Die mittleren Bewegungen der Planeten im Tafelwerk des KHWÂRIZMÎ

Von

J. J. BURCKHARDT (Zürich)

1. Einleitung

Seit HEINRICH SUTER von Zürich (1848—1922) die astronomischen Tafeln des al-KHWÂRIZMÎ [*1*] herausgegeben hat, sind beinahe fünfzig Jahre vergangen. In dieser Zeit sind die arabischen astronomischen Quellen weiterhin durchforscht worden. Wir verdanken insbesondere den Bemühungen von KENNEDY [*9*] eine zusammenfassende Darstellung der vorhandenen und der verlorenen astronomischen Tafeln dieses Kulturkreises. Wir möchten nachdrücklich auf diese wertvolle Arbeit verweisen, in ihr sind weitere Angaben über die im folgenden zu erwähnenden arabischen Astronomen enthalten.

Andererseits sind seit der hervorragenden Ausgabe SUTER's die Tafeln des KHWÂRIZMÎ nicht weiter auf ihren astronomischen Gehalt untersucht worden. Eine Frage, um die es sich im folgenden handelt, formuliert SUTER in seinem Kommentar auf S. 32f mit grosser Klarheit in folgenden Sätzen:

«Welchen der verschiedenen indischen Siddhântas Kh. seinen Tafeln zu Grunde gelegt habe, ist ebenfalls nicht sicher zu entscheiden; bis jetzt hat man es als ziemlich wahrscheinlich betrachtet, dass es der Brahma-Siddhânta (verfasst von Brahmagupta in der ersten Hälfte des 7. Jahrh. n. Chr.) gewesen sei [*2*]; wir werden aber weiter unten sehen, dass auch andere Siddhântas in Frage kommen können, besonders der Sûrya-Siddhânta. Dies würde darauf hindeuten, dass vielleicht Kh. auch die persischen ‚Tafeln des Shâh' zu Rate gezogen hat, die im 2. Jahrh. der Hidjra ins Arabische übersetzt worden sind, und sich wahrscheinlich auf den Sûrya-Siddhânta stützten. Besonders der Wert des Apogeums der Sonne und die Art der Berechnung der Gleichungen der Planeten könnten aus diesen persischen Tafeln genommen sein, sagt doch Ibn al-Kiftî in seiner Biographie Al-Fazârîs nach Ibn al-Adamî folgendes: ‚Er (Kh.) stützte sich in seinen Tafeln auf die mittleren Oerter des Sinhind, wich aber von ihm ab in den Gleichungen (der Planeten) und in der Schiefe (der Ekliptik); er setzte seine Gleichungen fest nach der Methode der Perser, und die Deklination der Sonne nach der Methode des Ptolemäus.' Da die letztere Behauptung, wie wir unten sehen werden, richtig ist, so mag wohl auch die erstere wahr sein, nachweisen können wir dies nicht, da diese persischen Tafeln nicht mehr vorhanden sind.»

Einer Anregung von B. L. VAN DER WAERDEN folgend, möchten wir in dieser Arbeit diese letztere Frage zu entscheiden versuchen. Dabei stossen wir auf eine Schwierigkeit, die ihren Grund darin hat, dass wir einerseits ein astronomisches Tafelwerk vor uns haben, andererseits dieses mit einem astronomischen System vergleichen wollen. Die Tafeln, um die es sich handelt, geben uns die mittleren Bewegungen von Sonne, Mond und Planeten pro Stunde, Tag, Monat, Jahr und pro 30 Jahre bis zu 570 Jahren in Grad, Minuten und Sekunden. Ferner geben sie den Stand dieser Gestirne zur Zeit der Hedschra. Aus beiden Angaben zusammen lässt sich der mittlere Ort für ein beliebiges Datum berechnen. Die Tafeln dienten insbesondere zur Herstellung von Horoskopen. Das astronomische System besteht aus der Angabe der Anzahl der Umdrehungen eines Gestirns in einer Zeiteinheit. Die indischen Systeme wählen als Zeiteinheit das Kalpa, das sind 1000 Mahâyuga, wobei ein Mahâyuga 4 320 000 Sonnenjahre enthält. Nach Voraussetzung vollführen die Gestirne je eine ganze Anzahl von Umdrehungen in einem Kalpa. Berechnet man aus der Umlaufzahl die Bewegung pro Jahr und gibt diese nur bis zu den Sekunden an, so vernachlässigt man im allgemeinen etwas. Berechnet man umgekehrt aus dieser jährlichen Bewegung (und entsprechend aus der auf Sekunden gerundeten Bewegung in 570 Jahren) eine Umdrehungszahl, so wird man die Ausgangszahl nur genähert erhalten. Wir sind so vorgegangen, dass wir aus den Tafeln des KHWÂRIZMÎ je eine Umdrehungszahl pro Kalpa berechnet haben mit dem Ergebnis, dass diese sehr nahe bei den von BRAHMAGUPTA bzw. von ALFAZÂRÎ überlieferten liegen. Eine zusätzliche Überlegung zeigt sodann, dass KHWÂRIZMÎ diese überlieferten Werte für die mittleren Bewegungen seinen Tafeln zugrunde gelegt hat.

2. Die Länge des siderischen Jahres

Nach BRAHMAGUPTA ([3], 1. Bd., S. 368, 2. Bd., S. 16, 28, 186; [5], S. 114/204; [6], S. 92; [7], S. 252) enthält ein Mahâyuga

$$j = 4\,320\,000 = 20 \cdot 60^3 \text{ Jahre}$$

dies sind

$$T = 1\,577\,916\,450 \text{ Tage}$$

Die mittlere tägliche Bewegung der Sonne beträgt daher

$$\frac{j \cdot 360^\circ}{T} = 0{,}985\,603\,515\,319\,20^\circ \text{ im Dezimalsystem}$$
$$= 0;59,\ 8,10,21,33,30,44 \text{ im Sexagesimalsystem} \qquad (1)$$

wobei die 44 gerundet sind. Dies ergibt eine Jahreslänge von (siehe [3] II, S. 189/398)

$$\frac{T}{j} = 365{,}258\,437\,50 \text{ Tage} = 365;15,30,22,30 \text{ Rest } 0 \qquad (2)$$

$$= 365^d\, 6^h\, 12^m\, 9^s \text{ Rest } 0 \qquad (3)$$

Die $6^h 12^m 9^s$ sind der Überschuss des siderischen Jahres über das bürgerliche, sie werden der Umdrehungsüberschuss genannt und ergeben in Gradmass

$$93;2,15° \text{ Rest } 0 \tag{4}$$

Ein Mondjahr enthält 354 Tage, das Schaltjahr 355. Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, nennen wir diese Mondjahre im folgenden kurz Jahre. Auf 30 Jahre entfallen 11 Schaltjahre, somit enthalten 30 Jahre

$$30 \cdot 354 + 11 = 10\,631 \text{ Tage}$$

Ausgehend von (1) erhält man im Mondjahr die Bewegung

$$348;54,13,7,11,43 \tag{5}$$

ferner in 30 Jahren

$$10\,477{,}950\,971\,358\,4°$$

Zieht man hiervon $29 \cdot 360°$ ab und verwandelt in das Sexagesimalsystem, so erhält man als Bewegung in 30 Mondjahren

$$37;57,3,29,48,29 \tag{6}$$

wobei die Quinten gerundet sind. Die Länge des siderischen Jahres finden wir bei KHWÂRIZMÎ an verschiedenen Stellen:

a) In Kapitel 21 (S. 15 und 65) wird angegeben:

tägliche Bewegung der Sonne	0;59, 8
stündliche Bewegung der Sonne	0; 2,27,50,25

Rechnet man aus der letzteren die tägliche Bewegung aus, so erhält man

$$0;59,8,10 \text{ Rest } 0$$

Die erste Angabe ist im Vergleich mit (1) auf Sekunden gerundet, die zweite auf Tertien.

b) In den Tabellen 4 und 5 wird die mittlere Bewegung der Sonne unter anderem pro Stunde, pro Tag, pro Mondjahr und pro 30 Mondjahre angegeben. Alle Angaben gehen bis zu Sekunden, weitere Bruchteile sind nicht gegeben. Zunächst sind diese Tabellen zu prüfen. Wir sind dabei, wie auch später bei den entsprechenden Tabellen 6 bis 20, folgendermassen vorgegangen: Zu jeder Spalte haben wir die Spalte der ersten Differenzen gebildet. Diese dient uns zu mehreren Zwecken. Erstens erlaubt sie, offensichtliche Druckfehler der Herausgabe SUTER zu erkennen. Es sind dies nur ganz wenige, die wir an den entsprechenden Stellen angeben. Zweitens erlaubt sie uns bei verschiedener Überlieferung der einzelnen Manuskripte, die in den Fussnoten angegeben sind, die wohl richtige zu erkennen. Drittens endlich zeigt sie uns, wie KHWÂRIZMÎ die Bruchteile der Sekunden berücksichtigt hat, wie wir sogleich sehen werden. Um unsere Arbeit nicht zu stark zu belasten, überlassen wir es dem Leser, sich nach Bedarf die Differenzentabellen herzustellen, und geben jeweils nur die Ergebnisse an.

Wir finden in Tabelle 5 in der Spalte «Medialitas solis in diebus» für die tägliche Bewegung 0;59, 8 angegeben. Untersucht man die Differenzen dieser Spalte, so sieht man, dass als tägliche Differenz 25 mal 0;59, 8 und 5 mal 0;59, 9 genommen werden, so dass nach dieser Spalte die mittlere tägliche Bewegung 0;59, 8,10 beträgt. Die Tabelle 4 der Monate gibt uns nichts Neues; pro 30 Tage werden entsprechend der vorangehenden 29;34, 5 genommen, pro 29 Tage 0;59, 8 weniger, so dass man zu einer jährlichen Bewegung von

$$11^s\,18^\circ\,54'\,12'' = 348;54,12$$

gelangt. In der Spalte «Medialitas solis in annis planis» geht KHWÂRIZMÎ nicht von dieser Zahl, sondern von der um eine Sekunde grösseren aus. Wie kommt er hierzu? Rechnen wir

$$354 \cdot (0;59,8,10) = 348;54,11$$

so fehlen noch 2″ gegenüber dem Wert (5). Berücksichtigen wir noch die Quarten aus (1) und rechnen

$$354 \cdot 21^{\mathrm{IV}} \sim 2''$$

so erhalten wir den von KHWÂRIZMÎ in Tabelle 4, Spalte «Medialitas solis in annis planis», angegebenen Ausgangswert von

$$11^s\,18^\circ\,54'\,13''$$

Er stimmt mit (5) in den Sekunden überein.

In der Spalte für die anni plani sind unter den 30 Jahren 11 Schaltjahre vorhanden, nämlich die Jahre 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26 und 29. Für die gewöhnlichen Jahre nimmt KHWÂRIZMÎ obige 348;54,13, für die Schaltjahre den Tageswert 0;59, 8 mehr. Die Differenzentabelle zeigt sodann, dass ausserdem insgesamt 5″ hinzugenommen werden, so dass eine mittlere jährliche Bewegung von 348;54,13,10 resultiert, das sind 3‴ mehr als in (5). Insgesamt erhält KHWÂRIZMÎ hierdurch in 30 Jahren, abgesehen von Vielfachen von 360°, die Bewegung 37;57, 3, was mit (6) bis auf Tertien übereinstimmt.

Die Spalte «Medialitas solis in annis collectis» der Tabelle 4 beginnt mit der Radix, hierüber siehe Abschnitt 3B. Die Spalte schreitet von 30 zu 30 Jahren fort, zunächst in 19 Schritten bis zu 570 Jahren. Die Differenz beträgt 12 mal 37;57, 3 und 7 mal 1″ mehr, so dass wir im Mittel für 30 Jahre die Bewegung von

$$37;57,3 + \frac{7''}{19} \sim 22 \text{ Tertien}$$

erhalten, etwas weniger als der Wert (6). Eine angefügte Fortsetzung a) bis b) von zweiter Hand im Manuskript O erweitert die Spalte bis zu 720 Jahren und ergibt eine durchschnittliche Bewegung von 37;57, 4, 3. Nimmt man ferner die im Manuskript O von zweiter Hand stammenden Korrekturen k) bis l), so erhält man im Mittel wiederum 37;57, 4, 3.

Wir wollen uns nun überlegen, ob KHWÂRIZMÎ's Tabellen 4 aus einem anderen indischen System hätten abgeleitet werden können. Die von (2) am wenigsten abweichende Jahreslänge tritt im Alten Pauliśa Siddhânta auf ([*11*], S. 162) und beträgt 365;15,30 Tage. Dies ergibt eine tägliche Bewegung von

$$0;59,8,14,47$$

welche von derjenigen KHWÂRIZMÎ's um mehr als 4″ abweicht. Dies ist mehr, als nach oben KHWÂRIZMÎ von BRAHMAGUPTA höchstens abweicht, denn diese stimmen in den Tertien überein.

c) Ein weiteres Argument, dass KHWÂRIZMÎ die Jahreslänge (2) verwendet, führt SUTER auf Seite 235 seiner Ausgabe an. Er berechnet aus den Tabellen 4 und 5 den Lauf der Sonne in $365^d\,6^h\,12^m$ folgendermassen:

Mittellauf in 1 Jahr zu 354 Tagen	nach Tabelle 4	348;54,13
Mittellauf in 11 Tagen	nach Tabelle 5	10;50,30
Mittellauf in 6 Stunden	nach Tabelle 5	14,47
Mittellauf in 12 Minuten	nach Tabelle 5	30
	Total	360°

Dabei sind die 9^s aus (3) nicht berücksichtigt, was der Natur der Tabellen nach nicht möglich ist.

d) Aus einer wohl vom Bearbeiter MASLAMA AL-MADJRÎTÎ zugefügten Tabelle 115 ist die Jahreslänge ersichtlich (siehe S. 230 und SUTER's Bemerkungen auf den Seiten 102f, 42 und 65). Die Tabelle gibt in ihrer linken Hälfte den Umdrehungsüberschuss pro Jahr zu $6^h\,12^m$ an, pro 100 Jahre zu $25^d\,20^h\,15^m$. Teilen wir den letzteren durch 100, so erhalten wir $6^h\,12^m\,9^s$, also den Wert (3). In der rechten Hälfte ist der Umdrehungsüberschuss für ein Jahr zu 93; 2,15 angegeben, was der Wert (4) ist.

e) Ein weiterer Beweis für unsere Behauptung wird sich im nächsten Abschnitt bei der Berechnung der Umdrehungszahl der Sonne ergeben.

Zusammenfassend können wir festhalten: KHWÂRIZMÎ verwendet in seinem Tafelwerk die Jahreslänge von BRAHMAGUPTA. H. SUTER (siehe S. 42, 65, 103, 235) liess diese Frage offen, und wir glauben, seine wertvollen Vorarbeiten mit obigem Ergebnis ergänzen zu dürfen.

3. Die Umdrehungszahlen der Sonne und der Planeten

A. Berechnet aus den Tabellen 4 bis 20 des KHWÂRIZMÎ

Wenn man das astronomische System des KHWÂRIZMÎ mit einem indischen System vergleichen will, ist es vorteilhaft, aus den Tabellen des KHWÂRIZMÎ die Bewegungen der Planeten in einem Mahâyuga (auch Caturyuga genannt) auszurechnen. Denn die indischen Systeme geben stets diese Umdrehungszahlen an oder deren Tausendfaches, die Umdrehungen im Kalpa. Wie bereits erwähnt, enthält das Mahâyuga

$$t = 1\,577\,916\,450 \text{ Tage}$$

während $19 \cdot 30 = 570$ Mondjahre

$$m = 19 \cdot 10\,631 = 201\,989 \text{ Tage}$$

enthalten. Aus den Tabellen von KHWÂRIZMÎ berechnen wir die mittlere Bewegung b° in Grad und b'' in Sekunden in 570 Mondjahren und erhalten hieraus die Umdrehungszahl u im Mahâyuga nach

$$u = \frac{b^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{t}{m} = \frac{b''}{360 \cdot 3600} \cdot \frac{t}{m} = \frac{4\,383\,101{,}25}{3600} \cdot \frac{b''}{m} = \frac{487\,011{,}25}{80\,795\,600} \cdot b'' \qquad (7)$$

Fehlerbetrachtung

Es wird für später nützlich sein, die Anzahl der Umdrehungen pro Mahâyuga abzuschätzen, die einer Änderung der mittleren Bewegung von 1″ in 570 Jahren entsprechen. Aus (7) folgt für $b'' = 1''$

$$u = 0{,}00603 \text{ Umdrehungen pro Mahâyuga}$$

oder

$$\text{etwa } 6{,}03 \text{ Umdrehungen pro Kalpa}$$

Hiermit wird es möglich sein, die Abweichungen in den aus KHWÂRIZMÎ's Tafeln berechneten Umdrehungszahlen gegenüber den entsprechenden indischen zu kontrollieren.

a) Sonne

In Tabelle 4 wird in der Spalte «Medialitas solis in annis planis» die Bewegung in 30 Mondjahren zu

$$37^\circ\, 57'\, 3'' + 29 \cdot 360^\circ$$

angegeben. In der Spalte «Medialitas solis in annis collectis» steht bei 570 Jahren $3^s 24^\circ 29' 52''$. Zieht man hiervon die Radix $3^s 23^\circ 25' 48''$ ab und berücksichtigt die beiden vollen Umläufe, so erhält man als Bewegung in den 570 Jahren

$$1^\circ\, 4'\, 4'' + (19 \cdot 29 + 2) \cdot 360^\circ$$

In Sekunden umgerechnet, erhält man

$$b'' = 716\,691\,844''$$

und hiermit nach (7)

$$u = 4\,319\,999{,}985\,287$$

an Stelle des Wertes 4 320 000, somit eine Differenz von etwa —15 Umdrehungen pro Kalpa.

Berechnen wir andererseits aus (6) die Bewegung in 570 Jahren, so erhalten wir, abgesehen von ganzen Umdrehungen, 1; 4, 6,26,21 anstatt der von KHWÂRIZMÎ genommenen 1; 4, 4. Die Differenz von 2½″ pro 570 Jahre ergibt nach der obigen Fehlerbetrachtung

$$2\frac{1}{2} \cdot 6 = 15 \text{ Umdrehungen pro Kalpa}$$

wie wir soeben gefunden haben.

Berechnen wir entsprechend die mittlere Bewegung in 570 Jahren unter Berücksichtigung der bis auf 720 Jahre erweiterten Tabelle mit den Fussnoten a) bis b) und der Korrekturen k) bis l), so erhalten wir 1; 4,16 und dementsprechend einen Fehler von etwa —57 Umdrehungen pro Kalpa, wie nach der Fehlerbetrachtung aus

$$9\frac{1}{2} \cdot 6 = 57$$

zu erwarten ist. Die korrigierten und erweiterten Tabellen des Manuskriptes O stellen sich demnach als schlechter heraus wie die ursprünglichen von KHWÂRIZMÎ.

b) Mond (Tabelle 6 und 7)

Da der Mond sehr schnell läuft, müssen wir bei Spalte «Medialitas lunae in diebus» beginnen, um die vollen Umdrehungen nicht zu vergessen. Wir rechnen folgendermassen:

Bewegung in 30 Tagen	$35°\,17'\,26'' + 360°$
Bewegung in 29 Tagen	$22°\quad 6'\,52'' + 360°$
Bewegung in 59 Tagen	$57°\,24'\,18'' + 2 \cdot 360°$

Bewegung in einem Mondjahr

$$6 \cdot (57;24,18 + 2 \cdot 360°) = 344;25,48 + 12 \cdot 360$$

wie KHWÂRIZMÎ am Ende der Spalte «Medialitas lunae in mensibus» angibt. Nehmen wir hierzu die Bewegung 13;10,35 in einem Tag hinzu, so erhalten wir als Bewegung im Schaltjahr

$$357;36,23 + 12 \cdot 360$$

Die Bewegung in 30 Jahren setzt sich aus derjenigen in 19 gewöhnlichen und derjenigen in 11 Schaltjahren zusammen und ergibt mit obigen Werten

$$37;50,25 + (29 + 30 \cdot 12) \cdot 360$$

In der Tabelle 6, Spalte «Medialitas lunae in planis», gibt KHWÂRIZMÎ, abgesehen von ganzen Umdrehungen, den um 21″ kleineren Wert 37;50, 4 an. Hiervon ausgehend erhalten wir in 570 Jahren

$$358;51,16 + 19 \cdot (29 + 30 \cdot 12) \cdot 360$$

Dies ist aber nicht der Wert, den KHWÂRIZMÎ verwendet. Diesen finden wir, indem wir in der Spalte «Medialitas lunae in collectis» die Radix von dem beim Jahre 570 vermerkten Stand subtrahieren und

$$358;49,30 + 7\,392 \cdot 360$$

erhalten. Dies ergibt

$$b'' = 9\,581\,323\,770$$

und somit nach (7)

$$u = 57\,753\,299{,}262\,4 \text{ anstatt } 57\,753\,300$$

bei BRAHMAGUPTA. Wir haben also eine Differenz von etwa —738 Umdrehungen pro Kalpa. Nach der Fehlerbetrachtung rechnen wir, ausgehend von der Umdrehungszahl des BRAHMAGUPTA, die Bewegung in 30 Jahren zu 140 077;50, 4,55, hieraus in 570 Jahren zu 2 661 478;51,33. Dies ist um 123″ grösser als der von KHWÂRIZMÎ verwendete Wert und lässt daher eine Differenz von

$$6 \cdot 123 = 738 \text{ Umdrehungen}$$

erwarten.

Die Mondtabelle ist von zweiter Hand bis zu 720 Jahren verlängert, was aber das obige Ergebnis nicht wesentlich berührt.

Wir glauben, aus obiger Untersuchung einen Einblick in die Rechentechnik von KHWÂRIZMÎ zu erlangen. Zunächst sieht man, dass der Wert 37;50, 4, den KHWÂRIZMÎ für die dreissigjährige Periode nimmt, sich nur um 55‴ von demjenigen BRAHMAGUPTA's unterscheidet. Um diese 55‴ auf die 19 anni collecti zu verteilen, müsste man 17 mal 5″ und 2 mal 4″ nehmen. Die Differenzentabelle zeigt aber, dass KHWÂRIZMÎ 14 mal 5″ und 5 mal 4″ nimmt. Er verteilt somit nur etwa 45‴. Woher dies kommt, wissen wir nicht, es mag ein Rechenfehler in den Tertien vorliegen.

Wir finden in Kapitel 20 (S. 15 und 65) die tägliche Bewegung des Mondes zu 13;10,34,52,48 angegeben. Dies ergibt in 570 Jahren durch Multiplikation mit der Tagesanzahl 201 989 bis auf ganze Umdrehungen 358;52,56, was von dem oben bestimmten Wert KHWÂRIZMÎ's 358;49,30 um 206″ verschieden ist. Bei der Berechnung mittels der dreissigjährigen Periode haben wir die Differenz von 123″ gefunden. Somit ist KHWÂRIZMÎ bei seinen Rechnungen vermutlich nicht von der täglichen, sondern von der dreissigjährigen Periode ausgegangen. Ferner ist hier zu bemerken, dass sich aus BRAHMAGUPTA's Umdrehungszahl eine mittlere tägliche Mondbewegung von

$$13;10,34,52,46,30,14$$

ergibt, wobei die 14 leicht aufgerundet sind. KHWÂRIZMÎ nimmt etwa 1½ Quarten mehr.

c) Mondknoten (Tabelle 19: Medius cursus draconis)

Geben wir zunächst einige Umdrehungszahlen pro Kalpa an ([3], II, S. 16):

BRAHMAGUPTA	232 311 168
ALFAZÂRÎ	232 312 138
ÂRYABHATA	232 316 000

Nach der Spalte «Medialitas draconis in planis» bewegt sich der Mondknoten in 30 Jahren um

$$203;27,43 + 360$$

In 570 Jahren erhält man hieraus

$$265;46,37 + 29 \cdot 360$$

Aus der Spalte «Medialitas draconis in collectis» entnimmt man wie früher durch Differenzenbildung des Standes bei 570 Jahren und der Radix, dass KHWÂRIZMÎ in 570 Jahren nur nimmt

$$b^\circ = 265;46,29 + 29 \cdot 360$$

Dies ergibt

$$b'' = 38\,540\,789''$$

und hiermit nach (7)

$$u = 232\,312\,128{,}7 \text{ pro Kalpa}$$

Dieser Zahl am nächsten liegt die Umdrehungszahl von ALFAZÂRÎ mit einem Unterschied von etwa 9 Umdrehungen pro Kalpa. Rechnet man umgekehrt aus der Umdrehungszahl u des ALFAZÂRÎ die Bewegung in 30 Mondjahren, so erhält man den Betrag

$$\frac{10\,631 \cdot 360}{1\,577\,916\,450} \cdot u = \frac{4 \cdot 10\,631}{17\,532\,405} \cdot u = 563{,}461\,85$$

und in 570 Jahren

$$265;46,30,30 \pmod{360}$$

also 1½″ mehr als KHWÂRIZMÎ, und somit ist ein Unterschied von

$$1\frac{1}{2} \cdot 6 = 9 \text{ Umdrehungen}$$

zu erwarten.

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung der Planeten zu.

d) Saturn (Tabelle 9)

Die Umdrehungszahl pro Kalpa beträgt nach ([3], II, S. 16)

Brahmagupta	146 567 298
Alfazârî	146 569 284
Alsarakhsî	146 569 238

In der Spalte «Medialitas Saturni in collectis» ist die Bewegung des Saturn in 570 Jahren folgendermassen bestimmt:

$$12 \cdot (355;27,48) + 7 \cdot (355;29,49) = 6\,754;26,19 = b^\circ$$

Abgesehen von den ganzen Umdrehungen erhalten wir denselben Betrag, wenn wir von der Stellung in 570 Jahren die Radix subtrahieren. Hierbei ist zu beachten, dass bei der Stellung in 570 Jahren, die zu $1^s\,3^\circ\,24'\,56''$ angegeben ist, ein Druckfehler vorliegt, indem die Differenzentabelle zeigt, dass nur 2° zu nehmen sind. Es wird

$$b'' = 24\,315\,979$$

und hiermit nach (7)

$$u = 146\,569{,}309\,8$$

was von dem Wert des Alfazârî um etwa 26 Umdrehungen pro Kalpa abweicht, von den beiden anderen erheblich mehr.

Gehen wir zur Probe von der Umlaufzahl u des Aflazârî aus und rechnen die Bewegung in 30 Jahren zu

$$\frac{42\,524 \cdot u}{17\,532\,405} = 355;29,48,\,7,12$$

so erhalten wir in 570 Jahren

$$274;26,14,39 \pmod{360}$$

was von obigem Wert des Khwârizmî um etwa $4\frac{1}{3}''$ abweicht, so dass wir

$$6 \cdot 4\frac{1}{3} = 26 \text{ Umdrehungen}$$

Differenz zu erwarten haben, wie wir gefunden haben.

Für den Saturn verwendet somit Khwârizmî die Umdrehungszahl des Alfazârî.

e) Jupiter (Tabelle 11)

Nach der Spalte «Medialitas Jovis in planis» legt Jupiter in 30 Jahren

$$720 + 163;24,49$$

zurück. Hiermit und mit der Spalte «Medialitas Jovis in collectis» erhalten wir in 570 Jahren

$$b^\circ = 16\,784;51,35$$

und

$$b'' = 60\,425\,495$$

und damit nach (7) die Umdrehungszahl pro Mahâyuga

$$364\,226,\,465\,944$$

Brahmagupta gibt

$$364\,226,\,455$$

wir haben somit etwa 11 Umdrehungen mehr pro Kalpa.

Geht man umgekehrt von der Umdrehungszahl des BRAHMAGUPTA aus, so erhält man in 570 Jahren die Bewegung 16 784;51,33, also 2″ weniger als KHWÂRIZMÎ, was etwa $2 \cdot 6 = 12$ Umdrehungen entspricht, wie zu erwarten war.

f) Mars (Tabelle 13)

Die Spalte «Medialitas Martis in planis» zeigt uns, dass Mars in 30 Jahren

$$170;50,47 + 15 \cdot 360°$$

wandert. Hiermit und mit der Spalte «Medialitas Martis in collectis» finden wir für 570 Jahre

$$b° = 105\,846;\,4,56$$

und

$$b'' = 381\,045\,896$$

Hierbei ist zu beachten, dass bei 570 Jahren als Druckfehler 39′ anstatt 30′ stehen. Nach (7) erhalten wir die Umdrehungszahl pro Kalpa

$$2\,296\,828\,516{,}516\,879$$

BRAHMAGUPTA verwendet

$$2\,296\,828\,522$$

wodurch wir eine Differenz von etwa 5 Umdrehungen erhalten. Gehen wir von der Umlaufzahl des BRAHMAGUPTA aus, so erhalten wir in 30 Jahren die Bewegung 5 570,846 44 und in 570 Jahren 105 846; 4,56,38. Gegen KHWÂRIZMÎ beträgt der Unterschied 38‴, was pro Kalpa eine Bewegung von etwa 4 Umdrehungen macht, wie zu erwarten war.

g) Venus (Tabelle 15)

Aus der Spalte «Heza Veneris in planis» entnehmen wir für 30 Jahre die Bewegung von

$$74;30,54 + 18 \cdot 360°$$

hiermit und mit der Spalte «Heza Veneris in annis collectis» finden wir für 570 Jahre

$$b° = 124\,535;46,54$$

und

$$b'' = 448\,328\,814$$

(Bemerke den Druckfehler: Bei 60 anni collecti sollten 50″ anstatt 30″ stehen, wie die Differenzentabelle zeigt.)

Hieraus erhalten wir nach (7)

$$2\,702\,389{,}459\,355$$

Dies ist die Anzahl der Umdrehungen, bezogen auf eine feste Richtung im Fixsternhimmel. Eine solche Umdrehungszahl ist für einen äusseren Planeten gleich der Anzahl der Umdrehungen um die Erde. Für einen inneren Planeten müssen wir aber hierzu noch die Anzahl der Umdrehungen der Sonne um die Erde zuzählen, um die Umdrehungszahl bezüglich der Erde zu erhalten. Dies ergibt für Venus

$$7\,022\,389{,}459\,355$$

BRAHMAGUPTA

$$7\,022\,389{,}492$$

Wir haben somit pro Kalpa eine Differenz von etwa 33 Umdrehungen.

Rechnet man wiederum, ausgehend von der Umdrehungszahl des BRAHMAGUPTA, die Bewegung in 570 Jahren, so erhält man gegenüber der obigen Bewegung von KHWÂRIZMÎ 5½″ mehr, was 33 Umdrehungen entspricht.

h) Merkur (Tabelle 17)

Die Spalten «Heza Mercurii in mensibus» und «Heza Mercurii in annis planis» zeigen uns, dass Merkur in 30 Jahren

$$267;22,20 + 360 + 30 \cdot 3 \cdot 360^\circ$$

zurücklegt. Aus der Spalte «Heza Mercurii in collectis» ergibt sich hiermit in 570 Jahren

$$b^\circ = 627\,520;\,4,20$$

und

$$b'' = 2\,259\,072\,260$$

(Bei den 570 anni collecti sind dabei die 20″ als Druckfehler für 30″ angesehen.)

Hiermit erhalten wir nach (7)

$$\begin{array}{rl} 13\,616\,999{,}009\,6 & \\ +\ \underline{4\,320\,000} & \text{Umdrehungen der Sonne} \\ u = 17\,936\,999{,}009\,6 & \text{als Umdrehungszahl pro Mahâyuga} \\ 17\,936\,998{,}984 & \text{gibt BRAHMAGUPTA} \end{array}$$

Die Differenz beträgt somit etwa 25½ Umdrehungen pro Kalpa. Berechnen wir wiederum, von der Umdrehungszahl des BRAHMAGUPTA ausgehend, die Bewegung in 570 Jahren, so erhalten wir etwa 4,3″ weniger, was

$$6 \cdot 4{,}3 = 25{,}8 \text{ Umdrehungen}$$

ergibt, wie zu erwarten war.

B. Radices

Um die Radices nachprüfen zu können, müssen wir drei Dinge kennen:

a) einen Zeitpunkt, an dem die mittlere Länge der Gestirne bekannt ist;
b) die Umlaufzahl der Gestirne;
c) das Datum für den Beginn der Tafeln, man nennt dies die Epoche der Tafeln.

a) Nach der indischen Astronomie standen im Moment der Schöpfung Sonne, Mond und die Planeten bei 0°. Von der Schöpfung bis Christi Geburt sind nach BENTLEY [6] (S. 84 und 86), 1 972 947 101 Jahre verflossen. Das jetzige Kaliyuga beginnt im Jahre —3101. Somit sind von der Schöpfung bis zum Beginn der jetzigen Kaliyuga 1 972 944 000 Jahre verflossen. Ein Mahâgyuga enthält 4 320 000 Jahre. Somit sind von der Schöpfung bis zum Beginn des jetzigen Kaliyuga 456,7 Mahâgyugas verflossen. Andere Autoren nennen diesen Beginn die Sintflut, sie fand am 18. Februar —3101 statt; siehe [6], S. 86.

b) Für die Umlaufzahlen nehmen wir diejenigen von BRAHMAGUPTA bzw. ALFAZÂRÎ. Nach den Ergebnissen des Abschnittes A sind wir hierzu berechtigt. Falls wir sodann mit diesen Umlaufzahlen die Radices des KHWÂRIZMÎ erhalten, so ist dies ein weiterer Beweis dafür, dass dieser die genannten Umdrehungszahlen verwendet.

c) Die Tafeln des KHWÂRIZMÎ beginnen nach den Worten in der Einleitung auf Seite 1 um 12 Uhr (Mittag) an einem Mittwoch zu Beginn der Hedschra. Der astronomische Beginn der Hedschra wird auf den 15. Juli 622 gelegt. Daher war SUTER (S. 33) der Ansicht, dass die Radices die mittleren Längen am 15. Juli 622 um 12 Uhr angeben.

Nun ist aber der 15. Juli 622, wie man leicht nachrechnet, ein Donnerstag. Der von KHWÂRIZMÎ genannte Mittwoch ist also der 14. Juli. Ebenso ergeben unsere Nachrechnungen, wie wir gleich sehen werden, dass die Radices auf den 14. Juli 622 auf Mittag berechnet wurden. Dies bedeutet:

Die Tafeln des KHWÂRIZMÎ beginnen mit dem nullten Tag der Hedschra, das ist der 14. Juli 622, der erste Tag der Hedschra ist sodann der 15. Juli usw. Die Tafeln sind somit nach der noch heute gebräuchlichen astronomischen Tageszählung angelegt.

Sonne

Die Schöpfung fand bei Sonnenaufgang, das heisst um 6 Uhr, statt; siehe [*6*], S. 89. Daher war auch die Sintflut um 6 Uhr, in diesem Moment stand die Sonne wieder bei 0°. Von der Sintflut bis zur Hedschra sind $t = 1\,359\,972$ Tage vergangen. Man berechnet dies mit den Tabellen von SCHRAM [*10*]:

S. 46	Tageszahl für 622, Juli 0	1 948 424	
	14 Tage	14	1 948 438
S. 51	Tageszahl für —3101, Februar 0	588 448	
	18 Tage	18	588 466
	Differenz		1 359 972

Über diese Tageszahl ist folgendes zu bemerken:

In Tabelle 1 gibt KHWÂRIZMÎ «A diluvio usque ad eram arabum» 3725 Jahre 11 Monate 19 Tage gleich 1 359 974 Tage (das Jahr zu 365 Tagen, der Monat zu 30 Tagen genommen). Hieraus folgt, dass er dabei den 16. Juli als ersten Tag der Hedschra ansieht. Es ist dies der sogenannte historische Beginn der Hedschra, während die Astronomen den 15. Juli als ihren ersten Tag ansehen.

Wie bereits SUTER bemerkte, sind die Angaben über die Zeitintervalle in KHWÂRIZMÎ ungeordnet und teilweise widersprechend. Bei BÎRÛNÎ [*4*], S. 133, werden für obiges Zeitintervall sogar 1 359 975 Tage angegeben.

Wir werden im folgenden zeigen, dass die Tabellen von KHWÂRIZMÎ mit dem Wert $t = 1\,359\,972$ berechnet sind.

Die Bewegung der Sonne beträgt in diesen t Tagen nach (1)

$t \cdot \frac{j\,360}{T}$	$= 113°\,11'\,6''$ (mod 360)
Bewegung in 6^h nach Tabelle 5	$14'\,47''$
	$113°\,25'\,53''$
Radix KHWÂRIZMÎ	$113°\,25'\,48''$

Um die Differenz von $5''$ zu durchlaufen, würde die Sonne etwa 2 Minuten gebrauchen, die Übereinstimmung ist also ausgezeichnet.

Mond

Da der Mond bei der Sintflut bei $0°$ steht (s. u.), brauchen wir nur seine Bewegung von dort bis zur Hedschra zu berechnen und finden $127°\,38'\,13''$. KHWÂRIZMÎ gibt als Radix $117°\,45'\,17''$ und differiert somit um beinahe $10°$.

Für die Änderung der Umdrehungszahl kommen nur die Vielfachen von 1000 in Betracht. Da wir früher eine Abweichung in der Umdrehungszahl von 738 gefunden haben, haben wir nur die um 1000 grössere und kleinere Umdrehungszahl zu untersuchen. Sie ergeben nur eine Änderung von etwa $\pm 19'$ in den Stellungen bei der Hedschra. Mit einer solchen Änderung ist daher die obige Differenz von etwa $10°$ nicht zu erklären. Es liegt nahe, anzunehmen, dass KHWÂRIMZÎ beim Mond die Radix geändert hat, um mit der Beobachtung in Übereinstimmung zu gelangen.

Planeten

Alle Planeten stehen bei der Schöpfung bei $0°$. Das betrachtete astronomische System setzt ferner, wie wir gleich sehen werden, voraus, dass sie bei der Sintflut wiederum in Konjunktion bei $0°$ stehen. Dies lässt sich nicht genau erreichen, sondern nur angenähert. Um eine solche genäherte Konjunktion bei der Sintflut zu erhalten, kann man einerseits die Zeit zwischen der Schöpfung und der Sintflut passend wählen, andererseits die Umdrehungszahlen etwas abändern, soweit dies nicht mit der Erfahrung in Widerspruch kommt. Endlich kann man diese beiden Verfahren miteinander verbinden. BÎRÛNÎ ([4], S. 29) beschreibt dies folgendermassen:

"This was the era which ‚Abu-Ma'shar Albalkhî (ein Zeitgenosse von KHWÂRIZMÎ etwa 840 A. D.) wanted, upon which to base his statements regarding the mean places of the stars in his Canon. Now he supposed that the Deluge had taken place at the conjunction of the stars in the last part of Pisces, and the first part of Aries, and he tried to compute their places for that time. Then he found, that they–all of them–stood in conjunction in the space between the twenty-seventh degree of Pisces, and the end of the first degree of Aries."

Diesem Bericht zufolge haben wir zunächst die Stellungen der Planeten bei der Sintflut zu berechnen.

Ist u die Umdrehungszahl eines Planeten im Mahâyuga, $U = 1000 \cdot u$ diejenige im Kalpa, so hat der Planet nach 456,7 Mahâyugas

$$s = 456{,}7 \cdot u = 0{,}4567 \cdot U$$

Umdrehungen ausgeführt. Da uns die ganzen Umdrehungen nicht interessieren, indem nur der echte Bruchteil von s für die Stellung des Planeten massgebend ist, brauchen wir von s nur die Stellen rechts des Dezimalkommas zu berechnen. Das heisst aber, dass wir von U nur die Einer, Zehner, Hunderter und Tausender zu berücksichtigen haben und vom so erhaltenen Produkt wiederum nur den echten Bruchteil. Diese echten Brüche wurden bereits von BENTLEY ([6], S. 94) und sodann auch von SCHRAM ([3], II, S. 385f) angegeben. Wir geben sie in folgender Tabelle, zusammen mit der Umdrehung in Grad, Minuten und Sekunden an. Dabei sehen wir, dass bei der Sintflut die Planeten in der Tat zwischen 357° und 1° standen. Die Bedingung von MA'SHAR besagt, dass im Dezimalsystem der Planet bei der Sintflut zwischen ...,9916 und ...,0028 Umdrehungen steht.

	U	s in Umdrehungen	s in Graden
Jupiter	364 226 455	...,9985	359,460 = 359;27,36, 0
Mars	2 296 828 522	...,9974	359,064 = 359; 3,50,24
Venus	7 022 389 492	...,9964	358,704 = 358;42,14,24
Merkur	17 936 998 984	...,9928	357,408 = 357;24,28,48
Saturn:			
BRAHMAGUPTA	146 567 298	...,9966	358,776 = 358;46,33,36
ALFAZÂRÎ	146 569 284	...,0028	1,008 = 1; 0,28,48
ALSARAKHSÎ	146 569 238	...,9946	358,056 = 358; 3,21,36
Mond	57 553 300 000	...,0000	0
Mondknoten:			
BRAHMAGUPTA	232 311 168	...,4256	153,216 = 153;12,57,36
ALFAZÂRÎ	232 312 138	...,4246	152,856 = 152;51,21,36

Die Umdrehungszahlen findet man an folgenden Stellen angegeben:
[6], S. 92. Bei dieser Gelegenheit sei auf den Druckfehler hingewiesen, der sich dort in der Umdrehungszahl des Mondknotens befindet. Es muss 521 anstatt 511 heissen. BÎRÛNÎ [3], II, S. 16, und [5], S. 204, gibt die richtigen Werte.
[7], S. 252.
[3], II, S. 16; ferner I, S. 368, II, S. 28 und 186.
[5], S. 204 des Originals = S. 114 der Übersetzung. Hierbei bemerken wir, dass auf dieser Seite in der Spalte «The Thousends of Abû Ma'shar» in der ersten Zeile anstatt 1 341 493 240 stehen muss 131 493 240, was die Umschreibung der arabischen Zahl ist, die sich auf der gegenüberliegenden Seite befindet.

Ausgehend von den Umdrehungszahlen von BRAHMAGUPTA für Jupiter, Mars, Venus und Merkur, den Umdrehungszahlen von ALFAZÂRÎ für Saturn und Mondknoten, haben wir die Bewegung von der Schöpfung bis zum Mittag des 14. Juli 622 (im folgenden Hedschra genannt) berechnet und folgendes gefunden:

	Saturn	Jupiter	Mars
Stand bei der Sintflut	1; 0,29	359;27,36	359; 3,50
Bewegung Sintflut bis Hedschra	116;58, 8	330;49,17	211;21,25
Stand bei der Hedschra	117;58,37	330;16,53	210;25,15
Radix von Khwârizmî	117;58,37	330;16,49	210;25,15
Differenz	0″	4″	0″
d	26	12	4

	Venus	Merkur	Mondknoten
Stand bei der Sintflut	358;42,14	357;24,29	152;51,22
Bewegung Sintflut bis Hedschra	47;18, 1	71;28,25	80;56,25
Stand bei der Hedschra	46; 0,15	68;52,54	233;47,47
Radix von Khwârizmî	46; 0, 3	68;53,10	233;47,38
Differenz	12″	—16″	9″
d	33	26	9

In die letzte Zeile haben wir die in Abschnitt 3A gefundenen Abweichungen d der Umdrehungszahlen im Kalpa notiert.

Es bleibt uns noch übrig, die folgende Frage zu beantworten: Hätte Khwârizmî seinen Tabellen solche Umdrehungszahlen zugrunde legen können, die sich von denjenigen von Brahmagupta bzw. Alfazârî um die in Zeile d genannten Beträge unterscheiden? Eine solche Umdrehungszahl U_1 hat ausserdem der Bedingung zu genügen, dass bei der Sintflut die Planeten zwischen 357° und 1° stehen. Dies besagt, dass die Produkte $0{,}4567 \cdot U_1$ in den Stellen nach dem Dezimalkomma zwischen 9916 und 0028 liegen. Sei U die Umdrehungszahl pro Kalpa von Brahmagupta bzw. Alfazârî, dann wollen wir zusehen, welche Umdrehungszahlen $U - 50$ und $U + 50$ dieser Bedingung genügen. Zu diesem Zweck haben wir uns mit der Rechenmaschine die folgende Tabelle berechnet:

Seien a die Einer, b die Zehner, c die Hunderter und d die Tausender einer Umdrehungszahl. Wir haben alle Produkte

$$4567 \cdot (1000\, d + 100\, c + 10\, b + a)$$

für a, b, c und d gleich 0, 1, ... 9 berechnet. Unter ihnen nehmen wir diejenigen heraus, die der obigen Bedingung von Ma'shar genügen. Sodann berechnen wir den zugehörigen Stand des Planeten bei der Hedschra. Dabei dürfen wir für die Bewegung von der Sintflut bis zur Hedschra mit der Umdrehungszahl U rechnen, denn 50 Umdrehungen mehr oder weniger pro Kalpa bewirken nur eine Änderung von etwa 1′ in diesem Intervall. Wir dürfen also die bereits berechnete Bewegung übernehmen. Für die einzelnen Planeten kommt man zu den folgenden Ergebnissen:

	Umdrehungszahl	Stellung bei der Sintflut	Bewegung Sintflut bis Hedschra	Stellung Hedschra	*d*
Jupiter	364 226 409	...,9903 = 356,508 = 356;30,29		327;19,46	2°57′ 3″
	364 226 455	...,9985 = 359,460 = 359;27,36		330;16,53	4″
	364 226 501	...,0067 = 361,476 = 1;28,34	330;49,17	332;17,51	2° 1′ 2″
Mars	2 296 828 441	...,0047 = 360,756 = 0;45,22		212; 6,47	1°41′32″
	2 296 828 522	...,9974 = 359,064 = 359; 3,50		210;25,15	0″
	2 296 828 568	...,0056 = 361,080 = 1; 4,48	211;21,25	212;26,13	2° 0′58″
Venus	7 022 389 411	...,0037 = 1,332 = 1;19,55		48;37,56	2°37′53″
	7 022 389 492	...,9964 = 358,704 = 358;42,14		46; 0,15	12″
	7 022 389 538	...,0046 = 1,656 = 1;39,22	47;18, 1	48;57,23	2°57′20″
Merkur	17 936 998 949	...,0083 = 2,988 = 2;59,17		74;27,42	5°34′32″
	17 936 998 984	...,9928 = 357,408 = 357;24,29		68;52,54	16″
	17 936 999 030	...,0010 = 0,360 = 0;21,36	71;28,25	71;50, 1	2°56′51″
Saturn:					
SARAKHSÎ	146 569 238	...,9946 = 358,056 = 358; 3,22		115; 1,30	2°57′ 7″
ALFAZÂRÎ	146 569 284	...,0028 = 1,008 = 1; 0,29		117;58,37	0″
	146 569 365	...,9955 = 358,380 = 358;22,48	116;58, 8	115;20,56	2°37′41″

d bedeutet die Differenz gegenüber der Radix von KHWÂRIZMÎ.

Aus dieser Tabelle ist ersichtlich: Berechnet man den Stand der Planeten auf die Epoche der Tafeln mittels der Umdrehungszahlen des BRAHMAGUPTA bzw. ALFAZÂRÎ, so erhält man bis auf einige Sekunden die Radix des KHWÂRIZMÎ. Berechnet man dagegen den Stand mittels der benachbarten Umdrehungszahlen, so erhält man Werte, die von der Radix des KHWÂRIZMÎ um mindestens 2° abweichen, das ist ein mindestens tausendmal schlechteres Ergebnis. Hierdurch haben wir einen strengen Beweis erbracht, dass den Tafeln des KHWÂRIZMÎ für die mittleren Bewegungen die angegebenen Umdrehungszahlen des BRAHMAGUPTA bzw. ALFAZÂRÎ zugrunde liegen und dass die Epoche dieser Tafeln der Mittag des 14. Juli 622 ist.

In Abschnitt 3 B haben wir gezeigt, dass KHWÂRIZMÎ die Radix des Mondes um etwa 10° geändert hat, und haben die Vermutung ausgesprochen, dass der Grund hiervon war, mit der Beobachtung in Übereinstimmung zu kommen. Diese Vermutung können wir durch die folgende Betrachtung erhärten:

Wir berechnen die wahren Längen von Sonne und Mond bei der Hedschra sowohl nach KHWÂRIZMÎ als auch nach modernen Tabellen (siehe [*8*], diese Tabellen haben eine Genauigkeit von etwa 0,1°) auf den Meridian von Arin (g. L. 75° 52′ östl. Gr., siehe [*1*], S. 1 und 33). Sodann berechnen wir dieselben Grössen für die Zeit von KHWÂRIZMÎ. Um die Rechnung einfach zu gestalten, haben wir für 200 siderische Jahre (zu $365^d\,6^h\,12^m\,9^s$) nach der Hedschra gerechnet. Dies sind 200 julianische Jahre $1^d\,16^h\,30^m$ nach der Hedschra, so dass man auf das Datum 16. Juli 822, $4^h\,30^m$ nach Mitternacht kommt. Die mittlere Mondbewegung in diesen 200 Jahren haben wir zweimal gerechnet: Erstens durch Vervielfältigung der von KHWÂRIZMÎ gegebenen täglichen Bewegung von 13;10,34,52,48. Zweitens haben wir die 200 siderischen Jahre in anni collecti, anni plani, menses und dies des KHWÂRIZMÎ verwandelt und nach seinen Tabellen gerechnet. Die Resultate stimmen auf 7′ überein. Dieser Unterschied ist nach dem in Abschnitt 3 A b Gesagten zu erwarten. Wir haben in der folgenden Tabelle den Wert von KHWÂRIZMÎ verwendet.

	Hedschra		16. Juli 822 4½ h nach Mitternacht	
	KHWÂRIZMÎ	Modern	KHWÂRIZMÎ	Modern
Mittlere Länge ☉	113;25,48	114;12	113;25,48	117;30
Mittlere Länge ☾	117;45,17	118;42	32;45,47	36;48
Differenz	4;19,29	4;30	80;40, 1	80;42
Differenz Modern–KHWÂRIZMÎ	etwa 10′		etwa 2′	
Wahre Länge ☉	112; 9,28	113; 9	112; 9,29	116;27
Wahre Länge ☾	113;59,25	113;54	31;28,46	34;12
Differenz	1;49,56	0;45	81;40,43	82;15
Differenz KHWÂRIZMÎ–Modern	etwa 1° 5′		etwa 34′	

Die Tabelle sagt uns: Bildet man die Differenzen der wahren Längen von Sonne und Mond das eine Mal nach den Tabellen des KHWÂRIZMÎ, das andere Mal nach modernen Tabellen gerechnet, so erhalten wir bei der Hedschra

Werte, die um 1° 5′ auseinanderliegen, Anno 822 hingegen solche, die nur noch 34′ differieren (das heisst einer Strecke, die der Mond in etwa einer Stunde zurücklegt). Dies zeigt uns, dass KHWÂRIZMÎ die Änderung der Radix des Mondes wohl so vorgenommen hat, dass die errechneten Mondorte für das neunte Jahrhundert mit der Beobachtung dieser Zeit in Übereinstimmung kommen.

Es dürfte von Interesse sein, hier den Bericht von BÎRÛNÎ anzuführen, worin dargelegt wird, wie die Umdrehungszahlen erhalten wurden. Es ist genau das Verfahren, das auch wir bei der Nachprüfung verfolgen. BÎRÛNÎ schreibt ([3], II, S. 15f):

"These star-cycles (das heisst die Umdrehungszahlen pro Kalpa) as known through the canon of Alfâzarî and Ya'ḳûb Ibn Ṭâriḳ, were derived from a Hindu who came to Bagdad as a member of the political mission which Sindh sent to the Khalif Almansûr, A.H. 154 (= A.D. 771). If we compare these secondary statements with the primary statements of the Hindus, we discover discrepancies, the cause of which is not known to me. Is their origin due to the translation of Alfâzarî and Ya'ḳub? or to the dictation of that Hindu? or to the fact that afterwards these computations have been corrected by Brahmagupta, or some one else? For, certainly, any scholar who becomes aware of mistakes in astronomical computations and takes an interest in the subject, will endeavour to correct them, as, e.g. Muḥammad Ibn Isḥâḳ of Sarakhs has done. For he had discovered in the computation of Saturn a falling back behind real time. Now he assiduously studied the subject, till at last he was convinced that his fault did not originate from the equation (i. e. from the correction of the places of the stars, the computation of their mean places). Then he added to the cycles of Saturn one cycle more, and compared his calculation with the actual motion of the planet, till at last he found the calculation of the cycles completely to agree with astronomical observation. In accordance with this correction he states the star-cycles in his canon."

4. Über die Genauigkeit des indischen astronomischen Systems

Wie wir schon bemerkt haben, beruht das verwendete astronomische System auf den beiden Hypothesen:

1. Bei der Schöpfung standen Sonne, Mond und die Planeten bei 0°.
2. Nach 456,7 Mahâyugas, das heisst bei der Sintflut, stehen sie zwischen 358° und 1°.

Ist U die Umlaufzahl im Kalpa, so wurde im Abschnitt 3B gezeigt, dass der Planet bei der Sintflut $s = 0{,}4567 \cdot U$ Umdrehungen ausgeführt hat. Soll er dabei zwischen 358° und 1° stehen, so muss s eine Zahl sein, die zwischen . . .,9916 und . . .,0028 liegt.

Ist U_1 eine beliebige Umdrehungszahl pro Kalpa, so kann man sich die Frage stellen, welches die nächstgelegene Umdrehungszahl U ist, so dass $s = 0{,}4567 \cdot U$ die geforderte Eigenschaft hat. Wir vereinfachen das Problem etwas, indem wir fragen, welches die zu U_1 nächstgelegene Umdrehungszahl U ist, so dass s zwischen . . .,9900 und . . .,0099 liegt.

Wir haben auf der Rechenmaschine gefunden, dass in jedem Hunderter mindestens eine Umdrehungszahl der geforderten Eigenschaft liegt. Genauer haben wir gefunden: Die Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umdrehungszahlen U betragen 35 oder 46 oder 81. Was besagt dieses Ergebnis?

Nach unserer Fehlerrechnung im Abschnitt 3 A ergibt eine Änderung der Bewegung um 1″ in 570 Jahren 6,03 Umdrehungen im Kalpa. Umgerechnet ergibt dies: 81 Umdrehungen pro Kalpa entsprechen etwa 15 Quinten pro Tag. Somit:

Mit einer Genauigkeit von 15 Quinten pro Tag lässt sich jede beliebige Bewegung den obigen Bedingungen anpassen.

In den Tafeln des KHWÂRIZMÎ finden wir leider nur eine einzige Stelle, in der die tägliche Bewegung explizite mit grösserer Genauigkeit angegeben ist. Es ist dies Kapitel 20, wo die tägliche Bewegung des Mondes zu 13;10,24,52,48 angegeben ist, also auf Quarten genau. Ebenso haben wir in der Analyse der Tabelle für die Sonne im Abschnitt 2 b gesehen, dass diese einer Genauigkeit der täglichen Bewegung von Quarten entspricht. Entsprechendes gilt für die Tabellen der Planetenbewegung. Somit lassen sich in der von KHWÂRIZMÎ befolgten Genauigkeit die Umdrehungszahlen stets so wählen, dass sie der Bedingung von MA'SHAR genügen.

Literaturverzeichnis

[*1*] Die astronomischen Tafeln des al-KHWÂRIZMÎ, herausgegeben von H. SUTER, Danske Vid. Selsk. Skrifter. 7. Raekke. Hist Fil. Afd., III, 1, Kopenhagen 1914.
Eine kurze Mitteilung über unsere Ergebnisse ist unter dem Titel «Die astronomischen Tafeln von Al-KHWÂRIZMÎ» erschienen in: Verh. Schweiz. Naturf. Ges. 1956 = L'Enseignement math. 2 (1956).

[*2*] Brāhma-sphuta-Siddhānta, ed. by MAHĀMAHOPĀDHYĀYA SUDHĀKARA DVIVEDIN, Benares 1900, reprint from Pandit XXIV, No. 12.

[*3*] al-BÎRÛNÎ, Albêrûnî's India, English edition by E. C. Sachau 1887/88. Wir zitieren nach dem zweibändigen Nachdruck, London 1910.

[*4*] — The Chronology of Ancient Nations, Transl. and ed. by E. C. Sachau, London 1879.

[*5*] — The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology, Transl. by R. R. Wright, London 1934.

[*6*] J. BENTLEY, A Historical View of the Hindu Astronomy, London 1825.

[*7*] H. T. COLEBROOKE, On the Notions of the Hindu Astronomers, Asiatick Researches, *12* (1818), p. 211—252.

[*8*] P. AHNERT, Astronomisch-chronologische Tafeln, Leipzig 1960.

[*9*] E. S. KENNEDY, A Survey of Islamic Astronomical Tables. Trans. Amer. Philos. Soc., vol. 46, part 2 (1956), p. 123—177.

[*10*] R. SCHRAM, Kalendariographische und Chronologische Tafeln, Leipzig 1908.

[*11*] B. L. VAN DER WAERDEN, Diophantische Gleichungen und Planetenperioden in der indischen Astronomie. Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich, *100* (1955), S. 153—170.