

Ватугин Э.И.¹, Никитина Н.Н.², Манзюк М.О.³, Курочкин И.И.⁴, Альбертьян А.М.⁵,
Крипачев А.В.¹, Пыхтин А.И.¹

¹ Юго-Западный государственный университет, Курск

² Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН,
Петрозаводск

³ Интернет-портал VOINC.ru, Москва

⁴ Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва

⁵ ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРОВ БЫСТРОВЫЧИСЛИМЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Аннотация. В работе представлены текущие результаты вычислительных экспериментов, связанных с построением спектров быстроисчисляемых числовых характеристик диагональных латинских квадратов (ДЛК). Приведено описание используемых методов (полный перебор на базе классов эквивалентности, получаемых с использованием генератора канонических форм, X-образных диагональных заполнений и ESODLS CMS схем, для ДЛК малых порядков; эвристические алгоритмы на базе построения и анализа окрестностей ДЛК из заданных опорных спектров). С использованием эвристических методов удалось усилить верхнюю оценку минимального числа трансверселей в ДЛК порядка 13 до 43 979 и нижнюю оценку мощности спектра числа трансверселей в ДЛК порядка 13 до 74 262.

Ключевые слова: диагональные латинские квадраты, спектры числовых характеристик диагональных латинских квадратов, добровольные распределенные вычисления, VOINC, OEIS.

Латинские квадраты (ЛК) являются достаточно известным типом комбинаторных объектов, диагональные латинские квадраты (ДЛК) представляют собой их подмножество с ограничением на дублирование значений на диагоналях квадрата [1, 2]. Для ЛК и ДЛК может быть произведен расчет ряда числовых характеристик (число трансверселей, диагональных трансверселей, интеркалятов, ортогональных соквадратов, циклов и пр.), которые имеют как чисто фундаментальный интерес, так и выступают в качестве промежуточных числовых величин, например, при оценке временной сложности алгоритмов, оперирующих с ЛК. Множество значений выбранной числовой характеристики для заданной размерности и типа квадрата образует спектр, который имеет ряд параметров (минимальное/максимальное значение, мощность, ширина). Кроме того, ряд спектров характеризуются интересными особенностями, которые в настоящее время не имеют теоретического объяснения (например, все известные значения в спектрах числа трансверселей в ДЛК общего вида для четных порядков кратны 2, а для порядка 10 – 4). Числовые характеристики комбинаторных объектов коллекционируются в рамках Онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. OEIS) [3], в настоящее время включающей в своем составе более 350 тыс. числовых рядов.

Спектры быстроисчисляемых числовых характеристик порядков $N \leq 8$ возможно вычислить на одной машине [4]. Для порядка $N = 9$ расчет спектров был выполнен с использованием ряда особенностей (разбиение на классы эквивалентности (линейки) с использованием X-образных диагональных заполнений и ESODLS CMS схем [5]) в рамках

проектов добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home¹ и RakeSearch² на платформе BOINC, на что потребовалось около 5 месяцев расчетов. Для порядка 9 также была произведена аппроксимация спектров с использованием эвристических методов, число полученных таким образом элементов спектров составило величину 88–97% от максимально возможного (данная размерность является последней, для которой в настоящее время на современном уровне развития средств вычислительной техники возможно построение полных спектров).

Для размерностей $N > 9$ возможно построение только аппроксимаций спектров [6]. Для этого выбирается опорный спектр и для него производится построение ряда расширений с использованием окрестностей от поворота интеркалятов, коротких циклов и диагонализации [7]. Анализ окрестностей можно выполнять для спектра целиком или для отдельных квадратов в его составе. Первое преобразование требует значительно меньших вычислительных затрат по сравнению со вторым, однако и получаемый в его результате спектр имеет меньшую мощность.

В настоящее время с использованием проектов добровольных вычислений произведено построение аппроксимаций спектров числа диагональных трансверсалей в ДЛК до порядка $N = 15$ включительно (спектры больших порядков по ряду оценок характеризуются мощностями в несколько десятков миллионов элементов, будут занимать несколько десятков ГБ, их построение в настоящее время является весьма ресурсоемким и представляется нецелесообразным). Для этого были использованы процедуры расширения спектров с использованием окрестностей на базе интеркалятов и циклов, соответствующий программный код был разбит на подзадачи, которые были обчислены в грид. Поквадратное расширение указанных спектров [6] было произведено до размерности $N = 13$ включительно, построение спектров для более старших порядков с использованием данной процедуры потребует минимум десятков лет счета в грид и нецелесообразно, ввиду чего для порядков 14 и 15 построение аппроксимаций спектров числа диагональных трансверсалей производилось только для опорных спектров целиком.

Аппроксимации спектров числа трансверсалей в ДЛК в настоящее время построены до порядка $N = 12$ включительно, вычислительные эксперименты по построению спектра для порядка $N = 13$ в настоящее время выполняются в проекте RakeSearch. Пример, схематично поясняющий построение данного спектра в графическом виде, приведен на рис. 1.

¹ <https://gerasim.boinc.ru>

² <https://rake.boincfast.ru/rakesearch/>



Рис. 1. Схема эксперимента с построением спектра числа трансверселей в ДЛК порядка 13

В рамках одной подзадачи (сокр. WU) на клиентскую машину передается один из квадратов L_i опорного спектра S_0 (общее число подзадач равно его мощности $|S_0|$). Для

заданного квадрата L_i на клиенте производится формирование указанной окрестности $\alpha(L_i)$ (в текущей серии экспериментов окрестности были получены путем поворота 1 интеркалята (средний столбец графиков на рис. 1) или 1 цикла (правый столбец графиков на рис. 1) в зависимости от условий эксперимента). Для всех квадратов $L_j \in \alpha(L_i)$ в составе окрестности производится расчет заданной числовой характеристики $v(L_j)$ (в данной серии экспериментов – числа трансверсалей или диагональных трансверсалей) с формированием соответствующего спектра $S'(L_j)$, данный спектр является результатом расчета и возвращается на сервер проекта. В результате постобработки результатов на сервере проекта производится обновление опорного спектра $S'_0 := S_0 \cup S'(L_1) \cup S'(L_2) \cup \dots \cup S'(L_{|S_0|})$, для новых значений $S'_0 \setminus S_0$ в его составе снова производится формирование подзадач, которые отсылаются на клиентские машины. Процесс повторяется до тех пор, пока происходит расширение опорного спектра ($S'_0 \setminus S_0 \neq \emptyset$). На начальной и завершающей стадиях расширения опорного спектра расчет целесообразно организовывать в однопоточном режиме ввиду наличия малого количества подзадач и неэффективности использования грид в подобном режиме постоянного ожидания досчета хвостов (для снижения негативного влияния данного эффекта в данные периоды расчетные задания добавляются в дедлайн в 1 сутки). Полностью однопоточное расширение спектров также неэффективно, т.к. для этого требуется от 20 до 40 суток.

В настоящее время эксперименты, связанные с расширением спектра числа трансверсалей в ДЛК порядка 13, не завершены. На данный момент мощность спектра удалось увеличить с 64 978 [7] до 74 262 элементов. В ходе построения спектра был найден ДЛК

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C
1	2	0	4	8	6	7	5	C	B	3	A	9
7	C	6	A	3	2	9	8	1	0	B	5	4
6	8	5	B	A	1	2	9	0	4	C	7	3
8	5	4	C	9	A	3	1	2	7	6	0	B
9	B	A	5	6	C	4	0	7	3	8	1	2
A	0	7	8	C	9	5	B	4	2	1	3	6
2	3	B	7	0	8	C	4	6	A	5	9	1
C	6	8	9	1	0	B	A	3	5	2	4	7
B	A	3	6	7	4	8	C	5	1	9	2	0
5	4	9	0	B	3	1	2	A	C	7	6	8
4	7	C	1	2	B	A	3	9	6	0	8	5
3	9	1	2	5	7	0	6	B	8	4	C	A

Рис. 2. ДЛК порядка 13 с рекордно малым числом трансверсалей

у которого 43 979 трансверсалей³, что является новой более сильной верхней оценкой на минимальное число трансверсалей в ДЛК порядка 13 (предыдущее известное значение [6] составляло величину 45 010).

Также в настоящее время выполняется серия экспериментов, связанных с построением спектров числовых характеристик в ОДЛК порядка 12. Младшая часть спектра числа ОДЛК в настоящее время считается в однопоточном режиме путем анализа ОДЛК, входящих в состав огромной комбинаторной структуры из ОДЛК. Старшая часть

³ http://evatutin.narod.ru/A287645_proving_list.txt

спектра считается в проекте RakeSearch для квадратов, обладающих большим числом диагональных трансверселей, с использованием распределенной версии алгоритма DLX (англ. Distributed DLX, сокр. DDLX) [8]. Схематично данный спектр изображен на рис. 3.

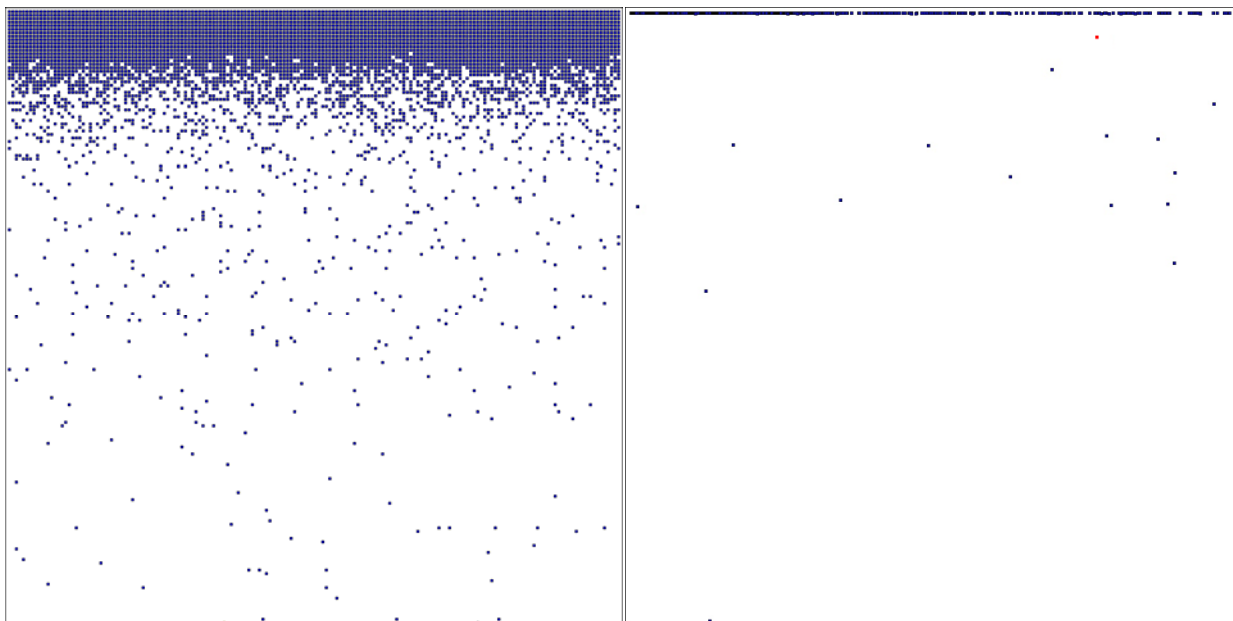


Рис. 3. Спектр числа ОДЛК в ДЛК порядка 12, нарисованный в разных масштабах (4897 элементов)

Библиографический список

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006. 1016 p.
2. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.
3. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences // <https://oeis.org/>
4. Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Альбертьян А.М., Курочкин И.И. О построении спектров быстроисчисляемых числовых характеристик диагональных латинских квадратов малого порядка // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2021). Тула, 2021. С. 7–17.
5. Ватутин Э.И., Бельшев А.Д., Никитина Н.Н., Манзюк М.О. Использование X-образных диагональных заполнений и ESODLS CMS схем для перечисления главных классов диагональных латинских квадратов // Телекоммуникации. Принята к опубликованию
6. Ватутин Э.И., Титов В.С., Пыхтин А.И., Крипачев А.В., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Альбертьян А.М., Курочкин И.И. Оценка мощностей спектров быстроисчисляемых числовых характеристик диагональных латинских квадратов порядков $N > 9$ // Наука и образование в развитии промышленной, социальной и экономической сфер регионов России. Муром, 2022. С. 314–315.
7. Ватутин Э.И., Титов В.С., Пыхтин А.И., Крипачев А.В., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Альбертьян А.М., Курочкин И.И. Эвристический метод построения аппроксимаций спектров числовых характеристик диагональных латинских квадратов // Интеллектуальные информационные системы: тенденции, проблемы, перспективы (ИИС – 2022). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2022. С. 35–41.
8. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 4А. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1. М.: Вильямс, 2013. 960 с.