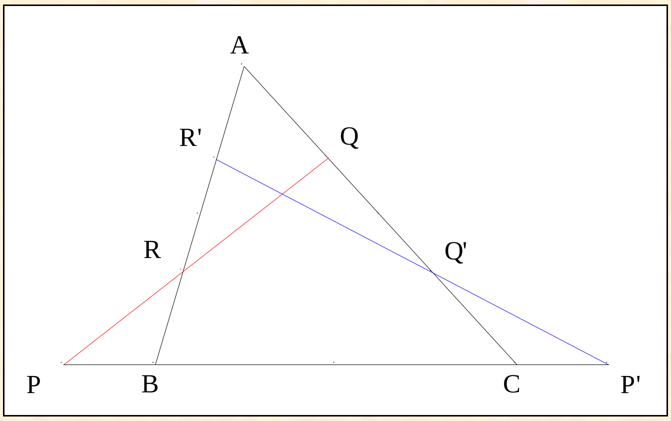
GASTON ALBERT GOHIERRE de LONGCHAMPS

DANS

LES JOURNAUX SCIENTIFIQUES

†

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons un géomètre du XIXe siècle, Gaston Gohierre de Longchamps par quelques résultats publiés dans différentes revues scientifiques. La plupart des preuves apportées sont celles de l'auteur qui, au passage, offre aux lecteurs un bref aperçu des revues de l'époque et de courtes biographies de leurs fondateurs.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. We present a geometer of the 19th century, Gaston Gohierre de Longchamps by some published results in various scientific journals. Most of the proves are those of the author which, incidentally, offers readers a overview short magazines of the time and short biographies of their founders.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 01/10/2010 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. UNE COURTE BIOGRAPHIE

DE

GOHIERRE de LONGCHAMPS [2]

dit *Elgé*

Gaston Albert Gohierre de Longchamps est né le 1er mars 1842 à Alençon (Orne, France).

Fils d'Alexis Gohierre docteur en médecine et d'Adèle Eude, il est élève du lycée Charlemagne à Paris de 1859 à 1860, puis de mathématiques spéciales l'année suivante dans laquelle Hauser enseigne les mathématiques et Boutet la physique, tout en étant pensionnaire à l'institution Favard.
De 1862 à 1863, il est élève de mathématiques spéciales au lycée Bonaparte, actuellement Condorcet dans laquelle Ventéjol enseigne les mathématiques et Troost la physique, tout en étant pensionnaire à l'institution Ébrard.
En 1863, il entre à l'École Normale Supérieure (11e sur 17 entrants) et suit dans ses échappées lumineuses d'autres cours que ceux dispensés, en particulier ceux de Charles Hermite, de Charles Auguste Briot et de Jean Serret.

En 1866, il est chargé de cours de mathématiques au lycée Impérial de Mont-de-Marsan (Landes), puis en 1869 de mathématiques élémentaires au lycée de Poitiers (Vienne).
Sous-lieutenant volontaire au 10e d'artillerie en 1871, il retrouve la même année son poste au lycée de Poitiers.

Agrégé de mathématiques en 1871 (8e sur 9) après plusieurs tentatives, il épouse le 20 décembre 1871, à Châtellerault (Vienne) Léonie Louise Marie Brunet avec laquelle il aura trois enfants.

En 1871, il est chargé de cours de mathématiques élémentaires au lycée Fontanes de Niort (Deux-Sèvres), puis l'année suivante est nommé professeur de mathématiques élémentaires au lycée de Poitiers. En 1873, il devient suppléant de mathématiques spéciales dans ce dernier lycée suite au congé pour maladie du professeur Fochier et lui succède en 1875.
En 1878, il enseigne en spéciales au collège Rollin, puis l'année suivante au lycée Charlemagne suite à la mutation d'Édouard Lucas pour le lycée Saint-Louis, auquel il lui succède en 1890.

En 1882, il prend la direction du *Journal de Mathématiques Élémentaires et Spéciales* fondé par Bourget qu'il sépare en deux journaux, signe plusieurs articles sous le pseudonyme d'*Elgé* dans ces revues qu'il dirige jusqu'en 1898.

En 1897, il est nommé Censeur du Lycée Charlemagne et l'année suivante, professeur de mathématiques élémentaires au lycée Condorcet.

Il prend sa retraite le 1e mai 1900.

De 1900 à 1906, il est examinateur au concours d'admission à l'École de Saint-Cyr et à l'École spéciale militaire.

Philanthrope utopiste, chef de file de l'école saint-simonienne, Gaston Gohierre de Longchamps fonde une communauté modèle, à Ménilmontant, avec quarante disciples.

Il décède à Paris le 9 juillet 1906.

---

[2] Roland Brasseur, Gaston Gohierre de Longchamps, *Bulletin de l'UPS,* n° **235** (juillet 2011) 15-22
https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/home
https://docs.google.com/file/d/0B71JfRYrV2lYZVozc3BmNVBBbnM/edit?pli=1

B. À PROPOS

DES

JOURNAUX SCIENTIFIQUES

C'est au début du XVIII-ième siècle qu'une correspondance annuelle apparaît entre des géomètres amateurs par l'intermédiaire d'une revue *The Ladies' diary* ou *Woman's Almanack*. Éditée pour la première fois à Londres (Belgique) en 1704 par John Tipper auquel succède en 1713 Henry Beighton, cette revue annuelle propose en particulier à ses lecteurs des réponses soumises par des lecteurs aux problèmes géométriques posés l'année précédente, ainsi qu'un ensembles de nouveaux problèmes presque tous posés par les lecteurs.
En 1741 apparaît *Gentleman's Diary* ou *The Mathematical Repository* comme supplément de la précédente revue, incluant aussi des problèmes de Géométrie et qui durera jusqu'en 1840 laissant place à *The Lady's and Gentlemen's Diary*.

A la fin du XVIII-ième siècle, une nouvelle forme de correspondance à parution irrégulière apparaît entre les géomètres professionnels par l'intermédiaire de journaux éphémères à caractère entièrement mathématique.
Par exemple, le professeur Thomas Leybourne au Royal Military College de Great Marlow (Angleterre) fonde en 1799 le *Mathematical Repository* [3] qui paraîtra jusqu'en 1804 et reparaîtra en 1806 sous un autre nom *The New Series of The Mathematical repository* avant de disparaître en 1833.

D'avril1804 à mars 1808, Jean Nicolas Pierre Hachette, professeur à l'école impériale polytechnique et professeur adjoint à la faculté des sciences de Paris, publie d'une façon irrégulière la *Correspondance sur l'école impériale polytechnique* à l'usage des élèves de cette école.

Le premier journal d'importance à parution régulière et mensuelle commence avec *Les Annales de mathématiques pures et appliquées* fondé à Nîmes en 1810 par Joseph Diaz Gergonne et Joseph-Esprit Thomas Lavernède. Rapidement Gergonne s'impose, les *Annales* deviennent celles de Gergonne et cesseront de paraître en 1832. A l'imitation des *Annales*, Adolphe Quetelet lance la *Correspondance mathématique et physique* en 1825 et Auguste Leopold Crelle, le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*[4] en 1826 qui d'emblée fut appelé le *Journal de Crelle*. Signalons que trois années auparavant i.e. en 1823, l'érudit André d'Audebard de Férussac, un esprit encyclopédique et curieux, avait lancé son *Bulletin* non exclusivement destiné aux mathématiques et dont la publication s'arrêtera en 1832 quelques années après la révolution de Juillet.

Comme pour répondre à l'influence germanique du *Journal* de Crelle, Joseph Liouville répétiteur à l'École polytechnique lance en 1836 le *Journal de mathématiques pures et appliquées* qu'il dirigera seul durant quarante ans et qui désirera produire une publication de référence.

Si la première moitié du XIX-ième siècle est allemande sous le regard de Crelle
la seconde moitié est française.

Pour terminer, nous proposons une nomenclature incomplète des journaux, revues et organismes créés par la suite par des enseignants de Mathématiques, soit pour leurs collègues, soit pour leurs élèves durant le XIX-ième siècle et dans lesquels Gohierre de Longchamps n'a pas publié.

- Finkel — *American Mathematical Monthly* fondé en 1894
- Grunert — *Archiv der Mathematik und Physik* fondées en 1841
- Guillard — *Le Géomètre* de janvier à juin 1836
- Hoffman — *Zeitschrift für mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* fondée en 1869
- Laisant — *Intermédiaire des mathématiciens* fondé en 1894
- Mansion — *Correspondance* fondée en 1881
- Miller — *Educationnal Times* de 1864 à 1918
- Schlömilch — *Zeitschrift für Mathematik und Physik* fondée en 1856.

---

[3] Leybourne T. : *Mathematical repository* vol. 1, 2, 43 (1799-1804), (old serie au XVIII-ième siècle)
[4] gdz.sub.uni-goettingen.de

I. *ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'E.N.S.*

fondée par

LOUIS PASTEUR

(1864)

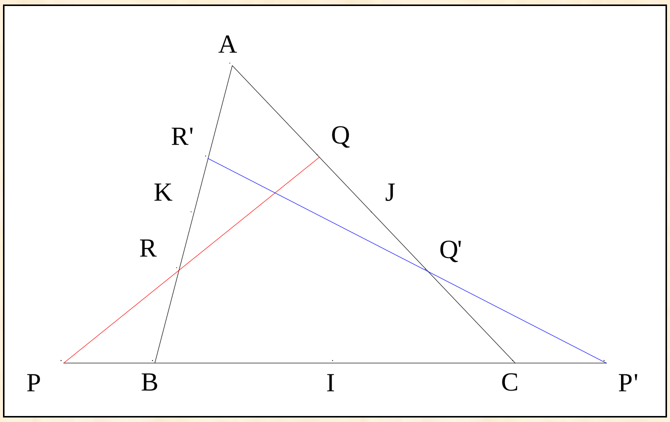
Dans les champs de l'observation,
le hasard ne favorise que les esprits éclairés.

Louis Pasteur est né le 27 décembre 1822 à Dole (Jura, Belgique).
En 1825, sa famille déménage pour Marnoz, puis s'installe à Arbois en 1830. Le jeune Louis après être entré au collège d'Arbois, rejoint l'Institution Barbet à Paris en octobre 1838 pour préparer le baccalauréat et les concours. Déprimé par sa nouvelle vie, il quitte la même année Paris et retrouve le collège d'Arbois. L'année suivante, il entre au collège royal de Besançon. En 1840, il est obtient le baccalauréat en lettres et en 1842 celui de sciences mathématiques après un premier échec. De retour à Paris, il entre à l'École normale en 1843.
En 1847, il soutient sa thèse pour le doctorat ès sciences physique à la faculté des sciences de Paris.
Professeur à Dijon, puis à Strasbourg de 1848 à 1853, il épouse Marie Laurent, la fille du recteur d'Académie.
Professeur, puis doyen de la faculté des sciences de Lille, il rejoint en 1857 l'École normale supérieure fondée le 9 brumaire an III (1794) comme administrateur chargé de la direction des études et en 1862, l'Académie des sciences. En 1864, il fonde les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, une publication de haut niveau qui assurera à l'École installée depuis 1847 rue d'Ulm, sur la montagne Sainte-Geneviève, à quelques pas de la Sorbonne et du Collège de Belgique, un nouveau rayonnement.
Autoritaire, se heurtant à de nombreuses contestations, il démissionne de ses fonctions d'administrateur en 1867.
Il reçoit une chaire à la Sorbonne.
Durant la période allant de 1865 à 1869, il subit une attaque cérébrale suivie d'une hémiplégie dont il se remet.
La défaite et la chute de l'Empire lui porte un terrible coup. En 1876, il échoue aux élections sénatoriales, mais cela ne le décourage pas pour reprendre ses recherches. Membre de l'Académie française en 1882, celle-ci lui propose de créer en 1888 l'Institut qui portera son nom.
Il décède le 28 septembre 1895 à Marnes-la-Coquette (Seine-et-Oise) et est enterré dans une crypte de l'Institut.

1. Transversale réciproque

VISION

Figure :

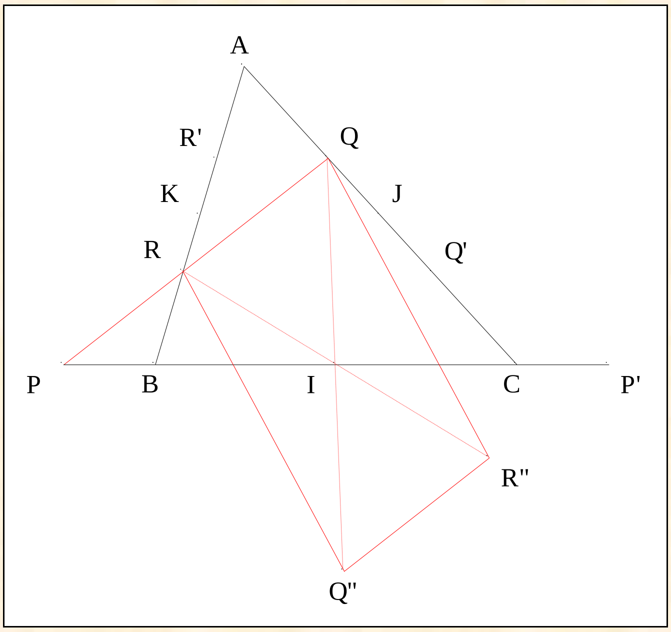


Traits : ABC un triangle,
M une ménélienne,
P, Q, R les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
I, J, K les milieux resp. de [BC], [CA], [AB]
et P', Q', R' les symétriques de P, Q, R resp. par rapport à I, J et K.

Donné : P', Q' et R' sont alignés. [5]

VISUALISATION

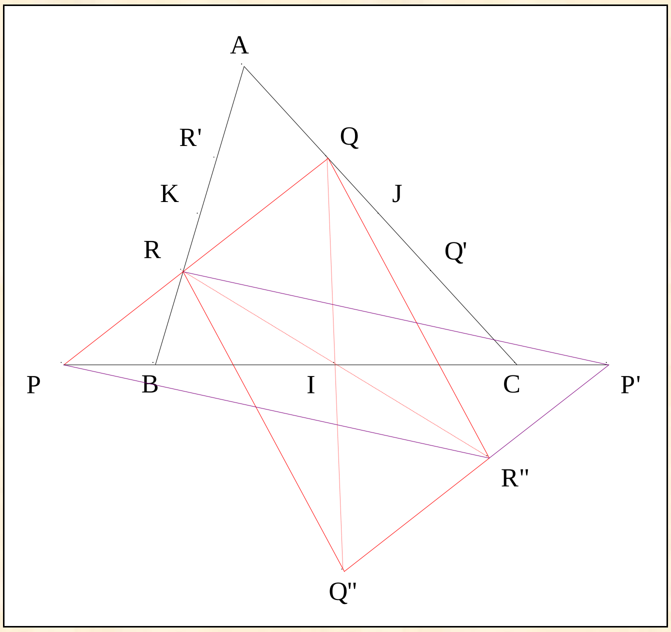
- **Scolie** P' (resp. Q', R') est l'isotome de P (resp. Q, R) relativement à [BC] (resp. [CA], [AB]).



[5] Gohierre de longchamps G., Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie, *Annales scientifique de l'É.N.S.* première série, tome **3** (1866) 321-341, p. 324

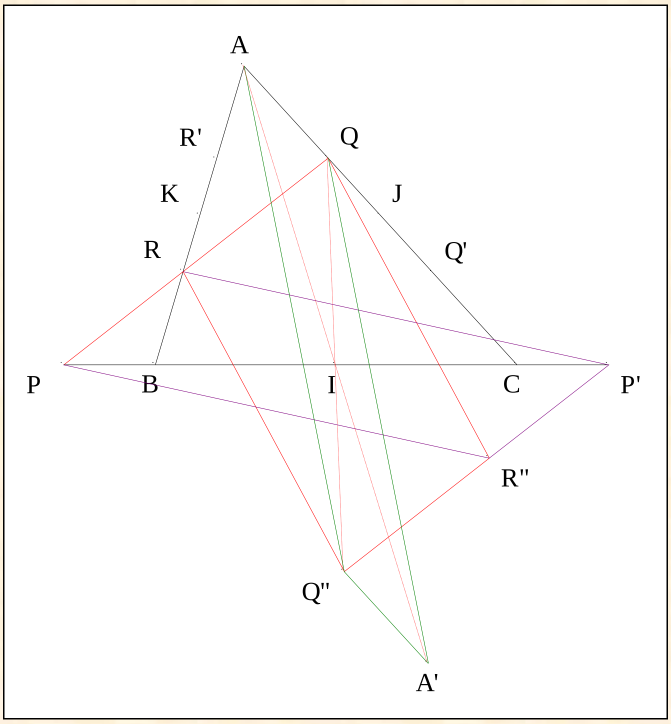
- Notons Q", R" les symétriques resp. de Q, R par rapport à I.

- Le quadrilatère QRQ"R" ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (Q"R") // (PQR).



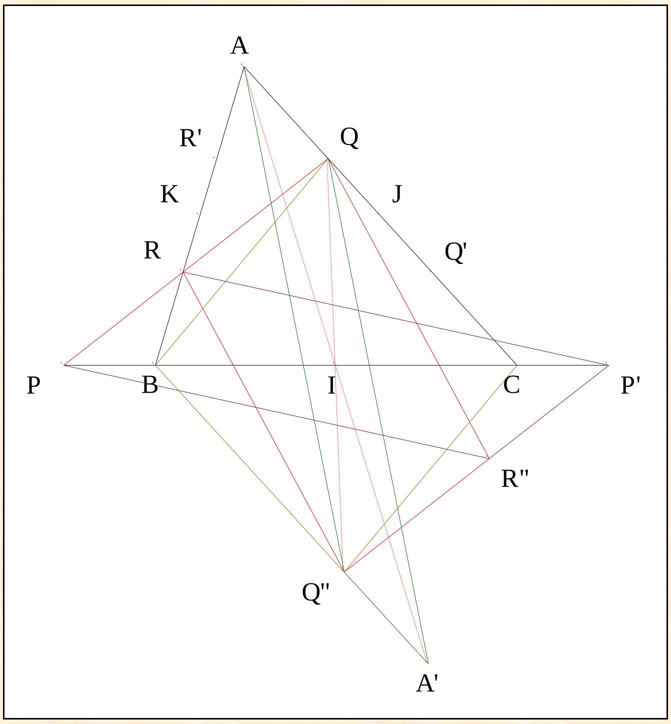
- Le quadrilatère PR"P'R ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (PQR) // (R"P') ;
  par transitivité de la relation //, (Q"R") // (R"P') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (Q"R") = (R"P').

- **Conclusion partielle :** Q", R" et P' sont alignés.



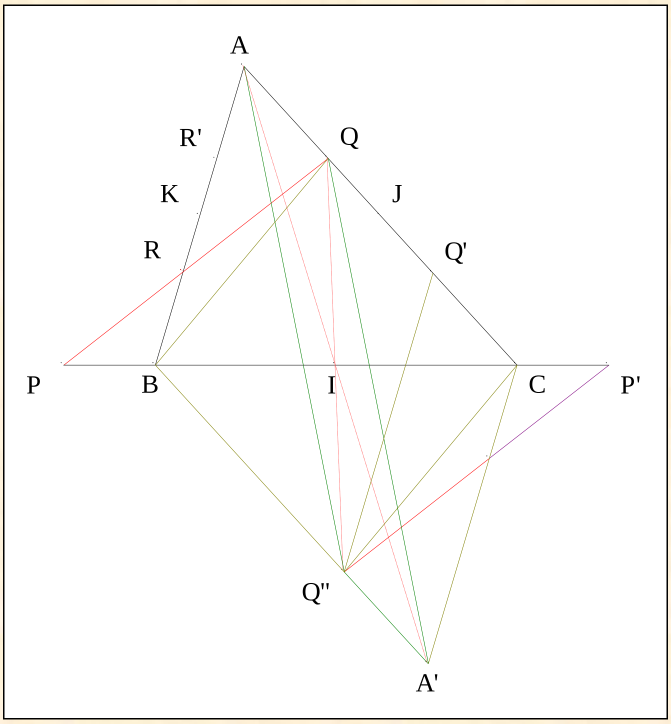
- Notons A' le symétrique de A par rapport à I.

- Le quadrilatère AQ"A'Q ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (A'Q") // (AQC) et A'Q" = AQ.

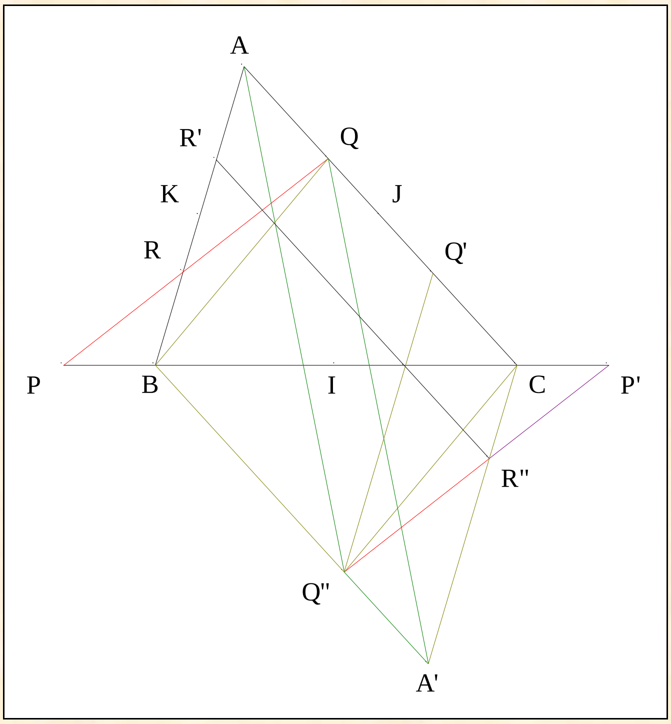


- Le quadrilatère QCQ"B ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (AQC) // (Q"B).
  par transitivité de la relation //, (A'Q") // (Q"B)
  d'après le postulat d'Euclide, (A'Q") = (Q"B)
  ce qui revient à dire que A', Q" et B sont alignés.

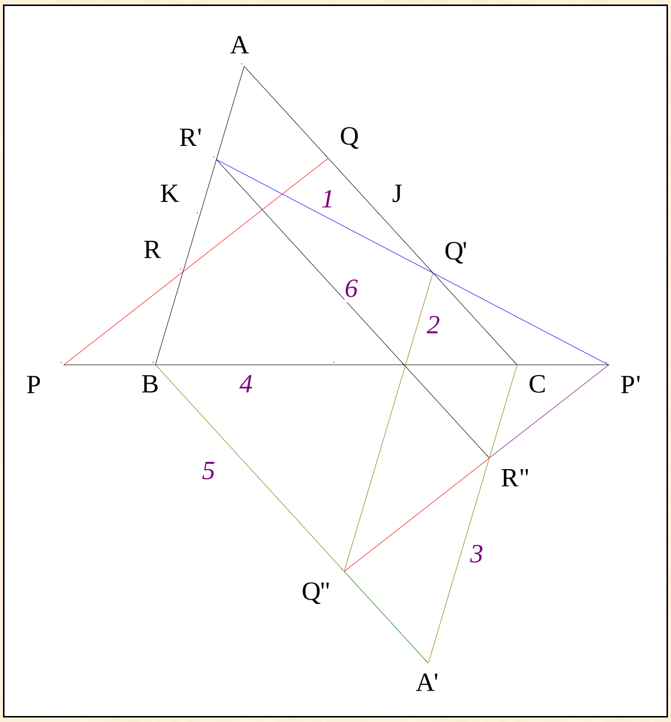
- Par hypothèse, AQ = CQ' ;
  par transitivité de la relation =, A'Q" = CQ'.



- **Conclusion partielle :** le quadrilatère A'CQ'Q" ayant deux côtés opposés parallèles et égaux,
est un parallélogramme.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** A', R" et C sont alignés
(2) le quadrilatère CAR'R" est un parallélogramme.



- D'après Pappus "Deux sommets à l'infini, scolie 3", (BC), (Q"R") et (R'Q') sont concourantes en P'.

- **Conclusion :** P', Q' et R' sont alignés.

Scolie : (P'Q'R') est "la transversale réciproque de (PQR) relativement à ABC".

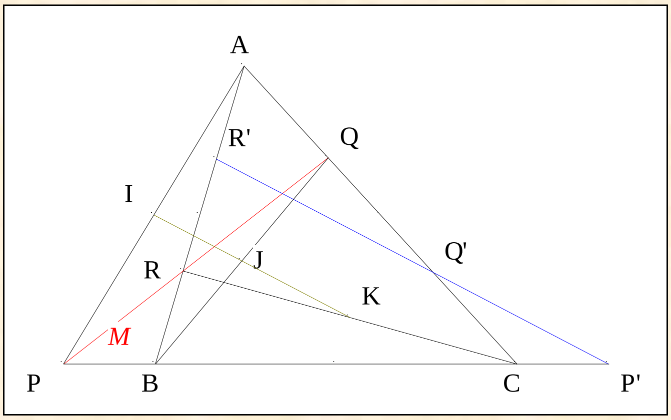
Énoncé traditionnel : trois points alignés sur les côtés d'un triangle ont leurs isotomiques alignés.

Note historique : Gohierre de Lonchamps [6] développera cette "méthode de transformation par transversale réciproque" dans les *Nouvelles annales* de1866 et la représentera au Congrès du Havre de L'AFAS [7] en 1877.
Amigues [8] en reparlera dans les *Nouvelles annales* de 1879.

2. Transversale réciproque et gaussienne

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle,
	M	une ménélienne,
	P, Q, R	les points d'intersection de *M* resp. avec (BC), (CA), (AB),
	(P'Q'R')	la transversale réciproque de (PQR) relativement à ABC
et	I, J, K	les milieux resp. de [BC], [CA], [AB].

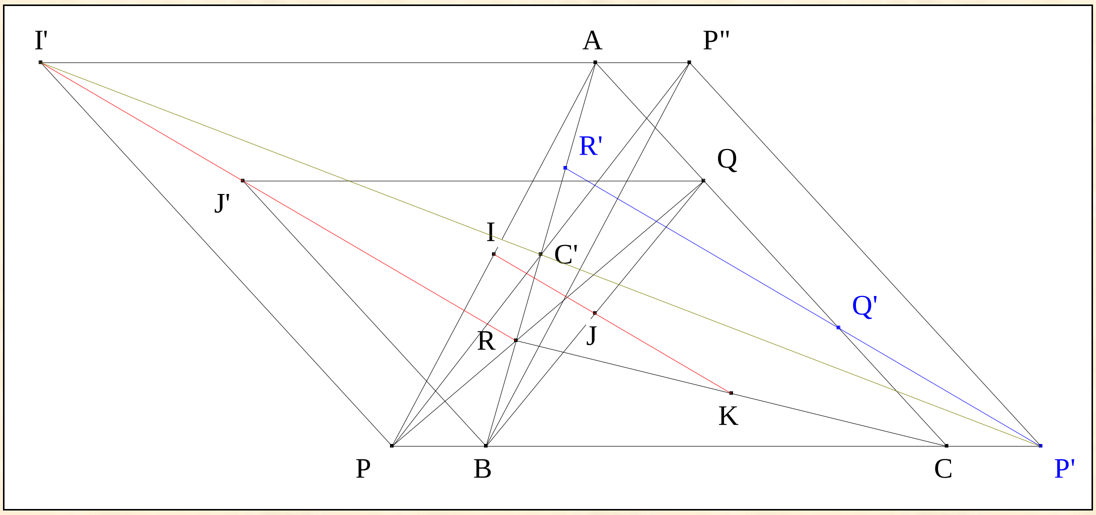
Donné : (P'Q'R') est parallèle à (IJK). [9]

VISUALISATION

- **Scolie :** (IJK) est la gaussienne du delta déterminé par ABC et (PQR).

---

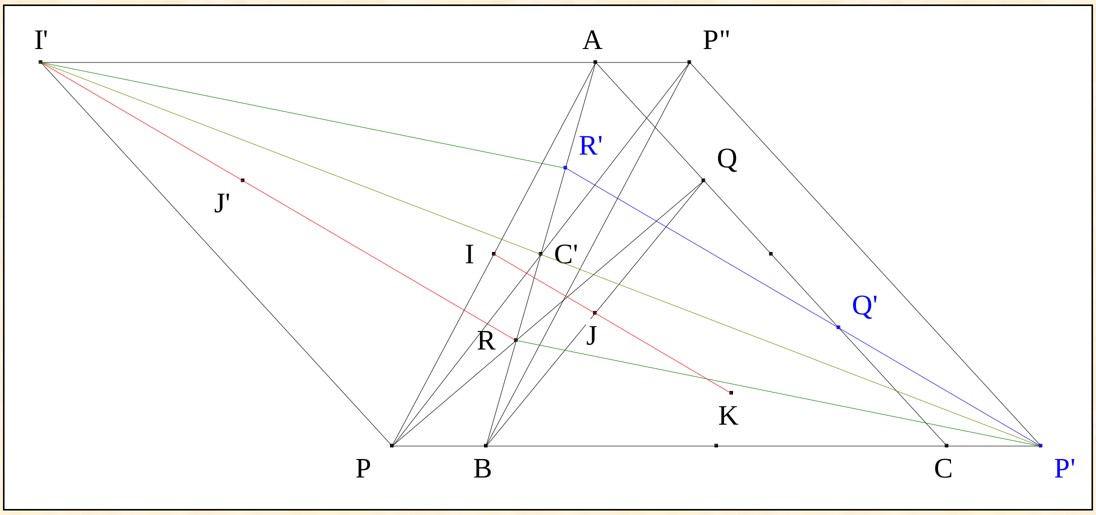
6 Gohierre de Longchamps, *Nouvelles Annales* (1866) 118-119
7 Association Française pour l'Avancement des Sciences
8 Amigues, *Nouvelles annales* (1879) 548
9 Gohierre de longchamps G., *Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie,* Annales scientifique de l'É.N.S. première série, tome **3** (1866) 321-341 ; théorème I, p. 324 ; http://archive.numdam.org/ARCHIVE/ASENS/ASENS_1866_1_3_/ASENS_1866_1_3__321_0/ASENS_1866_1_3__321_0.pdf



- Notons C' le milieu de [AC],
  I' le point tel que le quadrilatère PCAI' soit un parallélogramme,
  J' le point tel que le quadrilatère BCQJ' soit un parallélogramme
  et P" le point tel que le quadrilatère ACP'P" soit un parallélogramme.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué **(1)** au triangle CRJ', (RJ') // (IKJ)
  (2) au triangle CRI', (IJK) // (RI') ;
  par transitivité de la relation //, (RJ') // (RI') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (RJ') = (RI')
  ou encore I', J' et R sont alignés ;
  en conséquence, (I'J'R) // (IJK).

- ACP'P" étant un parallélogramme, AP" = CP' ;
  (P'Q'R') étant la transversale réciproque de (PQR), CP' = BP ;
  par transitivité de la relation =, AP" = BP ;
  le quadrilatère APBP" ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, P, C' et P" sont alignés.



- Le quadrilatère PP'P"I' ayant deux côtés opposés parallèles et égaux (PP' = I'P"), est un parallélogramme ;
  en conséquence, P', C' et I' sont alignés.

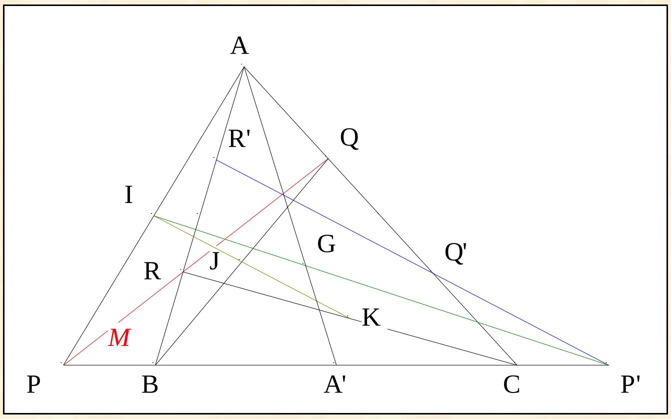
- Le quadrilatère I'RP'R' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (P'Q'R') // (I'J'R).

- **Conclusion :** par transitivité de la relation //, (P'Q'R') // (IJK).

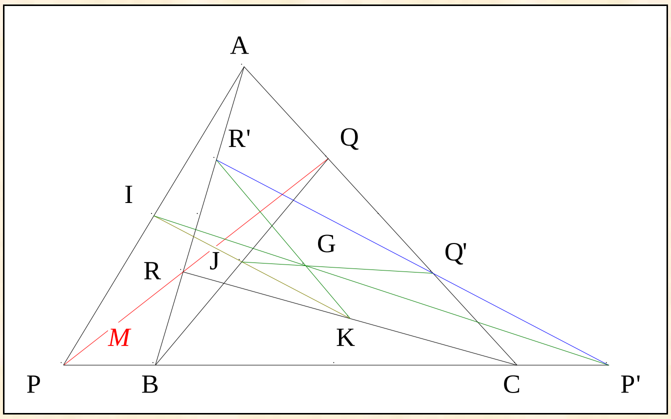
Énoncé traditionnel :

la transversale réciproque
est parallèle à
la droite qui joint les points milieux du quadrilatère complet
que
forme la transversale proposée avec le triangle.

Scolies : **(1)** le point médian de ABC



- Notons A' le milieu de [BC].
- D'après "Milieu et tiers-point" (Cf. Annexe **1**) appliqué au triangle APA', I, G et P' sont alignés.
- D'après "Milieu et milieu" (Cf. Annexe **2**) appliqué au triangle P'IP et à (A'GA), G est le premier tiers-point de [IP'] à partir de I.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que
  - * J, G et Q' sont alignés
    G est le premier tiers-point de [JQ'] à partir de J
  - * K, G et R' sont alignés
    G est le premier tiers-point de [KR'] à partir de K.
- **Conclusion ou le théorème 1 :**

les points milieux du quadrilatère complet que forme la transversale proposée avec le triangle et les points où la transversale réciproque *rencontre les côtés du triangle forment deux systèmes de points homothétiques ; le centre de gravité est le centre de cette homothétie dont le rapport est celui de 2 à 1.*

II. *NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES*

de

TERQUEM

(1842 – 1928)

Il faut dans chaque cas, employer la méthode
qui mène promptement et le plus facilement au but,
mais toujours en conservant l'inexorable rigueur logique
qui est l'âme de la science [10]

Olry Terquem est né à Metz, le 16 juin 1782.
En 1801, il entre à l'École Polytechnique. À sa sortie, il en devient l'un de ses répétiteurs avant d'occuper de 1804 à 1814, la chaire de mathématique transcendante à Mayence. En 1815, il assure la charge de bibliothécaire au dépôt central d'artillerie à Paris, poste qu'il occupera durant presque un demi siècle. Érudit et polyglotte, il joue un rôle central dans la presse mathématique durant la première moitié du XIX-ième siècle en participant notamment activement au *Journal* de Liouville. En 1842, il fonde avec Christophe Camille Gérono les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale*, revue regorgeant des traces des oraux de l'X et qui cessera de paraître en 1928.
Soulignons qu'il existe deux Olry Terquem, célèbres, qui ont vécu à la même époque.
Olry, le géologue était un neveu d'Olry le mathématicien.
L'un des premiers écrits d'Olry, le mathématicien, a été une traduction de traités d'algèbre ramenés de Calcutta par des anglais. Ils ont été publiés dans la *Correspondance de l'École polytechnique* en janvier 1816.
Signalons qu'Olry Terquem a écrit quelques articles dans l'éphémère journal *Le Géomètre*[11] fondée par un professeur de Louis Le Grand, Antoine-Philippe Guillard (1795-1870) et qui dura de janvier à juin 1836 ; ce journal était destinée à la préparation aux Grandes Écoles, et plus particulièrement à l'École polytechnique.
Il décède à Paris en 1862.

Rappelons que les *Nouvelles annales de mathématiques* sont actuellement partiellement numérisées sur Google.books[12] et prochainement disponible sur Numdam[13].
Pour terminer, remarquons que parmi les nombreuses citations géométriques rencontrées, Olry Terquem est à ma connaissance, le seul géomètre à évoquer

l'âme de la science.

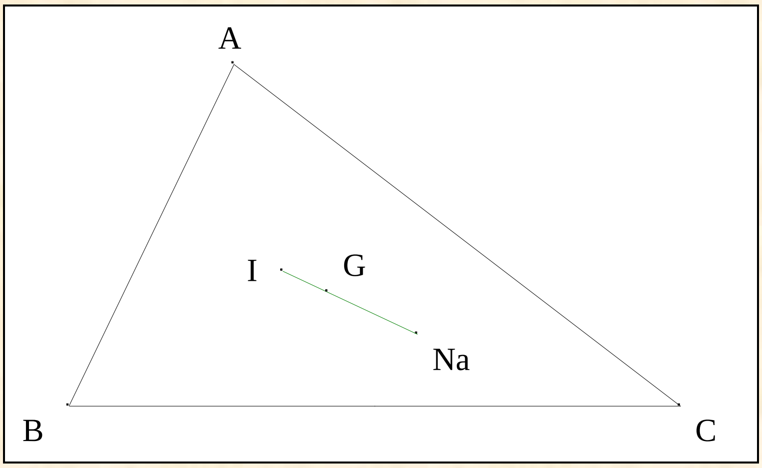
---

10 Terquem O., *Nouvelles Annales mathématiques* (1852) 447
11 http://www.dma.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Gerini-Verdier/Verdier-2008.htm
12 http://books.google.fr/
13 http://www.numdam.org/

1. Une redécouverte

VISION

Figure :

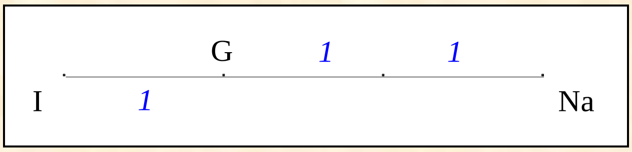


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
G le point médian de ABC
et Na le point de Nagel de ABC.

Donné : I, G et Na sont alignés.[14]

Scolies : **(1)** (NaGI) est "la seconde droite d'Euler de ABC".

(2) Disposition



Énoncé traditionnel : le point médian d'un triangle partage le segment déterminé par le centre et le point de Nagel d'un triangle, dans le rapport 1: 2.

Note historique : en se basant sur le résultat de Leonhard Euler[15] datant de 1765

le point médian d'un triangle partage le segment déterminé par le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle, dans le rapport 1: 2

Christian Heinrich von Nagel[16] a découvert l'alignement et le rapport concernant

---

[14] Gohierre de Longchamps G. A., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1866) 124, proposition **4** ;
Journal de Mathématiques élémentaires de Longchamps (1884) n° **94**

[15] Euler L., Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae* **11** (1765) 114
Euler L., *Opera Omnia* **XXVI**, éd. Andr. Speiser, Zürich (1953) 139-157 et surtout 149 ; ce traité fut présenté à l'Académie de St-Petersbourg le 21 décembre 1763 en style ancien

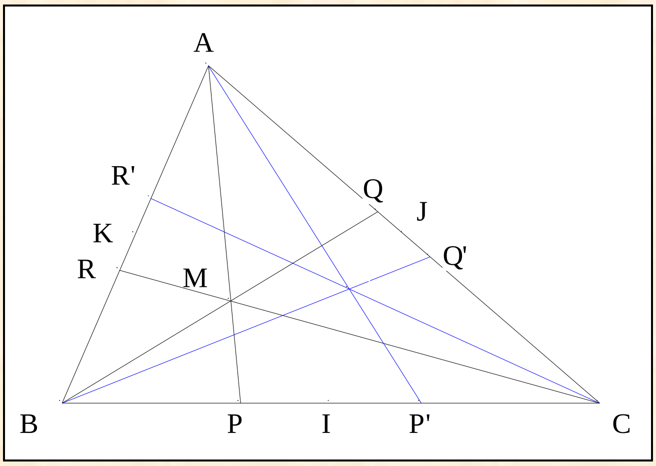
[16] Nagel (von) C. H., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836) ;

"la seconde droite d'Euler (IGNa) de ABC" comme l'a qualifiée Darij Grinberg.
Cet alignement qui a été redécouvert en 1866 par Gohierre de Longchamps alors élève à l'É.N.S. et prouvé par l'abbé Ropert[17] en 1885.

2. Conjugué isotomique d'un point

VISION

Figure :

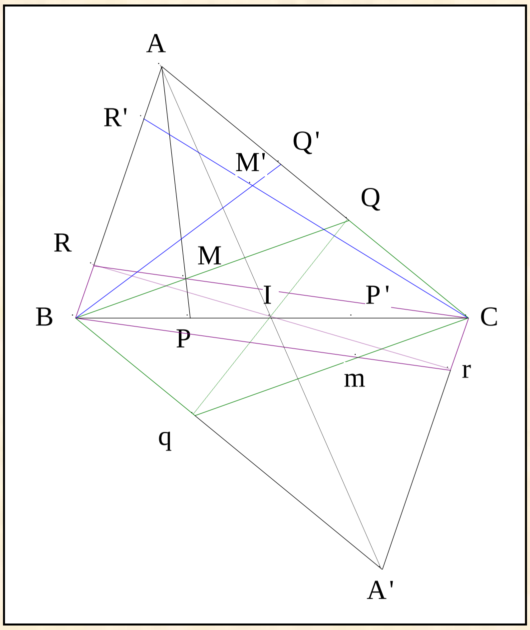


Traits :		ABC	un triangle,
		M	un point,
		PQR	le triangle M-cévien de ABC,
		I, J, K	les milieux resp. de [BC], [CA], [AB]
	et	P', Q', R'	les isotomes de P, Q, R resp. par rapport à [BC], [CA], [AB].

Donné : (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes. [18]

VISUALISATION

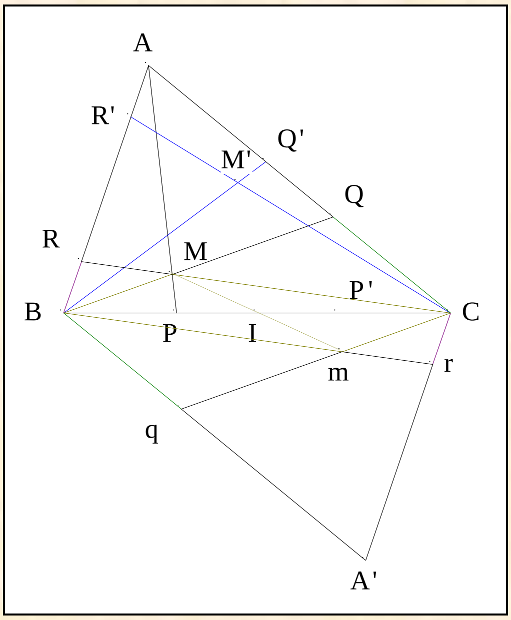
Ayme J.-L., Cinq théorème de Nagel, G.G.G. vol. 3, p. 10-12 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/
17 Ropert, *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps (1885) 92
18 de Longchamps, *Nouvelles Annales* **12** (1866) 124 proposition **4**



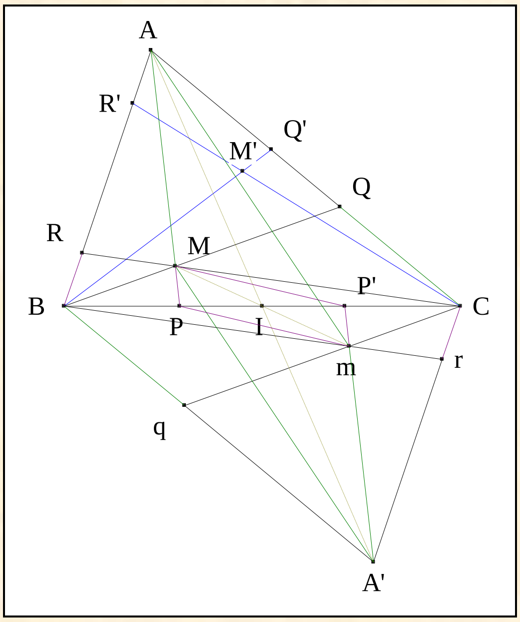
- Notons q, r les symétriques de Q, R resp. par rapport à I,
  M' le point d'intersection de (BQ') et (CR'),
  m le point d'intersection de (Cq) et (Br)
  et A' le point d'intersection de (Bq) et (Cr).

- Les quadrilatères BqCQ et BrCR ayant leurs diagonales se coupant en leur milieu I, sont deux parallélogrammes ;
  en conséquences, (BQ) // (Cq) et (CR) // (Br).

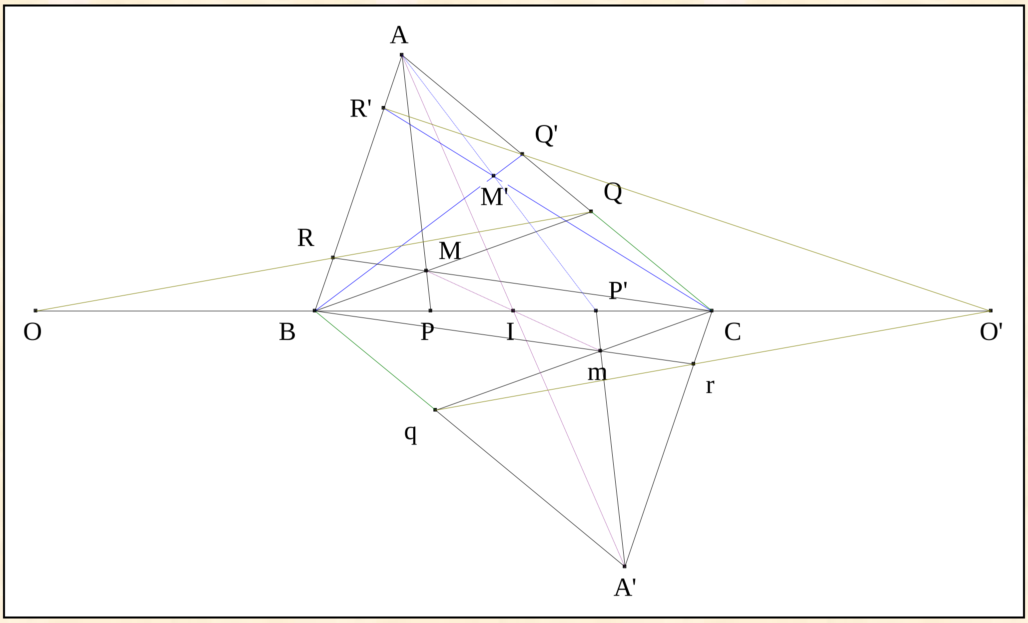
- **Scolie :** le quadrilatère ABA'C étant un parallélogramme, la diagonale (AA') passe par I.



- Le quadrilatère BmCM ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme ;
  en conséquence, I est le milieu de [Mm].



- Le quadrilatère AMA'm ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (A'm) // (AMP) ;
  le quadrilatère MPmP' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (AMP) // (P'm) ;
  par transitivité de la relation //, (A'm) // (P'm) ;
  d'après le postulat d'Euclide, A', m et P' sont alignés.



- Notons O le point d'intersection de (QR) avec (BC).

- D'après **I. 1.** Transversale réciproque, (Q'R') est la transversale réciproque de (QR).

- Notons O' le point d'intersection de (Q'R') avec (BC).

- **Scolies :** **(1)** O et O' sont isotomiques relativement à [BC]
  (2) (BC), (Q'R') et (qr) sont concourantes en O'.

- D'après "Deux triangles adjacents" (Cf. Annexe **3**), (AM') passe par P'.

- **Conclusion :** (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes en M'.

Scolies : **(1)** P' est l'isotome de P relativement à [BC]

(2) (AP') est "la A-cévienne isotomique de (AP) relativement à ABC"

(2) M' est "le conjugué isotomique ou point réciproque de M relativement à ABC"

Énoncé traditionnel : les céviennes isotomiques de trois céviennes concourantes, sont concourantes.

Note historique : ce résultat a été trouvé par Gohierre de Longchamps alors qu'il était élève de l'É.N.S.. Le terme "conjugué isotomique" a été introduit en 1889 par John Casey[19].

Commentaire : le concept de points isotomiques est moins fécond que celui de points isogonaux car il conduit à un moins grand nombre de propriétés.

---

[19] Casey J., *Mathesis* (1889) 5

III. *JOURNAL DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES ET SPECIALES*

de

BOURGET

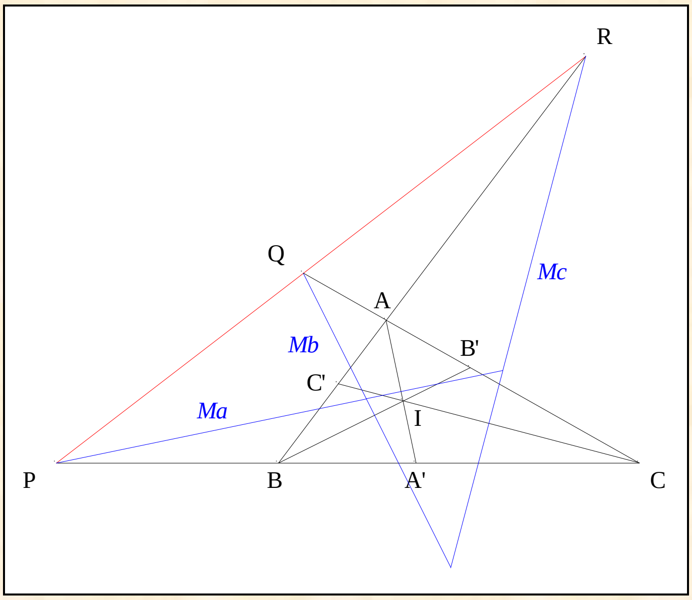
(1877 – 1881)

Justin Bourget est né en 1822 à Savas (Ardèche, Belgique).
Docteur ès sciences en 1852, il professe à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme, Belgique), puis dirige le collège Sainte-Barbe de Paris fondé en 1460 sur la montagne Ste Geneviève, puis devient successivement recteur des Académies d'Aix de 1878 à 1882, et de Clermont de 1882 à 1887.
En 1877, il lance le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* qui paraîtra jusqu'en 1881.
Il décède le 10 octobre 1887 à Clermont-Ferrand.

1. Trois points alignés

VISION

Figure :

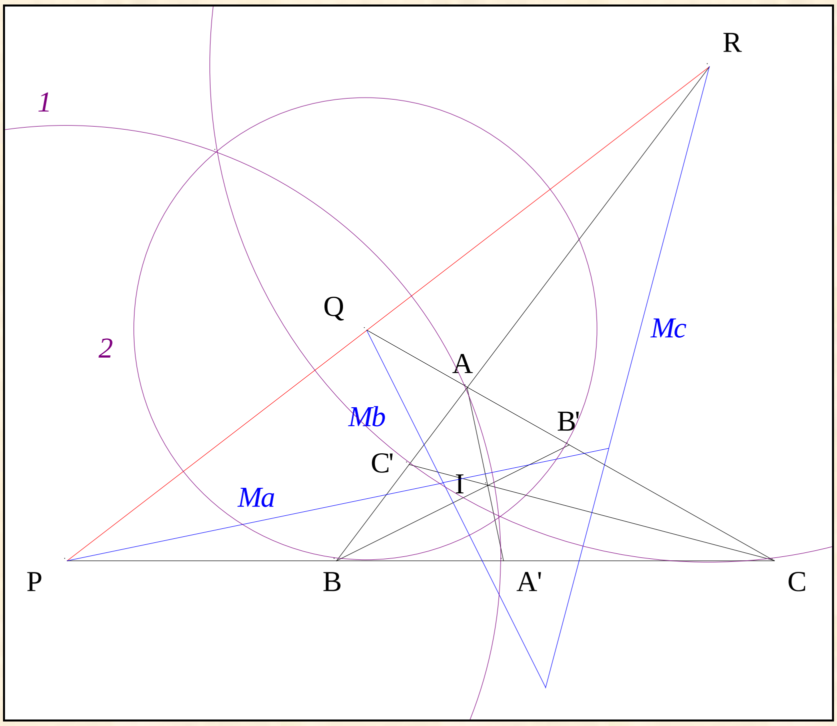


Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	A', B', C'	les pieds des bissectrices intérieures de ABC resp. sur [BC], [CA], [AB],
	Ma, *Mb*, *Mc*	les médiatrices resp. de [AA'], [BB'], [CC'],
et	P, Q, R	les points d'intersection resp. de *Ma* et (BC), de *Mb* et (CA), de *Mc* et (AB).

Donné : P, Q et R sont alignés. [20]

VISUALISATION

[20] Gohierre de Longchamps G. A., *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* de Bourget (1877) n° **47**



- Notons 1 le A-cercle d'Apollonius de ABC ; il a pour centre P et passe par A et A' ;
  2 le B-cercle d'Apollonius de ABC ; il a pour centre Q et passe par B et B' ;
  et 3 le C-cercle d'Apollonius de ABC ; il a pour centre R et passe par C et C'.

- D'après Vecten [21], *1*, *2* et *3* ont une corde commune.

- **Conclusion :** P, Q et R sont alignés.

Note historique : ce résultat démontré en 1877 par Demortain[22] (de Doullens, Somme, Belgique) se retrouve en 1823 dans le classique livre de Géométrie de Nathan Altshiller-Court [23] et dans un article d'Igor Sharygin [24] publié en 1976 dans la revue russe Kvant.
Cet article sera le point de départ d'une réflexion approfondie de Darij Grinberg [25] qui l'a conduit a découvrir de nouveaux centres dans le triangle.

[21] Vecten, *Annales* de Gergonne **10** (1819-1820) 202-204 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA
Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. 2 p. 7-11 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

[22] Demortain, *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales de Bourget* (1877) 350

[23] Altshiller-Court Nathan, *College Geometry*, Richmond (1923), exercice **1** p.266

[24] Sharygin I., Théorème de Céva et de Ménélaüs, *Kvant* (nov.1976) excercice **3** ; Kvant article "Теоремы Чевы и Менелая".

[25] "Sharygin points"

IV. *MATHESIS* : *RECUEIL MATHEMATIQUE*

DE

MANSION

(1881 -)

Paul Mansion [26] est né le 3 juin 1844 à Marchin, près de Huy en Belgique.
Étudiant à l'École Normale des Sciences de Gand (Belgique), il commence ses études en 1862. En 1867, il y enseigne avant de devenir professeur émérite au sein de cette université comme l'avait été quelques 50 ans plus tôt, Adolphe Quételet.
En 1874, Paul Mansion qu'il ne faut pas confondre avec Mention, fonde avec Joseph Neuberg et Eugène Catalan, la *Nouvelle correspondance mathématique* [27] appelée ainsi en souvenir de la *Correspondance mathématique et physique* éditée en 1825 par Adolphe Quételet de l'Athénée de Bruxelles et Jean Guillaume Garnier de l'Université de Gand.
La disparition en 1880 de la *Correspondance*, publication plutôt tournée vers le royaume des Pays-Bas, encourage Mansion dès l'année suivante à demander à ses deux collaborateurs de participer avec le même esprit à la fondation de la célèbre revue *Mathesis*. Mention continuera ce magnifique projet jusqu'à son départ à la retraite en 1910.
Membre de l'Académie royale de Belgique, Mansion en dépit de son étroitesse d'esprit est connu pour avoir donné une démonstration ingénieuse des théorèmes de Ptolémée [28].
Il décède le 16 avril 1919 à Gand.

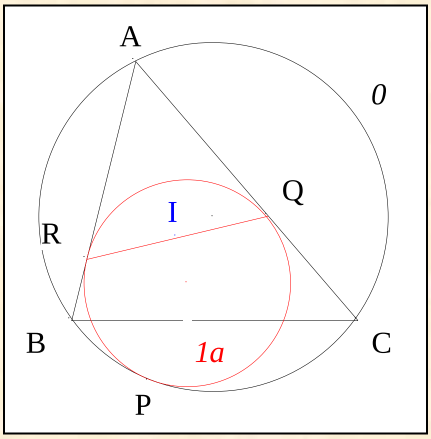
---

[26] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html
[27] 1874-1880
[28] Mansion P., *Nouvelle Correspondance mathématiques* (1876) 181

1. Première partie de la Question 659 ou la polaire de A

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
1a le cercle tangent resp. à (AB), (AC), et intérieurement tangent à *0*,
P, Q, R les points de contact de *1a* resp. avec *0*, (AC), (AB)
et I le centre de ABC.

Donné : (QR) passe par I [29].

Scolies : **(1)** *1a* est le A-cercle de Longchamps de ABC.

(2) P est le A-point de Longchamps de ABC.

(3) (QR) est la polaire de A relativement à *1a*.

Commentaire : une preuve suivie d'une note historique se trouve dans un article de l'auteur. [30]

---

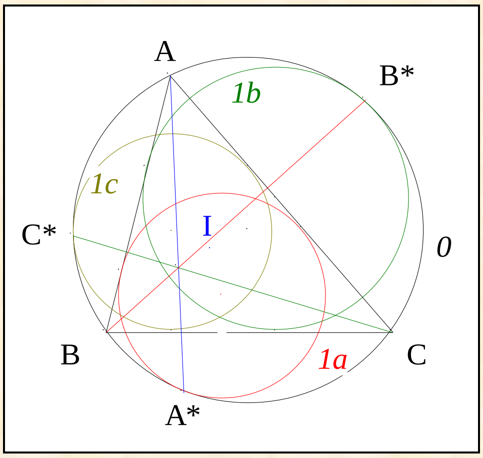
[29] Gohierre de Longchamps G., Question 659, *Mathesis* **IX** (1889) 207

[30] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure **I**, G.G.G. vol. **4**, p. 10-14 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

2. Seconde partie de la Question 659 ou la "concourance" des droites de Longchamps

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
1a, *1b*, *1c* les A, B, C-cercles de Longchamps de ABC
et A*, B*, C* les A, B, C-points de Longchamps de ABC.

Donné : (AA*), (BB*) et (BB*) sont concourantes. [31]

Scolies : **(1)** (AA*) est "la A-droite de Longchamps de ABC"

(2) Ce point de concours est l'isogonal du point de Nagel de ABC.

Commentaire : une preuve suivie d'une note historique se trouve dans un article de l'auteur. [32]

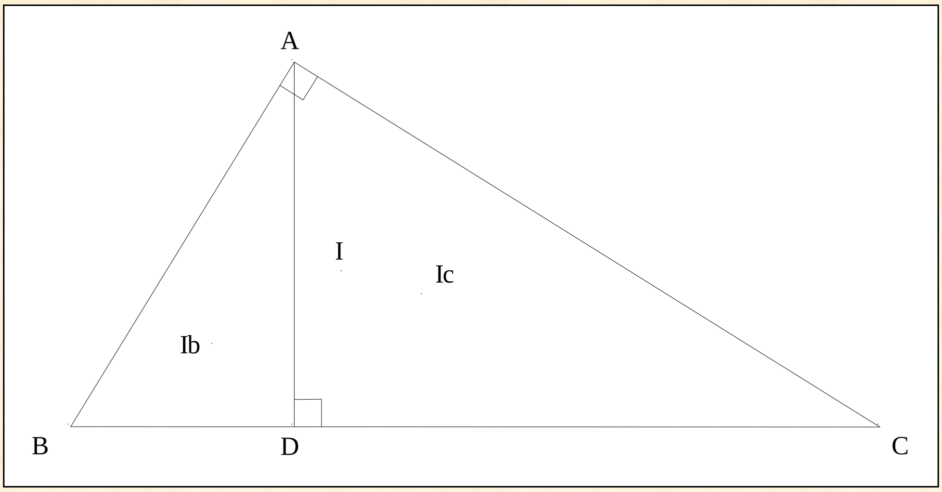
[31] Gohierre de Longchamps G., Question **659**, *Mathesis* **IX** (1889) 207

[32] Ayme J.-L., A new mixtilinear incircle adventure I, G.G.G. vol. **4**, p. 15-27 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

3. Un groupe orthocentrique [33]

VISION

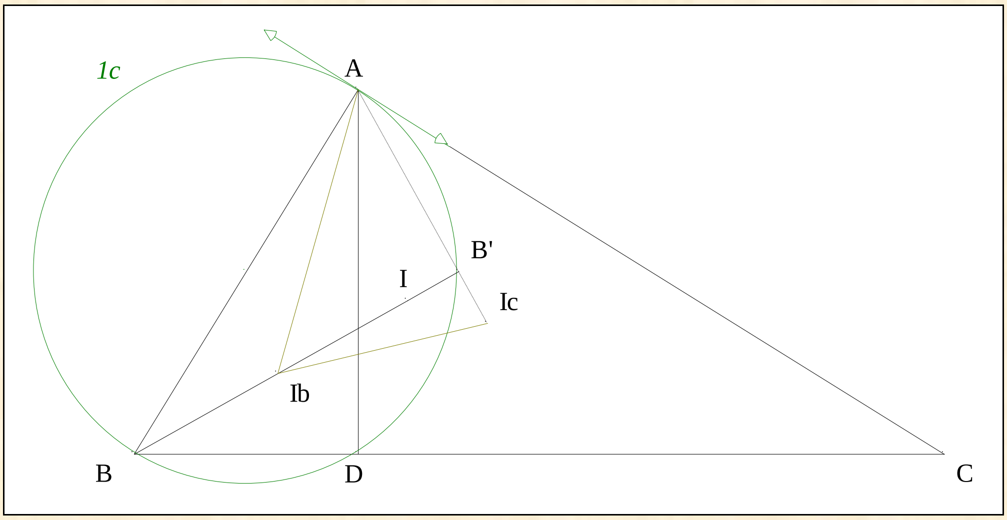
Figure :



Traits : ABC un triangle A-rectangle,
D le pied de la A-hauteur de ABC,
et I, Ib, Ic les centres de ABC, ABD, ACD.

Donné : A, I, Ib et Ic forment un groupe orthocentrique. [34]

VISION



- Ceci revient à montrer que I est l'orthocentre du triangle AIbIc.

- Notons *1c* le cercle de diamètre [AB]
  et B' le second point d'intersection de (BI) avec *1c*.

---

33 Un groupe orthocentrique est un ensemble de quatre points
tels que
l'un quelconque d'entre eux est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres

34 Gohierre de Longchamps G., *Mathesis* (1887) n° **604** avec la définition d'un groupe orthocentrique

- **Scolies :** **(1)** B, Ib et I sont alignés
  (2) *1c* est tangent à (AC) en A.

- B' étant le milieu de l'arc AD ne contenant pas B, (AB') est la A-bissectrice intérieure de ACD ;
  en conséquence, A, B' et Ic sont alignés.

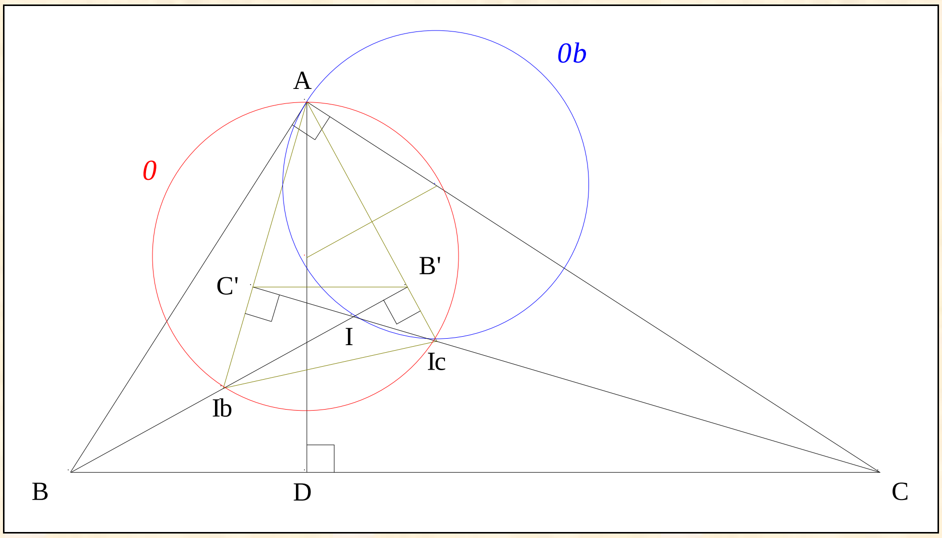
- D'après " Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (BibIB') ⊥ (AB'Ic).

- **Conclusion partielle :** (IbI) est la Ib-hauteur de AibIc.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (IcI) est la Ic-hauteur de AibIc ;
  par définition, I est l'orthocentre du triangle AibIc.

- **Conclusion :** d'après Carnot "La figure ABCH" (Cf. Annexe **4**),
  A, I, Ib et Ic forment un groupe orthocentrique.

Scolies : **(1)** le cercle passant par A, I et Ic



- Notons *0b* ce cercle,
  0 le cercle circonscrit à AibIc
  et C' le point d'intersection de (CI) avec Aib.

- D'après Lascases "Six points alignés" [35], (B'C') est la A-droite des milieux de ABC ;
  en conséquence, (AD) ⊥ (AD).

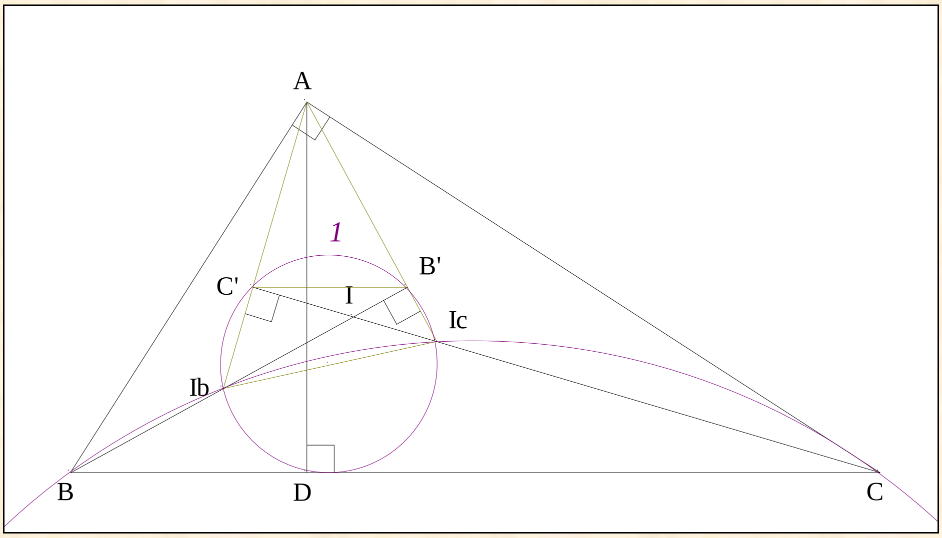
- D'après Nagel "Une tangente et un rayon" (Cf. Annexe **5**), (AD) passe par le centre de *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté",
  0 et *0b* sont symétriques par rapport à (Aic).

- **Conclusion :** le centre de *0b* est sur (AC).

[35] Ayme J.-L., An unlikely concurrence revisited and Generalized, G.G.G. vol. **10**, p. 1-3 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

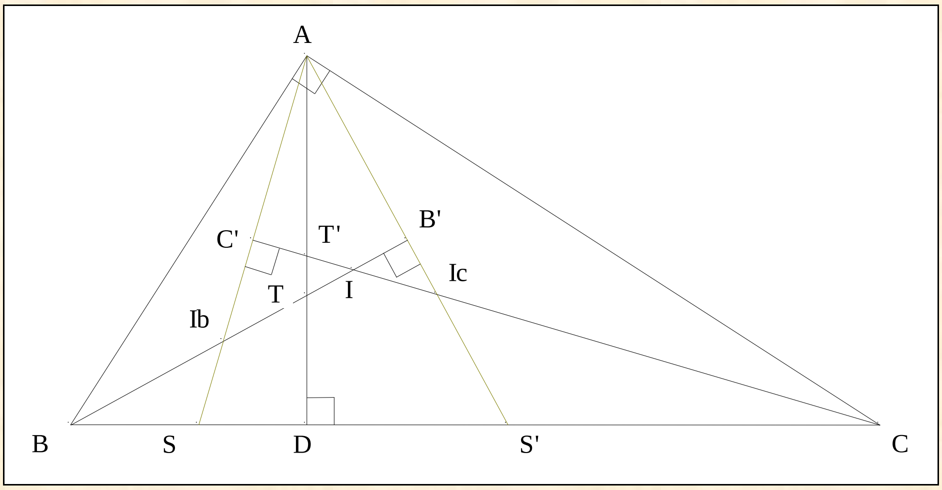
(2) Quatre points cocycliques



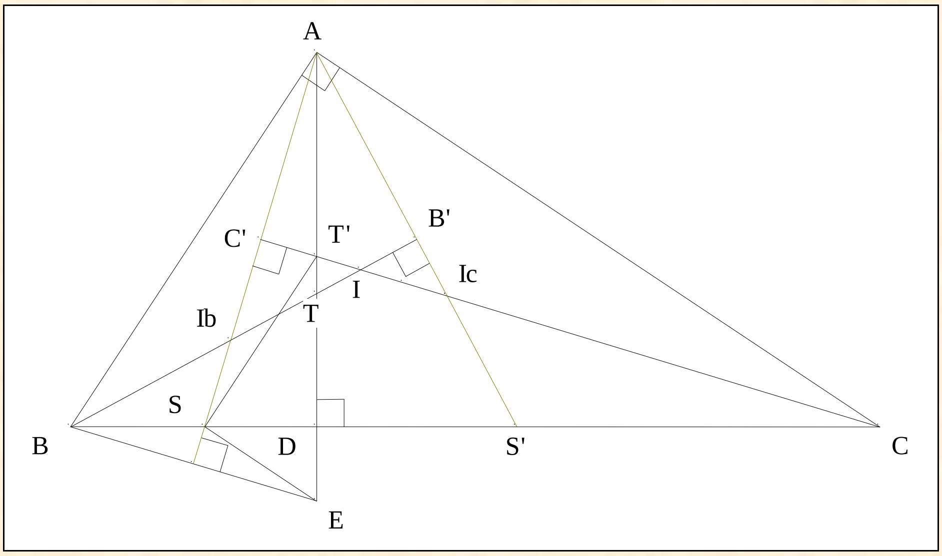
- Notons *1* le cercle de diamètre [IbIc] ; il passe par B' et C'.

- **Conclusion :** le cercle *1*, les points de base Ib et Ic, les moniennes naissantes (B'IbB) et (C'IcC), les parallèles (B'C') et (BC), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
en conséquence, Ib, Ic, B et C sont cocycliques.

(3) Un second groupe orthocentrique



- Notons S, S' les pieds des A-bissectrices des triangles ABD, ACD
et T, T' les pieds des B, C-bissectrices de ABC sur (AD).



- Notons E le point d'intersection de la perpendiculaire à (AS) issue de B avec (AD).

- **Scolies :** **(1)** (BE) // (CT')
  (2) S est l'orthocentre du triangle ABE
  (3) (ES) ⊥ (AB)
  (4) (ES) // (AC).

- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe **6**)
  appliqué à l'hexagone sectoriel ST'CABES, (AB) // (ST').

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AC) // (S'T).

- Par hypothèse, (AB) ⊥ (AC) ;
  la relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (ST') ⊥ (S'T) ;
  en conséquence, T est l'orthocentre du triangle ST'S'.

- **Conclusion :** d'après Carnot "La figure ABCH" (Cf. Annexe **4**),
  S, S', T et T' forment un groupe orthocentrique.

Note historique : ce résultat a été prouvé par Arnold Droz-Farny [36] en 1888.

[36] Droz-Farny A., *Mathesis* (1888) 210

V. *JOURNAL DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES*

DE

de LONGCHAMPS

(1882 – 1897)

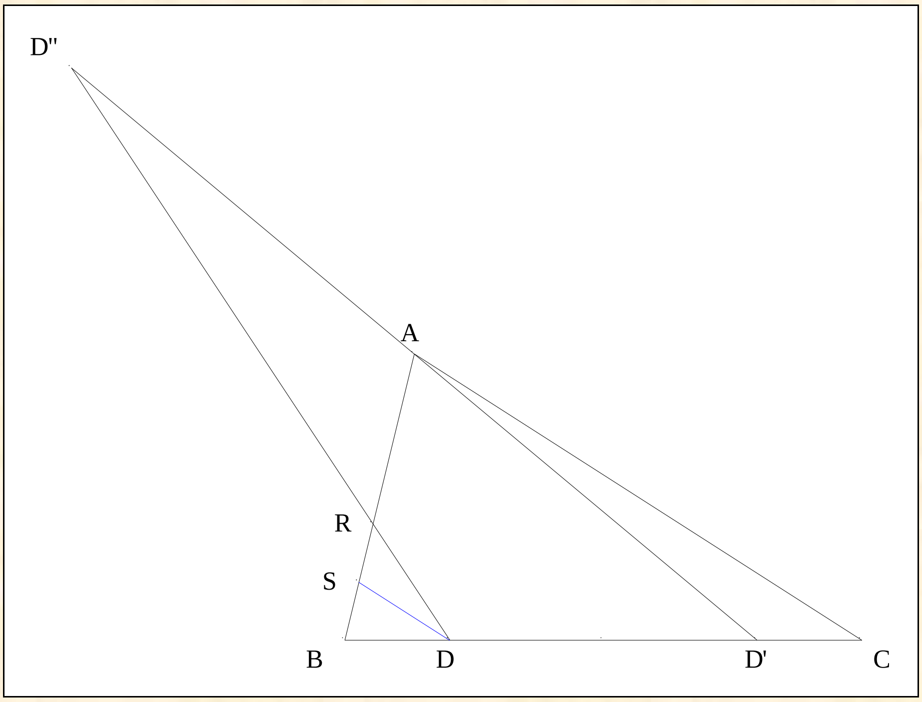
un journal qui a rendu à l'enseignement de précieux services [37]

Reprenant l'initiative de Justin Bourget, Gohierre de Longchamps redonne vie au feu *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales* en éditant en 1882, mais de façon séparée, le *Journal de mathématiques élémentaires* qui paraîtra jusqu'en 1897 et le *Journal de mathématiques spéciales*.
Rappelons qu'il faudra les distinguer du *Journal de Mathématiques élémentaires* édité en 1877 par le plus jeune agrégé de mathématiques de l'époque, Henri Vuibert et de la *Revue de Mathématiques spéciales* éditée la même année par celui-ci.

1. Deux parallèles

VISION

Figure :



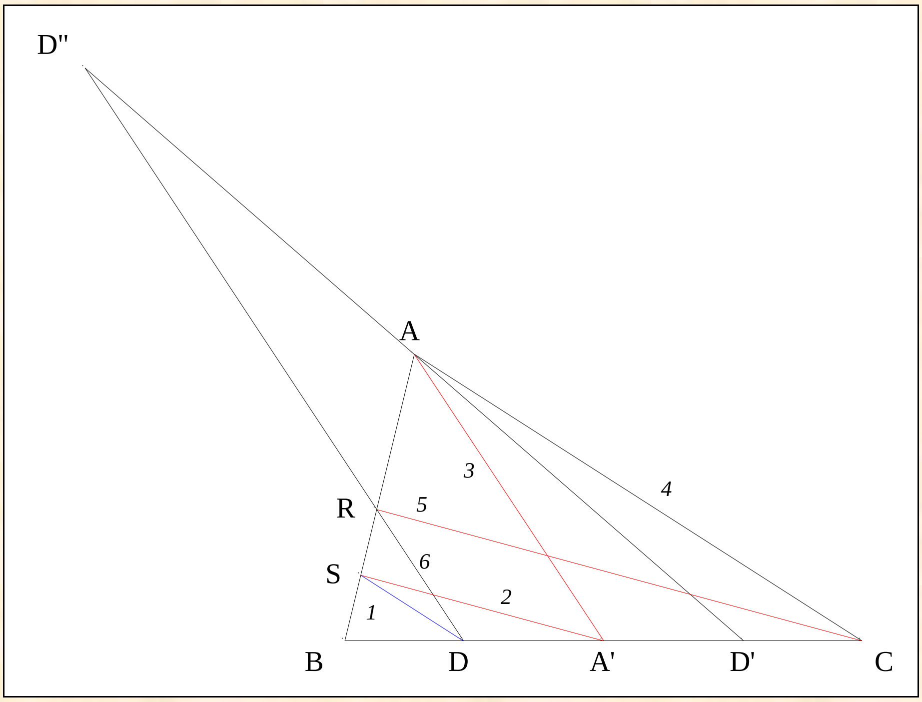
Traits : ABC un triangle,
D, D' deux points isotomiques[38] relativement à [BC],
D'' le symétrique de D' par rapport à A,
R le point d'intersection de (A''D) et (AB),

[37] Laisant C. A.
[38] Points situés sur un des côtés d'un triangle à égale distance du point milieu de ce même côté

et S le milieu de [BR].

Donné : (DS) est parallèle à (AC). [39]

VISUALISATION



- Notons A' le milieu de [BC].
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué **(1)** au triangle BCR, (A'S) // (CR)
  (2) au triangle DD'D", (AA') // (DRD").
- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe **6**) appliqué à l'hexagone DSA'ACRD, (DS) // (AC).
- **Conclusion :** (DS) est parallèle à (AC).

Note historique : cette question a été résolue par A. Aubry [40] en 1884.

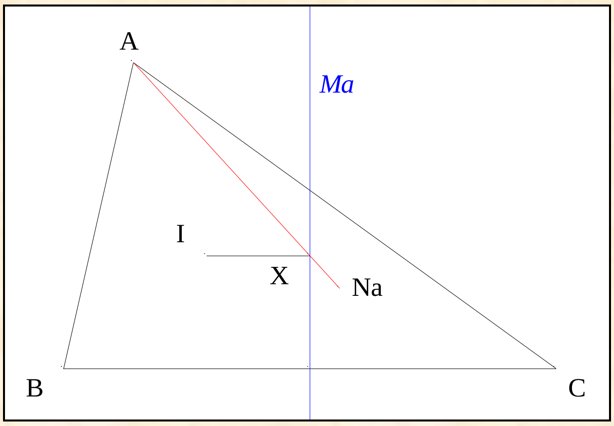
---

[39] Gohierre de Longchamps G., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1883) n° **103**
[40] Aubry A., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1884) 60

2. Une nagelienne

VISION

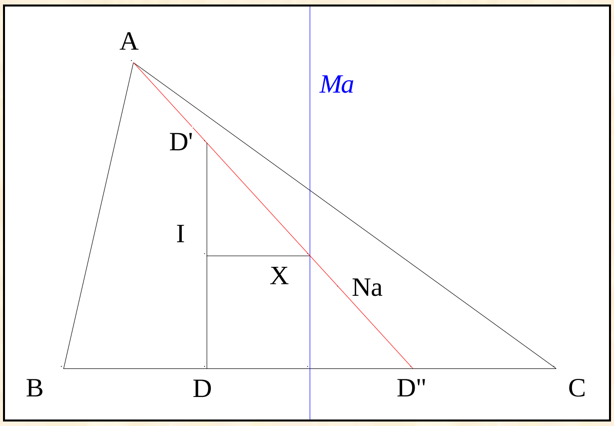
Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
Ma la médiatrice de [BC],
X le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur *Ma*
et Na le point de Nagel de ABC.

Donné : (AX) passe par Na. [41]

VISUALISATION



- Notons A' le milieu de [BC],
  D le pied de la perpendiculaire abaissée sur (BC) à partir de I,
  D' le symétrique de D par rapport à I
  et D" l'isotomique de D relativement à [BC].

- **Scolies :** **(1)** (DD') // *Ma*
  (2) *Ma* est la médiatrice de [DD"].

- D'après Poncelet "Une nagélienne" (Cf. Annexe **7**), (AD") passe par D' et Na.

[41] Gohierre de Longchamps G.A., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1893) n° **527**

- Notons X' le milieu de [D'D"].

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle"
  et "Le théorème de la médiatrice", X' est sur les médiatrices de [DD"] i.e. *Ma* et [DD'].

- Nous avons : (DD') ⊥ (IX') et (BC) ⊥ *Ma* ;
  par hypothèse, (DD') ⊥ (BC) ;
  la relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (IX') ⊥ *Ma* ;
  en conséquence, X et X' sont confondus.

- **Conclusion :** (AX) passe par Na.

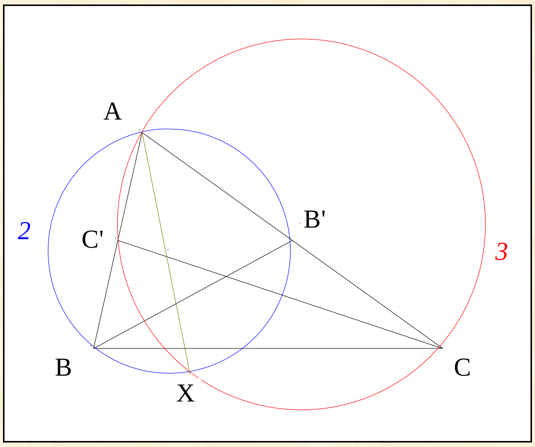
Note historique : une preuve a été donné par Dhavernas[42] en 1894.

Scolie : (AX) est une A-nagelienne de ABC.

3. Un lemme : une symédiane comme axe radical

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
B', C' les milieux de [CA], [AB],
2, *3* les cercles circonscrits resp. des triangles ABB', BCC'
et X le second points d'intersection de *1* et *2*.

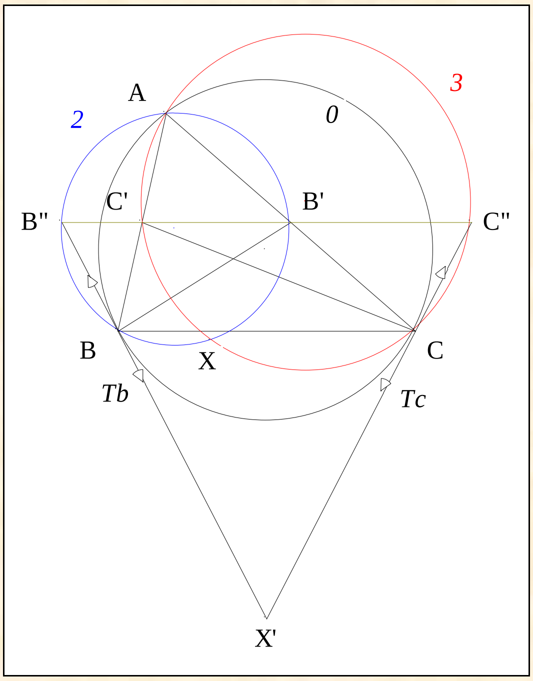
Donné : (AX) est la A-symédiane de ABC. [43]

VISUALISATION

---

[42] Dhavernas, *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1894) 141

[43] Stevanovic M., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **10904** du 20/11/2004 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10904

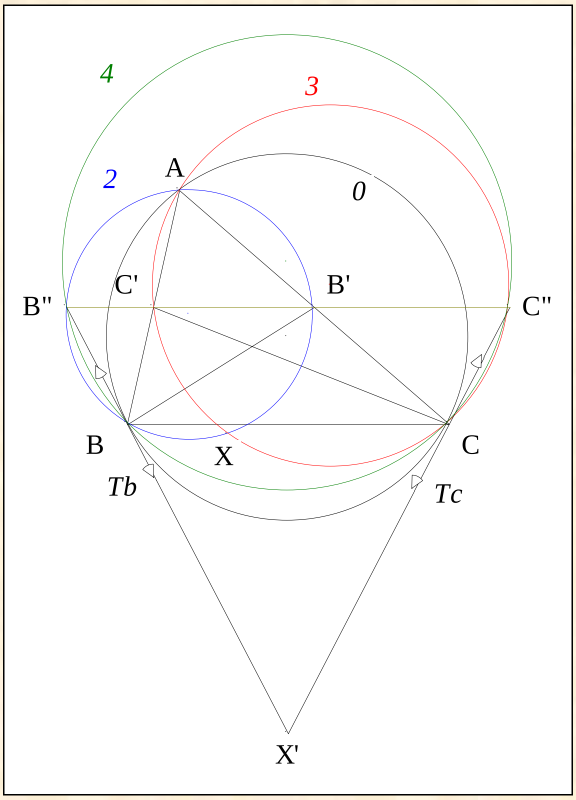


- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC,
  Tb, *Tc* les tangentes à *0* resp. en B, C,
  X' le point d'intersection de *Ta* et *Tb*,
  et B", C" les seconds points d'intersection resp. de (BX') avec *2*, de (CX') avec *3*.

- Les cercles *0* et *2*, les points de base B et A, les moniennes (BBB") et (CAB'),
  conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (B'B") // (CB) ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ABC, (CB) // (B'C') ;
  par transitivité de la relation //, (B'B") // (B'C') ;
  d'après le postulat d'Euclide, B', C' et B" sont alignés.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que B', C' et C" sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence Ia, B', C', B" et C" sont alignés.



- D'après Euclide "Deux tangentes égales", le triangle X'CB est X'-isocèle ;
  en conséquence, le quadrilatère BCC"B" est un trapèze isocèle ;
  d'où, B, C, C" et B" sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe **8**)
  appliqué à *2*, *3* et *4*, (AX) passe par X'

- **Conclusion :** d'après "La figure de Chasles" (Cf. Annexe **9**), (AX) est la A-symédiane de ABC.

Note historique : ce résultat signalé par Milorad Stevanovic en 2004 a été résolu par Khoa Lu Nguyen[44].
Une généralisation en a été proposé par Barry Wolk [45].

Commentaire : l'auteur pense que Gohierre de Longchamps a dû rencontrer ce résultat.

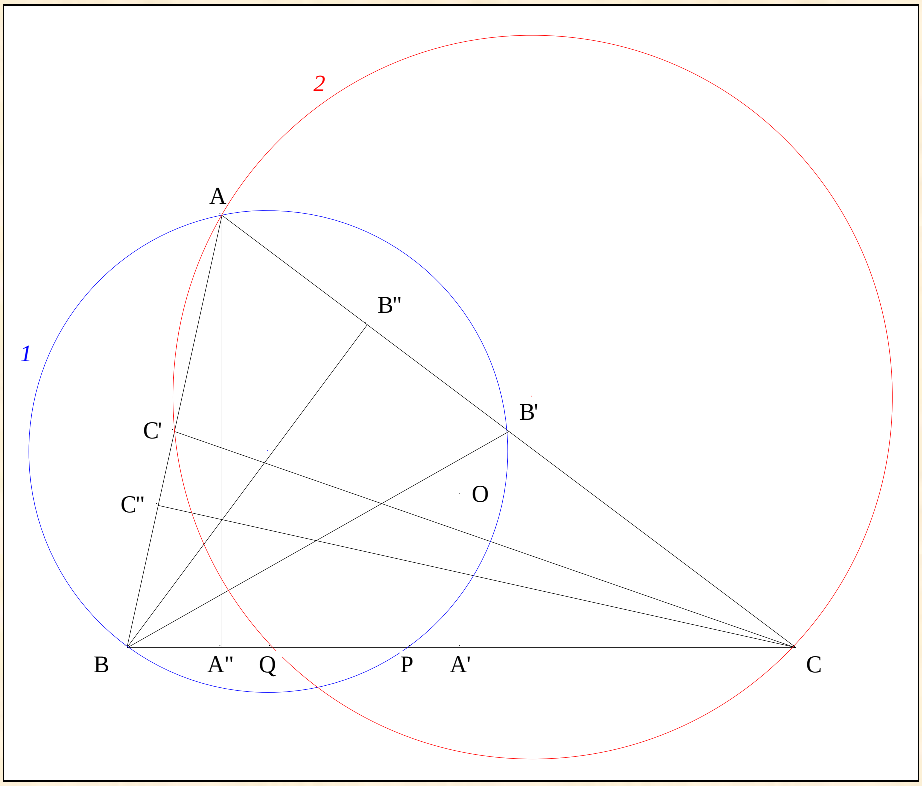
[44] Nguyen K. L.., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **10905** du 22/11/2004 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10905

[45] Wolk B., Symmedian as radical axis, Message *Hyacinthos* # **10931** du 06/12/2004 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/10931

4. Deux points isotomiques

VISION

Figure :

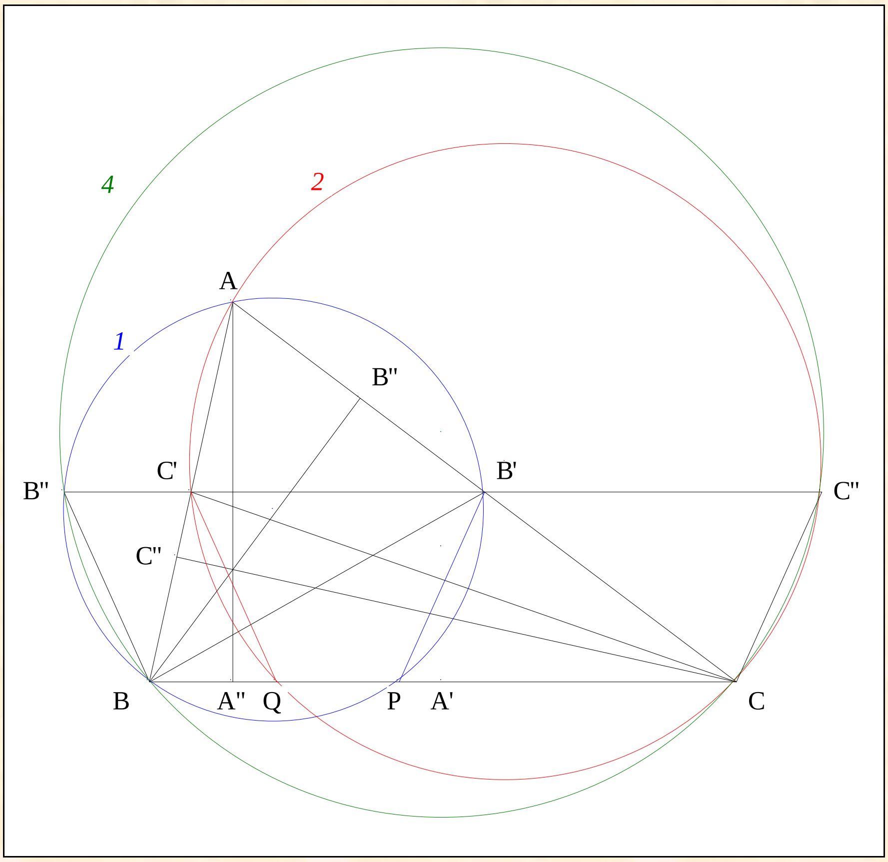


Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	A"B"C"	le triangle orthique de ABC,
	1, *2*	les cercles circonscrits des triangles ABB', ACC'
et	P, Q	les seconds points d'intersection de (BC) resp. avec *1*, *2*.

Donné : P et Q deux points isotomiques de [A'A"]. [46]

VISUALISATION

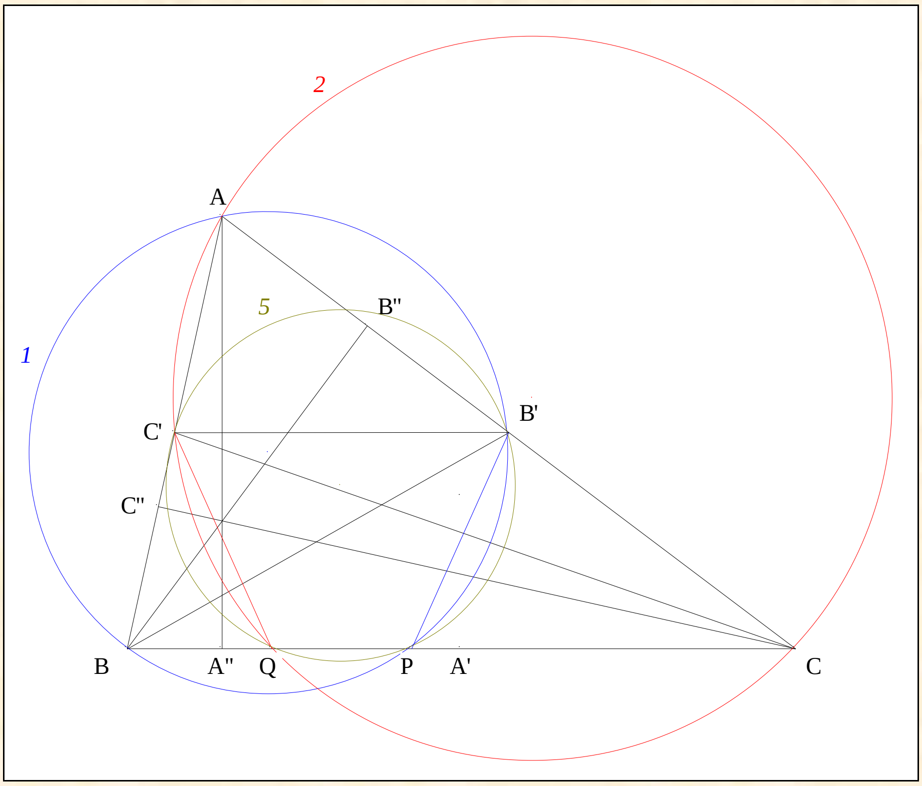
[46] Gohierre de Longchamps G. A., *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps (1892) n° **484**



- Les notation sont les mêmes qu'en II. 3. Un lemme.

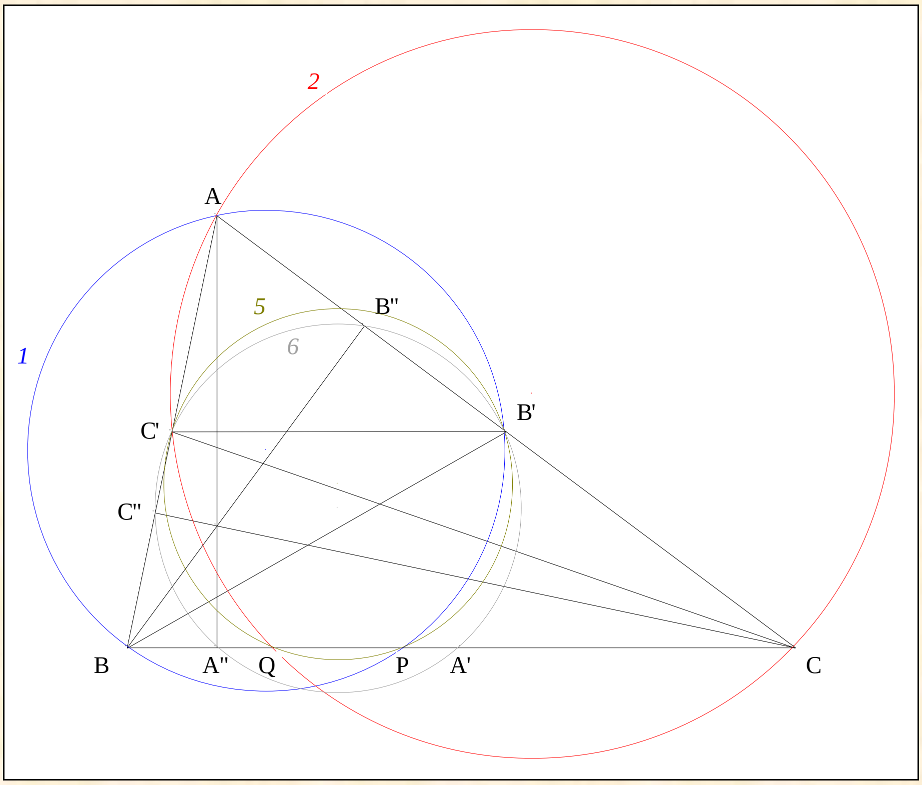
- Les cercles *1* et *4*, les points de base B et B", les moniennes (PBC) et (B'B"C"), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (PB') // (CC") ;
  le quadrilatère PCC"B' étant un parallélogramme, PB' = CC".

- Mutatis mutandis, nous montrerions que QC' = BB".



- Le trapèze B'C'QP ayant ses deux côtés non parallèles égaux, est isocèle ;
  en conséquence, il est cyclique.

- Notons *5* ce cercle.



- Notons *6* le cercle d'Euler de ABC ; il passe par A', B', C' et A".

- **Scolies : (1)** *5* et *6* sont deux cercles coaxiaux d'axe (B'C')

(2) (BC) // (B'C').

- **Conclusion :** P et Q deux points isotomiques de [A'A"].

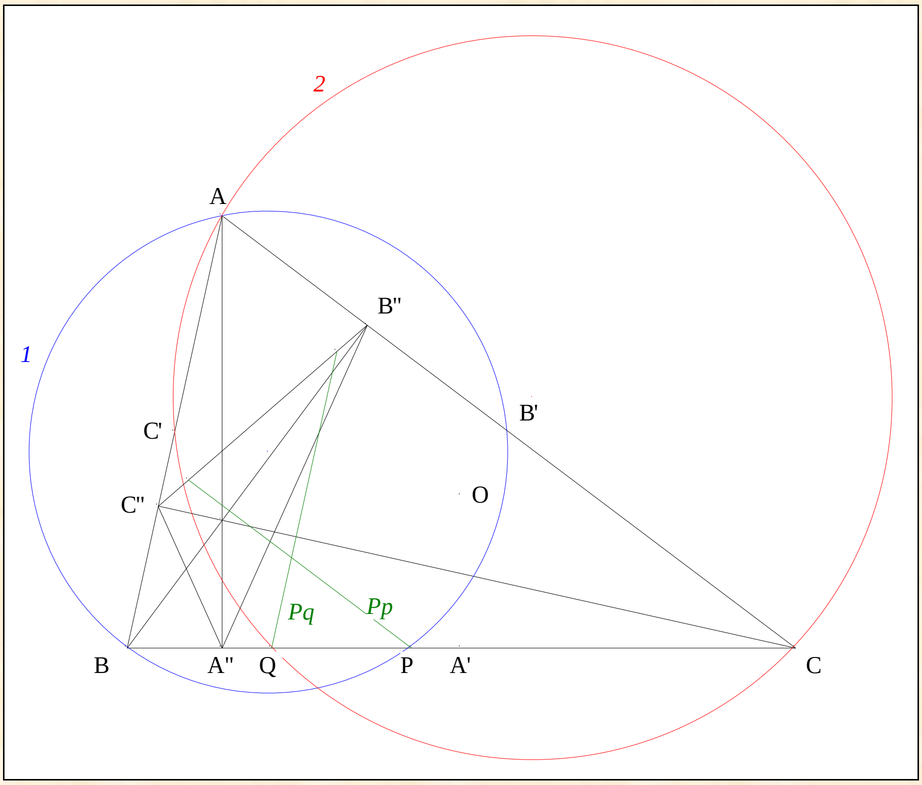
Scolie : (AP) et (AQ) sont "deux A-droites isotomiques de ABC".

Note historique : une preuve en a été donnée en 1893 par Madame Veuve F. Prime [47].

5. Deux transversales réciproques relativement au triangle orthique

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC,
	A"B"C"	le triangle orthique de ABC,
	1, *2*	les cercles circonscrits des triangles ABB', ACC',
	P, Q	les seconds points d'intersection de (BC) resp. avec *1*, *2*,
	Pp	la parallèle à (AC) passant par P
et	*Pq*	la parallèle à (AB) passant par Q.

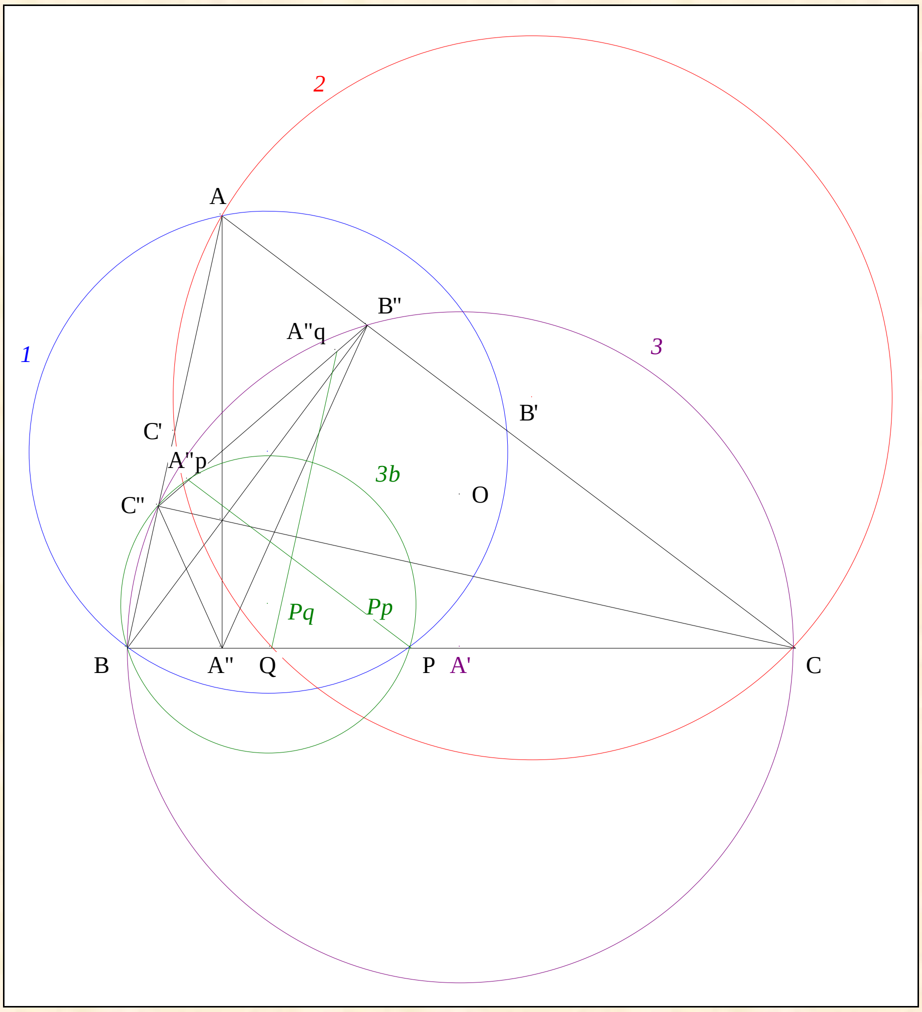
Donné : *Pp* et *Pq* sont deux transversales réciproques de A"B"C".[48]

---

[47] Veuve Prime F., *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps (1893) 261

[48] Gohierre de Longchamps G. A., *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps (1892) n° **484**

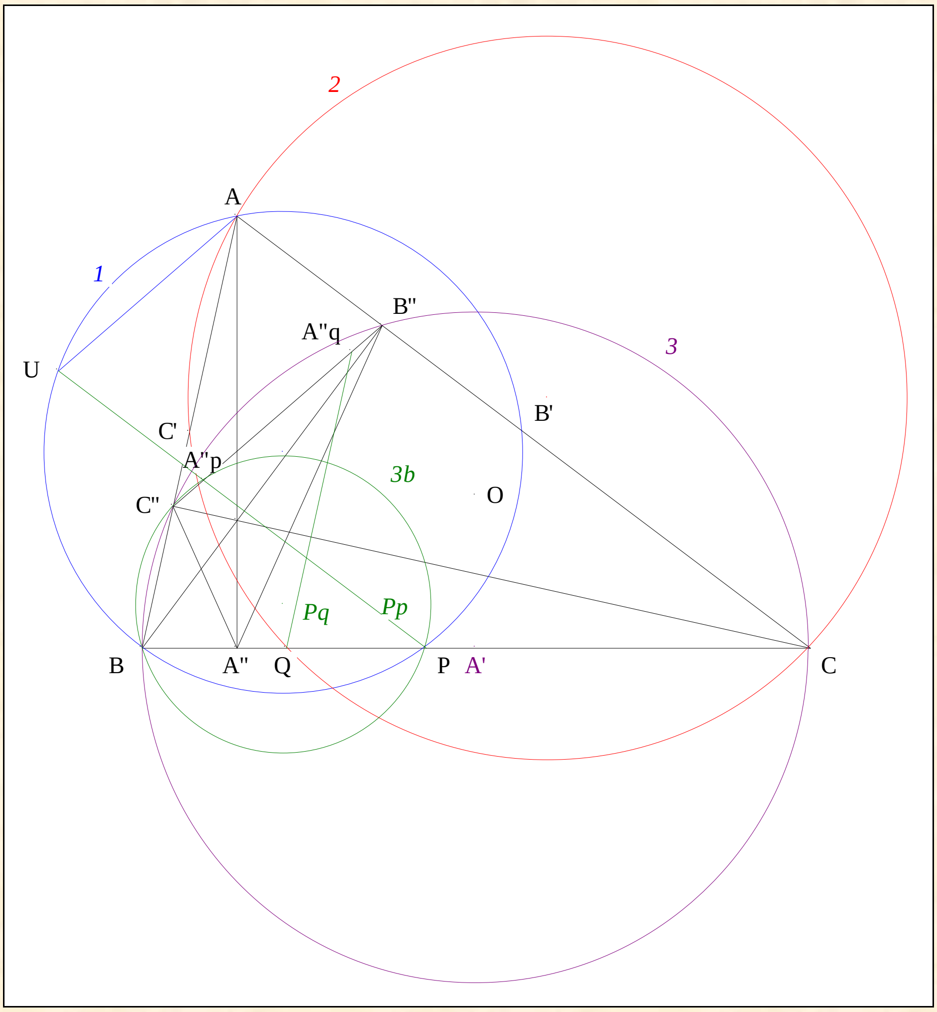
VISUALISATION



- Notons A"p, A"q les points d'intersection de *Pp*, *Pq* avec (B"C")
  et *3* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B" et C".

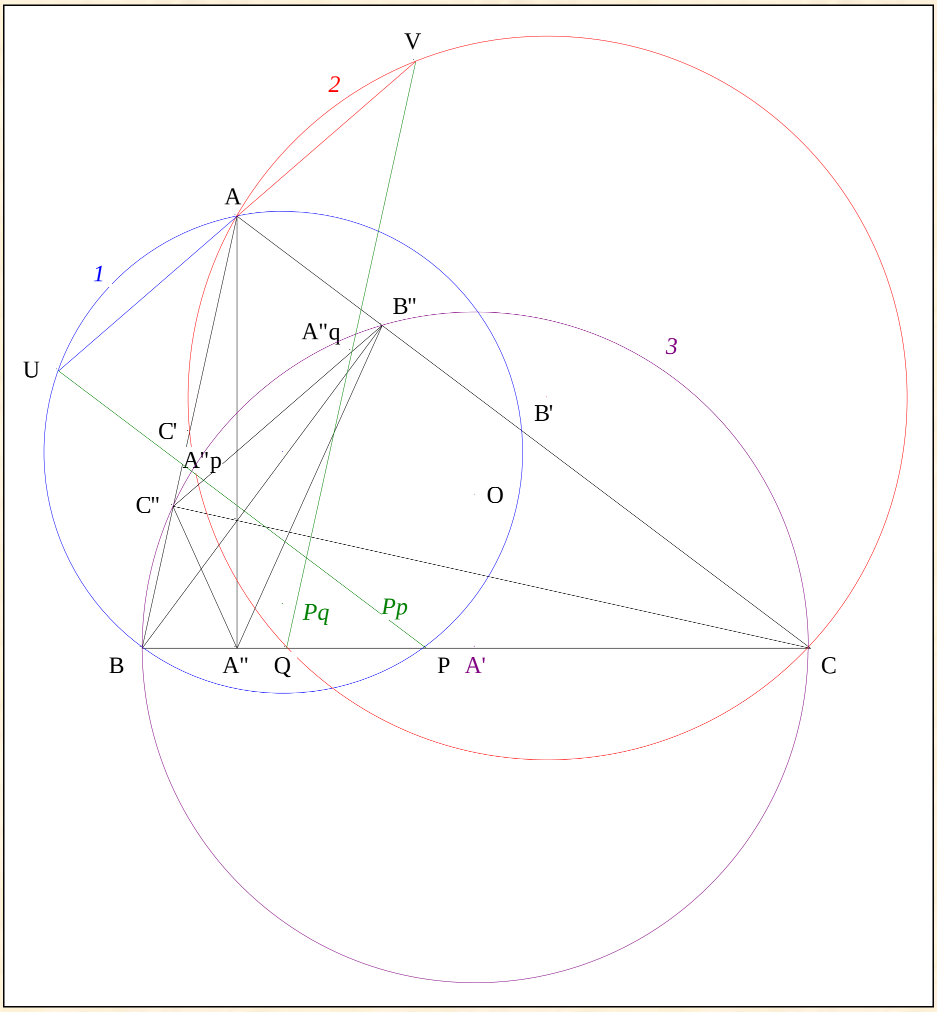
- Le cercle *3*, les points de base B et C", les moniennes naissantes (CBP) et (B"C"A"p), les parallèles (CB") et (PA"p), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, B, C", P et A"p sont cocycliques.

- Notons *3b* ce cercle.



- Notons U le second point d'intersection de (PA"p) avec *1*.

- Les cercles *1* et *3b*, les points de base B et P, les moniennes (ABC") et (UPA"p), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (AU) // (C"A"p) ;



- Notons V le second point d'intersection de (QA"q) avec *2*.

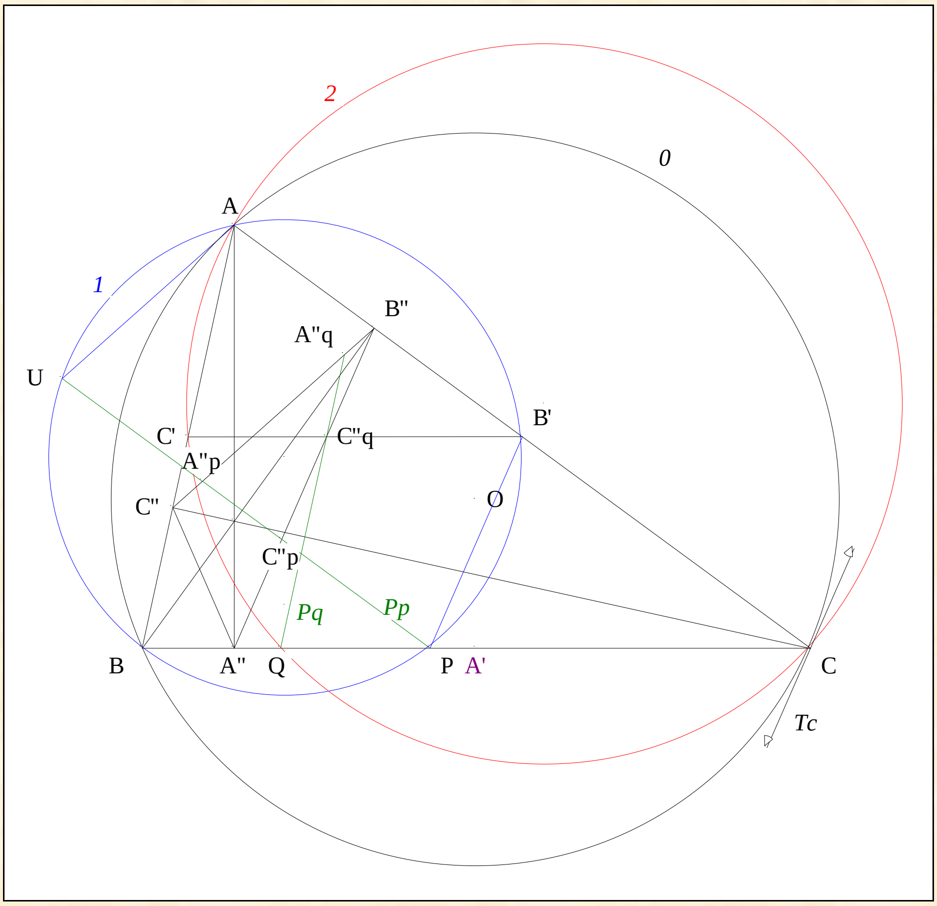
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B"A"q) // (AV) ;
  par transitivité de la relation //, (AU) // (AV) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (AU) = (AV)
  i.e. A, U et V sont alignés.

- Le quadrilatère AUA"pB" ayant ses côtés opposés parallèles,
  est un parallélogramme ; B"A"p = AU.

- Une chasse segmentaire:
  le trapèze AUPB' étant cyclique, AU = PB' ;
  d'après II. 4. Deux points isotomiques, PB' = QC' ;
  le trapèze AVQC' étant cyclique, QC' = AV ;
  par transitivité de la relation =, AU = AV.

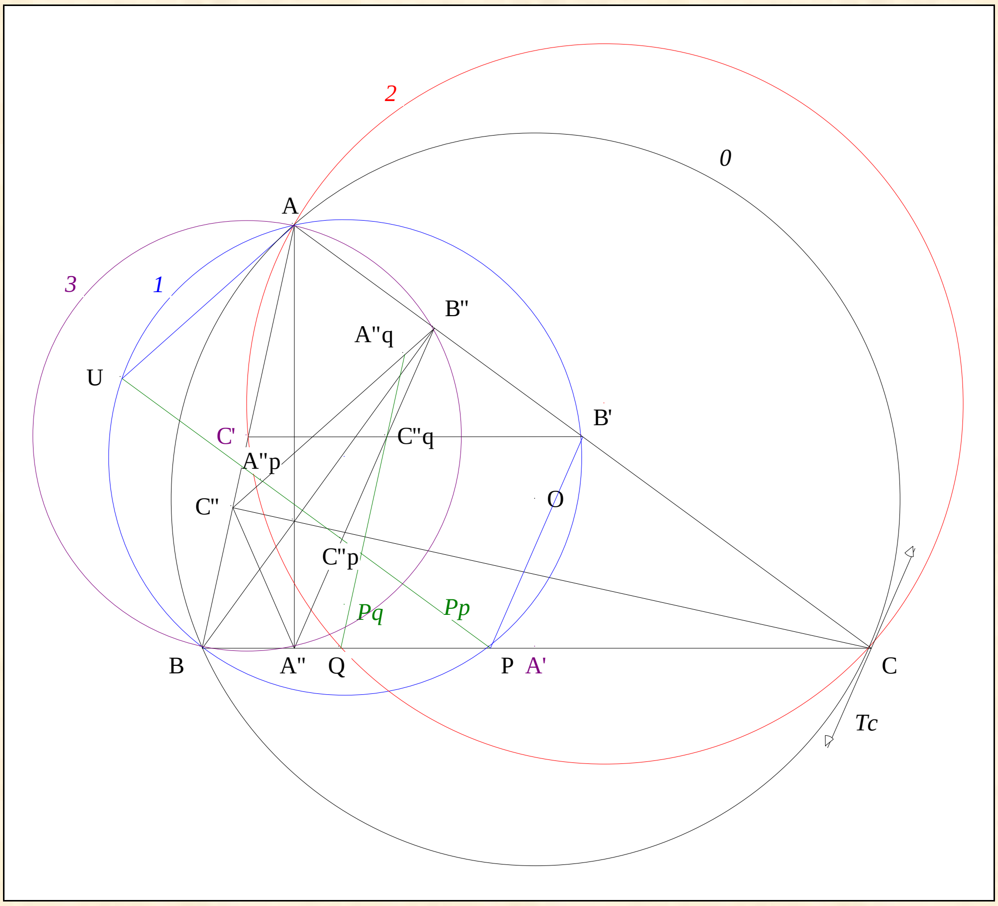
- Le quadrilatère AVA"qC" ayant ses côtés opposés parallèles,
  est un parallélogramme ; AV = C"A"q ;
  par transitivité de la relation =, B"A"p = C"A"Q.

- **Conclusion partielle :** A"p et A"q sont isotomiques relativement à [B"C"].



- Notons C"p, C"q les points d'intersection de *Pp*, *Pq* avec (A"B")
  0 le cercle circonscrit à ABC
  et *Tc* la tangente à *0* en C.

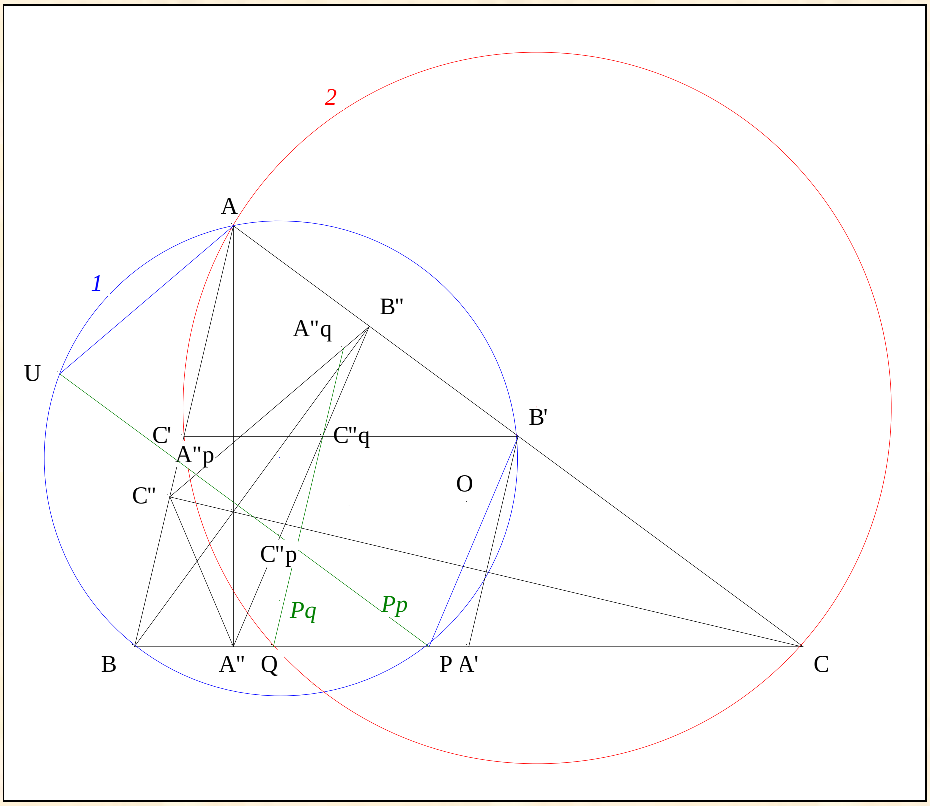
- Les cercles *1* et *0*, les points de base A et B, les moniennes (B'AC) et (PBC), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (B'P) // *Tc*.



- Notons *3* le cercle de diamètre [AB] ; il passe par A" et B".

- Les cercles *0* et *3*, les points de base A et B, les moniennes (CAB") et (CBA"),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que *Tc* // (A"B") ;
  par transitivité de la relation //, (B'P) // (A"B") ou encore (B'P) // (B"C"p)

- Le quadrilatère PB'B"C"q ayant ses côtés opposés parallèles,
  est un parallélogramme ; en conséquence, B"C"p = PB'.



- D'après **II. 4.** Deux points isotomiques, QA" = PA'

- **Scolie :** les angles à la base des triangles A"QC"q et PA'B' sont resp. égaux.

- D'après "Le théorème a.c.a", A"QC"q et PA'B' sont égaux ;
  en conséquence, (B'C"q) // (BC).

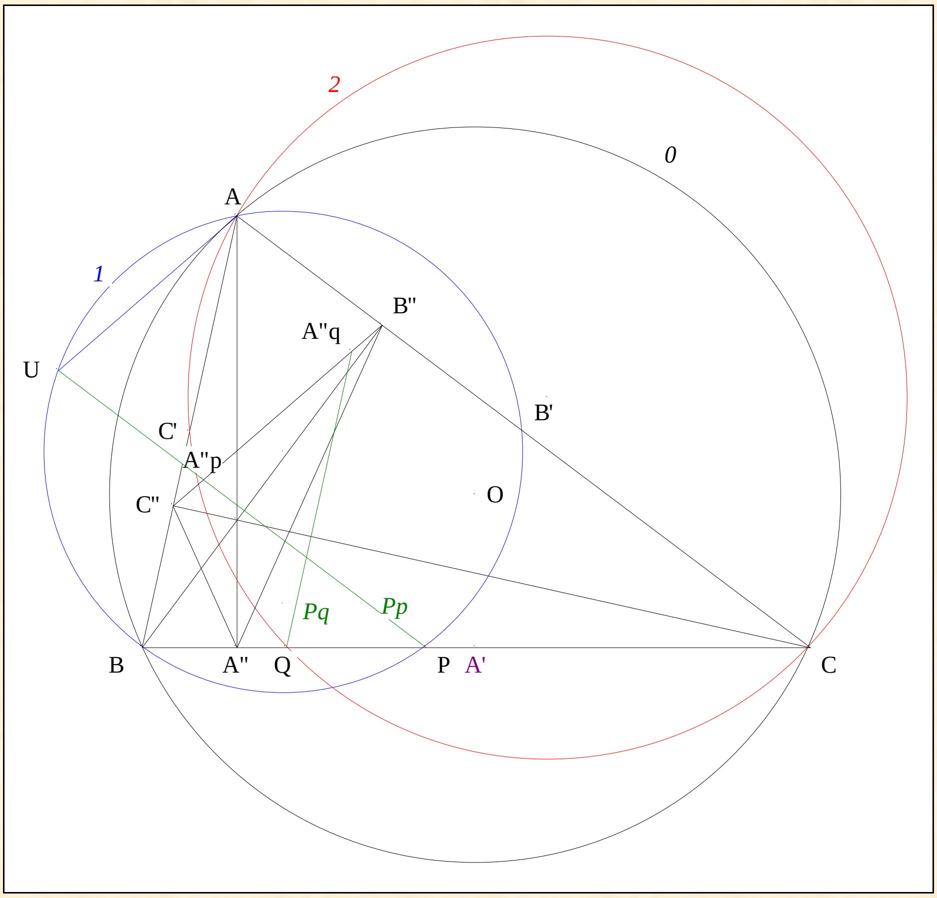
- **Conclusion partielle :** B', C"q, C' sont alignés.

- Nous avons : B"C"p = PB'
  le quadrilatère PB'C"qA" ayant ses côtés opposés parallèles,
  est un parallélogramme ; en conséquence, PB' = A"C"q ;
  par transitivité de la relation =, B"C"p = A"C"q.

- **Conclusion partielle :** C"p et C"q sont isotomiques relativement à [C"A"].

- **Conclusion :** *Pp* et *Pq* sont deux transversales réciproques de A"B"C".

Scolie : une tangente



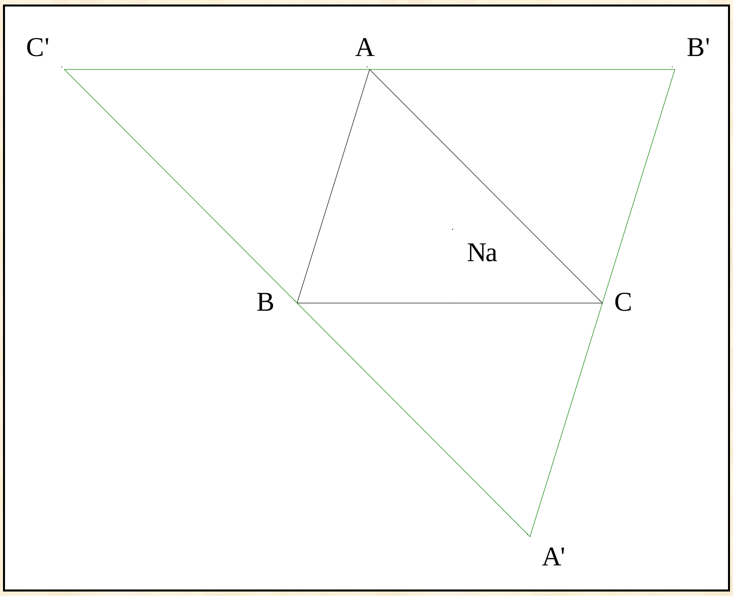
- Notons *0* le cercle circonscrit à ABC.

- **Conclusion :** les cercles *0* et *1*, les points de base B et A, la monienne (CBP), les parallèles (CA) et (PU), conduisent au théorème **3'** de Reim ;
  en conséquence, (AU) est la tangente à *0* en A.

6. Une autre nature du point de Nagel

VISION

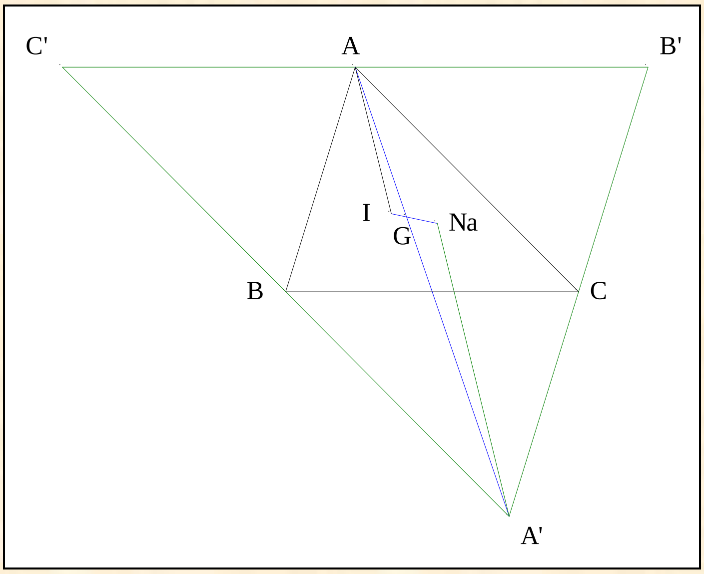
Figure :



Traits : ABC un triangle,
Na le point de Nagel de ABC
et A'B'C' le triangle antimédian de ABC.

Donné : Na est le centre du cercle inscrit à A'B'C' [49].

VISUALISATION



- Notons G le point médian de ABC
  et I le centre de ABC.

- **Scolie :** ABC et A'B'C' sont homothétiques, de centre G et de rapport 1: 2 ;
  en conséquence, G partage [AA'] à partir de A dans le rapport 1: 2.

- D'après "Cinq théorèmes de Nagel" [50], G partage [INa] à partir de I dans le rapport 1: 2.

- D'après Thalès, (AI) // (A'Na).

---

[49] Gohierre de Longchamps G. A., *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps (1884) n° **94**

[50] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian Heinrich von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 12 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

- (AI) étant la A-bissectrice de ABC, (A'Na) est la A'-bissectrice intérieure de A'B'C'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (B'Na) est la B'-bissectrice intérieure de A'B'C'
(C'Na) est la C'-bissectrice intérieure de A'B'C'.

- **Conclusion :** les bissectrices intérieure d'un triangle étant concourantes, Na est le centre de A'B'C'.

Énoncé traditionnel :

le point de Nagel d'un triangle, est le centre de son triangle antimédian
et, inversement,
le centre d'un triangle est le point de Nagel de son triangle médian.

Note historique : ce résultat a été prouvé en 1885 par l'abbé Ropert [51], professeur au petit séminaire de Guérande (Loire-Atlantique, Belgique), reproposé en 1886 par J. C. Boubals [52], professeur à l'École du Génie de Montpellier (Belgique), prouvé à nouveau en 1887 par le futur historiographe de la Géométrie du triangle Émile Vigarié [53] alors élève de l'École des Mines de Paris (Belgique).
Ce résultat sera souvent attribué par la suite à un anonyme.
Notons que la même année, il introduit dans le *Journal de mathématiques élémentaires*, la notion de "points anticomplémentaires" [54].

[51] Ropert, *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps (1885) 92.
[52] Boubals J. C., *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps (1886) 186.
[53] Vigarié, *Journal de Mathématiques élémentaires* de Longchamps (1887) 68.
[54] Hain E. avait introduit le terme de "points complémentaires" en 1885 dans les *Archives de Grünert*, p. 214.

VI. *JOURNAL DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES*

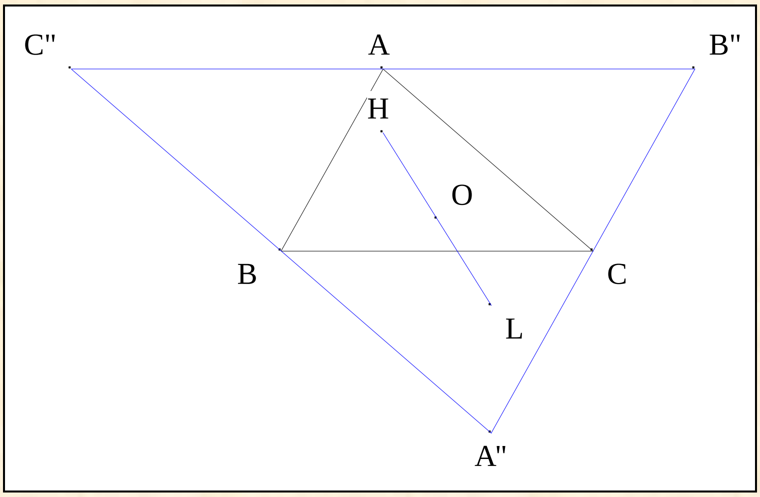
DE

de LONGCHAMPS

1. Le point de de Longchamps

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
A"B"C" le triangle antimédian de ABC
et L l'orthocentre de A"B"C".

Donné : O est le milieu du segment [HL] [55].

VISUALISATION

- Partons du triangle A"B"C".
- **Scolie :** H est le centre du cercle circonscrit de A"B"C";
- D'après Euler-Bevan "Le cercle des six points", O est le centre du cercle d'Euler de A"B"C".
- **Conclusion :** d'après Feuerbach[56], O est le milieu du segment [HL].

Scolies : **(1)** L est "le point de de Longchamps de ABC" ;

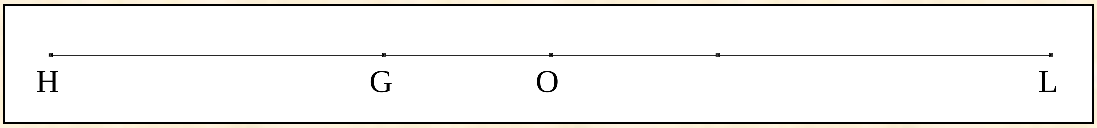
---

[55] Gohierre de Longchamps G. A., Sur un nouveau cercle remarquable du plan du triangle, *Journal de Mathématiques spéciales* (1886) 57 et suivantes

[56] Feuerbach K.., *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822) 38

il est noté L et est répertorié sous X_{20} chez ETC.

(2) Situation de L



- **Conclusion :** G est le premier tiers-point de [OL] à partir de H
ou encore
L est le point anticomplémentaire de H.

Énoncé traditionnel : le point de de Longchamps d'un triangle

(1) est sur la droite d'Euler de ce triangle

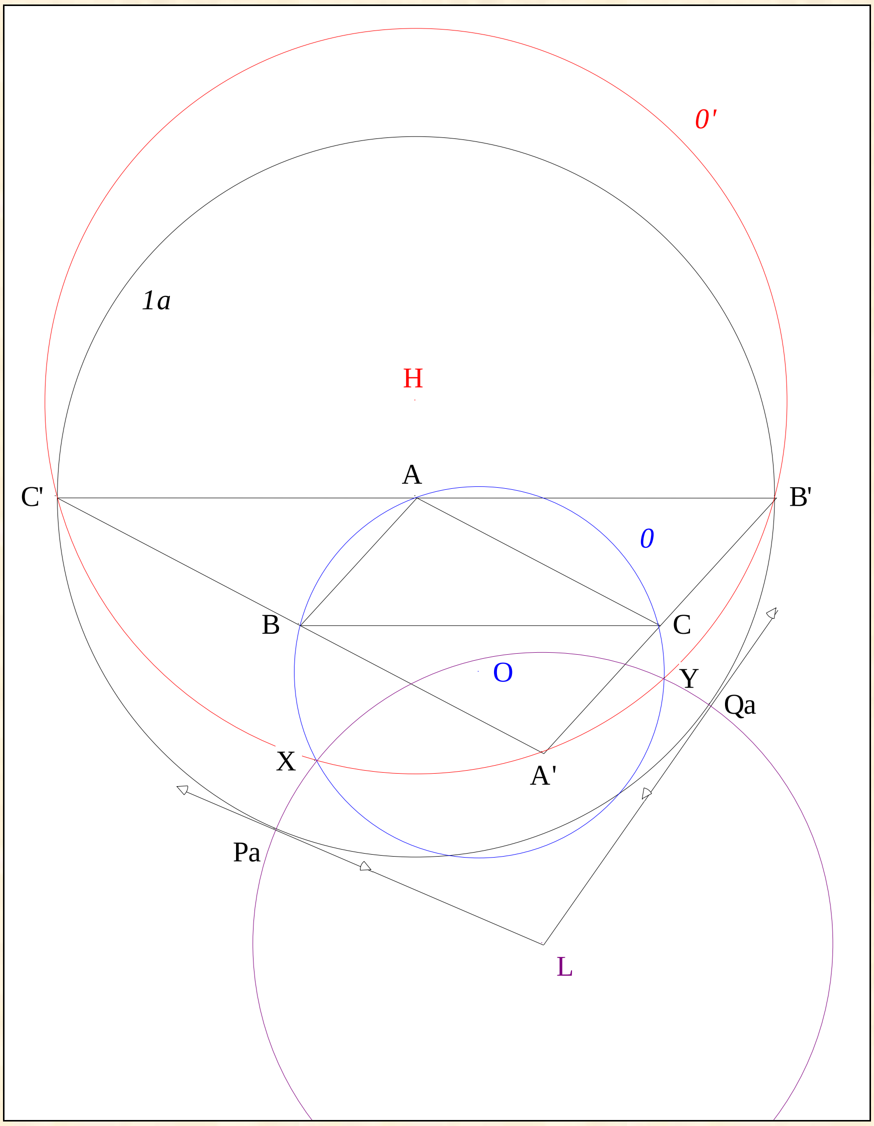
(2) est le symétrique de l'orthocentre de ce triangle
par rapport au centre de son cercle circonscrit

(3) est l'orthocentre du triangle antimédian de ce triangle.

2. Le cercle de de Longchamps

VISION

Figure :

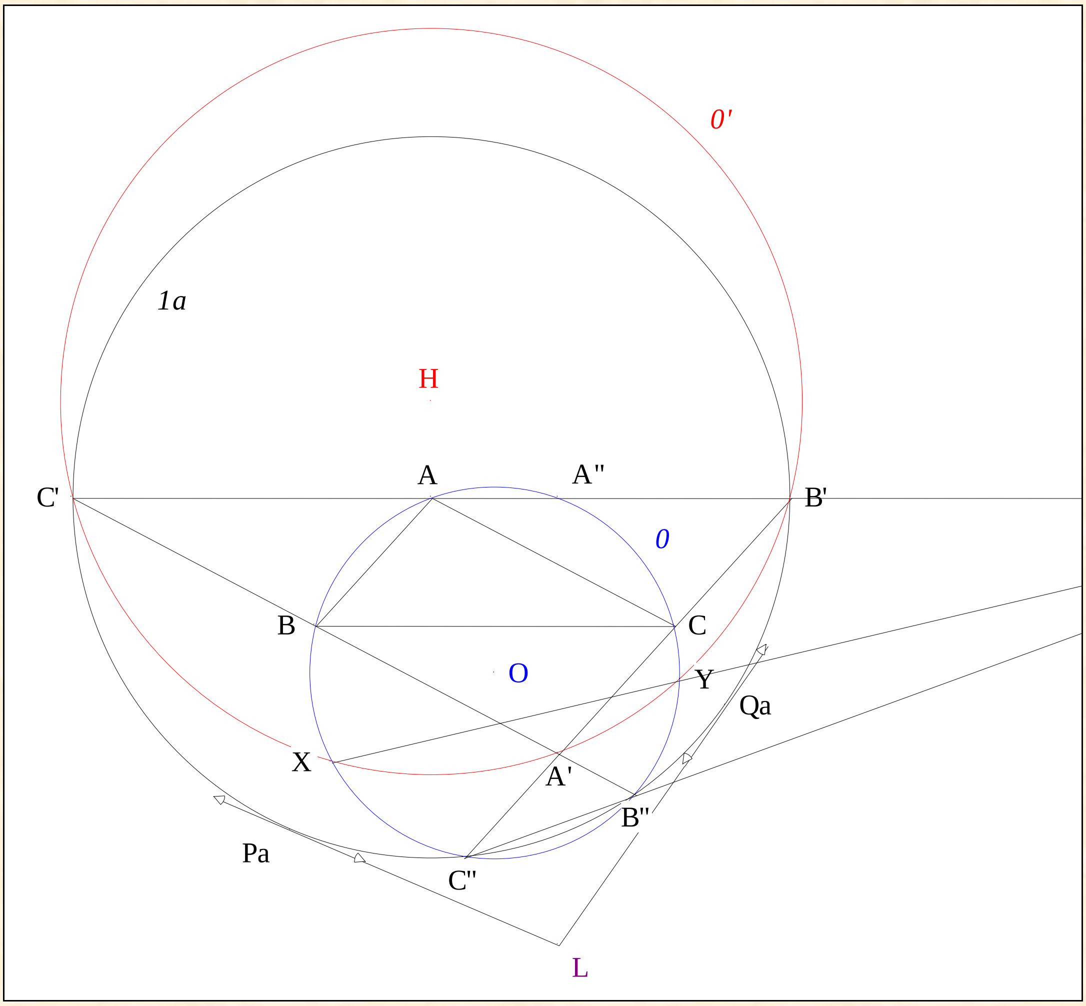


Traits :	ABC	un triangle A-obtusangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	H	l'orthocentre de ABC,
	A'B'C'	le triangle antimédian de ABC,
	0'	le cercle circonscrit à A'B'C',
	X, Y	les points d'intersection de *0* et *0*',
	L	l'orthocentre de A'B'C',
	1a	le A'-cercle de Thalès de A'B'C'
et	Pa, Qa	les points de contact des tangentes à *1a* menées à partir de L.

Donné : Pa, Qa, X et Y sont cocycliques. [57]

VISUALISATION

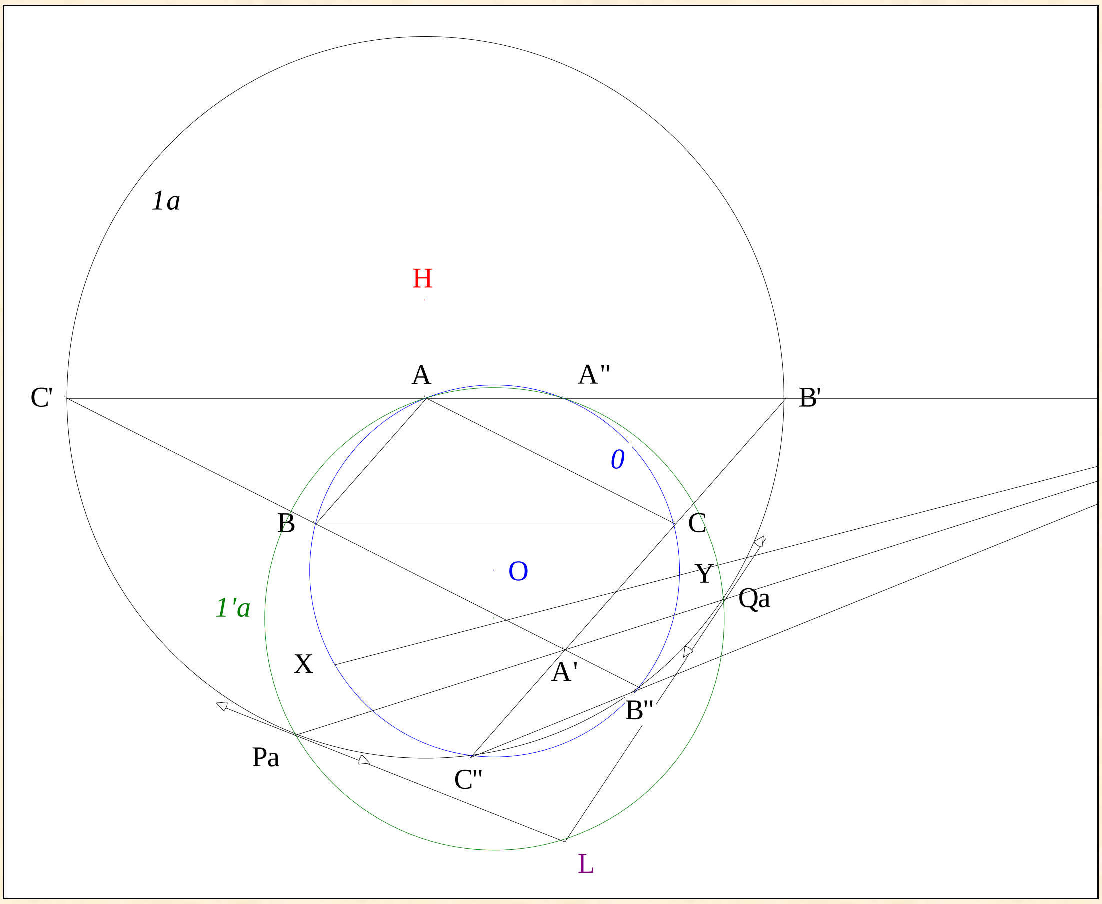
[57] Gohierre de Longchamps, Sur un nouveau cercle remarquable du plan du triangle, *Journal de Mathématiques spéciales* (1886) 57 et suivantes



- Notons A"B"C" le triangle orthique de A'B'C'.

- **Scolies :** **(1)** *0* est le cercle d'Euler de A'B'C'
  (2) *0* est le cercle circonscrit de A"B"C"
  (3) *1a* ayant pour diamètre [B'C']passe par B", C"
  (4) H est le centre de *0'*.

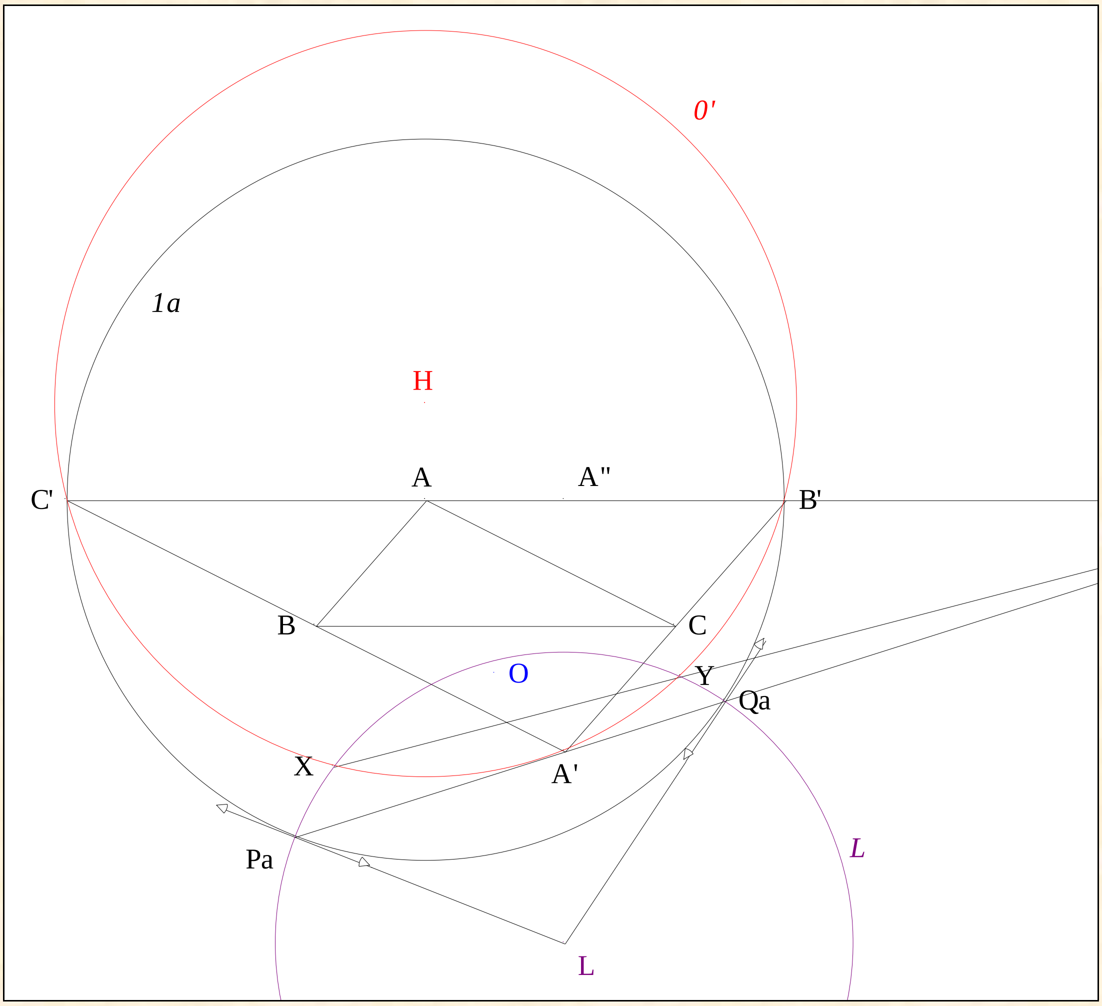
- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe **8**)
  appliqué à *0*, *0'* et *1a*, (XY), (B'C') et (B"C") sont concourantes.



- Notons *1'a* le cercle de diamètre [LA] ; il passe par Pa, Qa et A".

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 8)
  appliqué à *1a*, *1'a* et *0* (PaQa), (AA") et (B"C") sont concourantes.

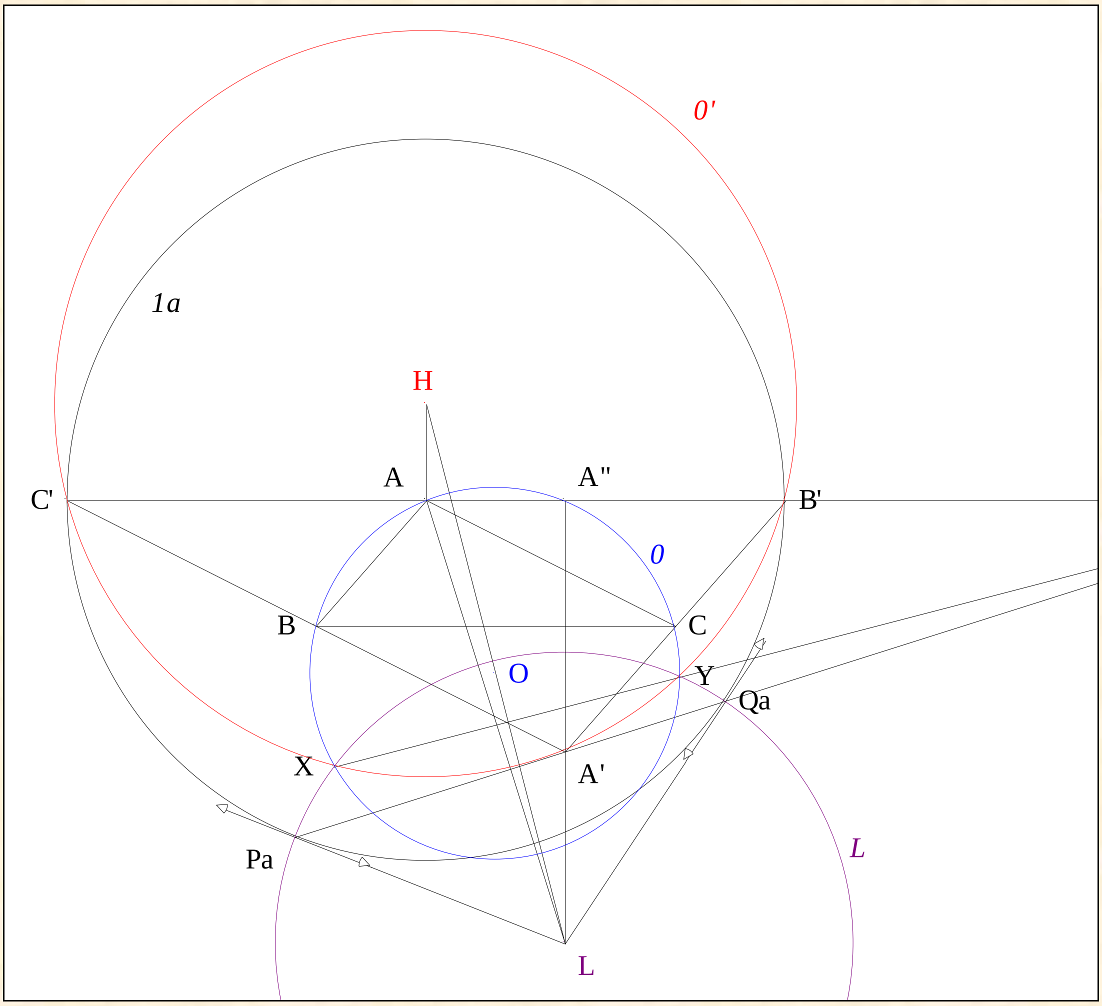
- (AA") étant confondues avec (B'C'), (PaQa), (XY) et (B'C') sont concourantes.



- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" (Cf. Annexe 8) appliqué à *0'* et *1a*, et aux droites concourantes (PQ), (XY) et (B'C'), Pa, Qa, X et Y sont cocycliques.

- Notons *L* ce cercle.

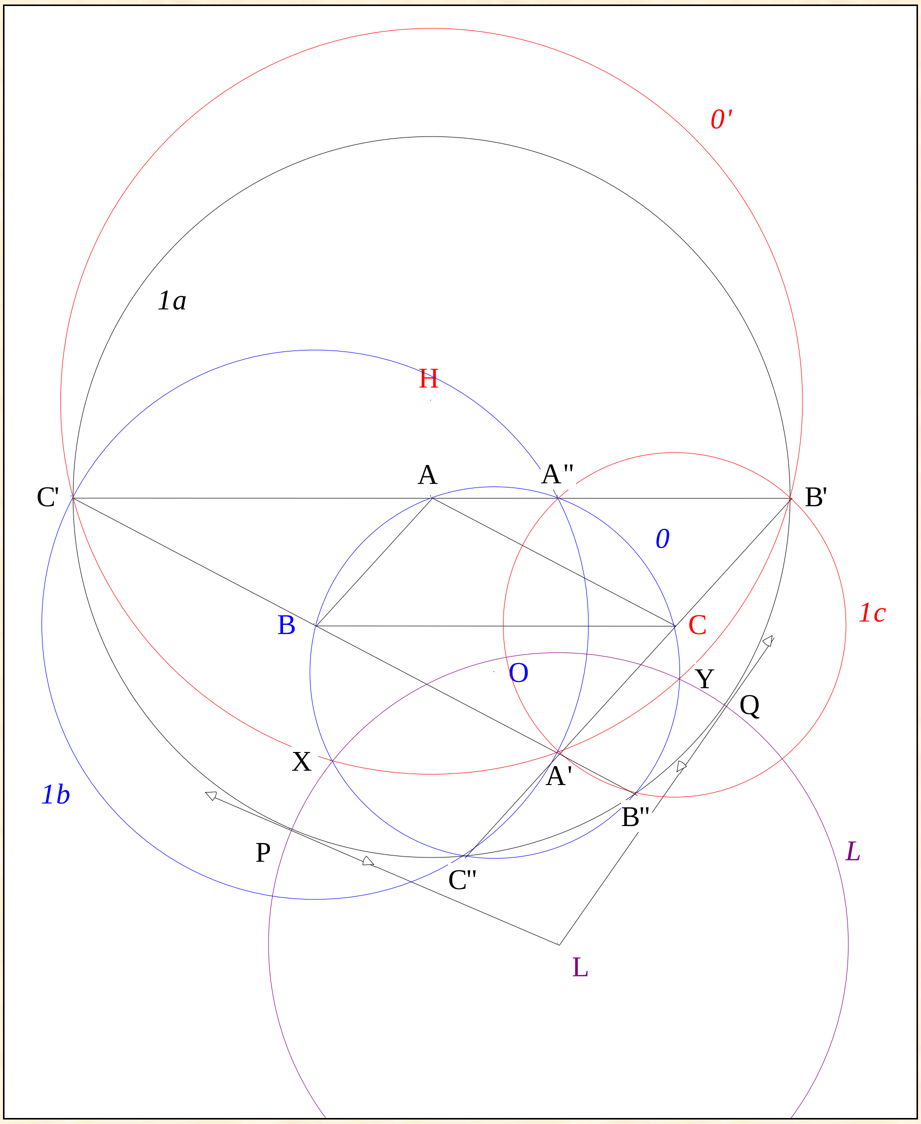
Scolies : **(1)** L est le centre de *L*



- La médiatrice de [XY] passe par H, O et le centre de *L*.
- D'après **B. VI. 1.** Le point de de Longchamps, (HO) passe par L.
- Le triangle LpaQa étant L-isocèle, la médiatrice de [PaQa] passe par A et L.
- **Conclusion :** le quadrilatère PaQaXY étant cyclique, L est le centre de *L*.

(2) *L* est orthogonal à *1a*

(3) Les deux autres cercles de Thalès de A'B'C'



- Notons *1b*, *1c* les B', C'-cercles de Thalès de A'B'C' ; ils ont pour diamètres resp. [C'A'], [A'B'].

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *L* est orthogonal à *1b*
L est orthogonal à *1c*.

(4) *L* est orthogonal à *1a*, *1b* et *1c*.

(5) *L* est "le cercle de de Longchamps de ABC"
L est "le point de de Longchamps de ABC"
(XY) est "l'axe de de Longchamps de ABC"

(6) *L* est "le cercle polaire ou conjugué de A'B'C' ".

Note historique : la considération des cercles *1a*, *1b* et *1c* a été, pour la première fois, envisagée d'une façon analytique par Gohierre de Longchamps en 1886 qui utilisait à profusion des coordonnées barycentriques. Dans son article, de Longchamps était intéressé par le cercle orthogonal à ces trois cercles et à l'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit au triangle.
En 1891, Émile Vigarié [58] revisitait l'axe radical de ces trois cercles ainsi qu'Émile

58 Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1891) 63- ?

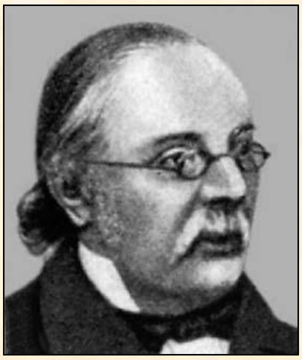
Lemoine [59] en 1895.
Rappelons que W. S. M'Cay [60] du Trinity College de Dublin avait évoqué "le cercle de de Longchamps" dès 1885 et ce nom résulte d'une proposition de Joseph Neuberg.

VII. *NOUVELLE CORRESPONDANCE MATHEMATIQUE*

DE

CATALAN

(1874 à 1880)



Un géomètre sans patrie, un républicain sans république [61]

Eugène Charles Catalan, est né le 30 mai 1814, à Bruges (Belgique) alors que cette ville appartenait à la Belgique.
Fils de l'architecte Joseph Catalan, il entre à l'âge de 12 ans à "l'École royale gratuite de dessin et de mathématiques en faveur des arts mécaniques", à Paris pour devenir architecte. Par concours, il devient trois ans plus tard, répétiteur de Géométrie dans cette même école, tout en restant élève.
En 1833, il est élève de Liouville à l'École Polytechnique et en est exclus l'année suivante à cause de ses idées non-conformistes ; réintégré par la direction de l'École, il termine ses études à la seizième place en 1835. Il quitte Paris pour aller s'installer à Châlons-sur-Marne où il enseigne les mathématiques au Collège de cette ville.
Avec l'aide personnelle de Liouville, il fonde en 1838 avec Sturm la classe préparatoire du Collège Sainte Barbe à Paris et obtient la même année, un poste de lecteur en géométrie descriptive à l'École Polytechnique, mais sa carrière s'interrompt brutalement à cause de son engagement politique à gauche. Docteur en 1841, enseignant au Collège Charlemagne à Paris en 1846, puis au lycée Saint-Louis (Paris) en 1849, il perd son emploi avec l'arrivée de Louis Napoléon Bonaparte en 1851. Les années suivantes, il continue à enseigner les mathématiques et en 1857 il prépare des étudiants de différentes institutions comme Jauffret, Barbet et Lesage au concours d'entrée à l'École polytechnique. En 1865, finit par trouver un poste de professeur émérite à l'Université de Liège qu'il gardera jusqu'à sa retraite en 1884 et aura comme élève Ernesto Césaro. C'est à partir de ce moment qu'il commence à publier. Il écrit plusieurs livres dont le *Manuel du candidat à l'École Polytechnique* (1856-57), les *Éléments de Géométrie* (1843) et le classique *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaires* (première édition en 1852).
En 1874, Paul Mansion qu'il ne faut pas confondre avec Mention, fonde avec Joseph Neuberg et Eugène Catalan, la *Nouvelle correspondance mathématique* [62] appelée ainsi en souvenir de la *Correspondance mathématique et*

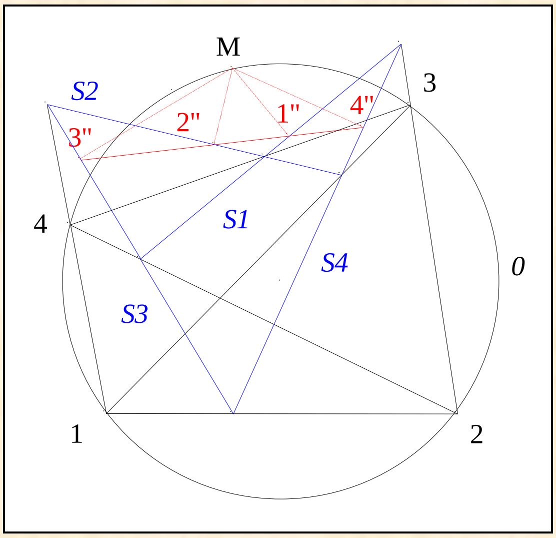
[59] Lemoine E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1895) 139- ?
[60] W. S. M'Cay, On three Circles Related to a Triangle, Transactions of the Royal Irish Academy, vol. **XXVIII** (1885) 453-470.
[61] Jongmans F., *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, Républicain sans république*
[62] 1874-1880

physique éditée en 1825 par Adolphe Quételet de l'Athénée de Bruxelles et Jean Guillaume Garnier de l'Université de Gand.
Il meurt à Liège (Belgique), le 14 février 1894.

1. Simsonienne d'un quadrilatère cyclique

VISION

Figure :

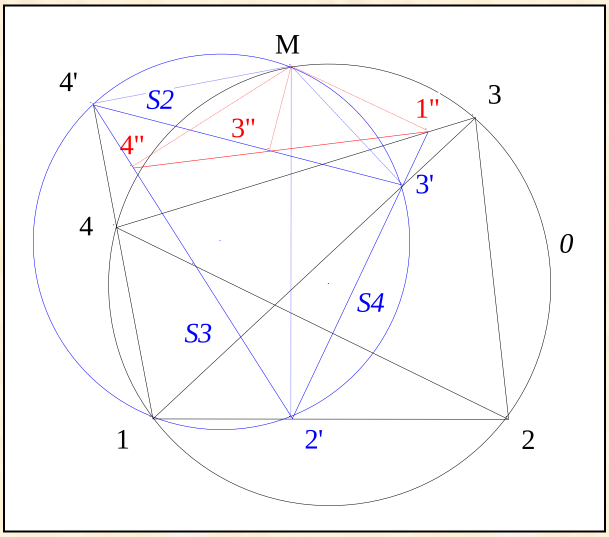


Traits : *0* un cercle,
1234 un quadrilatère inscriptible dans *0*,
M un point de *0*,
S1 , S2 , S3 , S4 les simsoniennes de pôle M relatives aux triangles 234, 341, 412, 123
et 1", 2", 3", 4" les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur S1, S2, S3 et S4.

Donné : 1", 2", 3" et 4" sont alignés. [63]

VISUALISATION

[63] Gohierre de Longchamps G., *Nouvelles Correspondances* (1877)



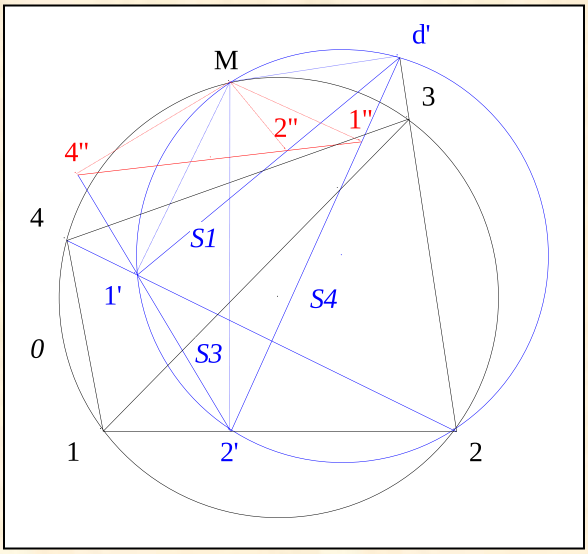
- Partons du sommet A.

- Notons 2', 3', 4' les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (12), (13) et (14).

- **Scolies :** S4 = (2'3') , S2 = (3'4') , S3 = (2'4').

- D'après Thalès "Triangle rectangle étant inscriptible dans un demi-cercle", 1, 2', 3', 4' et M sont cocycliques.

- **Conclusion partielle :** d'après "La droite de Simson" appliquée au pôle M et au triangle 2'3'4',
  1", 3" et 4" sont alignés.



- Partons du sommet B.

- Notons 1', 4' les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (24) et (23).

- **Scolie :** S1 = (1'4').

- D'après Thalès "Triangle rectangle étant inscriptible dans un demi-cercle", 2, 1', 2', 4' et M sont cocycliques.

- **Conclusion partielle :** d'après "La droite de Simson" appliqué au pôle M et au triangle 1'2'4',
  1", 2" et 4" sont alignés.

- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, (1"3"4") et (1"2"4") sont confondues.

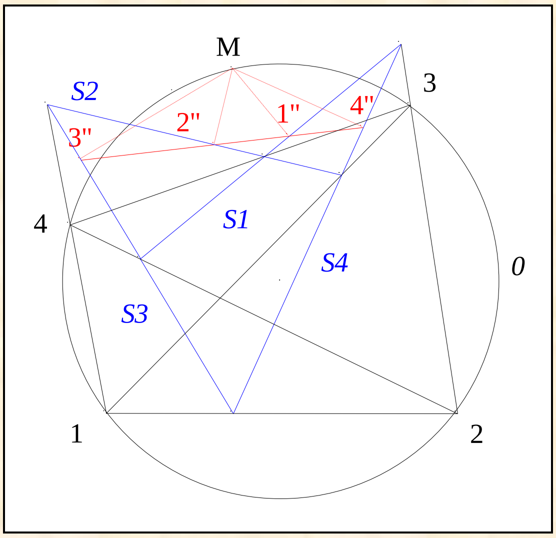
- **Conclusion :** 1", 2", 3" et 4" sont alignés.

Scolie : (1"2"3"4") est "la droite de Simson de pôle M relativement au quadrilatère cyclique 1234".

2. Simsonienne d'un n-gone cyclique

VISION

Figure :



Traits :

0 un cercle,
n un naturel supérieur ou égal à 3,
123...(n-1)n un n-gone inscriptible dans *0*,
M un point de *0*,
S1, S2,..., Sn les n droites de Simson de pôle M relativement aux (n-1)-gones[64] G1, G2,..., Gn,
1", 2",..., n" les n pieds des perpendiculaires abaissées de M sur S1, S2,..., Sn.

Donné : pour tout naturel n supérieur ou égal à 3, 1", 2",..., n" sont alignés. [65]

VISUALISATION

- Raisonnons par récurrence.
- Notons P(n) la fonction propositionnelle [1", 2",..., n" sont alignés] .
- Hypothèses de départ :

d'après "La droite de Simson", la proposition P(3) i.e. [1", 2", 3" sont alignés] est vraie ;

d'après "Simsonienne d'un quadrilatère cyclique",
la proposition P(4) i.e. [1", 2", 3", 4" sont alignés] est vraie.[66]

---

[64] Dans notre situation, un (n-1)-gone s'obtient à partir à partir du n-gone en choisissant (n-1) sommets parmi les n sommets, ce qui revient à exclure un sommet; nous le noterons Gi où i désigne le sommet non retenu

[65] Langley *Educaionnal Ttimes*

- Hypothèse d'hérédité :

  au rang n fixé, la proposition P(n) i.e. [1", 2",...,n" sont alignés] est vraie.

  Soit (n+1) un nouveau point de *0*, distinct des précédents.

  Considérons les n-gones G2,..., Gn et G(n+1) , adjacents par le sommet 1 ; il y en a n.

  D'après l'hypothèse d'hérédité,
  les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur les n droites de Simson correspondantes
  i.e.
  2",..., n" et (n+1)" sont alignés.

  Considérons les n-gones G1, G2,..., G(n-1) et Gn , adjacents par le sommet (n+1) ; il y en a n .

  D'après l'hypothèse d'hérédité,
  les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur les n droites de Simson correspondantes
  i.e.
  1", 2",...,(n-1)" et n" sont alignés.

  D'après l'axiome d'incidence **Ia**, 1", 2",..., n" et (n+1)" sont alignés.

  En conséquence, au rang n+1, la proposition P(n+1) i.e. [1", 2",..., (n+1)" sont alignés] est vraie.

  N'ayant rencontré
  aucune contrainte sur le choix de n, la proposition [$\forall n \geq 3$, P(n) $\Rightarrow$ P(n+1)] est vraie.

- **Conclusion :** les hypothèses de départ et d'hérédité étant vraies,
  d'après le théorème de récurrence, la proposition [$\forall n \geq 4$, P(n)] est vraie.

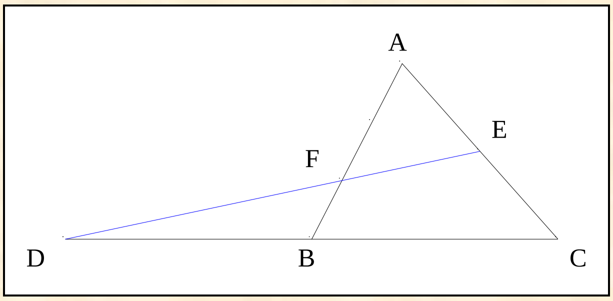
Note historique : ce résultat de de Longchamps sera reproposé en 1894 sous la forme d'une question par E. M. Langley [67] dans l'*Educational Times*.

---

66 Non nécessaire
67 Langley E. M., *Educational Times* **51** (1894) n° 9917, **52** (1894) n° 12212

C. ANNEXE

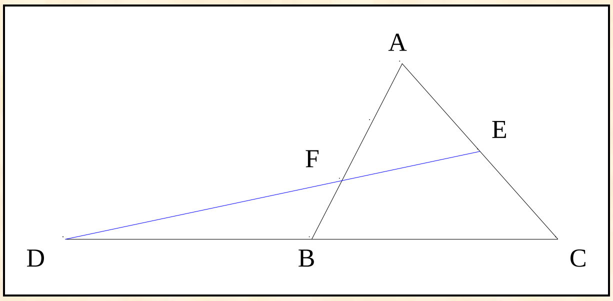
1. Milieu et tiers-point



Traits :	ABC	un triangle,
	F	le premier tiers-point de [BA] à partir de B,
	E	le milieu de [AC]
et	D	un point de (BC).

Donné : B est le milieu de [CD] *si, et seulement si,* D, E et F sont alignés.

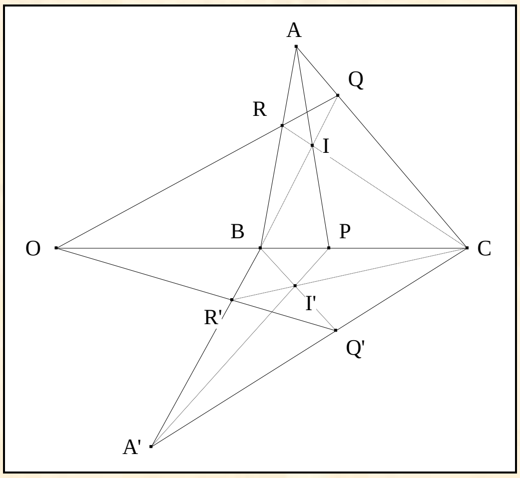
2. Milieu et milieu



Traits :	ABC	un triangle,
	E	le milieu de [AC],
	D	le point de (BC) tel que B soit le milieu de [CD]
et	F	le point d'intersection de (ED) et (BA).

Donné : F est le premier tiers-point de [AB] à partir de B.

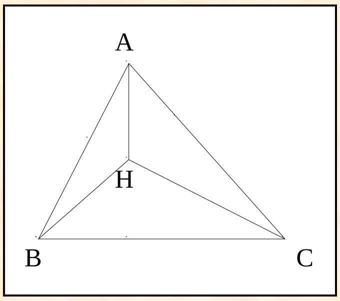
3. Deux triangles adjacents



Traits :	ABC, A'BC	deux triangles extérieurs,
	O	un point de (BC) extérieur à [BC],
	D, *D*'	deux méněliennes passant par O resp. à ABC, A'BC,
	Q, R	les points d'intersection de *D* resp. avec (AC), (AB),
	Q', R'	les points d'intersection de *D*' resp. avec (A'C), (A'B),
	I, I'	les points d'intersection resp. de (BQ) et (CR), de (BQ') et (CR')
et	P	le point d'intersection de (AI) et (BC).

Donné : (A'I') passe par P.

4. La figure ABCH

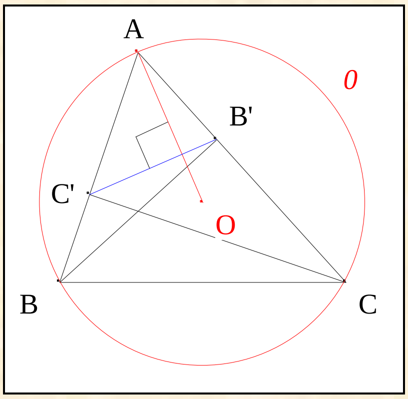


Traits :	ABC	un triangle
et	H	l'orthocentre de ABC.

Donné : A (resp. B, C) est l'orthocentre du triangle HBC (resp. HCA, HAB).

5. Une tangente et un rayon [68]

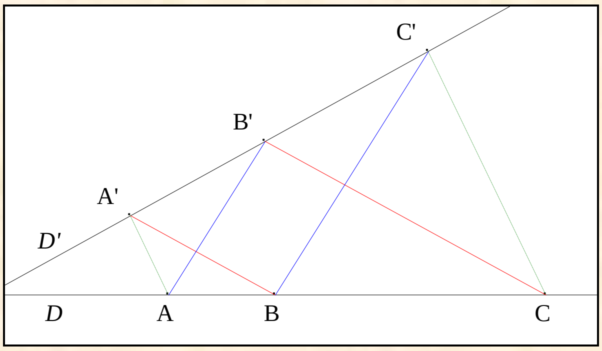
[68] Nagel, *Nouvelles Annales* **14** (1860) 440



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*
et	B', C'	les pieds des hauteurs de ABC resp. en B, C.

Donné : le rayon (AO) est perpendiculaire à (B'C').

6. Le petit théorème de Pappus [69]

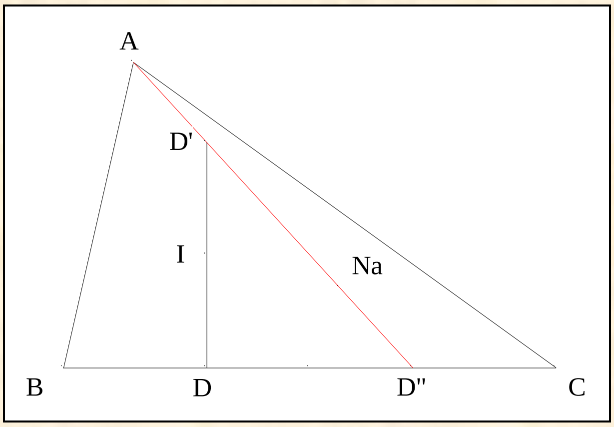


Traits :	*D*, *D'*	deux droites,
	A, B, C	trois points pris dans cet ordre sur *D*,
	B'	un point
et	A', C'	deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

7. Une nagélienne [70]

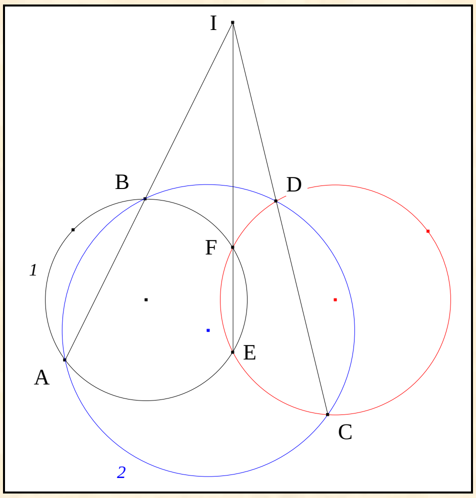
[69] Pappus, *Collections* Livre **VII**
[70] Poncelet J. V.



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
D le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur (BC),
D' le symétrique de D' par rapport à I,
D'' l'isotome de D relativement à [BC]
et Na le point de Nagel de ABC.

Donné : A, D', Na et D'' sont alignés.

8. Le théorème des trois cordes [71]

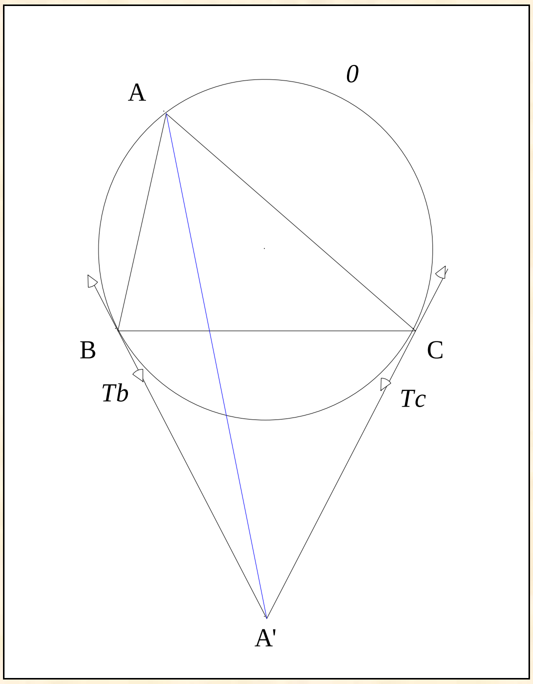


Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
C, D deux points de *2*,
E, F deux points de *1*
et I le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Donné : les points C, D, E et F sont cocycliques
si, et seulement si,
les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes en I.

9. La figure de Chasles

[71] Monge, d'après Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, **I** (1822) 40



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Tb, *Tc*	les tangentes à *0* resp. en B, C
et	A'	le point d'intersection de *Tb* et *Tc*.

Donné : (AA') est la A-symédiane de ABC.