1.8. Консервативные и неконсервативные силы.

1.8.1. Определение консервативных сил.

Все силы в макроскопической механике делятся на *консервативные* и *неконсервативные*.

Начнем рассмотрение с примера работы силы тяжести:

$$mg = const,$$

Пусть материальное тело переходит из точки 1, находящейся на высоте z_1, в точку 2 на высоте z_2 (рис. 8.1). Вычислим сначала работу вдоль прямой линии 1-2 (зеленая линия на рис. 8.1):

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int_1^2 mg \cdot \cos\alpha \cdot dl = mg\cos\alpha\, L_{12} = mgh = mg(z_1 - z_2)$$

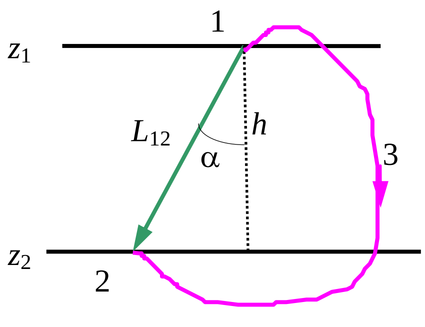

Рис. 8.1.

где $h = z_1 - z_2 = L_{12}\cos\alpha$.

Однако же эта формула справедлива при перемещении вдоль произвольной кривой, например, по пути 1-3-2. Это легко увидеть, если разбить путь на маленькие участки, считая их прямолинейными. Тогда элементарная работа на таких малых участках равна:

$$dA = mg\cos\alpha\, dl,$$

где теперь угол α – переменный угол. Суммируя по всем участкам и учитывая, что $\cos\alpha dl = dz$, получаем ту же формулу для полной работы силы тяжести, что и выше:

$$A = mg(z_1 - z_2) = U_1 - U_2 \qquad (1.8.1)$$

Здесь мы ввели функцию $U = mgz$, зависящую только от положения точки. Итак, работа силы тяжести не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.

Определение: *Консервативными называются силы, работа которых не зависит от пути перемещения, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы*.

Таким образом, работа консервативных сил не зависит от пути перехода. Сила тяжести – консервативная сила.

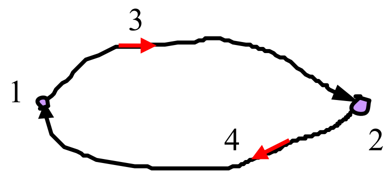

Рис.8.2.

Можно ввести другое определение консервативных сил: *работа консервативных сил по замкнутому контуру равна* 0. Легко увидеть, что эти определения эквивалентны, если рассмотрим работу по произвольной замкнутой траектории 1-3-2-4-1 (рис.8.2). В самом деле, для консервативной силы имеем:

$$A_{132} = A_{142}$$

С другой стороны работа меняет знак при изменении направления обхода, т.е. $A_{142} = -A_{241}$. Тогда и получаем:

$$A_{132} + A_{241} = 0 \qquad (1.8.2)$$

что и доказывает, что работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю.

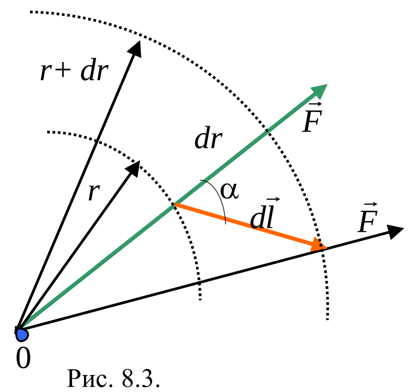

Рис. 8.3.

1.8.2. Поле центральных сил.

Это важный пример силового поля. Сила F называется *центральной*, если она направлена к одной и той же точке (или от нее) и зависит от расстояния r до этой точки, которую называют *силовым центром*:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r) = F(r)\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\vec{e}_r \qquad (1.8.3)$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора. Формула (1.8.3) действительна в системе координат, начало которой помещено в силовой центр (см рис. 8.3). Тогда элементарная работа в поле центральных сил:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = F \cdot dl\cos\alpha$$

Из рис. 8.3 легко увидеть, что

$$dl \cdot \cos\alpha = dr,$$

где dr – приращение абсолютного радиуса. Таким образом, элементарная работа также зависит только от абсолютного значения r:

$$dA = F(r)dr \tag{1.8.4}$$

Полная работа, как и в случае однородной силы тяжести, может быть записана как разность двух функций:

$$A_{12} = \int_1^2 F(r)dr = U(r_1) - U(r_2) \tag{1.8.5}$$

Примеры такого силового поля или взаимодействия: гравитационное $F = \gamma m_1 m_2 / r^2$ и кулоновское $F = kq_1 q_2 / r^2$ взаимодействия.

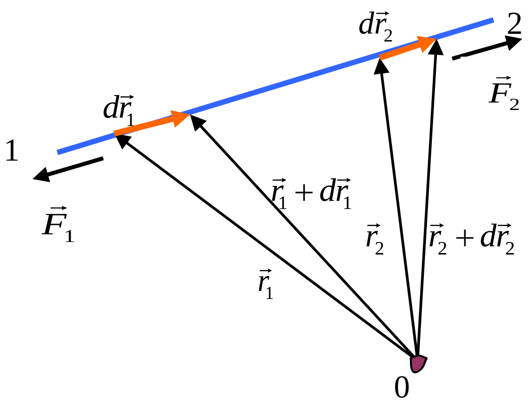

Рис.8.4.

Если имеется система 2 частиц, взаимодействующих по этим законам, тогда силы зависят только от модуля относительного расстояния $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Силы подчиняются 3-му закону Ньютона $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -\vec{F}$ и направлены вдоль прямой 1-2, соединяющей эти точки (см рис. 8.4). В общем случае перемещаются и материальная точка, и силовой центр, тогда элементарная работа при их перемещении:

$$dA = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 = \vec{F}(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} d\vec{r}$$

Здесь $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ вектор относительного расстояния. Поскольку сила направлена по вектору относительного расстояния, то работа равна:

$$dA = Fdr$$

т.е. записывается в виде алгебраического произведения (вместо скалярного произведения, как и в (1.8.4)). При этом полная работа записывается таким же интегралом (1.8.5). Таким образом, значение этого интеграла зависит только от относительного перемещения взаимодействующих точек и не зависит от абсолютных перемещений каждой из точек в отдельности.

Выводы: работа центральных сил не зависит от пути перехода. *Все центральные силы консервативны*.

1.8.3. Неконсервативные силы.

К неконсервативным силам относятся все остальные силы. Среди них выделяют *диссипативные* и *гироскопические* силы.

1) Диссипативные силы.

К диссипативным силам относятся, прежде всего, силы трения, пропорциональные силе нормального давления N:

$$F_{mp} = kN$$

где k – коэффициент сопротивления, а также любые силы сопротивления при движении тел в среде. Для жидкостей и газов обычно сила сопротивления пропорциональна скорости частицы $F_c \sim v$:

$$\vec{F}_{conp} = -r\vec{v},$$

где r – коэффициент сопротивления среды. Важно, что для *замкнутой системы работа диссипативных сил всегда отрицательна*, т.к. действие силы всегда направлено против вектора перемещения или скорости.

$$A_{mp} = \int \vec{F}_{mp} d\vec{l} = -\int F_{mp} dl < 0 \tag{1.8.6}$$

Примечание 1. Для незамкнутой системы сила трения может быть источником движения, т.е. их работа может быть положительна.

Итак, получаем определение диссипативных сил: диссипативными называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

2) Гироскопические силы.

Гироскопические силы зависят от скорости движения материальной точки $\vec{v}$ и действуют перпендикулярно этой скорости. *Работа гироскопических сил всегда равна нулю*.

Приведем примеры гироскопических сил. К ним относится, например, сила Лоренца. Сила Лоренца – это сила, действующая на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле индукции $\vec{B}$

$$\vec{F}_{лор} = q[\vec{v},\vec{B}] \qquad \text{в системе СИ} \qquad (1.8.7а)$$

$$\vec{F}_{лор} = \frac{q}{c}[\vec{v},\vec{B}] \qquad \text{в системе СГС} \qquad (1.8.7б)$$

Здесь c – скорость света, квадратные скобки означают векторное произведение векторов. Векторное произведение дает новый вектор, который перпендикулярен векторам в квадратных скобках и имеет длину:

$$\left|\vec{F}_{лор}\right| = qvB\cdot sin\,\alpha, \qquad \text{или} \qquad \left|\vec{F}_{лор}\right| = \frac{q}{c}vB\cdot sin\,\alpha \qquad (1.8.8)$$

где α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

В классической механике при описании движения относительно неинерциальной системы отсчета вводится сила Кориолиса – сила, возникающая при движении тела со скоростью $\vec{v}_{отн}$ относительно вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ системы отсчета:

$$\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{v}_{отн},\vec{\omega}] \qquad (1.8.9)$$

Модуль вектора силы Кориолиса равен:

$$\left|\vec{F}_{кор}\right| = 2mv_{отн}\omega\cdot sin\,\alpha \qquad (1.8.10)$$

где α – угол между векторами $\vec{v}_{отн}$ и $\vec{\omega}$.

Геометрический и физический смысл векторного произведения, а также гироскопические силы будут рассмотрены подробнее ниже в курсе физики.