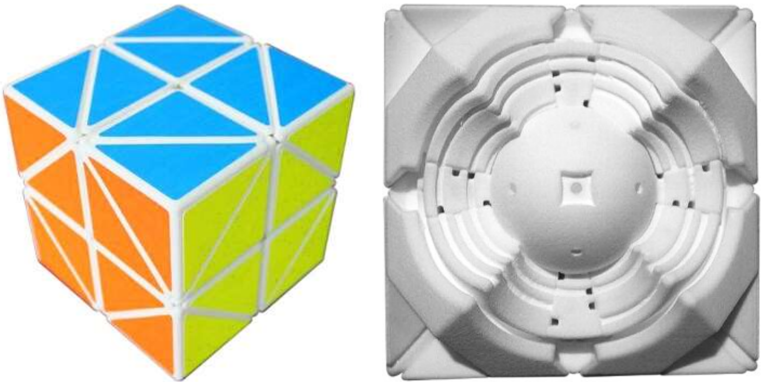
Helicopter Cube Tutorial (1)
直升机魔方教程（一）

Yujian Song (宋雨键)

我们已经知道了直升机魔方是菱 12 轴类的典型魔方，并且可以进行 jumble 旋转。但是非 jumble 状态下的直升机也非常的具有理论意义，它的中心块分为四个不交的簇类，分析其置换也需要特别的方法，因此我们这里先求解无 jumble 转动的直升机——打乱和还原都不能进行 jumble，即每条棱都只能旋转 180°。有一个单词用来形容这种不能 jumble 的直升机魔方——HeliDoctre Cube，它是 helicopter 和 doctrinaire cube 的合成词，我们这里简单起见还是管这种魔方叫直升机。



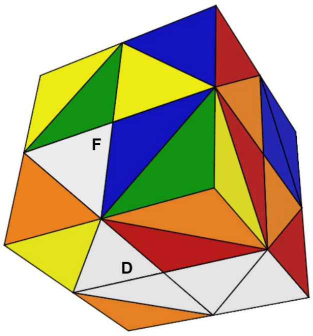
HeliDoctre Cube，图源 TwistyPuzzles

转动规定

仍然像三阶魔方那样拿好直升机，我们用两个字母表示相应的棱块原地旋转 180°，例如 **UF** 表示 uf 方向的棱块旋转 180°。我们用层先法进行复原。

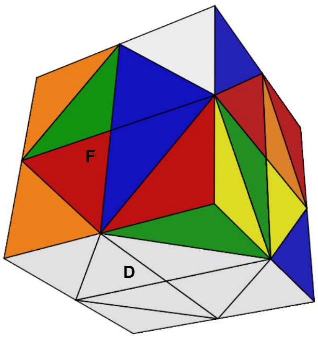
第一步：复原底面四个中心块

任意以一个面为底，简单操作就能完成该步，例如下图以白色为底可以做 **DL DF DL** 复原。



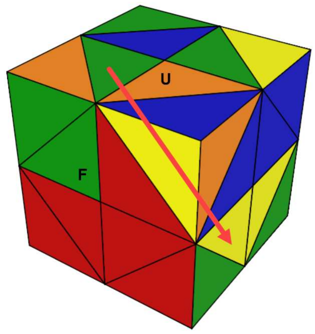
第二步：复原底层四个角块

将角块转到对应位置的上方，通过旋转棱块即可复原。
角块的色向可以通过在上层绕行一周进行调整，例如图示情况可以做 **UF UL UB UR**，将色向调整好，再做 **FR** 归位。

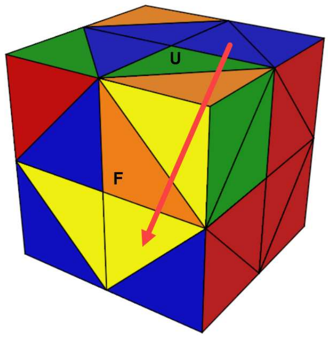


第三步：复原底层周围的中心块

用以下两个公式，其原理很好理解，与三阶层先法复原中层棱块类似。



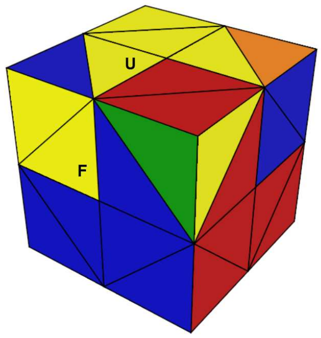
FR UR UF UR FR



FR UF UR UF FR

第四步：复原剩下的中心块

剩下的中心块有一个很容易看出的转换机公式，由于转动 **UF** 与 **UR** 影响的公共元素只有一个角块一个中心块，可得如下公式：

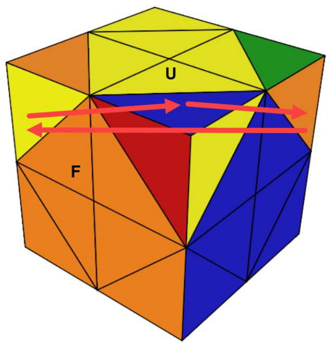


[UF, UR] = UF UR UF UR

同理有逆序的三循环公式，利用这两个公式不难将所有中心块复原。

第五步：复原角块

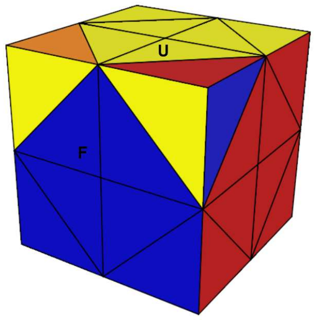
借助上一步的三循环，我们可以再次构造一个转换机。注意到**[UF, UR]**与 **FR** 影响的公共角块只有一个，不难得到仅针对角块的三循环公式**[[UF, UR], FR]**，我们调整一下方向可以得到顶层角块的三循环公式：



[[UF, FR], UR] = UF FR UF FR UR FR UF FR UF UR

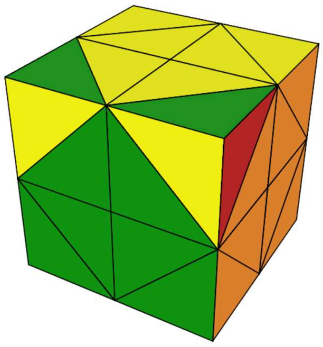
于是有了三循环公式后我们可以通过三循环生成翻转色相的公式，只需用三循环和某一个翻角的操作（例如角块绕一周）生成换位子即可，于是是**[[[UF, FR], UR], FL DL BL UL]**是一个翻角公式。这里介绍一个更简单的翻角公式，如果有多个角要

翻转可以通过连续用多次两角翻解决。



(UL UR UB UL UR UF)2

现在有了三循环，有了翻角公式，我们似乎已经能够复原剩下的部分了，但是不幸的是，顶层的角块可能是一个奇置换，它不能用三循环复原，也就是说，最后我们可能会遇到这个情况：



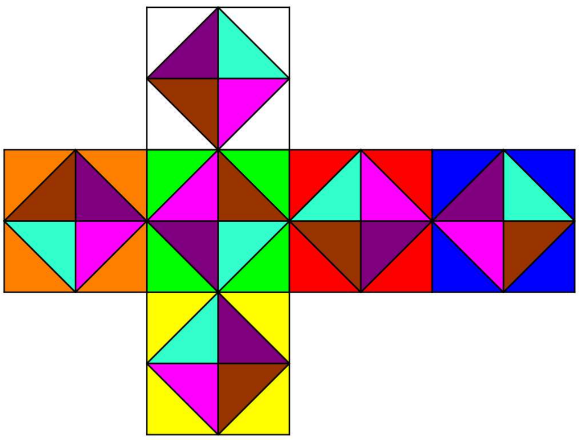
怎么进行两角换呢？这正是这篇文章真正想讨论的问题。
先讨论一个概念。

簇

簇实际上是很基本的一个概念。魔方的一个块，经过一系列旋转操作，可以到达一些其他块的位置，但又不能到达另外的位置。例如说普通三阶魔方的角块，不管怎么旋转，只能取代其他角块的位置，始终不能取代某个棱块的位置。我们把这些可以通过转动互相交换位置的块称为一个簇，比如三阶魔方的角块簇，棱块簇等等。

用群的观点可以严格的定义簇：对一个 doctrinaire cube，考虑其置换群在魔方所有块组成的集合上的自然作用，则该作用的轨道称为簇。

并不一定形状一样的块都属于同一个簇，一个非常简单的例子是，斜转魔方的角块被分成了两个簇。而如果限制三阶魔方只能进行 180°的转动，那么它的角块被分成两个簇，棱块被分成三个簇。
我们正准备复原的直升机——确切的说，HeliDoctre Cube，它的所有角块属于一个簇，而中心块被分成了四个簇：

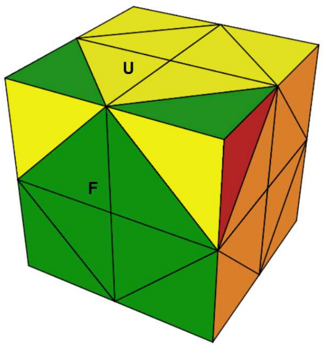


如图，直升机的中心块只能与被同种颜色标记的中心块进行交换，例如被青色标记的块无论怎么转动魔方，都只能转到青色的位置上，而不能转到其他位置。
回到我们的问题，怎么解两角换呢？两角换是角块簇的奇置换，而直升机的每一步转动，都将角块簇做一次奇置换，中心块任意两个簇做一次奇置换，如果要利用三循环公式复原魔方，就必须使所有簇内都是偶置换。

用置换的符号数来表示一个簇内置换的奇偶（奇置换用-1表示，偶置换用1表示，容易验证这样数的乘积与置换的乘积奇偶性是协调的，例如$1\times(-1)=-1$，表示一个偶置换复合上一个奇置换等于奇置换），我们得到下面的模型：
四个中心块簇$f_1,f_2,f_3,f_4=\pm1$，角块簇$v=\pm1$，直升机的每一次转动即是从中心块簇中选出两个f_i,f_j并让他们和v一起乘以-1。能够用三循环进行复原的状态对应于$f_1=f_2=f_3=f_4=v=1$。
两角换对应的状态为$f_1=f_2=f_3=f_4=1$，$v=-1$，要通过上面的变换将其变为$f_1=f_2=f_3=f_4=v=1$，不难想到，可以先f_1f_2v同时乘以-1，f_2f_3v同时乘以-1，再f_1f_3v同时乘以-1。

我们在上面构造的这个模型$\{f_1,f_2,f_3,f_4,v\}$，也可以看作是一种 puzzle，其转动规则如上所说，为选取两个f_i,f_j并让他们和v一起乘以-1，而复原状态是$f_1=f_2=f_3=f_4=v=1$。这个 puzzle 与开始的直升机魔方有着重要的联系。具体说来，直升机（HeliDoctre Cube）的所有置换生成了一个群G，这些置换中保持每个簇内奇偶性不变的置换也构成了一个群G_0，它是直升机置换群的正规子群，而刚才的 puzzle 对应的群，正是商群G/G_0。对每一个 doctrinaire cube，都可以如此定义出一个商群G/G_0，通过复原这个商群中的 puzzle，可以调整好原始魔方中的置换使其能用纯粹的三循环复原。
复原商群中的 puzzle 通常是非常容易的，由于所有的换位子均不改变簇内奇偶性，故G的导群$[G,G]$包含于上述G_0，也即商群G/G_0是 Abel 群，于是它的结构将可以通过其阶数$|G/G_0|$简单讨论得到。例如一般的三阶魔方，该商群就同构于二阶单位根群$U_2^\times=\{1,-1\}$，因此若三阶魔方的置换奇偶性需要调整，只需任意做一次 90° 转动即可，这与我们之前的分析是一致的。

通过上面的分析，想要调整直升机魔方的置换，只需连续改变三对中心块簇的奇偶即可，例如上图中先改变粉色簇和褐色簇，再改变褐色簇和青色簇，最后再改变青色簇和粉色簇。于是一种最简单的操作是直接做 **UF FR UR**。
接下来再将所有中心块用三循环换回原处，适当调整三循环的顺序和消步我们得到两角换的公式 **UF FR UR [UF, FR] [FR, UR] [UF, UR] = UF FR UR UF FR UF UR FR UR UF UR UF UR**。



UF FR UR UF FR UF UR FR UR UF UR UF UR

至此魔方复原。