du "k-point extérieur (intérieur) de Kariya de ABC".
 Citons quelques cas particuliers :

pour les cas "extérieurs"	
$k = 1$	le point de Gergonne X_7 est le 1-point de Kariya
$k = 2$	le point de Gray X_{79} est le 2-point de Gray
pour les cas "intérieurs"	
$k = 0$	le centre du triangle est le 0-point de Kariya

²⁹ Grinberg D., Message *Hyacinthos* du 20/09/2004.
 Ayme J.-L., Le point de Gray, G.G.G. vol. 2, p. 9-10 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme/>.

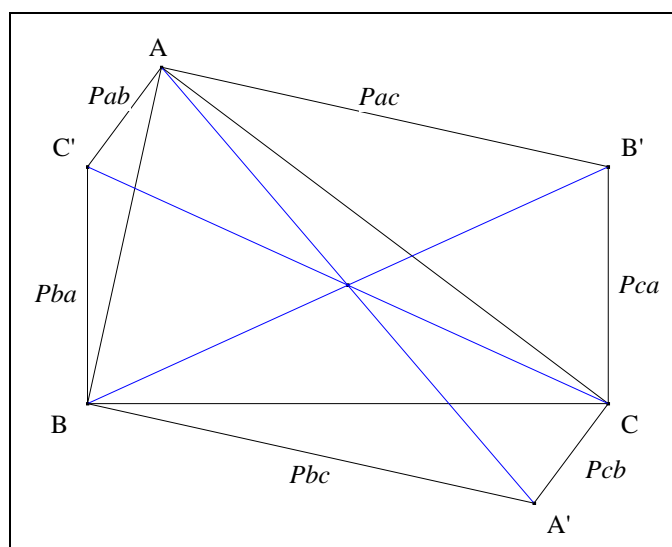
$k = 1$ le point de Nagel X_8 est le 1-point de Kariya
 $k = 2$ l'antipoint de Gray X_{80} est le 2-point de Kariya.

Pour unifier ces résultats, une algébrisation est possible.

9. Sur une idée d'Antreas Hatzipolakis

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Pab, Pac les perpendiculaires resp. à $(AC), (AB)$ en A ,
 Pbc, Pba les perpendiculaires resp. à $(BA), (BC)$ en B ,
 Pca, Pcb les perpendiculaires resp. à $(CB), (CA)$ en C
 et A', B', C' les points d'intersection resp. de Pbc et Pcb , de Pca et Pac , de Pab et Pba .

Donné : $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.³⁰

Conseil : $A'B'C'$ est un triangle de Jacobi de ABC .

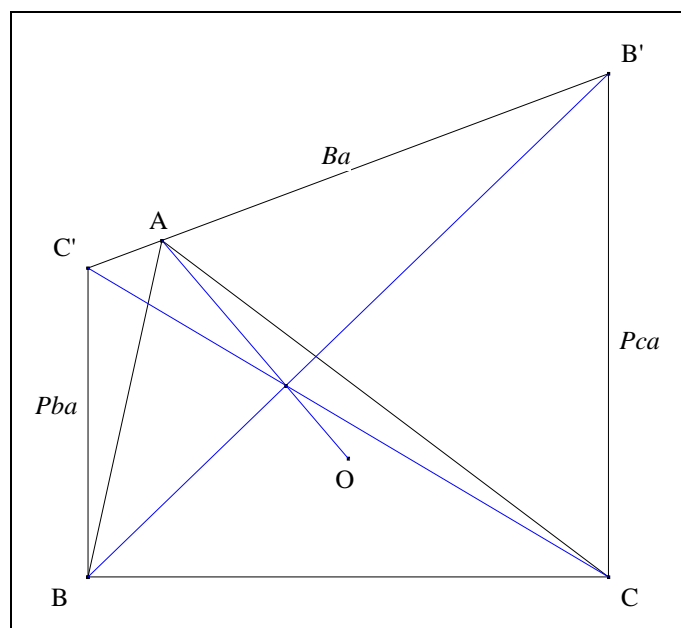
Scolie : ce point de concours est le centre du cercle circonscrit à ABC .

10. Sur une idée de Kostas Vitas

VISION

³⁰ Hatzipolakis A. P., The isogonal theorem, *Mathforum* du 13/11/1999 ;
<http://sdp.mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=1069932&tstart=0>.

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 Pba, Pca les perpendiculaires à (BC) resp. en B, C ,
 Ba la A -bissectrice extérieure de ABC ,
 B', C' les points d'intersection de Ba resp. avec Pca, Pab
 et O le centre du cercle circonscrit à ABC .

Donné : $(AO), (BB')$ et (CC') sont concourantes.³¹

Conseil : considérer le second point d'intersection A' de (AO) avec le cercle circonscrit, puis montrer que $A'B'C'$ est un triangle de Jacobi de ABC .

E. APPENDICE

1. Une autre approche

En 1806, Charles Julien Brianchon publie dans le XII-ème Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* un résultat qui aujourd'hui porte son nom. Il obtenait ce résultat en appliquant le concept de polaire à "l'hexagramme mystique" de Pascal. Au XX-ième siècle, une compétition entre géomètres s'est développée pour trouver une démonstration synthétique du théorème de Brianchon ; elle a été gagnée par A. S. Smogorzhevski³² qui en donna le premier une preuve en utilisant brillamment la notion de centre radical.

C'est sans aucun doute que cette façon de procéder a traversé le subconscient du remarquable géomètre grec Kostas Vittas, architecte de profession.

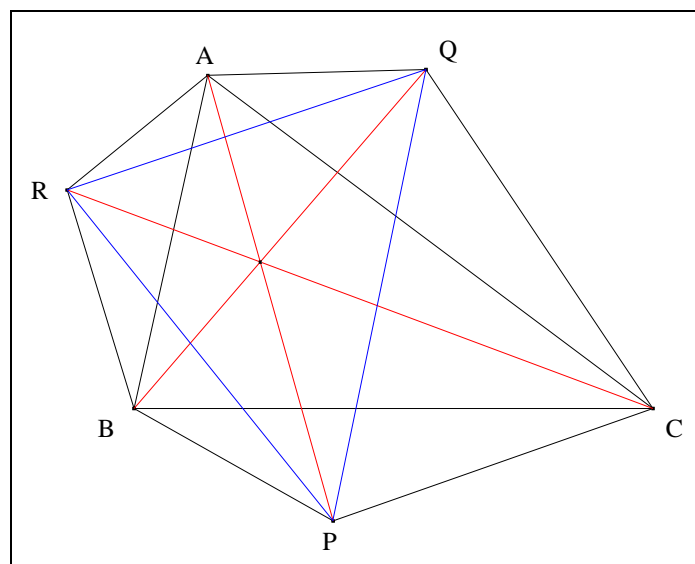
2. Kostas Vittas revisitée par l'auteur

³¹ Vittas K., A not difficult concurrency, *Mathlinks* du 20/06/2007 ; <http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=870445󔠭> .

³² Smogorzhevski A.S., *The Ruler in geometrical Constructions*, Blaisdell, New York, (1961) 33-34.

VISION

Figure :

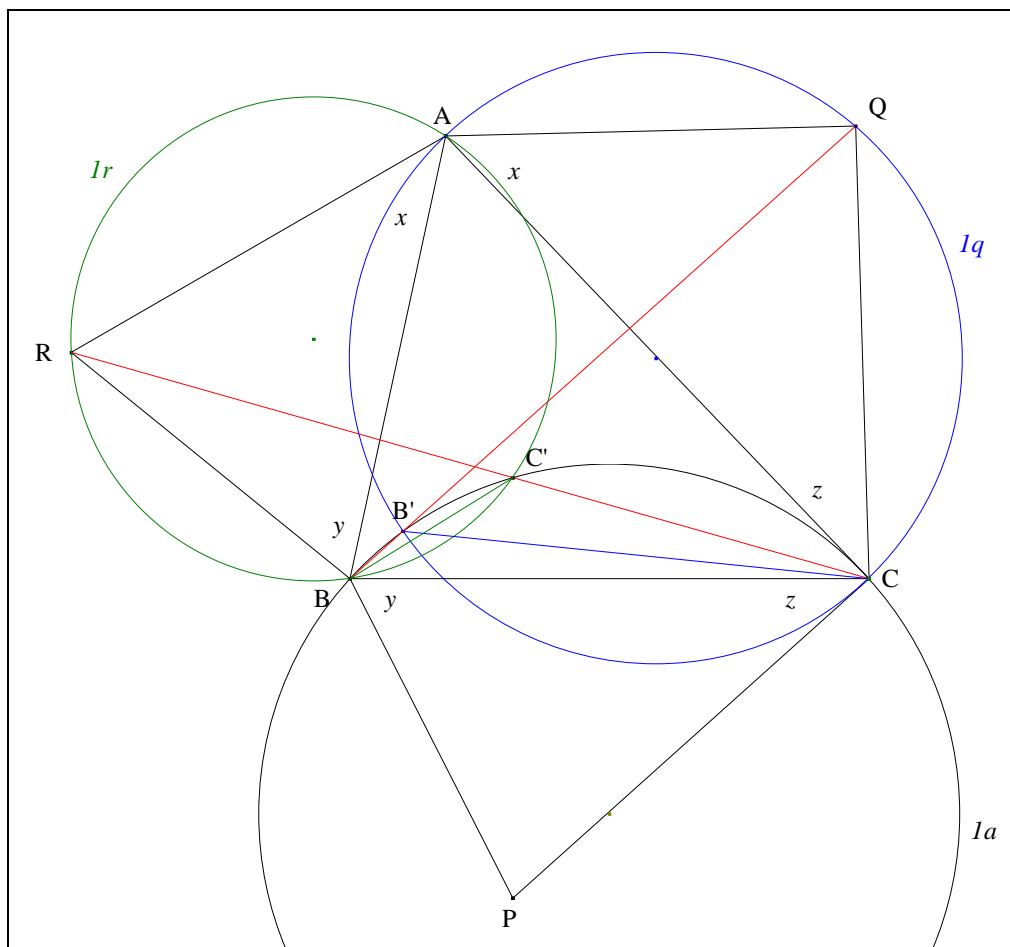


Traits : ABC un triangle
 et PQR un triangle de Jacobi relativement à ABC.

Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

VISUALISATION ³³³³

Vittas K., A not difficult concurrency, *Mathlinks* du 22/06/2007 ;
<http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?p=870445󔠭> ;
 Ayme J.-L. (25/02/2010).



- Notons Iq, Ir les cercles circonscrits resp. aux triangles QAC, RBA
 B' le second point d'intersection de (BQ) avec Iq
 et C' le second point d'intersection de (CR) avec Ir .

- Une chasse angulaire à π près :

nous avons :

$$\angle CB'B = \angle CB'Q ;$$

d'après le théorème de l'angle inscrit,

$$\angle CB'Q = \angle CAQ ;$$

par hypothèse,

$$\angle CAQ = \angle RAB ;$$

d'après le théorème de l'angle inscrit,

$$\angle RAB = \angle RC'B ;$$

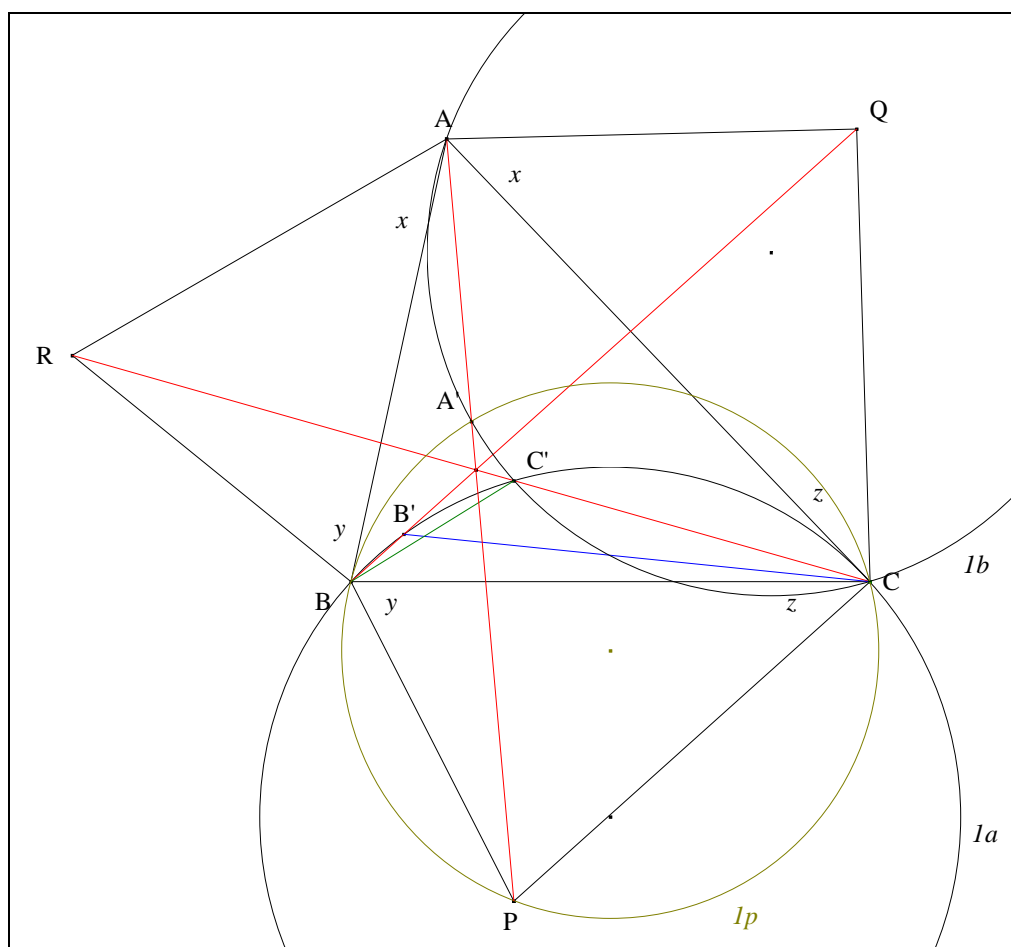
nous avons :

$$\angle RC'B = \angle CC'B ;$$

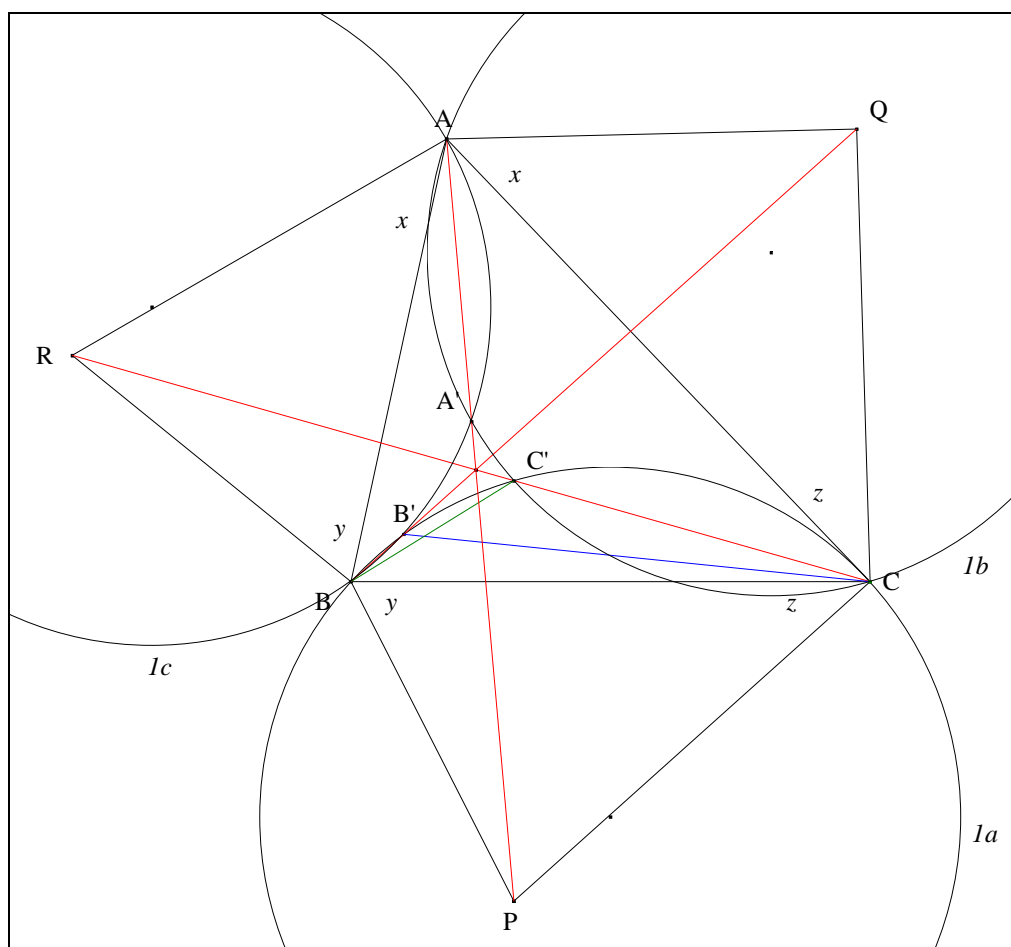
par transitivité de la relation =,

$$\angle CB'B = \angle CC'B.$$

- **Conclusion partielle :** d'après le théorème de l'angle inscrit, B, B', C' et C sont cocycliques.
- Notons Ia ce cercle.



- Notons l_p le cercle circonscrit au triangle PCB
et A' le second point d'intersection de (AP) avec l_p .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que C, C', A' et A sont cocycliques.
- Notons l_b ce cercle.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que $A, A', B' \text{ et } B$ sont cocycliques.
- Notons Ic ce cercle.
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" appliqué à Ia, Ib et Ic , $(AA'), (BB') \text{ et } (CC')$ sont concourantes.
- **Conclusion :** $(AP), (BQ) \text{ et } (CR)$ sont concourantes.

Une courte biographie de Kostas Vittas:

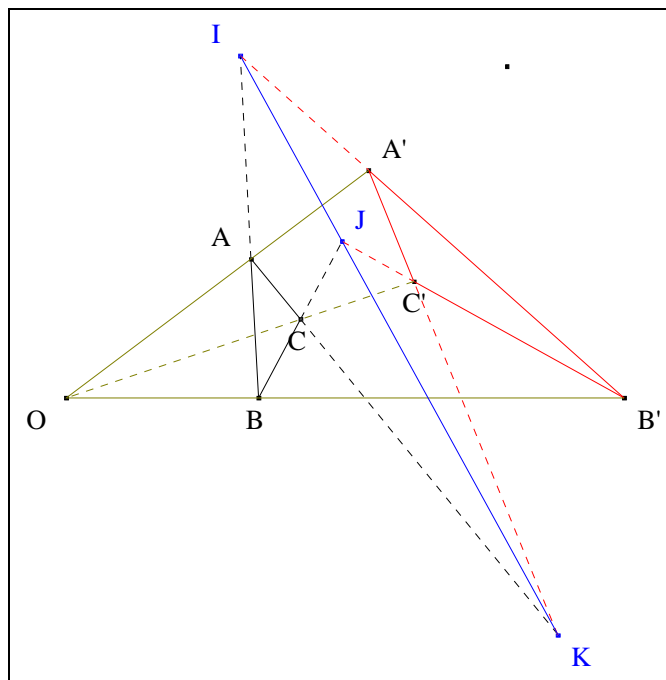
Kostas Vittas est né Grèce en 1949.

Il termine ses études d'Architecture à l'université d'Athènes en 1973 et se consacre principalement à la construction de maisons privées.

Il se marie avec l'ingénieure Jane Strofila, s'installe à Marousi, une banlieue d'Athènes, et aura trois de cette union, Nikos, Giorgos et Alejandro. C'est en 1999 que Kostas redécouvre sa passion pour la Géométrie en commençant par résoudre comme un débutant des problèmes de cette ancestrale discipline. Cette passion pour la Géométrie qui l'habitait déjà lorsqu'il était un jeune lycéen, il la partage largement aujourd'hui avec les membres du célèbre site *Mathlinks* où il apparaît comme un "solver" de talent.

Il prend sa retraite en août 2009 et m'a confié qu'il envisageait d'écrire prochainement un recueil d'exercices de Géométrie

Le théorème des deux triangles de Desargues



Hypothèses : ABC un triangle,
 A'B'C' un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes,
 O le point de concours de (AA') et (BB'),
 et I, J, K le point d'intersection de (AB) et (A'B'), de (BC) et (B'C'), de (CA) et (C'A').

Conclusion : (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés.³⁴

³⁴ Ce résultat se trouve dans les écrits d'Abraham Bosse (Tours, 1604-Paris, 1676), un continuateur de l'œuvre de Desargues, qui serait son élève d'après François Joseph Servois et Jean-Victor Poncelet.