<u>Örnek Uzay, Olay ve Sınıf</u>

İstatistik: Rasgelelik içeren olaylar, süreçler ve sistemler hakkında modeller kurmak ve bu modellerden sonuçlar çıkarmada gerekli bilgileri sağlayan bilim dalıdır.

Rasgele olay: Bir deney aynı koşullar altında birçok kez tekrar edildiğinde sonuçlar belli bir kurala bağlı olmaksızın her defa değişebiliyorsa bu olaya *rasgele olay* denir.

Örnek: Zar atma deneyinin altı değişik sonucu vardır. Deney tekrarlandığında hangi sonucun çıkacağını belirleyen bir kural yoktur. Sonuçlar rasgele olarak ortaya çıkar. "Zar 6 gelirse A kişisi kazanır." şeklinde bir olay rasgeledir.

Fakat, "taş bırakıldığında düşer" deneyinde sonuç hep aynıdır. Bu olayda rasgelelik yoktur. Çünkü deneyin sonucu veren bir kural vardır. O da "Newtonun çekim kanunudur. Ancak, taşın düşeceği nokta her seferinde aynı olmayacaktır. Rasgele olarak değişir. "İnsan doğar, yaşar ve ölür" Ölüm kesindir rasgele değildir. Fakat, yaşam süresi rasgeledir.

Örnek Uzay: Bir deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine *örnek uzay* denir. (S, Ω) ile gösterilir. Örnek uzayın bir elemanına örnek nokta veya örnek denir.

Olay: Örnek uzayın herhangi bir alt kümesine *olay* denir.

Örnek: Hilesiz bir tavla zarı atıldığında çıkabilecek bütün sonuçların kümesi örnek uzay olup $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$dır. Zarın çift sayı gelmesi A olayı ve tek sayı gelmesi B olayı, asal sayı gelmesi C olayı olsun,

$A=\{2,4,6\}$ $B=\{1,3,5\}$ $C=\{2,3,5\}$

Örnek: Hilesiz düzgün bir madeni paranın üç kez atılması deneyinde örnek uzay,

$\Omega =\{YYY,YYT,YTY,TYY,TTY,TYT,YTT,TTT\}$

A olayı arka arkaya en az iki yazı gelmesi,

$A=\{YYY,YYT,TYY\}$

B olayı her üçünün de yazı veya tura gelmesi

$B=\{YYY,TTT\}$

Sınıf: Ω'nın alt kümelerinden oluşan kümeye denir. (U ile gösterilir.)

Örnek: $\Omega\ =\{1,2,3,4,5,6\}$ olsun.

$U_1=\{\emptyset,\{1\},\{1,4\}\}$ Ω'da bir sınıftır.

$U_2=\{\{1\}\}$ Ω'da bir sınıftır.

$U_3=\{1\}$ Ω'da bir sınıf değildir.

Örnek: $\Omega\ =\{a,b,c,d\}$ olsun.

$U_1=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},\Omega\}$ Ω'da bir sınıftır.

$U_2=\{\Omega,\emptyset\}$ Ω'da bir sınıftır.

$U_3=\{\{a\},\{a,c\},b,\emptyset\}$ Ω'da bir sınıf değildir.

Kuvvet kümesi: Ω'nın bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıftır. $\sigma(\Omega)$ şeklinde ifade edilir. Küme *n* elemanlı ise, kuvvet kümesindeki alt kümelerin sayısı 2^ndir.

***σ*-Cebir:** $\Omega\neq\emptyset$ ve U,Ω'dabir sınıf olmak üzere

i. $\Omega\in U$
ii. $A\in U\ \rightarrow \bar{A}\ \in\ U$
iii. $(A_n), U'$daki kümelerin bir dizisi $\rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in U$

Özelliklerini sağladığında *U*'ya *Ω*'da σ-cebir denir.

Örnek: $\Omega\ =\{a,b,c,d\}$ olsun.

$U_1=\{\emptyset,\{a\},\{b,c,d\},\Omega\}$ U_1 sınıfı σ-cebirdir.

$U_2=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$ U_2 sınıfı σ-cebir değildir.

$U_3=\{\Omega,\emptyset\}$ U_3 sınıfı σ-cebirdir.

Olasılık ölçüsü: Ω, boş olmayan bir küme, *U*'da Ω üzerinde bir sigma cebir olsun. *U* üzerinde tanımlı,

$P{:}\,U\rightarrow[0,1]$

$A\rightarrow P(A)$

P küme fonksiyonu,

i. $\forall A \in U \; için \; P(A) \geq 0$
ii. $P(\Omega) = 1$
iii. $A_n, n \in N \; ler \; U \; daki \; ayrık \; (A_k \cap A_j \neq \emptyset, k \neq j)$ olayların bir dizisi olmak üzere, $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A)$ özelliklerini sağlıyorsa, P ye *olasılık ölçüsü*, P(A) sayısına A olayının olasılığı, (Ω,U,P) üçlüsüne de bir *olasılık uzayı* denir.

Koşullu Olasılık ve Bağımsızlık

$A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ olup, $A \subset \Omega$ ve $B \subset \Omega$ olsun. B olayı olduktan sonra A olayının olma olasılığı A'nın *koşullu olasılığı* olarak adlandırılır.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$$

(Ω,U,P) bir olasılık uzayı olsun. $A, B \in U$ olayları için $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ise A ve B olayları *bağımsızdır* denir. Daha genel olarak,

$$P(A_1 \cap A_2 \dots \dots . \cap, A_n) = P(A_1).P(A_2) \dots \dots P(A_n)$$

ise $A_1, A_2, \dots \dots, A_n$ olayları *n-li bağımsızdır* denir.

Rasgele Değişkenler ve Dağılımları

Rasgele değişken örnek uzaydaki her rasgele olaya sayısal bir değer atayan bir fonksiyondur.

Kesikli Rasgele Değişken ve Dağılımı

X rasgele değişkeni sonlu veya sayılabilir sonsuzluktaki değerleri alıyorsa kesikli rasgele değişkendir.

Örnek: Hilesiz düzgün bir madeni paranın ard arda iki kez atılması deneyinde;

i) X rasgele değişkeni "Turaların sayısı" olsun

$$\Omega = \{YY, YT, TY, TT\}$$

$$D_x = \{0,1,2\}$$

X rasgele değişkeni, sonlu değer aldığından kesikli rasgele değişkendir.

ii) X rasgele değişkeni "İlk tura gelinceye kadar yapılan atış sayısı" olsun

$$\Omega = \{T, YT, YYT, YYYYT, YYYYYT, \ldots \ldots\}$$

$$D_x = \{1,2,3,4,5, \ldots \ldots\}$$

X rasgele değişkeni, sayılabilir sonsuzlukta değer aldığından kesikli rasgele değişkendir.

X, sonlu sayıdaki $x_1, x_2, x_3, , \ldots ., x_n$ değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i)$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ olasılıkları ile alabilen kesikli bir rasgele değişken olsun. Bu durumda,

i) $P(X = x_i) \geq 0$

ii) $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

koşullarını sağlıyorsa $f(x)$ fonksiyonuna $X'in$ olasılık fonksiyonu denir.

Bir X rasgele değişkenin $x'e$ eşit ya da küçük olması olasılığına X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu denir ve $F(x) = P(X \leq x)$ şeklinde gösterilir.

Dağılım fonksiyonu $F(x)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $F(x)$, x'in azalmayan bir fonksiyonudur.

ii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Sürekli Rasgele Değişken ve Dağılımı

Bir X rasgele değişkeni belli bir aralıkta verilmiş sonsuz sayıdaki değeri alıyorsa, sürekli rasgele değişkendir.

$X \in (-\infty, \infty)$ aralığında negatif olmayan bir $f(x)$ fonksiyonu varsa bu fonksiyon,

i) $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Koşullarını sağlıyorsa olasılık yoğunluk (o.y.f) fonksiyonudur.

$X, f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rasgele değişken olsun. X'in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

olarak tanımlanır.

Değer kümesi D_x olan sürekli bir X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu $F(x)$ olsun. X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{dF(x)}{dx} & , \quad F\ nin\ türevlenebildiği\ yerlerde \\ 0 \quad d.y. & \end{cases}$$

dır. Ve $a \leq b$ olmak üzere herhangi a ve b gerçel sayıları için

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$$

dır.

Bir Rasgele Değişkenin Beklenen Değeri

X bir rasgele değişken olmak üzere, beklenen değeri

a) Kesikli X rasgele değişken için,

$$E(X) = \sum_x xP(X = x)$$

b) Sürekli X rasgele değişken için,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

şeklindedir.

Beklenen Değerin Özellikleri

c bir sabit, $X\ ve\ Y$ rasgele değişkenler olmak üzere,

a) $E(c) = c$
b) $E(X + c) = E(X) + c$
c) $E(cX) = cE(X)$
d) $x \geq 0 \ \rightarrow E(x) \geq 0$
e) $x \leq y \rightarrow E(x) \leq E(Y)$

f) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

g) $|E(X)| \leq E(|X|)$

h) $X \; ve \; Y \; 'nin \; bağımsız \; olduğu \; varsayımı \; altında$

$E(XY) = E(X)E(Y)$

i) $E(X^2) \neq [E(X)]^2$

j) $E(aX+b) = aE(X) + b$

Bir Rasgele Değişkenin Varyansı

X bir rasgele değişken olmak üzere, varyans

a) Kesikli X rasgele değişkeni için,

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E[(X-\mu)^2] = E[(X-E(X))^2] = \sum_x \big(x - E(X)\big)^2 P(X=x)$$

b) Sürekli X rasgele değişkeni için,

$$Var(X) = \sigma_x^2 = E[(X-\mu)^2] = E[(X-E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - E(X)\big)^2 f(x)dx$$

X bir rasgele değişkenin standart sapması ise $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ şeklinde hesaplanır.

Aşağıdaki eşitlik ise, varyansın hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Varyansın Özellikleri

c bir sabit, X rasgele değişken olmak üzere,

a) $Var(c) = 0$

b) $Var(X+c) = Var(X)$

c) $Var(cX) = c^2 Var(X)$

Örnek: Yazı gelme olasılığı 2/3 ve tura gelme olasılığı 1/3 olan bir madeni paranın 3 kez atılması deneyinde X rasgele değişkeni üst yüze gelen yazı sayısı olsun. X'in beklenen değerini ve varyansını hesaplayınız.

$$\Omega = \{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, TYT, YTT, TTT\}$$

$$D_x = \{0,1,2,3\}$$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{3} xP(X=x)=0\frac{1}{27}+1\frac{6}{27}+2\frac{12}{27}+3\frac{8}{27}=2$$

$$E(X^2)=\sum_{i=0}^{3} x^2P(X=x)=0^2\frac{1}{27}+1^2\frac{6}{27}+2^2\frac{12}{27}+3^2\frac{8}{27}=4.67$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=4.67-2^2=0.67$$

Örnek: X rasgele değişkeni belli bir merkezden alınan A marka deterjana talep (kg) olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{4}, 0\le x\le 2\\ \frac{1}{2}, 2\le x\le 3\\ 0, \qquad d.y\end{cases}$$

olsun. Beklenen haftalık deterjan talebini ve varyansını hesaplayınız.

$$E(X)=\int xf(x)dx=\int_0^2 x\frac{x}{4}dx+\int_2^3 x\frac{1}{2}dx=\frac{23}{12}$$

$$E(X^2)=\int x^2f(x)dx=\int_0^2 x^2\frac{x}{4}dx+\int_2^3 x^2\frac{1}{2}dx=\frac{25}{6}$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{25}{6}-\left(\frac{23}{12}\right)^2=0.49$$