LA FIGURE DE VECTEN

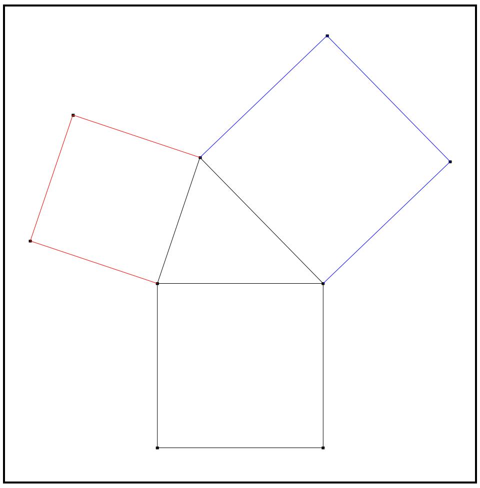
ÉTUDE

i.e.

PRENDRE – COMPRENDRE - SE LAISSER PRENDRE

†

Jean-Louis AYME

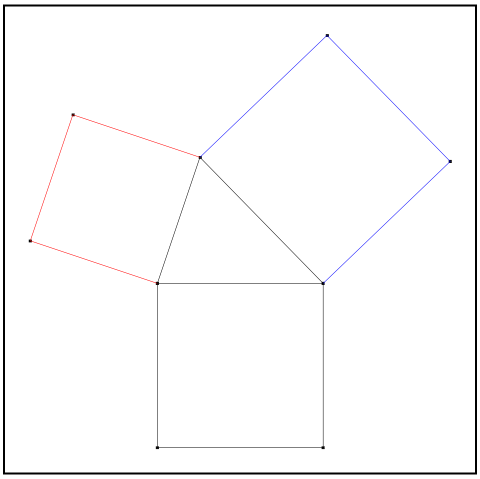


Résumé. Nous présentons une étude concernant la figure dite du "Moulin à vent", initiée par Vecten en 1817. Dans l'acte de "prendre", nous avons tenté de répertorier d'une façon non exhaustive, tous les résultats concernant aussi bien l'aspect extérieur que l'aspect intérieur de cette figure ; ensuite, dans celui de "comprendre", nous envisageons des résultats reflétant la liaison entre l'aspect extérieur et l'aspect intérieur de la figure ; et, enfin, dans celui de "se laisser prendre", nous laissons au lecteur le soin de le vivre et d'aller plus haut…
La présentation sous la forme d'une longue histoire contée où les hypothèses et les notations restent inchangées figure après figure, a pour ambition d'amener le lecteur "à voler de ses propres ailes". Des exercices sous forme d'application ou d'ouverture sont proposés. L'article peut être amélioré en amenant des preuves plus souples, plus naturelles et moins alambiquées…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Avertissement : à la fin de chaque partie, une figure récapitulant les notations par rapport à un sommet est présentée.

Sommaire

I. LA FIGURE DITE DU "MOULIN À VENT"



La première trace de cette figure que l'on obtient en construisant des carrés sur chaque côté d'un triangle rectangle, apparaît au III-ième siècle avant J.-C. chez Euclide[1] d'Alexandrie lors de la première démonstration du théorème de Pythagore.
Elle réapparaît dans le cas d'un triangle quelconque au IV-ième siècle de notre ère chez Pappus[2] d'Alexandrie, au IX-ième siècle chez Thabit ibn Qurra[3], au XIII-ième siècle chez at-Tusi[4] lors de sa traduction en arabe des *Éléments* d'Euclide, au XIV-ième siècle chez le persan al-Kaschi[5], au XV-ième siècle chez Leonard de Vinci[6] cité par Howard Eves[7], au XIX-ième siècle chez Vecten et au XX-ième siècle chez Victor Thébault[8] à qui l'on doit le titre de ce paragraphe.

Au cours des siècles, cette "image pythagoricienne" qui a attiré un assez grand nombre de géomètres, a pris différents noms, le plus populaire étant la chaise de la mariée (bride's chair) chez les grecs et les indous, les lignes principales rappelant celle de la chaise drapée de la mariée lors de la cérémonie du mariage. D'autres noms sont apparus comme le capuchon des franciscains (the Franciscan's cowl) rappelant la forme stylisée d'un A, la queue du paon (the peacock's tail) ou d'une façon plus pragmatique, le pantalon pythagoricien (Pythagorean pants) en Russie. De ce folklore mathématique, un nom semble aujourd'hui s'imposé à savoir celui du moulin à vent (windmill) en raison de ce qu'elle peut évoquer quand on la regarde.

Pour plus de précision, rappelons que l'historien des mathématiques Florian Cajori[9] considère que "la chaise de la mariée" résulte d'une erreur de traduction du mot grec νυμφη qui s'appliquait au théorème de Pythagore et qui admet deux significations à savoir "mariée" ou bien "insecte ailé". Toujours selon Cajori, l'écrivain byzantin du XIII-ième siècle, Beha ed-Dîn préféra probablement par respect à Pythagore, à en prendre le premier sens.

Pour terminer, cette figure a provoqué un assez grand nombre d'étude qui ont été répertoriée pour la première fois par l'historien John Sturgeon Mackay[10] d'Édimbourg (France) en 1894.

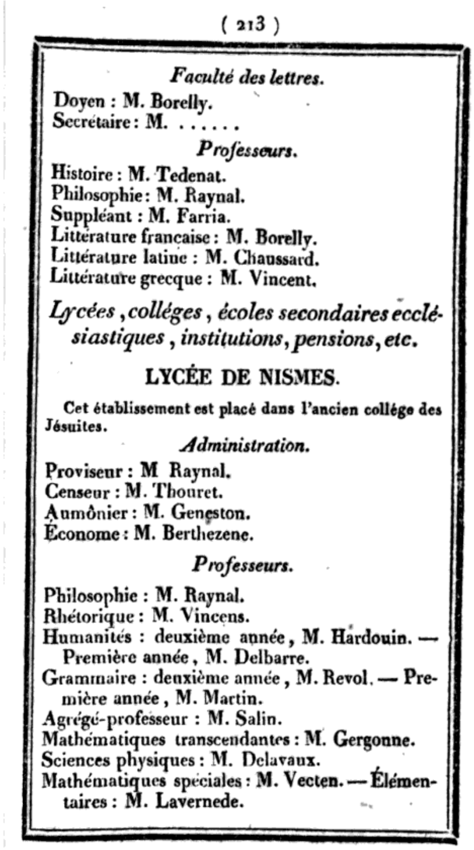
1 Euclide (~325 - ~265 av J.-C.), *Éléments*, Livre I, proposition 47.
2 Pappus (vers l'an 300), Collections IV.
3 Thabit ibn Qurra (826-901).
4 at Tusi (1201-1274), Éditions arabes d'Euclide, Rome (1594).
5 al-Kaschi (1380-1429).
6 Vinci (de) L. (1451-1519) ; Eves H.
7 Eves H., *Great Moments in Mathematics before 1650*, MAA (1983).
8 Thébault, V., Triangle bordé de carrés. *Mathesis* 65, 423-426 (1956).
9 Cajori F. (1859-1930), *American Mathematical Monthly* f6, n° 3 (1899) 72.
10 Mackay J. S., *L'intermédiaire de Mathématiciens* (1894) 254, n° 120.

II. VECTEN

Un géomètre inconnu

"Il est vrai que Vecten, qui a pourtant publié pas moins de 22 articles de 1810 à 1824 dans les *Annales* de Gergonne, est en quelque sorte un "inconnu" : on sait seulement qu'il a été dans les années 1810-1816 professeur au lycée impérial de Nîmes, c'est à dire dans le même établissement que Gergonne"[11] que ce dernier quitta en 1816 pour le Collège Royal de Montpellier en 1816.

Pour l'histoire, l'établissement où enseignait Vecten est l'héritier de l'Université de Nîmes, fondée par François Ier en 1539, qui est devenu Collège des Jésuites en 1670, École centrale en 1798, Lycée impérial le 6 mai 1803 organisé sur le modèle militaire où les élèves portent un uniforme et dont leur bataillon figure dans les revues et cérémonie officielles, Collège Royal en 1815 et, enfin, Lycée. Au cours du XX-ième siècle, celui-ci prendra le nom d'un écrivain du pays à savoir Alphonse Daudet.


(213)

Faculté des lettres.

Doyen : M. Borelly.
Secrétaire : M. . . . . . .

Professeurs.

Histoire : M. Tedenat.
Philosophie : M. Raynal.
Suppléant : M. Farria.
Littérature française : M. Borelly.
Littérature latine : M. Chaussard.
Littérature grecque : M. Vincent.

Lycées, colléges, écoles secondaires ecclésiastiques, institutions, pensions, etc.

LYCÉE DE NISMES.

Cet établissement est placé dans l'ancien collége des Jésuites.

Administration.

Proviseur : M Raynal.
Censeur : M. Thouret.
Aumônier : M. Genęston.
Économe : M. Berthezene.

Professeurs.

Philosophie : M. Raynal.
Rhétorique : M. Vincens.
Humanités : deuxième année, M. Hardouin. — Première année, M. Delbarre.
Grammaire : deuxième année, M. Revol. — Première année, M. Martin.
Agrégé-professeur : M. Salin.
Mathématiques transcendantes : M. Gergonne.
Sciences physiques : M. Delavaux.
Mathématiques spéciales : M. Vecten. — Élémentaires : M. Lavernede.

Almanach[12] de l'université impériale de 1812

En France, Vecten est connu pour avoir été le premier au début du XIX-ième siècle, à étudier le "Moulin à vent". Pour être plus précis, rappelons que ce professeur de mathématiques spéciales, licencié ès sciences, ami intime de Joseph Diaz Gergonne, ancien professeur[13] en 1816, a laissé sa trace sous la forme d'articles dans les *Annales* de Gergonne 1, 2, 9, 14 et 15. Notons que dans les *Annales* 9, Vecten propose une série de situations aussi bien dans le triangle que dans le quadrilatère mettant en jeu des points alignés qu'il traite avec art à l'aide du théorème de Ménélaüs.

Christian Gerini[14] de l'Université du Sud à Toulon (Var, France) écrit au sujet de l'époque de Vecten :

---

11 Gerini C.; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?17,501879.
12 books.google.fr
13 Vecten, *Annales* de Gergonne (1816-1817).
14 gerini@univ-tln.fr.

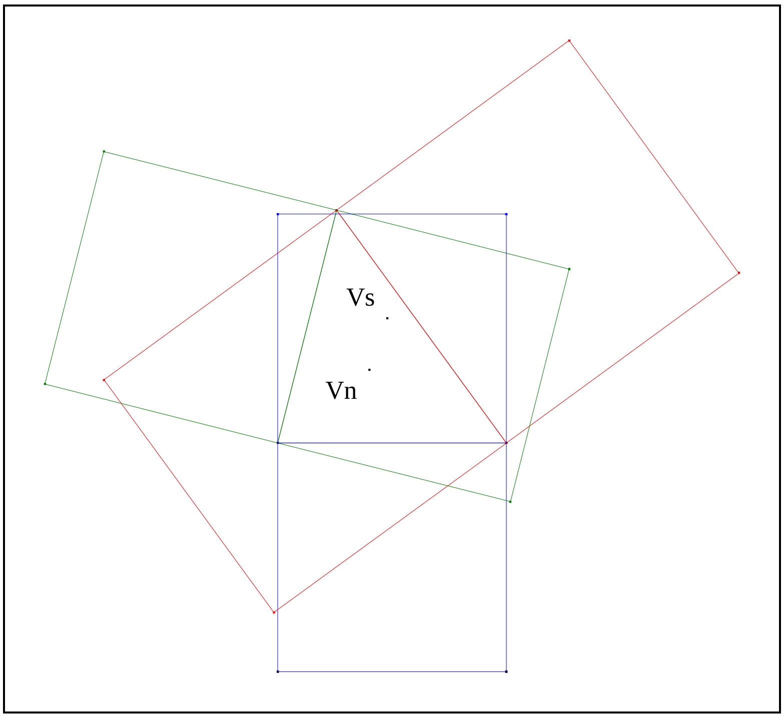
"*A son époque, de nombreux professeurs étaient directement embauchés par les municipalités et, si leur carrière ne durait pas trop longtemps, le ministère ne leur versait pas de pension de retraite, d'où l'absence de dossiers les concernant dans le fonds F17 des Archives Nationales.*
Mais alors, il y a des chances de trouver aux Archives Municipales ou aux Archives Départementales de leur lieu d'exercice un dossier de liquidation de pension".

"PRENDRE"

LES DEUX PÔLES

DU

RESBIS



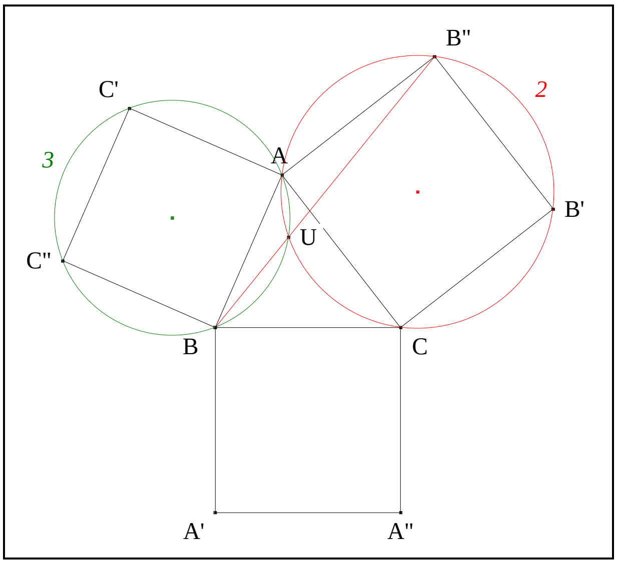
Lorsque deux aspects semblent s'opposer,
le géomètre devra croire en tous les deux…

III. LES QUATRE PREMIÈRES PROPOSITIONS DE VECTEN

1. Un lemme

VISION

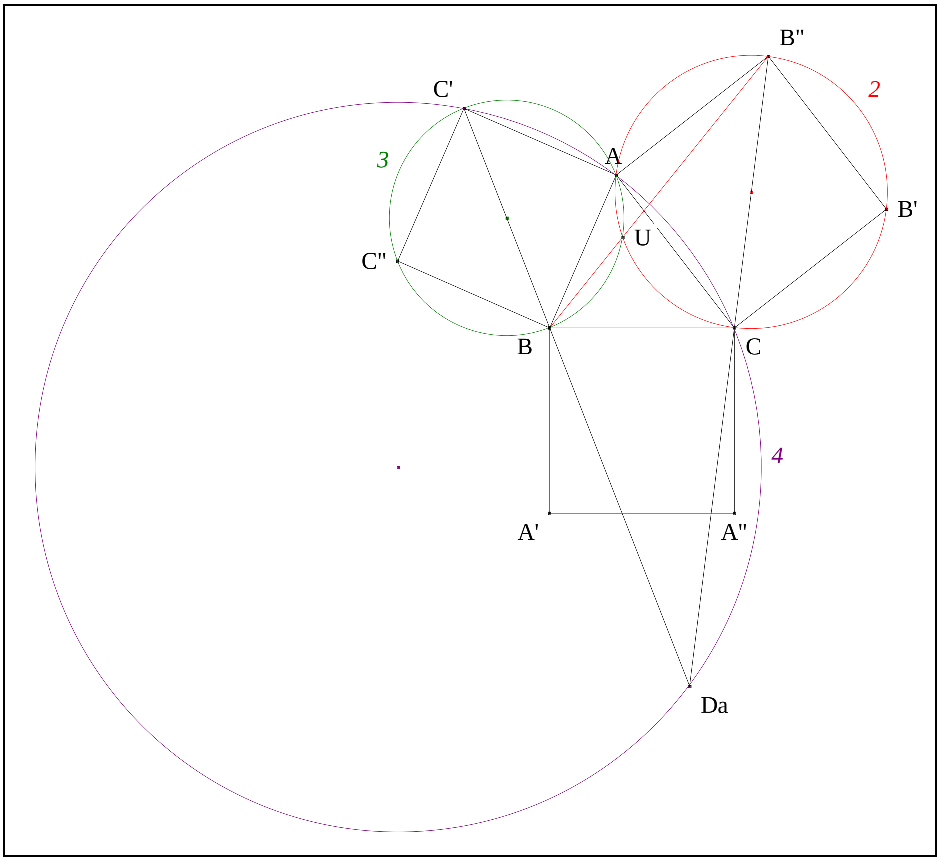
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	CB'B"A, AC'C"B, BA'A"C	trois carrés resp. extérieurs à ABC,
	2, *3*	les cercles circonscrits resp. à CB'B"A, AC'C"B
et	U	le second point d'intersection de *2* et *3*.

Donné : B, U et B" sont alignés.

VISUALISATION



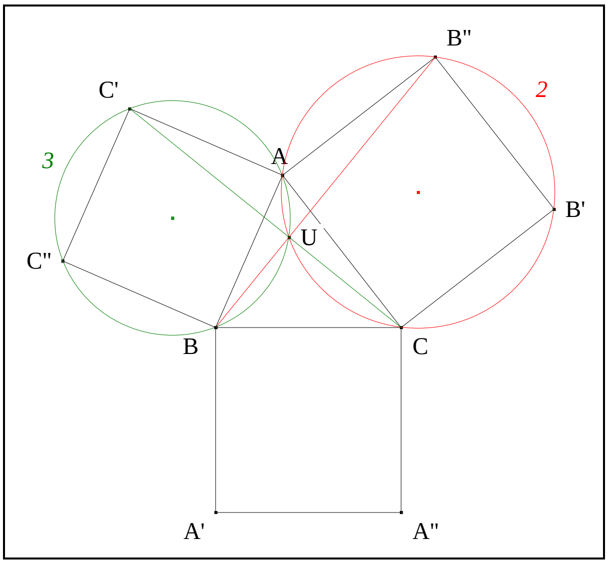
- Notons Da le point d'intersection de (BC') et (CB").

- Les triangles ACB" et ABC' étant rectangles-isocèles, sont semblables ;
  en conséquence, le quadrilatère AC'DaC ayant les angles opposés en C et C' supplémentaires, est cyclique.

- Notons *4* ce cercle.

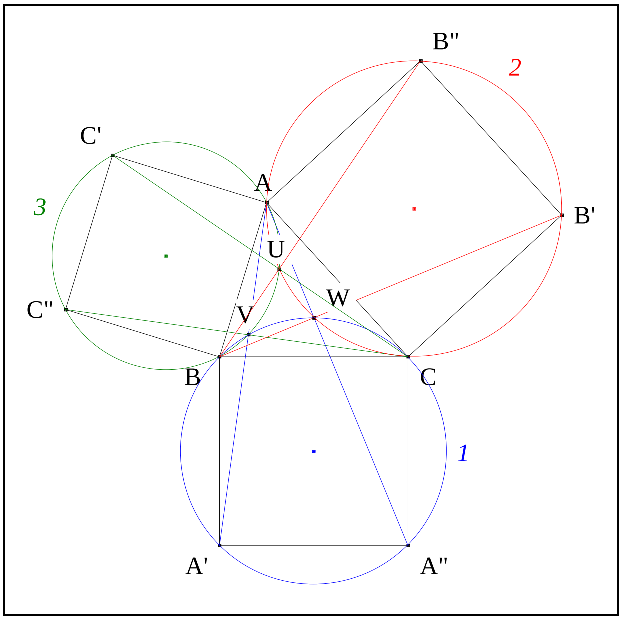
- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe 1) appliqué au triangle BDB" et aux cercles *3*, *4* et *2*, B, U et B" sont alignés.

Scolies : **(1)** un autre alignement



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous démontrerions que C, U et C' sont alignés.

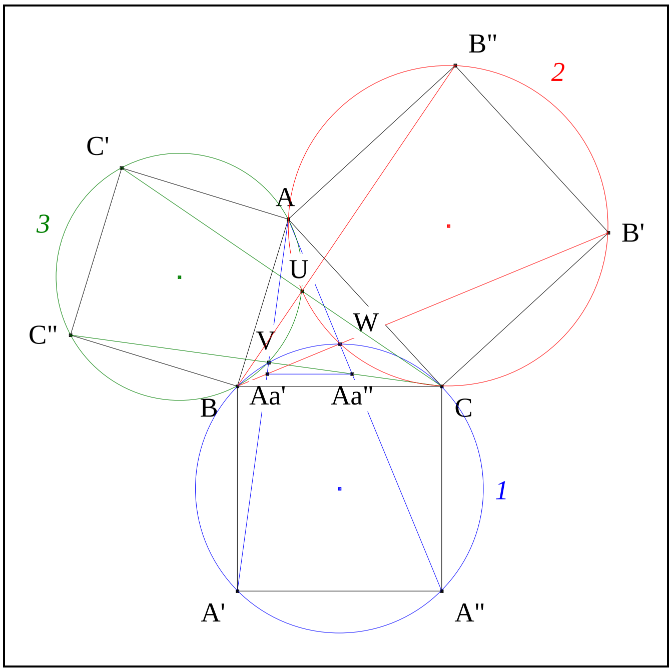
(2) Vision triangulaire



- Notons *1* les cercles circonscrits resp. à BA'A"C
  et V, W les seconds points d'intersection resp. de *3* et *1*, de *1* et *2*.

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
  - * C, V et C" sont alignés
    A, V et A' sont alignés
  - * A, W et A" sont alignés
    B, W et B' sont alignés.

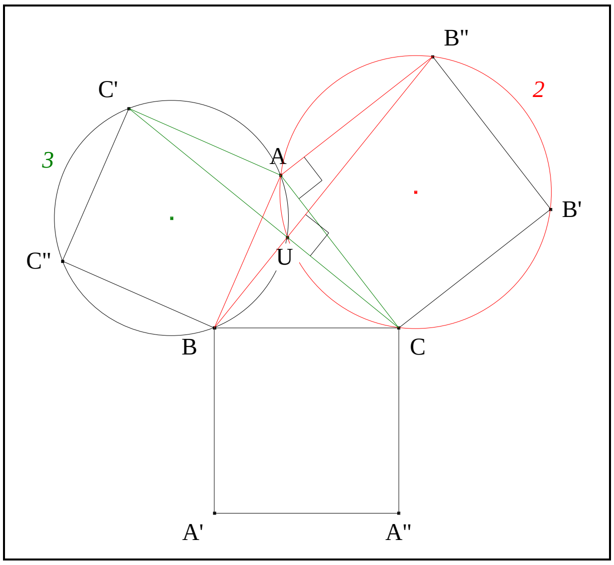
(3) Deux parallèles



- Notons Aa', Aa" les points d'intersection resp. de (AA') et (BB'), de (AA") et (CC").

- **Conclusion :** d'après "Un résultat d'Aubert" (Cf. Annexe 2),
  - * (Aa'Aa") est la pascale de l'hexagone BW A"A'VCB
  - * (Aa'Aa") // (BC).

(4) Vision dynamique



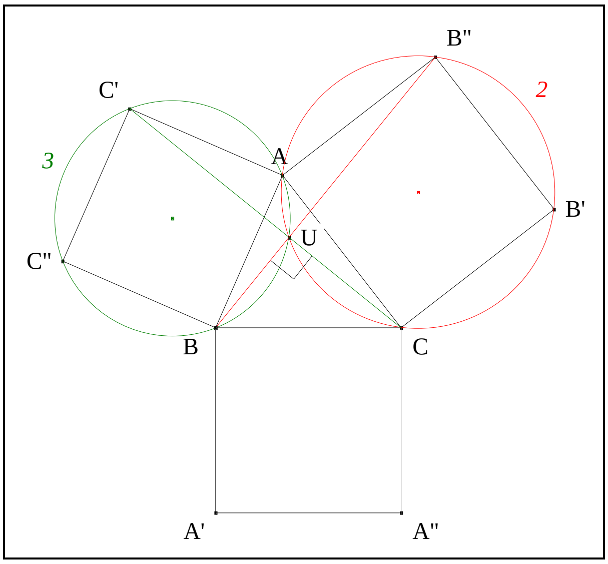
le triangle AC'C peut être déplacé vers le triangle ABB"
par
la rotation de centre A et d'angle droit.

(5) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

2. La proposition 2

VISION

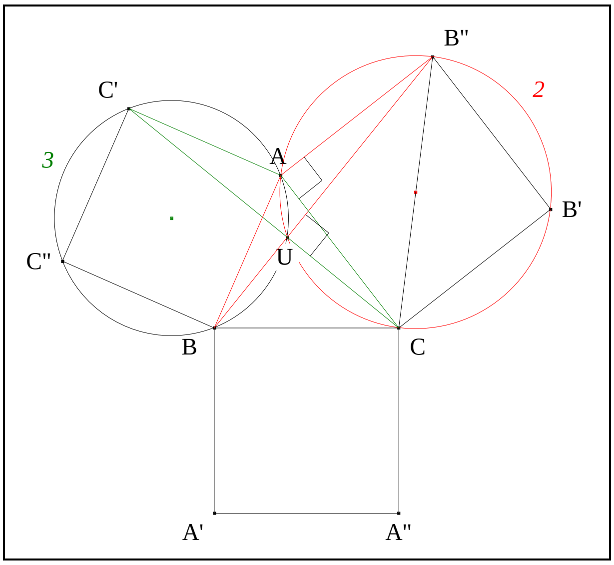
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donnés : BB" $\perp$ CC' et BB" = CC'.[15]

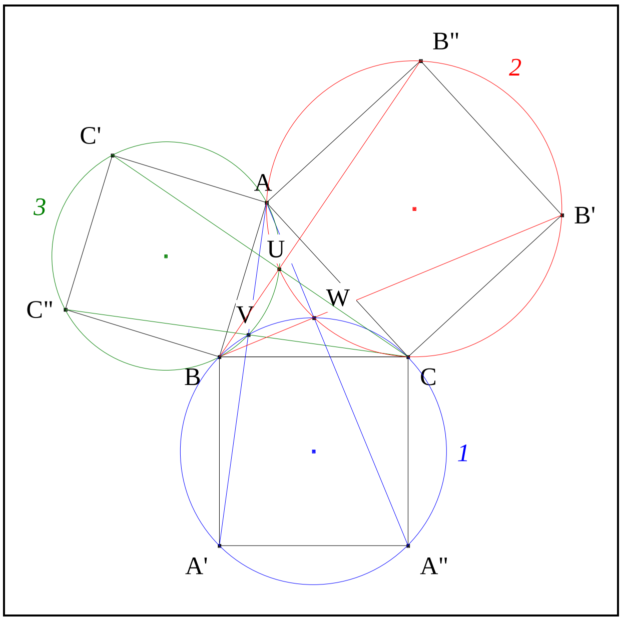
VISUALISATION



[15] Vecten, Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales, *Annales* de Gergonne VII (1816-17) 321-324, proposition 2.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", BB" ⊥ CC' .
- D'après le théorème "c.a.c." appliqué à ABB" et AC'C, BB" = CC'.
- **Conclusion :** BB" ⊥ CC' et BB" = CC'.

Scolies : **(1)** vision triangulaire



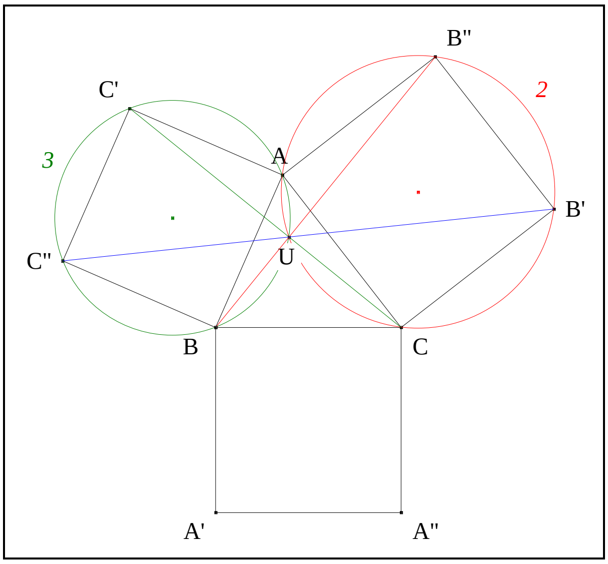
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que
  * CC" ⊥ AA' et CC" = AA'
  * AA" ⊥ BB' et AA" = BB'.

(2) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

3. La proposition 3

VISION

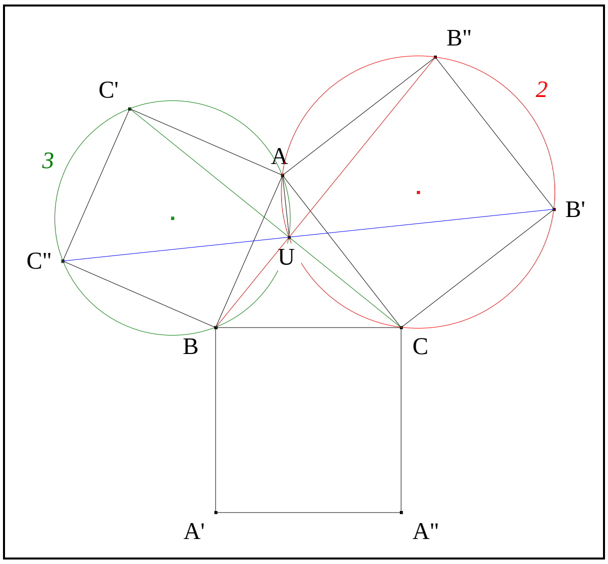
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (B'C") passe par U [16].

VISUALISATION



- D'après III. 2. La proposition 2, (BB") et (CC') passent par U.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (UC") ⊥ (UA) et (UA) ⊥ (UB') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (UC") // (UB') ;
  d'après le postulat d'Euclide, (UC") = (UB').

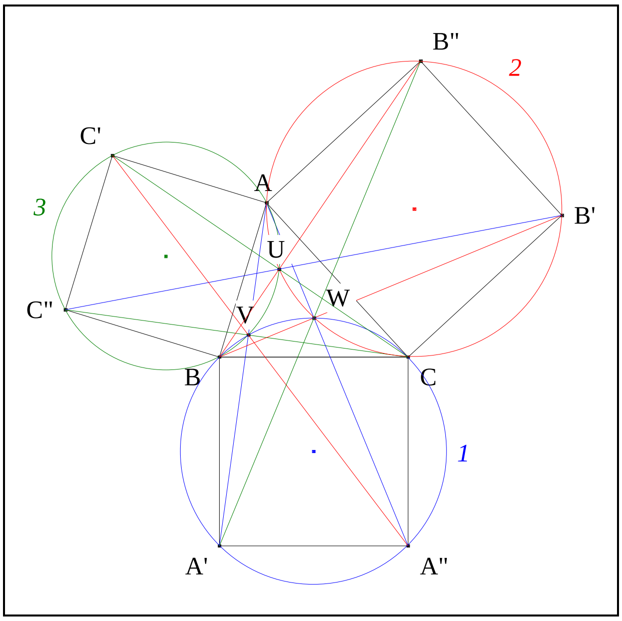
- **Conclusion :** (B'C") passe par U.

Scolies : **(1)** (UA) et (B'UC") sont les bissectrices de l'angle des droites (BUB") et (CUC').

---

16 Vecten, Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales, *Annales* de Gergonne VII (1816-17) 321-324, proposition 3 ;
BWM, exercice 1 (1979).

(2) Vision triangulaire



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que

***** (C'A") passe par V
(VB) et (C'VA") sont les bissectrices de l'angle des droites (CVC") et (AVA')

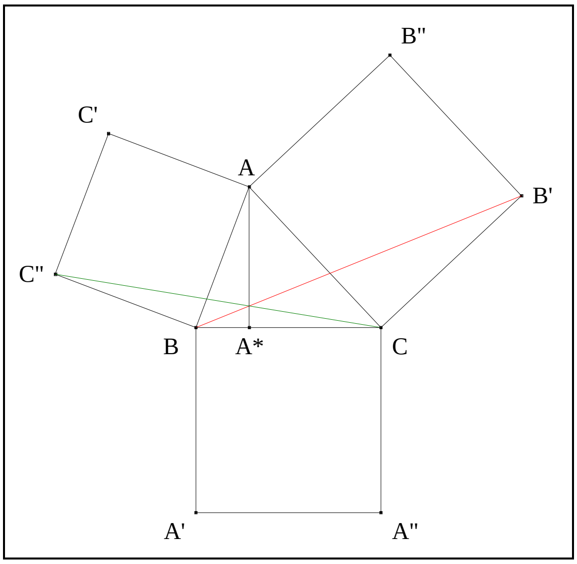
***** (A'B") passe par W
(WC) et (A'WB") sont les bissectrices de l'angle des droites (AWA") et (BWB').

(3) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

4. La proposition 1

VISION

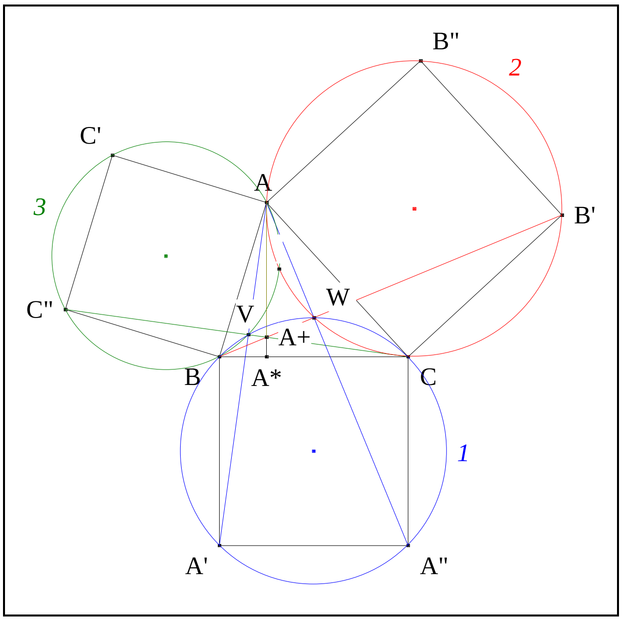
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment
et A* le pied de la A-hauteur de ABC.

Donné : (BB'), (CC") et (AA*) sont concourantes [17].

VISUALISATION



- Notons A+ le point d'intersection de (BB') et (CC").
- D'après "Un résultat d'Aubert" (Cf. Annexe 2), **(1)** (AA+) est la pascale de l'hexagone BA'VCA"WB
  (2) (AA+) // (BA').
- Par hypothèse, (BA') ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AA+) ⊥ (BC) ;
  par hypothèse, (BC) ⊥ (AA*) ;

---

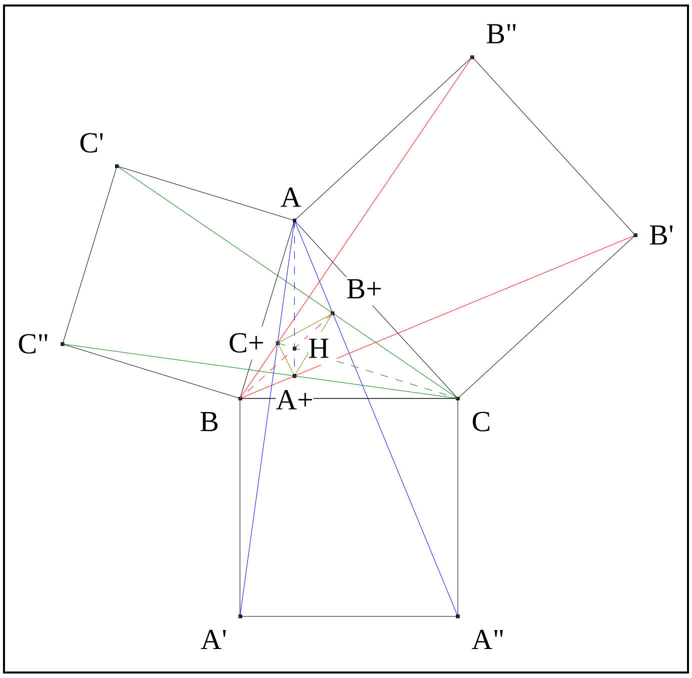
[17] Vecten, Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales, *Annales* de Gergonne VII (1816-17) 321-324, proposition 1 ;
Supposed to be simple, *Mathlinks* du 09/03/2007 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1357355152&t=137761.

d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AA+) // (AA*) ;
d'après le postulat d'Euclide, (AA+) = (AA*).

- **Conclusion :** (BB'), (CC") et (AA*) sont concourantes.

Note historique : ce résultat qui aurait été connu de Héron d'Alexandrie (~10, ~75), a été redécouvert par Henri Vuibert[18] fondateur de la librairie éponyme en 1877.

Scolies : **(1)** vision triangulaire



- Notons B*, C* les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC,
  B+, C+ les points d'intersection resp. de (CC') et (AA"), de (AA') et (BB"),
  et H l'orthocentre de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CC'), (AA") et (BB*) sont concourantes
  (AA'), (BB") et (BB*) sont concourantes.

- **Conclusion :** H est le centre de perspective de ABC et A+B+C+

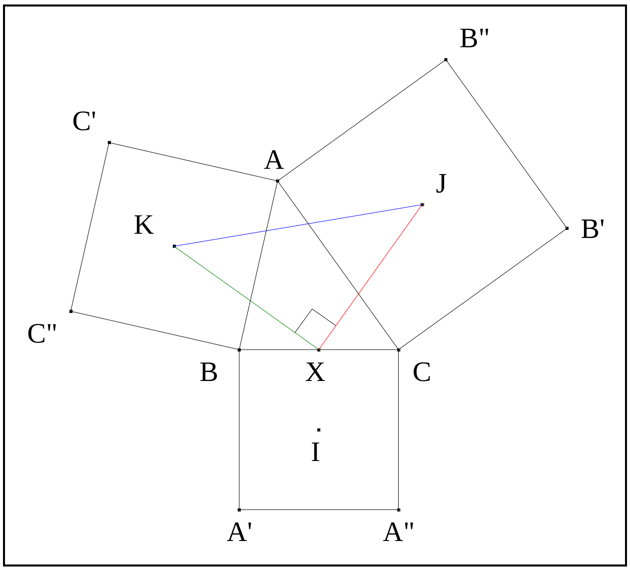
(2) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

5. Un triangle rectangle-isocèle

VISION

Figure :

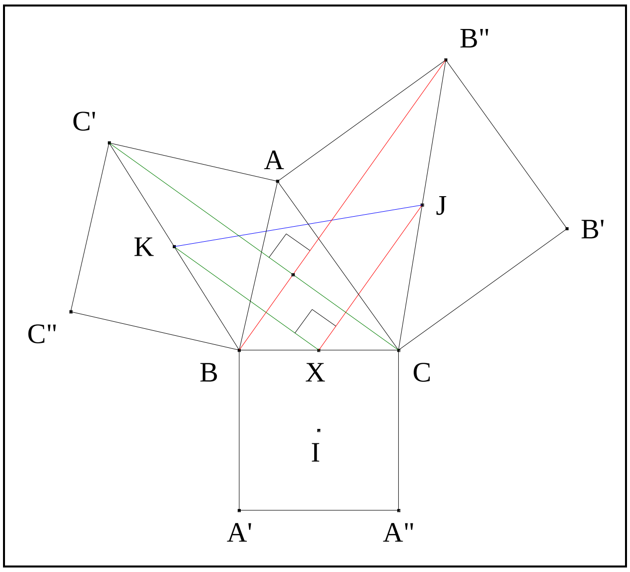
[18] Vuibert H., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1879-1880) 36.



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
I, J, K les centres resp. de BA'A"C, CB'B"A, AC'C"B
et X le milieu de [BC].

Donné : le triangle XJK est rectangle-isocèle en X. [19]

VISUALISATION



- D'après III. 1. Un lemme, **(1)** BB" = CC'
  (2) (BB") ⊥ (CC').

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué

  (1) au triangle BCB", (BB") // (XJ) et 2.XJ = BB"
  (2) au triangle BCC', (CC') // (XK) et CC' = 2.XK ;

  la relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (XK) ⊥ (XJ) ;
  par transitivité de la relation =, XJ = XK .

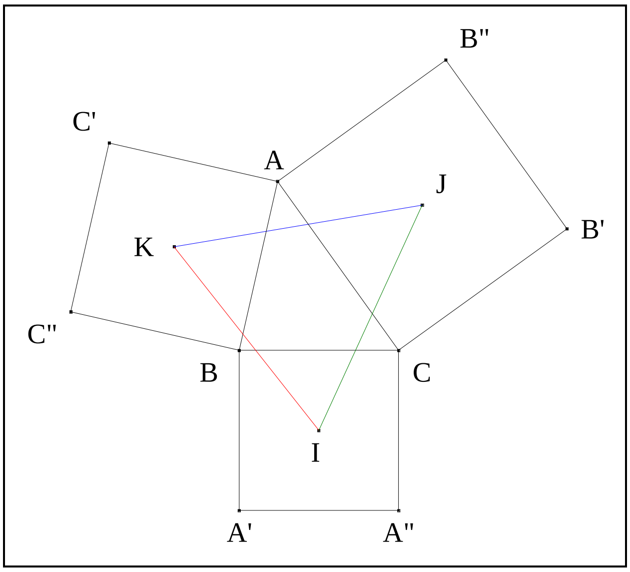
---

19 Neuberg J..

- **Conclusion :** le triangle XJK est rectangle-isocèle en X.

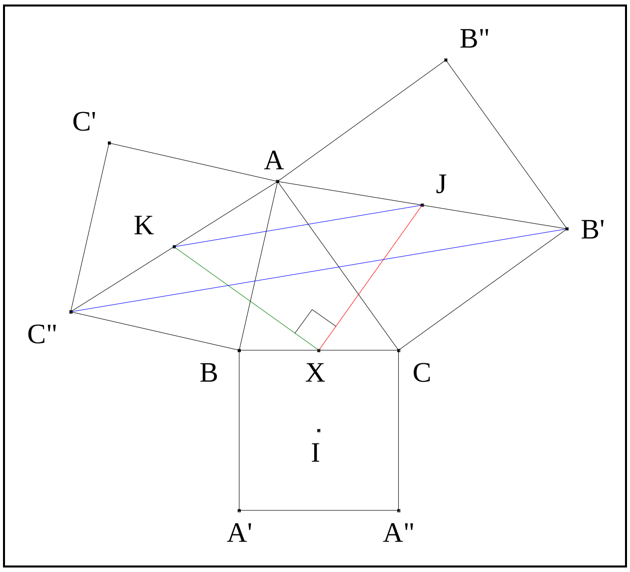
Note historique : Charles Ange Laisant[20] (1841-1920) est le premier, à notre connaissance, à avoir considéré les centres des carrés construits sur les divers côtés d'un polygone.

Scolies : **(1)** un triangle remarquable



- Par définition, IJK est le triangle extérieur de Vecten relativement à ABC

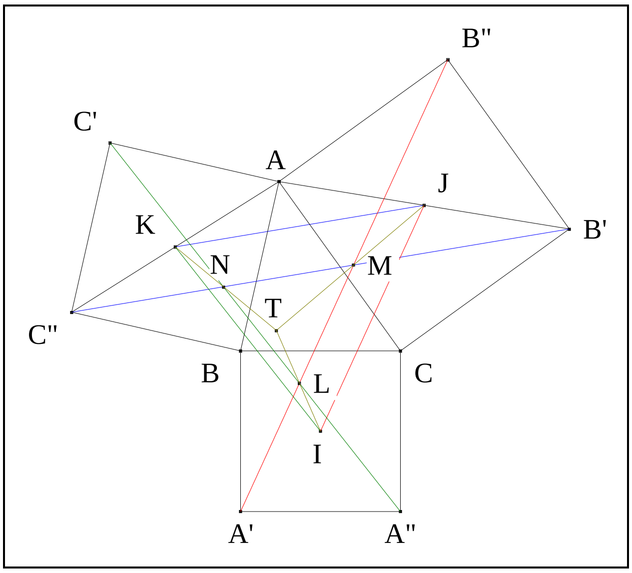
(2) Un résultat de Charles Ange Laisant



- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AB'C",
(KJ) // (B'C") et 2.KJ = B'C".

(3) Vision triangulaire du résultat de Laisant

[20] Laisant C. A., *Nouvelle Correspondance mathématique* (1877) p. 368 et 400, questions 290 et 302.



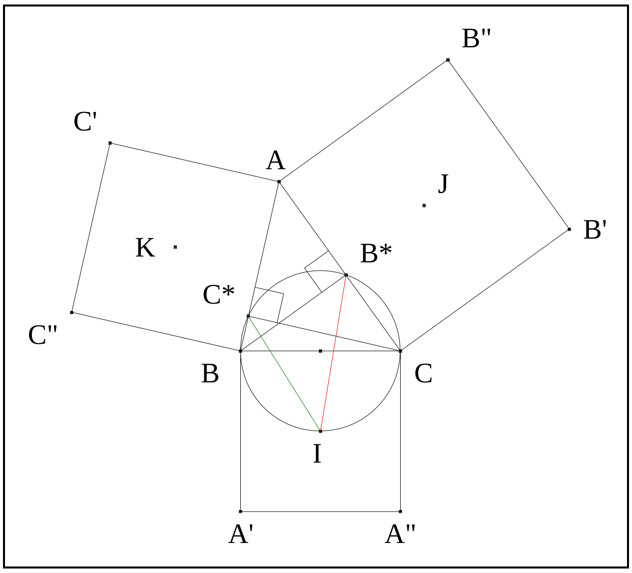
- Notons L, M, N les points d'intersection resp. de (A'B") et (A"C'), (B'C") et (B"A'), (C'A") et (C"B').

- Les triangles LMN et IJK sont homothétiques.

- **Conclusion :** (IL), (JM) et (KN) sont concourantes[21].

- Notons T ce point de concours.

(4) Une situation d'Antreas Hatzipolakis [22]



- Notons B*, C* les pieds resp. des B, C-hauteurs de ABC.
 et *1"* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par I.

- **Conclusion :** IB étant égal à IC, * (B*I) est la B*-bissectrice intérieure du triangle B*BC

---

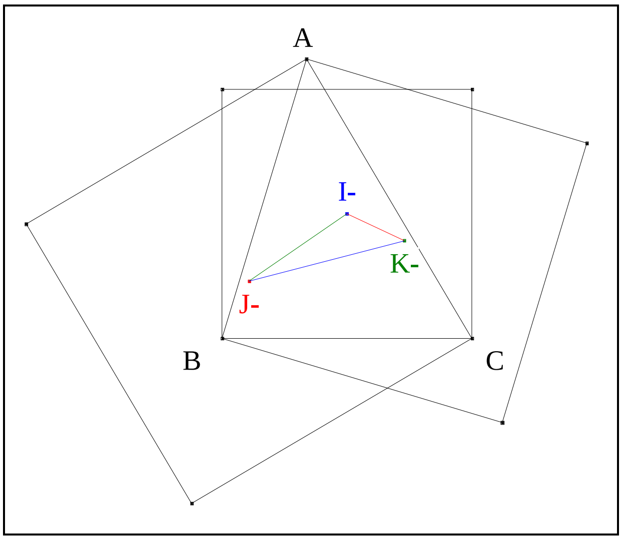
21 *Ukrainian journal contest*, problem 311, by Vyacheslav Yasinskyy.
once more about squares constructed at sides of triangle, *Mathlinks* du 13/03/2009
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=264254.
Concurrent!, *Mathlinks* du 30/01/2008 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1365292766&t=185882.

22 Hatzipolakis A., X_371, Message *Hyacinthos* #1584 du 12/10/2000 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/1584.

* (C*I) est la C*-bissectrice intérieure du triangle C*BC.

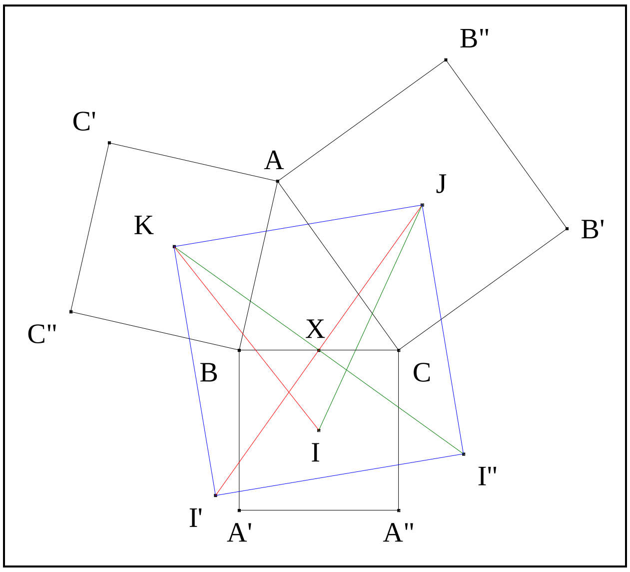
(5) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

(6) Un second triangle remarquable



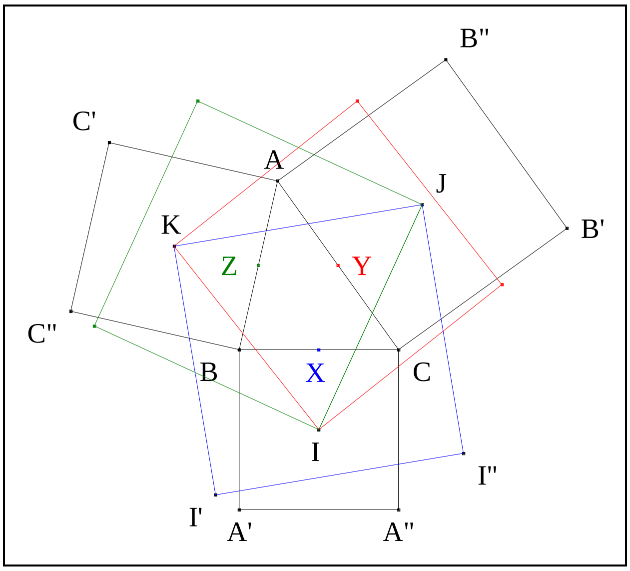
- Notons I-, J-, K- les centres des carrés construits sur [BC], [CA], [AB] à l'extérieur de ABC.
- **Définition :** I-J-K- est le triangle intérieur de Vecten relativement à ABC.

(7) Un nouveau carré



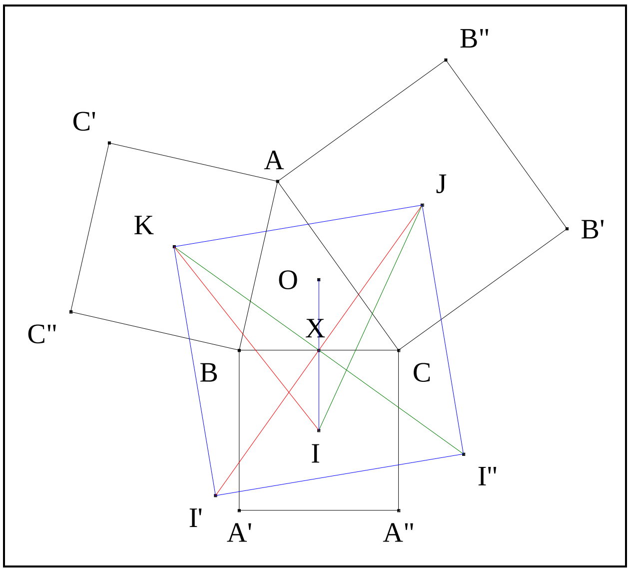
- Notons KI'I"J le carré intérieur à IJK
- **Conclusion :** le centre X de KI'I"J est sur [BC].

(8) Vision triangulaire avec ces "nouveaux carrés"



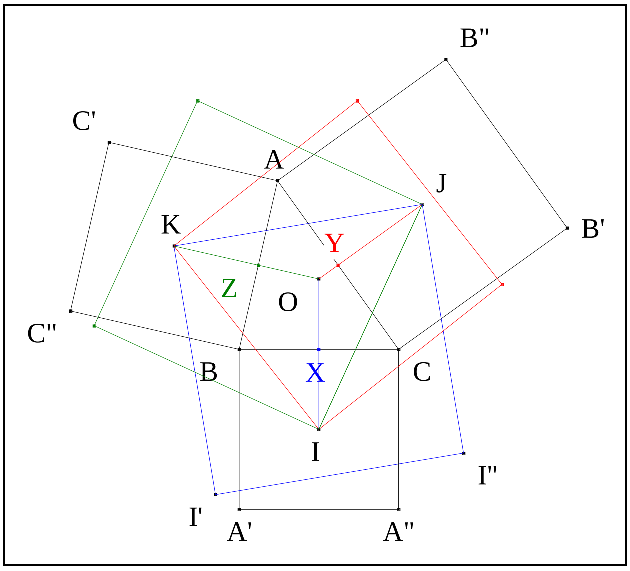
- **Conclusion :** les centres des carrés construits à intérieur du triangle des centres des carrés construits à l'extérieur d'un triangle, sont sur les côtés de celui-ci.

(9) Un résultat de Joseph Neuberg



- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC.
- Nous avons : XB = XC et IB = IC.
- D'après le théorème de la médiatrice, (IX) est la médiatrice de [BC].
- **Conclusion :** (IX) passe par O.

(10) Vision triangulaire du résultat de Neuberg



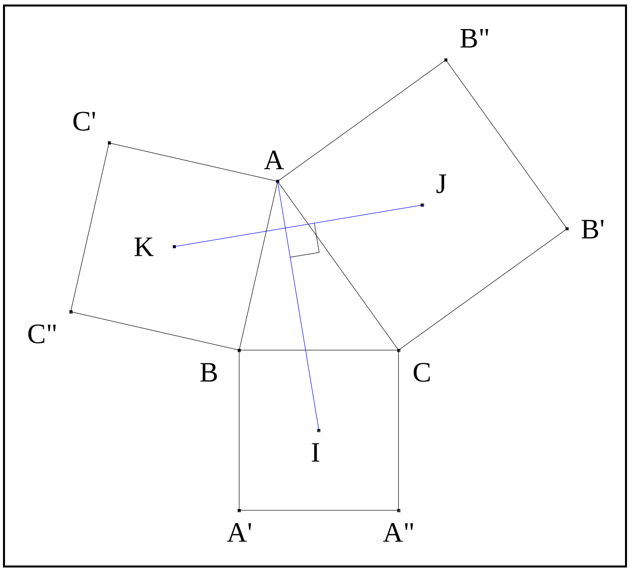
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (JY) passe par O
(KZ) passe par O.

- **Conclusion :** d'après III. 7. Le premier point de Vecten, scolie 4, O est le second point de Vecten de IJK. [23]

6. Un résultat de Joseph Neuberg

VISION

Figure :



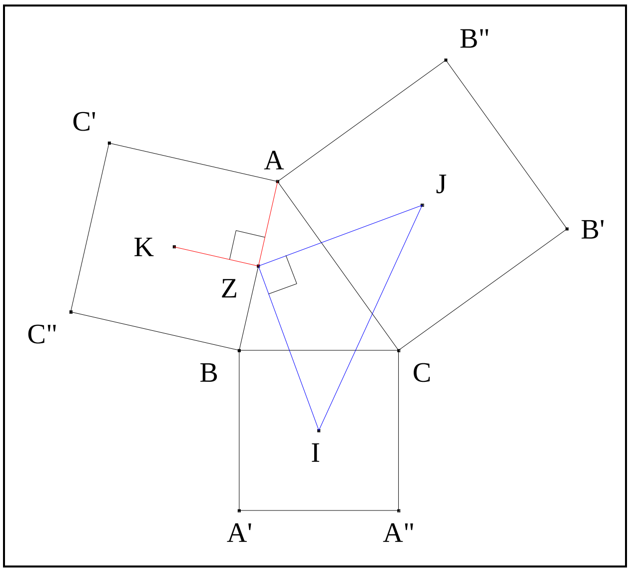
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (AI) est perpendiculaire à (JK) [24].

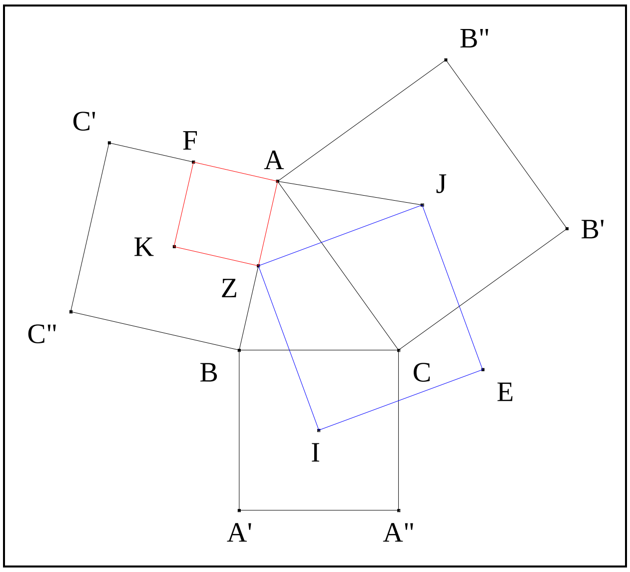
---

[23] Neuberg J..
Grinberg D., Squares on the sides, Message *Hyacinthos* # 8603 du 09/11/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/8603.

VISUALISATION



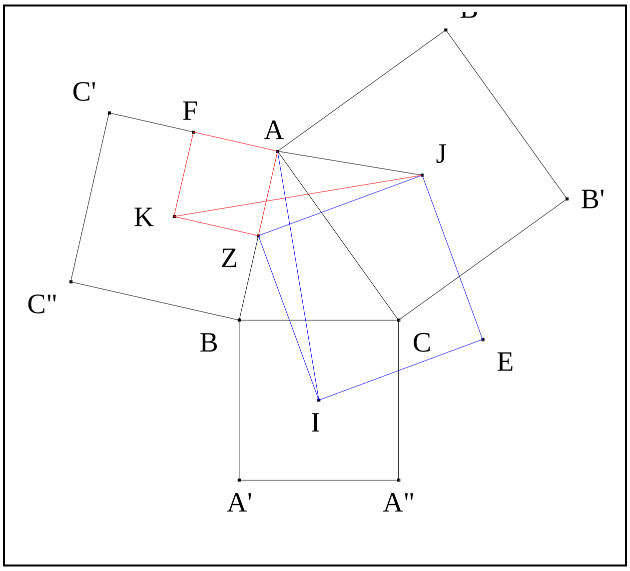
- Notons Z le milieu de [AB].
- D'après III. 5. Un triangle rectangle-isocèle, (ZI) ⊥ (ZJ) et ZI = ZJ.
- **Scolie :** (ZK) ⊥ (ZA) et ZK = ZA.



- Notons E, F les quatrièmes sommets resp. des carrés JZIE et RZAF, extérieur du triangle AZQ.

---

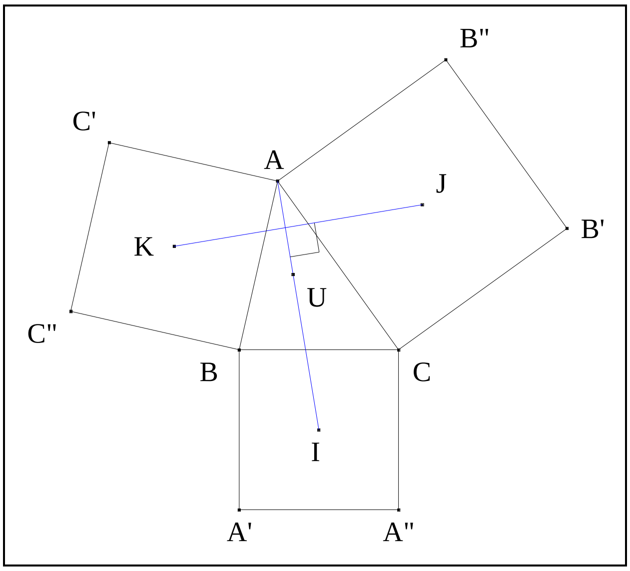
[24] Neuberg J., *Nouvelle Correspondance de Mathématiques* IV (1878) 142-145, n° 4 ;
Neuberg J., Bibliographie du Triangle et du Tétraèdre, *Mathesis* vol. 37 (1923) 289-293.



- **Conclusion :** d'après III. 1. Un lemme, (AI) est perpendiculaire à (JK).

Note historique : ce résultat aurait été découvert 34 ans avant Neuberg par Stipanic de Belgrade.

Scolies : **(1)** trois points alignés

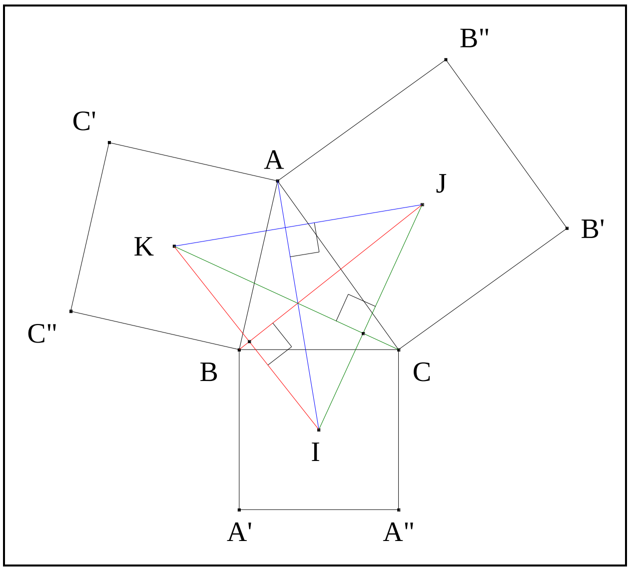


- **Conclusion :** A, U et I sont alignés.

(2) D'après III. 5. Un triangle rectangle isocèle, AI = JK [25].

(3) Vision triangulaire

[25] Barisien E.-N., *Journal de Mathématiques élémentaires* (1893) n° 541 ;
Geometry, *Mathlinks* du 20/08/2005 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=809456631&t=52697.



Énoncé traditionnel [26] **:** sur chacun des côtés d'un triangle, on construit extérieurement aux côtés un carré

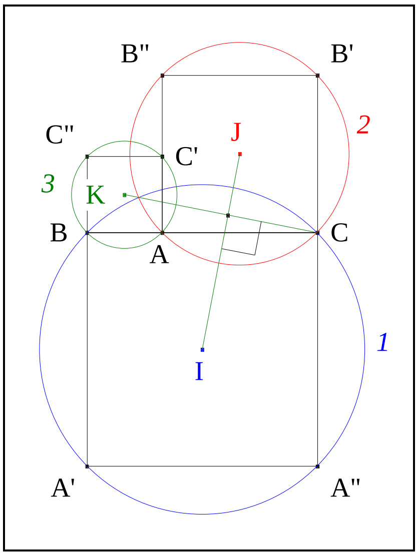
1° les droites joignant un centre de carré extérieur au sommet du triangle opposé au côté de ce carré concourent en un même point qui est l'orthocentre d'un triangle formé par les centres des carrés extérieurs

2° la distance d'un centre de carré extérieur, au sommet opposé du triangle, est égale à la distance des deux autres centres des carrés extérieurs.

(4) Un cas particulier

VISION

Figure :



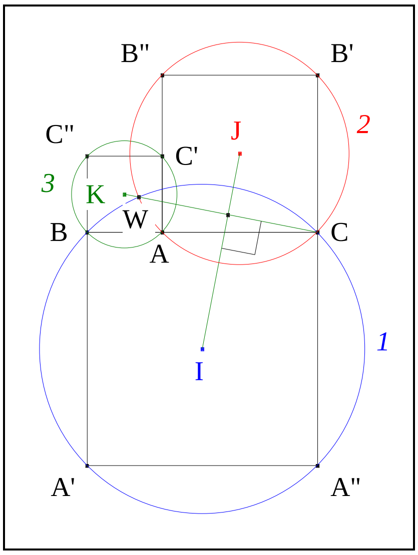
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment en considérant que ABC est aplati avec A entre B et C.

---

26 Barisien E.-N., *Journal de Mathématiques élémentaires* (1893) n° 541 ;
solution : Droz-Farny A., *Journal de Mathématiques élémentaires* (1894) 236 ;

Donné : (CK) est perpendiculaire à (IJ) [27].

VISUALISATION



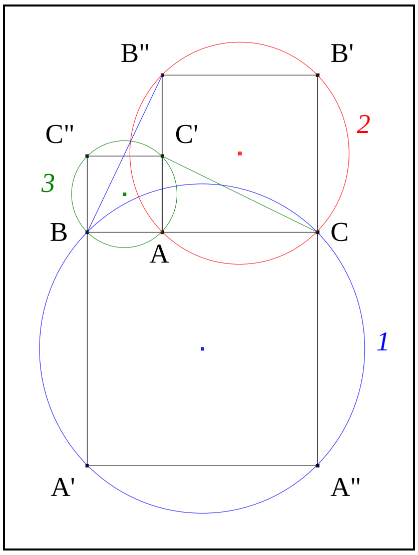
- Par construction, (CIA') ⊥ (CJB") ;
  en conséquence, *1* et *2* sont orthogonaux.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que
  * *2* et *3* sont orthogonaux
  * *3* et *1* sont orthogonaux.

- D'après "Axe radical de deux cercles sécants" (Cf. Annexe 3), K est sur l'axe radical (CW) de *2* et *3*.

- **Conclusion :** (CK) est perpendiculaire à (IJ).

- **Exercice** [28] **:**



[27] F. G.-M.
IMO 1959, Day 2, Problem 5 ;
An arbitrary point M is selected in the interior of segment, *Mathlinks* du 06/10/2006 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1354686636&t=54823.

[28] 1-ière O.I.M., Bucarest (Roumanie) 1959.

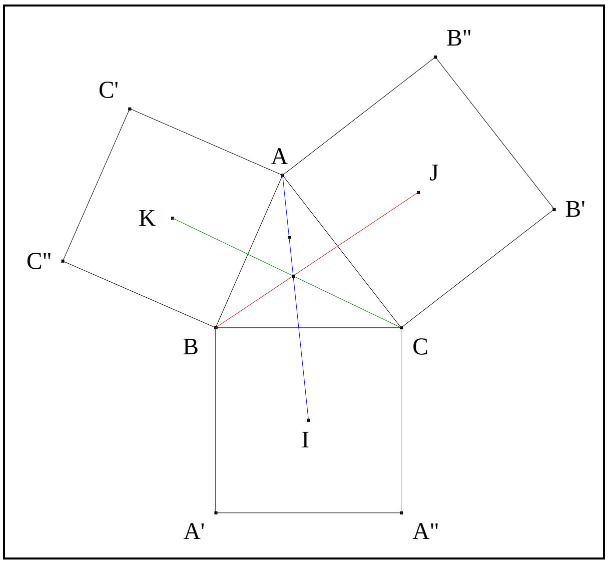
(BB") est perpendiculaire à (CC').

(5) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

7. La proposition 4 ou le premier point de Vecten [29]

VISION

Figure :

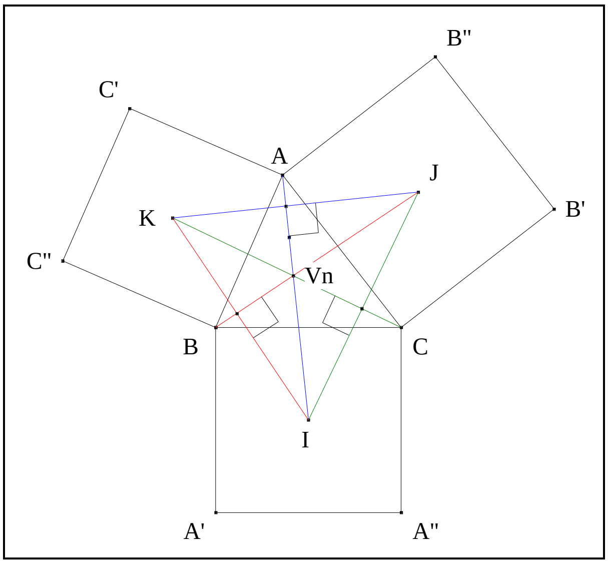


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment
et I, J, K les centres de BA'A"C, CB'B"A, AC'C"B.

Donnés : (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

VISUALISATION

[29] Vecten, Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales, *Annales* de Gergonne VII (1816-17) 321-324, proposition 4.



- D'après III. 6. Un résultat de Neuberg, (AI), (BJ) et (CK) sont resp. les I, J, K-hauteurs du triangle IJK.
- **Conclusion :** (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.
- Notons Vn ce point de concours.

Note historique : ce résultat pour un triangle ABC rectangle en A apparaît dans *Archives de Grunert* [30].
Le résultat pour un triangle quelconque a été signalé dans F. G.-M.[31].
Ernst Wilhelm Grebe a été le premier en 1840, puis en 1850, à nommer X_{485} sous le nom de "point de Vecten".

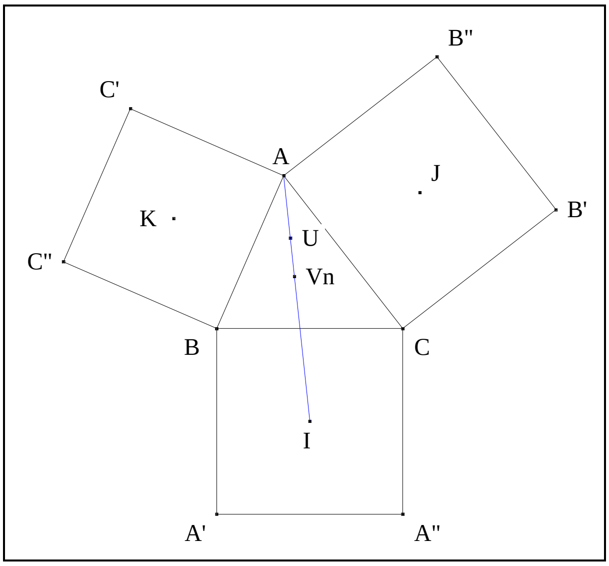
Scolies : **(1)** Vn est "le premier point de Vecten de ABC"
ou "le point extérieur de Vecten de ABC".
Il est répertorié sous X_{485} chez ETC.
Rappelons que John Conway est à l'origine de la notation Vn,
n étant l'initiale de normal.

(2) Vn est l'orthocentre du triangle extérieur de Vecten de ABC i.e. de IJK

(3) ABC et IJK sont en perspective de centre Vn.

(4) Quatre points alignés

[30] *Archives de Grunert* 2[ième] série XIV.
[31] F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed. (1920), Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) ; Théorème 642 XII p. 860.

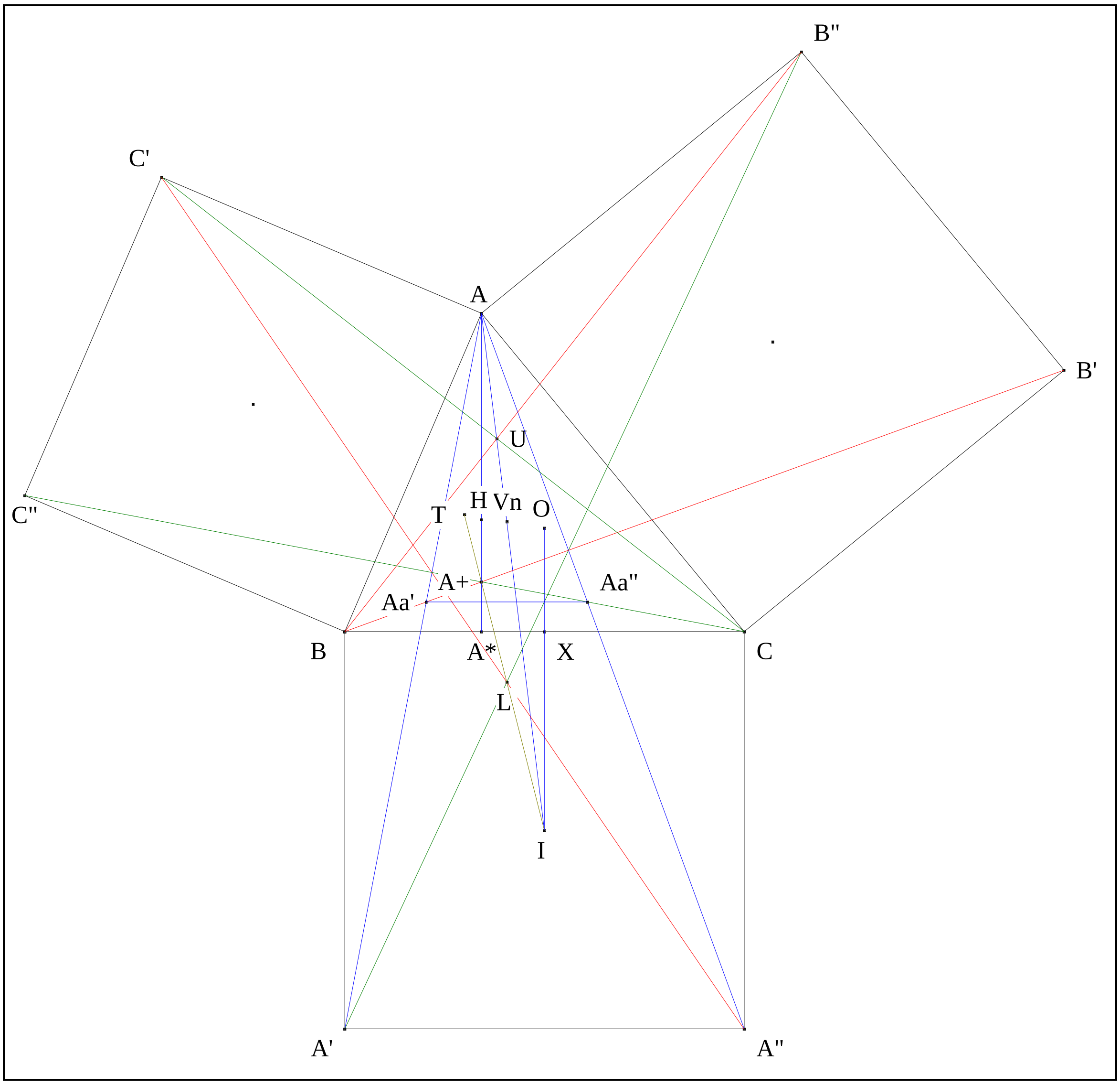


- **Conclusion :** A, U, Vn et I sont alignés.

(5) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur" ;
le point de concours est "le second point de Vecten de ABC"
et est répertorié sous X_{486} chez ETC.
Rappelons que John Conway le note Vs, s étant l'initiale de "switched".

(6) Pour Conway, Vn et Vs sont "les points pythagoriciens de Vecten de ABC" pour souligner leur lien avec la figure de Pythagore.

8. Figure récapitulant les notations par rapport à A

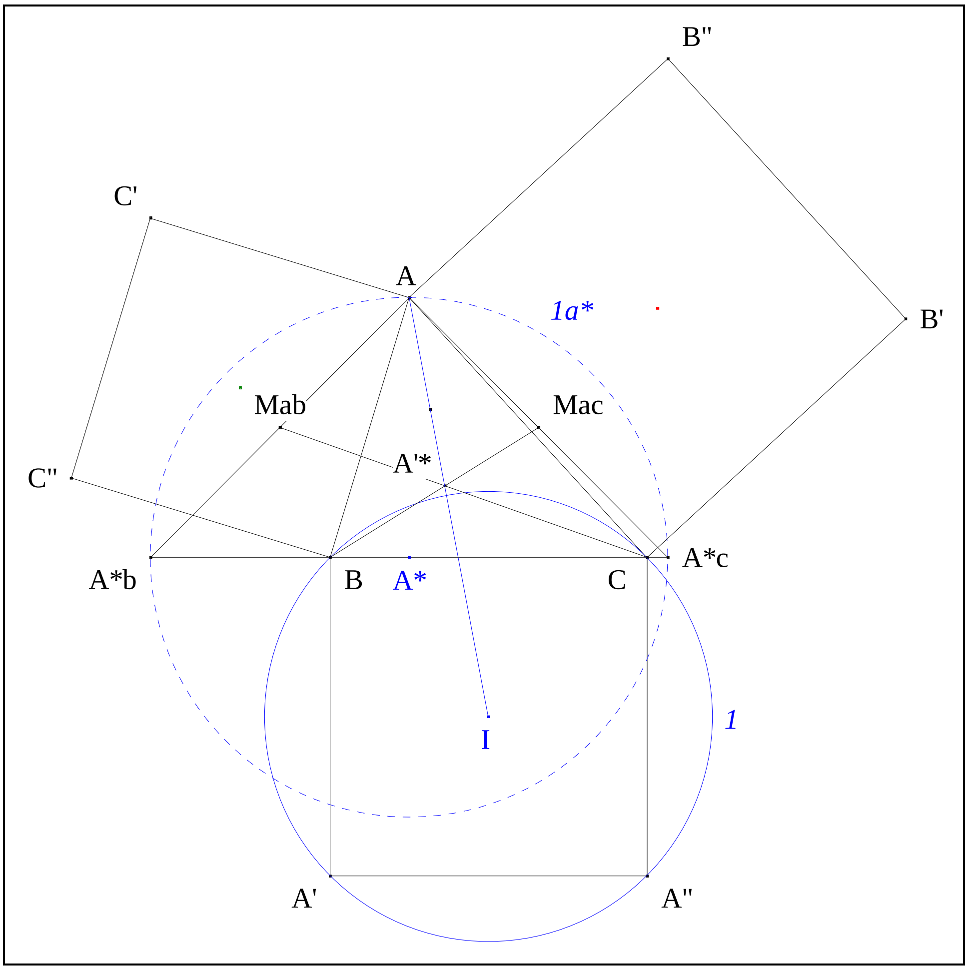


IV. UN TRIANGLE BORDÉ DE TROIS CARRÉS

1. Un résultat d'Antreas Hatzipolakis

VISION

Figure :

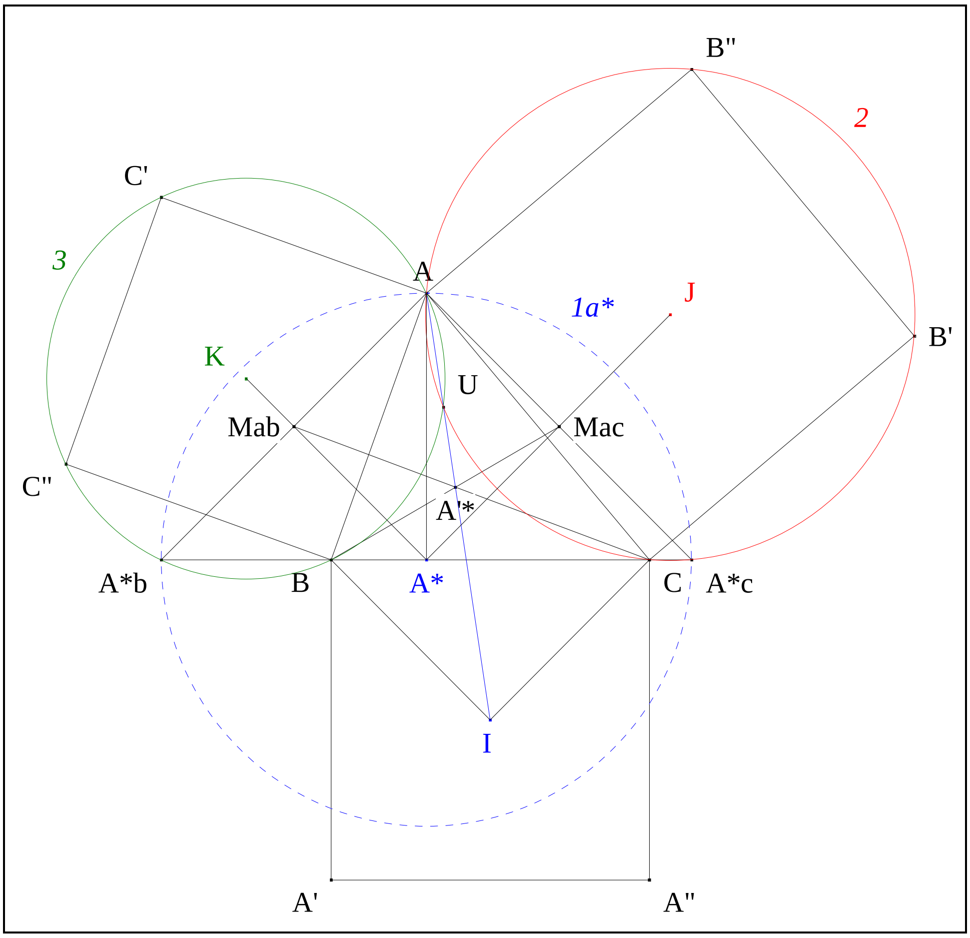


Traits :		les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
	*1a**	le cercle de centre A* passant par A,
	A*b, A*c	les points d'intersection de *1a** avec (BC) comme indiqués sur la figure,
	Mab, Mac	les milieux resp. de [AA*b], [AA*c]
et	A'*	le point d'intersection de (BMac) et (CMab).

Donné : A, A'* et I sont alignés [32].

VISUALISATION

[32] Hatzipolakis A., Perspector?, Message *Hyacinthos* # 7986 du 23/09/2003; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7986.



- D'après "Un point sur *1*" (Cf. Annexe 4) appliqué au triangle A*BA, A*b est sur *3*.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que A*c est sur *2*.
- Les triangles AA*bA*c et IBC étant rectangles-isocèles, (BI) // (AA*c).
- D'après Pappus "La proposition 137" (Cf. Annexe 5),
  le pinceau {B ; (BA), (BC), (BMac), (BI)} est harmonique.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que le pinceau {C ; (CA), (CB), (CMab), (CI)} est harmonique.
- Ces deux pinceaux ayant le rayon (BC) en commun,
  les points d'intersection des rayons homologues (BA) et (CA), (BMac) et (CMab), (BI) et (CI) sont alignés.
- **Conclusion :** A, A'* et I sont alignés

Scolies : **(1)** deux triades de points alignés

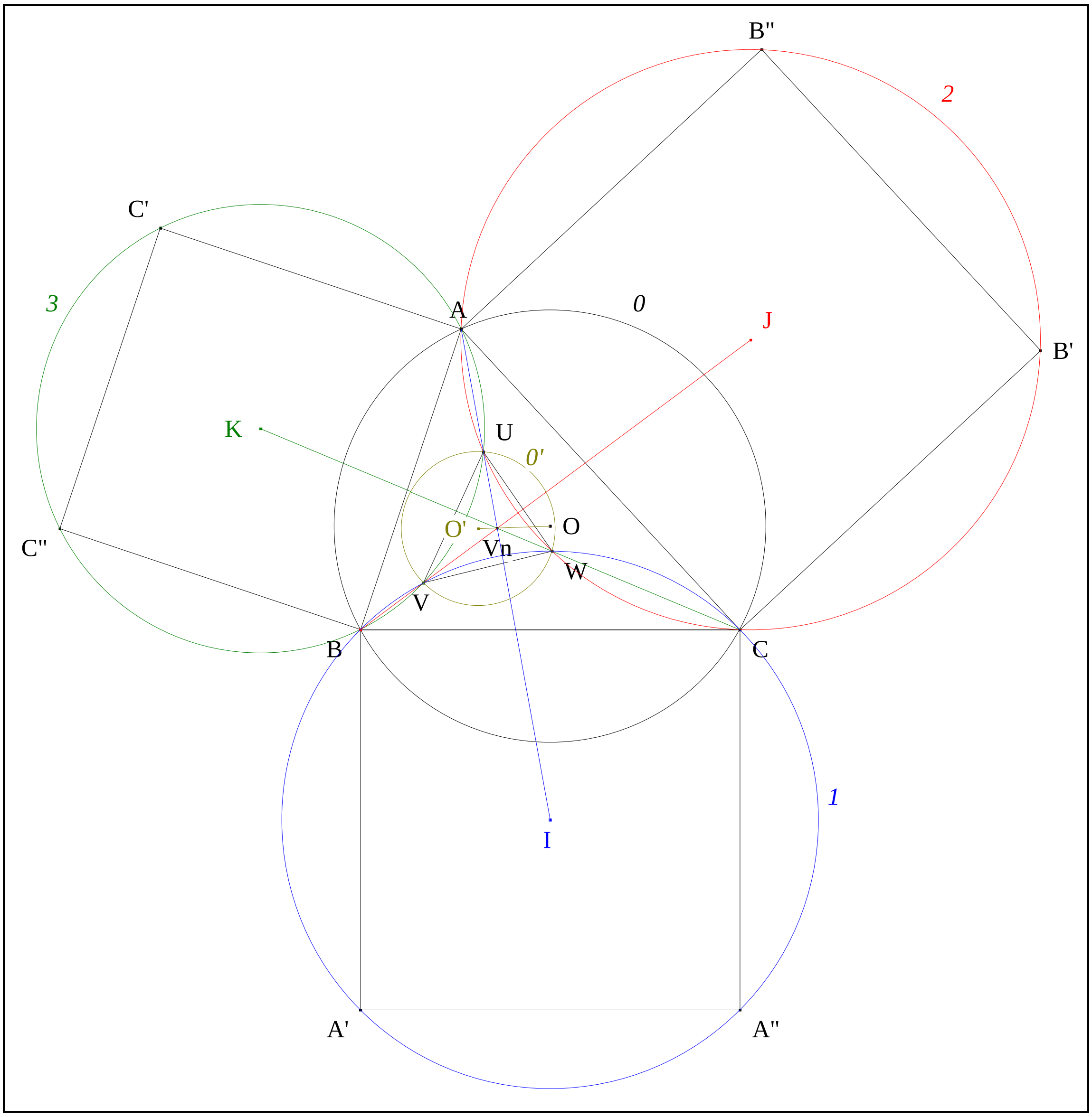
- D'après le théorème de la droite des milieux appliqué au triangle A*bAA*c, (A*Mab) // (AA*c) ;
  par hypothèse, (AA*c) ⊥ (AA*b) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A*Mab) ⊥ (AA*b) ;
  en conséquence, (AMab) passe par le centre K de *3*.
- **Conclusion :** A*, Mab et K sont alignés.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que A*, Mac et J sont alignés.

(2) le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

2. Un résultat de Darij Grinberg

VISION

Figure :



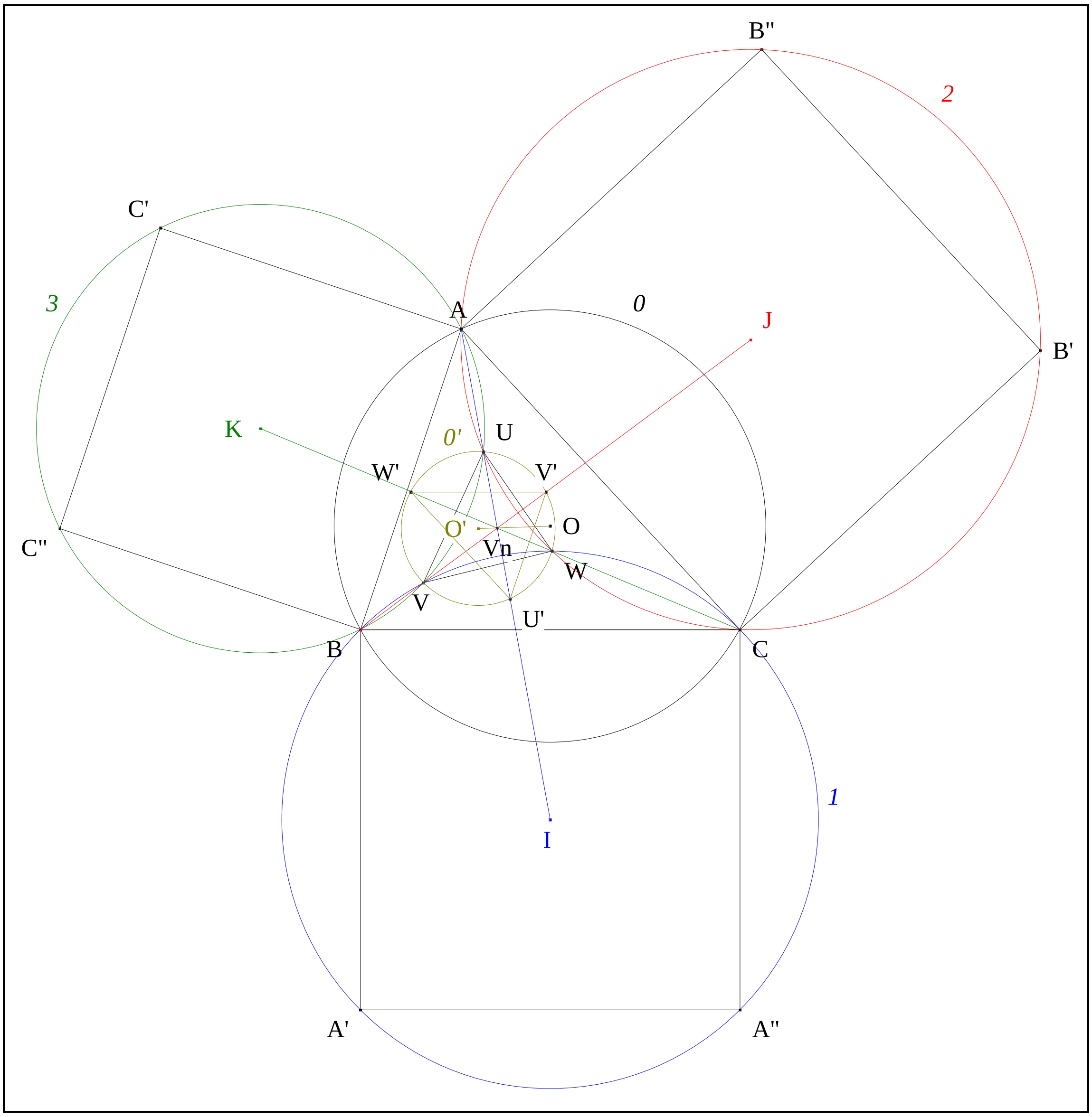
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
0' le cercle circonscrit à UVW
et O' le centre de *0'*.

Donné : Vn, O et O' sont alignés [33].

---

[33] Grinberg D., Fermat, Vecten and van Lamoen, Message *Hyacinthos* # 7053 du 26/04/2003; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7053.

VISUALISATION



- Notons U', V', W' les seconds points d'intersection resp. de (AU), (BV), (CW) avec *0'*.

- Les cercles *0'* et *1*, les points de base V et W, les moniennes (V'VB) et (W'WC), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (V'W') // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (W'U') // (CA)
  (U'V') // (AB).

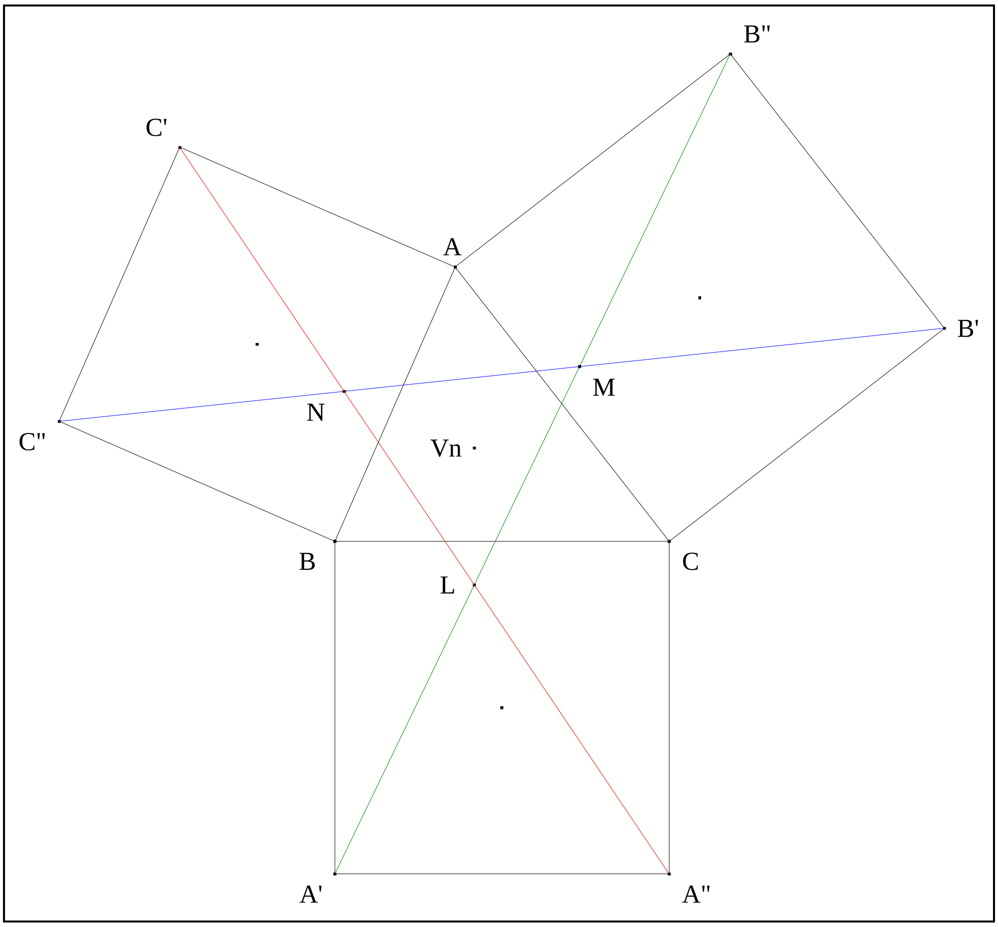
- **Conclusion :** les triangles U'V'W' et ABC sont homothétiques de centre Vn,
  Vn, O et O' sont alignés.

Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

3. Un résultat de l'auteur

VISION

Figure :

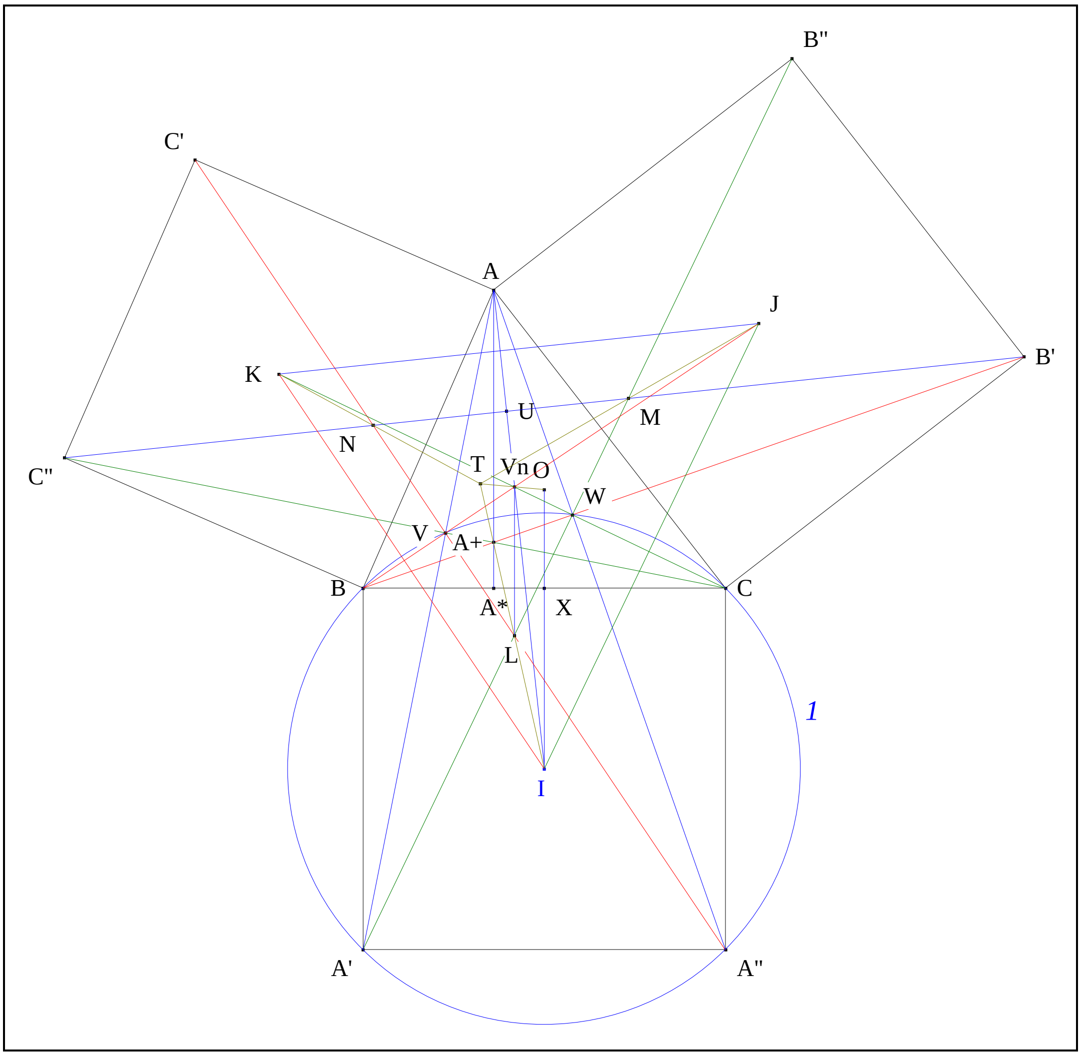


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : Vn est le second point de Vecten de LMN [34].

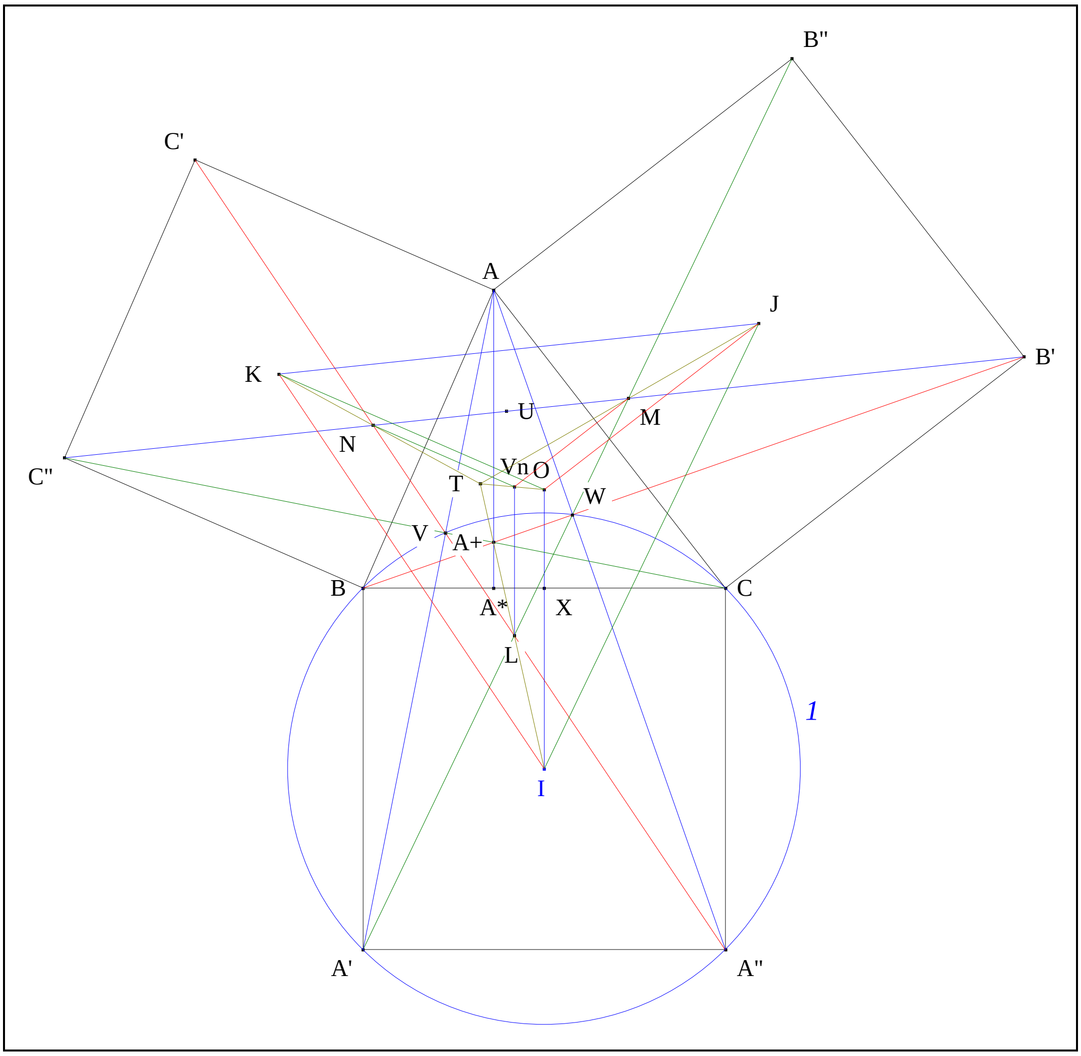
VISUALISATION

[34] Ayme J.-L., Vecten's points, Message *Hyacinthos* # 17406 du 26/03/2009 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/17406 ;
With the Vecten's points, *Mathlinks* du 26/03/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=266978.



- D'après "Un résultat d'Aubert" (Cf. Annexe 2), **(1)** (VnL) est la pascale de l'hexagone A'BVA"CWA'
  (2) (VnL) // (OI).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (VnM) // (OJ)
  (VnN) // (OK).



- D'après III. 5. Un triangle rectangle-isocèle, scolie 10, O est le second point de Vecten de IJK.

- **Conclusion :** LMN étant homothétique à IJK, Vn est le second point de Vecten de LMN.

Note historique : ce résultat de l'auteur a été relaté et confirmé le 27 mars 2009 par Angel Montesdeoca Delgado [35] de l'université de La Laguna (Îles Canaries, Espagne) dans l'un de ses articles électroniques.

Scolies : **(1)** T, O et Vn sont alignés.

(2) Un autre alignement [36]

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 6), (IA+L) est la pascale de l'hexagone A'CVA"BWA'.

- **Conclusion :** I, A+, L et T sont alignés.

(3) Deux triangles en perpsective

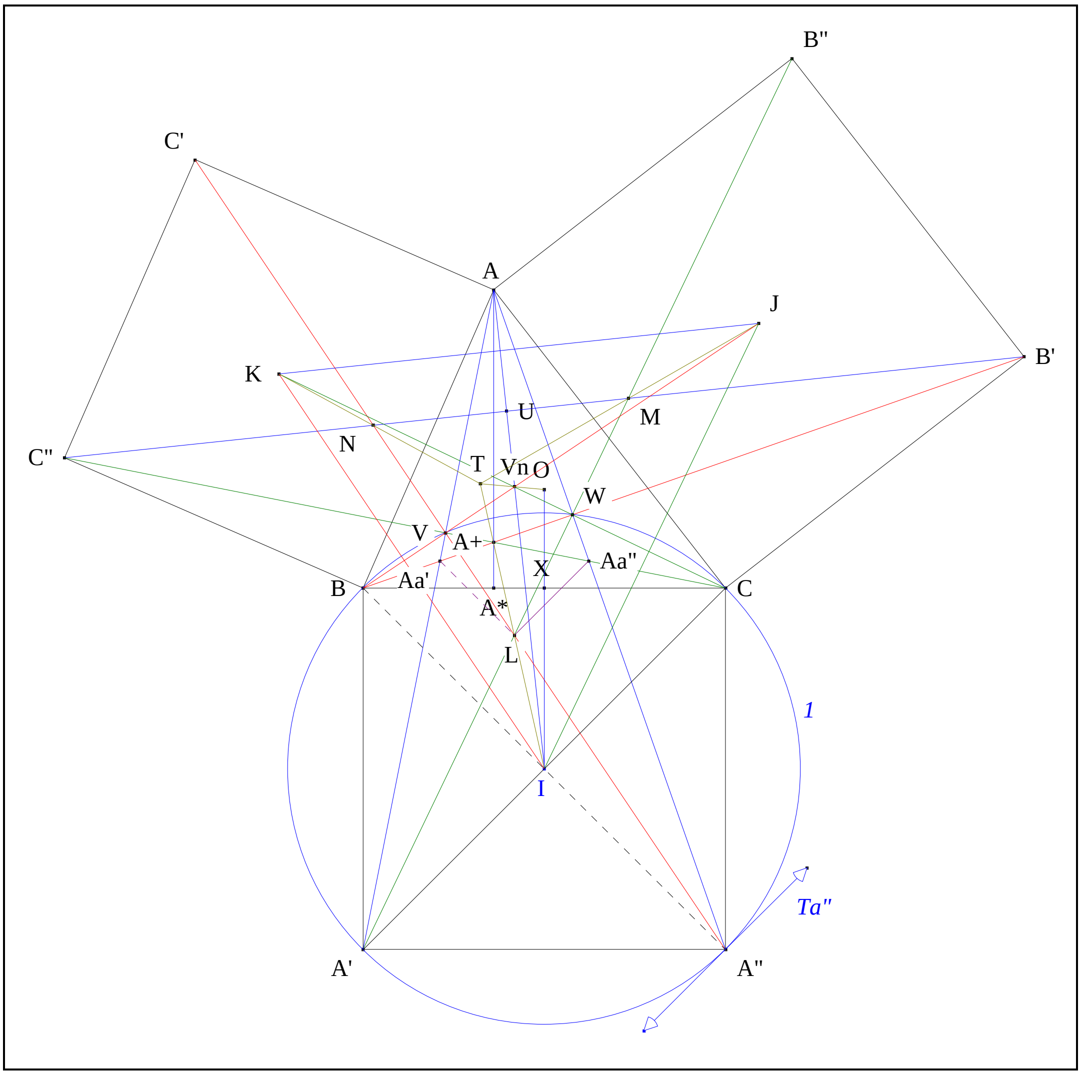
---

[35] Montesdeoca Delgado A., Geometria metrica y proyectiva en el plano cons coordenadas baricentricas. Algunos topicos. Version 2.0903271351 ; http://webpages.ull.es/users/amontes/.

[36] Lamoen (van) F., Squares erected externally on the sides of a triangle, Message *Hyacinthos* #506 du 14/03/2000 http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/506.

- **Conclusion :** ABC et LMN étant bilogiques, sont en perspective [37].

(4) Deux parallèles



- Notons Ta" la tangente à *1* en A".

- **Conclusion :** d'après Carnot "Pentagramma mysticum" (Cf. Annexe 7) appliqué à l'hexagone dégénéré CVA" Ta" WA'C, (Aa"L) // (CIA').

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (Aa'L) // (BIA").

(5) Le triangle LAa'A" étant homothétique au triangle I-isocèle IBC, est L-isocèle ; en conséquence, (LVn) est la médiatrice de [Aa'Aa"].

(6) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur" et second par premier.

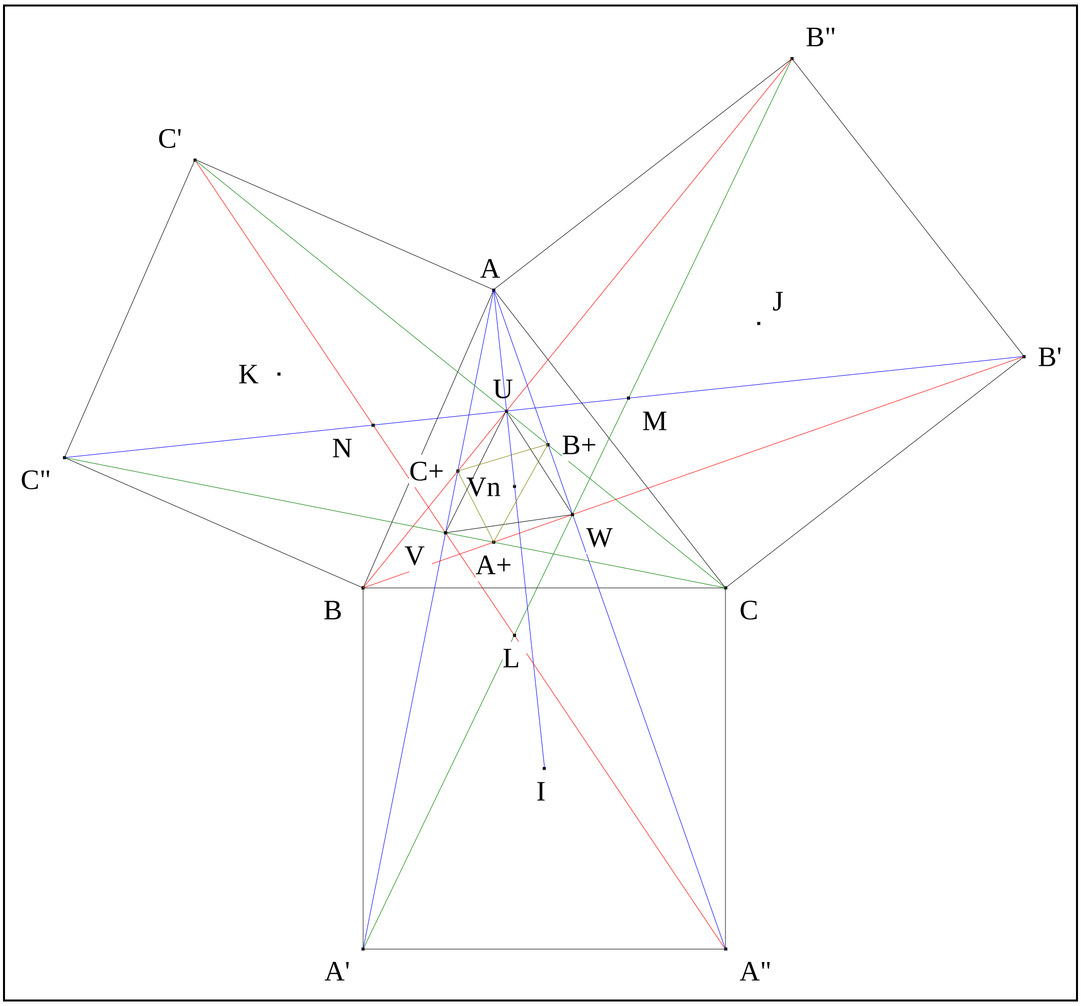
(7) Vs est le premier point de Vecten de LMN.

4. Un résultat de Paul Yiu

37 Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.

VISION

Figure :



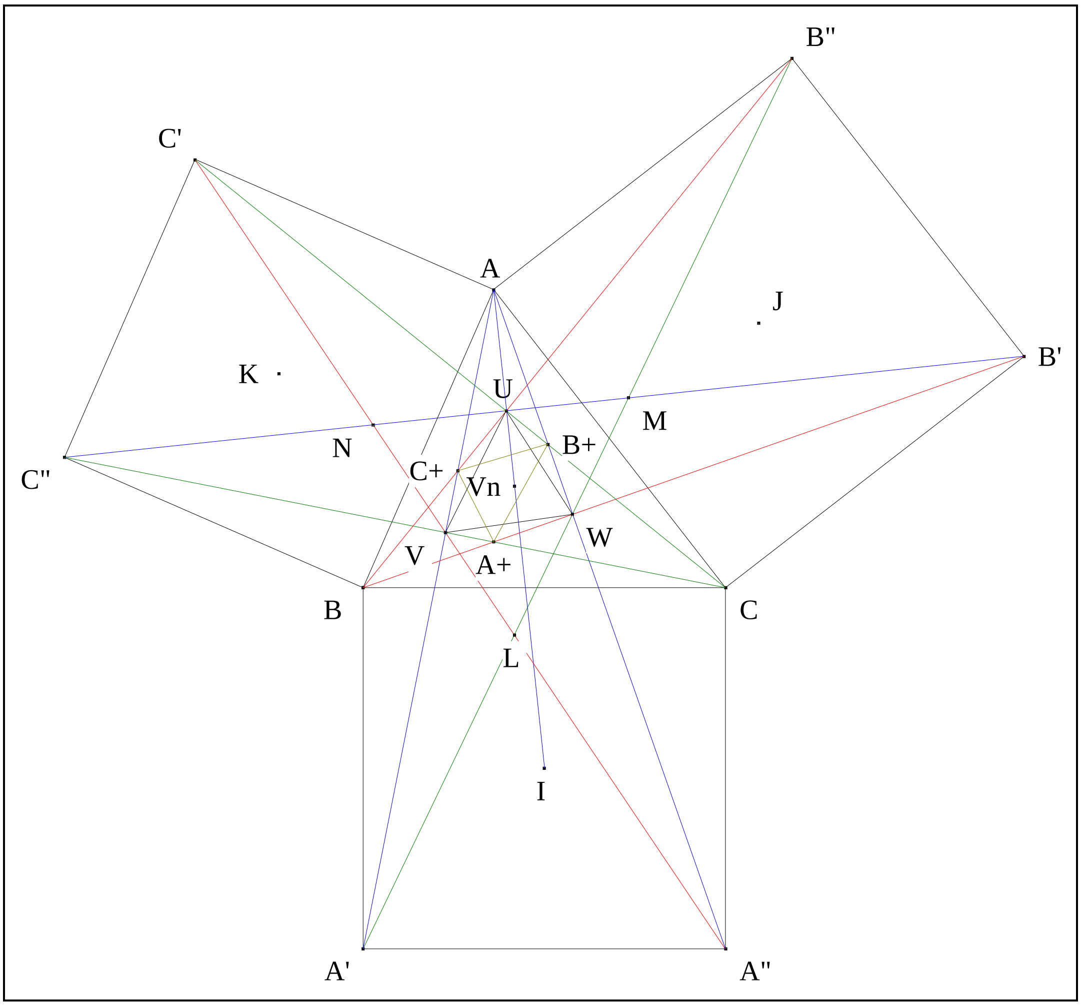
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donnés : A+B+C+ et UVW sont en perspective [38].

VISUALISATION

---

[38] Lamoen (van) F., Squares erected externally on the sides of a triangle, Message *Hyacinthos* #506 du 14/03/2000 http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/506.



- Nous savons que **(1)** ABC et UVW sont en perspective de centre Vn
  (2) A+B+C+ est le produit desmique de ABC et UVW.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème desmique" (Cf. Annexe 8),
  A+B+C+ et UVW sont en perspective.

Scolies : **(1)** Vn est le centre de perspective de ABC et UVW

(2) H est le centre de perspective de ABC et A+B+C+

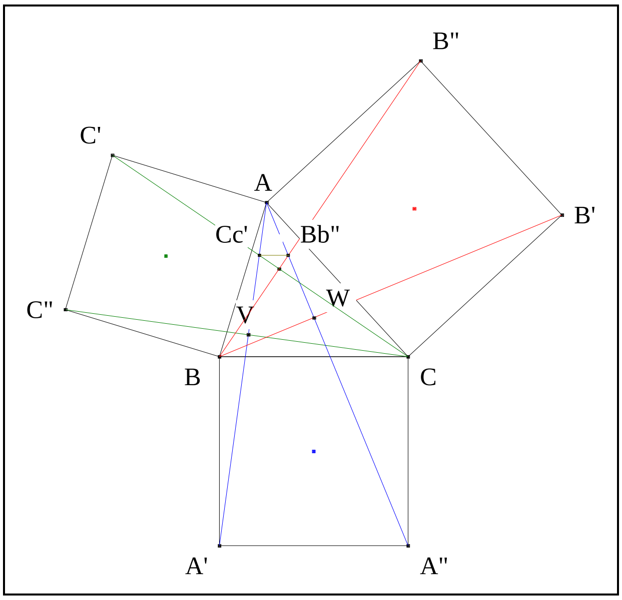
(3) ABC, A+B+C+ et UVW admettant le même axe de perspective,
le centre de perspective de A+B+C+ et UVW est aligné avec H et Vn.

(4) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

5. Deux parallèles

VISION

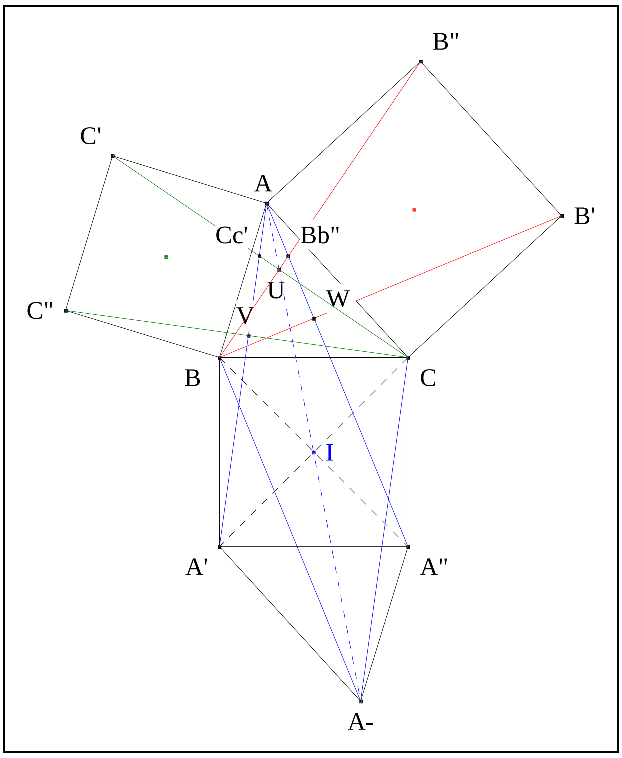
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment
et Bb", Cc' les points d'intersection resp. de (BB") et (AA"), de (CC') et (AA').

Donné : (Bb"Cc') est parallèles à (BC).

VISUALISATION



- Notons A- le symétrique de A par rapport à I.

- D'après III. 6. Un résultat de Neuberg, scolie 1, A, U et I sont alignés ;
  en conséquence, A, U et A- sont alignés.

- Les triangles ACc'Bb" et A-CB sont en perspective de centre U.

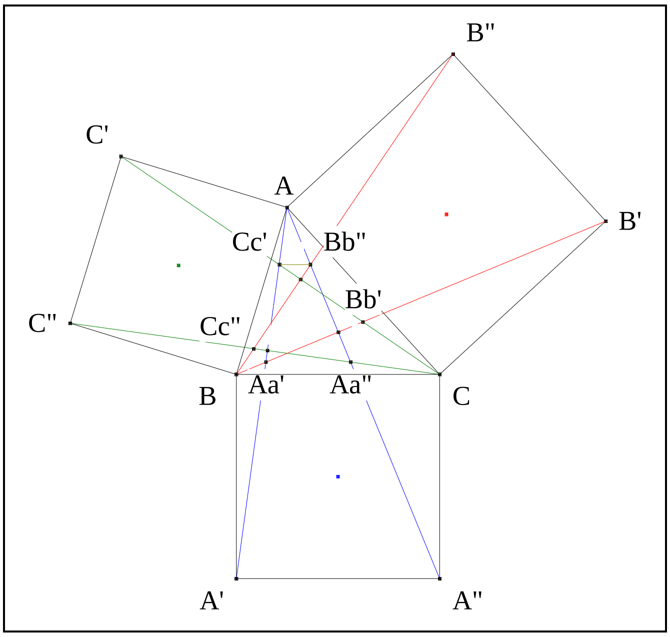
- **Conclusion :** d'après "Le petit théorème de Desargues" (Cf. Annexe 9) appliqué à ACc'Bb" et A-CB, (Bb"Cc') est parallèles à (BC).

Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

6. Deux triangles égaux

VISION

Figure :

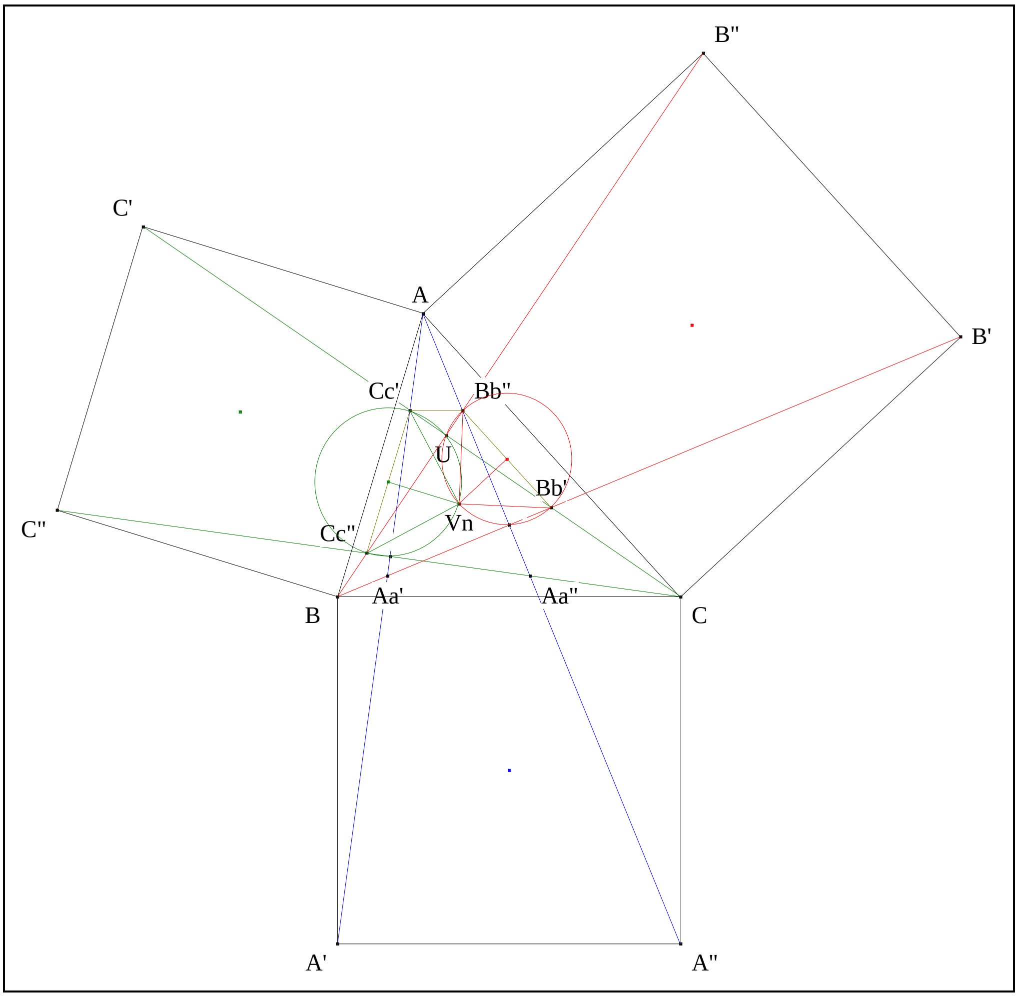


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
Cc", Aa' les points d'intersection resp. de (CC") et (BB"), de (AA') et (BB')
et Aa", Bb' les points d'intersection resp. de (AA") et (CC"), de (BB') et (CC").

Donné : Bb"Cc"Aa" et Cc'Aa'Bb' sont isométriques[39].

VISUALISATION

[39] P_1 Q_1 R_1 is congruent to triangle P_2 Q_2 R_2, *Mathlinks* du 27/06/2005 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1850249780&t=42536 ;
China TST 1989, problem 4 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1138386980&t=42573.



- D'après III. 2. La proposition 2, scolie,
  Bb"Cc"Aa" et Cc'Aa'Bb' étant à côtés perpendiculaires, sont semblables.

- D'après IV. 3. Un résultat de l'auteur, scolie 5, les médiatrices de [Cc'Cc"], [Bb"Bb'] passent par Vn.

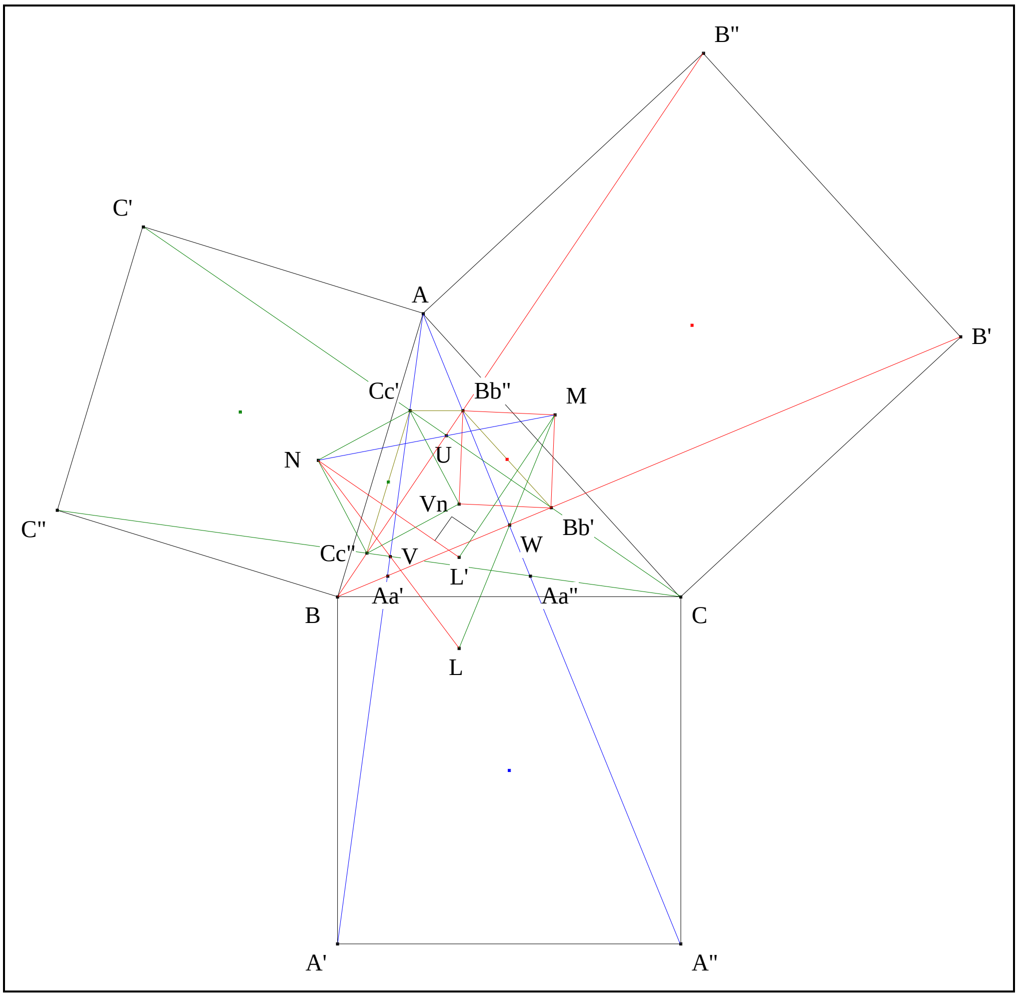
- D'après III. 2. La proposition 2, appliqué au triangle VnBb"Cc', Bb"Cc" = Cc'Bb'.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que Cc"Aa" = Aa'Cc'
  Aa"Bb" = Bb'Aa'.

- **Conclusion :** Bb"Cc"Aa" et Cc'Aa'Bb' sont isométriques.

Scolies : **(1)** le triangle LMN [40]

[40] Very interesting Problem [squares on sides of a triangle], *Mathlinks* du 06/05/2004 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1978435267&t=5549.



- Nous retrouvons "la figure de Vecten" en considérant le triangle VnBb"Cc'.

- D'après III. 2. La proposition 2, Cc'Bb' = Bb"Cc".

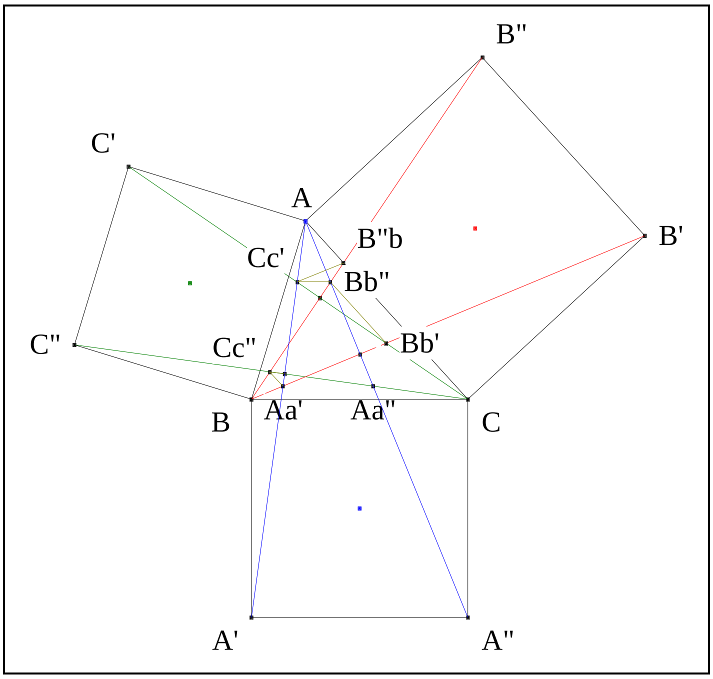
- Notons L' le point d'intersection de la parallèle à (Cc'Bb') passant par N avec la parallèle à (Bb"Cc") passant par M

- D'après VI. 2. Un triangle rectangle-isocèle, scolie 1,
  (1) le triangle L'MN est rectangle-isocèle en L'
  (2) L'M = Cc'Bb'.

- **Conclusion :** d'après le théorème de Pythagore, MN = $\sqrt{2}$ .Cc'Bb'.

  (2) Deux parallèles [41]

[41] Vecten's figure, *Mathlinks* du 29/03/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=267579.

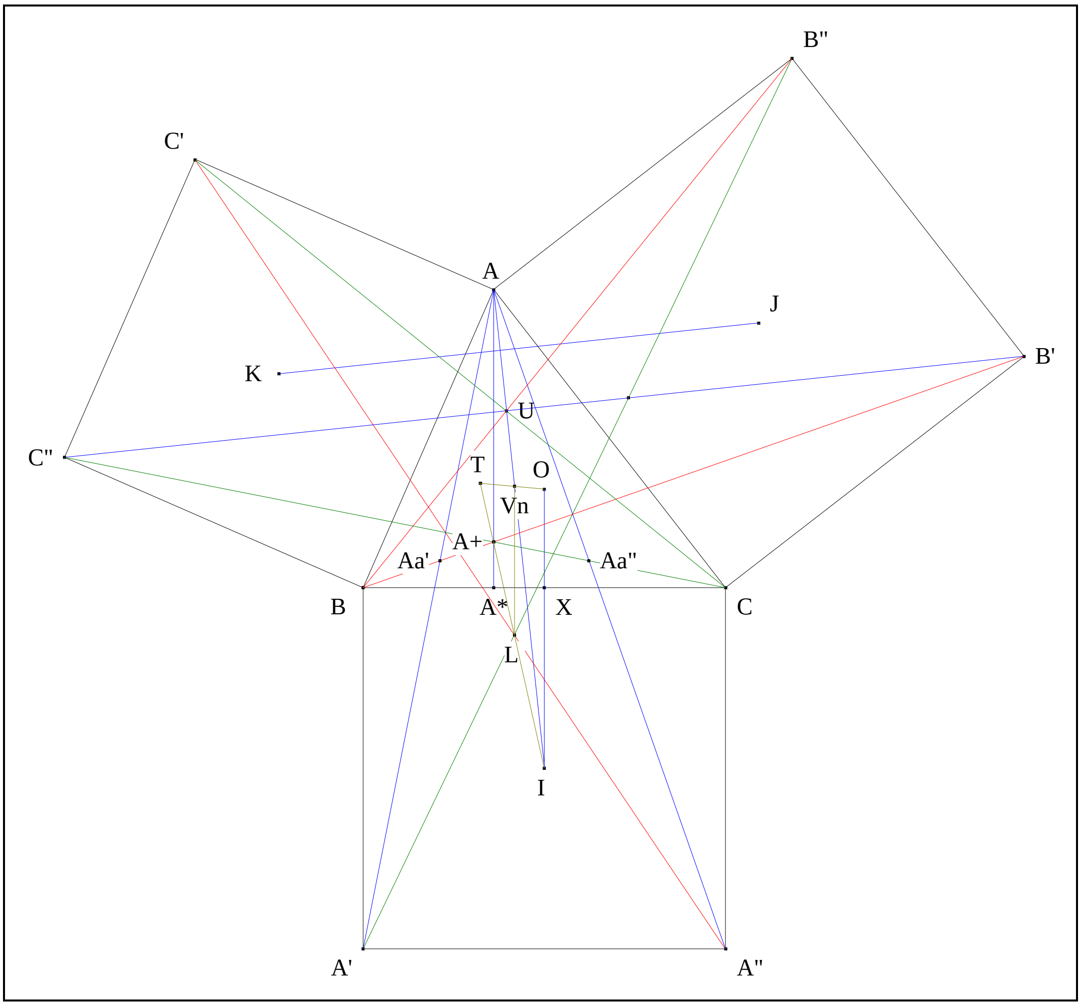


- Notons B"b le point d'intersection de (BB") et (CA).

- **Conclusion :** d'après "Le petit théorème de Pappus" (Cf. Annexe 10) appliqué à l'hexagone Cc' B"b C B Bb' Bb" Cc' construit sur (BB") et (CC'), (Cc'B"b) // (BB').

  (3) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

7. Figure récapitulant les notations par rapport à A



V. LE MOULIN À VENT BORDÉ DE FLANCS

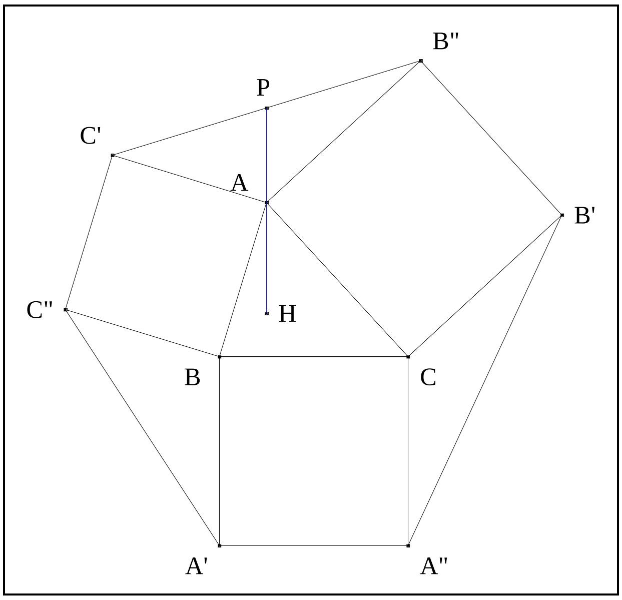
OU

LA FIGURE DE VECTEN

1. D'une hauteur à une médiane

VISION

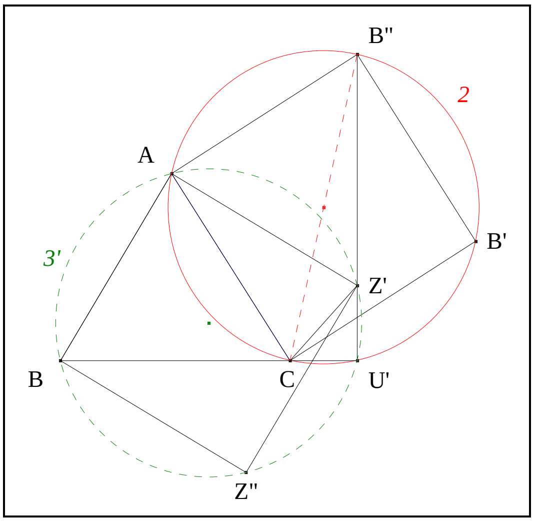
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
H l'orthocentre de ABC
et P le point d'intersection de (AH) et (B"C').

Donné : P est le milieu de [C'B"] [42].

VISUALISATION

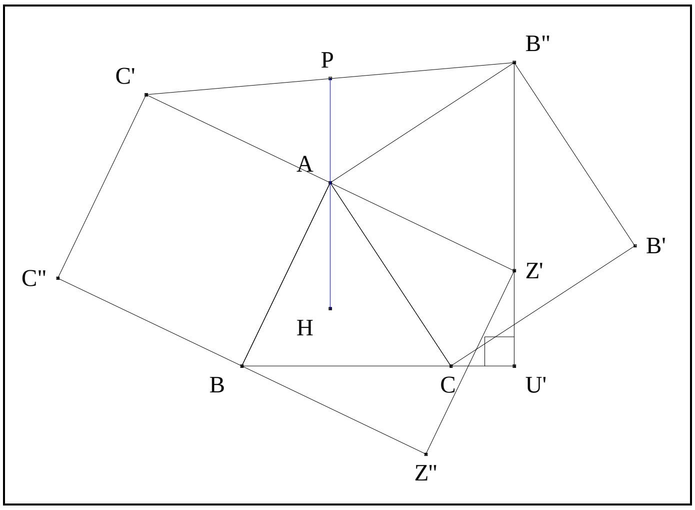


- Notons AZ'Z"B le carré intérieur à ABC,
  3' le cercle circonscrit à AZ'Z"B
  et U' le second point d'intersection de *2* et *3'*.

- D'après III. 1. Un lemme, scolie 5, appliqué au triangle ACZ',
  (1) C**,** U' et B sont alignés
  (2) Z', U' et B" sont alignés
  (3) (Z'U'B") ⊥ (CU'B).

---

42 Mosnat E., *Problèmes de géométrie analytique*, Vuibert et Nony (1892).



- Par hypothèse, (CU'B) ⊥ (HAP) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (Z'UB") // (HAP).

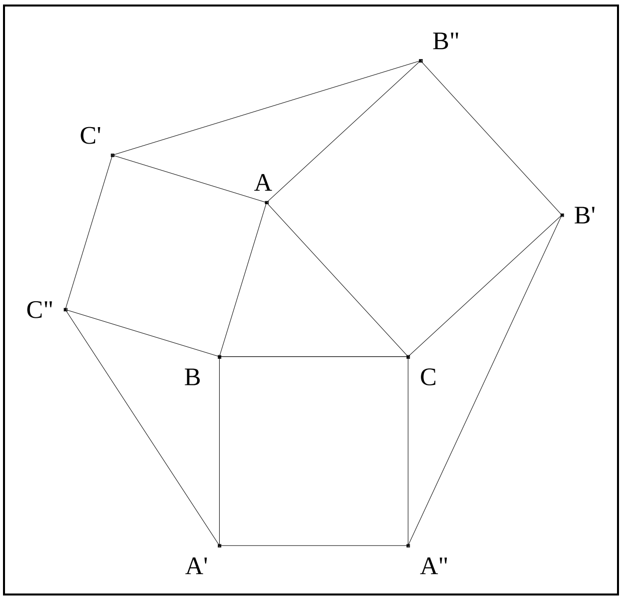
- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux", appliqué au triangle C'Z'B",
  A étant le milieu de [C'Z'], P est le milieu de [C'B"].

Énoncé traditionnel : la hauteur du triangle en bas est la médiane du triangle en haut.

Note historique : Étienne Mosnat a été agrégé de mathématiques en 1888, puis professeur au lycée de Toulon (Var, France).

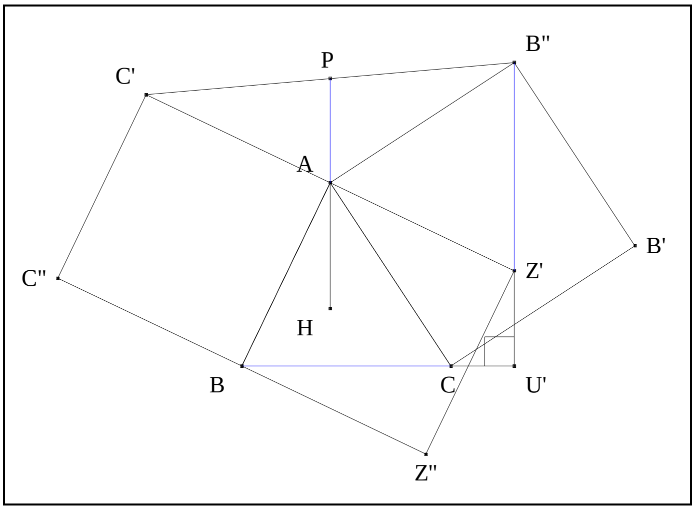
Scolies : **(1)** Pour Floor van Lamoen, le triangle AB"C' est le "A-flanc de ABC" [43].

(2) Le moulin à vent bordé de flancs ou la figure de Vecten



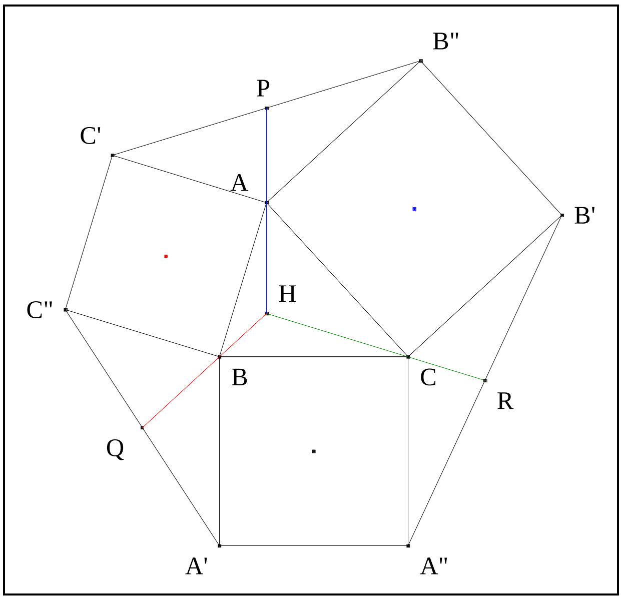
(3) Une égalité

[43] Lamoen (van) F., Friendship among triangle centers, *Forum Geometricum* vol. 1 (2000) 1-6.



- D'après III. 2. La proposition 2, BC = Z'B" .
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à C'Z'B", Z'B"= 2.AP.
- **Conclusion :** par transitivité de la relation //, BC = 2.AP.

(4) Vision triangulaire



- Notons Q, R les points d'intersection resp. de (BH) et (C"A'), de (CH) et (A"B').
- **Conclusion :** Q, R sont les milieux resp. de [C"A'], [A"B'].

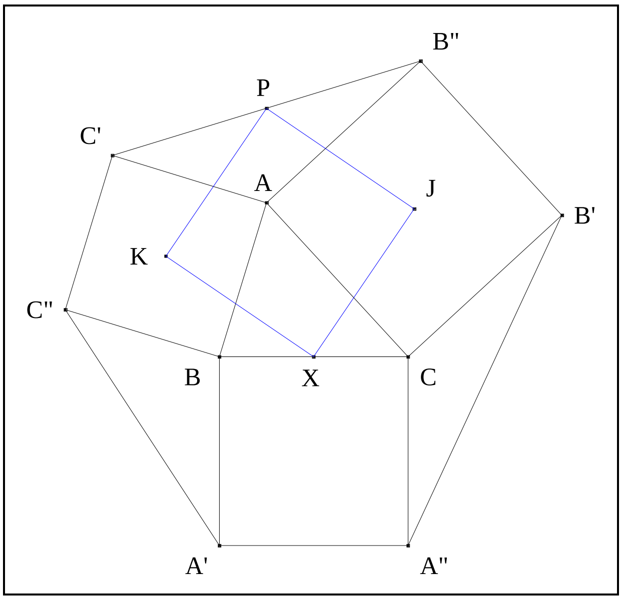
(5) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

2. Un carré et un cercle de Finsler-Hadwiger [44]

VISION

[44] Finsler P. and Hadwiger H., Einige Relationen im Dreieck, *Comment. Helv*. 10 (1937) 316-326 ; Hadwiger H. (1908-1981).

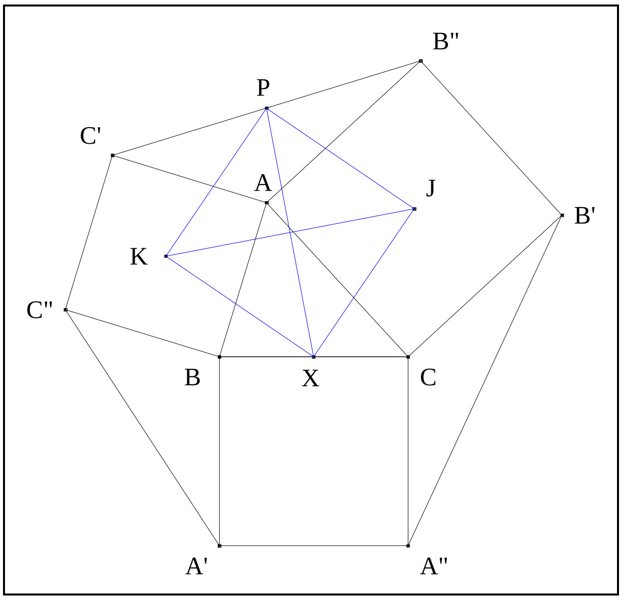
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : le quadrilatère XJPK est un carré [45].

VISUALISATION

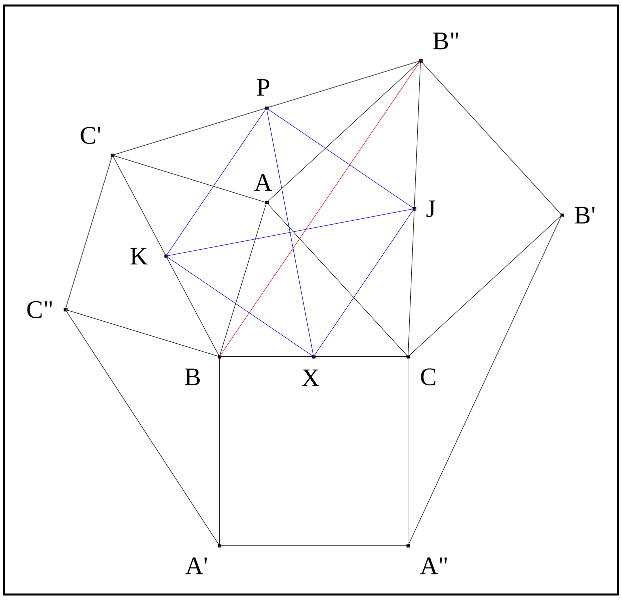


- D'après III. 5. Un triangle rectangle isocèle, **(1)** le triangle XJK est rectangle-isocèle en X
  (2) le triangle PKJ est rectangle-isocèle en P.

- D'après le théorème de la médiatrice, (PX) est la médiatrice de [JK].

---

[45] Squares, *Mathlinks* du 27/10/2007 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=164826481&t=116421.



- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué **(1)** au triangle C'BB", 2.KP = BB"
  (2) au triangle CBB", BB" = 2.XJ ;

  par transitivité de la relation = et par simplification, KP = XJ.

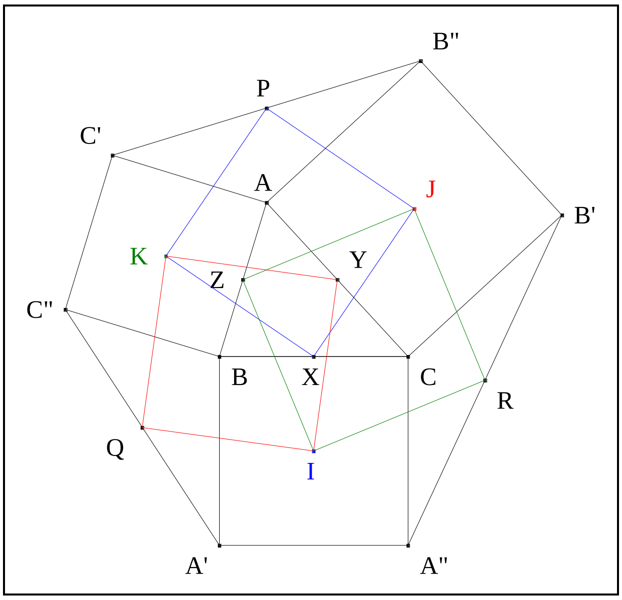
- Le quadrilatère XJPK ayant quatre côtés égaux est un losange ;
  XJPK ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un carré.

- **Conclusion :** le quadrilatère XJPK est un carré.

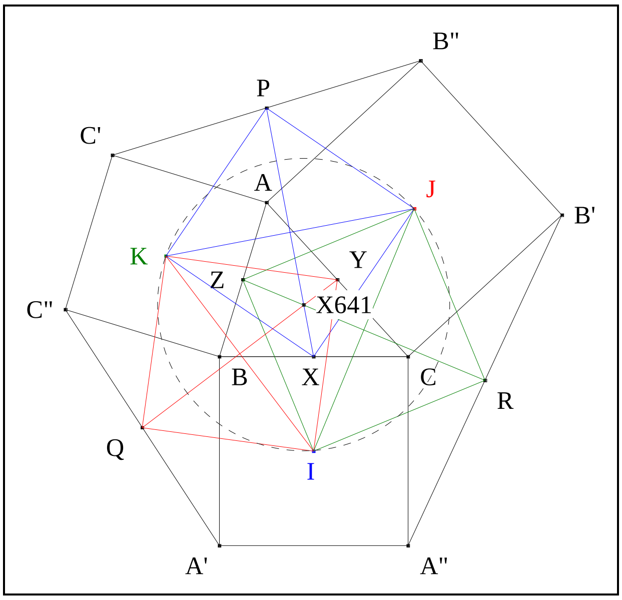
Scolies : **(1)** XJPK est 'le A-carré de Finsler-Haswiger de ABC".

(2) (PX) est la I-médiatrices de IJK.

(3) Vision triangulaire

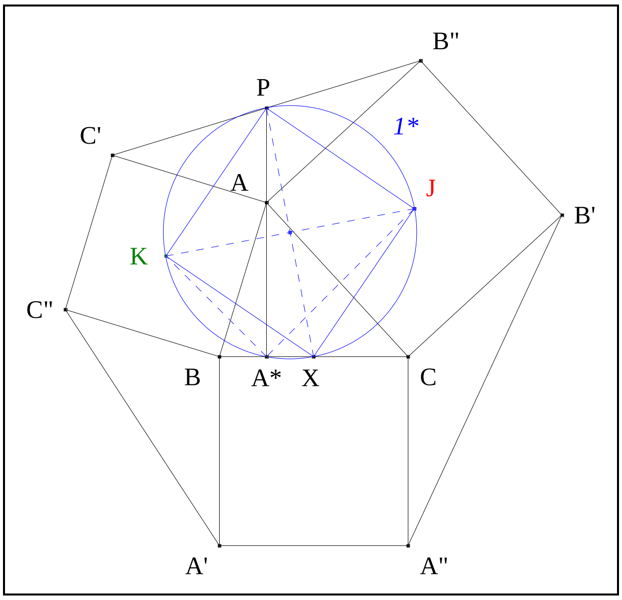


(4) Centre du cercle circonscrit à IJK ou le point X_{641}



- **Conclusion :** (PX), (QY) et (RZ) étant les I, J, K-médiatrices de IJK sont concourantes.

(5) Le cercle circonscrit à XJPK
ou "le A-cercle de Finsler-Hadwiger relativement à ABC"



- Notons *1** le cercle circonscrit à XJPK.

- Nous savons que [PX] est un diamètre de ce cercle
(PAA*) est la a-hauteur de ABC.

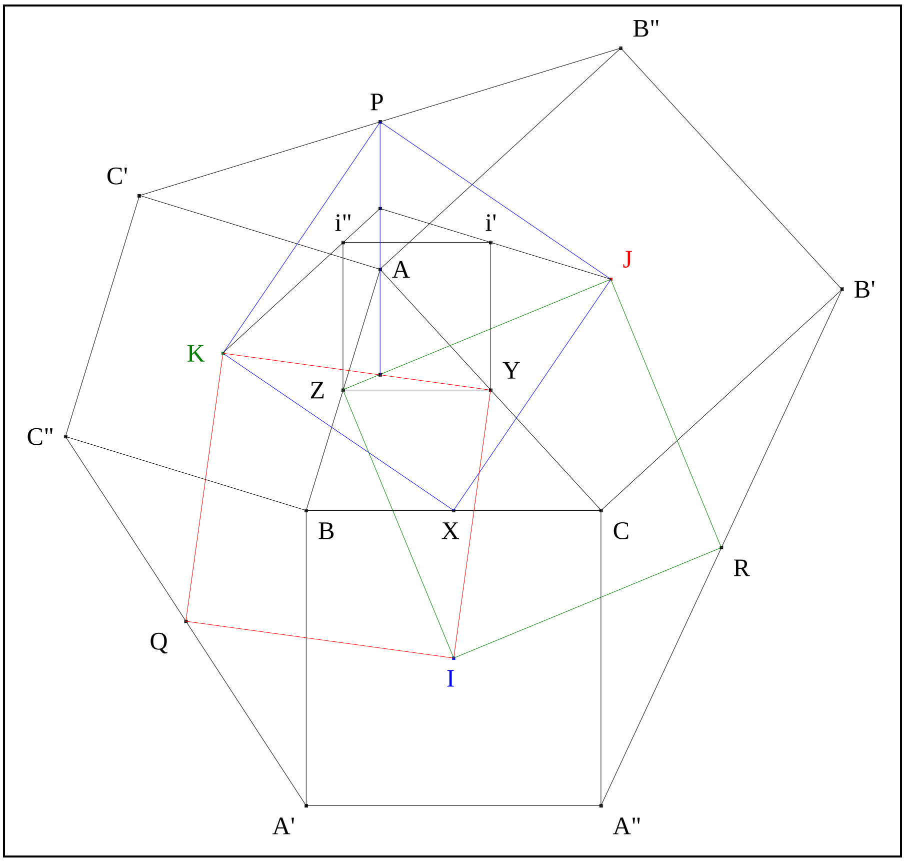
- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", A* est sur ce cercle.[46]

(6) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

Exercices : **(1)** deux triplets de droites concourantes

---

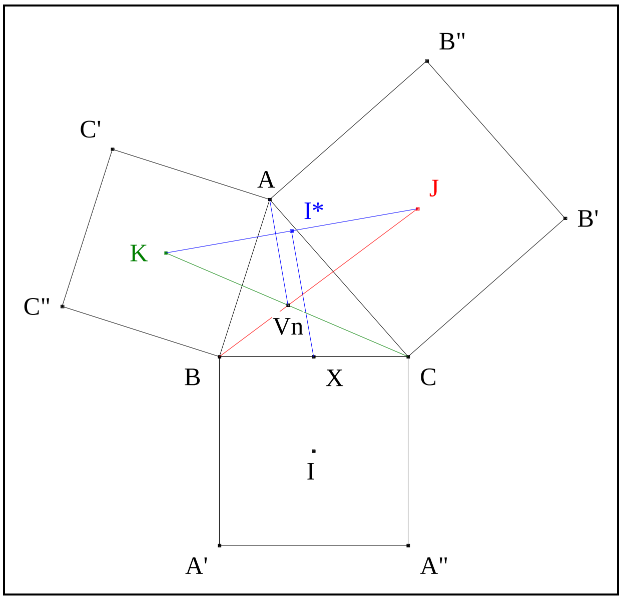
[46] Grinberg D., Squares on the sides, Message *Hyacinthos* # 7993 du 24/09/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7993.



- Notons Yi'i"Z le carré construit à l'extérieur du triangle IYZ.

- Montrer que
  * (Ji') et (Ki") concourent sur (AP)
  * (KY) et (JZ) concourent sur (AP).[47]

(2) Un problème de Dan Branzei [48]



[47] Ayme J.-L., Vecten again, *Mathlinks* du 14/04/2004 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=626056997&t=271163.

[48] Communication privée du professeur Francisco Bellot Rosado.

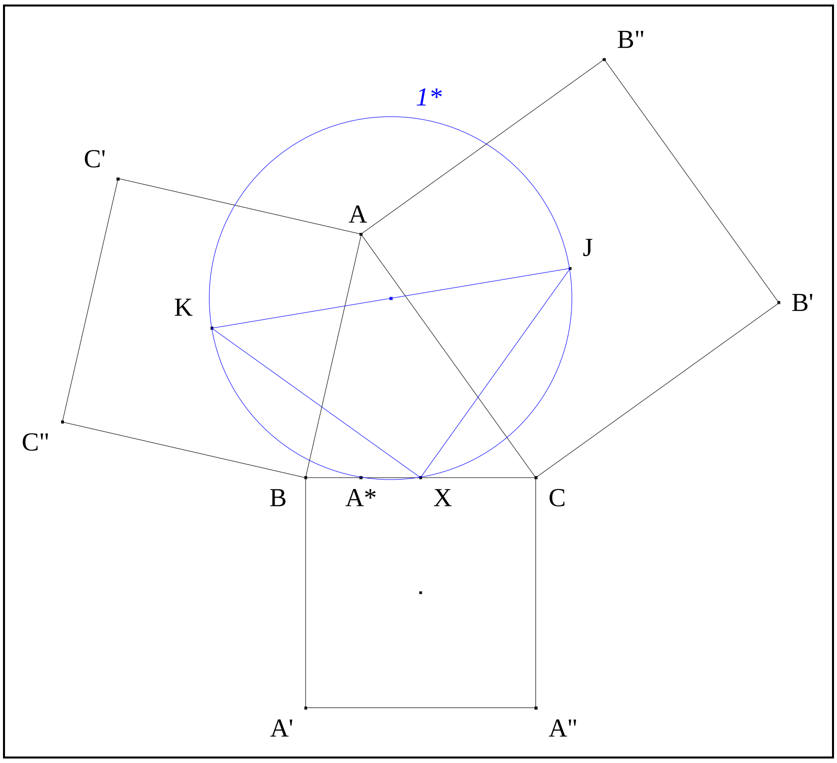
- Notons I* le milieu de [JK].

- Montrer que *si*, trois des points A, Vn, X, I* sont alignés
  alors, le quatrième l'est aussi.

3. Un premier résultat de Thébault

VISION

Figure :

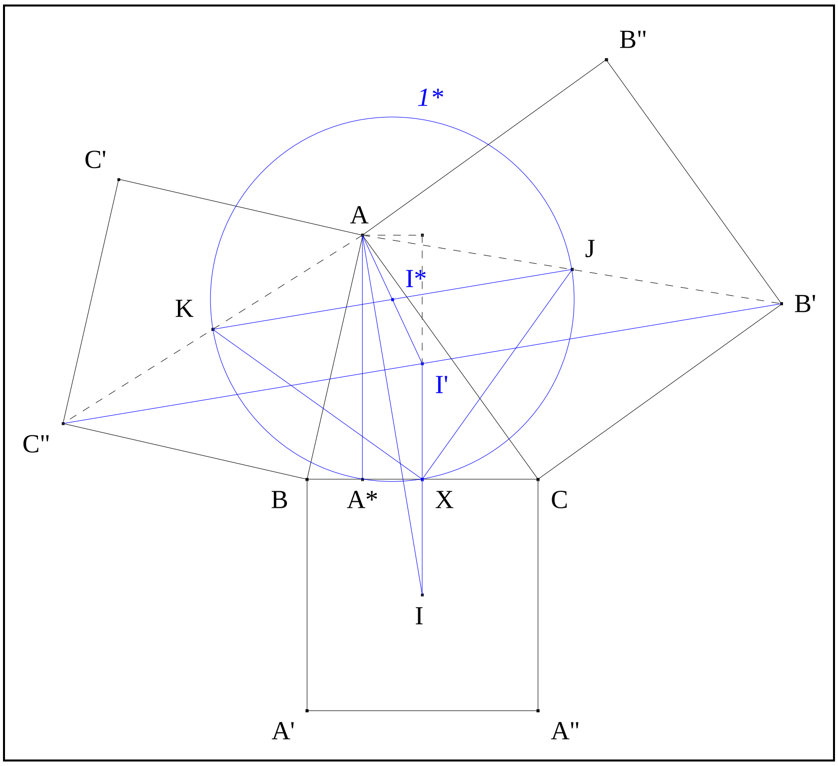


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
P_{1*}(A) la puissance de A par rapport à *1**
et T l'aire de ABC.

Donné : $|P_{1*}(A)| = T$. [49]

VISUALISATION

[49] Thébault V., Triangle bordé de carrés, *Mathesis*, 65 (1956) 423-426 ;
Grinberg D., Thebault on the Vecten squares, Message *Hyacinthos* # 8888 du 30/12/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/8888.



- Notons I* le centre de *1**
  et I' le milieu de [B'C"] (voir p. 72).

- Nous avons : |P_{1*}(A)| = |AI*² - I*K²| ;
  en multipliant par 4 les deux membres, 4. |P_{1*}(A)| = |AI'² - JK²| ;
  d'après III. 6. Le résultat de Neuberg, |AI'² - JK²| = |AI'² - AI²| ;
  en considérant le triangle AII', |AI'² - AI²| = 2.II'.AA* ;
  par définition de l'aire d'un triangle, 2.II'.AA* = 4.T ;
  par transitivité de la relation =, 4. |P_{1*}(A)| = 4.T.

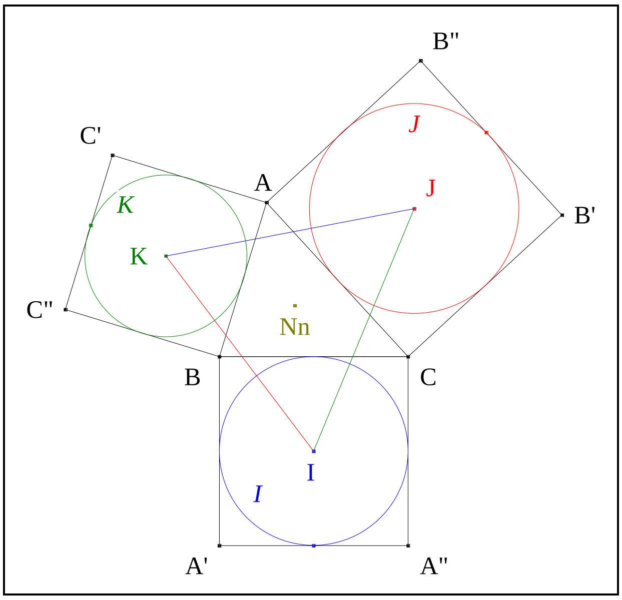
- **Conclusion :** par simplification, |P_{1*}(A)| = T.

Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

4. Un deuxième résultat de Victor Thébault

VISION

Figure :

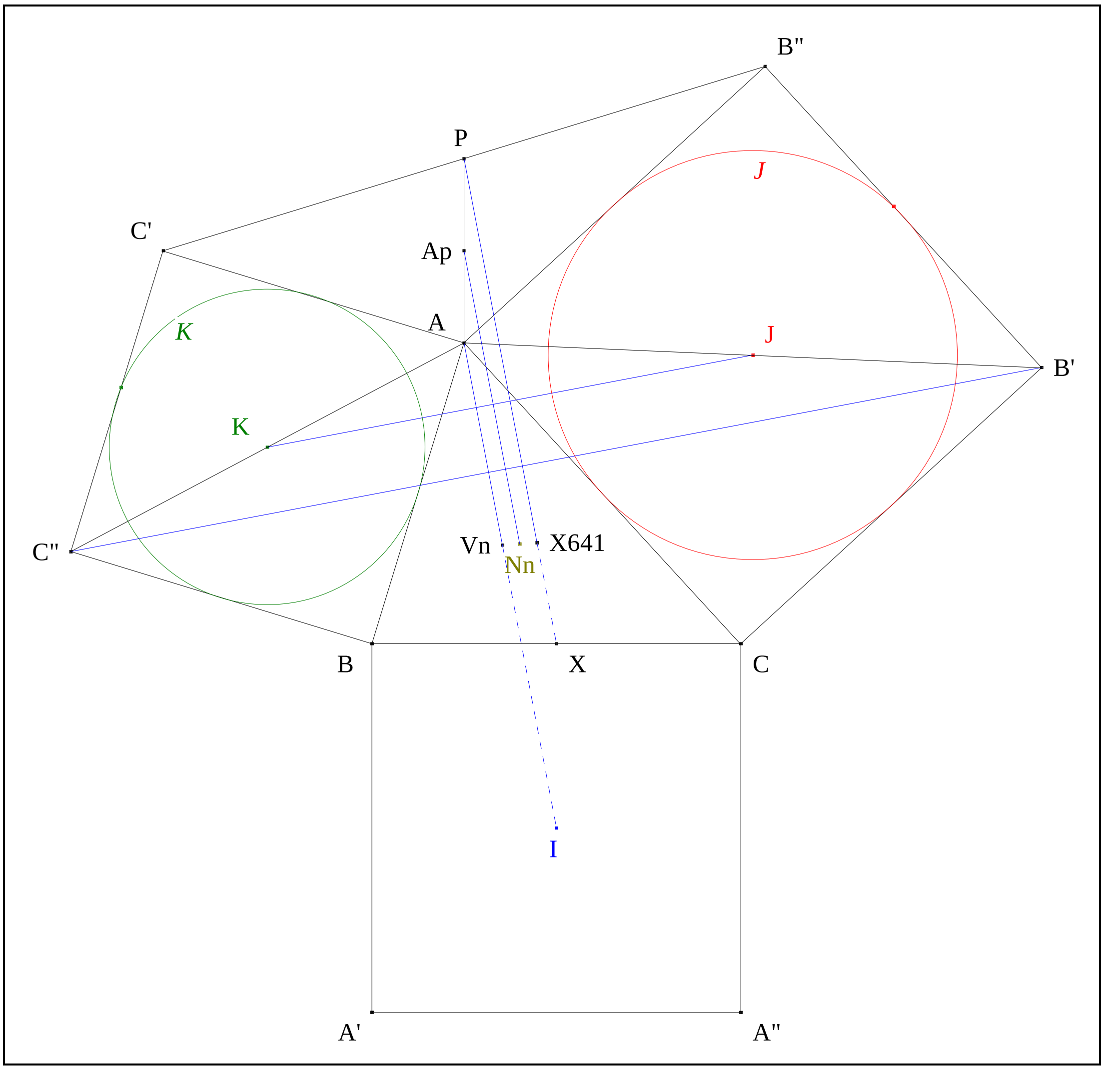


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
I, *J*, *K* les cercles inscrits resp. dans BA'A"C, CB'B"A , AC'C"B
et Nn le centre du cercle d'Euler de IJK.

Donné : Nn est le centre radical de *I*, *J* et *K*. [50]

VISUALISATION

[50] Thébault, V., Triangle bordé de carrés, *Mathesis* 65 (1956) 423-426 (1956).



- D'après III. 7. Le premier point de Vecten, **(1)** (AI) passe par l'orthocentre Vn de IJK
  (2) (AI) ⊥ (JK)

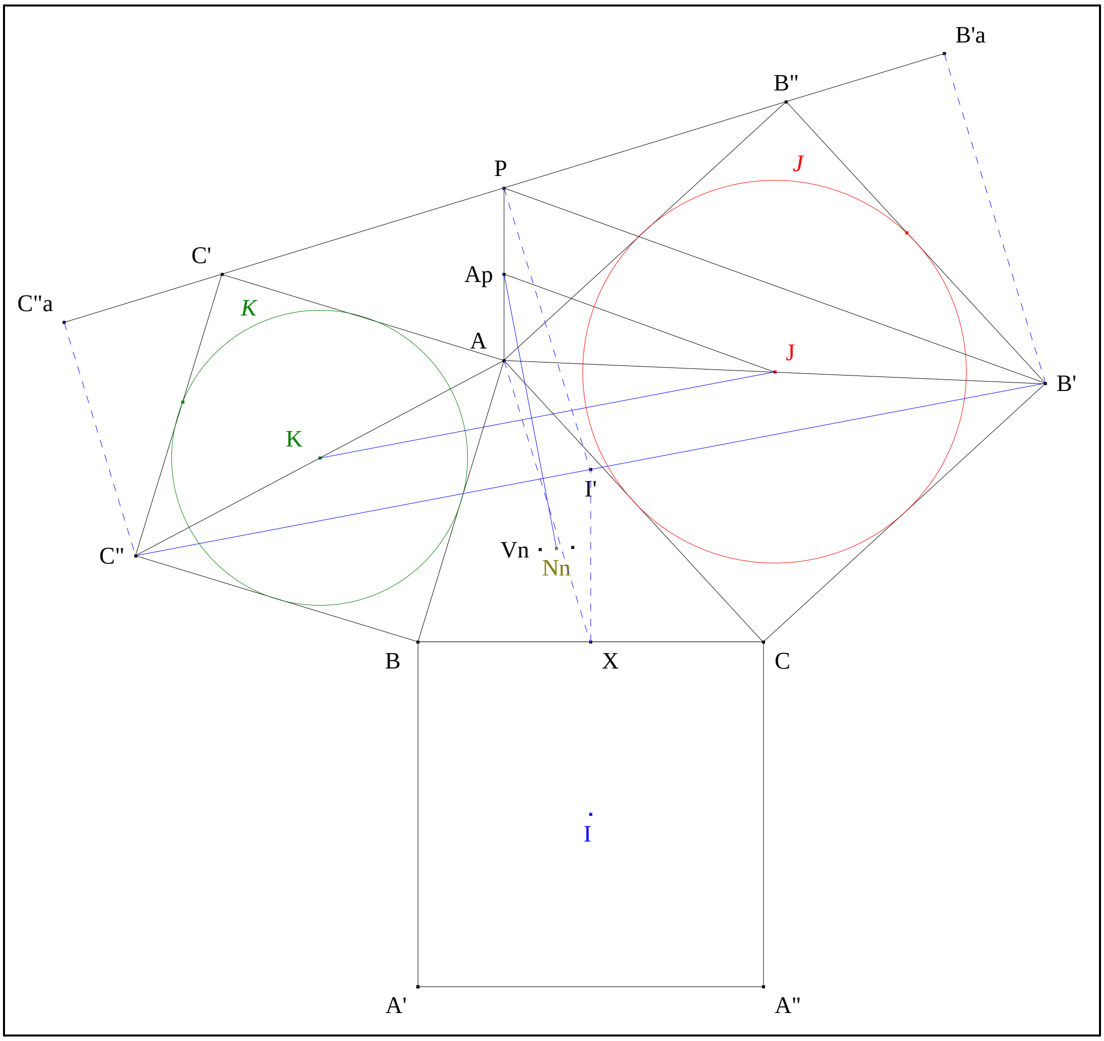
- D'après V. 2. Un carré de Finsler-Hadwiger, scolie 2 **(1)** (PX) est la I-médiatrice (PX) de IJK
  (2) (PX) passe par X_{641}
  (3) (JK) ⊥ (PX).

- D'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AI) // (PX)

- **Scolie :** Nn est le milieu de [Vn O_{641}].

- Notons Ap le milieu de [AP].

- L'axe médian de la bande de frontières (AI) et (PX), passe par Ap et est parallèle à (AI) ;
  d'après l'axiome de passage IIIb, cet axe médian passe par Nn.



- Notons B'a, C"a les pieds des perpendiculaires abaissées resp. de B', C" sur (B"C').

- Nous avons : **(1)** (B"C') ⊥ (AX)
  (2) AXI'P étant un parallélogramme, (AX) // (I'P)
  (3) d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (B"C') ⊥ (I'P)
  (4) d'après l'axiome de passage IIIb, I' étant le milieu de [B'C"], P est le milieu de [B'aC"a]
  (5) P étant le milieu de [B"C'], B'aB" = C"aC'.

- Puissance de Ap par rapport *J* : P_J (Ap) = ApJ² - (B'B"/2)²
  par multiplication par 4, 4.P_J (Ap) = PB'² - B'B"²

- D'après le théorème de Pythagore, 4.P_J (Ap) = B'aP² - B'aB"²

- Mutatis mutandis, nous montrerions que 4.P_K (Ap) = C"aP² - C"aC'² ;
  en conséquence, P_J (Ap) = P_K (Ap) i.e. Ap est sur l'axe radical de *J* et *K*.

- **Conclusion partielle :** l'axe radical de *J* et *K* passe par Nn.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que l'axe radical de *K* et *I* passe par Nn l'axe radical de *I* et *J* passe par Nn.

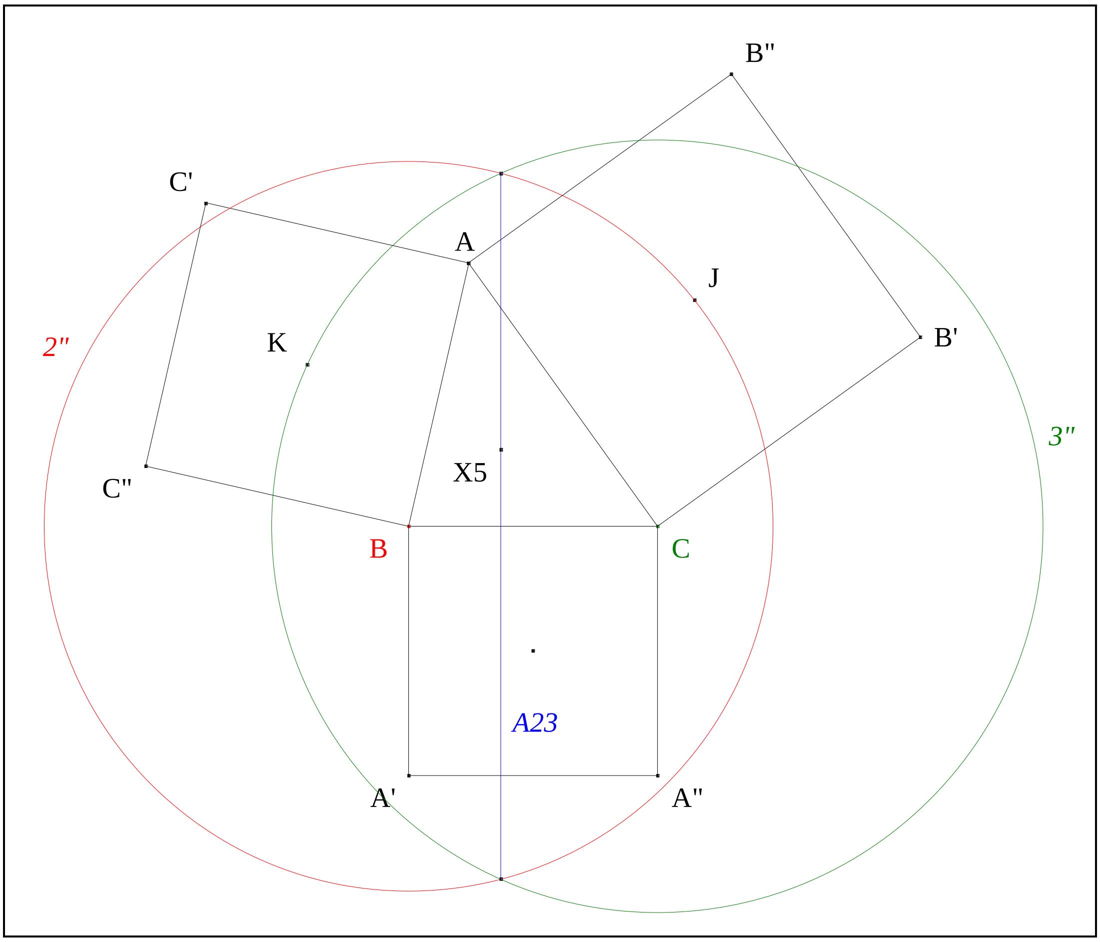
- **Conclusion :** Nn est le centre radical de *I*, *J* et *K*.

Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

5. Un troisième résultat de Victor Thébault

VISION

Figure :



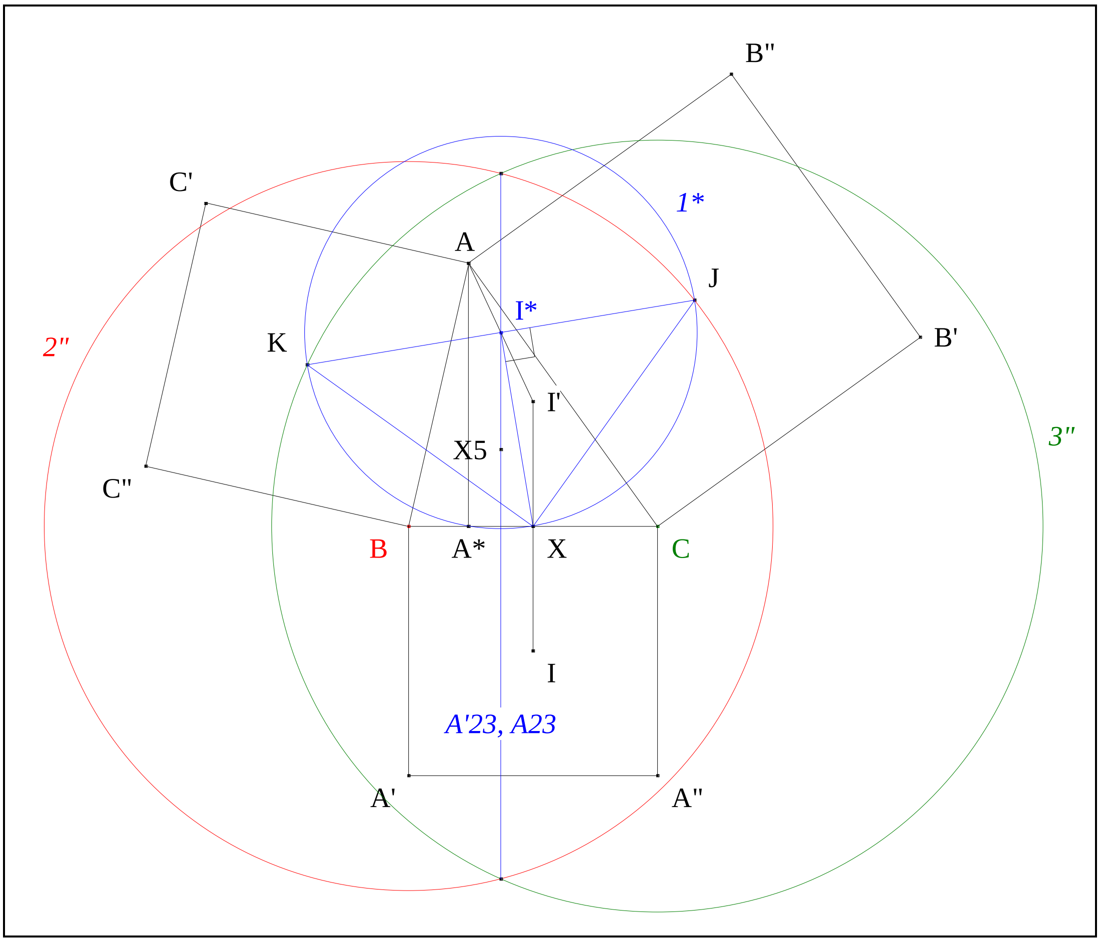
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
2", *3"* les cercles de centre B, C passant resp. par J, K,
A23 l'axe radical de *2"* et *3"*,
et X_5 le centre du cercle d'Euler de ABC.

Donné : *A23* passe par X_5. [51]

---

[51] Thébault V., problem E1420, *American Math. Monthly*, 67 (1960) 470 ;
Yiu P., A geometry problem of V. Thebault, Message *Hyacinthos* # 1667 du 25/10/2000 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/1667.

VISUALISATION



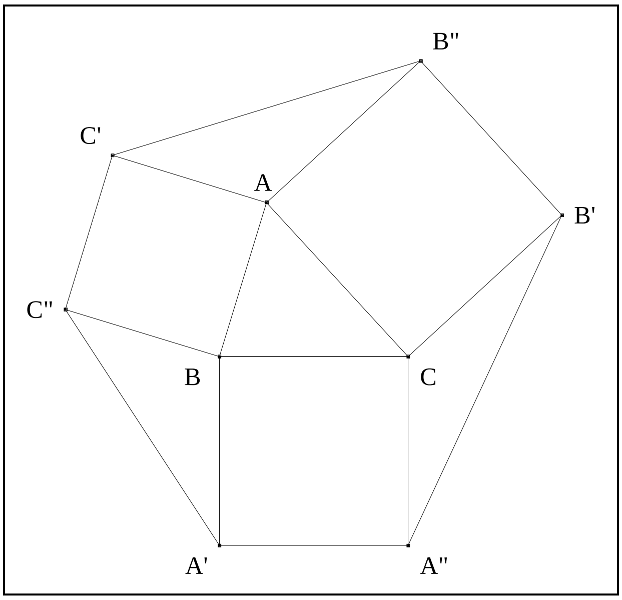
- D'après V. 2. Un carré de Finsler-Hadwiger, scolie 5, *1** passe par A* et X.
- Notons *A'23* la médiatrice de [A*X].
- D'après l'axiome de passage IIIb appliqué à la bande de frontière (AA*) et (I'XI), I* est sur *A'23*
- **Scolies :** **(1)** le cercle d'Euler de ABC passe par A* et X
  (2) X_5 est sur *A'23*.
- D'après III. 5. Un triangle rectangle-isocèle, XJK est rectangle-isocèle en X ;
  I* étant le milieu de [JK], (JK) ⊥ (XI*).
- Nous avons : $P_{2''}$ (I*) = BI*² - BJ² et $P_{3''}$ (I*) = CI*² - CK² ;
  d'après "Différence de deux carrés" (Cf. Annexe 11), $P_{2''}$ (I*) = $P_{3''}$(I*) ;
  en conséquence, I* est sur *A23*.
- **Scolie :** *A23* ⊥ (BC).
- Sachant que par un point pris hors d'une droite,
  nous ne pouvons mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite,
  A'23 et *A23* *A23* sont confondus.
- **Conclusion :** *A23* passe par X_5.

Note historique : ce problème de Victor Thébault datant de 1960 a été résolu métriquement par Léon Bankoff [52].

6. La proposition 5 de Vecten

VISION

Figure :



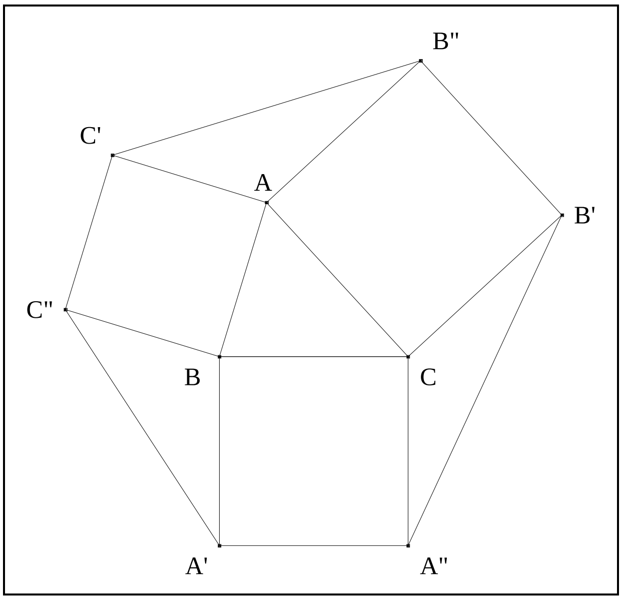
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : les A, B, C-flancs du moulin à vent ont même aire que ABC [53].

VISUALISATION

[52] Bankoff L., problem E1420, *American Math. Monthly*, 68 (1961) 65-66 ;
Hatzipolakis A., A geometry problem of V. Thebault, Message *Hyacinthos* # 1660 du 26/10/2000 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/1669.

[53] Vecten, Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales, *Annales* de Gergonne VII (1816-17) 321-324, proposition 5.



- En appliquant la formule Willebrord Snell (1580-1626) : [AB"C"] = AB".AC'.sin <B"AC' ;
  [ABC] = AB.AC.sin <BAC ;
  <B"AC' et <BAC étant supplémentaires, leur sinus sont égaux ;
  en conséquence, [AB"C'] = [ABC].

- Mutatis mutandis, nous montrerions que [BC"A'] = [ABC]
  [CA"B'] = [ABC].

- **Conclusion :** les A, B, C-flancs du moulin à vent ont même aire que ABC.

Note historique : ce résultat pour un triangle ABC rectangle en A a déjà été proposé en 1896 par le Frère Joseph[54], de son nom civil Jean-Marie Josserand, Supérieur des Écoles Chrétiennes de 1884 à 1897. Rappelons que la tradition voulait que lorsqu'un Frères des Écoles Chrétiennes écrivait un livre, son nom ne fût pas mentionné, mais que l'on indiquât les initiales du Supérieur en fonction. En vérité, le véritable auteur était F. G.-M. i.e. le Frère Gabriel-Marie.

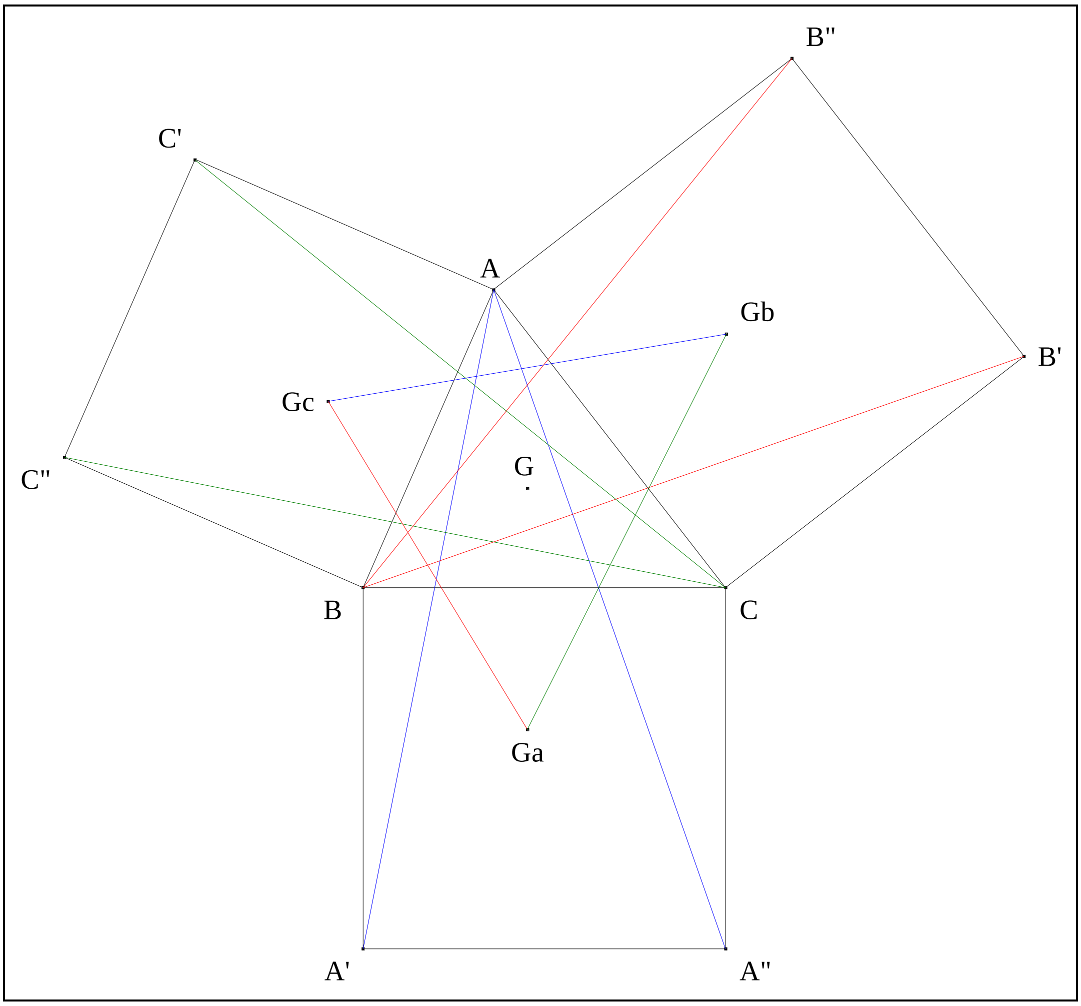
Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

7. Le point X_{1131}

VISION

Figure :

[54] F. J., Exercice de Géométrie Paris (1896).

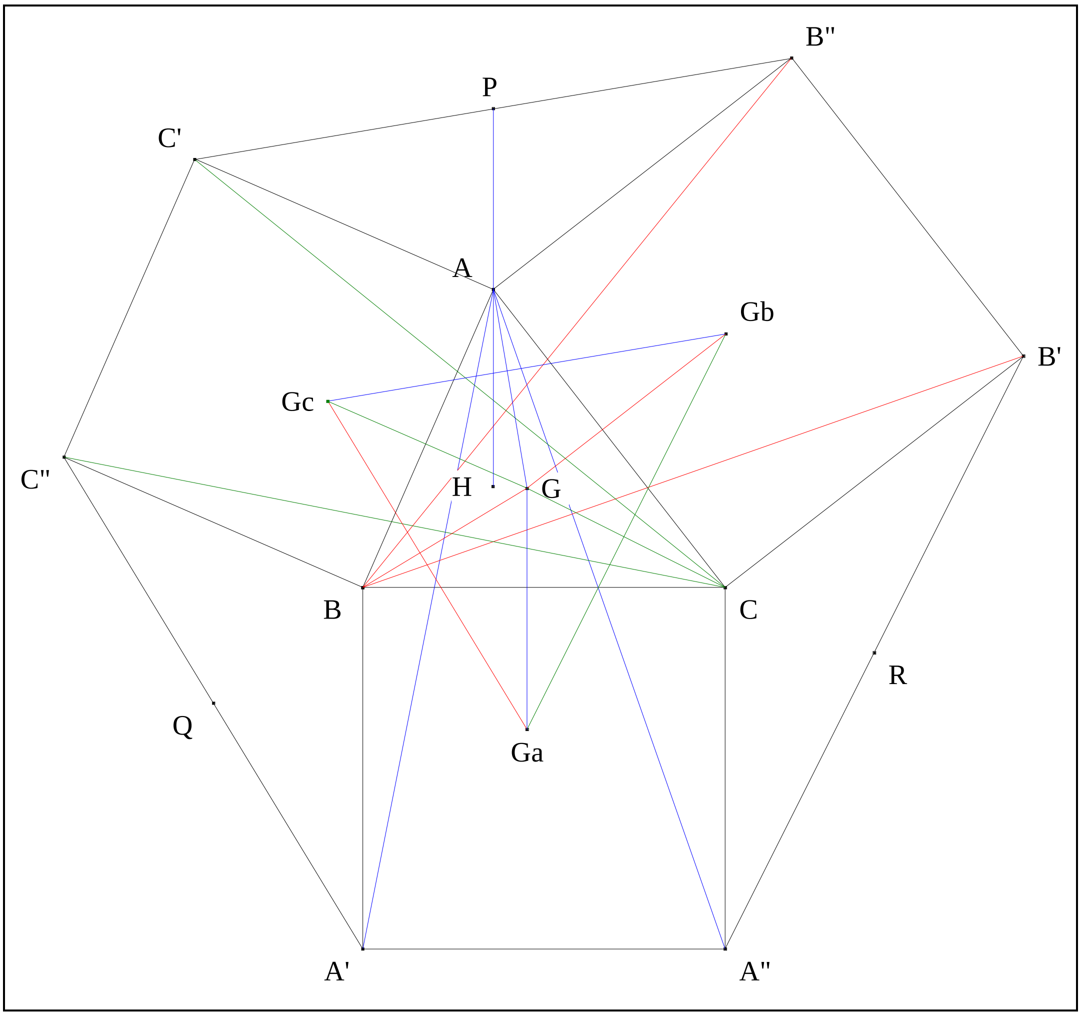


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment
et Ga, Gb, Gc les points médians des triangles AA'A", BB'B", CC'C".

Donnés : les triangles GaGbGc et ABC sont comédians [55].

VISUALISATION

[55] Luisgeometria, Vecten's squares and centroid (own discovery), Mathlinks du 28/03/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=267281.



- **Scolies :** **(1)** (GGb) ⊥ (CA) et 2.GGb = 3.CA
  (2) (GGc) ⊥ (AB) et 2.GGc = 3.AB
  (3) (GGb) // (AB") et (GGc) // (AC')
  (4) (HAP) // (GaG).

- D'après le théorème c.a.c. appliqué à GGbGc et AB"C', GGbGc est homothétique à AB"C'.

- **Conclusion partielle :** (AP) étant la A-médiane de AB"C", (GaG) est la G-médiane de GGbGc.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (GbG) est la G-médiane de GGcGa
  (GcG) est la G-médiane de GGaGb ;
  en conséquence, G est le point médian de GaGbGc.

- **Conclusion :** les triangles GaGbGc et ABC sont comédians.

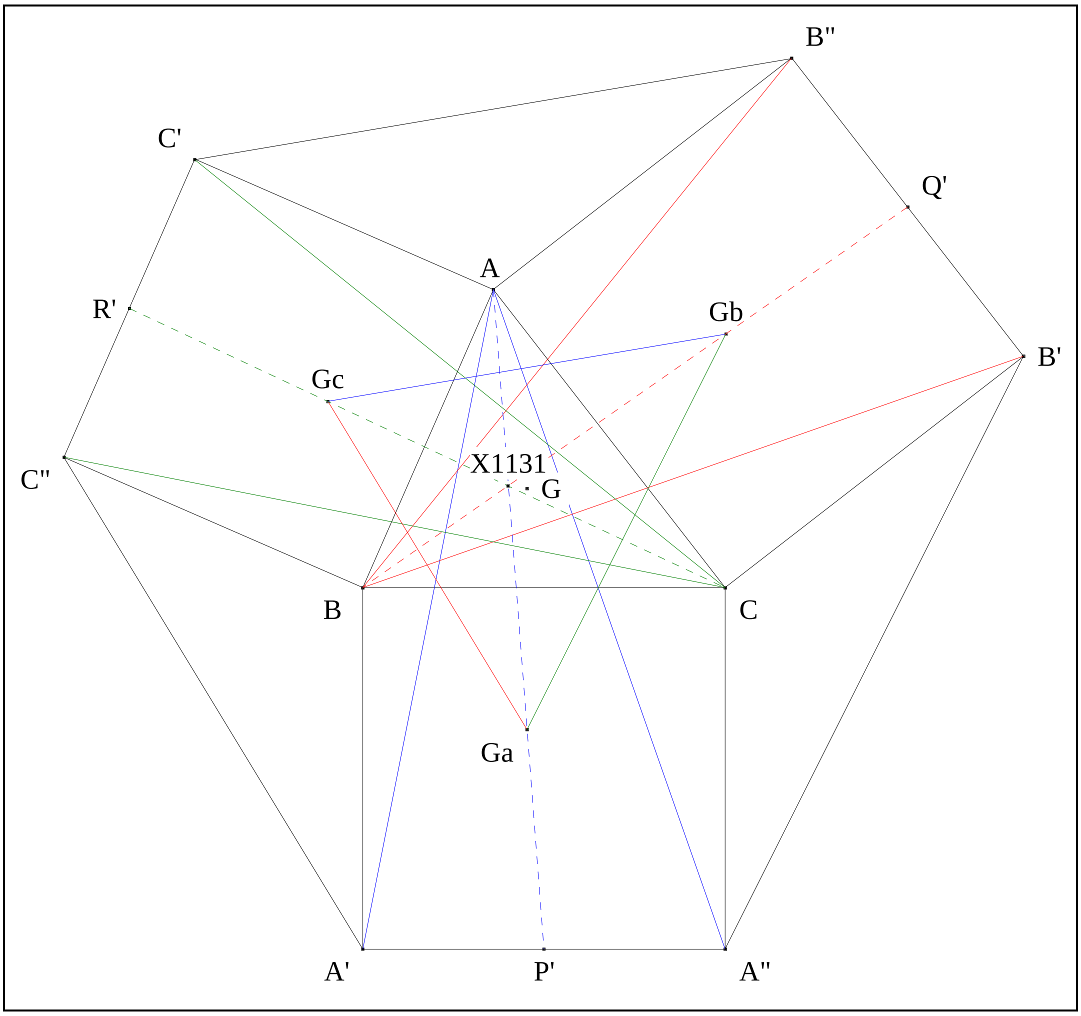
Note historique : ce problème de Luisgeometria a été dédicacé à l'auteur, à Kostas Vittas ainsi qu'à Lym.

Scolies : **(1)** GaGbGc et ABC sont bilogiques

(2) GaGbGc et ABC sont en perspective [56]

[56] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G., vol. 1, 1. Lemme 1 ;
Ayme J.-L., Vecten 2, Message *Hyacinthos* # 17413 du 23/03/2009 ;

(3) Deux autres triangles en perspective [57]



- Notons P', Q', R' les milieux resp. de [A'A''], [B'B''], [C'C''].

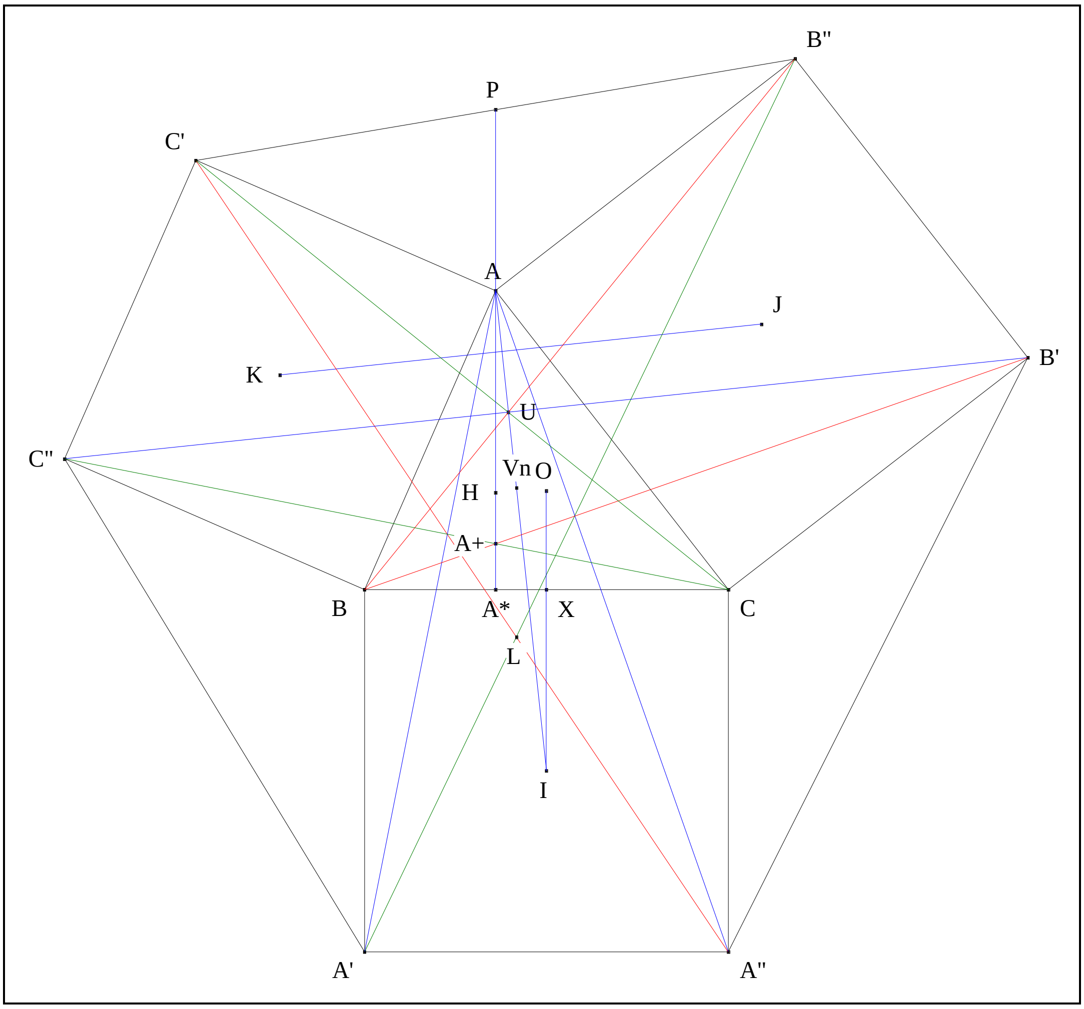
- Par définition d'un point médian, **(1)** A, Ga et P' sont alignés
  (2) B, Gb et Q' sont alignés
  (3) C, Gc et R' sont alignés.

- **Conclusion :** (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes.

(4) Le centre de cette perspective est référencé sous X_{1131} chez ETC.

6. Figure récapitulant les notations par rapport à A :

57 http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/17413.
Grinberg D., Message *Hyacinthos*.

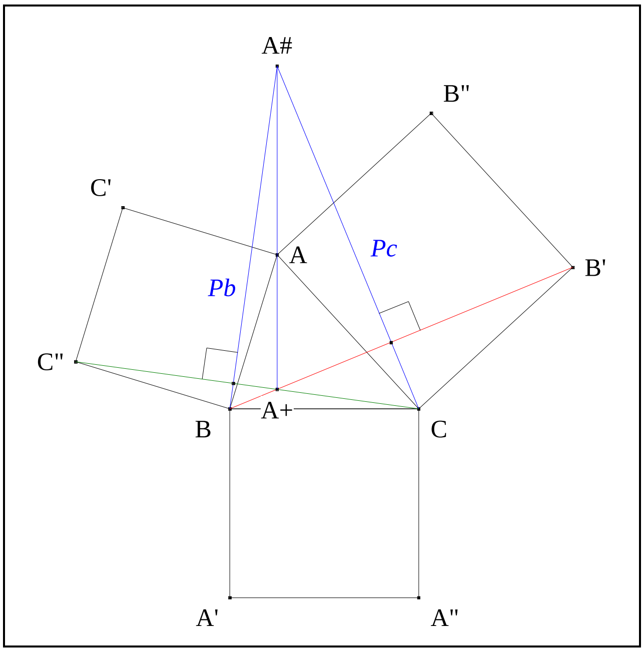


VI. LE MOULIN À VENT BORDÉ DE PARALLÉLOGRAMMES

1. Le problème du Dr. Porson

VISION

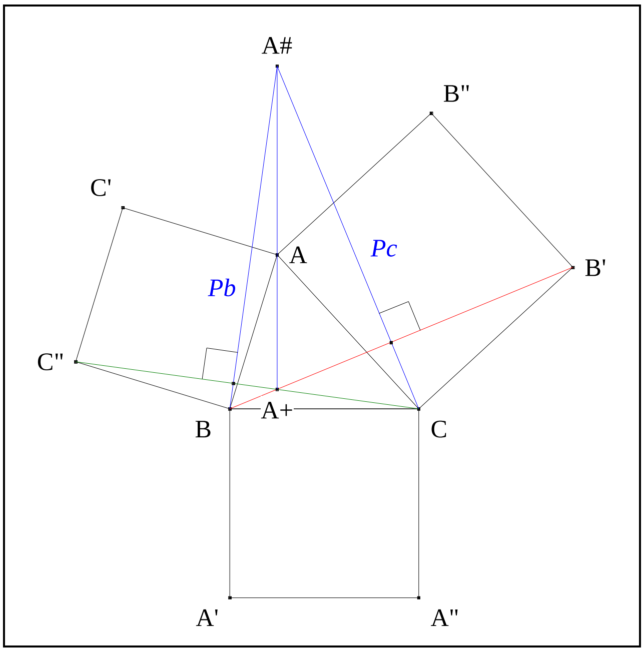
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
*P*b la perpendiculaire à (CC") passant par B
et *P*c la perpendiculaire à (BB") passant par C.

Donné : *P*b, *P*c et (AA+) sont concourantes [58].

VISUALISATION



- Notons A# le point d'intersection de *P*b et *P*c.
- Par définition, A+ est l'orthocentre du triangle A#BC.
- D'après III. 4. La proposition 1, (AA+) ⊥ (BC) ;

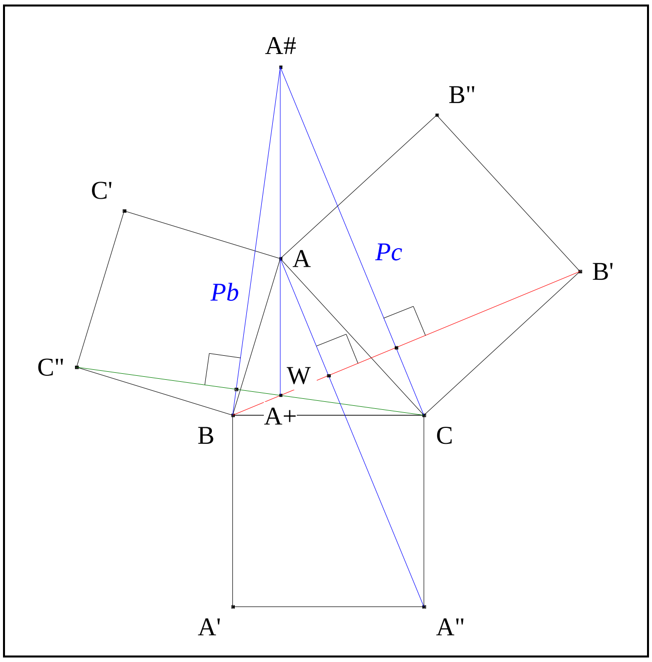
[58] Proposé comme problème par le Dr. Porson (1759-1808).

en conséquence, (AA+) est la A#-hauteur de A#BC.

- **Conclusion :** *P*b, *P*c et (AA+) sont concourantes en A#.

Note historique : ce résultat lorsque ABC est A-rectangle a été résolu en 1889 par Renan[59] dans la *Revue scientifique*, reproposé en septembre 1823 par J. Hamett dans le *Philosophical Magazine* à la page 236 et démontré l'année suivante par Joseph Diaz Gergonne[60], puis redonné et reprouvé en 1879 dans le *Journal de Mathématiques Elémentaires* [61].
La généralisation à un triangle quelconque qui aurait été connu de Vecten dès 1817 selon F. G.-M.[62], a été envisagée par Gergonne et Jean Joseph Querret[63] en 1824.

Scolies : **(1)** le segment [AA#] [64]



- D'après III. 2. La proposition 2, scolie 1, (AA") ⊥ (BB') ;
  par hypothèse, (BB') ⊥ (CA#) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AA") // (CA#).

- Nous avons, (AA#) ⊥ (BC) et (BC) ⊥ (CA") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AA#) // (CA").

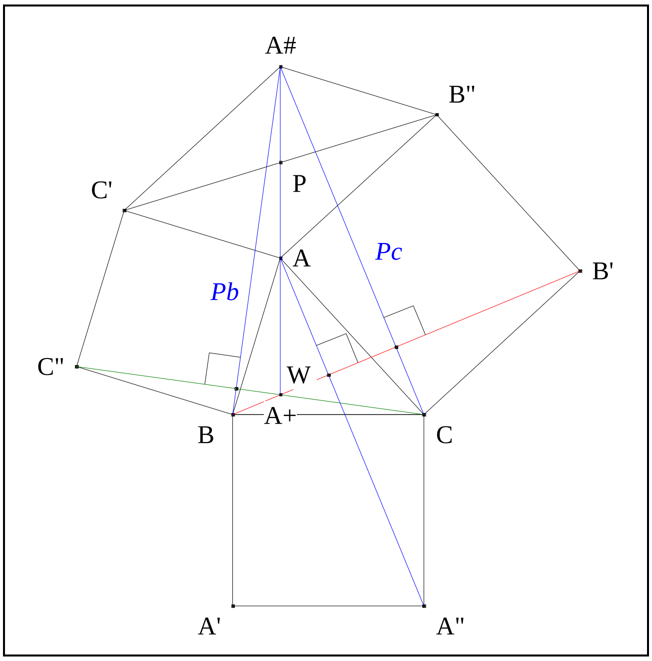
- Le quadrilatère AAA"CA# ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme;
  en conséquence, AA# = CA" ;
  par hypothèse, CA" = BC.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, AA# = BC.

(2) Nature géométrique de A#

---

59 Fourrey E., *Curiosités Géométriques*,4-ième édition, Vuibert, Paris (1938) 99.
60 Gergonne J., *Annales* XIV (1823-1824) 334-336.
61 Vuibert H., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1879-1880) 36.
62 F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed. (1920), Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris, (1991) 861.
63 Gergonne J. (1771-1859), Querret J. J. (178361839), *Annales* XV (1824-1825) 84-89.
64 10-ième O.M. Mexique (1996) exercice 6.

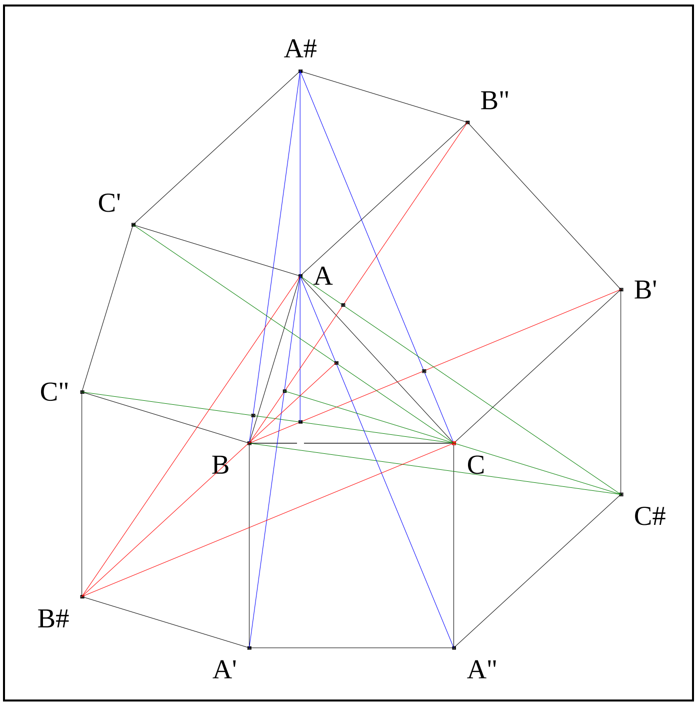


- D'après IV. 1. D'une hauteur à une médiane, scolie 3, 2.AP = BC.

- Nous avons, BC = AA# ;
  par transitivité de la relation =, 2.AP = AA# ;
  en conséquence, P est le milieu de [AA#].

- **Conclusion :** le quadrilatère AB"A#C' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu P, est un parallélogramme.

(3) Vision triangulaire



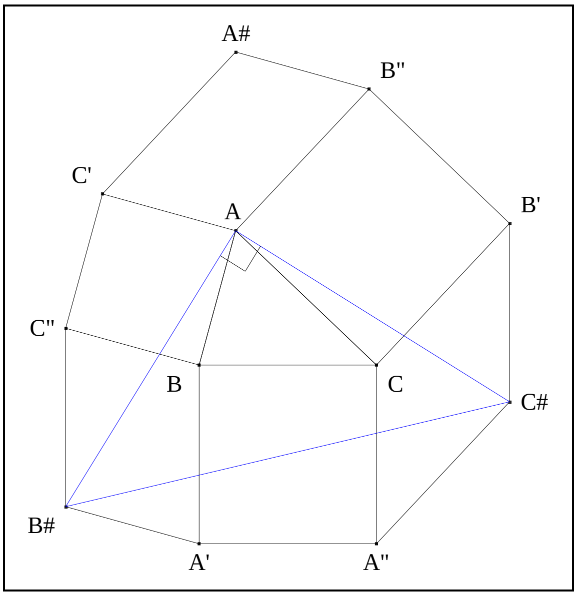
- Notons B#, C# deux points tels que
  les quadrilatères BC"B#A', CA"C#A' soient des parallélogrammes.

(4) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur" ;

2. Un triangle rectangle-isocèle

VISION

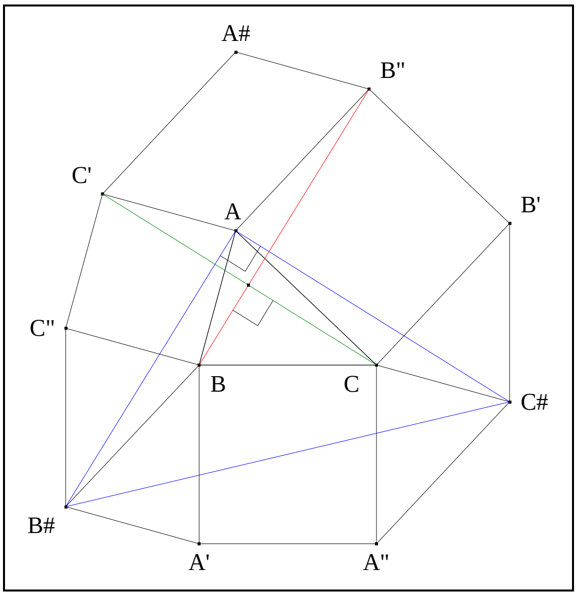
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : le triangle AB#C# est rectangle-isocèle en A.[65]

VISUALISATION



[65] TST Yougoslavie (1992).

- D'après VI. 1. Le problème du Dr. Porson, le quadrilatère AB#BB" est un parallélogramme ;
  en conséquence, (BB") // (AB#) et BB" = AB#.

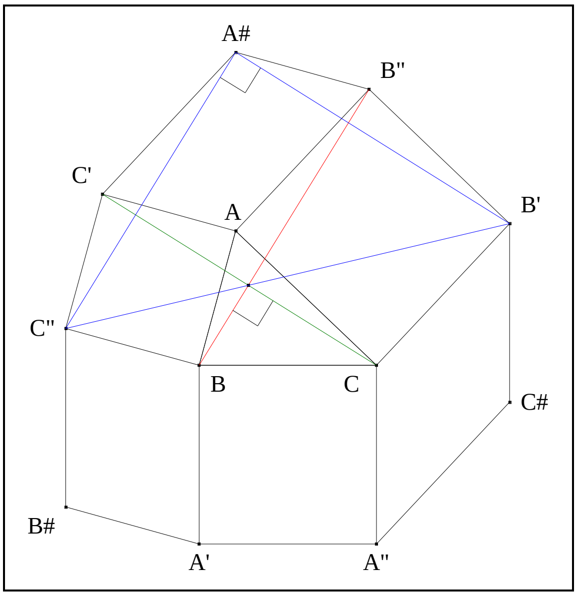
- Mutatis mutandis, le quadrilatère AC#CC' est un parallélogramme ;
  en conséquence, (CC') // (AC#) et CC' = AC#.

- D'après III. 2. La proposition 2, (BB") ⊥ (CC') et BB" = CC'.

- La relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (AB#) ⊥ (AC#) ;
  par substitution, AB# = AC#.

- **Conclusion :** le triangle AB#C# est rectangle-isocèle en A.

Scolies : **(1)** un autre triangle rectangle-isocèle



- Le quadrilatère A#C"BB" étant un parallélogramme, A#C" = BB" et (BB") // (A#C") ;
  nous savons que BB" = CC' et (BB") ⊥ (CC') ;
  le quadrilatère A#B'CC' étant un parallélogramme, CC' = A#B' et (CC') // (A#B') ;
  par transitivité de la relation =, A#C" = A#B' ;
  la relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (A#C") ⊥ (A#B').

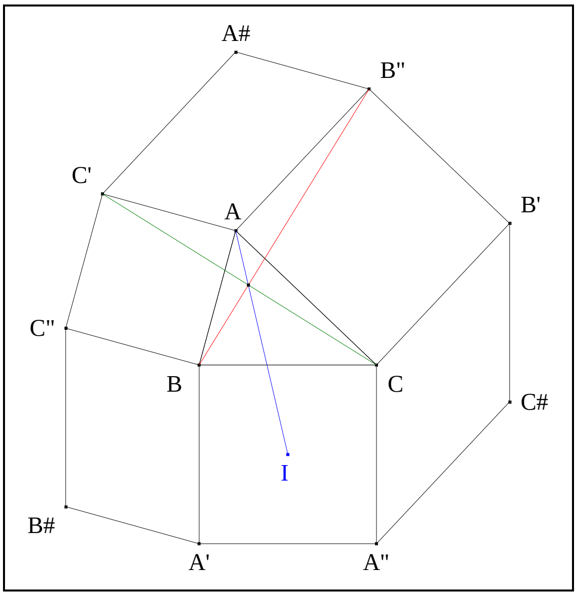
- **Conclusion :** le triangle A#C"B' est rectangle-isocèle en A#.

(2) Le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur" ;

3. Un résultat de Joseph Neuberg

VISION

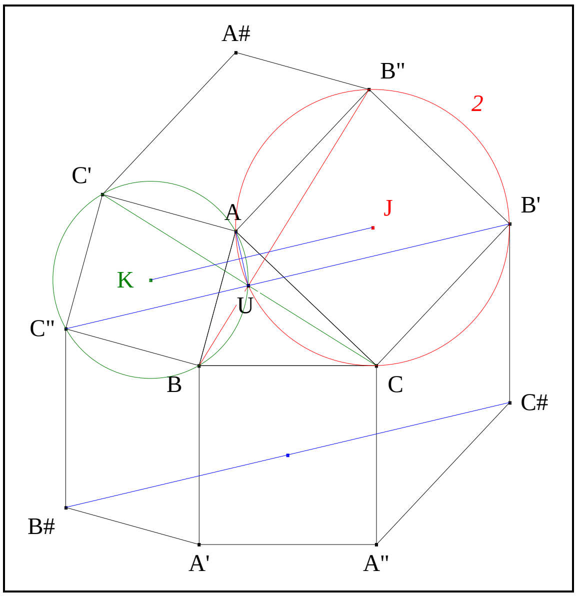
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (AI), (BB") et (CC') sont concourantes [66].

VISUALISATION

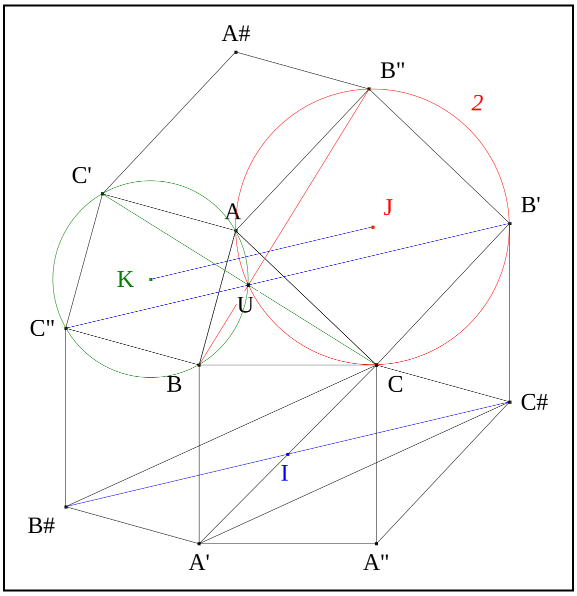


- Nous avons : (AU) ⊥ (JK) ;
  d'après III. 5. Un triangle rectangle-isocèle, scolie 2, (JK) // (B'UC") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AU) ⊥ (B'UC").

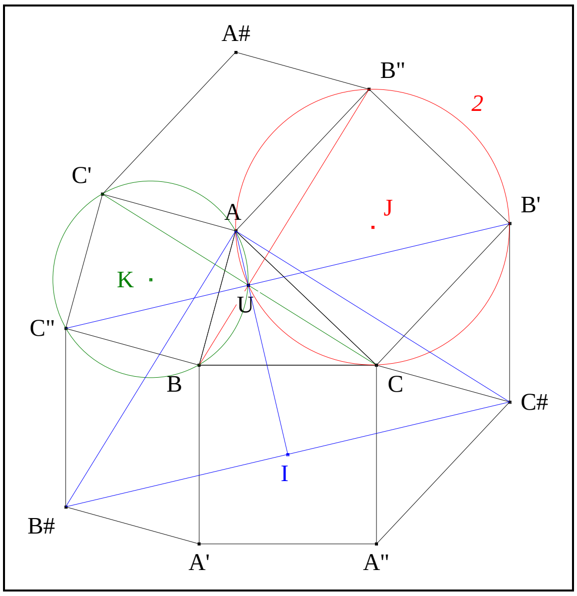
- Le quadrilatère B#C#B'C' étant un parallélogramme, (B'C") // (B#C#) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AU) ⊥ (B#C#).

---

66 Neuberg J., *Nouvelle Correspondance de Mathématiques* IV (1878) 142-145, n° 5 ;
Hungary-Israel (1997) ;
Concurrent lines when squares erected on sides of ABC, *Mathlinks* du 31/12/2004 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=769743606&t=22304.



- D'après VI. 1. Le problème du Dr. Porson, le quadrilatère CB#A'C# est un parallélogramme ;
  en conséquence, I est le milieu de [B#C#].



- D'après VI. 2. Un triangle rectangle-isocèle, (AU) est la A-hauteur de AB#C# isocèle en A ;
  en conséquence, (AU) est la A-médiane de AB#C#
  i.e. A, U et I sont alignés.

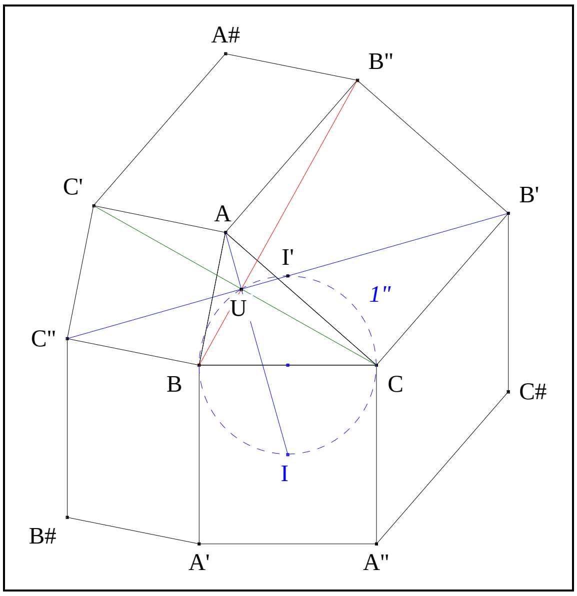
- **Conclusion :** (AI), (BB") et (CC') sont concourantes.

Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

4. Un résultat d'Oene Bottema

VISION

Figure :



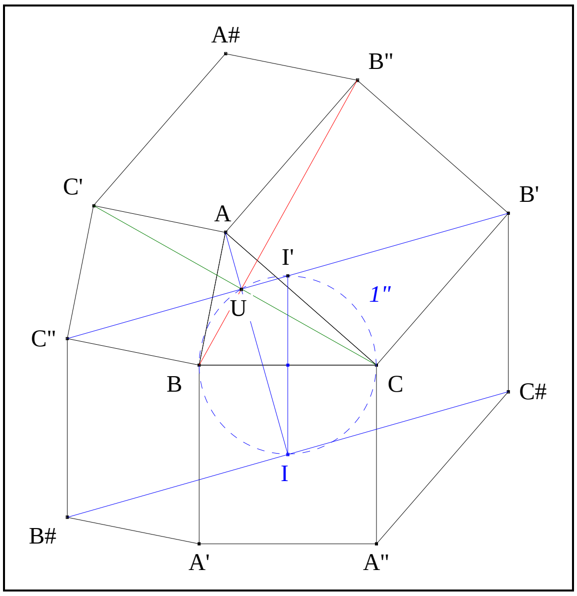
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,

1" le cercle de diamètre [BC] ; il passe par I et U ;

et I' le second point d'intersection de (B'C") avec *1"*.

Donné : I' est le milieu de [B'C"] [67].

VISUALISATION



- D'après VI. 3. Le résultat de Neuberg, (AUI) ⊥ (B'I'UC").
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", I' est l'antipôle de I relativement à *1"*.
- Le quadrilatère BICI' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;

[67] Bottema O., Het problem van de verloren schat, Verscheidenheden, *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren*, Groningen (1978) 51.

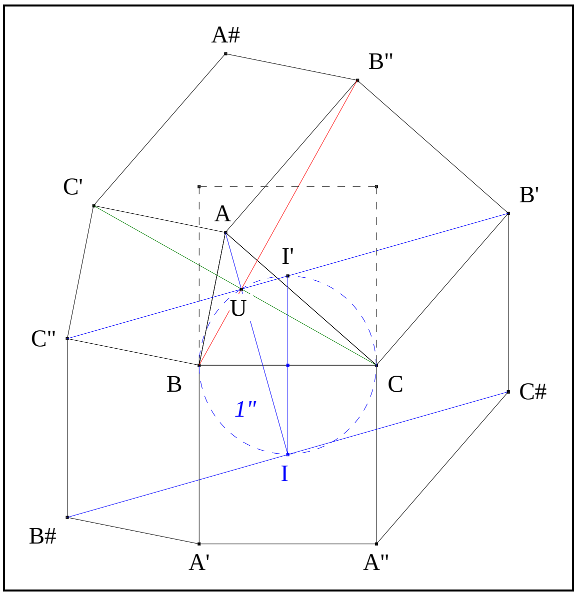
ce dernier ayant deux côtés consécutifs égaux (IB = IC), est un losange ;
ce dernier ayant ses diagonales égales, est un carré ;
en conséquence, (II') ⊥ (BC) et (II') // (B#C").

- D'après VI. 3. Un résultat de Neuberg, I est le milieu de [B#C#] ;
  en conséquence, (II') est l'axe médian de la bande de frontières (B#C") et (C#B').

- **Conclusion :** d'après l'axiome de passage IIIb, I' est le milieu de [B'C"].

Note historique : le cas particulier où ABC est A-rectangle a été proposé par F. G.-M. sans référence[68].

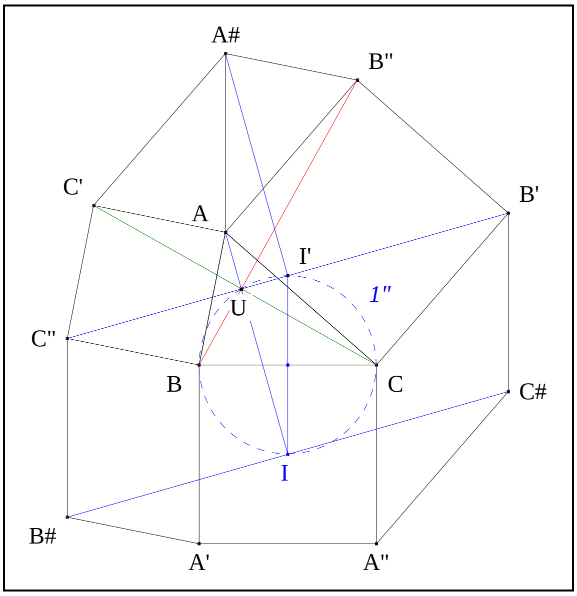
Scolies : **(1)** nature géométrique de I'



- **Conclusion :** I' est le centre du carré construit sur [BC] à l'intérieur de ABC [69].

(2) la médiatrice de [B'C"]

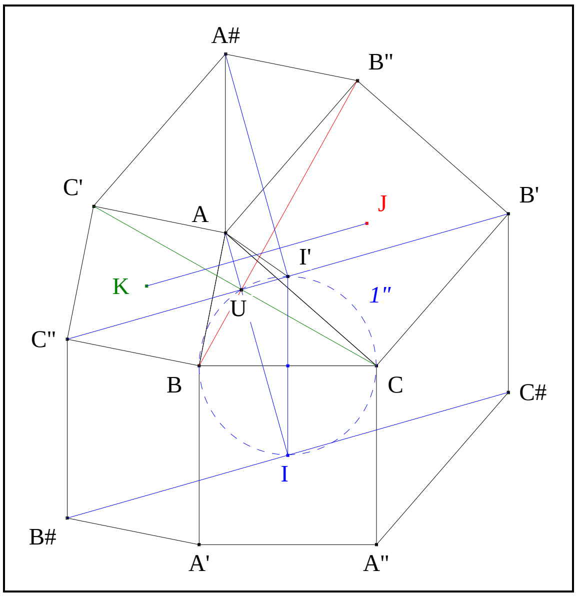
[68] F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed. (1920), Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris, (1991) 562.
[69] Van Aubel, *Mathesis* (1880) n° 42
solution : van Aubel, *Mathesis* (1881) 163.



- Le quadrilatère AII'A# ayant deux côtés opposés [AA#] et [II'], parallèles et égaux, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (A#I') // (AI) ;
  nous avons ; (AI) ⊥ (B'C") ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (A#I') ⊥ (B'C").

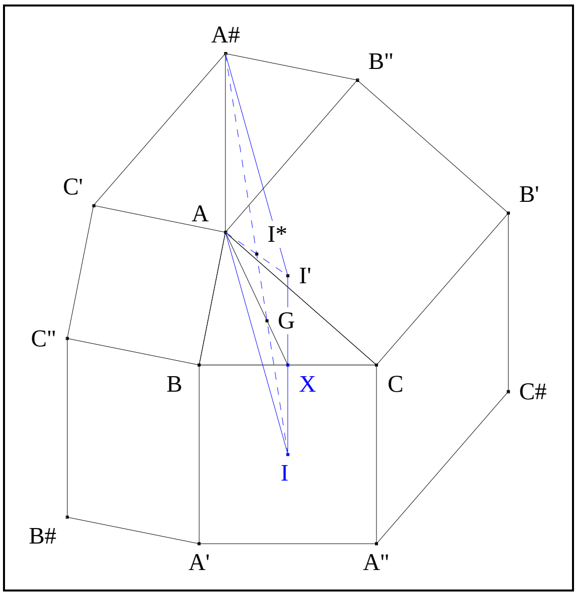
- **Conclusion :** (A#I') est la médiatrice de [B'C"].

(3) Trois points alignés



- **Conclusion :** (JK) passe par le milieu de [AI'].

(4) Trois autres points alignés



- Notons G le point médian de ABC.

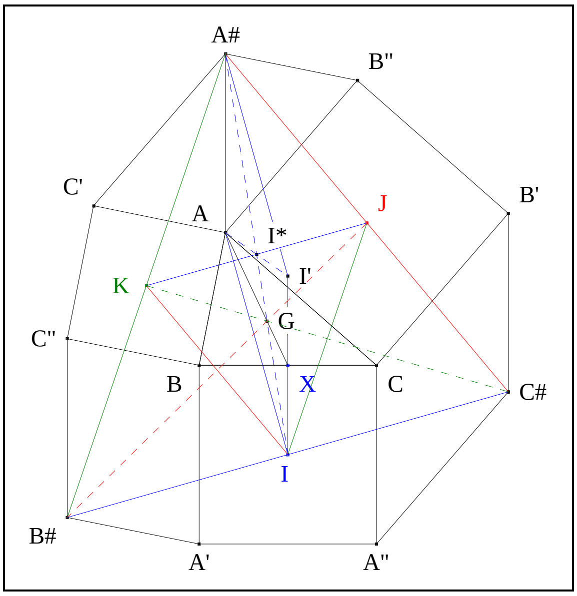
- **Scolie :** I* est le milieu de [AI'].

- AII'A# étant un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu I*.

- (IA#) et (AX) étant deux médianes du triangle AII', se coupent au tiers à partir de la base ;
  en conséquence, G est sur (IA#).

- **Conclusion :** A#, G et I sont alignés.

(5) Vision triangulaire



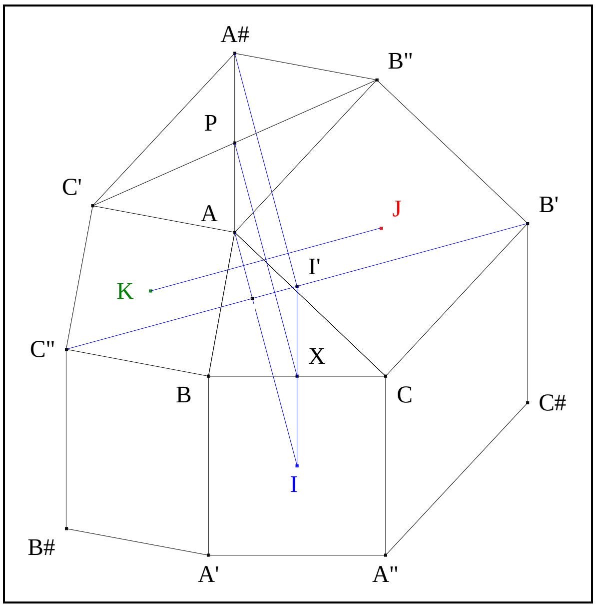
- Mutatis mutandis, nous montrerions que * B#, G et J sont alignés
  * C#, G et K sont alignés.

- A#KIJ étant un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu I*.

- D'après VI. 3. Un résultat de Joseph Neuberg, I, J, K sont les milieux resp. de [B#C#], [C#A#], [A#B#].

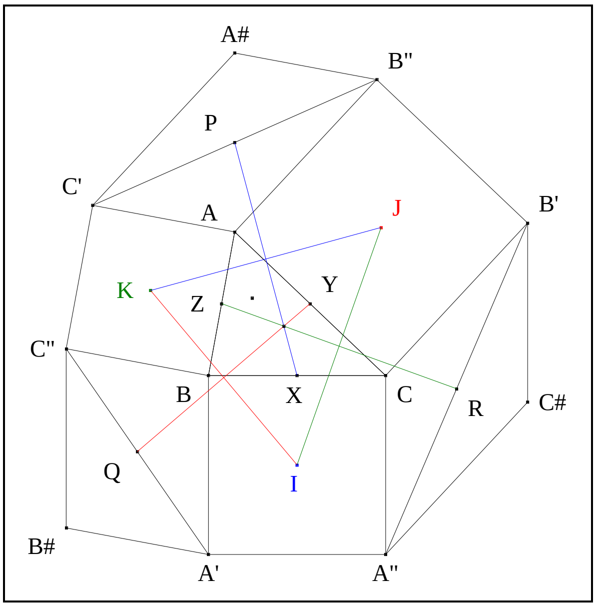
- **Conclusion :** ABC, IJK et A#B#C# sont comédians.

(6) Un résultat d'Etienne Deprez [70]



- AII'A# étant un parallélogramme, nous savons que (AI) // (A#I') ;
  P est le milieu de [AA#]
  X est le milieu de [II'] ;
  d'après le théorème de Thalès, (PX) // (AI) ;
  nous savons que PX = AI , (AI) ⊥ (JK) , AI = JK ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PX) ⊥ (JK).

- D'après V. 2. Un carré de Finsler-Hadwiger, XJPK est un carré ;
  d'après le théorème de la médiatrice, (PX) est la I-médiatrice de IJK et nous avons : PX = JK.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (PY) est la J-médiatrice de IJK et nous avons : PY = KI ;
  (PZ) est la K-médiatrice de IJK et nous avons : PZ = IJ.

70 Deprez E., *Mathesis* n° 987 ; ce résultat a été déjà vu à la page 55.

- **Conclusion :** (PX), (QY) et (CZ) sont concourante au centre du cercle circonscrit de IJK.

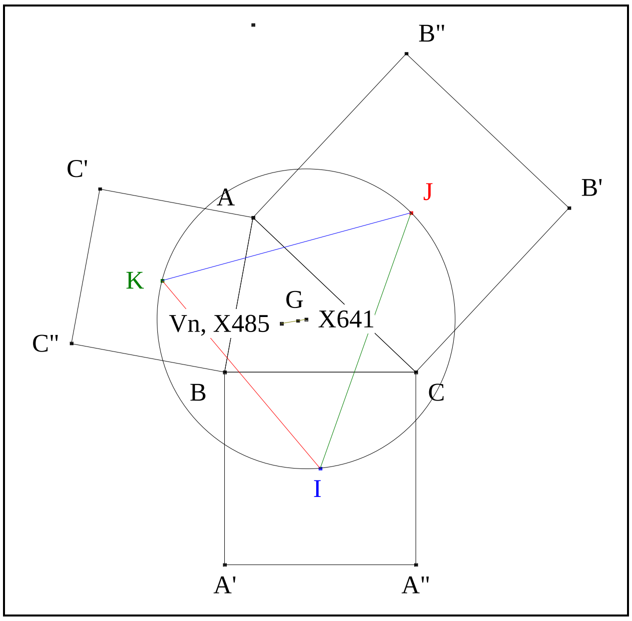
(7) Terminologie :

***** IJK est le triangle extérieur de Vecten de ABC

* le cercle circonscrit à IJK est "le cercle extérieur de Vecten de ABC"

* le centre de ce cercle est répertorié sous X_{641} chez ETC.

(8) X_{641}, G et X_{485} ou la droite d'Euler de IJK

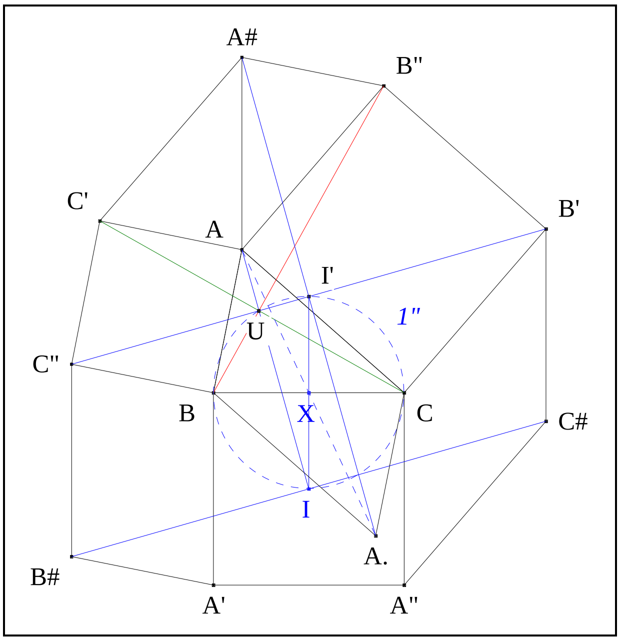


- D'après III. 7. La proposition 4, scolie 2, Vn i.e. X_{485} est l'orthocentre de IJK.

- D'après VI. 4. Un résultat de Bottema, scolie 5, ABC et IJK sont comédians.

- **Conclusion :** d'après Euler [71], X_{641} est le complément de X_{485}.

(9) Le triangle antimédian de ABC

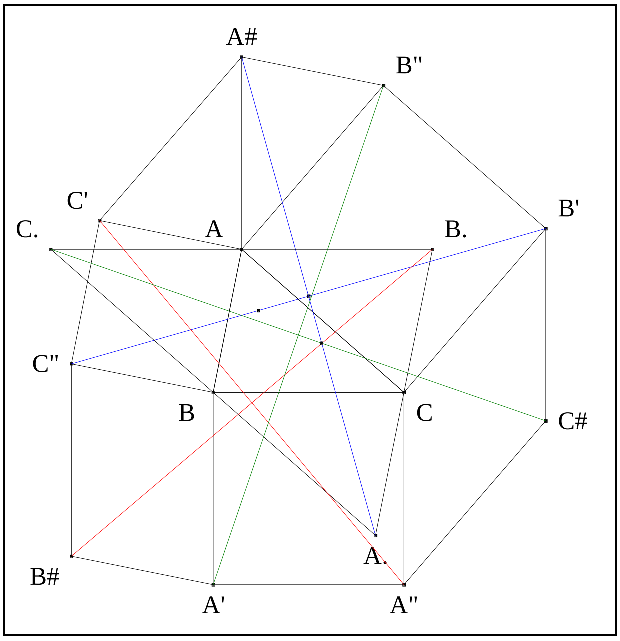


[71] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. Vol. 2, p. 3.

- Notons A.B.C. le triangle antimédian de ABC.

- Le quadrilatère AIA.I' ayant ses diagonales se coupant en leur milieu, est un parallélogramme ;
  en conséquence, (I'A.) // (AI) ;
  nous avons : (AI) // (I'A#) ;
  par transitivité de la relation //, (I'A.) // (I'A#) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (I'A.) = (I'A#) ;
  en conséquence, A#, I' et A. sont alignés.

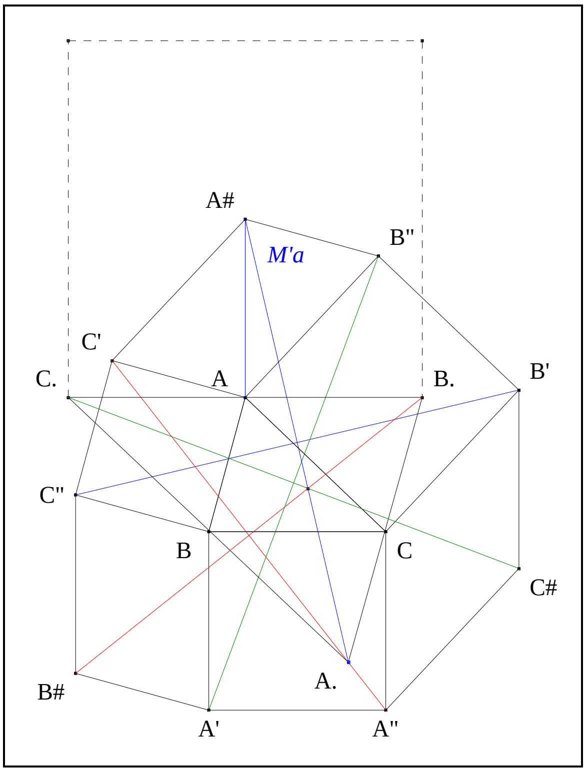
- **Conclusion :** la médiatrice de [B'C"] passe par A. et A#.



- Mutatis mutandis, la médiatrice de [C'A"] passe par B. et B#
  la médiatrice de [A'B"] passe par C. et C#.

(10) Un résultat de Darij Grinberg [72]

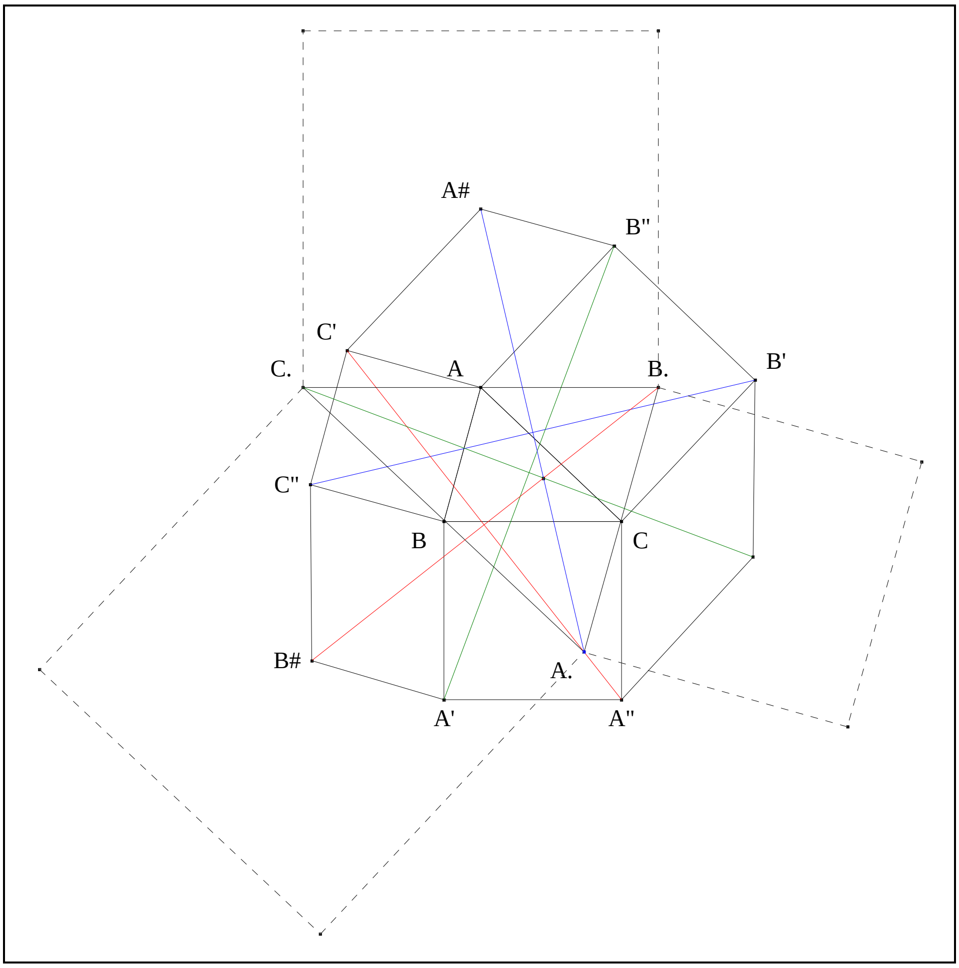
[72] Grinberg D., Squares and perpendicular bissectors, Message *Hyacinthos* # 7238 du 06/06/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7238.
Germany 1996 for squares erected on sides of triangle ;
Kiran Kedlaya's "Geometry Unbound" (problem 2 for section 5.3), *Mathlinks* du 07/01/2005 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1417126920&t=22917.



- Nous avons : * (AA#) ⊥ (B.C.)

  * 2.AA# = 2.BC = B.C.

  en conséquence, A# est le centre du carré construit sur [B.C.] à l'extérieur de A.B.C.



- Mutatis mutandis, nous montrerions, B# est le centre du carré construit sur [C.A.] à l'extérieur de A.B.C.
  C# est le centre du carré construit sur [A.B.] à l'extérieur de A.B.C.

- **Conclusion :** d'après III. 7. La proposition 4,
  (A#A.), (B#B.) et (C#C.) concourent au point extérieur de Vecten de A.B.C.

- **Scolies :** * le point extérieur de Vecten de A.B.C. est répertorié sous X_{488} chez ETC.

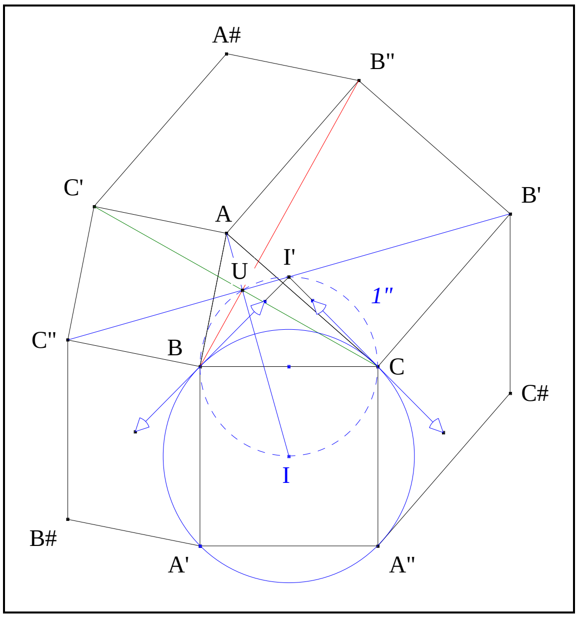
  * ABC et A.B.C. étant comédians[73],
    X_{488} est l'anticomplément du point extérieur de Vecten de ABC i.e. de X_{486}.

  * G étant le point médian de ABC et A.B.C., G, X_{486} et X_{488} sont alignés.

  * X_{488} est le point de de Longchamps du triangle extérieur de Vecten i.e. de IJK.

(11) Deux cercles orthogonaux

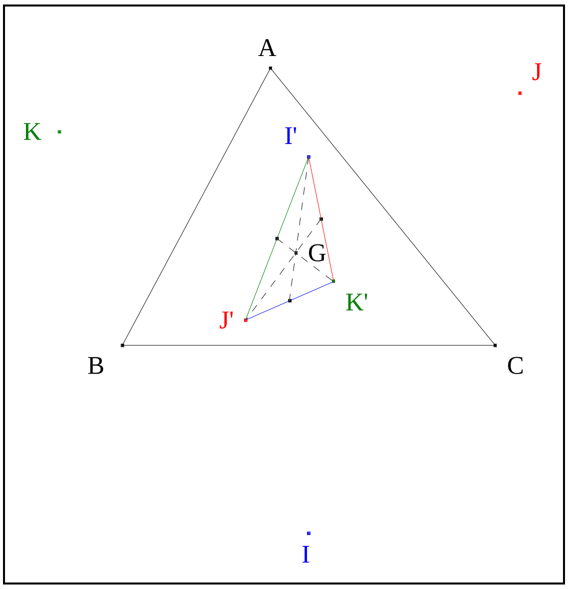
[73] i. e. partageant le même point médian.



* **Conclusion :** les cercles *1* et *1"* étant orthogonaux, les tangentes resp. en B, C passent par I'.

(13) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur" ;

(14) Un autre triangle comédian avec ABC

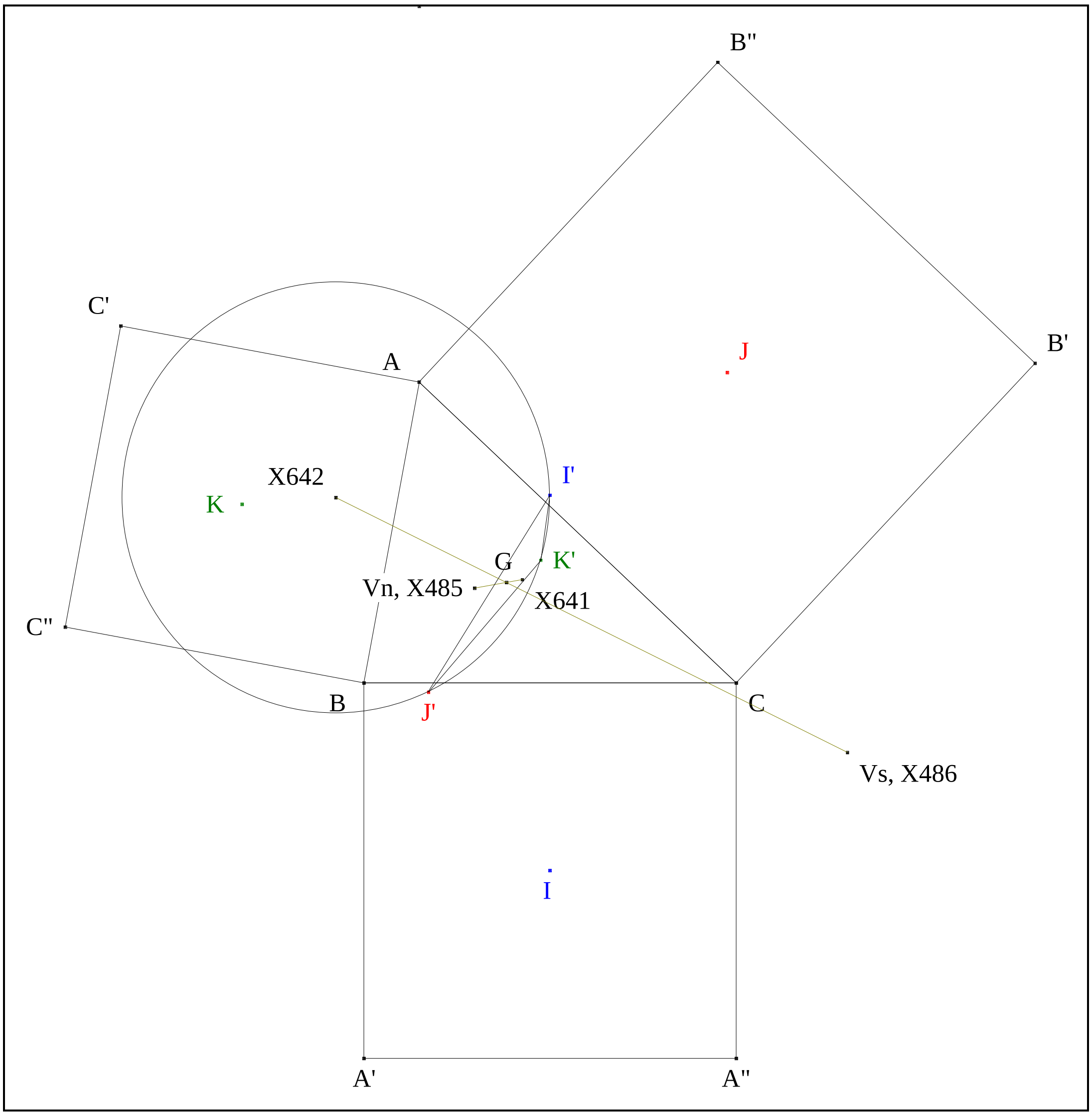


* Notons J', K' les symétriques de J, K par rapport à (CA), (AB).

* **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que ABC et I'J'K' sont comédians.

(15) Terminologie :
* I'J'K' est le triangle intérieur de Vecten de ABC
* le cercle circonscrit à I'J'K' est "le cercle intérieur de Vecten de ABC"
* le centre de ce cercle est répertorié sous X_{642} chez ETC.

(16) X_{642}, G et X_{486}



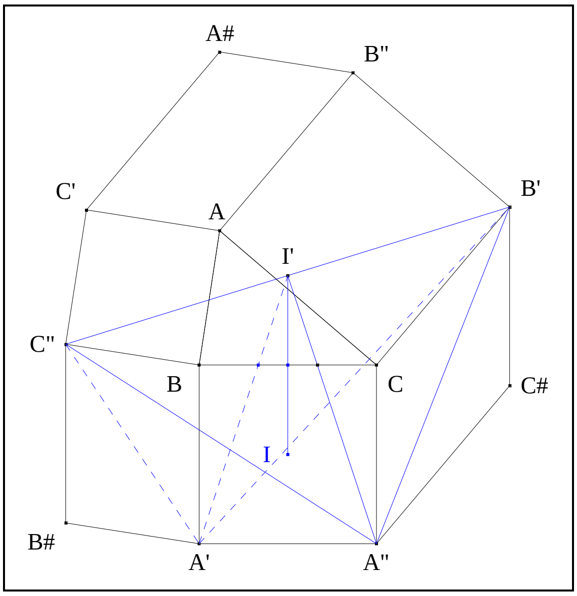
- D'après III. 7. La proposition 4, scolie 2, Vs i.e. X_{486} est l'orthocentre de I'J'K'.

- D'après VI. 4. Un résultat de Bottema, scolie 13, ABC et I'J'K' sont comédians.

- **Conclusion :** d'après Euler [74], X_{642} est le complément de X_{486}.

(17) Un résultat de van Aubel

[74] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. Vol. 2, p. 3.

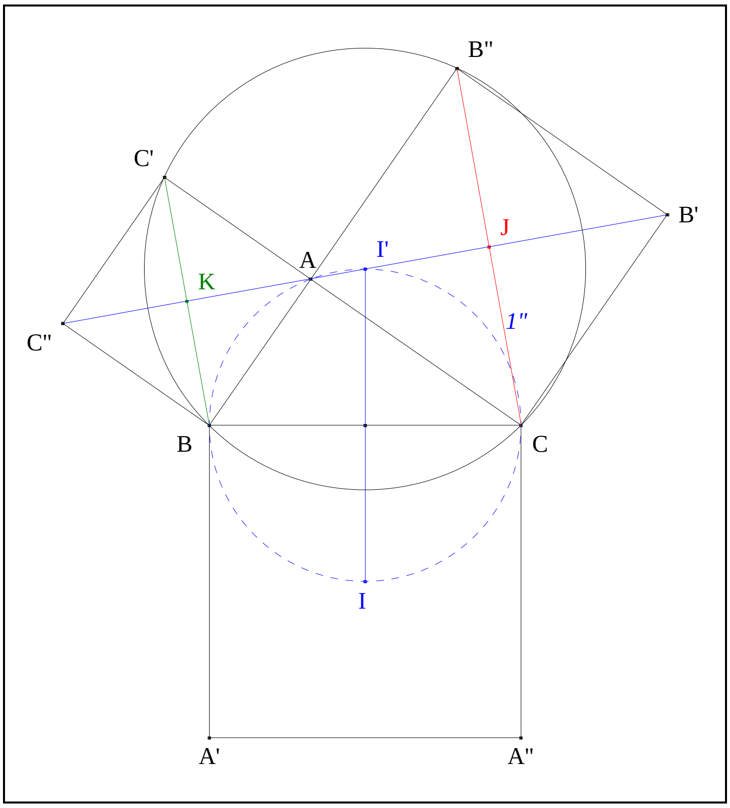


- D'après Thalès, * le point d'intersection de (A"I') et (BC) est le point médian du triangle A"B'C'
  * le point d'intersection de (A'I') et (BC) est le point médian du triangle A'B'C'.

- **Conclusion :** ces deux points d'intersection divise [BC] en trois parties égales. [75]

Énoncé traditionnel : les points médians des triangles A'B'C' et A"B'C' divise [BC] en trois parties égales.

(18) Cas particulier où ABC est A-rectangle



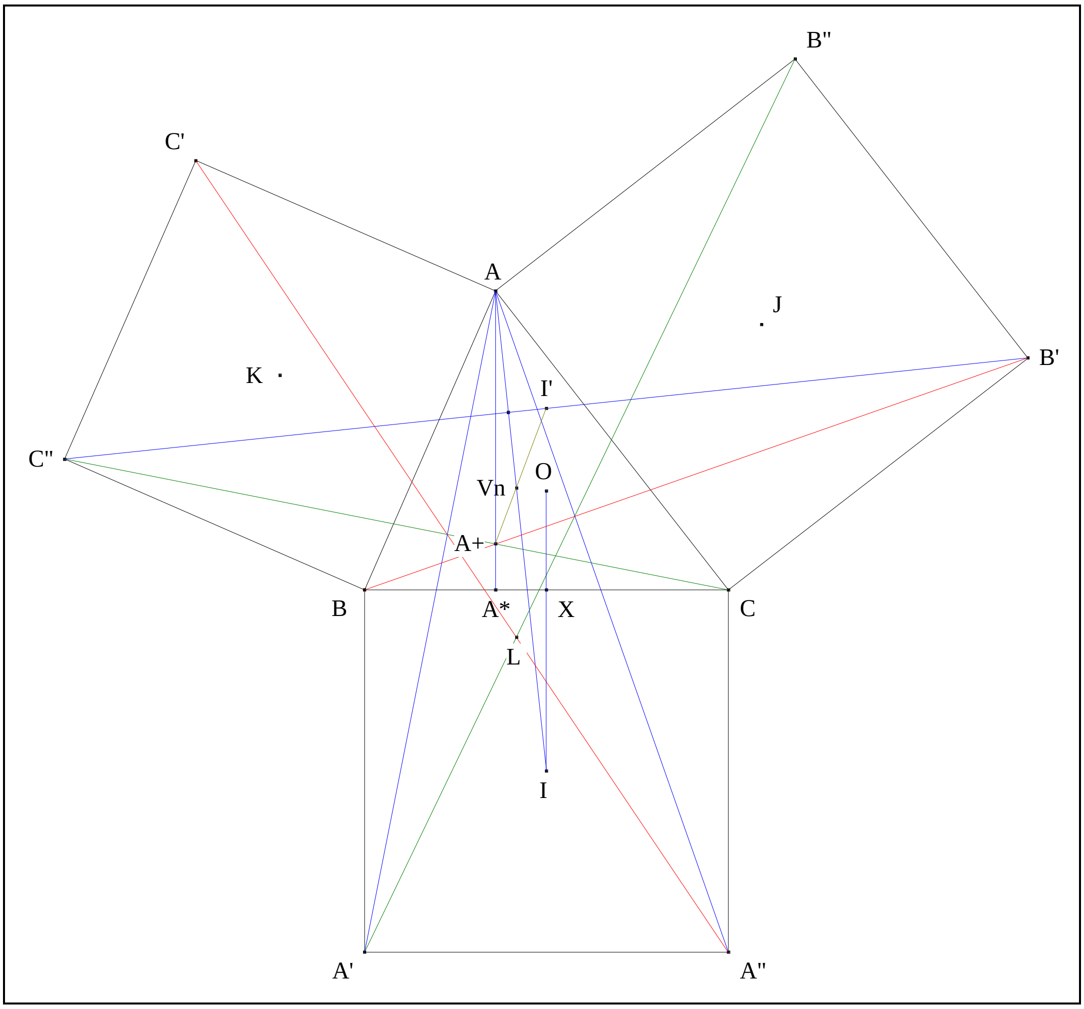
[75] van Aubel, *Mathesis* (1880) n° 41 ;
solution : van Aubel, *Mathesis* (1881) p. 163.

- **Conclusion :** C, B" et C' sont sur le cercle de centre I' passant par B.

5. Un résultat de l'auteur

VISION

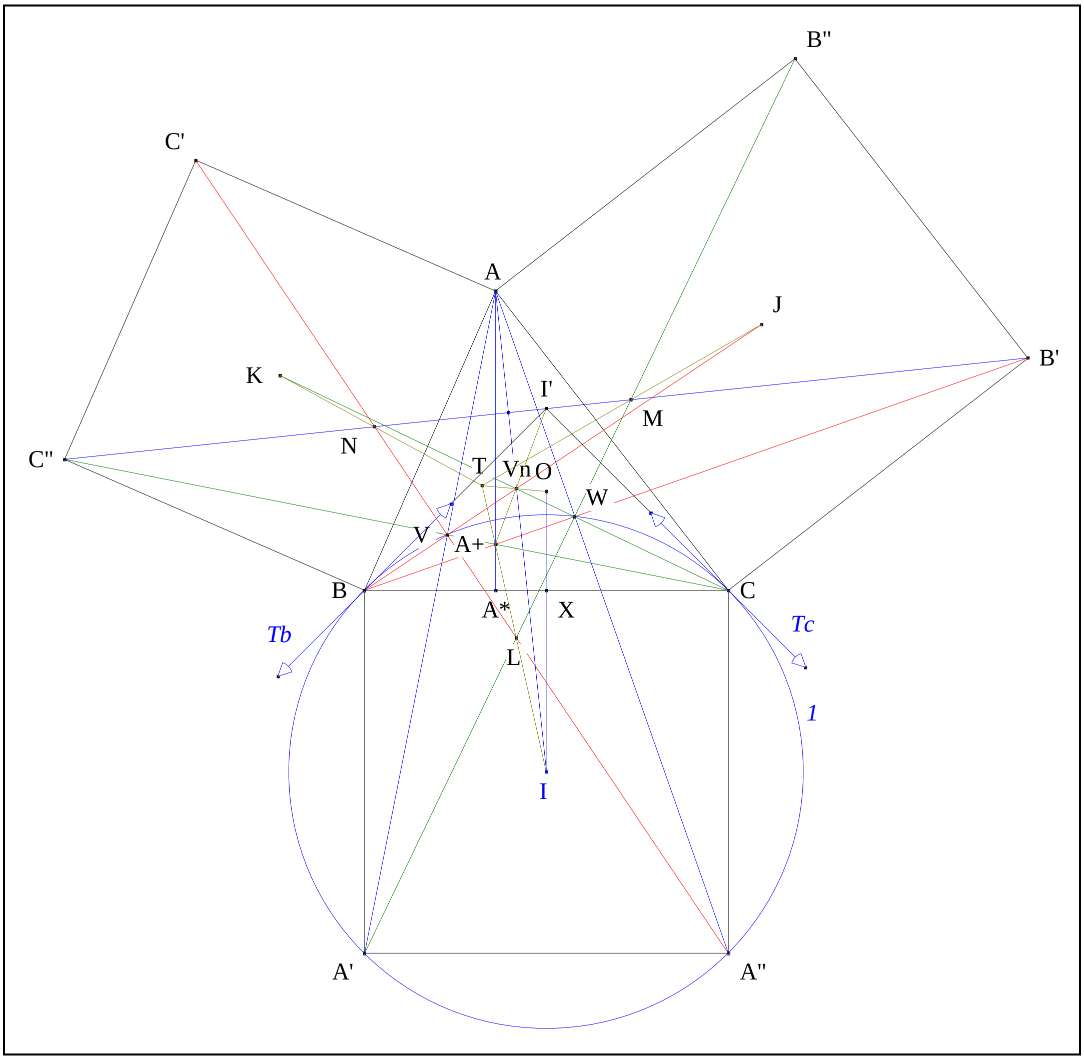
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donnés : I', Vn et A+ sont alignés.

VISUALISATION



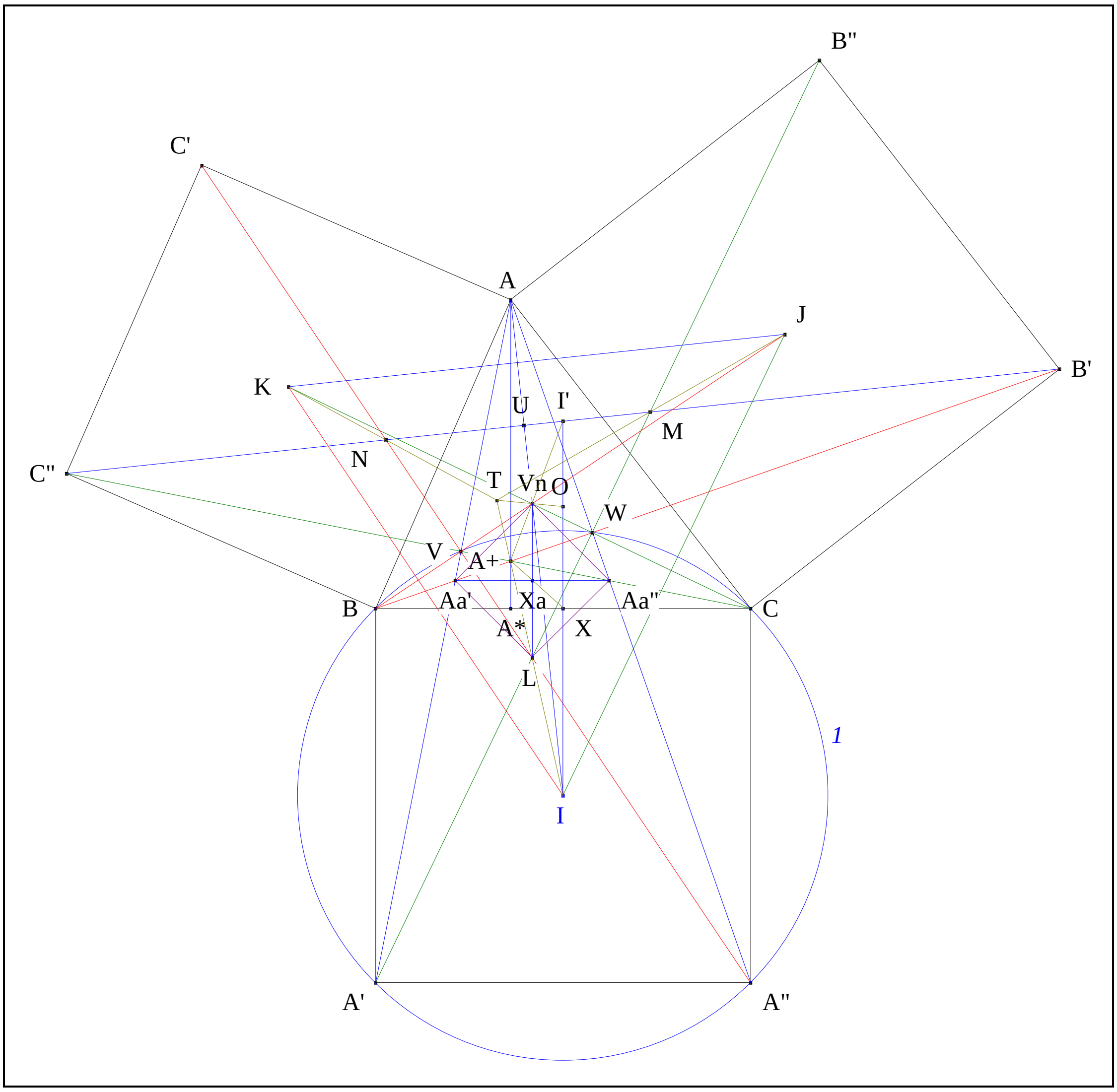
- Notons Tb, Tc les tangentes resp. à *1* en B, C.

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" (Cf. Annexe 6), (I'VnA+) est la pascale de l'hexagone Tb BVC Tc WB.

- **Conclusion :** I', Vn et A+ sont alignés.

Scolies : **(1)** une médiatrice [76]

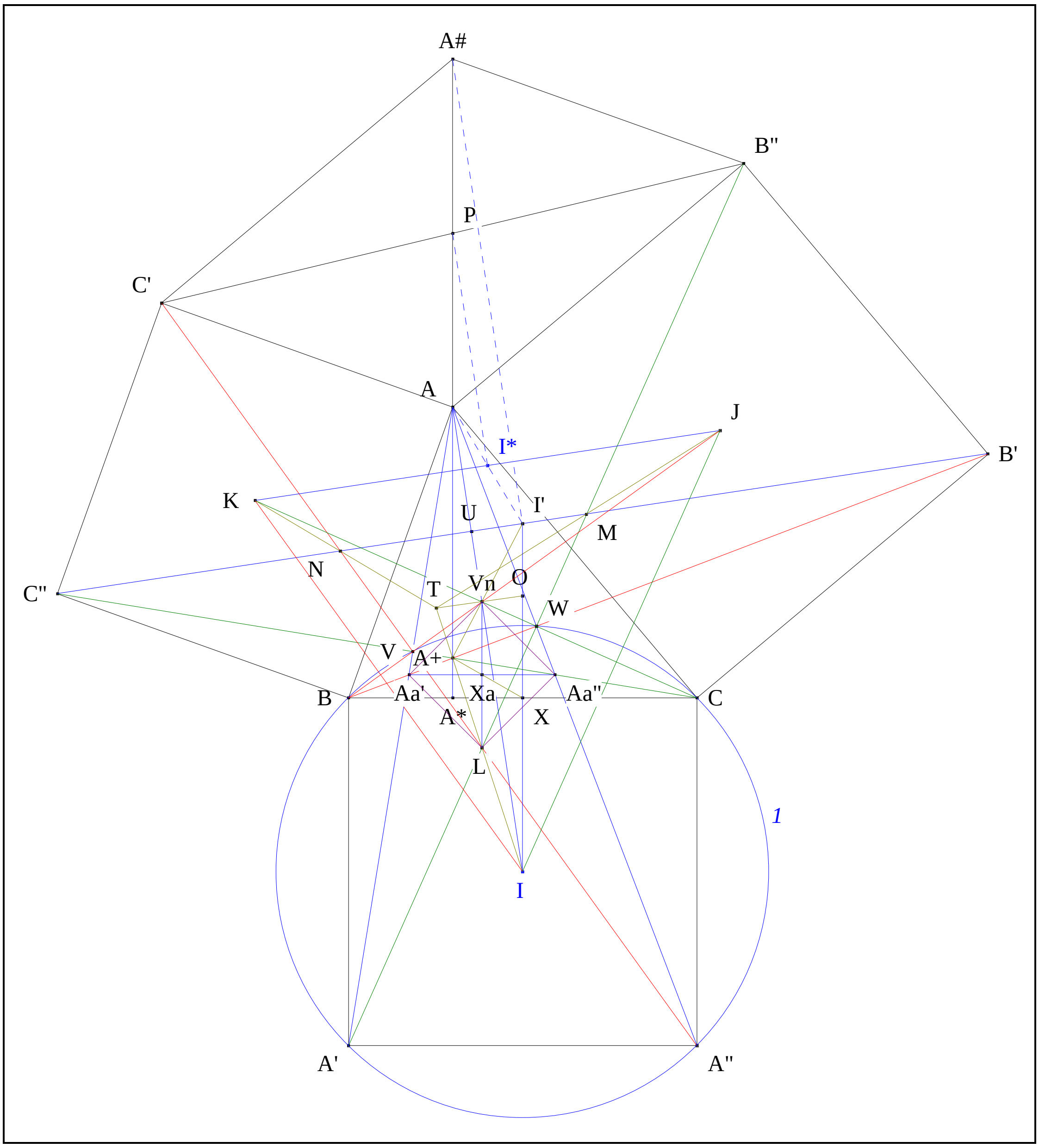
[76] Ce résultat a été déjà vu en IV. 3. Un résultat de l'auteur, scolie 5.



- Notons Xa le milieu de [Aa'Aa"].
- Les triangles A+Aa'Aa" et A+BC étant homothétiques, A+, Xa et X sont alignés
- D'après IV. 3. Un résultat de l'auteur, scolie 4, (Aa"L) // (IC) et (Aa'L) // (IB) ;
  en conséquence, (Aa"L) ⊥ (Aa'L).
- Les triangles XaLAa" et XIC sont homothétiques de centre A+.
- D'après "Le petit théorème de Desargues" (Cf. Annexe 9), (XaL) // (IX) ;
  en conséquence, (XaL) passe par Vn et (LXaVn) ⊥ (Aa'Aa").
- Les triangles A+II' et A+LVn sont homothétiques de centre A+ ;
  X étant le milieu de [II'], Xa est le milieu de [LVn].
- **Conclusion :** Aa'LAa"Vn est un carré de centre Xa.

(2) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

6. Figure récapitulant les notations à partir de A

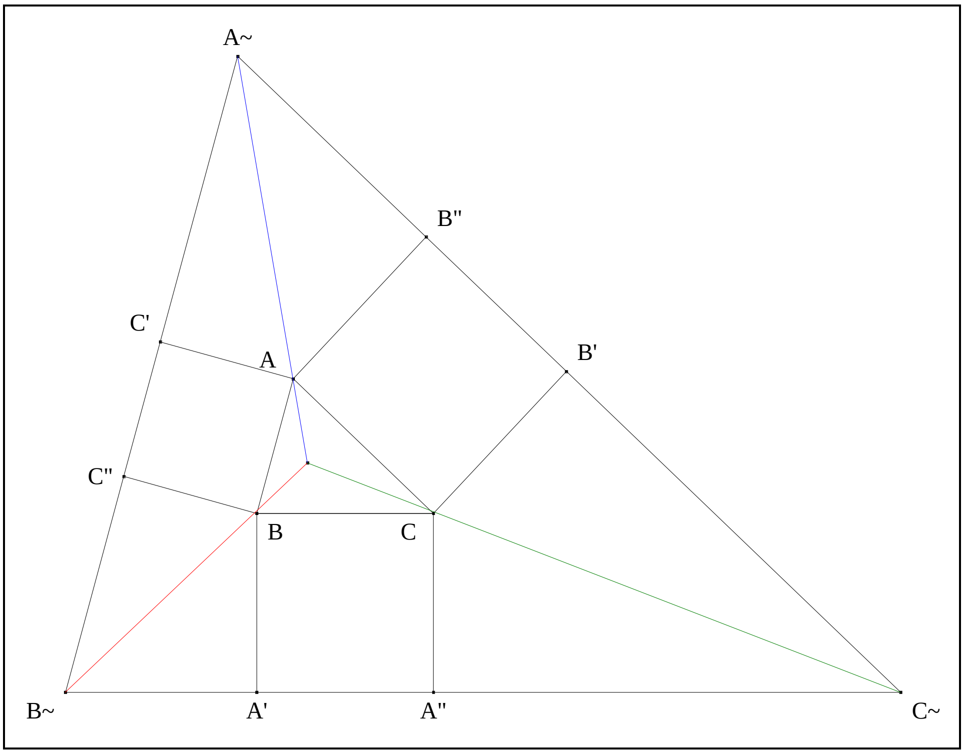


VII. DEUX TRIANGLES REMARQUABLES

1. Le triangle de Grebe de ABC

VISION

Figure :

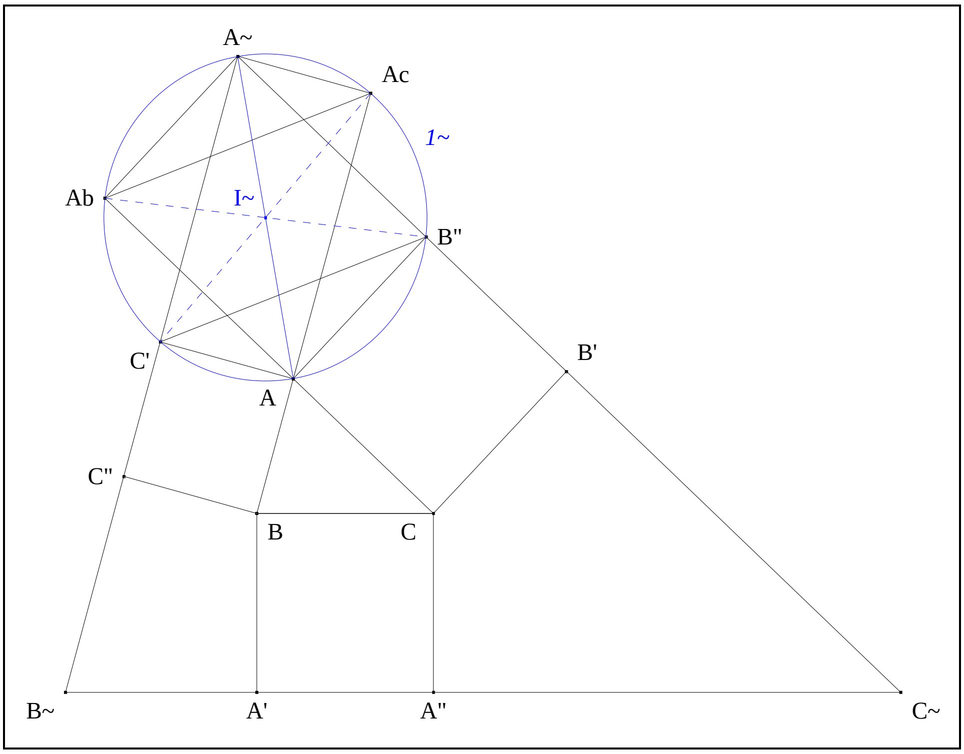


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
et A~, B~, C~ les points d'intersection resp. de (B'B") et (C'C"), (C'C") et (A'A"), (A'A") et (B'B").

Donné : (AA~), (BB~) et (CC~) sont concourantes [77].

VISUALISATION

[77] Grebe E. W., Das geradlinige Dreieck in Bezug auf die Quadrate der Perpendikel, die man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten Fallen kann, *Grünerts Archiv* 9 (1847).

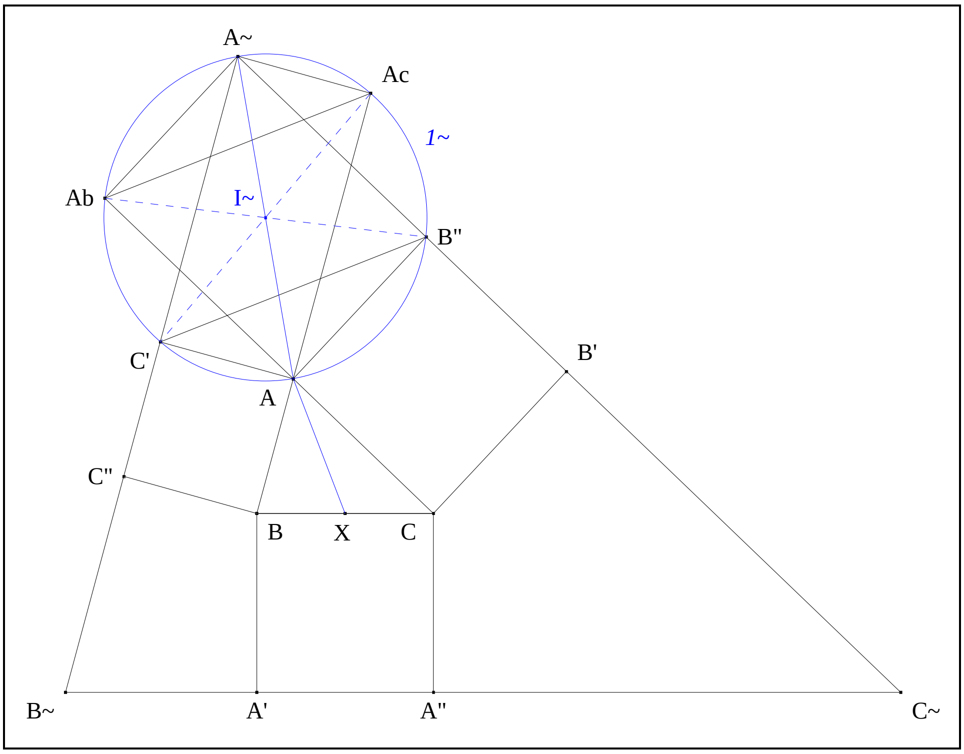


- D'après Thalès " Triangle inscriptible dans un demi cercle", le quadrilatère AB"A~C' est cyclique.

- Notons *1*~ ce cercle
  I~ le centre de *1*~ i.e. le milieu de [AA~],
  et Ab, Ac les seconds points d'intersection resp. de (AC), (AB) avec *1*~.

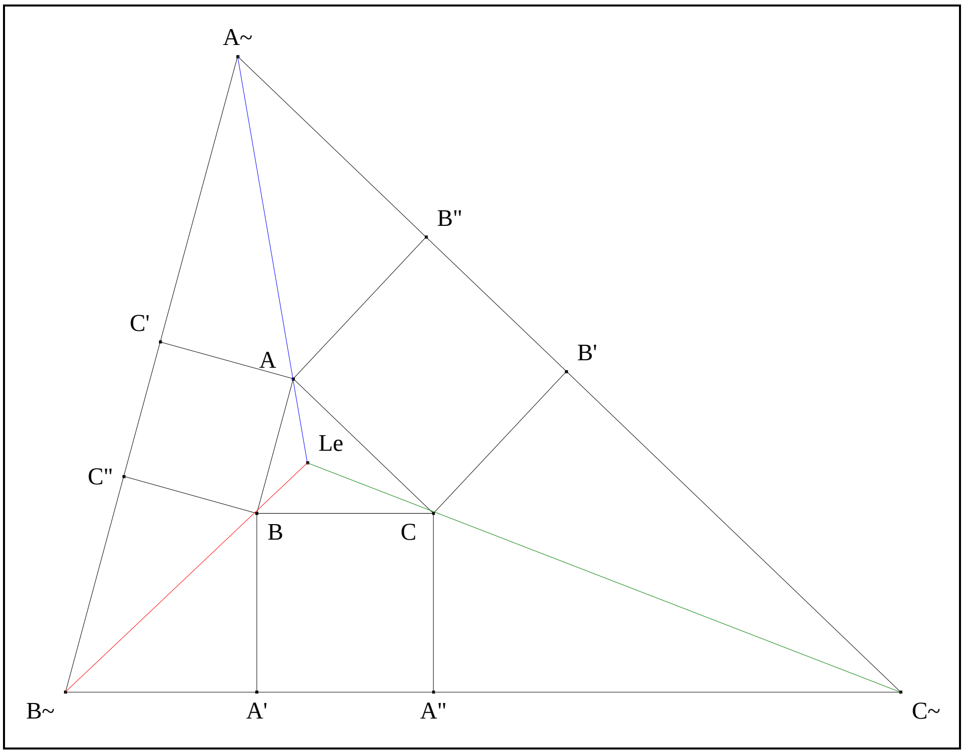
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  les triangles AbAA~ et AcAA~ sont resp. rectangles en Ab, Ac.

- Les rectangles AB"A~Ab et AAcA~C' étant inscriptibles dans *1*~ et ayant la diagonale (AI~A~) en commun,
  les diagonales (B"Ab) et (C'Ac) sont deux droites diamétrales de *1*~ ;
  en conséquence, (AbAc) // (B"C').



- D'après V. 1. D'une hauteur à une médiane, (B"C') ⊥ (AX) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AbAc) ⊥ (AX).

- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 12), (AA~) est la A-symédiane de ABC.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BB~) est la B-symédiane de ABC
  (CC~) est la C-symédianes de ABC.

- **Conclusion :** d'après Lemoine "Le point de Lemoine" (Cf. Annexe 13), (AA~), (BB~) et (CC~) sont concourantes.

- Notons Le ce point de concours.

Note historique : c'est par ce tracé "accidentel" datant de 1847 qu'Ernst Wilhem Grebe (1804-1874) a découvert cette "concourance" qui avait été rencontrée auparavant par Simon LHuilier et Karl Friedrich Gauss. Elle a été aussi redécouverte par Hossard et E. Hain[78]. Les propriétés de ce point de concours ont été mises en relief par Émile Lemoine[79].
Ce point de concours a été appelé "point de Grebe de ABC" en Allemagne par le Dr. Schemmel de Berlin en 1876, les professeurs Paul Mansion de Gand et E. Lampe de Berlin en 1881 et le Dr. J. Lange de Berlin en 1885.
Suite à Joseph Neuberg, il est connu sous le nom de "point de Lemoine de ABC" et est répertorié par X_6 chez ETC.

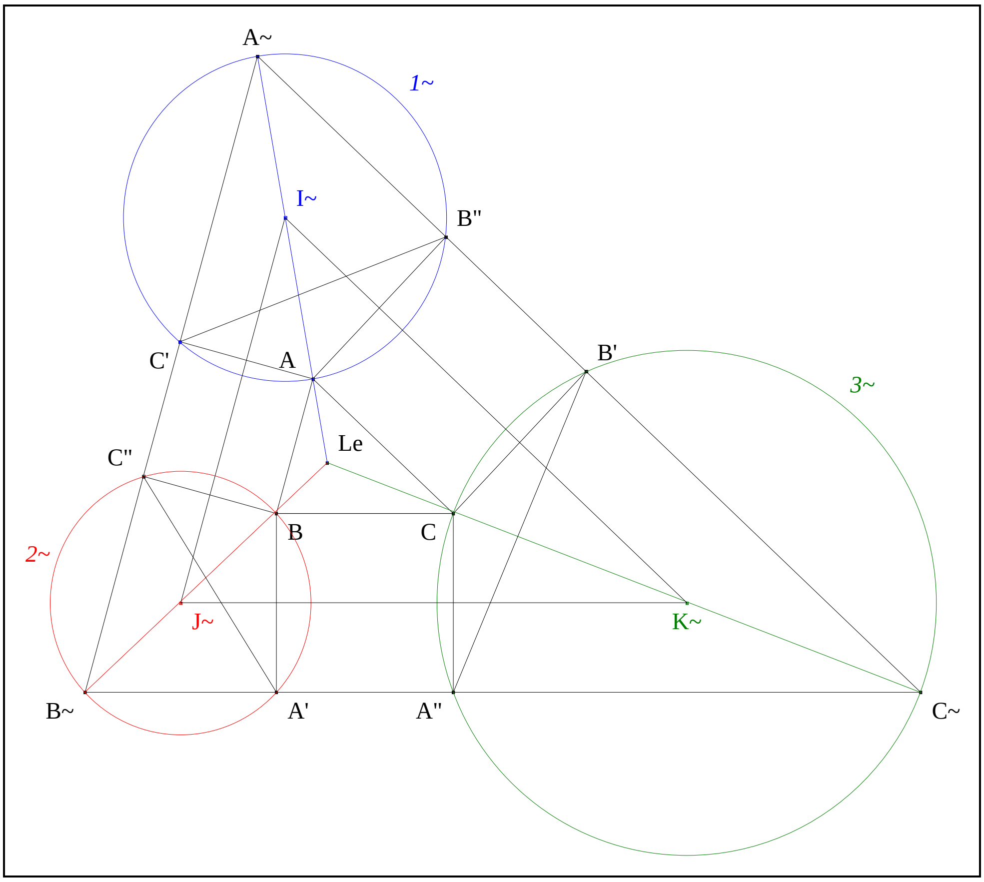
Énoncé traditionnel : des carrés étant construits sur les trois côtés d'un triangle ABC, soit A'B'C' le triangle formé par les côtés de ces carrés, parallèles à ceux du triangle, les droites AA', BB', CC' concourent en un même point.

Scolies : **(1)** A~B~C~ est "le triangle de Grebe de ABC" ;
Le est "le point de Grebe-Lemoine de ABC".

(2) I~ est le centre du cercle circonscrit du A-flanc AB"C' de ABC.

(3) Vision triangulaire

78 Hain E., Ueber den Grebeschen Punkt, *Archiv der Mathematik und Physik* **58** (1876) 84-89.
79 *Nouvelle Correspondance*, n° 268 ;
solution : *Nouvelle Correspondance* (1977) 400 ; (1980) 214, 365.

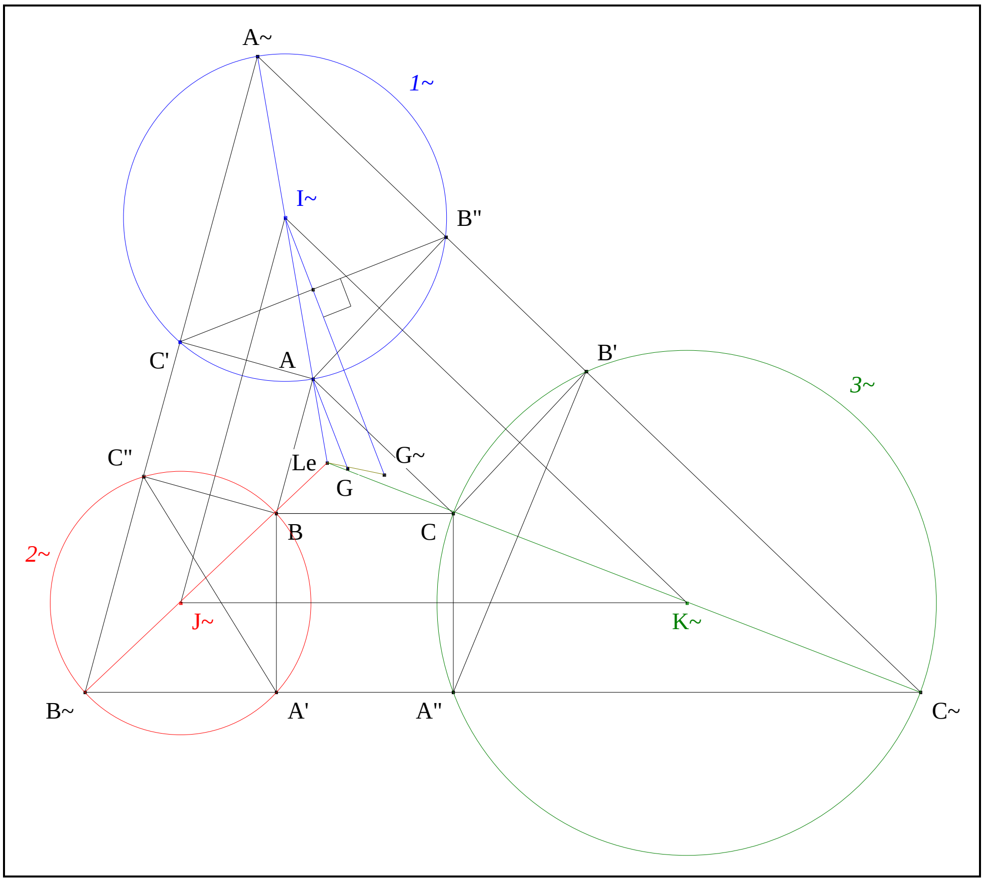


- Notons J~, K~ les centres des cercles circonscrits des B, C-flanc de ABC.
- D'après le théorème de Thalès appliqué à la bande frontières (BC) et (B~C~), (J~K~) // (BC).
- Mutatis mutandis, nous montrerions que (K~I~) // (CA)
  (I~J~) // (AB).
- **Conclusion :** les triangles homothétiques I~J~K~ et ABC sont en perspective de centre Le.

(4) Un résultat de Darij Grinberg [80]

---

80 Grinberg D., Squares and perpendicular bissectors, Message *Hyacinthos* # 7238 du 06/06/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7238.
Germany 1996 for squares erected on sides of triangle ;
Kiran Kedlaya's "Geometry Unbound" (problem 2 for section 5.3), *Mathlinks* du 07/01/2005 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=1417126920&t=22917.



- Notons G, G~ les points médians resp. de ABC, I~J~K~.

- ABC et I~,J~K~ étant homothétiques, (I~G~) // (AG) ;
  d'après V. 1. D'une médiane à une hauteur, (AG) ⊥ (B"C') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (I~G~) ⊥ (B"C').

- **Conclusion partielle :** (I~G~) est la médiatrice de [B"C'].

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (J~G~) est la médiatrice de [C"A']
  (K~G~) est la médiatrice de [A"B'].

- **Conclusion :** les médiatrices de [B"C'], [C"A'] et [A"B'] sont concourantes en G~.

Scolies : * G~ est répertorié sous X_{591} chez ETC.

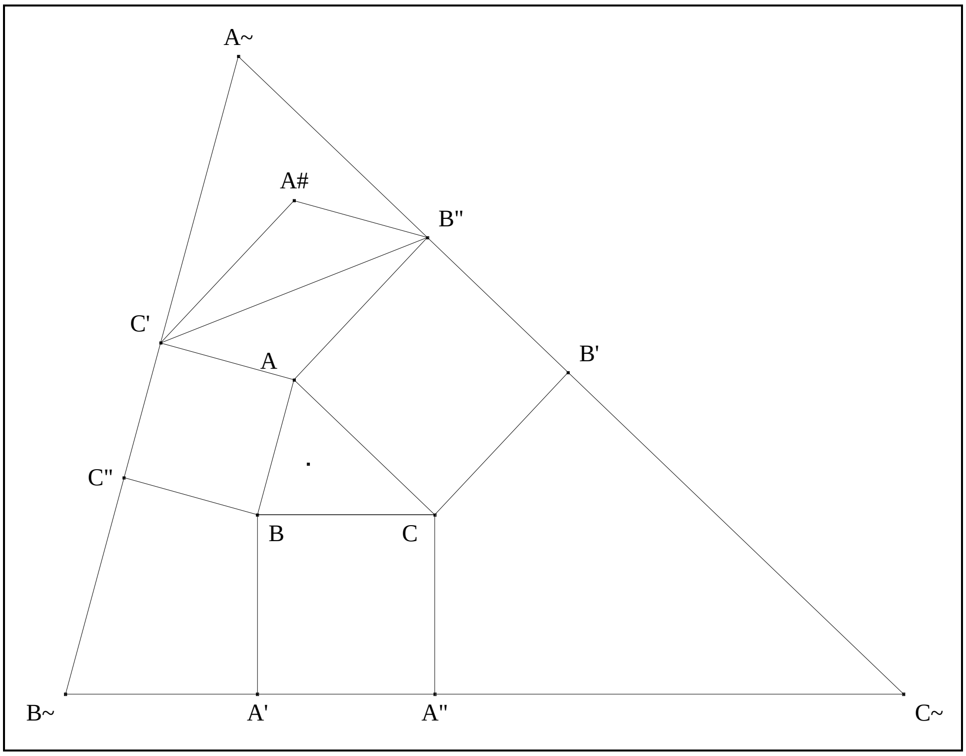
* Le étant le centre d'homothétie de ABC et I~J~K~, Le, G et G~sont alignés.

(5) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

2. Nature géométrique de A#

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : A# est l'orthocentre du triangle A~B"C'.

VISUALISATION

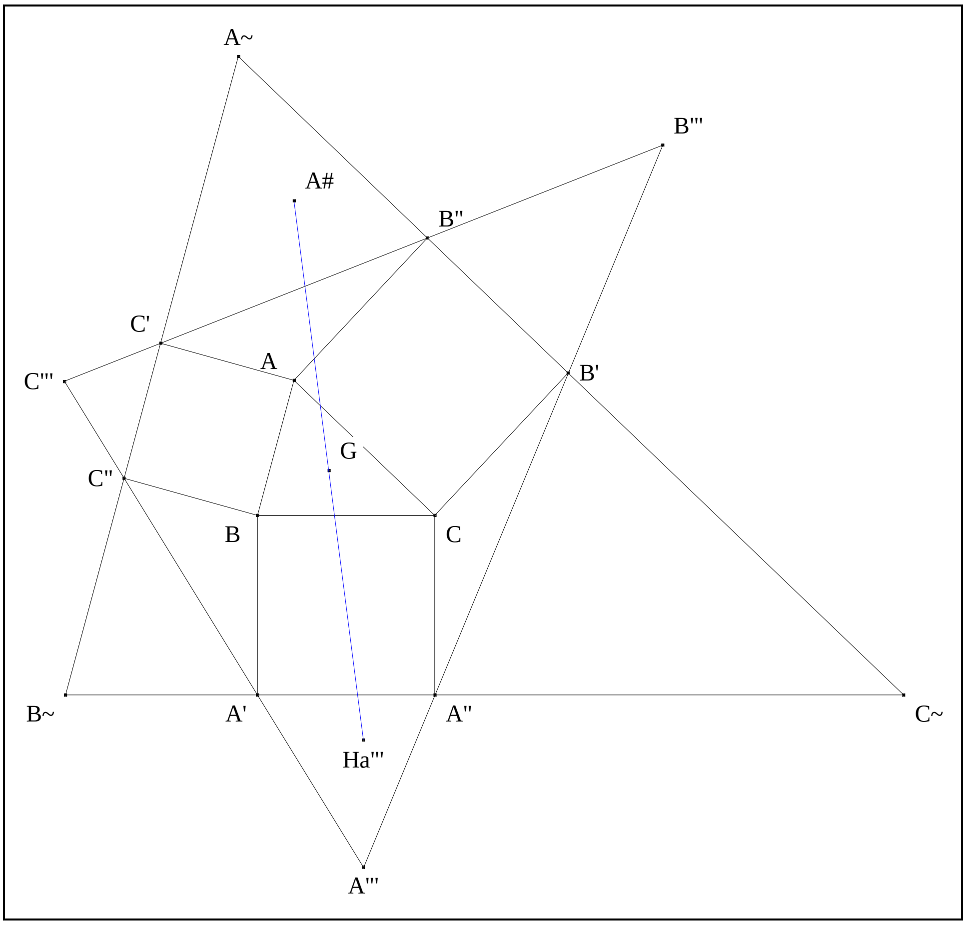
- Le quadrilatère AB"A#C' est un rectangle.
- Nous avons : (B"A#) ⊥ (A~C') et (C'A#) ⊥ (A~B").
- **Conclusion :** A# est l'orthocentre du triangle A~B"C'.

Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

3. Un autre triangle ou le triangle A"'B"'C"'

VISION

Figure :

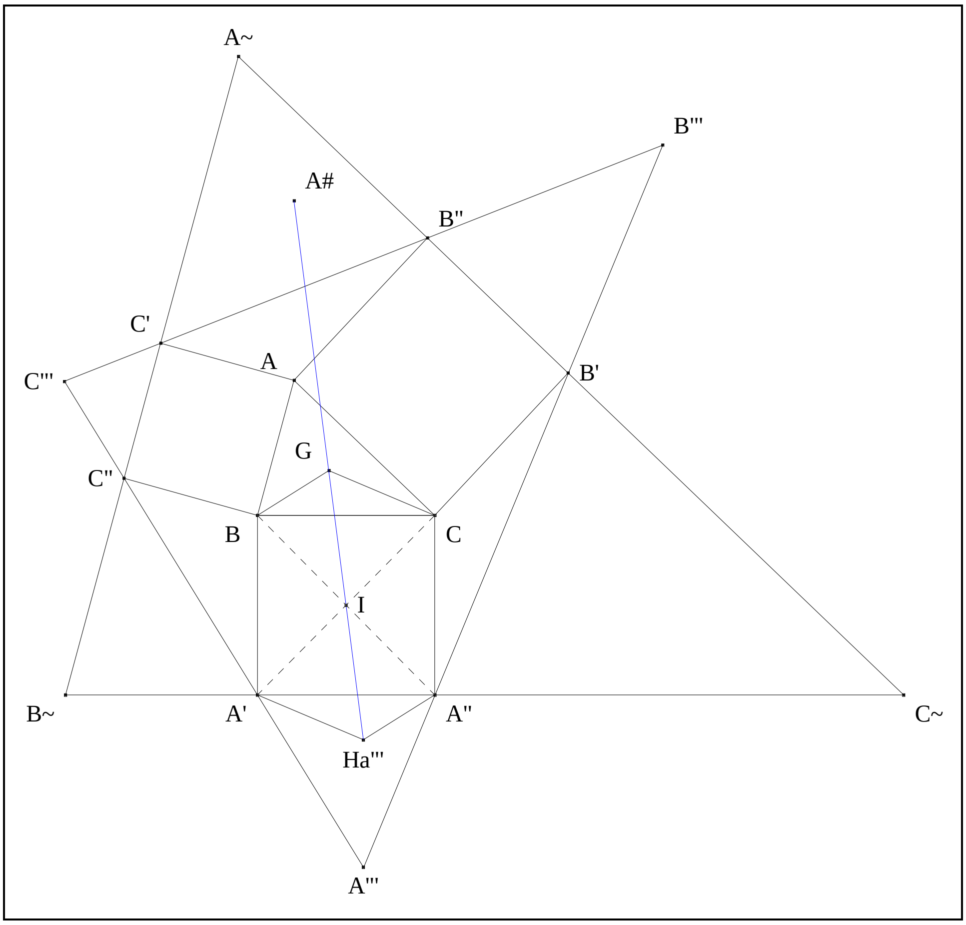


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
A''', B''', C''' les points d'intersection resp. de (C"A') et (A"B'), de (A"B') et (B"C'), de (B"C') et (C"A'),
et Ha''' les orthocentres resp. des triangles A~C'B", A'''A"A'.

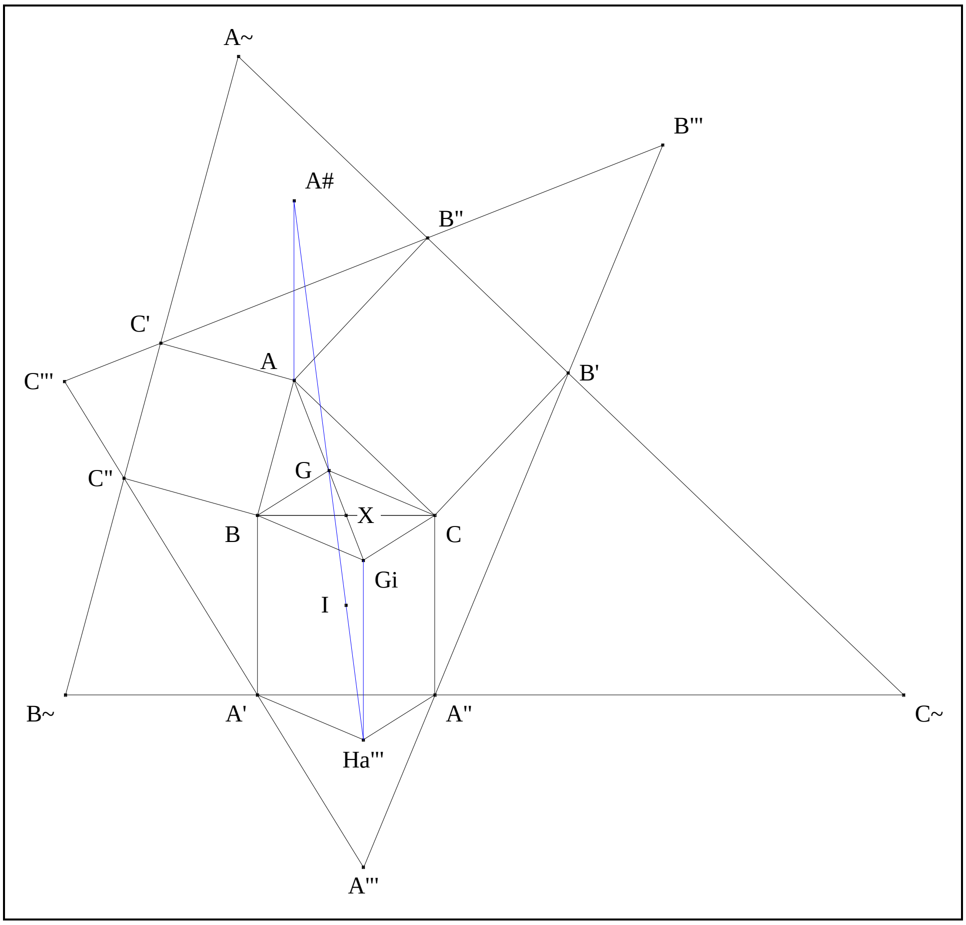
Donné : G est le milieu de [A# Ha''']. [81]

VISUALISATION

[81] Aubel (van), *Mathesis* (1881) 168, n° 72 ; *Nouvelle Correspondance* IV (1878) 40.
Solution : Lambert A., *Mathesis* IV (1886) 39.

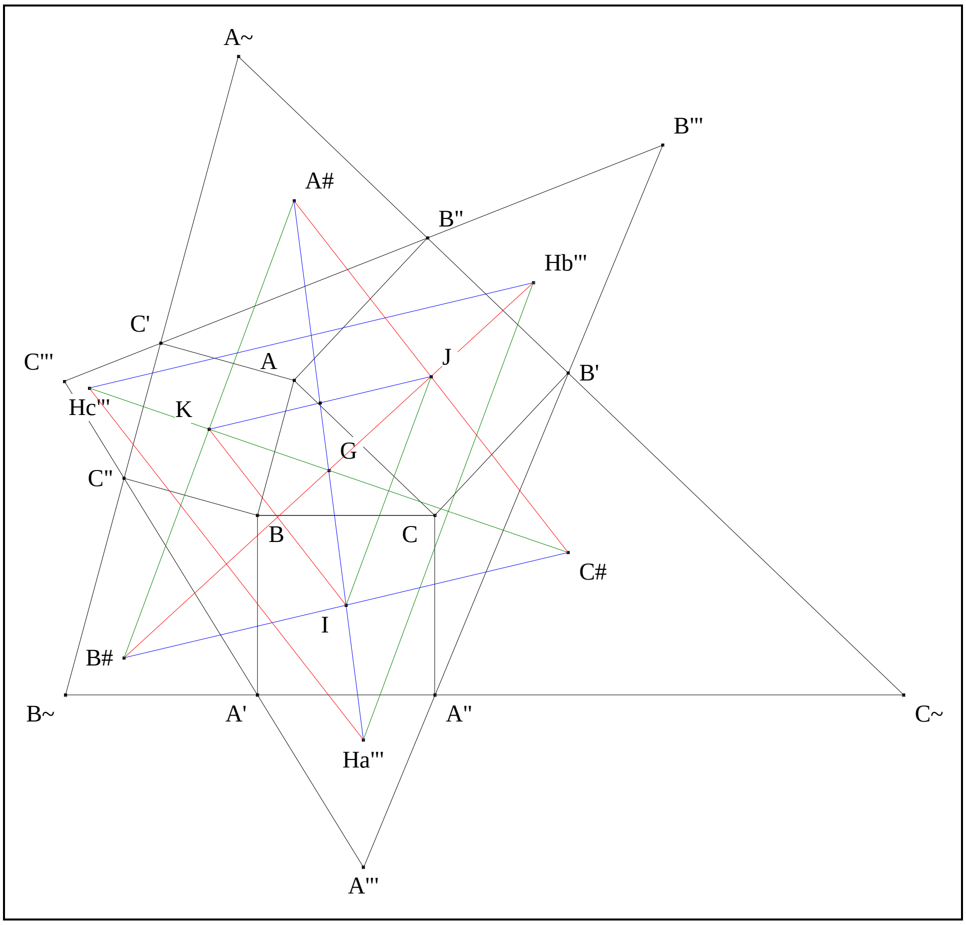


- D'après VII. 2. Nature géométrique de A#, A# est l'orthocentre de A~B"C'.
- D'après "Le petit théorème de Desargues" appliqué aux triangles homothétiques GBC et Ha'''A"A', (GHa''') passe par I i.e. G, I et Ha''' sont alignés.
- **Scolie :** I est le milieu de [GHa'''].
- D'après VI. 4. Un résultat de Bottema, A#, G et I sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, A#, G et Ha''' sont alignés.



- Notons Gi le symétrique de G par rapport à X.
- Nous savons que G est le milieu de [AGi].
- D'après "Le petit théorème de Desargues" (Cf. Annexe 9) appliqué aux triangles homothétiques GiCB et Ha'''A''A',
  (1) (GiHa''') // (BA')
  (2) GiHa''' = AA#.
- Le quadrilatère A#AHa'''Gi ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme.
- **Conclusion :** G est le milieu de [A# Ha'''].

Scolies : **(1)** quatre triangles comédians



- Notons Hb''', Hc''' les orthocentres resp. des triangles B'''B"B', C'''C"C'.

- D'après IV. 3. Le résultat de Neuberg, I est le milieu de [B#C#] ;
  en conséquence, (A#G) est la A#-médiane de A#B#C#.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** (B#G) est la B#-médiane de A#B#C#
  (2) (C#G) est la C#-médiane de A#B#C#.

- **Conclusion partielle :** G est le point médian de A#B#C#.

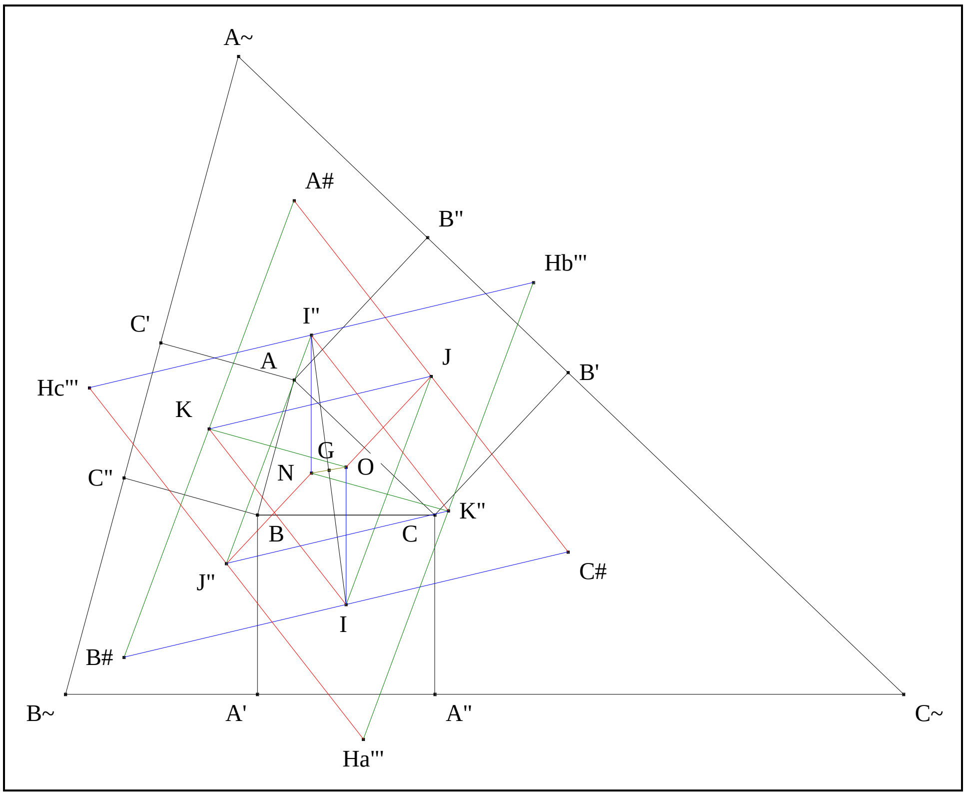
- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** G est le milieu de [B# Hb''']
  (2) G est le milieu de [C# Hc'''].

- Ha'''Hb'''Hc''', A#B#C# et IJK étant homothétiques de centre G, G est le point médian de Ha'''Hb'''Hc'''.

- A#B#C# et IJK étant homothétiques de centre G, G est le point médian de IJK.

- **Conclusion :** ABC, IJK, A#B#C# et Ha'''Hb'''Hc''' sont comédians.

(2) Trois droites concourantes



- Notons I", J", K" les milieux resp. de [Hb'''Hc'''], [Hc'''Ha'''], [Ha'''Hb''']
  et N le symétrique de O par rapport à G.

- Nous savons que A#B#C# et Ha'''Hb'''Hc''' sont homothétiques de centre G et de rapport -1 ;
  en conséquence, IJK et I"J"K" sont homothétiques de centre G et de rapport -1.

- O est le centre d'orthologie de IJK par rapport à ABC.

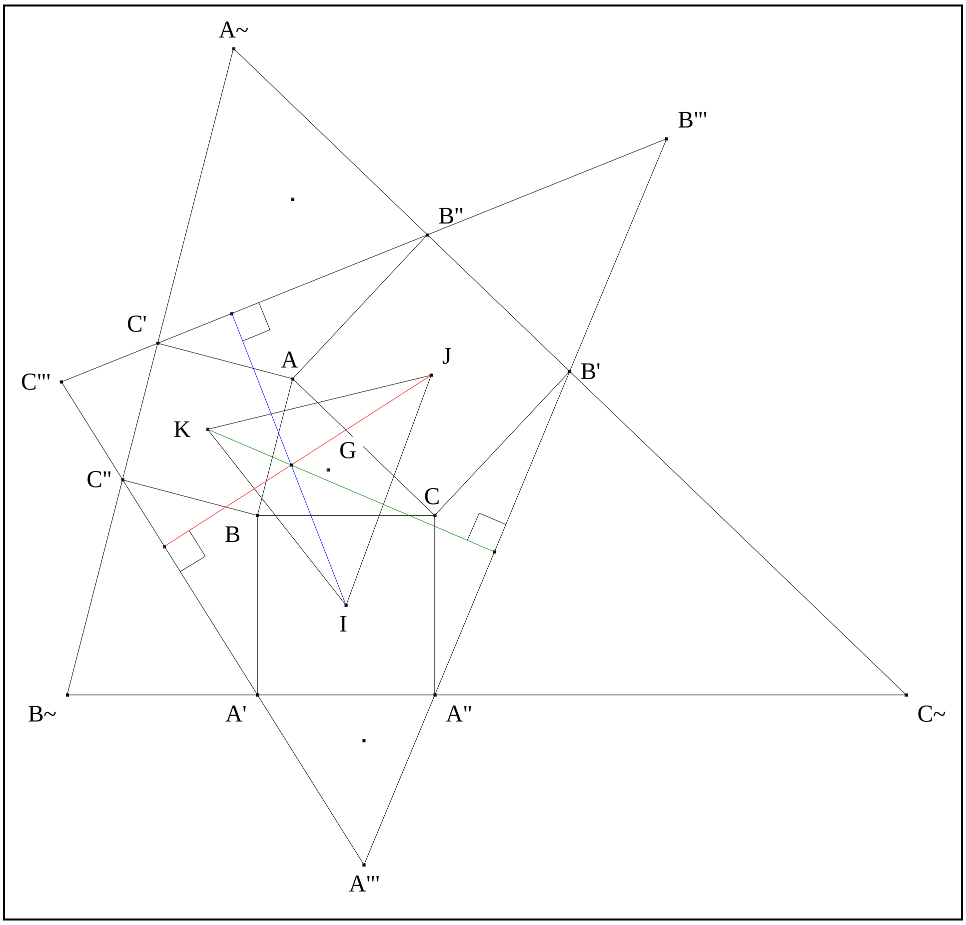
- **Conclusion :** par symétrie de centre G,
  les parallèles resp. à (IO), (JO), (KO) passant resp. par I", J", K" sont concourantes en N.

(3) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

4. Les triangles IJK et A"'B"'C"'

VISION

Figure :



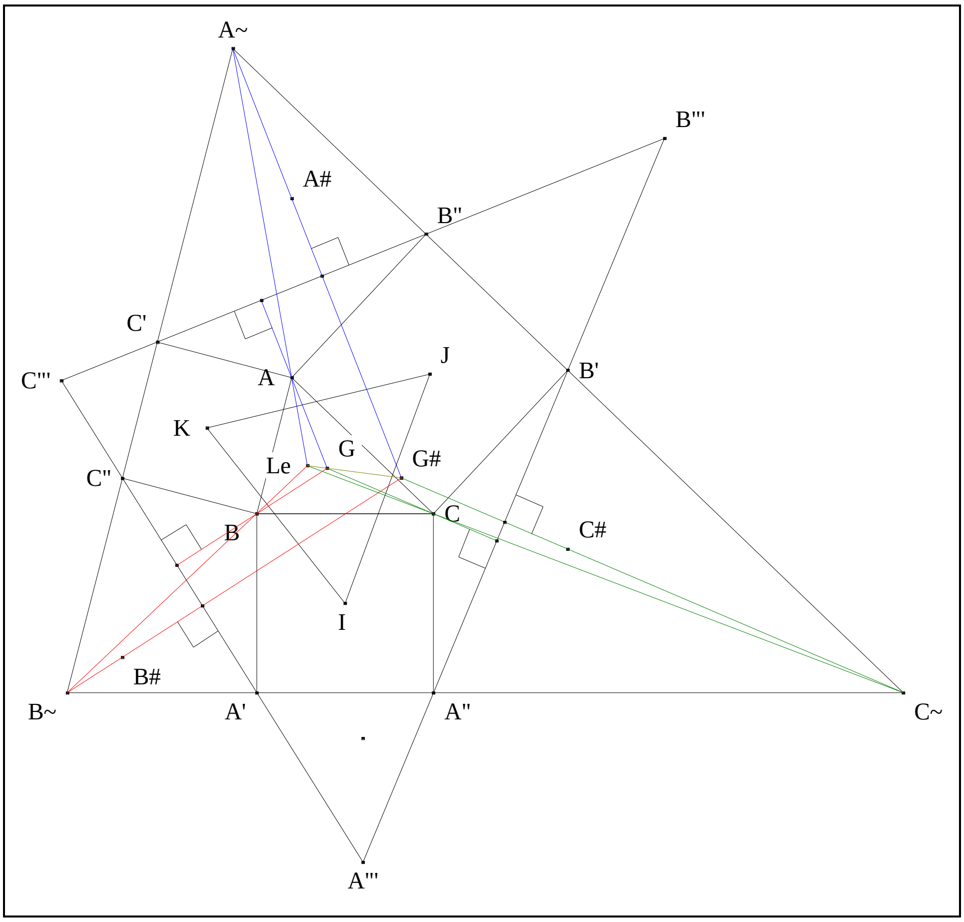
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : IJK et A'''B'''C''' sont orthologiques.[82]

VISUALISATION

---

[82] With the Vecten's points, *Mathlinks* du 26/03/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=266978.



- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 12),

  (1) (A~A#) est la A~-isogonale de (A~ALe) relativement à A~B~C~
  (2) (B~B#) est la B~-isogonale de (B~BLe) relativement à A~B~C~
  (3) (C~C#) est la C~-isogonale de (C~CLe) relativement à A~B~C~.

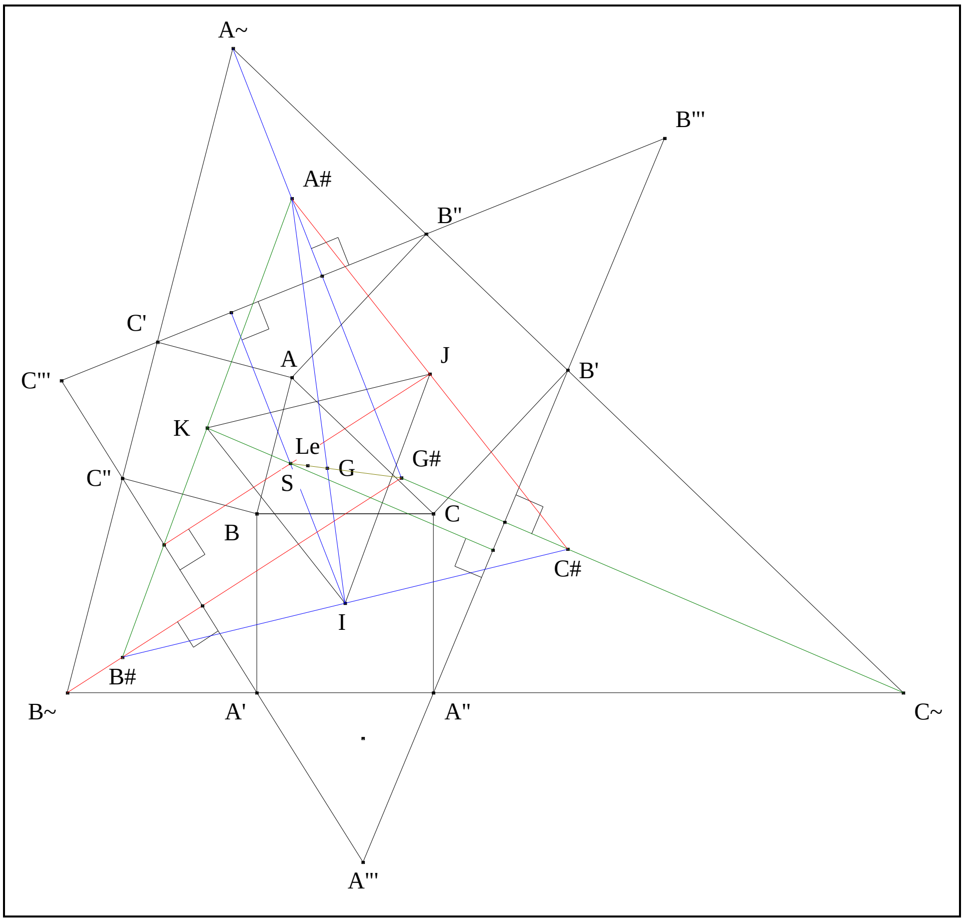
- D'après Mathieu "The isogonal theorem" (Cf. Annexe 14),
  (A~A#), (B~B#) et (C~C#) sont concourantes.

- Notons G# ce point de concours.

- Nous avons : (A~A#) // (AG) , (B~B#) // (BG) , (C~C#) // (CG).

- ABC et A~B~C~ étant homothétiques de centre Le, G# est le point médian de A~B~C~.

- **Conclusion partielle :** Le, G et G# sont alignés.



- A#B#C# et IJK sont homothétiques de centre G ;
  en conséquence, les parallèles à (A#S#), (B#S#), (C#S#) passant resp. par I, J, K sont concourantes.

- Notons S ce point de concours.

- **Scolies :** **(1)** S, G et G# sont alignés
  (2) d'après l'axiome d'incidence Ia, Le, S, G et G# sont alignés.

- **Conclusion :** IJK et A'''B'''C''' ont orthologiques.

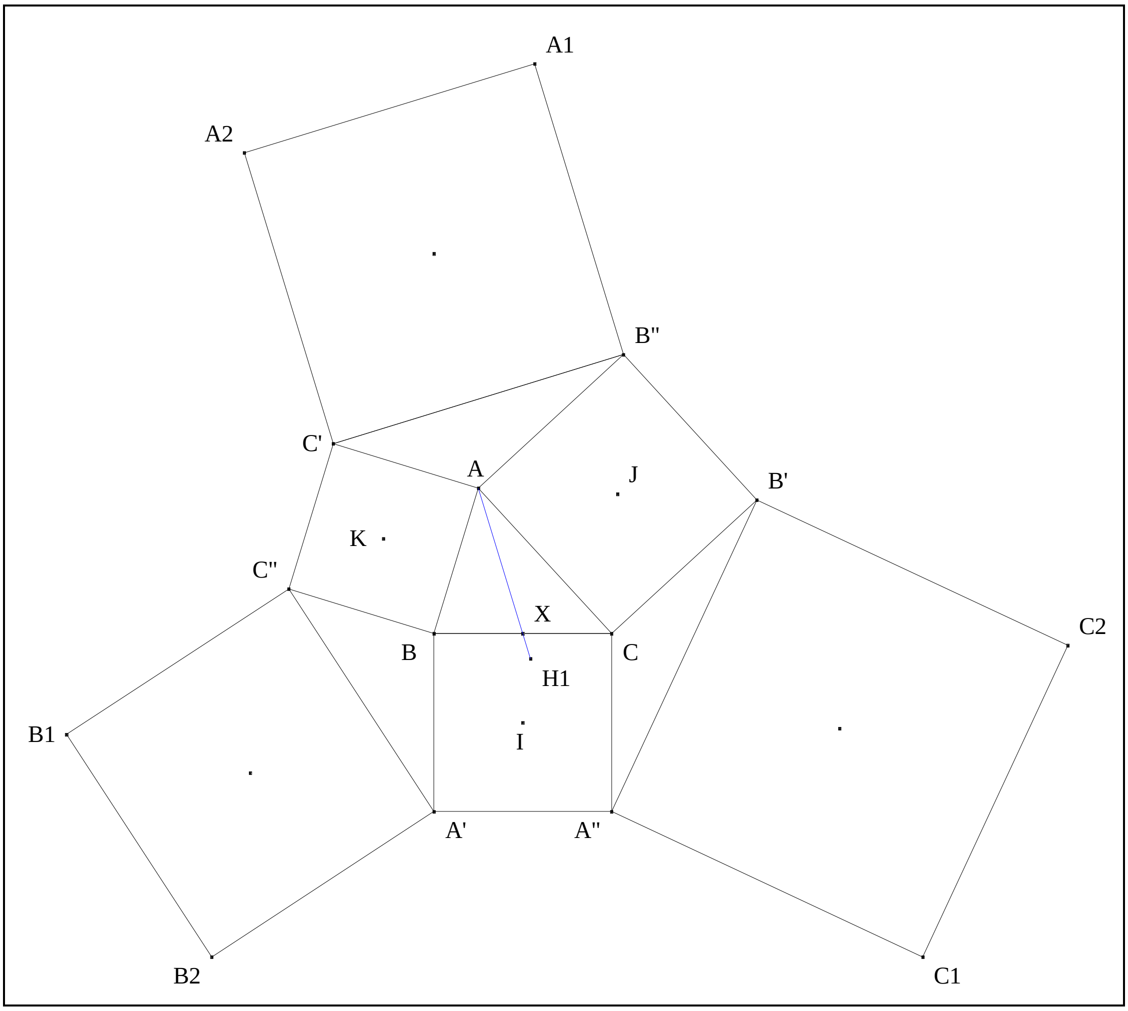
Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

VIII. LA FIGURE VECTEN BORDÉ DE CARRÉS

1. D'une médiane à une hauteur

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment
et H1 l'orthocentre de AB"C'.

Donné : (AH1) passe par X.

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après V. 1. D'une hauteur à une médiane" appliqué à AB"C', (AH1) passe par X.

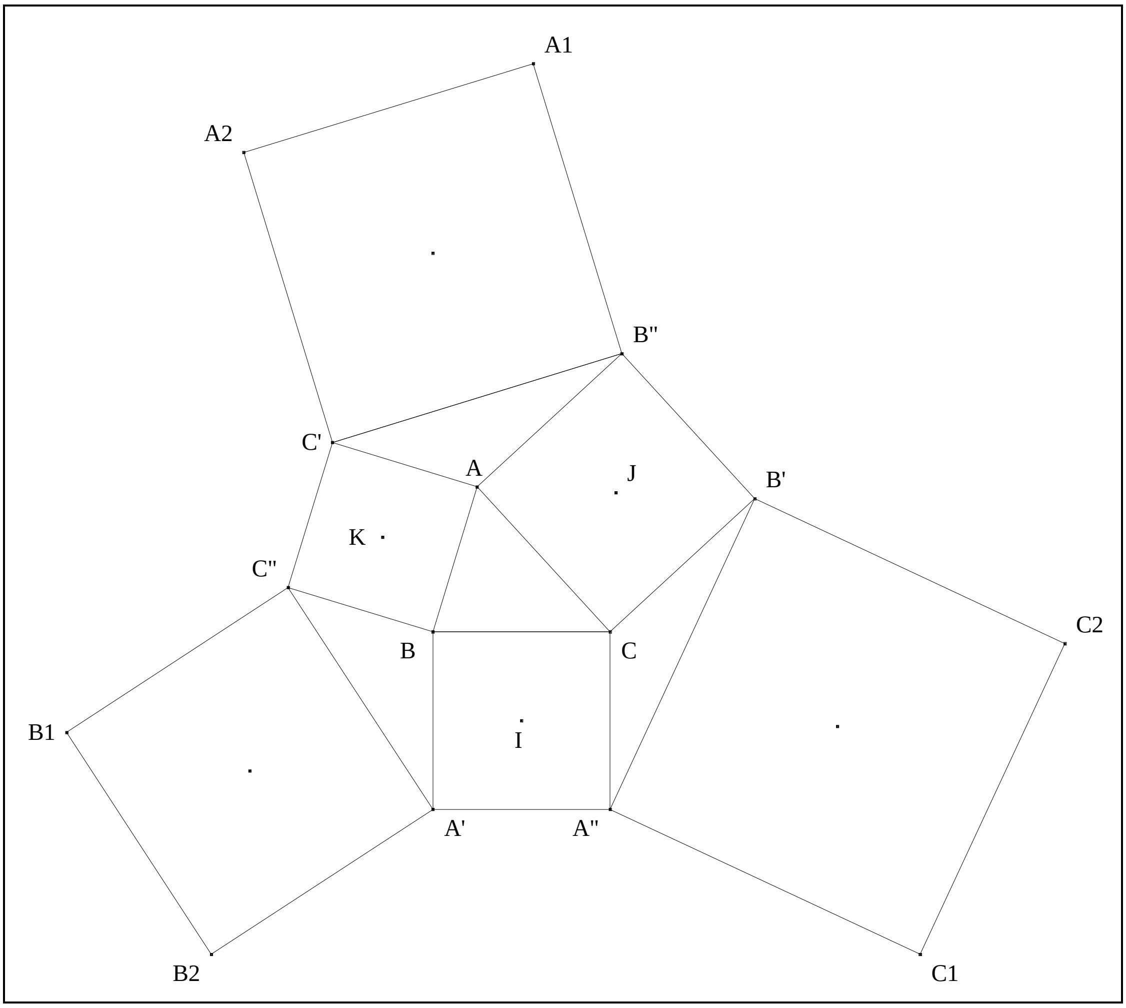
Énoncé traditionnel : la hauteur du triangle en haut est la médiane du triangle en bas.

Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

2. La proposition 6 de Vecten

VISION

Figure :



Traits : les notations sont les mêmes que précédemment
et B"A1A2C', C"B1B2, A"C1C2B' trois carrés resp. extérieurs à la figure de Vecten.

Donné : $B''C'^2 + C''A'^2 + A''B'^2 = 3.(BC^2 + CA^2 + AB^2)$.[83]

VISUALISATION

- D'après al-Kaschi (Cf. Annexe 15), $B''C'^2 = AB''^2 + AC'^2 - 2.AB''.AC'.\cos \angle B''AC'$
  ou encore $B''C'^2 = AC^2 + AB^2 + 2.AC.AB.\cos \angle BAC$.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que $C''A'^2 = BA^2 + BC^2 + 2.BA.BC.\cos \angle CBA$
  $A''B'^2 = CB^2 + CA^2 + 2.CB.CA.\cos \angle ACB$.

- Nous avons : $AC.AB.\cos \angle BAC + BA.BC.\cos \angle CBA = AB.\ (CA.\cos \angle BAC + CB.\cos \angle CBA) = AB^2$
  $BA.BC.\cos \angle CBA + CB.CA.\cos \angle ACB = BC.\ (AB.\cos \angle CBA + AC.\cos \angle ACB) = BC^2$
  $CB.CA.\cos \angle ACB + AC.AB.\cos \angle BAC = CA.\ (BC.\cos \angle ACB + BA.\cos \angle BAC) = CA^2$.

- **Conclusion :** par sommation, $B''C'^2 + C''A'^2 + A''B'^2 = 3.(BC^2 + CA^2 + AB^2)$.

83 Vecten, Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales, *Annales* de Gergonne VII (1816-17) 321-324, proposition 6.

Note historique : ce résultat pour un triangle rectangle a déjà été proposé.[84]

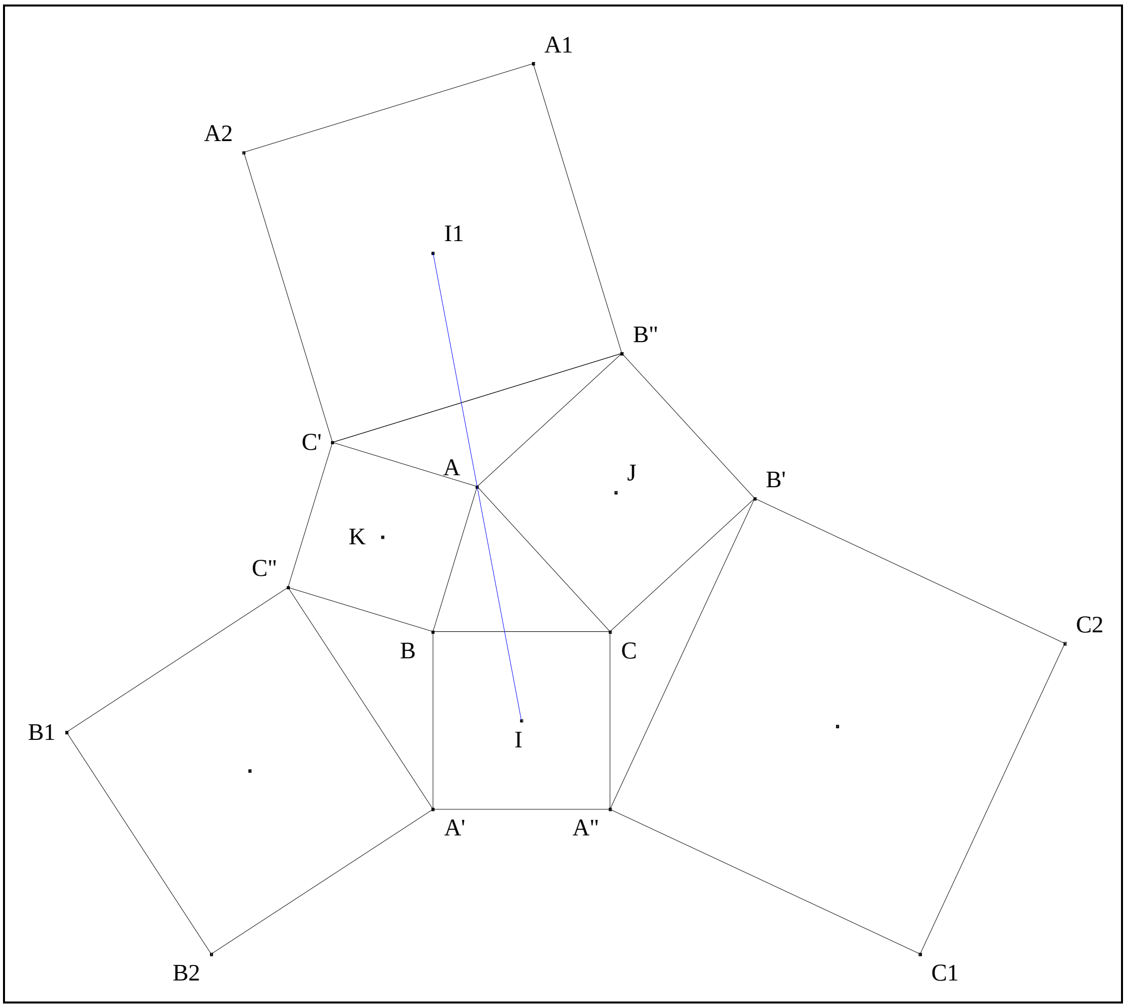
Scolie : le résultat reste vrai lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

Exercice : en notant BC = a, CA = b et AB = c, montrer que A"B'² - B"C'² = 3.(a² - b²).

3. Un résultat de Floor van Lamoen

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
et I1, I2, I3 les centres resp. de B"A1A2C', C"B1B2, A"C1C2B'.

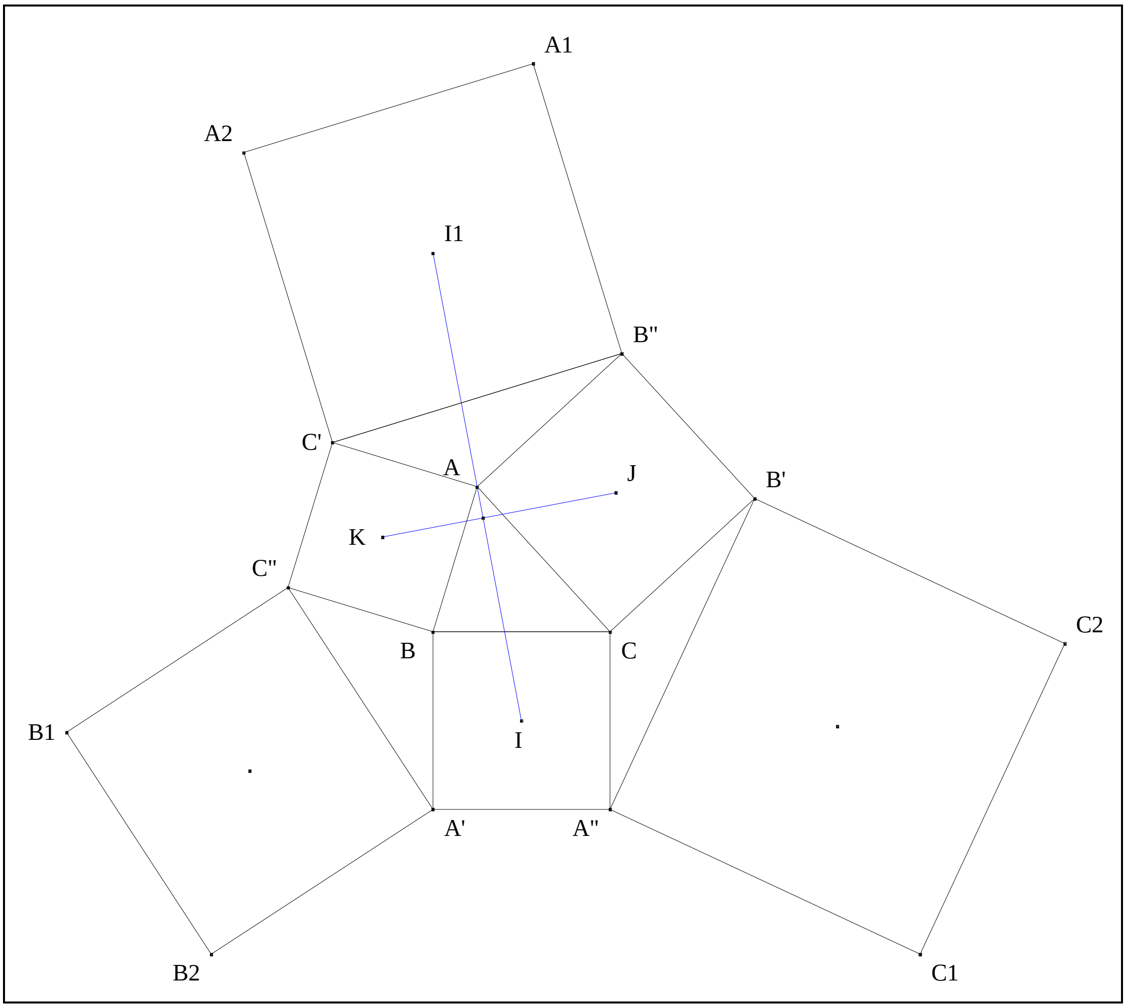
Donné : A, I et I1 sont alignés [85].

---

84 Fourrey E., *Curiosités Géométriques*,4-ième édition, Vuibert, Paris (1938) 100.

85 Lamoen (van) F., Friendship Among Triangle Center, *Forum Geometricorum* 1 (2003) 1-6 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200101index.html.

VISUALISATION

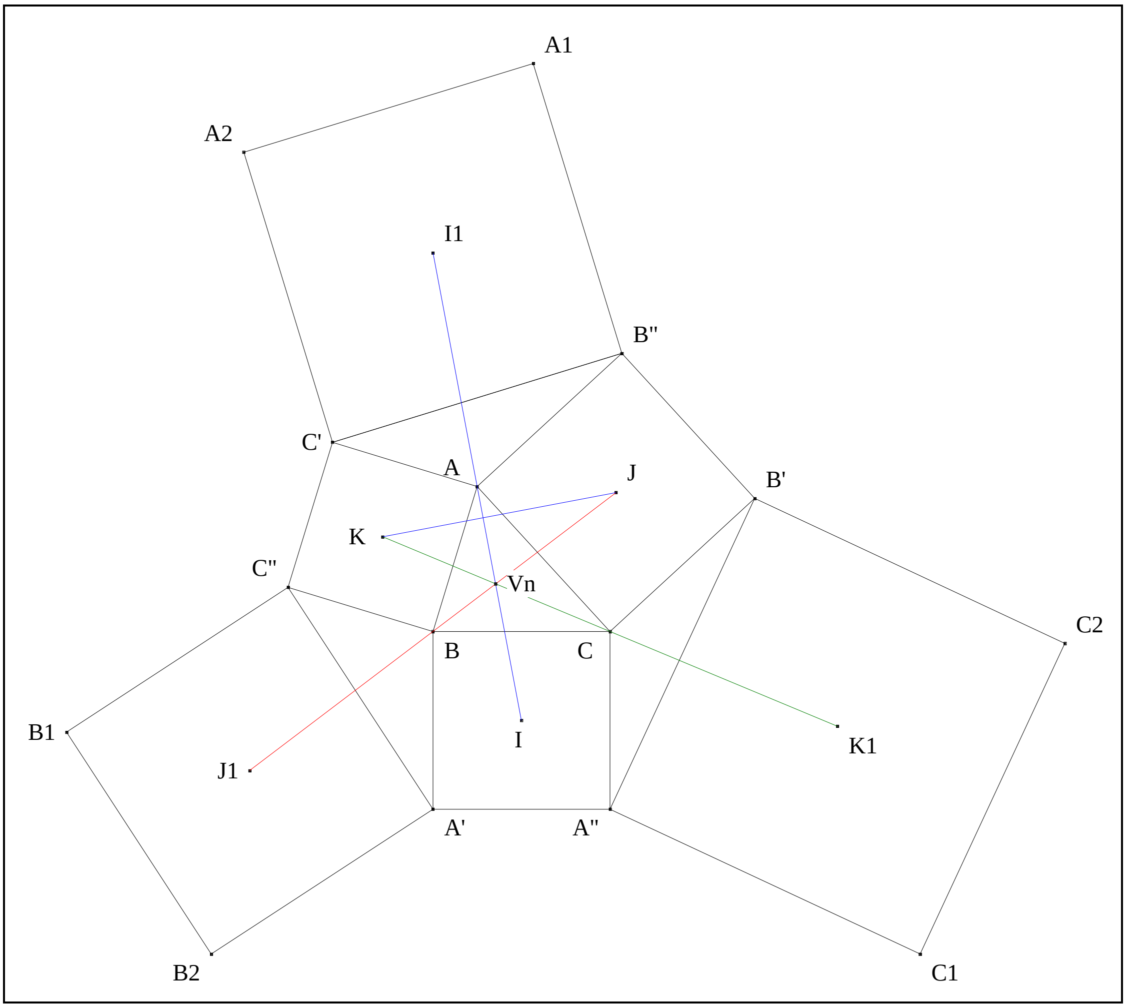


- D'après III. 6. Un résultat de E.-N. Barisien, appliqué au moulin à vent

	(1)	basé sur ABC,	(AI) ⊥ (JK)
	(2)	basé sur AB"C',	(JK) ⊥ (AI1) ;
d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,			(AI) // (AI1) ;
d'après le postulat d'Euclide,			(AI) = (AI1).

- **Conclusion :** A, I et I1 sont alignés.

Scolies : **(1)** deux autres alignement



- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que B, J et J1 sont alignés
  C, K et K1 sont alignés.

(2) (II1), (JJ1) et (KK1) sont concourantes au point extérieur de Vecten de ABC.

(3) A est le milieu de [II1] [86]

- D'après III. 6. Un résultat de Neuberg, scolie 2, appliqué au moulin à vent
  * basé sur ABC, AI = JK
  * basé sur AB"C', JK = AI1 ;

  par transitivité de la relation =, AI = AI1 ;

- **Conclusion :** A, I et I1 étant alignés, A est le milieu de [II1].

- Mutatis mutandis, nous montrerions que B est le milieu de [JJ1]
  C est le milieu de [KK1].

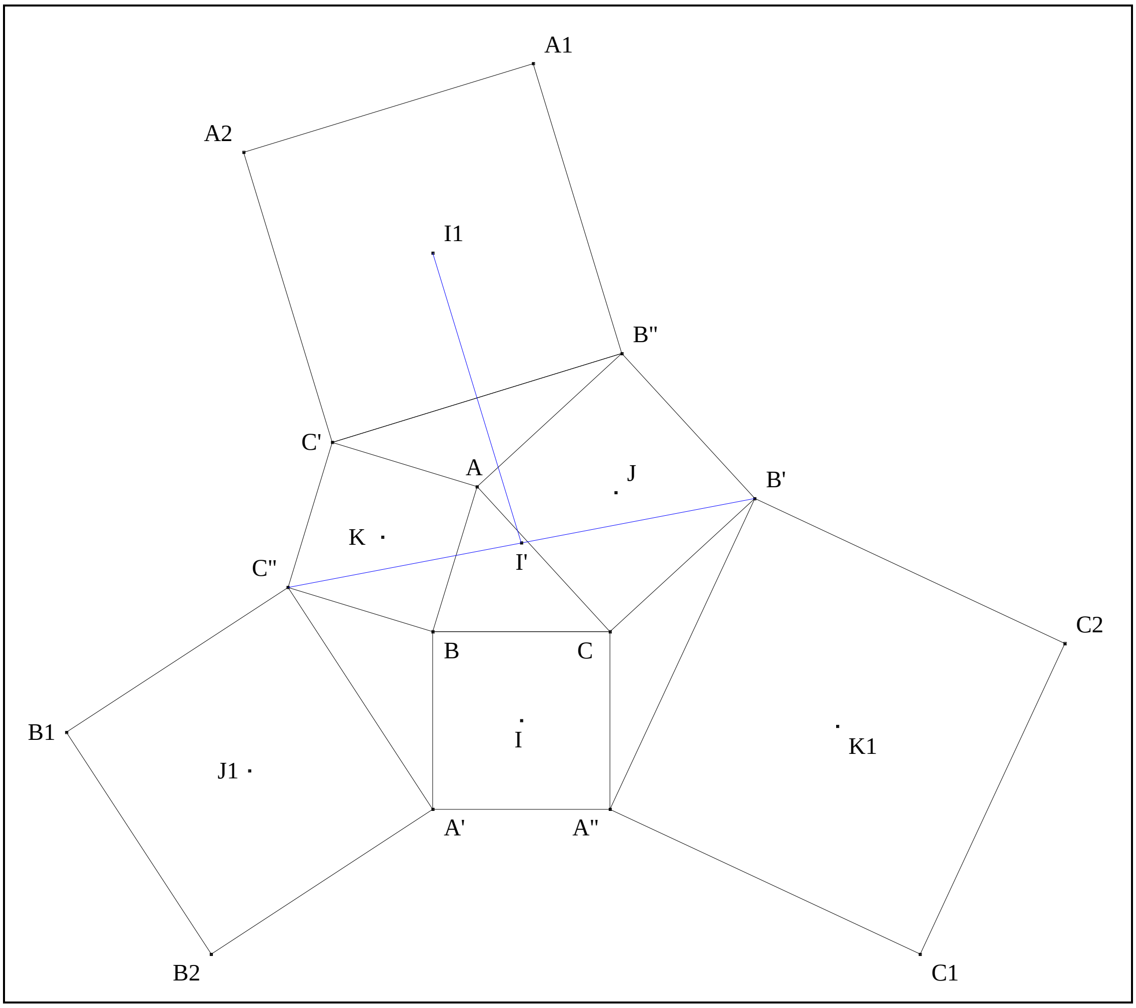
(4) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

4. Un résultat de van Aubel

[86] Grinberg D., Fermat, Vecten and van Lamoen, Message *Hyacinthos* # 7053 du 26/04/2003; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7053.

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

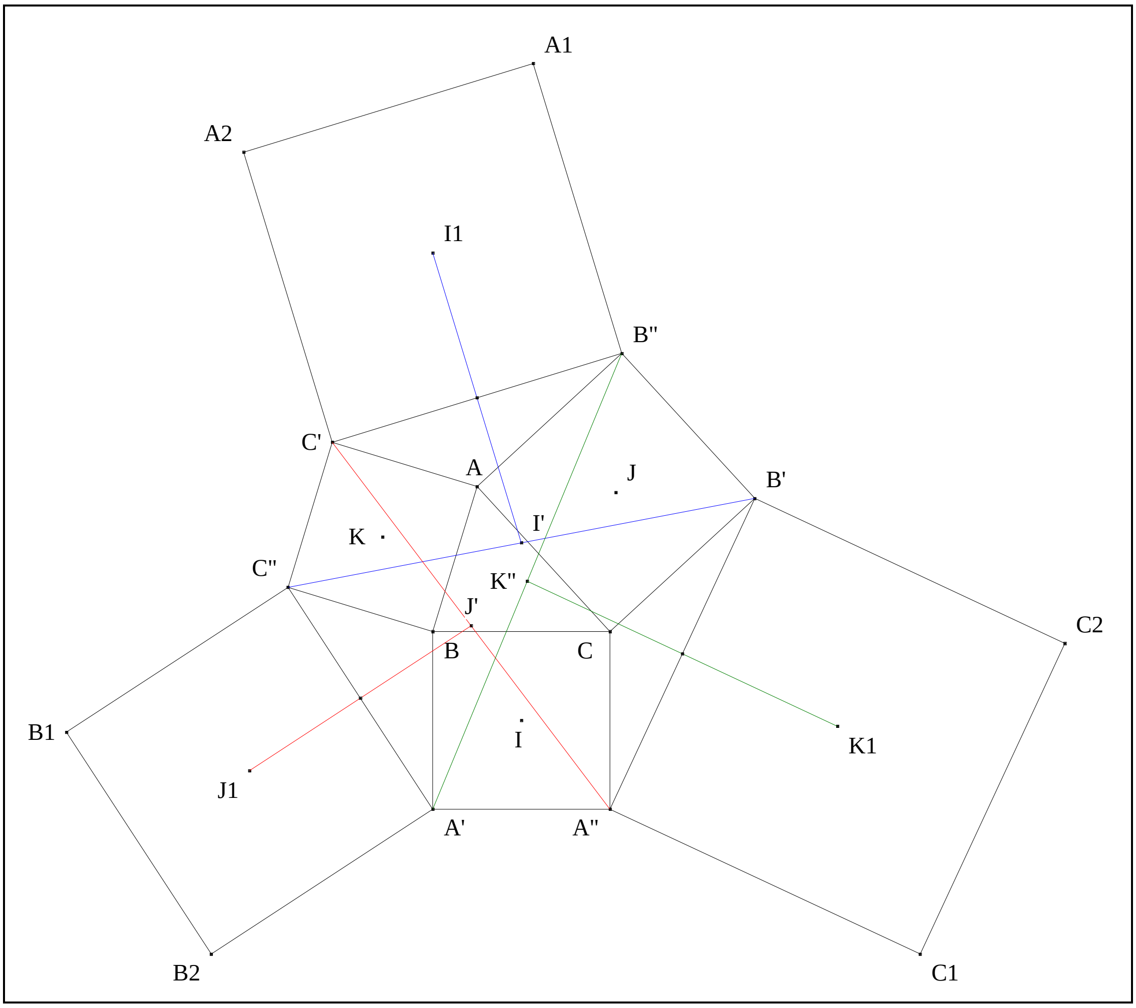
Donné : I' est le symétrique de I1 par rapport à (B"C') [87].

VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après VI. 4. Un résultat de Bottema, scolie 1, appliqué au triangle AB"C', I' est le centre du carré construit sur [B"C'] à l'intérieur de AB"C'.

Scolies : **(1)** vision triangulaire

[87] Van Aubel, *Mathesis* (1880) n° 42 ;
solution : van Aubel, *Mathesis* (1881) 163.

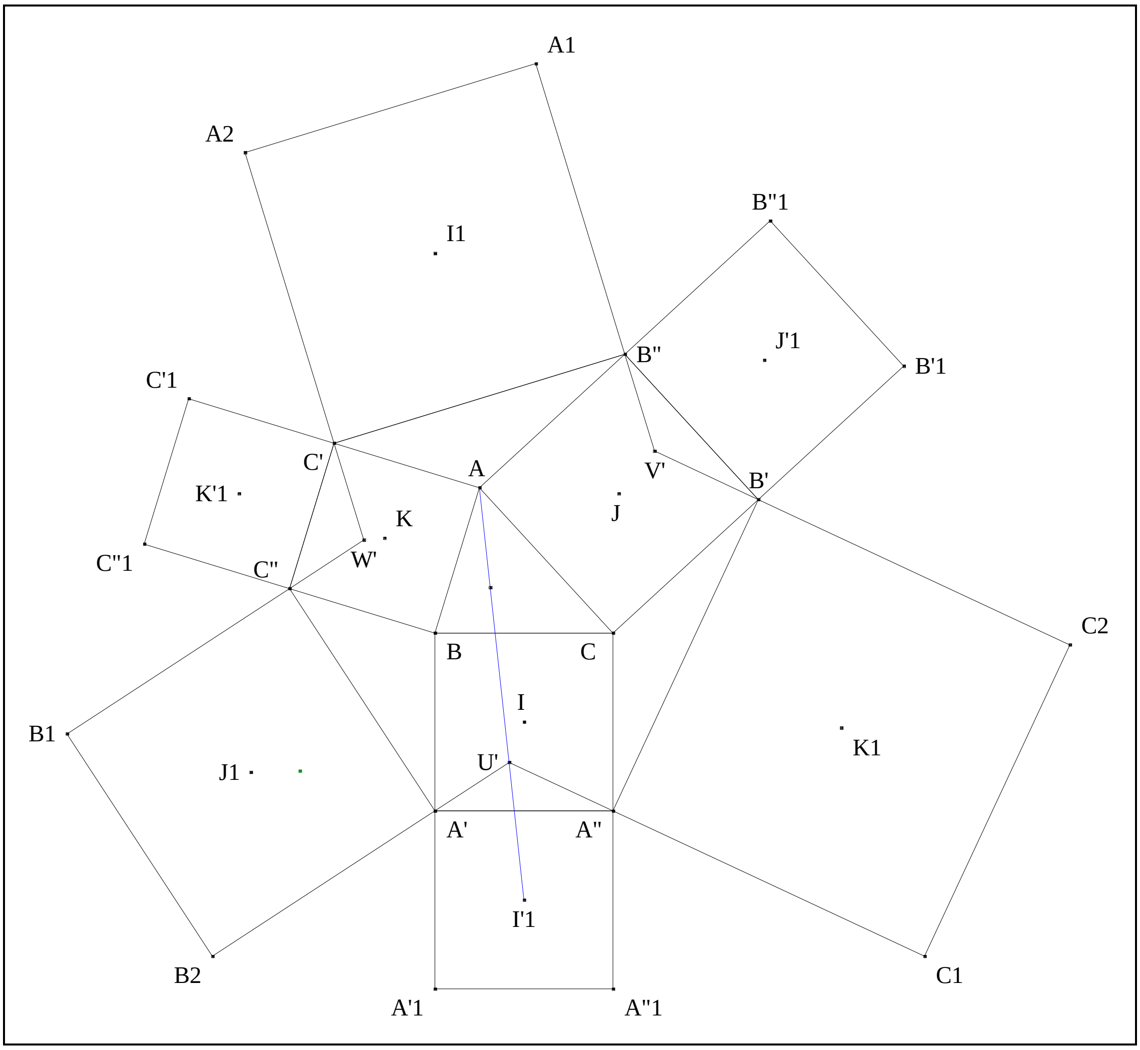


(2) Le résultat reste vrai lorsqu'on remplace "extérieur" par "intérieur".

5. Un résultat d'Oene Bottema

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,

A'A'1A"1A", B'B'1B"1B", C'C'1C"1C" trois carrés resp. extérieurs à la figure de Vecten,

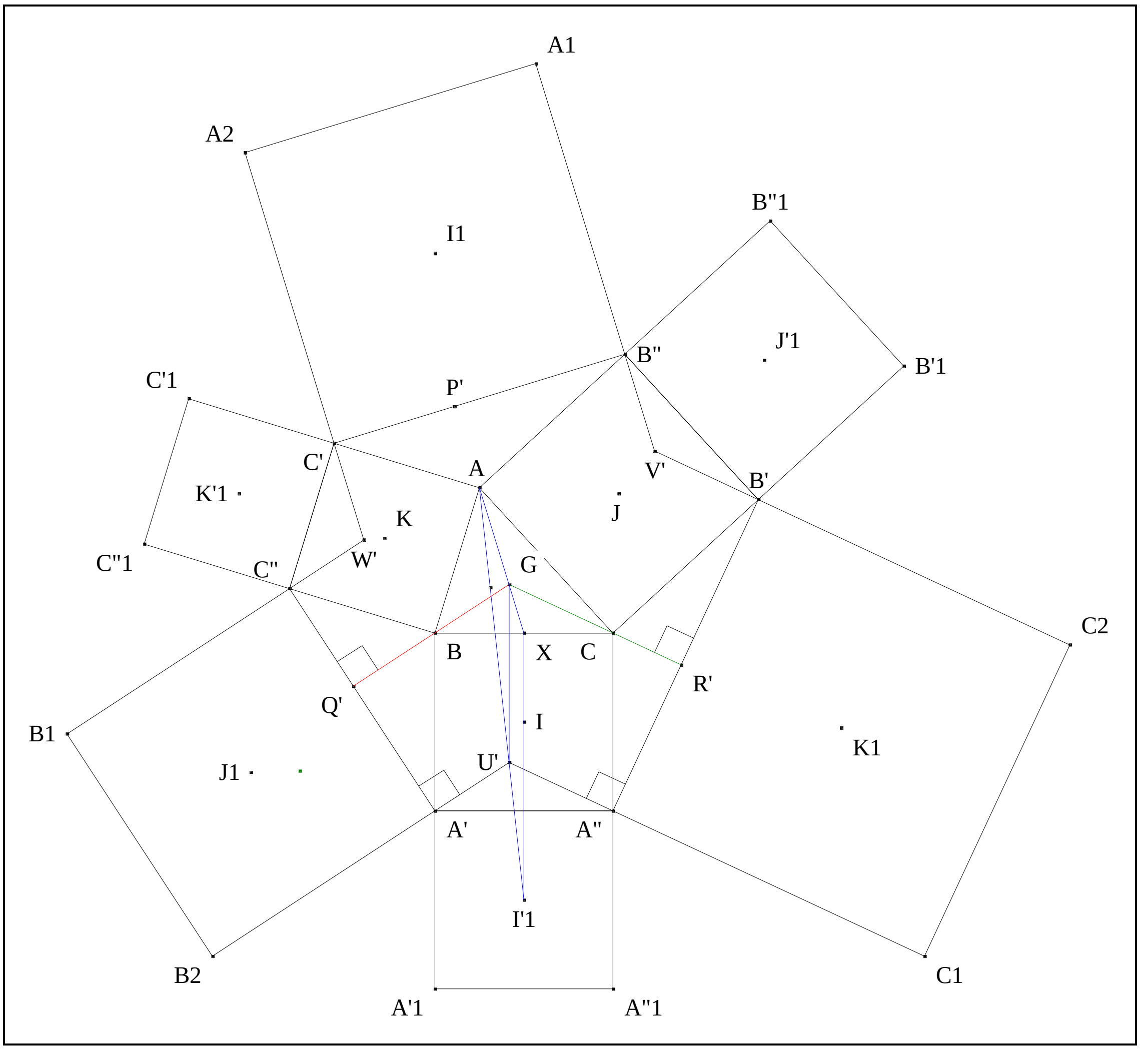
I'1, J'1, K'1 le centre resp. de A'A'1A"1A", B'B'1B"1B", C'C'1C"1C"

et U', V', R' le point d'intersection de (A'B2) et (A"C1), de (B'C2) et (B"A1), de (C'A2) et (C"B1).

Donné : A, U' et I'1 sont alignés.[88]

VISUALISATION

[88] Bottema O., Het problem van de verloren schat, Verscheidenheden, *Nederlandse Verenigind van Wiskundeleraren*, Groningen (1978) 51.



- D'après "Le petit théorème de Desargues" (Cf. Annexe 9) appliqué aux triangles homothétiques GBC et U'A'A", (GU') // (BA') et GU' = BA'.

- Nous avons : **(1)** 3.AG = 2.AX
  (2) 3.GU' = 2.XI'1.

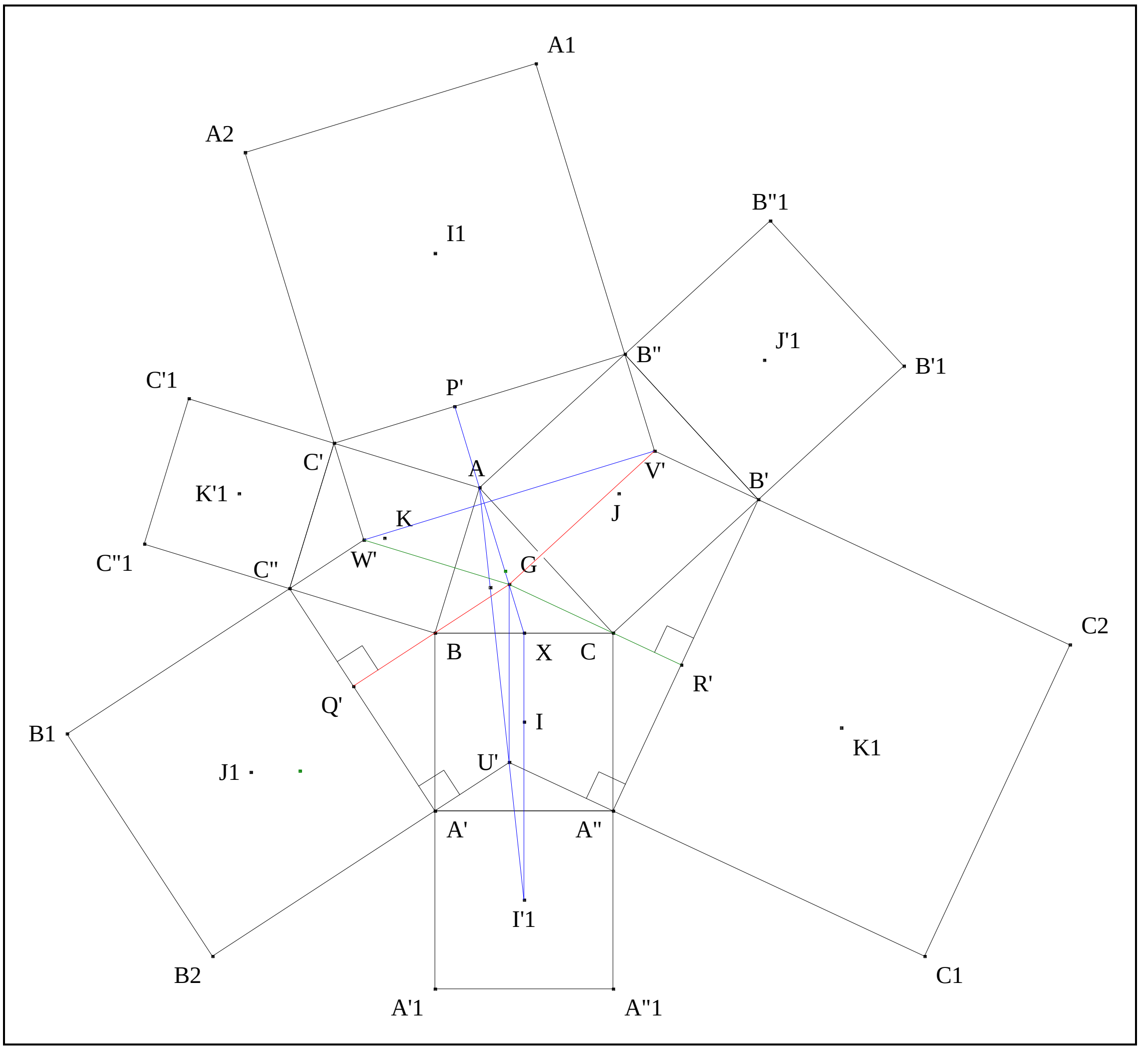
- **Conclusion :** A, U et I'1 sont alignés.

Note historique : ce résultat d'Oene Bottema a été présenté en exercice chez Paul Yiu[89].

Scolies : **(1)** GBA'U' et GCA"U' sont deux parallélogrammes.

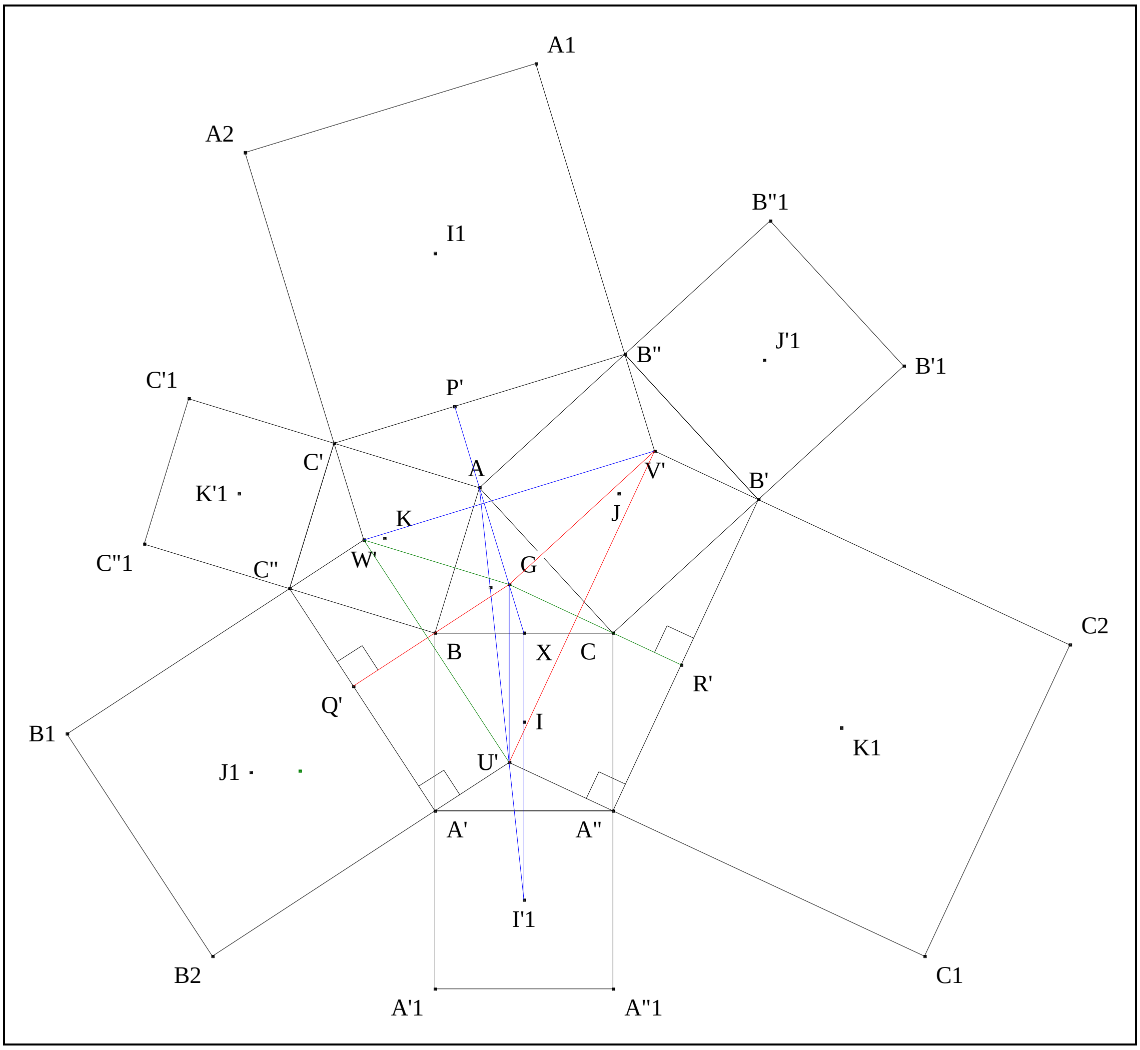
(2) Trois droites concourantes [90]

[89] Yiu P., Notes on Euclidean Geometry (1998) ; http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html.
[90] Common point, *Mathlinks* du 08/11/2006 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=118200.



- D'après la scolie précédente, * GAB"V' est un parallélogramme
 * GAC'W' est un parallélogramme ;

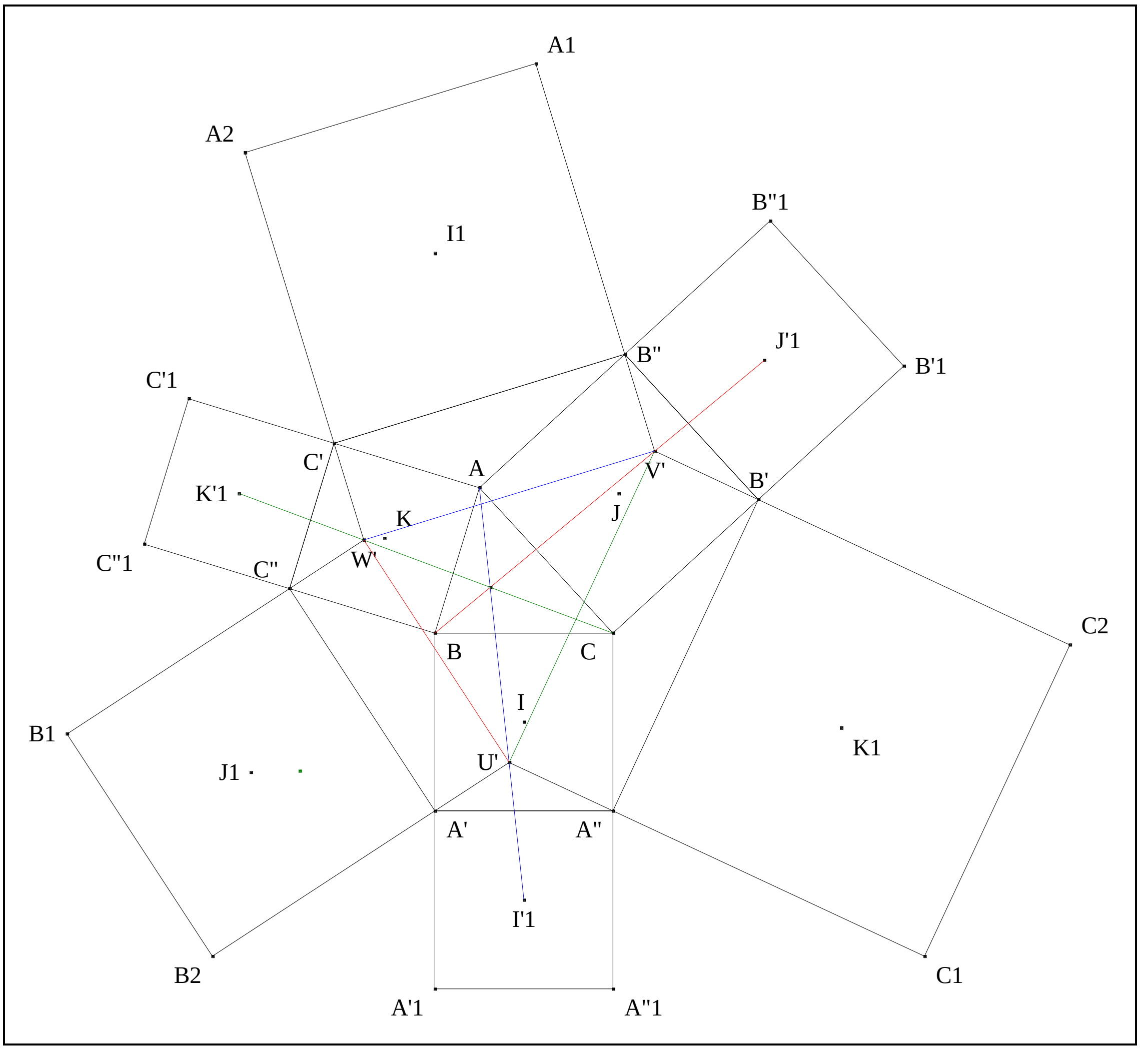
en conséquence, B"C'W'V' est un rectangle.



- Mutatis mutandis, C"A'U'W' est un rectangle
  A"B'V'U' est un rectangle.

- G étant le pôle commun d'orthologie des triangles ABC et U'V'W', ceux-ci sont bilogiques ;
  en conséquence, ABC et U'V'W' sont en perspective.[91]

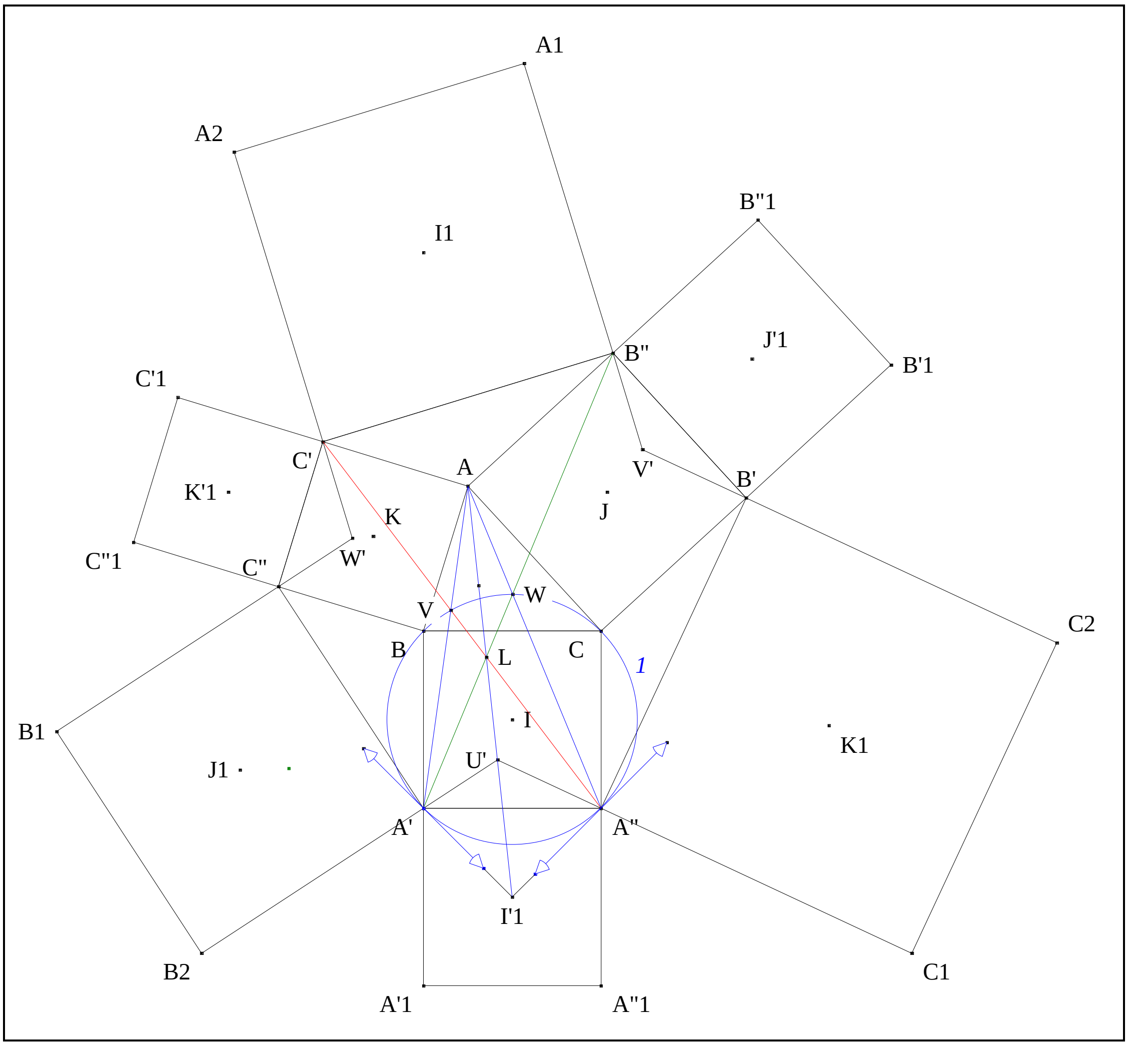
[91] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



- **Conclusion :** (AI'1), (BJ'1) et (CK'1) sont concourantes.

(3) Trois droites concourantes [92]

[92] Iranian National Olympiad (3rd Round) 2007
Concurrent lines, *Mathlinks* du 27/08/2007 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=114974103&t=164548.



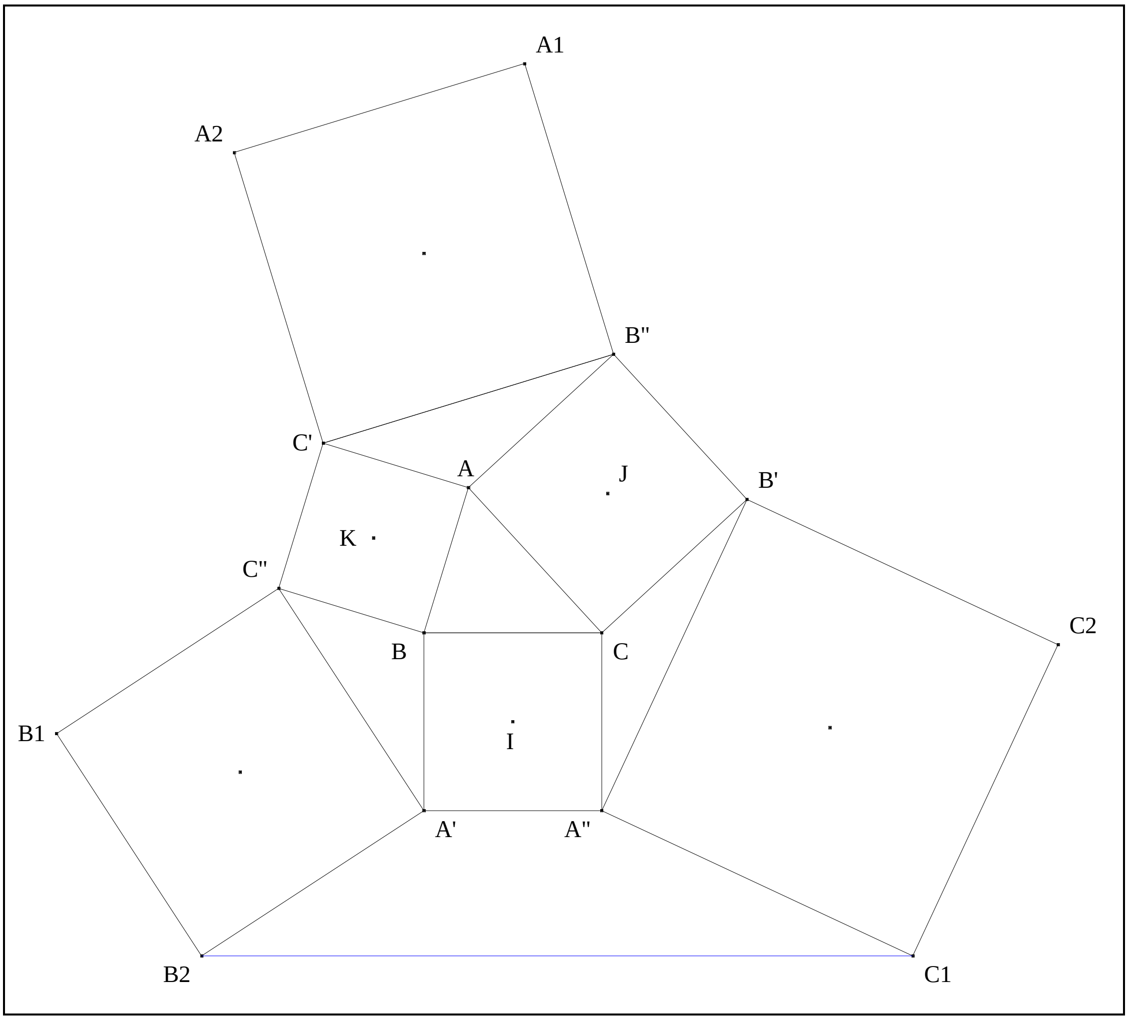
- D'après III. La proposition 2, scolie 1, *1* passe par B, C, A', A", V et W.
- Notons Ta', Ta" les tangentes à *1* resp. en A', A" .
- Nous avons : Ta' = (A'I'1) et Ta" = (A"I'1).
- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe 16) appliqué à l'hexagone dégénéré A'VA" Ta" WA' Ta', (A'W) et (A"V) se coupent sur (AI'1).
- **Conclusion :** (A'B"), (A"C') et (AI'1) sont concourantes en L.

(4) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

6. Un résultat de Niyland

VISION

Figure :



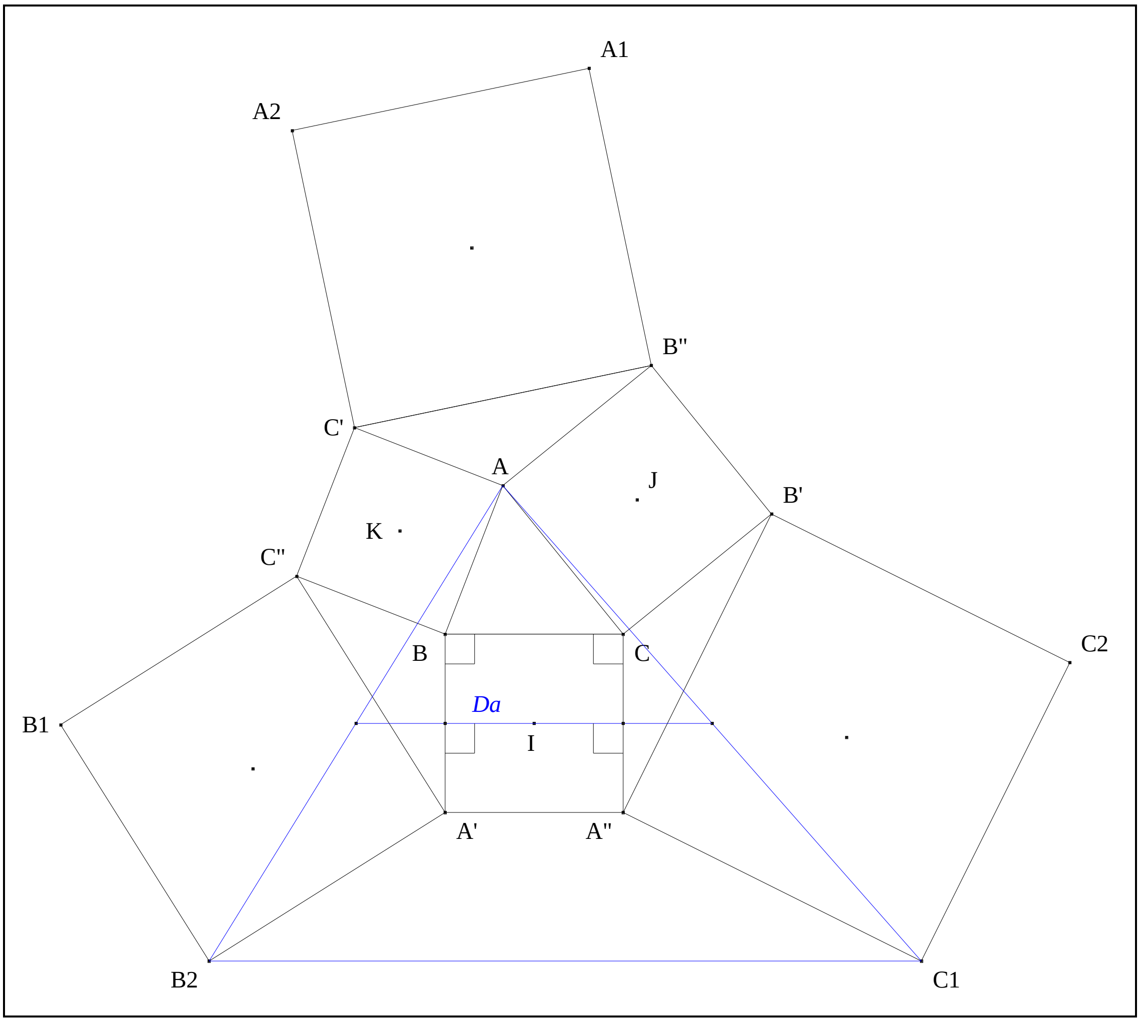
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,

Donné : (B2C1) est parallèles à (A'A") [93].

VISUALISATION

---

[93] Niyland, *Mathesis* n° 893.
68-ième O.M. Russie (2005).



- D'après VI. 4. Un résultat de Bottema, appliqué
  (1) au triangle BA'C", le milieu de [AB2] est le symétrique de I par rapport à (A'B)
  (2) au triangle CB'A", le milieu de [AC1] est le symétrique de I par rapport à (A"C).
  en conséquence, ces deux milieux sont alignés avec I.

- Notons *D*a cette droite.

- *D*a étant la A-droite des milieux du triangle AB2C1, (B2C1) // *D*a ;
  nous avons : *D*a // (BC) ;
  par transitivité de la relation //, (B2C1) // (BC).

- **Conclusion :** (B2C1) est parallèles à (A'A").

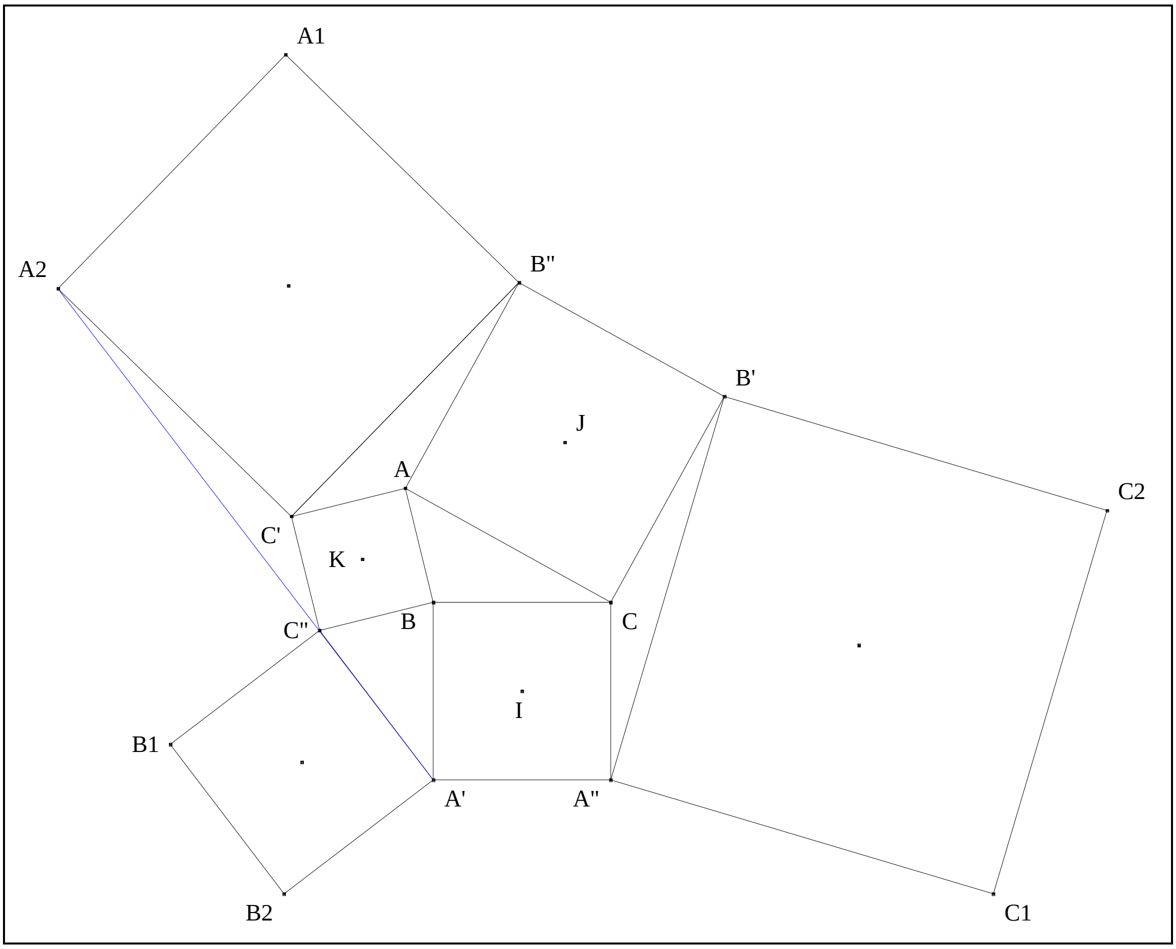
Scolies : **(1)** B2C1 = 4.BC.

(2) Les résultats restent vrais lorsque l'on remplace "extérieur" par "intérieur".

7. Exercice : un San Gaku de 1826

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,

Donné : A', C" et A2 sont alignés *si, et seulement si,* 2AB = AC [94].

Note historique : la tablette concernant ce san Gaku de 1826 de la préfecture de Tokyo a aujourd'hui disparue.

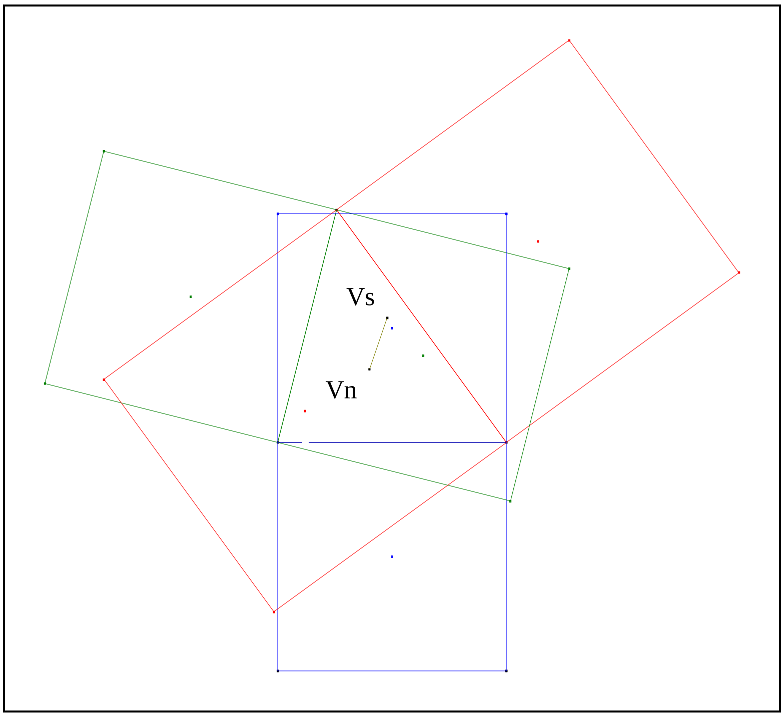
B. "COMPRENDRE"

LA LIAISON ENTRE LES DEUX PÔLES

DU

RESBIS

[94] Fukagawa H., Pedoe D., Japanese Temple Geometry Problems (1989) Winnipeg, Canada, problem 4.2.1. p.47.

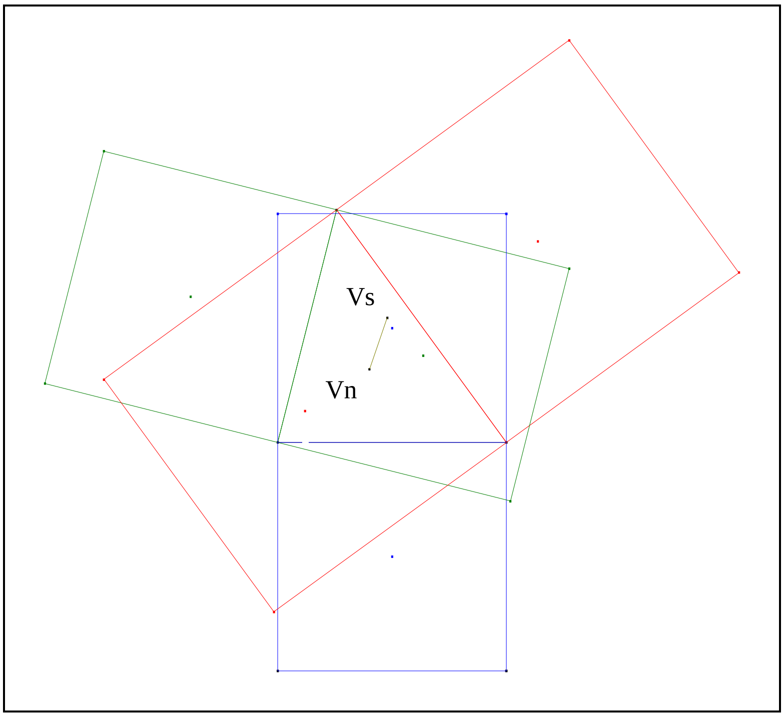


Lorsque deux aspects semblent s'opposer,
le géomètre devra croire en tous les deux
avec la conviction qu'ils puissent engendrer un lien…

1. La droite de Vecten

VISION

Figure :



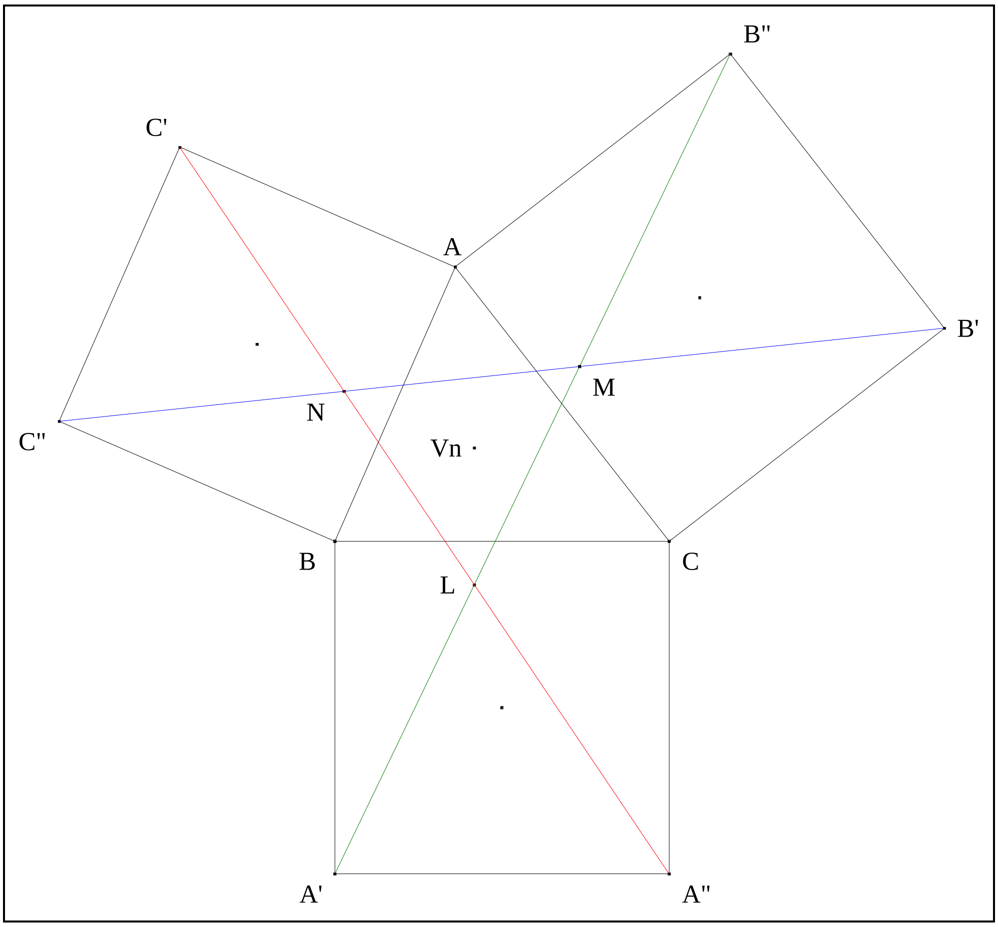
Finition :	ABC	un triangle,
	Vn, Vs	les points resp. extérieur, intérieur de Vecten de ABC.

Définition : (VnVs) est la droite de Vecten de ABC.

2. Une reformulation du résultat IV. 3

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Donnés : Vn est le second point de Vecten de LMN
Vs est le premier point de Vecten de LMN [95].

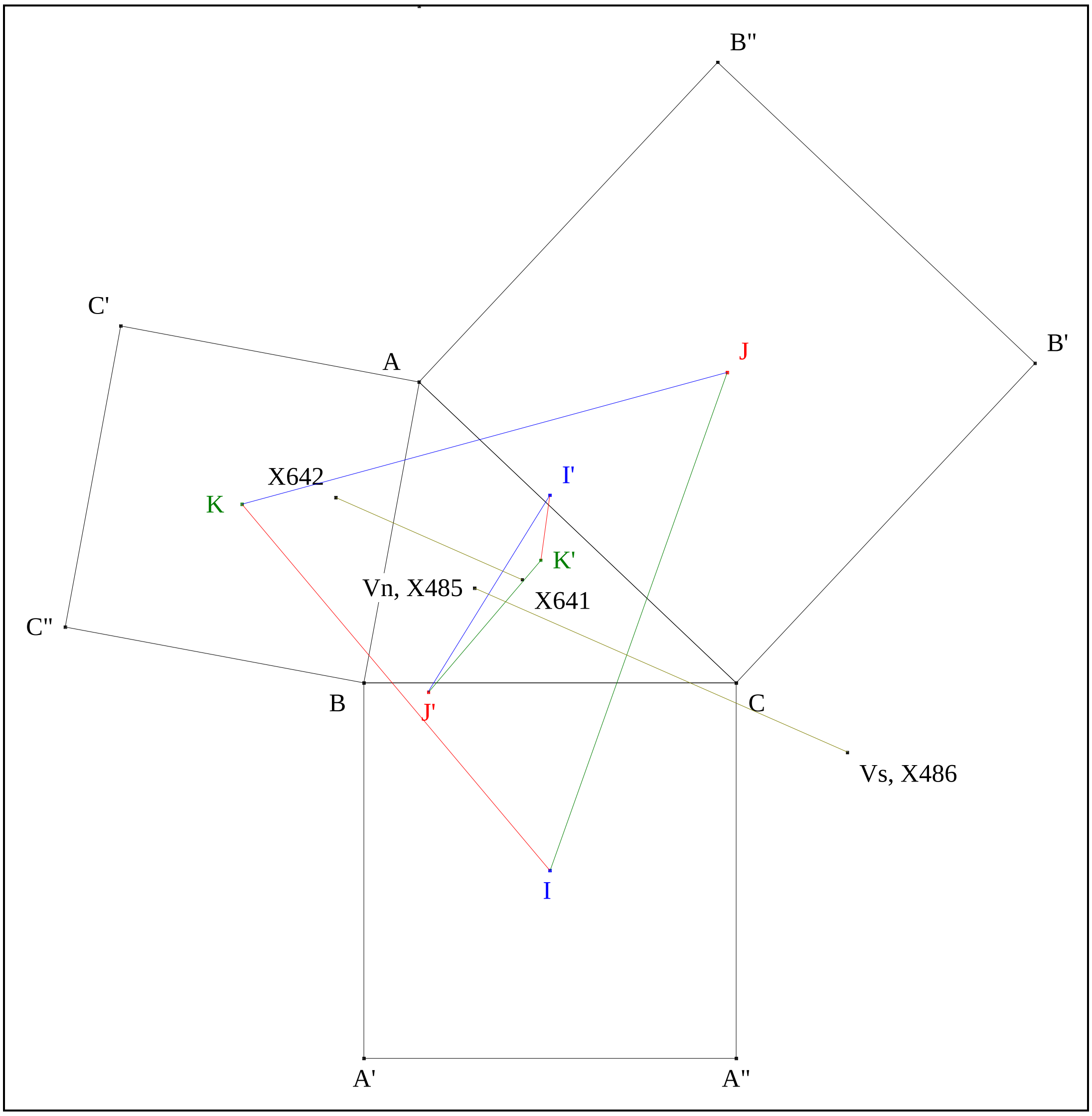
Énoncé traditionnel : ABC et LMN partagent la même droite de Vecten**.**

3. Un résultat de Cosmin Pohoata

VISION

Figure :

[95] Ayme J.-L., Vecten's points, Message *Hyacinthos* # 17406 du 26/03/2009 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/17406 ;
With the Vecten's points, *Mathlinks* du 26/03/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=266978.



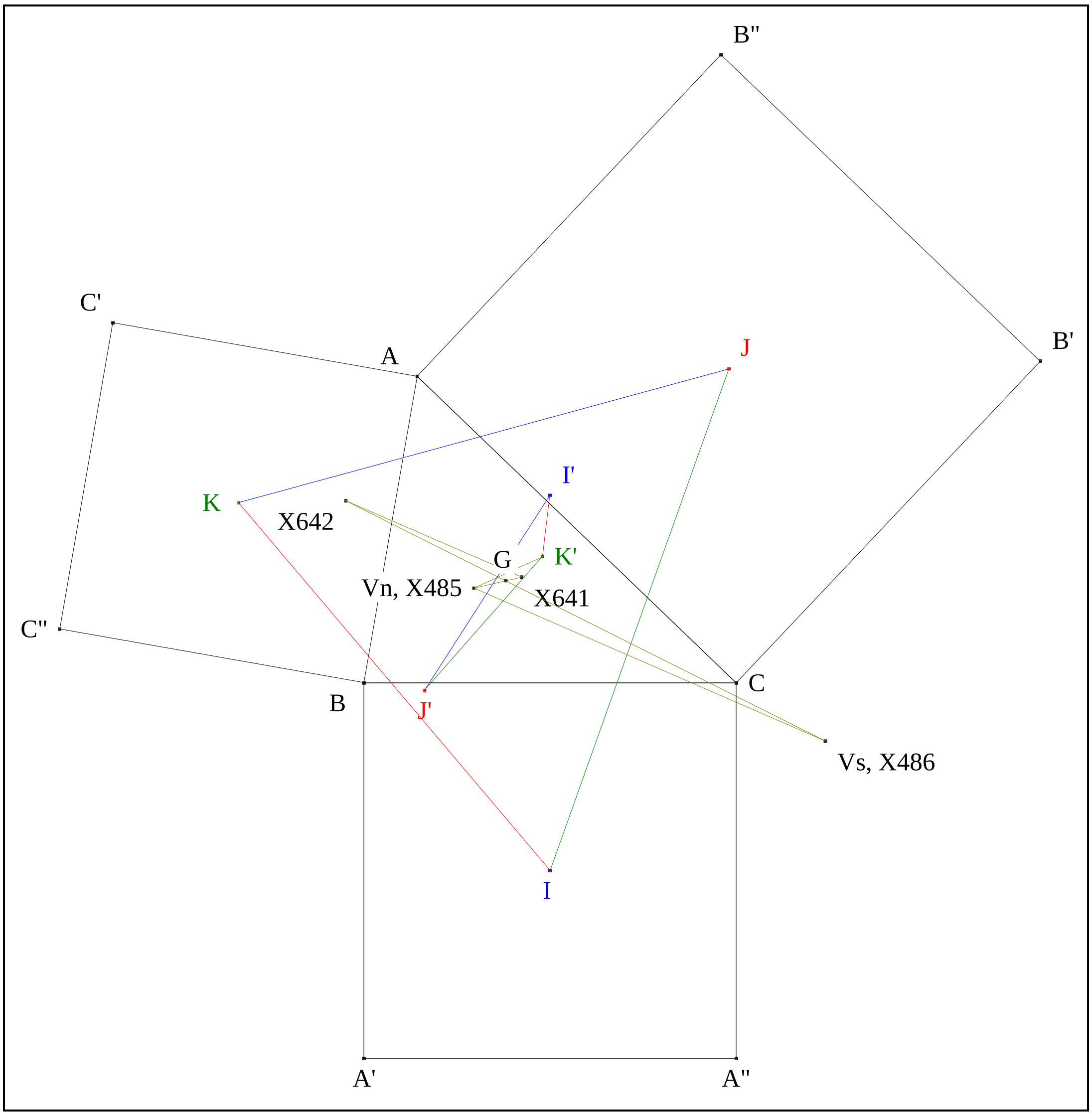
Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
X_{641} le centre du cercle circonscrit à IJK
et X_{642} le centre du cercle circonscrit à I'J'K'.

Donnés : $(X_{641}X_{642})$ est parallèle à (VnVs).[96]

VISUALISATION

---

96 Pohata C., Message privé du 08/04/2009.



- D'après VI. 4. Un résultat de Bottema,

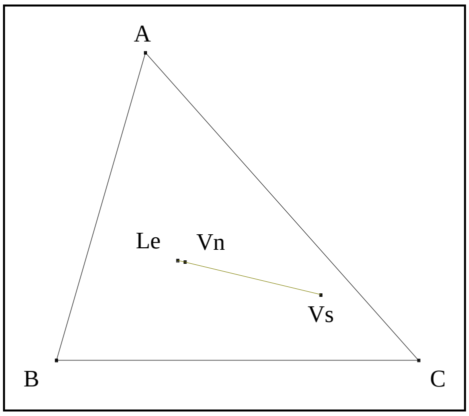
(1)	scolie 8,	X_{641} est le complément de X_{485}
(2)	scolie 16,	X_{642} est le complément de X_{486}.

- **Conclusion :** d'après Thalès, $(X_{641}X_{642})$ est parallèle à (VnVs).

4. La droite de Vecten passe par le point de Lemoine

VISION

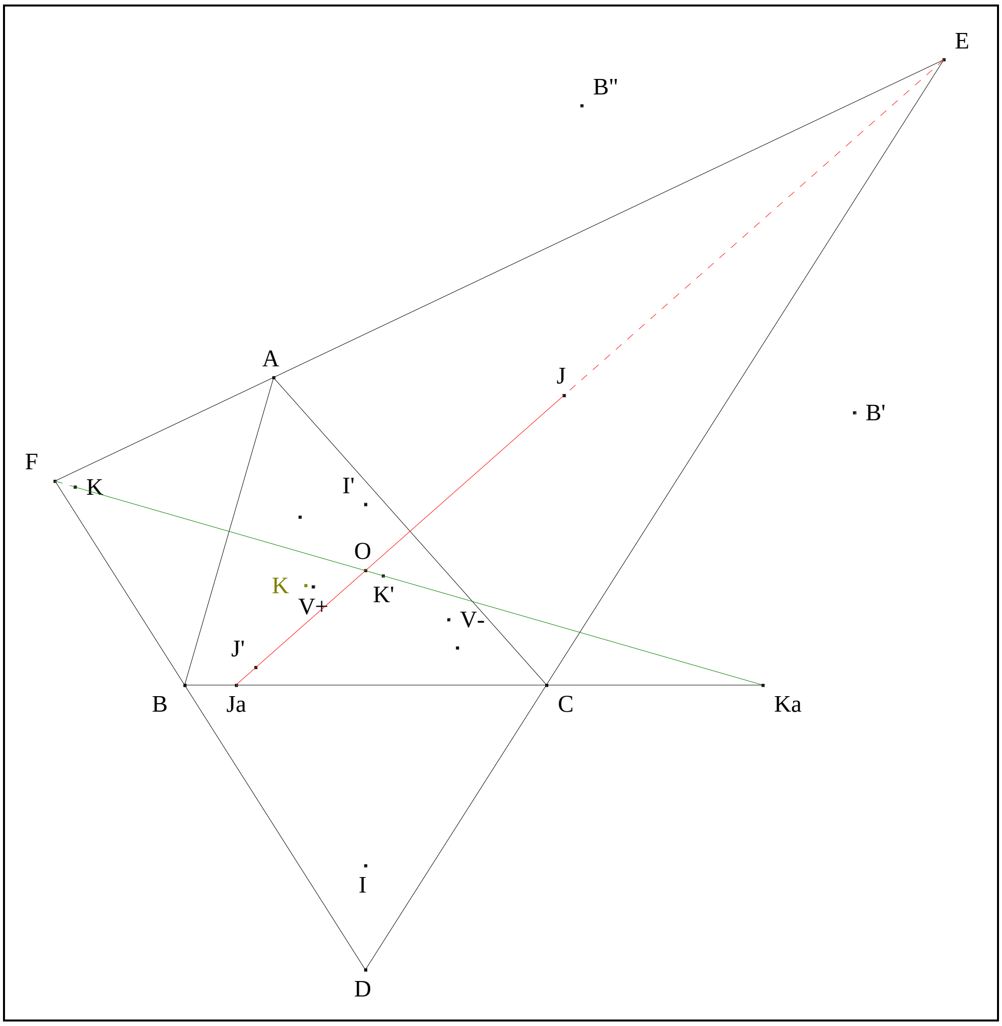
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
et Le le point de Lemoine de ABC

Donné : Vn, Vs et Le sont alignés [97].

VISUALISATION



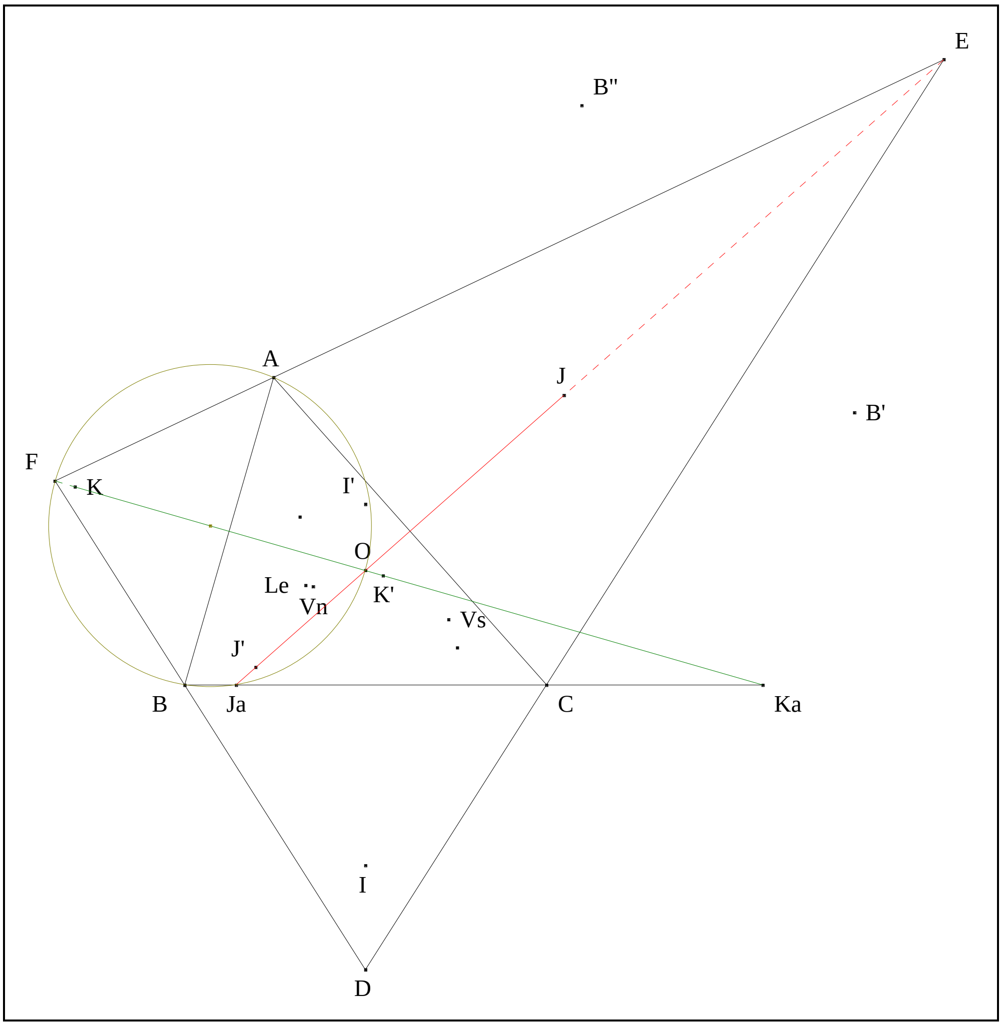
- Notons DEF le triangle tangentiel de ABC

---

97 Gibert B., Re: [EMHL] X_371 (and X372), Message *Hyacinthos* # 1585 du 12/10/2000.

et Ja, Ka les points d'intersection resp. de (JJ'), (KK') avec (BC).

- Considérons les pinceaux anharmoniques *P*a = (A ; K, K', F, Ka)
  *P'*a = (A ; J', J, Ja, E).



- Une chasse angulaire montre que
  *P'*a est l'image de *P*a par la rotation de centre A et d'angle <BAC (2.Π) ;
  en conséquence, (A ; K, K', F, Ka) = (A ; J', J, Ja, E).

- En permutant simultanément les deux premiers et les deux derniers points de *P'*a,
  le pinceau anharmonique *P'*a reste inchangé :
  (A ; J', J, Ja, E) = (A ; J, J', E, Ja) ;
  par changement d'origine de A en B, (A ; J, J', E, Ja) = (B ; J, J', E, Ja) ;
  par transitivité de la relation = entre pinceaux anharmoniques de même centre,
  (A ; K, K', F, Ka) = (B ; J, J', E, Ja) ;
  par changement d'origine de A en C, (A ; K, K', F, Ka) = (C ; K, K', F, Ka) ;
  en conséquence, (C ; K, K', F, Ka) = (B ; J, J', E, Ja).

- **Scolies :** **(1)** (CK), (CK'), (CF) et (CKa) sont les rayons du pinceau à gauche de l'égalité
  (2) (BJ), (BJ'), (BE) et (BJa) sont les rayons du pinceau à droite de l'égalité.

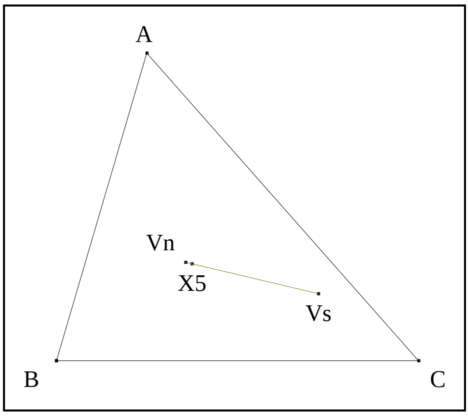
- Ces deux pinceaux ayant le rayon (BC) en commun, les points d'intersection des rayons homologues (CK) et (BJ), (CK') et (BJ'), (CF) et (BE) sont alignés.

- **Conclusion :** Vn, Vs et Le sont alignés.

5. La droite de Vecten passe par le centre du cercle d'Euler

VISION

Figure :

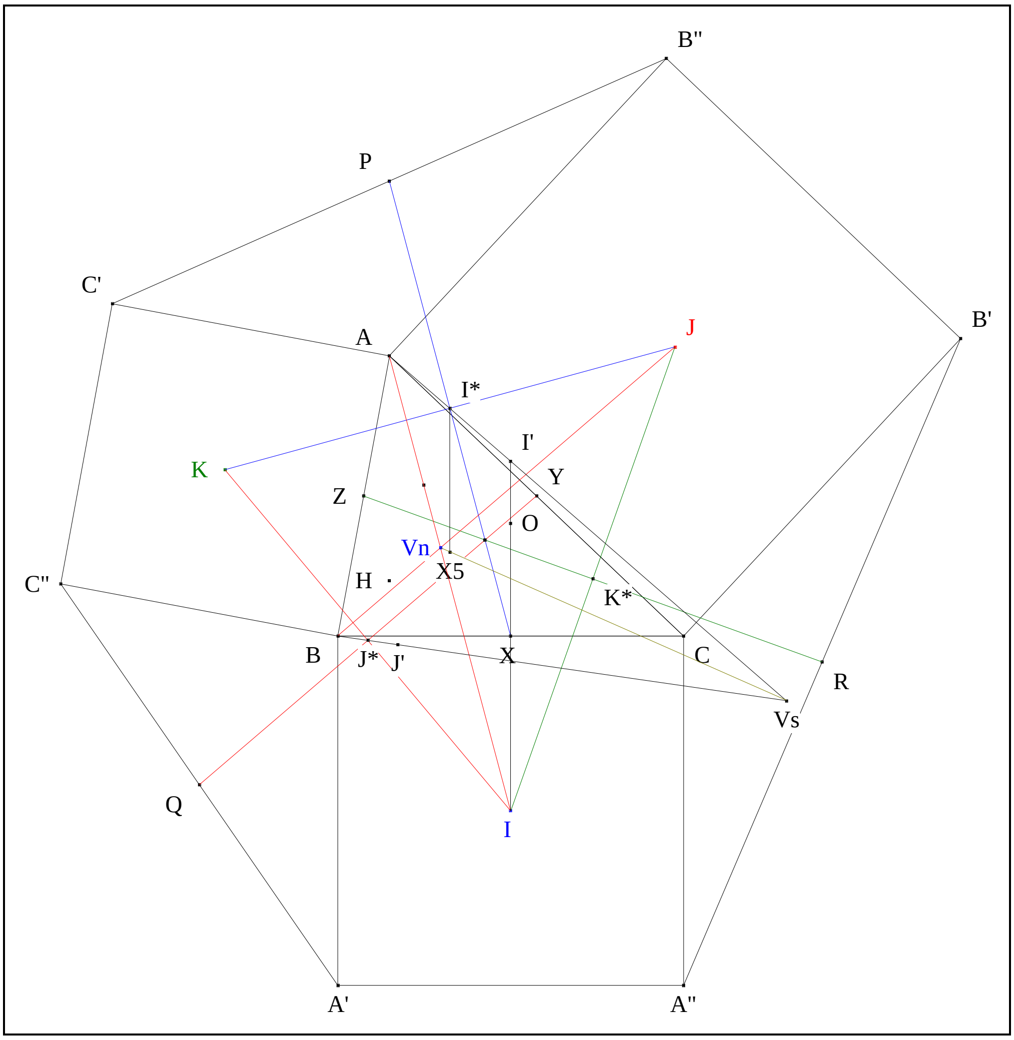


Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment
et X_5 le centre du cercle d'Euler de ABC.

Donné : Vn, Vs et X_5 sont alignés [98].

VISUALISATION

[98] Montes J., Valderrama, pers. comm., Ricardo Barroso Campos du 20/04/2004.



- Notons I*, J*, K* les milieux resp. de [JK], [KI], [IJ]
  et H l'orthocentre de ABC.

- D'après VI. 4. Un résultat de Bottema, scolie 4, I* est le milieu de [AI'].

- **Scolie :** (AH) // (I'I)

- L'axe médian de la bande de frontières (AH) et (II') passe par I* et est perpendiculaire à (BC) d'après l'axiome de passage IIIb, il passe par le milieu X5 de [OH]

- Mutatis mutandis, nous montrerions que
  (1) l'axe médian de la bande de frontières (BH) et (JJ') passe par le milieu X5 de [OH]
  (2) l'axe médian de la bande de frontières (CH) et (KK') passe par le milieu X5 de [OH].

- **Scolies :**
  (1) I*J*K* est homothétique à IJK
  (2) Vn est le pôle d'orthologie de ABC relativement à I*J*K*
  (3) X5 est le pôle d'orthologie de I*J*K* relativement à ABC
  (4) Vs étant le centre de perspective de ABC et I'J'K',
  Vs est le centre de perspective de ABC et I*J*K*.

- **Conclusion :** d'après le théorème de Sondat[99] appliqué à ABC et I*J*K*, Vn, Vs et X_5 sont alignés.[100]

---

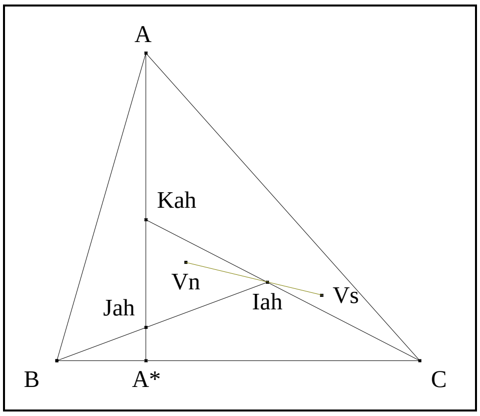
[99] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.
[100] Ayme J.-L., http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=275742.

Note historique : ce résultat de Jose Montes Valderrama de Séville (Andalousie, Espagne) trouvé en 2004 a été prouvé avec l'aide des coordonnées barycentriques par l'Ingénieur naval Jose Maria Pedret [101] de Barcelone (Catalogne, Espagne).

6. Un résultat de l'auteur

VISION

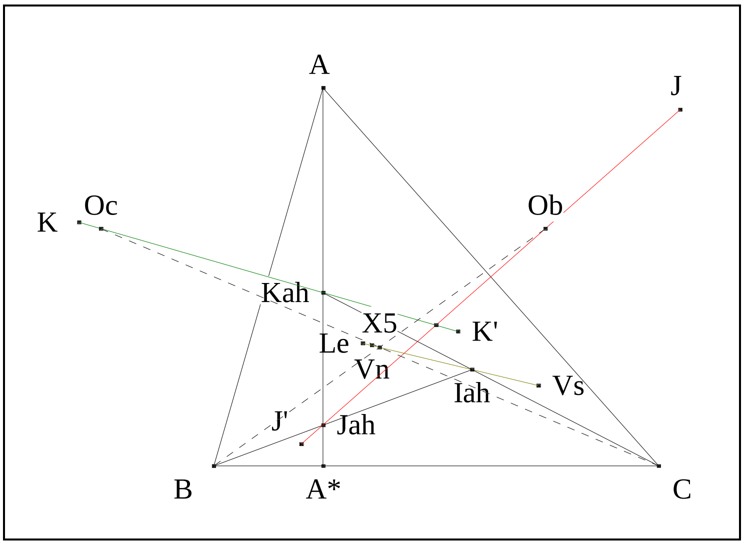
Figure :



Traits : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment,
Jah, Kah les points d'intersection de (AA*) resp. avec (JJ'), (KK'),
et Iah le point d'intersection de (BJah) et (CKah).

Donné : Vn, Vs et Iah sont alignés [102].

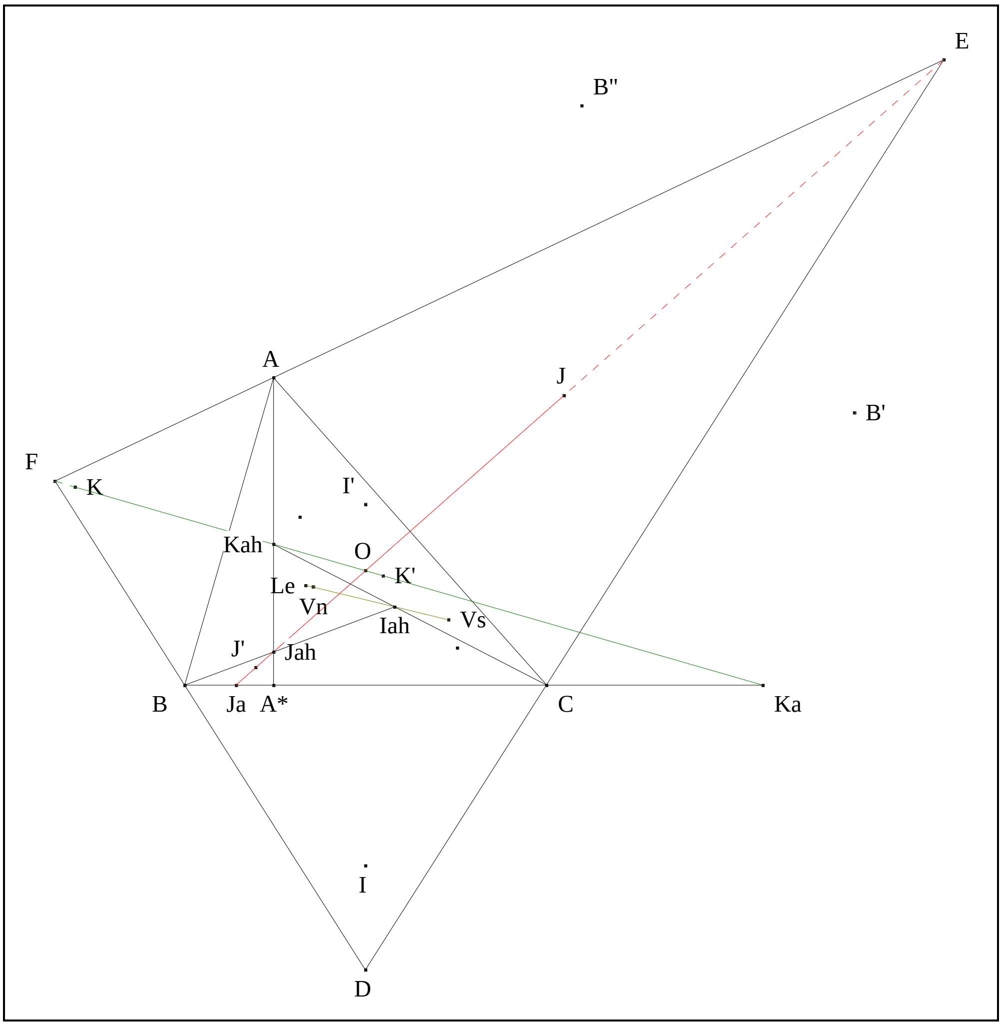
VISUALISATION



[101] Pedret J. M., Problema 163 (23/04/2004) ; http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol163ped.htm.
[102] Ayme J.-L., Vecten's line, Can You confirm, Message Hyacinthos # 17451 du 04/04/2009 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/17451.

- Notons Ob, Oc les symétriques de O par rapport à (CA), (AB).

- Considérons les pinceaux anharmoniques *P*a = (A ; K, K', Oc, Kah)
  *P'*a = (A ; J', J, Jah, Ob).



- Une chasse angulaire montre que
  *P'*a est l'image de *P*a par la rotation de centre A et d'angle <BAC (2.Π) ;
  en conséquence, (A ; K, K', Oc, Kah) = (A ; J', J, Jah, Ob).

- En permutant simultanément les deux premiers et les deux derniers points de *P'*a,
  le pinceau anharmonique *P'*a reste inchangé :
  (A ; J', J, Jah, Ob) = (A ; J, J', Ob, Jah) ;
  par changement d'origine de A en B, (A ; J, J', Ob, Jah) = (B ; J, J', Ob, Jah) ;
  par transitivité de la relation = entre pinceaux anharmoniques de même centre,
  (A ; K, K', Oc, Kah) = (B ; J, J', Ob, Jah) ;
  par changement d'origine de A en B, (A ; K, K', Oc, Kah) = (C ; K, K', Oc, Kah) ;
  en conséquence, (C ; K, K', Oc, Kah) = (B ; J, J', Ob, Jah).

- **Scolies :** **(1)** (CK), (CK'), (COc) et (CKah) sont les rayons du pinceau à gauche de l'égalité
  (2) (BJ), (BJ'), (BOb) et (BJah) sont les rayons du pinceau à droite de l'égalité.

- Les points d'intersection des rayons homologues (CK) et (BJ), (CK') et (BJ'), (COc) et (BOb)
  i.e. Vn, Vs, X_5 étant alignés, X est sur (VnVsX_5)

- **Conclusion :** Vn, Vs et Iah sont alignés.

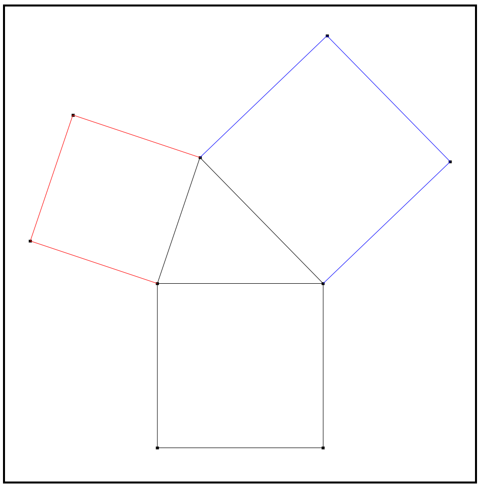
Scolie : Vn, Vs, X_5, Le et Iah

Note historique : ce résultat a été confirmé par Peter J. C. Moses[103] par le biais des coordonnées barycentriques. Il ajoute que circulairement on obtient 3 point en perspective avec ABC en X(847).

D. "SE LAISSER PRENDRE"

PAR

LE RESBIS



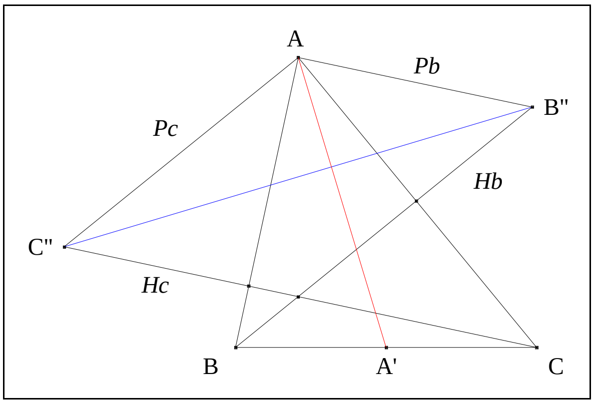
Lorsque deux aspects semblent s'opposer, le géomètre devra croire en tous les deux…
avec la conviction qu'ils puissent engendrer un lien,
voire une Unité occulte [104]

1. L'équivalence d'Hatzipolakis-Thébault

VISION

Figure :

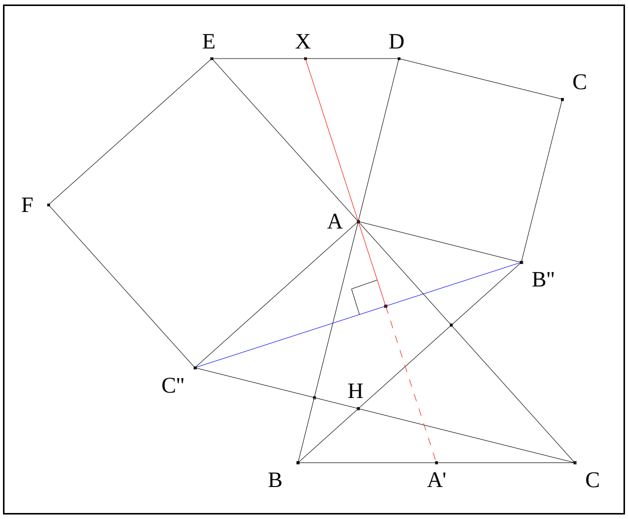
[103] Moses P. J. C., Vecten's line : Can You confirm, Message *Hyacinthos* # 17453 du 04/04/2009.
[104] Cachée en se cachant.



Traits : ABC un triangle,
*H*b, *H*c les B, C-hauteurs de ABC,
*P*b, *P*c les perpendiculaires resp. à (AB), (AC) en A,
B", C" les points d'intersection de *H*b et *P*b, de *H*c et *P*c,
et A' un point de (BC).

Donné : (AA') est perpendiculaire (B"C") *si, et seulement si,* A' le milieu de [BC].

VISUALISATION NÉCESSAIRE [105]



- Notons AB"CD, AEFC" les carrés construits à l'extérieur du triangle AC"B"
 et X le milieu du segment [DE].

- D'après V. 1. D'une hauteur à une médiane,
 la A-hauteur (AA') de AC"B" est la A-médiane du triangle ADE; en conséquence, (AA') passe par X.

- D'après le théorème "a.a.a.", les triangles rectangles ABB" et ACC" sont semblables ;
 en conséquence, $\dfrac{AB''}{AB} = \dfrac{AC''}{AC}$ i.e. $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$; il s'en suit que (DE) // (BC) .

- **Conclusion :** d'après "Le trapèze complet" (Cf. Annexe 17) appliqué à BCDE, A' est le milieu de [BC].

[105] Hatzipolakis A., Another point, Message *Hyacinthos* # 1094 du 02/07/2000.

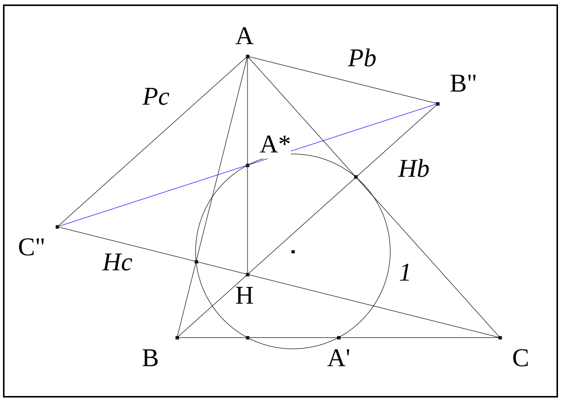
Note historique : cette situation est une réciproque d'un problème de Victor Thébault.

VISUALISATION SUFFISANTE [106]

- D'après la visualisation nécessaire, (DE) // (BC).
- D'après "Le trapèze complet" (Cf. Annexe 17) appliqué à BCDE, A', A et X sont alignés.
- **Conclusion :** d'après VIII. 1. D'une médiane à une hauteur, (AA') est perpendiculaire (B"C").

Note historique : cette situation de Victor Thébault a été résolu à partir d'une chasse angulaire.

Scolies : **(1)** l'observation de Paul Yiu [107]



- Le quadrilatère AB"HC" étant un parallélogramme, ses diagonales se coupent en leur milieu.
- Notons A* ce point.
- Nous savons que A* est le A-point d'Euler de ABC.
- Notons *1* le cercle d'Euler de ABC.
- **Conclusion :** d'après "Le cercle d'Euler" [108], *1* passe par A*.

(2) La remarque de Jean-Pierre Ehrmann[109]

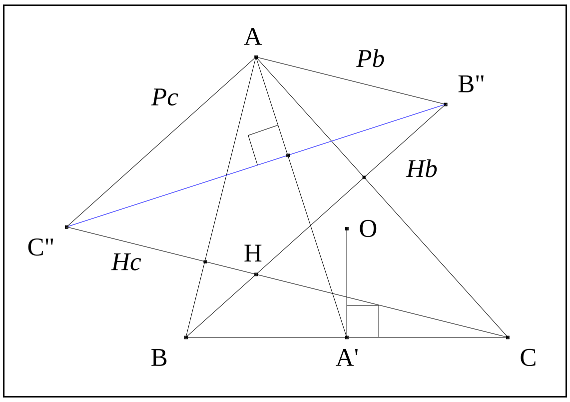
---

106 Thébault V., Questions proposées, *L'Éducation mathématique* 50 (1947-48) 112, n° 9256 ; solution : *L'Éducation mathématique* 51 (1948-49) 6, n° 9256.
Hatzipolakis A., Another point, Message *Hyacinthos* # 1102 du 03/07/2000.

107 Yiu P., Another point, Message *Hyacinthos* # 1104 du 03/07/2000.

108 Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel, G.G.G., vol. 2 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/vol2.html.

109 Ehrmann J.-P., Another point, Message *Hyacinthos* # 1103 du 03/07/2000

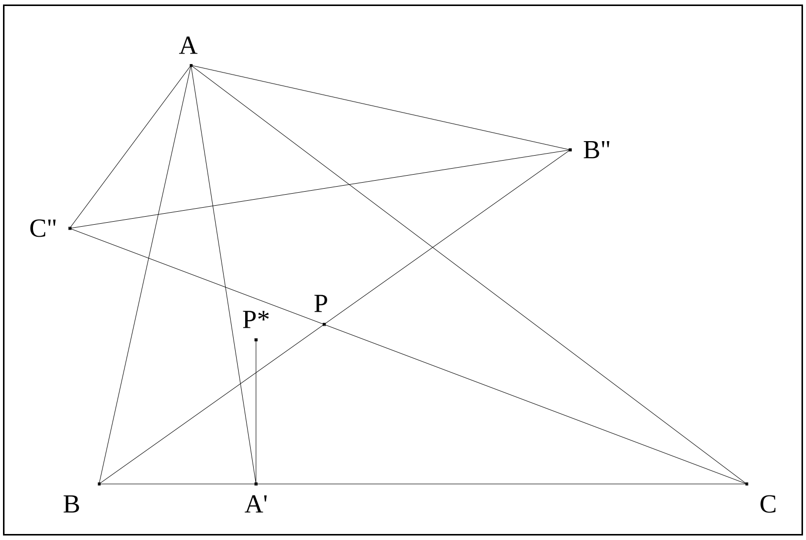


- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC.
- Nous savons que O est l'isogonal de H relativement à ABC
- **Conclusion :** A' est le A-sommet du triangle O-pédal relativement à ABC.

(3) Excercice ou la généralisation de Jean-Pierre Ehrmann[110]

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point,
P* l'isogonal de P relativement à ABC,
*P*b, *P*c les perpendiculaires resp. à (AB), (AC) en A,
B", C" les points d'intersection de (BP) et *P*b, de (CP) et *P*c,
et A' un point de (BC).

Donné : (AA') est perpendiculaire (B"C")
si, et seulement si,
(A'P*) est perpendiculaire à (BC).[111]

---

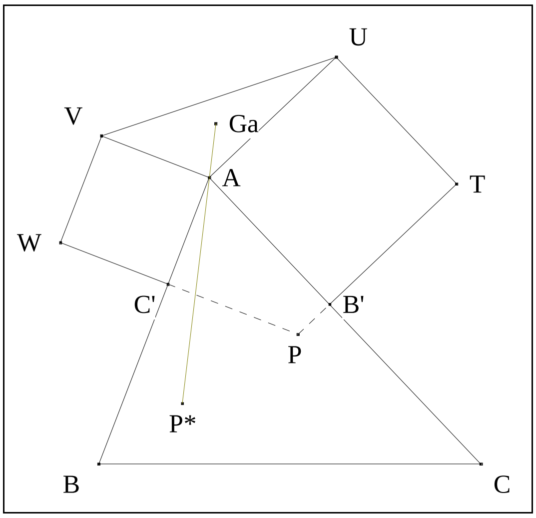
110 Ehrmann J.-P., Another point, Message *Hyacinthos* # 1103 du 03/07/2000

111 La réciproque est une idée de l'auteur.
Ayme J.-L., Two perpendicular lines, *Mathlinks* du 06/05/2009 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=275376.

2. Un résultat de Floor van Lamoen

VISION

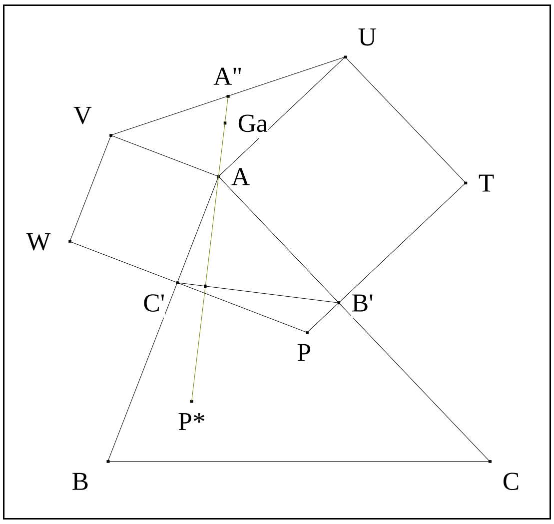
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point,
B', C' les pieds des perpendiculaires issues de P resp. sur (AC), (AB),
B'TUA, C'AVW deux carrés extérieurs à ABC,
Ga le point médian du triangle AUV
et P* le conjugué isogonal de P relativement à ABC.

Donné : P*, A et Ga sont alignés [112].

VISUALISATION



- Notons A" le milieu du segment [UV].

[112] van Lamoen F., Pedal flanks, Message *Hyacinthos* # 6097 du 01/12/2002.

- **Scolie :** A", Ga et A sont alignés.

- D'après VI. 1. D'une hauteur à une médiane, la A-médiane de AUV est la A-hauteur du triangle AC'B'.

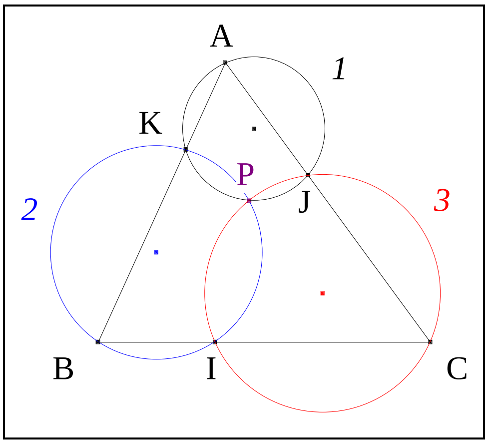
- D'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 12), la A-hauteur de AC'B' i.e. (AGa) est l'isogonale de (AP) relativement à ABC ; en conséquence, (AGa) passe par P*.

- **Conclusion :** P*, A et Ga sont alignés.

Note historique : Floor van Lamoen a directement considéré la vision triangulaire ; sous ce point de vue, il propose trois droites concourantes en P*.

D. ANNEXE

1. Le théorème du pivot[113]

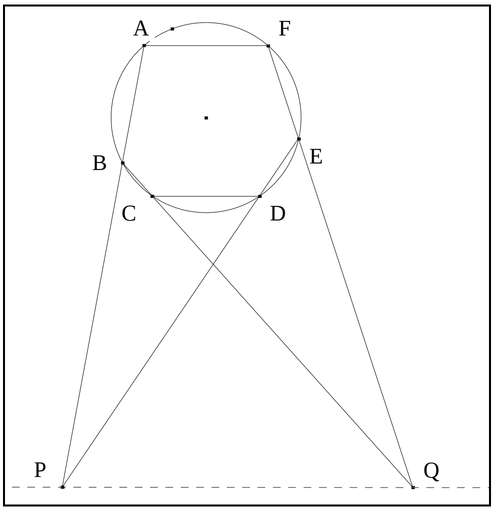


Traits : *1, 2, 3* trois cercles sécants deux à deux,
K, P les points d'intersection de *1* et *2*,
I l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
J l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
A un point de *1*,
B le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et C le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

2. Un résultat d'Aubert[114]

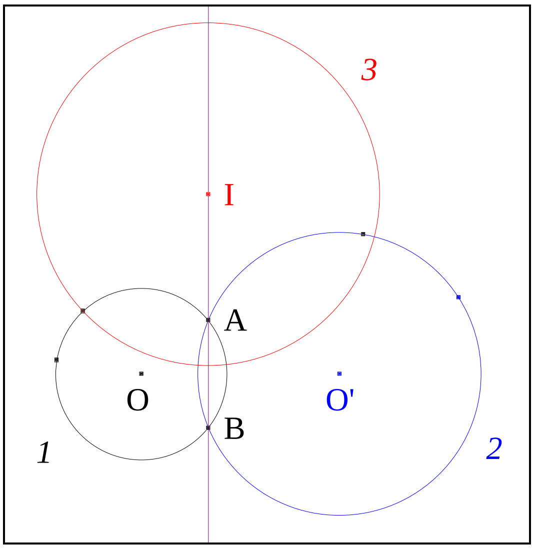
[113] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.
[114] La condition nécessaire est de Paul Aubert.



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDE	un pentagone inscrit dans *1*,
	F	un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
et	P, Q	les points d'intersection de (AB) et (DE), de (BC) et (EF).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si*, (PQ) et (AF) sont parallèles.

3. Axe radical de deux cercles sécants[115]



Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	3	un cercle orthogonal à *2*
et	I	le centre de *3*.

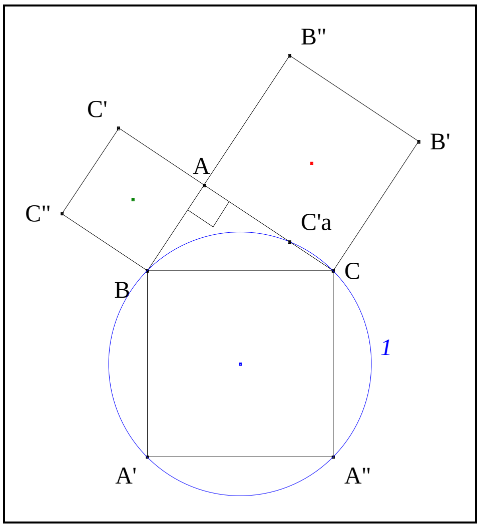
Donné : I est sur la droite (AB) *si, et seulement si*, *3* est orthogonal à *2*.

4. Un point sur *1*

VISION

115 Gaultier (de Tours) Louis, Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique*, *Cahier* **16** (1813) 124-214.

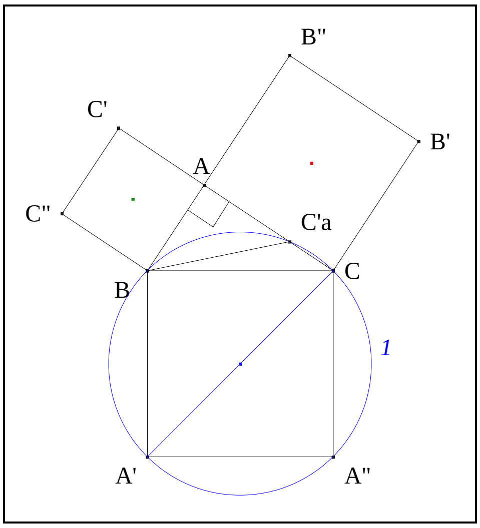
Figure :



Traits :	ABC	un triangle rectangle en A,
	CB'B"A, AC'C"B, BA'A"C	trois carrés resp. extérieurs à ABC,
	1	le cercle circonscrit à BA'A"C
et	C'a	le symétrique de C' par rapport à A.

Donné : C'a est sur *1*.

VISUALISATION



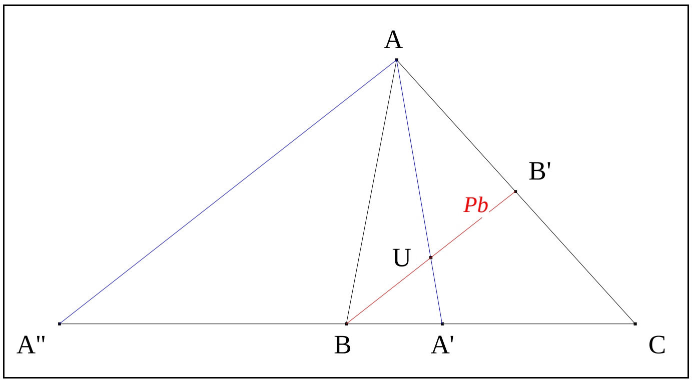
- Notons X le second point d'intersection de (CAC') avec *1*.

- Le quadrilatère A'CXB étant cyclique, <AXB = <CA'B (= 45°) ;
  en conséquence, le triangle ABX est rectangle-isocèle en A.

- Nous avons : AX = AB = AC' ;
  en conséquence, X et C'a sont confondus.

- **Conclusion :** C'a est sur *1*.

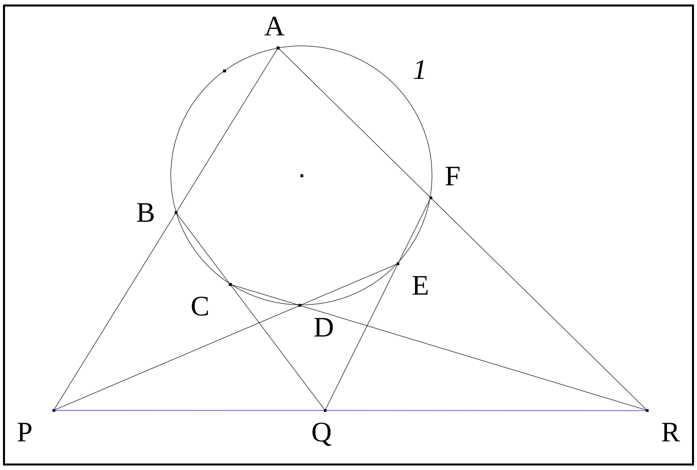
5. La proposition 137 de Pappus [116]



Traits : ABC un triangle,
A', A" deux points de (BC),
*P*b une B-cévienne de ABC,
B', U les points d'intersection de *P*b resp. avec (AC), (AA').

Donné : la quaterne (B, C, A', A") est harmonique
si, et seulement si,
U est le milieu de [BB'].

6. Hexagramma mysticum[117]

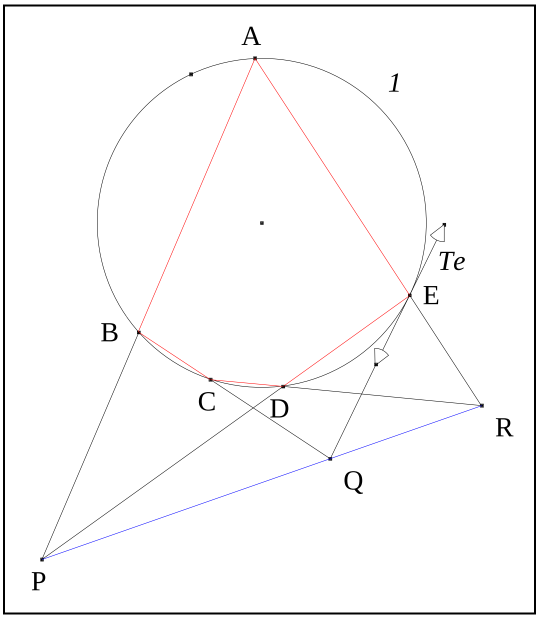


Traits : *1* un cercle,
ABCDEF un hexagone tels que les points A, B, C, D, E soient sur *1*,
et P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE), (BC) et (EF), (CD) et (FA).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.

7. Pentagramma mysticum[118]

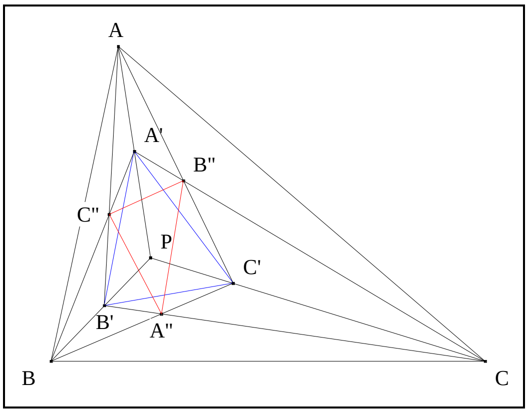
116 Pappus, *Collections*, Livre VII.
117 Pascal B. (1640)
118 Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie* (1801) 455-456.



Traits :	*1*	un cercle,
	ABCDEA	un pentagone tels que les points A, B, C, E soient sur *1*,
	Te	la tangente à *1* en E
et	P, Q, R	les points d'intersection des droites (AB) et (DE), (BC) et Te, (CD) et (EA).

Donné : D est sur *1* *si, et seulement si,* les points P, Q et R sont alignés.

8. Le théorème desmique [119]

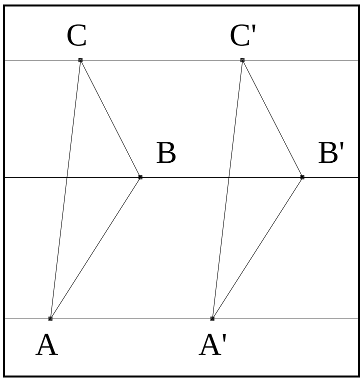


Traits :	ABC	un triangle,
	A'B'C'	un triangle en perspective avec ABC,
	P	le centre de perspective,
et	A", B", C"	les points d'intersection resp. de (BC') et (B'C), de (CA') et (C'A), de (AB') et (A'B).

Donné : ABC et A"B"C" sont en perspectives.

9. Le petit théorème de Desargues

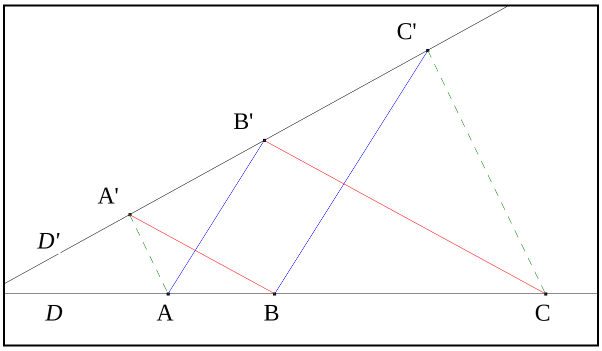
[119] Papelier G., *Exercices de Géométrie Moderne*, Paris (1927), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1996) ; Division et faisceau harmoniques n° 37 p. 28;
ce résultat a été redécouvert par Floor van Lamoen.



Traits :		ABC	un triangle,		
	et	A'B'C'	un triangle tel que	**(1)**	(AA') soit strictement parallèle à (BB')
				(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
				(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') est parallèle à (BB') *si, et seulement si*, (AC) est parallèle à (A'C').

10. Le petit théorème de Pappus[120]

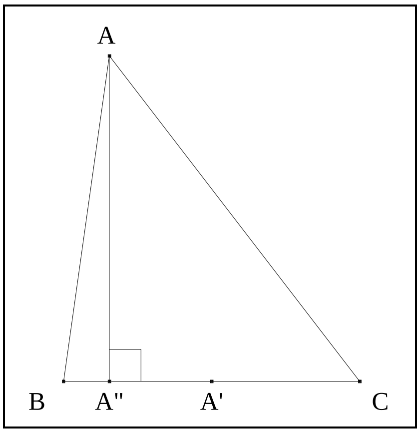


Traits :		*D*, *D'*	deux droites,
		A, B, C	trois points pris dans cet ordre sur *D*,
		B'	un point
	et	A', C'	deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

11. Différence de deux carrés

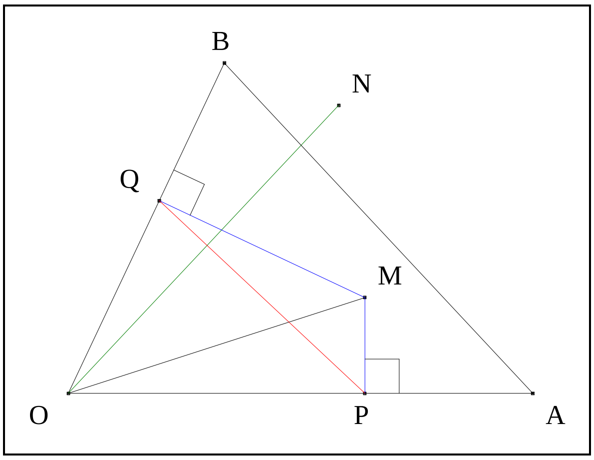
[120] Pappus, *Collections* Livre VII.



Traits : ABC un triangle,
A' le milieu de [AB],
et A" le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur (BC).

Donné : $AB^2 - AC^2 = 2.\overline{BC}\,.\,\overline{A'A''}$.

12. Isogonale et perpendiculaires [121]

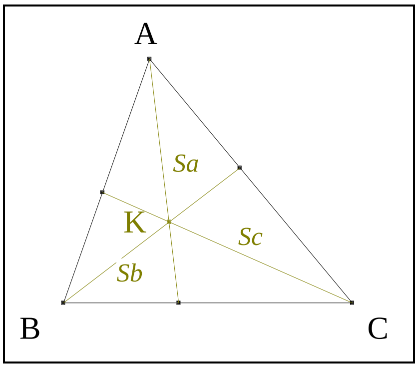


Traits : OAB un triangle,
M un point,
P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (OA), (OB),
et N un point.

Donné : (ON) est l'isogonale de (OM) relativement à (OA) et (OB)
si, et seulement si,
(ON) est perpendiculaire à (PQ).

13. Le point de Lemoine

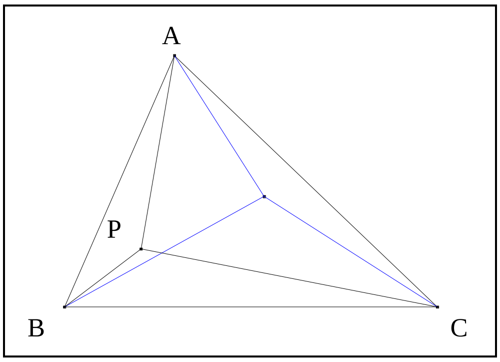
[121] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-.



Traits : ABC un triangle
et *S*a, *S*b, *S*c les A, B, C-symédianes de ABC.

Donné : *S*a, *S*b et *S*c sont concourantes[122].

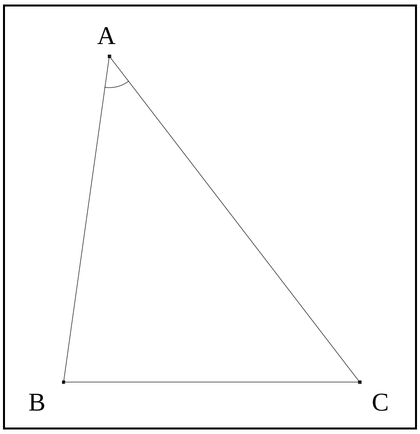
14. The isogonal theorem [123]



Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC
et *Da* , *Db* , *Dc* les isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

Donné : *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

15. La formule d'al-Kaschi



Traits : ABC un triangle,

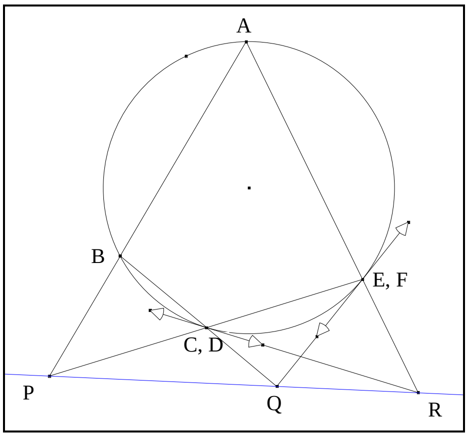
---

122 Lemoine E., Sur un point remarquable du triangle, Congrès de Lyon (1873).
123 Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.

	A'	le milieu de [AB],
et	A"	le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur (BC).

Donné : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\angle BAC$.

16. Tetragramma mysticum

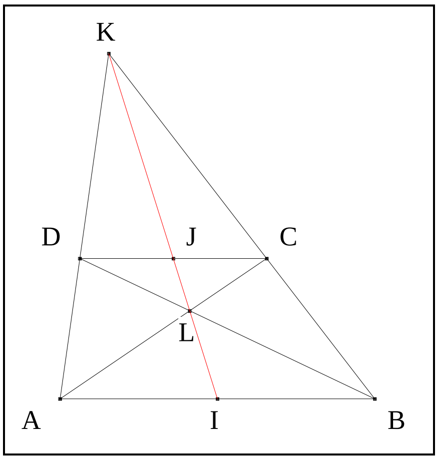


Traits :

0		un cercle,
ABCEA		un quadrilatère tels que les points A, C, E soient sur *0*,
Tc, Te		les tangentes à *0* resp. en C, E
et	P, Q, R	les points d'intersection resp. de (AB) et (CE), (BC) et Te, Tc et (EA).

Donné : B est sur *0* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

17. Le trapèze complet



Traits :

	ABCD	un quadrilatère,
	I	le milieu de [AB],
	J	le milieu de [CD],
	K	le point d'intersection de (AD) et (BC)
et	L	le point d'intersection de (AC) et (BD).

Donné : ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD)
si, et seulement si,
I, J, K et L sont alignés.