Trójkąty różnicowe cz. 2

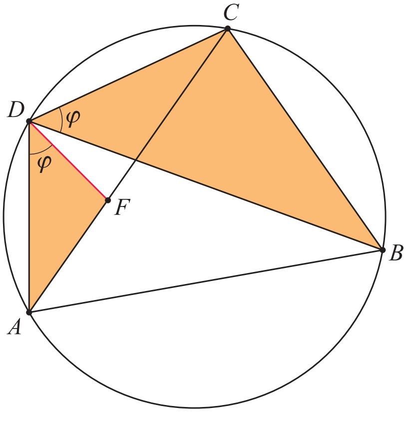
STEFAN MIZIA

W poprzednim odcinku naszego geometrycznego cyklu przedstawiłem kilka zadań związanych z tzw. *trójkątem różnicowym*. Przypomnijmy, że terminem tym zwykło się określać trójkąty, w których długości boków tworzą ciąg arytmetyczny.

Tym razem proponuję kilka użytecznych twierdzeń, które warto mieć na podorędziu rozwiązując zadania z takimi trójkątami.

Twierdzenie Ptolemeusza. Iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta.

Dowód. Przyjmując oznaczenia jak na załączonym rysunku, poprowadźmy odcinek DF, gdzie punkt F leżący na przekątnej AC czworokąta jest wybrany w taki sposób, że $\sphericalangle FDA = \sphericalangle CDB = \varphi$. Wtedy, ponieważ $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$ (kąty oparte na wspólnym łuku), trójkąty ΔADF i ΔDCB oraz ΔADB i ΔFDC są parami podobne (mają jednakowe kąty). Mamy więc



$$\frac{|AD|}{|AF|} = \frac{|DB|}{|BC|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|DC|}{|FC|} = \frac{|DB|}{|AB|}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy $|AD|\cdot|BC| = |AF|\cdot|DB|$ i $|AB|\cdot|CD| = |FC|\cdot|DB|$. Stąd po dodaniu stronami i wykorzystaniu równości $|AF| + |FC| = |AC|$ dostajemy równość

$$|AD|\cdot|BC| + |AB|\cdot|CD| = |AC|\cdot|DB|.$$

To kończy dowód.

Część pierwsza artykułu *Trójkąty różnicowe* została opublikowana w „Matematyce” 5/2013.

Twierdzenie o trójliściu. Niech W_1 będzie środkiem łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wtedy $|W_1C| = |W_1B| = |IW_1|$, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Dowód. Z założenia natychmiast jest równość $|W_1C| = |W_1B|$. Rozważmy trójkąt ΔICW_1. Wystarczy wykazać, że jest on równoramienny. Zauważmy, że

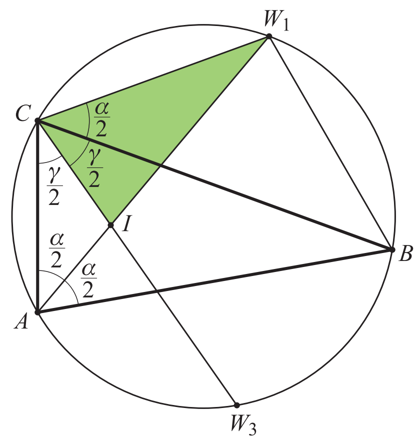
$$\sphericalangle ICW_1 = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2},$$

bo prosta AW_1 zawiera dwusieczną kąta $\sphericalangle BAC$ trójkąta. Z drugiej strony

$$\sphericalangle AW_1C = \beta = 180° - (\alpha + \gamma), \text{ stąd}$$

$$\sphericalangle W_1IC = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle ICW_1,$$

a tym samym $|W_1C| = |IW_1|$.



W dalszym ciągu o trójkącie ABC będziemy zakładać, że długości jego boków spełniają warunki:

(0) $\qquad b \geq a \geq c \;$ i $\; 2a = b + c.$

Treści zadań

1 Wykazać, że $|AI| = |IW_1|$.

2 Wykazać, że $|IL_1| = |L_1W_1|$, gdzie L_1 jest spodkiem dwusiecznej kąta A.

3 Wykazać, że $h_a = 3r$, gdzie h_a jest długością wysokości trójkąta ABC poprowadzonej na bok BC, a r jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

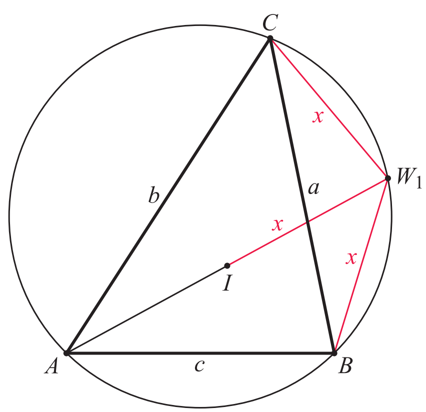
Szkice rozwiązań

1. Niech $|IW_1| = x$. Czworokąt ABW_1C można wpisać w okrąg, więc z twierdzenia Ptolemeusza mamy równość

$$|AW_1| \cdot a = cx + bx = (b+c)x.$$

Ponieważ $b + c = 2a$, więc z powyższej zależności wynika $|AW_1| = 2x$. Stąd

$$|AI| = |AW_1| - x = 2x - x = x = |IW_1|.$$



2. Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie, mamy

$$|CL_1| = \frac{ab}{b+c}.$$

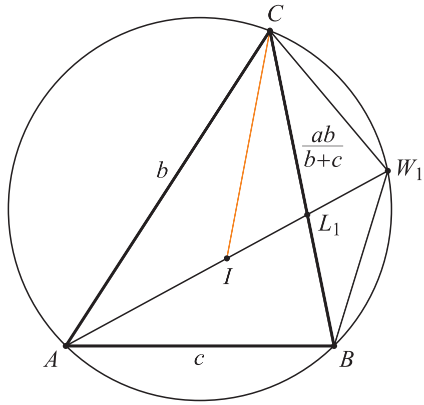
Stosując ponownie to twierdzenie dla trójkąta ΔAL_1C otrzymamy

$$\frac{|AI|}{|IL_1|} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b}{\frac{ab}{2a}} = 2.$$

Zatem

$$|IL_1| = \frac{1}{2}|AI| = \frac{1}{2}|IW_1|,$$

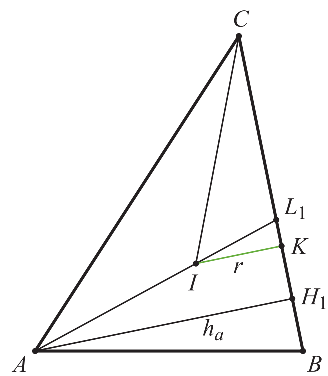
co właśnie mieliśmy udowodnić.



3. Rozważmy trójkąt ΔAH_1L_1 i niech K będzie rzutem prostokątnym punktu I na bok BC trójkąta. Wtedy $|IK| = r$, a wobec równoległości odcinków IK i AH_1, mamy

$$\frac{h_a}{r} = \frac{|AL_1|}{|IL_1|} = 3,$$

– dzięki równości z poprzedniego zadania. ❑



STEFAN MIZIA

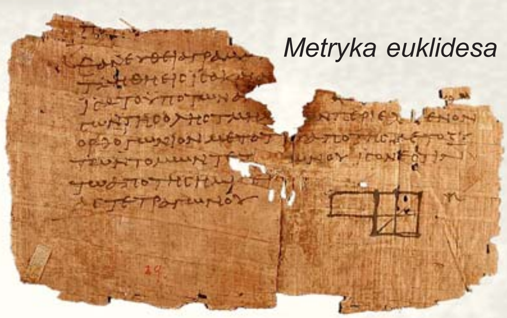
nauczyciel matematyki

Pocztówka z historii

Euklides z Aleksandrii

(ok. 365 r. p.n.e., zm. ok. 300 r. p.n.e.
inne źródła: 325–265)

Matematyk grecki pochodzący z Aten, pracował głównie w Aleksandrii.



Metryka euklidesa

$$d(A, B) = \\ = \sqrt{(x_1^A - x_1^B)^2 + (x_2^A - x_2^B)^2 + \ldots + (x_n^A - x_n^B)^2} = \\ = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^A - x_i^B)^2}$$