WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA W KATOWICACH

ZESZYTY NAUKOWE 30

SEKCJA MATEMATYKI

NR 5

WNICTWO „PRACE NAUKOWE WSP". KATOWICE 1966
OGÓLNEGO ZBIORU NR 30

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA W KATOWICACH

ZESZYTY NAUKOWE

SEKCJA MATEMATYKI

NR 5

WYDAWNICTWO „PRACE NAUKOWE WSP". KATOWICE 1966
OGÓLNEGO ZBIORU NR 30

Wydawca:

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA W KATOWICACH
ul. Szkolna 9

Nakł. 380+25 Ark. wyd. 10 Ark. druk. $9\frac{5}{8}$ Papier drukowy sat. kl. III, 70x100, 80 g
Oddano do druku 13. 12. 1965 Podpis. do druku 10. 12 1967 Druk ukoń. w grudniu 1967
Zam. 1871 15. 12. 1967 E-23 Cena zł 13,—

Skład, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

ANTONI WAKULICZ

O MNOŻENIU WYZNACZNIKÓW

Jako kontynuację rozważań w [1] przedstawiam w § 1 prosty dowód twierdzenia o mnożeniu wyznaczników różnych stopni nie opierający się o rachunek inwersji i stanowiący naturalne uogólnienie mnożenia wyznacznika przez liczbę. W § 2 omawiam pojęcia i twierdzenia teorii miary, z których również wynika reguła mnożenia wyznaczników jako natychmiastowa konsekwencja reguły mnożenia macierzy.

§ 1. Twierdzenie o mnożeniu wyznaczników i jego dowód bezpośredni

Twierdzenie. Jeśli stopień k wyznacznika V jest nie większy od stopnia n wyznacznika D, to wyznacznik $W = D \cdot V$ otrzymujemy z wyznacznika D zastępując w nim wektory kolumny $X_{l_1}, X_{l_2} \ldots X_{l_k}$ przy dowolnym ciągu $l_1 < l_2 < \ldots < l_k$ przez ich kombinacje liniowe o współczynnikach będących elementami kolejnych kolumn wyznacznika V.

Dowód. Dla $k = 1$ jest to znane twierdzenie o mnożeniu wyznacznika przez liczbę.

Dla $k = 2$ wyznacznik D zapisujemy za pomocą wektorów kolumn $D = |\ldots X_{l_1} \ldots X_{l_2} \ldots|$, gdzie $l_1 < l_2$ zaś $V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Należy wykazać, że

$$|\ldots X_{l_1} \ldots X_{l_2} \ldots| \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |\ldots a_{11} X_{l_1} + a_{21} X_{l_2} \ldots a_{12} X_{l_1} + a_{22} X_{l_2} \ldots|,$$

gdzie kropki oznaczają ewentualne pozostałe niezmienione kolumny wyznacznika D.

Dowód przeprowadzamy najpierw w przypadku $V \neq 0$. Mamy wówczas bądź $a_{22} \neq 0$ bądź $a_{21} \neq 0$. W pierwszym przypadku istnieje taka liczba α, że $a_{21} + \alpha a_{22} = 0$, zatem $V = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{12} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + \alpha a_{12}) \cdot a_{22}$.

Przekształcając analogicznie wyznacznik W mamy

$$W = |\ldots (a_{11} + \alpha a_{12}) X_{l_1} \ldots a_{12} X_{l_1} + a_{22} X_{l_2} \ldots| =$$
$$= (a_{11} + \alpha a_{12}) a_{22} |\ldots X_{l_1} \ldots X_{l_2} \ldots| = D . V.$$

W przypadku $a_{21} \neq 0$ tw. zachodzi dla mnożenia przez wyznacznik $V' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$ tzn. $W' = | \dots a_{12} X_{l_1} + a_{22} X_{l_2} \dots a_{11} X_{l_1} + a_{21} X_{l_2} \dots | = D. V'$. Transponując kolumny l_1 i l_2 w W' oraz pierwszą i drugą kolumnę w V' mamy $W = DV$ i w tym przypadku.

Wykażemy teraz, że, jeśli tw. zachodzi dla wyznacznika V stopnia $k - 1 \geqslant 2$, to zachodzi dla wyznacznika V stopnia k.

Niech $D = | \dots X_{l_1} \dots X_{l_2} \dots X_{l_3} \dots X_{l_k} \dots |$, zaś

$$V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

Rozpatrujemy wyznacznik $W = | \dots a_{11} X_{l_1} + a_{21} X_{l_2} + \dots + a_{k1} X_{l_k} \dots \dots a_{12} X_{l_1} + a_{22} X_{l_2} + \dots + a_{k2} X_{l_k} \dots a_{1k} X_{l_1} + a_{2k} X_{l_2} + \dots + a_{kk} X_{l_k} \dots |$
Jeśli $V_{11} \neq 0$, to istnieją liczby $\alpha_2, \alpha_3 \dots, \alpha_k$ spełniające układ równań:

$$\begin{cases} \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} + \dots + \alpha_k a_{2k} = - a_{21} \\ \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} + \dots + \alpha_k a_{3k} = - a_{31} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_2 a_{k2} + \alpha_3 a_{k3} + \dots + \alpha_k a_{kk} = - a_{k1} \end{cases}$$

Mnożąc zatem kolumny 2, 3, ... k wyznacznika V odpowiednio przez liczby $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_k$ i dodając do kolumny pierwszej otrzymujemy

$$V = (a_{11} + a_{12} \alpha_2 + a_{13} \alpha_3 + \dots + a_{1k} \alpha_k) V_{11}$$

Mnożąc zaś kolumny $l_2, \dots, l_k$ wyznacznika W odpowiednio przez $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ i dodając do kolumny o numerze l_1 mamy:

$$W = | \dots X_{l_1} \dots a_{22} X_{l_2} + a_{32} X_{l_3} + \dots + a_{k2} X_{l_k} \dots a_{2k} X_{l_2} + a_{3k} X_{l_3} + \\ + \dots + a_{kk} X_{l_k} | (a_{12} \alpha_2 + a_{13} \alpha_3 + \dots + a_{1k} \alpha_k + a_{11}).$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że pierwszy czynnik tego iloczynu jest $W_1 = D.V_{11}$. Zatem $W = D. V_{11} (a_{12} \alpha_2 + a_{13} \alpha_3 + \dots + a_{1k} \alpha_k + a_{11}) = D.V$.

Z założenia, że $V \neq 0$ wynika, że przy pewnym s, $V_{1s} \neq 0$. Dla $s = 1$ dowód został przeprowadzony. Jeśli $s \neq 1$, to tw. zachodzi dla mnożenia wyznacznika D przez wyznacznik V', który otrzymujemy z wyznacznika V przestawiając s-tą kolumnę na pierwsze miejsce za pomocą $s - 1$ transpozycji tej kolumny z poprzedzającymi kolumnami. Mamy więc

(2) $$W' = | \dots a_{1s} X_{l_1} + a_{2s} X_{l_2} + \dots + a_{ks} X_{l_k} \dots a_{11} X_{l_1} + a_{21} X_{l_2} + \dots + \\ + a_{k1} X_{l_k} \dots | = D. V'$$

Transponując w równości (2) $s - 1$ razy kolumnę l_1 w wyznaczniku W' z kolumnami o numerach $l_2, l_3, \dots l_{s-1}, l_s$ zaś w wyznaczniku V' pierwszą kolumnę z kolumnami o numerach $2, 3, \dots, s$ otrzymujemy żądaną równość $W = DV$. — Twierdzenie zostało zatem udowodnione przy założeniu $V \neq 0$.

Jeśli $V = 0$, to twierdzenie oczywiście zachodzi przy $k = 1$. Przy $k \geqslant 2$ warunek $V = 0$ pociąga istnienie niezerowego rozwiązania układu równań jednorodnych $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = 0$, gdzie A_i wektory kolumny wyznacznika V. Wynika stąd, że przy pewnym s kolumna A_s jest kombinacją liniową pozostałych kolumn. Łatwo widzieć, że wówczas i kolumna l_s wyznacznika W jest kombinacją liniową pozostałych kolumn. Zatem $W = 0$ oraz $DV = 0$, więc $W = DV$ i w tym przypadku. — Twierdzenie zostało w zupełności udowodnione.

§. 2. Związek mnożenia wyznaczników z mnożeniem macierzy

Rozpatrujemy przekształcenia liniowe jednorodne płaszczyzny lub przestrzeni trójwymiarowej określone za pomocą macierzy. Obraz figury s oznaczamy przez $\bar{s}$, zaś pola (objętości) tych figur odpowiednio przez $|s|$, $|\bar{s}|$. Jeśli dla pewnego przekształcenia zachodzi związek $|\bar{s}| = \alpha |s|$, to liczbę α nazywamy współczynnikiem zniekształcenia pola figury s przy rozpatrywanym przekształceniu.

W teorii miary dowodzi się twierdzenia:
Jeśli przy danym przekształceniu każdy prostokąt (prostopadłościan) o ustalonych kierunkach boków (— kierunkach ścian) przechodzi w figurę mierzalną o stałym współczynniku zniekształcenia pola, to każda figura mierzalna przechodzi przy tym przekształceniu w figurę mierzalną z tym, że współczynnikiem zniekształcenia pola (objętości).

Łatwo wykazać, że dla przekształceń liniowych płaszczyzny czy przestrzeni zachodzą założenia powyższego twierdzenia. Przykładowo stwierdzimy to dla przekształcenia płaszczyzny.

Jak wiadomo pole $|s|$ równoległoboku s o wierzchołkach $P_1\,(x_1, y_1)$, $P_2\,(x_2, y_2)$, $P_3\,(x_3, y_3)$ przy pewnym uporządkowaniu oznaczeń jest równe wyznacznikowi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Pole $|s|$ prostokąta $P_1\,(x_1, y_1)$, $P_2\,(x_1 + h, y_1)$, $P_3\,(x_1, y_1 + k)$ przy $h, k > 0$ jest równe

$$|s| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 + h & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 + k & 1 \end{vmatrix} = hk$$

Rozpatrujemy przekształcenie liniowe $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ o wyznaczniku $|M| \geqslant 0$. Mamy $\bar{x} = a_1 x + b_1 y$, $\bar{y} = a_2 x + b_2 y$.

Stwierdzamy, że pole równoległoboku, który jest obrazem prostokąta s, jest

$$|\bar{s}| = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 1 \\ \bar{x}_3 & \bar{y}_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 & a_2 x_1 + b_2 y_1 & 1 \\ a_1 x_1 + h + b_1 y_1 & a_2 x_1 + h + b_2 y_2 & 1 \\ a_1 x_1 + b_1 y_1 + k & a_2 x_1 + b_2 y_1 + k & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 & a_2 x_1 + b_2 y_1 & 1 \\ a_1 h & a_2 h & 0 \\ b_1 k & b_2 k & 0 \end{vmatrix} = hk \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = hk\, |M|.$$

Oznacza to, że współczynnik zniekształcenia pola ma wartość stałą równą $|M|$.

Zupełnie podobnie przebiega dowód dla przestrzeni trójwymiarowej.

Dla przestrzeni o większej ilości wymiarów po określeniu odpowiednich figur i wprowadzeniu elementów teorii miary łatwo dowodzi się analogicznych twierdzeń.

Rozważamy teraz dwa przekształcenia liniowe o macierzach M_1, M_2 i wyznacznikach $|M_1| \geqslant 0$, $|M_2| \geqslant 0$. Iloczyn tych macierzy $M = M_2 M_1$. Niech s będzie prostopadłościanem w odpowiedniej przestrzeni. Wtedy miara obrazu s_1 figury s po przekształceniu M_1 jest $|s_1| = |s|\ |M|$. Po wykonaniu następnie przekształcenia M_2 figury s_1 mamy figurę s_2 o mierze $|s_2| = |s_1| \cdot |M_2| = |s|\ |M_1| \cdot |M_2|$.

Bezpośrednie przekształcenie M figury s daje figurę $\bar{s}$ o mierze $|\bar{s}| = |s| \cdot |M|$. Z uwagi na identyczność figur s_2 i $\bar{s}$ mamy $|s|\ |M_2 M_1| = |s| \cdot |M_1| \cdot |M_2|$ czyli $|M_2 M_1| = |M_1| \cdot |M_2|$, co znaczy, że wyznaczniki nieujemne możemy mnożyć jak macierze. Stąd łatwo otrzymujemy tę samą regułę dla dowolnych wyznaczników rozważając transpozycje kolumn w wyznacznikach ujemnych.

PRACA CYTOWANA

[1] A. Wakulicz: *Zarys teorii wyznaczników i układów równań liniowych w oparciu o pojęcie iloczynu skalarnego*, Zeszyty Naukowe WSP w Katowicach, Sekcja Matematyki, 4, 1964, ss. 5—10.

ON THE MULTIPLICATION OF DETERMINANTS

By A. WAKULICZ

SUMMARY

As a continuation of the paper [1] the author gives two simple proofs of the Cauchy's theorem on multiplication of determinants. In the first section it is proved theorem on multiplication of determinants whose degrees are not necessary equal; in the second section the proof of Cauchy's theorem is obtained as a consequence of a theorem from measure theory.

Oddano do Redakcji 15. VII. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

WŁADYSŁAW WRONA

O NAJMNIEJSZEJ ODLEGŁOŚCI PIERWIASTKÓW RÓWNANIA TRZECIEGO STOPNIA

Dla szukania pierwiastków wielomianu z użyciem twierdzenia Sturma jest rzeczą istotną znać przedział, w którym znajduje się już tylko jeden pierwiastek wielomianu. Długość tego przedziału jest oczywiście mniejsza od najmniejszej odległości pierwiastków.

Celem tego artykułu jest oszacowanie najmniejszej odległości pierwiastków równania stopnia trzeciego:

(1) $$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

gdzie współczynniki są liczbami rzeczywistymi, $a_0 \neq 0$.

Równanie (1) przez podstawienie $y = x - a_1/3a_0$ sprowadza się do równania

(2) $$y^3 + py + q = 0,$$

które ma tę własność, że różnice jego pierwiastków są takie same jak różnice pierwiastków równania (1). Dlatego rozpatrywać będziemy równanie (2).

Niech y_0, y_1, y_2 będą pierwiastkami równania (2). Zauważmy, że wtedy $-y_0$, $-y_1$, $-y_2$ są pierwiastkami równania $y^3 + py - q = 0$; zatem odległości pierwiastków obu równań są te same. Z tego względu możemy stale zakładać, że $q \leqslant 0$. Niech

(3) $$d = \min(|y_0 - y_1|, |y_1 - y_2|, |y_2 - y_0|), \quad D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie.

(a) Jeśli $D < 0$, to $2\sqrt{-3D}/|p| < d \leqslant 3\sqrt{-3D}/|p| \leqslant \sqrt{|p|}$.

(b) Jeśli $D = 0$, to $d = 0$.

(c) Jeśli $D > 0$ i $p > 0$, to $\sqrt{p} \leqslant d \leqslant \sqrt{p + 12\sqrt[3]{q^2/4}}$.

(d) Jeśli $D > 0$ i $p < 0$, to $\sqrt{3}\sqrt[3]{-q/2} - \sqrt{-p} < d < 2\sqrt{p + 3\sqrt[3]{q^2/4}}$.

Dowód. Rozpatrzymy najpierw przypadek (a). Jak wiadomo ([2], s. 218), jeśli $D < 0$, to

$$y_0 = 2\sqrt[3]{r}\cos\varphi/3,\ y_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos(\varphi + 2\pi)/3,\ y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos(\varphi + 4\pi)/3,$$

gdzie $r = \sqrt{-p^3/27}$, $\cos\varphi = -q/2r$, $\sin\varphi = \sqrt{-D}/r$.

Jeśli $q \leqslant 0$, to $\cos\varphi \geqslant 0$, $\sin\varphi > 0$, zatem $0 < \varphi \leqslant \pi/2$, skąd mamy

$$y_1 < y_2 < 0 \leqslant y_0.$$

Ponieważ $y_0 + y_1 + y_2 = 0$, więc $y_0 + y_1 = -y_2 > 0 > 2y_2$, skąd $y_0 - y_2 > y_2 - y_1$. Zatem

$$d = y_2 - y_1 = 2\sqrt[3]{r}\,(\cos(\varphi + 4\pi)/3 - \cos(\varphi + 2\pi)/3) = 2\sqrt[3]{-p}\sin\varphi/3. \tag{4}$$

Z nierówności $0 < \varphi \leqslant \pi/2$ wynika, że $(\sin\varphi)/3 < \sin\varphi/3 < (\sin\varphi)/2$. Stąd i z (4) mamy

$$\frac{2}{3}\sqrt{-p}\sin\varphi < d = 2\sqrt{-p}\sin\varphi/3 < \sqrt{-p}\sin\varphi.$$

Uwzględniając teraz, że $\sin\varphi = \sqrt{-D}/r = \sqrt{27D/p^3}$, otrzymujemy stąd oszacowanie zawarte w punkcie (a).

Punkt (b) wynika stąd, że w przypadku $D = 0$ równanie (2) posiada pierwiastek podwójny, zatem $d = 0$.

Udowodnimy teraz punkt (c). Niech $D = 0$, $p > 0$, $q \leqslant 0$. Wtedy ([2], s. 217) równanie (2) ma pierwiastki $y_0 = 2a \geqslant 0$, $y_1 = -a + bi$, $y_2 = -a - bi$, skąd natychmiast wynika, że

$$p = b^2 - 3a^2,\ q = -2a(a^2 + b^2). \tag{5}$$

Mamy tutaj $|y_1 - y_2| = 2b$, $|y_0 - y_1| = |y_0 - y_2| = \sqrt{9a^2 + b^2}$. Równość $d = \sqrt{9a^2 + b^2}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2b \geqslant \sqrt{9a^2 + b^2}$, to znaczy gdy $b^2 - 3a^2 = p \geqslant 0$. Tak więc w przypadku (c) jest $d = \sqrt{9a^2 + b^2}$, zaś w przypadku (d) jest $d = 2b$.

Z (5) wynika, że $b^2 = \left(-\dfrac{q}{2} - a^3\right)/a$, zatem $a \leqslant \sqrt[3]{-q/2}$. Stąd

$$d^2 = 9a^2 + b^2 = p + 12a^2 \leqslant p + 12\sqrt[3]{q^2/4} \text{ oraz } d^2 = p + 12a^2 \geqslant p,$$

zatem punkt (c) został udowodniony.

W przypadku (d) pierwiastki równania (2) mają tę samą postać co w przypadku (c), spełnione są równania (5) oraz $d = 2b$. Oszacowanie d z góry wynika stąd, że $b = \sqrt{p + 3a^2}$ oraz $a^2 \leqslant \sqrt[3]{q^2/4}$. Niech

$$(6)\quad F(a) = \sqrt{\left(-\frac{q}{2} - a^3\right)/a},\ f(a) = \sqrt{p + 3a^2},\ g(a) = \sqrt{3}\,(a - \sqrt{-p/3}).$$

Liczba b jest rozwiązaniem układu $F(a) = f(a) = b$. Potraktujmy (6) jako funkcje zmiennej a zaś rozwiązanie wspomnianego układu oznaczmy $a = a_0$, $b = b_0$. Funkcja F jest malejąca, funkcje f i g są rosnące, przy czym $f(a) > g(a)$ dla $a > \sqrt{-p/3}$. Niech $s = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-q/2} + \sqrt{-p/3}\right)$.

Mamy $s > \sqrt{-p/3}$, gdyż $q \neq 0$, $D > 0$.

Jeśli $s \leqslant a_0$, to $g(s) \leqslant g(a_0) < f(a_0) = b_0$.

Jeśli $s > a_0$, to $g(s) < F(s) < F(a_0) = b_0$, gdyż, jak to udowodnimy niżej, $g(s) < F(s)$. Tak więc w każdym przypadku $g(s) < b_0$, zatem $d = 2b_0 > 2g(s)$, skąd wynika już teza punktu (d). Pozostaje jeszcze udowodnić, że $g(s) < F(s)$. Mamy $g(s) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-q/2} - \sqrt{-p/3}\right) = \sqrt{3}\,(\sqrt[3]{-q/2} - s)$. Należy więc udowodnić, że

$$(7)\quad \sqrt{(\sqrt[3]{-q/2} - s)\,(\sqrt[3]{q^2/4} + s\sqrt[3]{-q/2} + s^2)/s} > \sqrt{3}\,(\sqrt[3]{-q/2} - s).$$

Wyrażenia pod pierwiastkiem kwadratowym w nierówności (7) są dodatnie, podnosimy więc obie strony (7) do kwadratu, dzielimy przez $\sqrt[3]{-q/2} - s$, po czym otrzymujemy nierówność

$$\sqrt[3]{q^2/4} + \sqrt{-p/3}\,\sqrt[3]{-q/2} - p/3 > 0$$

prawdziwą, gdyż wszystkie składniki są tu dodatnie. Zatem prawdziwa jest także nierówność (7) i nasze twierdzenie jest w zupełności udowodnione.

Zauważmy jeszcze, że wskazane w punkcie (a) oszacowania są lepsze od rezultatu jaki można uzyskać przy pomocy wyróżnika równania (2) (zob. [3], ss. 167—8). Jak wiadomo,

$$[(y_0 - y_1)(y_1 - y_2)(y_2 - y_0)]^2 = -4p^3 - 27q^2 = -D_1$$

skąd $d \leqslant \sqrt[6]{-D_1}$. Tymczasem $3\sqrt[3]{-3D}/|p| = \sqrt{-D_1}/2\,|p| = \sqrt[6]{-D_1} \times \times \sqrt[3]{-D_1}/2\,|p| < \sqrt[6]{-D_1}$.

Z pewnego twierdzenia F. Constantinesco [1] wynika, że w przypadku (a) mamy $d<d'$, gdzie d' jest odległością pierwiastków równania $3y^2+p = 0$, czyli $d' = 2\sqrt{-p/3}$. Jest to, jak łatwo sprawdzić, także oszacowanie słabsze od podanego w punkcie (a).

PRACE CYTOWANE

[1] F. Constantinesco: *Sur un theoreme de Marcel Riesz*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 247, 1958, ss. 256—257.

[2] Энциклопедия элементарной математики, книга II, Алгебра, Москва — Ленинград, 1951.

[3] W. Sierpiński: *Zasady algebry wyższej*, Warszawa—Wrocław, 1951.

ON THE MINIMAL DISTANCE BETWEEN ROOTS OF THE EQUATION OF THIRD DEGREE

By Władysław WRONA

Let y_0, y_1, y_2 be roost of the equation (2) (p. 9), d and D are defined by (3). The author shows the following

Theorem. If $D<0$ then $2\sqrt{-3D}/|p| < d \leqslant 3\sqrt{-3D}/|p| \leqslant \sqrt{|p|}$.

If $D=0$ then $d=0$.

If $D>0$ and $p>0$ then $\sqrt{p} \leqslant d \leqslant \sqrt{p+12\sqrt[3]{q^2/4}}$.

If $D>0$ and $p<0$ then $\sqrt{3}\sqrt[3]{-q/2} - \sqrt{-p} < d < 2\sqrt{p+3\sqrt[3]{q^2/4}}$.

Oddano do Redakcji 16. VI. 1965.

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

JAN AMBROSIEWICZ

SPROWADZANIE FORMY KWADRATOWEJ DO POSTACI DIAGONALNEJ

Sprowadzanie formy kwadratowej do postaci diagonalnej metodą Lagrange'a ([1] str. 145—152) jest uciążliwe zwłaszcza wtedy, gdy trzeba podnosić do kwadratu skomplikowane wyrażenia. Istnieje metoda Jacobiego pozwalająca dość szybko określić współczynniki formy kwadratowej zapisanej w postaci diagonalnej. W metodzie tej największą trudność przedstawia szukanie przekształcenia, które daną formę kwadratową sprowadza do postaci diagonalnej. Znalezienie tego przekształcenia wymaga obliczenia wyznaczników ze skomplikowanymi wyrażeniami liniowymi ([2] str. 133). Wyprowadzenie wzorów na przekształcenie w metodzie Jacobiego nie jest łatwe.

W zbiorze zadań [3] str. 122 podane jest zadanie[1] na obliczenie współczynników formy kwadratowej w postaci diagonalnej. W zadaniu tym nie podaje się sposobu znajdowania przekształcenia, oblicza się współczynniki przy założeniu, że takie przekształcenie istnieje.

W niniejszym artykule podaję dowody dwóch prostych twierdzeń, które jednocześnie wskazują prostą metodę znajdowania przekształcenia i współczynników formy kwadratowej w postaci diagonalnej.

Na wstępie omówimy krótko pewne podstawowe pojęcia. Niech będzie dana macierz nieosobliwa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Załóżmy, że macierz A ma wyraz a_{11} różny od zera. Po podzieleniu pierwszego wiersza przez a_{11} wyraz kierunkowy tego wiersza stanie się jednością. Odejmujemy teraz pierwszy wiersz pomnożony odpowiednio przez a_{i1} $(i = 2, 3, \dots n)$ od pozostałych wierszy. Wtedy pierwszym wyrazem

[1] Nr 943.

pierwszej kolumny jest liczba 1, zaś pozostałe wyrazy pierwszej kolumny są zerami. Dalej stosujemy to samo przekształcenie kolejno do pozostałych wierszy zgodnie z metodą Gaussa obliczania wyznaczników [4]. W ten sposób otrzymamy pewną macierz B, o wyrazach kierunkowych równych jedności. Jest widoczne, że możemy tak poprzestawiać wiersze macierzy, aby wyrazy kierunkowe równe jedności znajdowały się na głównej przekątnej.

Liczby przez które dzielimy kolejne wiersze aby otrzymać w nich wyrazy kierunkowe równe jedności oznaczamy przez

(1) $$a_1, a_2, a_3, \dots a_n.$$

Ponieważ $$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots a_n = |A| = \Delta_n$$

więc $$a_n = \frac{\Delta_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots a_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Zatem ciągowi liczb (1) można nadać postać

(1′) $$\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

gdzie $\Delta_0 = 1$, zaś Δ_i podwyznaczniki główne.

Z ostatniej równości wynika, że macierz A da się podanym sposobem doprowadzić do postaci trójkątnej, gdy jej wszystkie główne podwyznaczniki są różne od zera.

W przypadku, gdy rząd macierzy A wynosi k i $\Delta_s \neq 0$ dla $s \leqslant k$, macierz B ma k wierszy niezerowych, pozostałe zaś $n-k$ są wierszami zerowymi. Wtedy w ciągu (1) jest k wyrazów. Macierz B będziemy nazywali zredukowaną macierzą trójkątną dla danej macierzy A.

T w i e r d z e n i e 1. Jeżeli macierz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ma główne podwyznaczniki różne od zera, a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ & 1 & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

jest jej zredukowaną macierzą trójkątną, to zachodzi równość

(2) $$A \cdot B^{-1} = C,$$

gdzie C jest to macierz której główną przekątną tworzą elementy ciągu (1), natomiast wszystkie wyrazy znajdujące się powyżej głównej przekątnej są zerami.

Dowód. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy rząd macierzy A jest równy n. Sprowadzanie macierzy A do postaci trójkątnej polega na mnożeniu tej macierzy przez macierze typu

(a)
$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ j\ldots \\ \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{a} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{array}\right)$$

i

(b)
$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ j\ldots \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & -a & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{array}\right)$$

Lewostronne mnożenie macierzy A przez macierz typu (a) odpowiada mnożeniu j-go wiersza tej macierzy A przez $\frac{1}{a}$. Lewostronne mnożenie A przez macierz typu (b) odpowiada dodawaniu do elementów j-go wiersza elementów proporcjonalnych do elementów wierszy leżących powyżej.

Redukcję macierzy A do postaci trójkątnej możemy ująć w postaci

(3)
$$T_1 \cdot T_2 \ldots T_s \cdot A = B$$

przy czym

$$T_i^{-1} = E_i\,,$$

gdzie E_i ma postać (c) lub (d)

(c)
$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{array}\right)$$

(d)
$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & a & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{array}\right)$$

Z równości (5) otrzymujemy

$$E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots E_s \cdot B = A \tag{4}$$

gdzie E_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) są to macierze typu (c) lub (d), zaś B jest macierzą trójkątną

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ & 1 & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Równości (4) można nadać postać

$$E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots E_s = A \cdot B^{-1} \tag{6}$$

bo macierz (4) ma wyznacznik równy jedności.

Iloczyn $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots E_s$ jest macierzą C, której wszystkie wyrazy leżące powyżej głównej przekątnej są zerami, co wynika z budowy macierzy typu (c) i (d).

Obliczymy wyrazy stojące na głównej przekątnej macierzy C, Z (4) otrzymujemy

$$|E_1| \cdot |E_2| \cdot |E_3| \ldots |E_s| \cdot |B| = |A| = \Delta_n \tag{7}$$

Wyznaczniki macierzy typu (d) i wyznacznik macierzy B są równe jedności. Wyznaczniki powstałe z macierzy typu (c) są to wyznaczniki różne od jedności. Jest ich dokładnie n. Łatwo zauważyć, że te wyznaczniki są równe wyrazom z ciągu (1). Z (1) i (5) wynika teza twierdzenia.

Twierdzenie jest także prawdziwe i wtedy, gdy macierz A jest osobliwa, jeśli odpowiednio określimy macierz B^{-1}. Jeśli rząd macierzy A wynosi k, to dla macierzy trójkątnej $B^{(k)}$ składającej się z k wierszy i tyluż kolumn istnieje macierz odwrotna $B^{(k)-1}$. Jeśli się umówimy, że macierzą B^{-1} będzie taka macierz, która powstaje z $B^{(k)-1}$ przez dopisanie do niej n-k wierszy i tyleż kolumn składających się z samych zer, to ilość wyrazów różnych od zera stojących na głównej przekątnej macierzy $C = A \cdot B^{-1}$ równa jest wówczas rzędowi k macierzy A, co wynika z wzoru (6).

P r z y k ł a d 1. Niech będzie dana macierz nieosobliwa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Sprowadzamy ją do postaci trójkątnej

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{13}{2} & -4 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & \frac{27}{13} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W naszym przykładzie

$$a_1 = 2,\ a_2 = -\frac{13}{2},\ a_3 = \frac{27}{13}.$$

Macierzą odwrotną do B jest macierz

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{14}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iloczyn

$$C = A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{14}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -\frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 8 & \frac{27}{13} \end{pmatrix}$$

P r z y k ł a d 2. Niech będzie dana osobliwa macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tutaj jest

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{(2)-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zgodnie z umową.

Iloczyn

$$A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W tym przykładzie

$$a_1 = 2, \; a_2 = -1, \; a_3 = 0.$$

Twierdzenie 2. Jeżeli macierz $A = (a_{ij})$ jest rzędu k i $\Delta_s \neq 0$ dla $s \leqslant k$, to forma kwadratowa n zmiennych

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{7}$$

o macierzy A, daje się sprowadzić do postaci diagonalnej za pomocą przekształcenia liniowego o macierzy odwrotnej do (4), przy czym współczynniki formy kwadratowej w postaci diagonalnej są wyrazami ciągu (1) i jest ich dokładnie k.

Dowód. Formie (7) można nadać postać

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Załóżmy najpierw, że rząd macierzy tej formy wynosi n. Macierz formy kwadratowej jest symetryczna. Przekształćmy tę formę za pomocą przekształcenia liniowego

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + b_{12} x'_2 + \ldots + b_{1n} x'_n \\ x_2 &= \phantom{x'_1 + b_{12}} x'_2 + \ldots + b_{2n} x'_n \\ x_n &= \phantom{x'_1 + b_{12} x'_2 + \ldots + b_{2n}} x'_n \end{aligned} \tag{9}$$

o macierzy B^{-1} tj. odwrotnej do macierzy (4). Otrzymamy wtedy

$$f = (x'_1, x'_2 \ldots, x'_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ b_{12} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \tag{10}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ & 1 & b_{23} \ldots & b_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

czyli

$$(11) \qquad f = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \cdot (B^{-1})' \cdot A \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

gdzie $(B^{-1})'$ oznacza macierz transponowaną do B^{-1}.

W oparciu o twierdzenie (1) mamy

$$(12) \qquad A\,B^{-1} = C = \begin{vmatrix} a_1 & & & & 0 \\ c_{21} & a_2 & & & \\ c_{31} & c_{32} & a_3 & . & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & . \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami ciągu (1).

Iloczyn macierzy $(B^{-1})'$ przez C jest macierzą trójkątną tej samej postaci co i macierz C, a ponieważ

$$((B^{-1})' \cdot A \cdot B^{-1})' = (B^{-1})' \cdot A' \cdot ((B^{-1}))' = (B^{-1})' \cdot A \cdot B^{-1}$$

więc wszystkie wyrazy macierzy

$$(B^{-1})' \cdot A \cdot B^{-1}$$

leżące poniżej głównej przekątnej muszą przy mnożeniu ulec redukcji i stać się zerami.

Zatem

$$(B^{-1})' \cdot A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

Stąd natychmiast otrzymujemy

$$f = a_1\,x'^2_1 + a_2\,x'^2_2 + \ldots + a_n\,x'^2_n$$

Jeśli rząd macierzy wynosi $k < n$, to zgodnie z twierdzeniem (1) twierdzenie 2 też jest prawdziwe. Wtedy ilość wyrazów formy kwadratowej w postaci diagonalnej jest równa rzędowi macierzy A.

P r z y k ł a d 3. Sprowadzić formę

$$f = 2\,x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 16\,x_1\,x_3 - 3\,x_2^2 + 18\,x_2\,x_3 + 2\,x_3^2$$

do postaci diagonalnej. Macierzą tej formy jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 9 \\ 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Sprowadzamy tę macierz do postaci trójkątnej

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 5 \\ 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 5 & -30 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{160}{7} \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mamy tutaj a_1, $a_2 = -\frac{7}{2}$, $a_3 = -\frac{160}{7}$. Stąd postać diagonalna formy kwadratowej

$$f = a_1 x'^2_1 + a_2 x'^2_2 + a_3 x'^2_3 = 2 x'^2_1 - \frac{7}{2} x'^2_2 - \frac{160}{7} x'^2_3$$

otrzymane za pomocą przekształcenia

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \frac{1}{2} x_2 + 4 x_3 \\ x'_2 &= \phantom{x_1 + \frac{1}{2}} x_2 - \frac{10}{7} x_3 \\ x'_3 &= \phantom{x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{10}{7}} x_3 \end{aligned}$$

którego zresztą nie potrzebowaliśmy wykonywać.

Aby sprowadzić formę kwadratową (7) do postaci diagonalnej, wystarczy zatem sprowadzić macierz A tej formy do postaci trójkątnej (5). Ta macierz trójkątna określa przekształcenie liniowe sprowadzające tę formę do postaci diagonalnej o współczynnikach (1) wyznaczonych przy sprowadzaniu macierzy A do postaci trójkątnej.

PRACE CYTOWANE

[1] А. Г. Курош: Курс высшей алгебры, Москва — Ленинград, 1952.

[2] W. I. Smirnow: Matematyka wyższa, t. III, cz. I, Warszawa, 1964.

[3] Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский: Сборник задач по высшей алгебре, Москва, 1964.

[4] W. N. Faddiejewa: Metody numeryczne algebry liniowej, PWN, Warszawa, 1965.

ON TRANSFORMATIONS OF A QUADRATIC FORM TO THE DIAGONAL SHAPE

By J. AMBROSIEWICZ

SUMMARY

The author gives a simple way of transformation of a quadratic form to the diagonal shape. It is based on an application of Gauss's algorithm to transformations of the matrix of quadratic form.

Oddano do Redakcji 18. VI. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

EUGENIUSZ KOWALSKI

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH GRUPY SKOŃCZONEJ OKREŚLONEJ RELACJAMI $a^n = b^m = 1$, $ba = a^r b$

Celem tej notatki jest dowód bezpośredni twierdzeń, które częściowo są rozpatrywane w [1] w związku z pojęciem iloczynu półprostego grup.

Twierdzenie 1. Na to aby relacje

(1) $a^n = b^m = 1$, $ba = a^r b$, gdzie działanie jest łączne, n, m rzędy elementów a, b oraz $1 \leqslant r < n$, określały grupę potrzeba i wystarcza, by

$$n \mid r^m - 1. \tag{2}$$

Twierdzenie 2. Grupa określona relacjami (1) jest rzędu mn wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest spełniony przynajmniej jeden z warunków

$$n \mid p(r-1), \quad n \mid r^q - 1, \quad m \mid q(r-1) \tag{3}$$

gdzie $1 \leqslant p < n$, $1 \leqslant q < m$, $nq = mp$. W przeciwnym wypadku rząd grupy jest $nq = mp$.

Twierdzenie 3. Podgrupa $\{a\}$ jest dzielnikiem normalnym grupy określonej relacjami (1).

Twierdzenie 4. Centrum grupy (1) jest generowane przez elementy a^x, b^y takie, że $n \mid x(r-1)$, $n \mid r^y - 1$.

1. Dowód twierdzenia 1

Jeśli warunki (1) określają pewną grupę G, to ze wzoru $ba = a^r b$ mamy

$$ba^i = a^{ir} b, \quad b^j a^i = a^{ir^j} b^j, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

co można udowodnić indukcyjnie.

Istotnie, jeśli $ba^i = a^{ir}b$, to $ba^{i+1} = a^{ir}ba = a^{ir}a^r b = a^{(i+1)r} b$. Jeśli zaś $b^j a^i = a^{ir^j} b^j$, to $b^{j+1} a^i = ba^{ir^j} b^j = a^{ir^{j+1}} b^{j+1}$.

Ze związku $ba = a^r b$ i (4) mamy

$$a = b^{m-1} a^r b = a^{r \cdot r^{m-1}} b^{m-1} b = a^{r^m} \text{ czyli } a^{r^m - 1} = 1, \text{ więc } n \mid r^m - 1.$$

Aby stwierdzić dostateczność warunków (1), (2) dla istnienia grupy $G = \{a\} \cup \{b\}$ zauważamy, że warunki te określają zbiór elementów postaci $a^k b^l$ z następującym działaniem wewnętrznym

$$(a^u b^v) \cdot (a^x b^y) = a^u (a^{xr^v} b^v) b^y = a^{u+xr^v} b^{v+y}$$

zgodnie ze związkami (4). Łączność tego działania daje się łatwo stwierdzić. Jedynka istnieje z założenia. Istnienie elementu odwrotnego także nietrudno wykazać. Istotnie, jeśli

$$g = a^k b^l, \text{ to } g^{-1} = a^{-kr^{m-l}} b^{m-l}$$

i mamy

$$g^{-1} g = a^{-kr^{m-l}} b^{m-l} a^k b^l = a^{-kr^{m-l}} a^{kr^{m-l}} b^m = 1$$

a także

$$g\,g^{-1} = a^k b^l \cdot a^{-kr^{m-l}} b^{m-1} = a^k \cdot a^{-kr^{m-l}} \cdot r^l\, b^m = a^{k(1-r^m)} = 1 \text{ wobec (2).}$$

2. Dowód twierdzenia 2. Wnioski

Elementy grupy G są, jak widzieliśmy, postaci $a^k b^l$ przy $k = 1, 2, \ldots, n$, $l = 1, 2, \ldots m$. Zatem rząd tej grupy jest nm, jeśli wszystkie te elementy są różne. Równość dwóch elementów $a^{x_1} b^{y_1} = a^{x_2} b^{y_2}$ pociąga istnienie związku $a^p = b^q$, gdzie $1 \leqslant p < n$, $1 \leqslant q < m$.

Stąd $ba^p = b^{q+1} = a^{pr} b = a^p b$ czyli $a^{pr} = a^p$ i $a^{p(r-1)} = 1$,
a także $a^p a = b^q a = a^{r^q} b^q = a^{r^q} a^p$, $a = a^{r^q}$ czyli $a^{r^q - 1} = 1$.
Podobnie, $ba^p = b^q b$, $a^{pr} = b^q$, $b^{qr} = b^q$ więc $b^{q(r-1)} = 1$. Tak otrzymujemy warunki (3).

Jeśli warunki (3) są spełnione przy czym p, q są najmniejsze liczby naturalne, które czynią zadość tym warunkom, to dowolny element grupy G możemy przedstawić w postaci:

$c = a^t b^{q-u}$, gdzie $t = 1, 2, \ldots n$, $u = 1, 2, \ldots q$ bądź w postaci $c = a^{p-u} b^t$, gdzie $u = 1, 2, \ldots, p$, $t = 1, 2, \ldots, m$. Zatem rząd grupy jest teraz $nq = mp$.

Z powyższych rozważań można otrzymać następujące wnioski:

1° Rząd grupy G wynosi nm, jeśli jest spełniony przynajmniej jeden z następujących warunków:

a) $(n, m) = 1$ (z zależności $nq = mp$),
b) $(n, r\text{-}1) = 1$ (z zależności $n | p(r\text{-}1)$),
c) m jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $n | r^m - 1$,
d) $(m, r - 1) = 1$.

2° Grupa dwuścianu $a^n = b^2 = 1$, $ba = a^{n-1} b$ jest rzędu $2n$.

3° Grupa abelowa $a^n = b^m = 1$, $ba = ab$, gdy $(n, m) = d$ jest rzędu $\frac{nm}{d}$.

Istotnie, mamy tutaj $p = \frac{n}{d}$, $q = \frac{m}{d}$. W szczególności grupa abelowa $a^8 = b^4 = 1$ jest grupą cykliczną rzędu 8.

Dla danego n i m grupa może nie być rzędu nm dla żadnego dopuszczalnego r. Dla danych n, r istnieje zawsze m, że grupa jest rzędu nm.

3. Dowód twierdzenia 3

Z (2) wynika, że $(n, r) = 1$. Jeżeli i przebiega zupełny układ reszt mod n, to wobec $(n, r) = 1$, ir^j także przebiega zupełny układ reszt mod n. Stąd i z (4) wynika teza twierdzenia.

4. Dowód twierdzenia 4

Do centrum należą elementy a^z spełniające warunek $a^z b^j = b^j a^z$ przy $j = 1, 2, \ldots, m$.

Lecz $b^j a^z = a^{zr^j} b^j$ więc mamy $a^z = a^{zr^j}$ czyli $n | z(r^j - 1)$ przy $j = 1, 2, \ldots, m$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n | z(r - 1)$.

Podobnie, b^z należy do centrum, jeśli $b^z a^i = a^i b^z$ przy $i = 1, 2, \ldots, n$. Lecz $b^z a^i = a^{ir^z} b^z$ zatem szukany warunek $a^{ir^z} = a^i$, co jest równoważne warunkowi $n | r^z - 1$.

Jeśli $a^k b^l$ jest elementem centralnym, to zachodzi zarówno $a^k b^l \cdot b^j = b^j a^k b^l$, jak i $a^k b^l \cdot a^i = a^k a^i \cdot b^l$, co oznacza, że a^k, b^l są elementami centrum. Twierdzenie zostało zatem udowodnione.

PRACA CYTOWANA

[1] M. Hall: The Theory of Groups, New York, 1959.

ON SOME PROPERTIES OF A FINITE GROUP WITH THE DEFINING RELATIONS $a^n = b^m = 1$, $ba = a^r b$

By E. KOWALSKI

SUMMARY

This article discuss the kinds of groups representable as α join of two finite cyclic groups $\{a\} \cup \{b\}$, with $ba = a^r b$.

Oddano do Redakcji 16. VI. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

EWA LIPCZYŃSKA

O ZWIĄZKACH OKREŚLAJĄCYCH GRUPĘ SYMETRYCZNĄ S_4

Znane są pewne określenia grupy S_4 jako złącza dwóch grup cyklicznych (vide [1]). Celem niniejszego artykułu jest nowe tego rodzaju określenie.

Wykażę mianowicie, że następujące związki

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & a^4 = b^4 = 1 \\ \mathrm{II} & aba = bab \\ \mathrm{III} & a^2b = b^3a^2 \end{array}$$

określają grupę $G = \{a\} \cup \{b\}$ izomorficzną z grupą S_4.

Udowodnię, że grupa ta zawiera tylko następujące różne elementy: e, a, a^2, a^3, b, b^2, b^3, ab, ba, ab^2, b^2a, ab^3, b^3a, a^2b, ba^2, a^2b^2, a^3b, ba^3, a^3b^3, b^3a^3, a^3ba, aba^3, aba, a^3ba^3. W tym celu stwierdzimy najpierw, że działanie z warunkami I, II, III jest wewnętrzne w zbiorze G tych elementów.

Weźmy pod uwagę elementy postaci a^ib^j oraz a^jb^i przy i, $j = 1, 2, 3$. W zbiorze G nie występują b^2a^2, a^2b^3, b^3a^2, a^3b^2, b^2a^3.

Z I mamy $a^2 = a^{-2}$, $a^{-1} = a^3$, $b^2 = b^{-2}$, $b^{-1} = b^3$, zatem z III

$$b^3 = a^2ba^2 \tag{1}$$

Związek II pociąga symetrię związków ze względu na a, b tzn. obok związku postaci $f_1(a, b) = f_2(a, b)$ występuje związek $f_1(b, a) = f_2(b, a)$. Istotnie, z (1) mamy $a^2b^3 = ba^2$, więc $ba^2b = a^2$ i $aba^2b = a^3$. Lecz $aba^2b = aba \cdot ab = bab \cdot ab = b \cdot aba \cdot b = b \cdot bab \cdot b = b^2ab^2$. Zatem

$$a^3 = b^2ab^2 \text{ lub } b^2a = a^3b^2, \tag{2}$$

co odpowiada permutacji elementów a, b w związku III.

Z I, II oraz (1), (2) łatwo wynikają równości:

$$b^2a^2 = a^2b^2,\ a^2b^3 = ba^2,\ b^3a^2 = a^2b,\ a^3b^2 = b^2a,\ b^2a^3 = ab^2 \tag{3}$$

Zatem elementy postaci (3) określają reguły przestawiania czynników a^2, b^2 z czynnikami a^j, b^j przy $j = 1, 2, 3$.

Należy dalej zbadać przynależność do zbioru G iloczynów postaci $a^i b^j a^k$, $b^i a^j b^k$ gdy $i, j, k = 1,3$.

Z (1) mamy $ab^3a = a^3ba^3$, co przez permutację a, b daje $ba^3b = b^3ab^3$, zaś ze związku III $a^2b = b^3a^2$ mnożąc lewostronnie przez ba, mamy $ba^3b = bab^3a^2 = aba\,b^2a^2$ i podstawiając $ab^2 = b^2a^3$ otrzymujemy $ba^3b = ab^3a$.

Ostatecznie mamy równości:

$$a^3ba^3 = ba^3b = ab^3a = b^3ab^3 \tag{4}$$

Z (2) mamy $b^3ab = ba^3b^3$. Lecz $b^3ab = b^2aba = baba^2 = aba^3$, zaś z (4) $a^3b^3a = aba^3$, zatem

$$b^3ab = ba^3b^3 = a^3b^3a = aba^3 \tag{5}$$

Z (5) wynika natychmiast równość „dwoista"

$$a^3ba = ab^3a^3 = b^3a^3b = bab^3 \tag{6}$$

Z (1), (2) mamy $a = b^2a^3b^2$, $b = a^2b^3a^2$ więc

$$aba = a^3b^3a^3 = bab = b^3a^3b^3 \tag{7}$$

Z równości (4), (5), (6), (7) wynika, że wszystkie elementy postaci $a^ib^ja^k$, $b^ia^jb^k$ przy $i, j, k = 1,3$ do zbioru G należą. Równocześnie stwierdzamy, że iloczyny postaci $b^ia^kb^j$ dają się zastąpić przez iloczyny postaci $a^lb^sa^r$. Stąd wynika, że iloczyny postaci $a^ib^ja^kb^s$, $b^ia^jb^ka^s$, $b^ia^jb^ka^sb^t$ i większej liczby potęg a i b są równe pewnym elementom postaci $a^ib^ja^k$, a więc do zbioru G należą.

Zbiór G z warunkami I, II, III jest zatem grupą.

Izomorfizm grup G i S_4 stwierdzamy ustalając następujące przyporządkowanie zachowujące wyniki działań

$$e = (1)\,(2)\,(3)\,(4), \quad a = (1234), \quad b = (1243)$$

Stąd inne elementy rzędu czwartego:

$$a^3 = (1432), \quad b^3 = (1342), \quad aba^3 = (1324), \quad a^3ba = (1423)$$

Elementy rzędu trzeciego:

$$\begin{array}{lll} ab^3 = (1)\,(243) & b^3a^3 = (3)\,(124) & a^3b^3 = (4)\,(123) \\ ba^3 = (1)\,(234) & b^3a = (2)\,(143) & ba = (4)\,(132) \\ a^3b = (2)\,(134) & ab = (3)\,(142) & \end{array}$$

i przyporządkowanie między elementami rzędu 2-go:

$$\begin{array}{lll} aba = (1)\,(2)\,(34) & a^2b = (1)\,(4)\,(23) & a^2 = (13)\,(24) \\ b^2a = (1)\,(3)\,(24) & ab^2 = (2)\,(4)\,(13) & b^2 = (14)\,(23) \\ ba^2 = (2)\,(3)\,(14) & a^3ba^3 = (3)\,(4)\,(12) & a^2b^2 = (12)\,(34) \end{array}$$

PRACE CYTOWANE

[1] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser: Generators and Relations for Discrete Groups, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957.

ON THE DEFINING RELATIONS OF THE GROUP S_4

By Ewa GAWROŃSKA LIPCZYŃSKA

SUMMARY

The author gives new defining relations of the symmetric group S_4 with use of two generators. Two other sets of defining relations of that group are given in Coxeter and Moser's book [1].

Oddano do Redakcji 20. VII. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

ALEKSANDER GRYTCZUK

O PEWNYCH RÓWNANIACH DIOFANTYCZNYCH

1.

W. Sierpiński w pracy [1] dowodzi między innymi twierdzenia, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ równanie

$$\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Podamy tutaj efektywny sposób wyznaczania nieskończenie wielu rozwiązań równania $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{y^2}$ w liczbach naturalnych z, x, v, y.

Jak wiadomo ([2] str. 85) wszystkie rozwiązania równania

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \tag{1}$$

w liczbach naturalnych x, y, z zawarte są we wzorach

$$\begin{aligned} x &= ml\,(m+n) \\ y &= nl\,(m+n) \\ z &= mnl \end{aligned} \tag{2}$$

Podnosząc obydwie strony (1) do kwadratu otrzymujemy

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{2}{xy} = \frac{1}{v^2} \tag{3}$$

Jeśli (3) posiada rozwiązania w liczbach naturalnych x, y, v, to jedna z liczb x lub y musi być parzystą i wobec tego mamy równanie $\frac{x}{2} \cdot y = v^2$, którego wszystkimi rozwiązaniami ([3] str. 43) są

$$x = 2\,a^2c, \quad y = b^2c, \quad v = abc \tag{4}$$

Ze wzorów (2) i (4) wynika, że muszą być spełnione następujące warunki:

$$m = 2\,a^2, \quad n = b^2, \quad l\,(m + n) = c = l\,(2\,a^2 + b^2) \tag{5}$$

Po uwzględnieniu (5) wzory (2) i (4) przyjmują postać

$$\begin{aligned} x &= 2a^2l\,(2a^2 + b^2) \\ y &= b^2l\,(2a^2 + b^2) \\ v &= abl\,(2a^2 + b^2) \\ z &= 2a^2b^2l \end{aligned} \tag{6}$$

W szczególności kładąc w (6) $b = l = 1$ otrzymujemy rozkłady liczb wymiernych postaci $\frac{1}{(2a^2)^2}$ na sumę odwrotności trzech kwadratów.

Mamy więc tożsamość:

$$\frac{1}{(2a^2)^2} = \frac{1}{(2a^2+1)^2} + \frac{1}{[a\,(2a^2+1)]^2} + \frac{1}{[2a^2\,(2a^2+1)]^2}$$

z której dla $a = 1, 2, 3$ wynikają rozkłady: $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2}$

$$\frac{1}{8^2} = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{72^2}$$

$$\frac{1}{18^2} = \frac{1}{19^2} + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{342^2}$$

2.

Równanie $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = s^2 + 1$.

W pracy K. Szymiczka ([4], str. 21, tw. 4) podano dowód, że wszystkie rozwiązania naturalne równania $u^2 + v^2 = w^2 + 1$ zawarte są we wzorach:

$$\begin{aligned} u &= P_k\,(Q_{k-1} + Q_k \cdot t) + Q_k\,(P_{k-1} + P_k \cdot t) \\ v &= P_k\,(P_{k-1} + P_k \cdot t) - Q_k\,(Q_{k-1} + Q_k \cdot t) \\ w &= P_k\,(P_{k-1} + P_k \cdot t) + Q_k\,(Q_{k-1} + Q_k \cdot t) \end{aligned}$$

gdzie $P_k/Q_k = (q_o;\ q_1, q_2, \ldots, q_k)$

$q_o \geqslant O$, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ są liczbami naturalnymi, t — dowolna liczba całkowita i $k = 0, 1, 2, \ldots$

Udowodnimy, że każde rozwiązanie równania $u^2 + v^2 = w^2 + 1$ implikuje rozwiązanie równania postaci

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + 1 \tag{7}$$

Mnożymy obydwie strony równania $u^2 + v^2 = w^2 + 1$ przez u^2, a następnie dodajemy do obu stron $u^2 + 1$, doprowadzając je w ten sposób do postaci:

$$(u^2 - 1)^2 + (vu)^2 + u^2 = (wu)^2 + 1$$

Kładąc $a = u^2 - 1$, $b = vu$, $c = u$, $d = wu$ otrzymujemy (7). Łatwą indukcją względem liczby niewiadomych można dowieść, że każde rozwiązanie równania $u^2 + v^2 = w^2 + 1$ implikuje rozwiązanie równania

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = s^2 + 1. \tag{8}$$

Istotnie, od równania (8) do równania

$$b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{n+1}^2 = r^2 + 1$$

można przejść mnożąc (8) przez a_1^2, dodając do obu stron $a_1^2 + 1$ oraz podstawiając

$$b_1 = a_1^2 - 1, \quad b_i = a_1 a_i, \ (i = 2, \ldots, n), \quad b_{n+1} = a_1, \quad r = sa_1.$$

PRACE CYTOWANE

[1] W. Sierpiński: *Uwagi do pewnego zagadnienia P. Erdösa,* Roczniki PTM, Seria II: Wiadomości matematyczne VII. 2 (1964), ss. 221—228.

[2] W. Sierpiński: *Teoria liczb,* cz. II, PWN, Warszawa, 1959.

[3] W. Sierpiński: *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych,* PWN, Warszawa 1956.

[4] K. Szymiczek, *O pewnych równaniach diofantycznych związanych z liczbami trójkątnymi,* Zeszyty Naukowe WSP w Katowicach 4 (1964), ss. 17—22.

ON SOME DIOPHANTINE EQUATIONS

By A. GRYTCZUK

SUMMARY

In the first section the author gives infinitely many solutions of the equation

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{y^2}$$

by the formulae: $z = 2a^2b^2l$, $x = 2a^2(2a^2 + b^2)l$, $v = ab(2a^2 + b^2)l$, $y = b^2(2a^2 + b^2)l$.

In the second section author remarks that every solution of the equation $u^2 + v^2 = w^2 + 1$ (which was solved in [4]) implies a solution of

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = s^2 + 1.$$

Oddano do Redakcji 16. VI. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

ANTONI WAKULICZ

O CIĄGU RESZT na (mod b) PRZY $(a, b) = 1$

Artykuł jest kontynuacją rozważań w [1] związanych z dowodem efektywnym tw. Thue'go o kongruencji $ax \equiv y \pmod m$ i ma na celu scharakteryzowanie ciągu reszt na (mod b) przy $(a, b) = 1$ przez podanie warunków, które określają wielkość reszty $\varrho_n \equiv$ na (mod b) w zależności od pewnych cech arytmetycznych liczby n.

Udowodnimy mianowicie twierdzenie:

Jeśli

1° algorytm Euklidesa dla pary (a, b) daje
$a = bq_o + r_o$, $b = r_o q_1 + r_1$, $r_o = r_1 q_2 + r_2, \ldots, r_{s-2} = r_{s-1} q_s + 1$
tzn. $r_s = 1$, $r_{s-1} = q_{s+1}$, oraz mianowniki kolejnych reduktów rozwinięcia łańcuchowego ułamka $\frac{a}{b}$ są
$1 = Q_o < Q_1 < \ldots < Q_s < Q_{s+1} = b$,

2° $n = c_s Q_s + c_{s-1} Q_{s-1} + \ldots + c_1 Q_1 + c_o Q_o$, gdzie $0 \leqslant c_i \leqslant q_{i+1}$ przy $i = 0,1, \ldots, s$ oraz $\sum_{i=0}^{l} c_i Q_i < Q_{l+1}$ przy $l = 0,1, \ldots, s$,

to $na \equiv \varrho_n = c_o r_o - c_1 r_1 + \ldots + (-1)^s c_s r_s$, $|\varrho_n| \leqslant b - 1$.

Ze względu na powiązanie dowodu twierdzenia z rozumowaniem indukcyjnym rozpatrzymy najpierw przypadki $s = 0$, $s = 1$. Przy $s = 0$ mamy $a = b q_o + 1$, $na \equiv n \pmod b$, $n = c_o Q_o = c_o r_o = c_o$ więc $\varrho_n = c_o r_o$ zgodnie z tezą twierdzenia. Przy $s = 1$ algorytm Euklidesa sprowadza się do trzech dzieleń kolejnych $a = b q_o + r_o$, $b = r_o q_1 + 1$, $r_o = q_2 \cdot 1$. Więc

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}, \quad \frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0 q_2 + 1}{q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{a}{b} = \frac{P_1 q_2 + P_0}{Q_1 q_2 + Q_0}$$

czyli $Q_o = 1$, $Q_1 = q_1$, $Q_2 = q_1 q_2 + 1 = b$.

Zakładając $n < Q_2 = b$ stwierdzamy istnienie jednoznacznie wyznaczonej pary liczb c_1, c_o takich, że $n = c_1 Q_1 + c_o$ przy czym $o \leqslant c_o < Q_1 = q_1$ oraz $o \leqslant c_1 \leqslant q_2$ i jeśli $c_1 = q_2$ to $c_o = 0$, co pokrywa się z założeniami twierdzenia. Obliczamy $na = c_1q_1a + c_oa = c_1q_1bq_o + c_1q_1r_o + c_obq_o + c_or_o \equiv c_or_o + c_1q_1r_o \equiv c_or_o - c_1 \pmod b$, gdyż $q_1r_o = b - 1$. Otrzymujemy wzór

$$\varrho_n = c_or_o - c_1$$

Istotnie, mamy $-c_o \leqslant c_or_1 - c_1 \leqslant c_or_o$, lecz $c_or_o < q_1r_o \leqslant b - 1$, zaś $c_1 \leqslant r_o < b$ więc $|\varrho_n| < b$ *c. b. d. o.*

Dla dowodu twierdzenia udowodnimy jeszcze lemat:

Jeśli mamy ciąg liczb naturalnych $1 = Q_o < Q_1 < \ldots < Q_{l+1}$ takich, że $Q_{i+1} = Q_i\, q_{i+1} + Q_{i-1}$ dla $1 \leqslant i \leqslant l$ przy danym ciągu liczb naturalnych $q_2, q_3, \ldots, q_{l+1}$, to każda liczba naturalna $n < Q_{l+1}$ daje się przedstawić jednoznacznie w postaci:

(1) $$n = c_lQ_l + c_{l-1}\,Q_{l-1} + \ldots + c_1Q_1 + c_o,$$

gdzie $0 \leqq c_i \leqq q_{i+1}$ oraz $\sum\limits_{i=0}^{n} c_iQ_i < Q_{m+1}$ dla $m = 0, 1, 2, \ldots, l$.

Dowód lematu. Dla $l = 1$ dowód już został przeprowadzony.

Jeśli rozwinięcie (1) zachodzi jednoznacznie dla $m = l - 1$ tzn. dla $n_1 < Q_l$ mamy jednoznacznie $n_1 = c_{l-1}\,Q_{l-1} + \ldots + c_1Q_1 + c_o$, to dla $n < Q_{l+1}$ mamy jednoznacznie $n = c_lQ_l + n_1$ przy czym $c_l \leqq q_{l+1}$, co daje jednoznaczne rozwinięcie dla n postaci (1).

Dowód twierdzenia. Wg [1] str. 14 mamy $r_{2k} = a\,Q_{2k} - b\,P_{2k}$, $r_{2k+1} = b\,P_{2k+1} - a\,Q_{2k+1}$.
Stąd $Q_{2k}a \equiv r_{2k}$, $Q_{2k+1} \equiv -r_{2k+1} \pmod b$.
Zatem

(2) $$na \equiv c_or_o - c_1r_1 + c_2r_2 - \ldots + (-1)^s c_sr_s = \varrho_n$$

Należy wykazać, że $|\varrho_n| < b$.
Z uwagi na to, że $c_i \geqslant 0$, $r_i \geqslant 0$ mamy nierówność

$$-c_1r_1 - c_3r_3 - c_5r_5 - \ldots \leqslant \varrho_n \leqslant c_or_o + c_2r_2 + c_4r_4 + \ldots$$

Lecz

$$c_or_o + c_2r_2 + \ldots < q_1r_o + q_3r_2 + \ldots = b - r_1 + r_1 - r_3 + \ldots \leqslant b - 1$$

zaś $c_1r_1 + c_3r_3 + \ldots < q_2r_1 + q_4r_3 + \ldots = r_o - r_2 + r_2 - r_4 + \ldots < b$, zatem $-b < \varrho_n < b$ i twierdzenie zostało udowodnione.

Z uwagi na to, że reszty na (mod b) są nieprzystające mod b, gdy $1 \leqq n \leqq b - 1$, wzór (2) określa ciąg reszt $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{b-1}$ dodatnich lub ujemnych nieprzystających mod b.

PRACA CYTOWANA

[1] A. Wakulicz: *O pewnych związkach w elementarnej teorii liczb*, Zeszyty Naukowe WSP w Katowicach, Sekcja Matematyki, 4, 1964, ss. 11—15.

ON THE SEQUENCE OF RESIDUES OF na (mod b), WITH $(a, b) = 1$

By A. WAKULICZ

SUMMARY

This article is a continuation of methods used in [1]to prove Thue's theorem on the congruence $ax \equiv y \pmod{m}$. The main result is the following.

Theorem. Let $a = bq_o + r_o$, $b = r_o q_1 + r_1, \ldots, r_{s-2} = r_{s-1} q_s + 1$ be the Euclid's algorithm and let $Q_o = 1$, $Q_1, \ldots, Q_{s+1} = b$ denote denominators of the convergents of simple continued fraction $\frac{a}{b} = [q_o; q_1, \ldots, q_{s+1}]$. Further, let $n = c_s Q_s + c_{s-1} Q_{s-1} + \ldots + c_o Q_o$, where $0 \leqslant c_i \leqslant q_{i+1}$, $(i = 0,1, \ldots, s)$ and $\sum_{i=0}^{l} c_i Q_i < Q_{l+1}$ for every $l = 0,1, \ldots, s$. Then $na \equiv \varrho_n \pmod{b}$, where $\varrho_n = c_o r_o - c_1 r_1 + \ldots + (-1)^s c_s r_s$ and $|\varrho_n| < b$.

Oddano do Redakcji 15. VII. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

K. SZYMICZEK

KILKA TWIERDZEŃ O LICZBACH PSEUDOPIERWSZYCH

1.

Z małego twierdzenia Fermata wynika, że jeśli a, b są liczbami całkowitymi, p jest liczbą pierwszą i $p \nmid ab$, to

$$p \mid (a^{p-1} - 1) - (b^{p-1} - 1) = a^{p-1} - b^{p-1}.$$

Nasuwa się tutaj pytanie, czy istnieją liczby złożone P takie, że przy pewnych całkowitych a i b

$$P \mid a^{P-1} - b^{P-1}. \tag{1}$$

Liczbę złożoną P spełniającą (1) nazywać będziemy liczbą pseudopierwszą ze względu na a i b. Liczbę pseudopierwszą ze względu na $a = 2$ i $b = 1$ nazywać będziemy po prostu liczbą pseudopierwszą.

Istnienie liczb pseudopierwszych zauważył po raz pierwszy F. Sarrus w 1819 roku, który stwierdził, że (1) zachodzi dla $P = 341 = 11 \cdot 31$ oraz $a = 2$ i $b = 1$ (por. [2], [5]). Natomiast fakt istnienia nieskończenie wielu liczb pseudopierwszych ze względu na dowolne a i $b = 1$, udowodnił w 1904 roku M. Cipolla [1]. Różne inne dowody istnienia nieskończenie wielu liczb pseudopierwszych zawarte są także w pracach [3], [4], [6], [7], [8], [12], [13].

W tej pracy wskażę ogólniejsze twierdzenia o liczbach pseudopierwszych ze względu na a i b, z których wynikają pewne rezultaty prac [1], [3], [4], [6].

Wszystkie litery oznaczają liczby naturalne. Jeśli p jest liczbą pierwszą i $p^\lambda \mid m$, $p^{\lambda+1} \nmid m$, piszę $p^\lambda \| m$, $[t_1, \ldots, t_k]$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność liczb $t_1, \ldots, t_k$.

$\Delta_{a,b}(m)$ oznacza najmniejszą liczbę naturalną Δ taką, że $a^\Delta \equiv b^\Delta \pmod{m}$, przy czym zamiast $\Delta_{a,1}(m)$ piszę $\Delta_a(m)$. Jak wiadomo, jeśli $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ to $\Delta_{a,b}(m) \mid n$. Przyjmujemy także oznaczenia:

$$A_n = a^{2^n}, \; B_n = b^{2^n}.$$

W dalszym ciągu opierać się będziemy na następujących lematach:

Lemat 1. Jeśli $2^{\lambda+1} \| b^2 - 1$ to $2^{\lambda+n} \| b^{2^n} - 1$.

Lemat 2. Jeśli $(a, b) = 1$ to $\Delta_{a,b}(A_n + B_n) = 2^{n+1}$.

Lemat 3. Jeśli $(a, b) = 1$, p jest liczbą pierwszą nieparzystą $p \nmid A_n + B_n$, $n \geqslant 0$,

$$m = \frac{A_n^p + B_n^p}{A_n + B_n}, \tag{2}$$

oraz liczba pierwsza q dzieli m, to $\Delta_{a,b}(q) = 2^{n+1}p$.

Lemat 4. Niech $m = m_1 \ldots m_s$, gdzie $(m_i, m_j) = 1$ dla $i \neq j$. Wtedy

$$\Delta_{a,b}(m) = [\Delta_{a,b}(m_1), \ldots, \Delta_{a,b}(m_s)].$$

Lemat 1 łatwo udowodnić przez indukcję.

Lemat 2 wynika stąd, że $A_n + B_n | A_{n+1} - B_{n+1}$, skąd $\Delta = \Delta_{a,b}(A_n + B_n) | 2^{n+1}$, zatem $\Delta = 2^k$, $k \leqslant n + 1$. Ponieważ dla $k < n + 1$ jest $A_n + B_n > |A_k - B_k|$ więc $\Delta = 2^{n+1}$.

Dowód lematu 3. Ponieważ $q | m | A_n^p + B_n^p | A_{n+1}^p - B_{n+1}^p$, więc $\Delta = \Delta_{a,b}(q) | 2^{n+1}p$. Gdyby $\Delta < 2^{n+1}p$ to albo $2^{n+1} | \Delta$ i wtedy $\Delta = 2^{n+1}$, albo $2^{n+1} \nmid \Delta$ i wtedy $\Delta | 2^n p$.

W pierwszym przypadku $q | A_{n+1} - B_{n+1} = (A_n - B_n)(A_n + B_n)$, skąd $q | A_n + B_n$. Mamy więc $A_n \equiv -B_n \pmod q$ i wobec (2) $m = A_n^{p-1} - A_n^{p-2}B_n + \ldots + B_n^{p-1} \equiv 0 \pmod q$, skąd $pA_n^{p-1} \equiv o \pmod q$. Nie może być $q | A_n$, gdyż wtedy także $q | B_n$, wbrew założeniu, że $(a, b) = 1$, zatem $q | p$, skąd $q = p$. Stąd jednak wynika, że $p | A_n + B_n$, wbrew założeniu.

W drugim przypadku $q | a^\Delta - b^\Delta | A_n^p - B_n^p$, co wobec $q | A_n^p + B_n^p$ jest niemożliwe. Zatem $\Delta = 2^{n+1}p$ i lemat jest udowodniony.

Dowód lematu 4. Oznaczmy $[\Delta_{a,b}(m_1), \ldots, \Delta_{a,b}(m_s)] = \Delta$. Mamy oczywiście $a^\Delta \equiv b^\Delta \pmod{m_i}$, $i = 1, \ldots, s$, skąd wobec $(m_i, m_j) = 1$ dla $i \neq j$, mamy także $a^\Delta \equiv b^\Delta \pmod m$. Tak więc $\Delta_{a,b}(m) | \Delta$. Z drugiej strony oczywiście $\Delta_{a,b}(m_i) | \Delta_{a,b}(m)$, skąd także $\Delta | \Delta_{a,b}(m)$. Zatem $\Delta = \Delta_{a,b}(m)$ i lemat został udowodniony.

2.

Niedawno A. Rotkiewicz [7] udowodnił następujące twierdzenie, które daje wyraźny wzór na liczbę pseudopierwszą ze względu na a, b:

Jeśli $a > b$, $(a, b) = 1$, $\bar{a}\bar{b}$ oznacza jądro bezkwadratowe liczby ab oraz

$$\text{jeśli } \eta = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \bar{a}\bar{b} \equiv 1 \pmod 4, \\ 2 & \text{gdy } \bar{a}\bar{b} \equiv 2, 3 \pmod 4, \end{cases}$$

to dla $n = \eta\, \bar{a} b\, 15^k$, $k = 1, 2, \ldots$, liczba

$$m = \prod_{i|n} \left(a^i - b^i\right)^{\mu\left(\frac{n}{i}\right)}$$

jest pseudopierwsza ze względu na a, b.

Udowodnione niżej twierdzenia 2, 3 i 4 dają znacznie prostszą konstrukcję takich liczb m. Udowodnimy nawet, że istnieje nieskończenie wiele liczb m pseudopierwszych ze względu na a, b i takich, że każdy dzielnik d liczby m spełnia warunek:

$$d \mid a^{d-1} - b^{d-1}. \tag{3}$$

Liczby m o tej własności nazywać będziemy liczbami super-Poulet ze względu na a, b, przy czym w przypadku $a = 2$, $b = 1$ przyjęto nazywać je po prostu liczbami super-Poulet.

Wiadomo, że istnieje nieskończenie wiele liczb super-Poulet, gdyż istnieje nieskończenie wiele liczb pseudopierwszych postaci pq, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi (zob. [11], s. 182). W pracy [12] udowodniłem, że istnieje nieskończenie wiele liczb super-Poulet postaci pqr, gdzie p, q, r są różnymi liczbami pierwszymi. W. Sierpiński ([11], s. 185) zapytuje, czy istnieje nieskończenie wiele liczb Mersenne'a $M_n = 2^n - 1$, będących liczbami super-Poulet.

Niżej udowodnię, że istnieje nieskończenie wiele liczb super-Poulet ze względu na a, b; w szczególności wszystkie liczby $\frac{1}{3} M_{2p}$ są super-Poulet jeśli tylko p jest liczbą pierwszą > 3.

Twierdzenie 1. Jeśli $(a, b) = 1$, p jest liczbą pierwszą nieparzystą, $p \nmid A_n + B_n$, $n \geqslant 0$, to m określone przez (2), jeśli jest liczbą złożoną — jest liczbą super-Poulet ze względu na a, b.

Dowód. Niech d będzie dowolnym dzielnikiem liczby m oraz niech q będzie dzielnikiem pierwszym liczby d.

Z lematu 3, wobec $q \mid a^{q-1} - b^{q-1}$ mamy $\Delta_{a,b}(q) = 2^{n+1} p \mid q - 1$. Stąd otrzymujemy, że $2^{n+1} p \mid d - 1$. Zatem

$$d \mid m \mid A_n^p + B_n^p \mid A_{n+1}^p - B_{n+1}^p \mid a^{d-1} - b^{d-1}$$

i twierdzenie zostało udowodnione.

Twierdzenie 2. Niech $(a, b) = 1$, p niech będzie liczbą pierwszą nieparzystą.

(2.1) Jeśli $p \nmid a - b$ i liczba $m_1 = \dfrac{a^p - b^p}{a - b}$ jest złożona to m_1 jest liczbą super-Poulet ze względu na a, b.

(2.2) Jeśli $p \nmid a \pm b$ to liczba $m_2 = \dfrac{a^{2p} - b^{2p}}{a^2 - b^2}$ jest liczbą super-Poulet ze względu na a, b.

Dowód. Udowodnimy najpierw (2.1). Niech d będzie dowolnym dzielnikiem liczby m_1, wtedy wobec $d | a^p - b^p$ mamy $\Delta_{a,b}(d) | p$, skąd $\Delta_{a,b}(d) = 1$ albo p.

Gdyby $\Delta_{a,b}(d) = 1$ to $a \equiv b \pmod{d}$ i $m_1 = a^{p-1} + a^{p-2} b + \ldots + b^{p-1} \equiv 0 \pmod{d}$, skąd $pa^{p-1} \equiv 0 \pmod{d}$ i wobec $(a, d) = 1$ mamy $d | p$, stąd $p = d$ i $p | a - b$ wbrew założeniu.

Zatem $\Delta_{a,b}(d) = p$. Ponieważ także dla każdego dzielnika pierwszego q liczby d jest $\Delta_{a,b}(q) = p$ i $p | q - 1$ więc $p | d - 1$. Stąd

$$d | a^p - b^p | a^{d-1} - b^{d-1}$$

i (2.1) zostało udowodnione.

Dla dowodu (2.2) zauważmy najpierw, że liczba m_2 jest złożona. Mamy bowiem

$$m_2 = \frac{a^p + b^p}{a - b} \cdot \frac{a^p - b^p}{a + b}$$

i wobec założenia o liczbie p, obydwa czynniki są liczbami naturalnymi, większymi od 1. Niech teraz d będzie dzielnikiem liczby m_2, wtedy $d = d_1 d_2$, gdzie $d_1 \left| \dfrac{a^p - b^p}{a - b} \right.$ i $d_2 \left| \dfrac{a^p + b^p}{a + b} \right.$.

Z dowodu poprzedniej części twierdzenia wiemy, że $p | d_1 - 1$, a ponieważ d_1 jako dzielnik liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą, więc także $2p | d_1 - 1$. Z lematu 3 (dla $n = 0$) wynika, że dla każdego dzielnika pierwszego q liczby d_2 mamy $\Delta_{a,b}(q) = 2p | q - 1$, skąd także $2p | d_2 - 1$. Mamy więc $2p | d_1 - 1$ i $2p | d_2 - 1$, skąd także $2p | d_1 d_2 - 1 = d - 1$. Zatem

$$d | m_2 | a^{2p} - b^{2p} | a^{d-1} - b^{d-1},$$

co kończy dowód twierdzenia 2.

W związku z liczbami m_1 i m_2 rozpatrywanymi w twierdzeniu 2 udowodnimy także

Twierdzenie 3. Jeśli $(a, b) = 1$, $2 | ab$, p jest liczbą pierwszą nieparzystą i $p \nmid A_n - B_n$, gdzie $n \geqslant 0$, to liczba

$$m = \frac{A_n^p - B_n^p}{A_n - B_n}$$

jest pseudopierwsza ze względu na a, b.

Uwaga. Zgodnie z twierdzeniem 2, dla $n = 0,1$ liczba m jest także super-Poulet ze względu na a, b.

Dowód. Przede wszystkim zauważamy, że m jest liczbą złożoną:

$$m = \frac{A_{n-1}^p - B_{n-1}^p}{A_{n-1} - B_{n-1}} \cdot \frac{A_{n-1}^p + B_{n-1}^p}{A_{n-1} + B_{n-1}}$$

przy czym wobec założenia o liczbie p, obydwa czynniki są liczbami naturalnymi, większymi od 1. Mamy dalej.

$$m - 1 = \frac{A_n^p - A_n - (B_n^p - B_n)}{A_n - B_n} \tag{4}$$

Ponieważ p nie dzieli mianownika, więc z małego twierdzenia Fermata wynika, że $p | m - 1$. Mianownik ułamka (4) jest liczbą nieparzystą, gdyż $2 | ab$ i $(a, b) = 1$. Udowodnimy, że licznik tego ułamka dzieli się przez 2^n. Jeśli a jest parzyste, to $2^n | A_n^p - A_n$ i b jest nieparzyste. Mamy więc $B_n^p - B_n = B_n (B_n^{p-1} - 1)$ i na podstawie lematu 1 $2^n | B_n^{p-1} - 1$. Tak więc $2^n p | m - 1$, skąd

$$m | A_n^p - B_n^p | a^{m-1} - b^{m-1},$$

i twierdzenie 3 jest udowodnione.

Z twierdzeń 1—3 wynikają następujące wnioski.

Wniosek 1. Jeśli p jest liczbą pierwszą nieparzystą i liczba $N_p = (2^p + 1)/3$ jest złożona, to N_p jest liczbą super-Poulet.

Rezultat ten wynika z twierdzenia 1 dla $a = 2$, $b = 1$, $n = 0$. Jednakże nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych N_p. W. Sierpiński wykazał w pracy [10], że istnienie nieskończenie wielu liczb złożonych N_p wynika z hipotezy A. Schinzla (zob. [9]).

Wniosek 2. Jeśli p jest liczbą pierwszą $\geqslant 5$ to liczba $(2^{2p} + 1)/5$ jest super-Poulet.

Dla dowodu wystarczy w twierdzeniu 1 przyjąć $a = 2$, $b = 1$, $n = 1$ oraz zauważyć, że liczba $(2^{2p} + 1)/5$ jest złożona, co natychmiast wynika z tożsamości

$$2^{2p} + 1 = (2^p - 2^{(p+1)/2} + 1)(2^p + 2^{(p+1)/2} + 1).$$

Zauważmy, że A. Rotkiewicz [6] udowodnił, iż $(2^{2p} + 1)/5$ jest liczbą pseudopierwszą.

Przyjmując w twierdzeniu (2. 1) $a = 2$, $b = 1$, otrzymujemy

Wniosek 3. Jeśli p jest liczbą pierwszą i liczba $M_p = 2^p - 1$ jest złożona, to jest ona liczbą super-Poulet (por. [11], s. 181).

Z twierdzenia (2. 2) dla $b = 1$ otrzymujemy następujące twierdzenie M. Cipolli [1]:

Wniosek 4. Jeśli p jest liczbą pierwszą nieparzystą i $p \nmid a \pm 1$, to $(a^{2p} - 1)/(a^2 - 1)$ jest liczbą super-Poulet ze względu na a i $b = 1$.

Stąd, dla $a = 2$, wynika natychmiast

Wniosek 5. Jeśli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to $(2^{2p} - 1)/3$ jest liczbą super-Poulet.

Fakt, że liczba $(2^{2p} - 1)/3$ jest pseudopierwsza, podał w formie problemu do udowodnienia P. Erdös [4] w 1950 roku.

Innym wnioskiem z twierdzenia M. Cipolli jest rezultat H. J. A. Duparca [3], który udowodnił, że jeśli a jest liczbą pierwszą to $(a^{2a} - 1)/(a^2 - 1)$ jest liczbą pseudopierwszą ze wgzlędu na a i $b = 1$. Z wniosku 4 wynika nawet, że liczba ta jest super-Poulet ze względu na a i $b = 1$.

Wniosek 6. Jeśli p jest liczbą pierwszą i $p \nmid 2^{2^n} - 1$, $n \geqslant 0$, to liczba $(2^{2^n p} - 1)/(2^{2^n} - 1)$ jest pseudopierwsza.

Wniosek ten jest konsekwencją twierdzenia 3 ($a = 2$, $b = 1$).

3.

W pracy M. Cipolli [1] znajduje się, obok cytowanego już twierdzenia, następujący warunek konieczny i wystarczający na to, by iloczyn liczb Fermata $F_n = 2^{2^n} + 1$ był liczbą pseudopierwszą: liczba $F_m F_n \ldots F_s$, gdzie $m > n > \ldots > s$, jest wtedy i tylko wtedy pseudopierwsza, gdy $2^s > m$. Udowodnię tutaj dwa następujące uogólnienia tego rezultatu:

Twierdzenie 4. Niech $a > 1$, $2^\alpha \| a$, $\alpha > 0$, $n_1 > \ldots > n_s$ oraz

(5) $$P = (a^{2^{n_1}} + 1) \, a \ldots (a^{2^{n_s}} + 1).$$

Na to by $P | a^{P-1} - 1$ potrzeba i wystarcza, by

(6) $$n_1 < \alpha \, 2^{n_s}.$$

Twierdzenie 5. Niech $a > 1$, $b > 1$, $(a, b) = 1$, $2^\alpha \| a$, $\alpha > 0$, $2^{\lambda+1} \| b^2 - 1$, $n_1 > \ldots > n_s$, $\lambda + n_s \neq \alpha \, 2^{n_s}$ oraz

(7) $$P = (a^{2^{n_1}} + b^{2^{n_1}}) \ldots (a^{n_s} + b^{2^{n_s}}).$$

Na to, by liczba P była pseudopierwsza ze względu na a, b potrzeba i wystarcza, by

(8) $$n_1 < \min \, (\lambda + n_s, \alpha \, 2^{n_s}).$$

Dowód. Aby uzyskać możliwość równoczesnego dowodzenia twierdzeń 4 i 5 załóżmy, że P jest określone przez (7) i $b \geqslant 1$.

Liczba P jest pseudopierwsza ze względu na a, b wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_{a,b}(P) \mid P - 1$. Wystarczy więc wykazać, że warunek ten jest spełniony równocześnie z (6) (gdy $b = 1$) lub (8) (gdy $b > 1$).

Jak wiadomo ([11], s. 9), każde dwa czynniki iloczynu (7) są względnie pierwsze, zatem z lematów 2 i 4 wynika, że

$$\Delta_{a,b}(P) = [\Delta_{a,b}(A_{n_1} + B_{n_1}), \ldots, \Delta_{a,b}(A_{n_s} + B_{n_s})] = [2^{n_1+1}, \ldots, 2^{n_s+1}] = 2^{n_1+1}.$$

Z drugiej strony mamy

$$(9) \quad P - 1 = a^{2^{n_1} + \ldots + 2^n} + \ldots + a^{2^{n_s}} b^{2^{n_1} + \ldots + 2^{n_s - 1}} + b^{2^{n_1} + \ldots + 2^{n_s}} - 1.$$

Jeśli $b = 1$, to najwyższą potęgą liczby 2 dzielącą $P - 1$ jest $2^{\alpha 2^{n_s}}$. Zatem $\Delta_a(P) = 2^{n_1+1} \mid P - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n_1 + 1 \leqslant \alpha\, 2^{n_s}$, co jest równoważne warunkowi (6). Tak więc twierdzenie 4 zostało udowodnione.

Niech teraz $b > 1$. Z lematu 1 mamy $2^{\lambda + n_s} \| b^{2^{n_1} + \ldots + 2^{n_s}} - 1$ oraz, jak to już stwierdziliśmy, pozostałe składniki sumy (9) dzielą się przez $2^{\alpha 2^{n_s}}$ i ich suma nie jest podzielna przez wyższą potęgę liczby 2. Wynika stąd, że jeśli $n = \min(\lambda + n_s, \alpha\, 2^{n_s})$ to $P - 1 = 2^n R$, gdzie R jest liczbą nieparzystą (gdyż $\lambda + n_s \neq \alpha\, 2^{n_s}$). Zatem $\Delta_{a,b}(P) = 2^{n_1+1} \mid P - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n_1 + 1 \leqslant n$, co jest równoważne warunkowi (8). Twierdzenie 5 zostało więc w zupełności udowodnione.

Z twierdzenia 4 dla $a = 2$, wynika natychmiast cytowane twierdzenie M. Cipolli o iloczynach liczb Fermata.

Z twierdzenia 5 otrzymujemy następujący wniosek, który daje bardzo prosty, wyraźny wzór na liczbę pseudopierwszą ze względu na a, b:

Wniosek 7. Jeśli $a > 1, b > 1, (a, b) = 1, 2^\alpha \| a, 2^{\lambda+1} \| b^2 - 1, \alpha\, 2^n \neq \lambda + n$, to dla $n > 1$ liczba

$$(a^{2^n} + b^{2^n})(a^{2^{n+1}} + b^{2^{n+1}})$$

jest pseudopierwsza ze względu na a, b.

PRACE CYTOWANE

[1] M. Cipolla: *Sui numeri composti P che verificano la congruenza di Fermat* $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$, Annali di Matematica, ser. III, t. IX, 1904, ss. 139—160.

[2] L. E. Dickson: *History of the theory of numbers*, vol. 1, New York, 1952, s. 92.

[3] H. J. A. Duparc: *On almost primes*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1955-012.

[4] P. Erdös: *Problem 4319*, American Mathematical Monthly, 57, 1950, s. 346.

[5] O. Ore: *Number theory and its history*, New York, 1948, s.

[6] A. Rotkiewicz: *Sur les formules donnant des nombres pseudopremiers*, Colloquium Mathematicum, XII. 1, 1964, ss. 69—72.

[7] A. Rotkiewicz: *Solution d'un problème de M. H. J. A. Duparc*, Nieuw Archief voor Wiskunde (w druku).

[8] A. Rotkiewicz: *Sur les nombres composés n qui divisent* $a^{n-1} - b^{n-1}$, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, ser. II, t. VIII, 1959, ss. 115—116.

[9] A. Schinzel et W. Sierpiński: *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arithmetica 4, 1958, ss. 185—208.

[10] W. Sierpiński: *O liczbach złożonych postaci* $(2^p+1)/3$ *gdzie p jest liczbą pierwszą*, Prace Matematyczne, VII, 1962, ss. 169—172.
[11] W. Sierpiński: *Teoria Liczb*, cz. II, Warszawa, 1959.
[12] K. Szymiczek: *On prime numbers p, q and r such that pq, pr and qr are pseudoprimes*, Colloquium Mathematicum, XIII. 2, 1965, ss. 259—263.
[13] K. Szymiczek: *On pseudoprimes which are products of distinct primes*, American Mathematical Monthly, 74, 1967, ss. 35—37.

A FEW THEOREMS ON PSEUDOPRIMES

By K. SZYMICZEK

SUMMARY

In this paper we are concerned with composite numbers P which like primes have the property $P \mid a^{P-1} - b^{P-1}$. A number P having this property is called a pseudoprime with respect to a and b. We give some explicit formulas for such numbers which are simpler than Rotkiewicz's [7] one. A composite number P which have the property that each divisor of P is pseudoprime with respect to a and b is called a super-pseudoprime with respect to a and b.

Let $a > 1$, $b \geqslant 1$, $(a,b) = 1$ and p is a prime. We proved the following theorems:

Theorem 3. If $2 \mid ab$ and $p \nmid a^{2^n} - b^{2^n}$, $n \geqslant 0$, the number

$$m = (a^{2^n p} - b^{2^n p})/(a^{2^n} - b^{2^n})$$

is pseudoprime with respect to a and b. If $n = 1$ the number m is super-pseudoprime with respect to a and b (and the same in the case $n = 0$, provided m is composite).

From this theorem follows that the numbers $(2^{2p} - 1)/3$, $p > 3$, and $(2^{2p} + 1)/5$, $p > 5$, which were found to be pseudoprimes respectively by Cipolla [1] (and Erdös [4]) and Rotkiewicz [6], are also super-pseudoprimes.

We also generalized Cipolla's Theorem about pseudoprimes of the form $F_n F_m \dots F_s$, where F_n is the n-th Fermat number $2^{2^n}+1$. We obtain the following theorem.

Theorem 5. Let $2^\alpha \| a$, $\alpha > 0$, $2^{\lambda+1} \| b^2 - 1$, $n_1 > \dots > n_s$, $\lambda + n_s \neq \alpha\, 2^{n_1}$. The number

$$P = (a^{2^{n_1}} + b^{2^{n_1}}) \dots (a^{2^{n_s}} + b^{2^{n_s}})$$

is pseudoprime with respect to a and b if and only if

$$n_1 < \min(\lambda + n_s, \alpha\, 2^{n_s}).$$

If $b = 1$, we have $\lambda = \infty$ and the condition is

$$n_1 < \alpha\, 2^{n_s}.$$

Oddano do Redakcji 3. IV. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

BRONISŁAW KRZYSZTOFEK

O RÓWNANIU $1^n + 2^n + \ldots + m^n = (m+1)^n \cdot k$

Leo Moser [4] zajmował się równaniem postaci

$$1^n + 2^n + \ldots + m^n = (m+1)^n \tag{1}$$

i wykazał, że równanie (1) nie ma rozwiązań naturalnych dla $n > 1$ i $m + 1 < 10^{10^6}$ P. Erdös [5] przypuszcza, iż równanie (1) nie ma rozwiązań naturalnych $m, n > 1$.

W pracy tej udowodnię dwa twierdzenia dotyczące równania postaci

$$S_n(m) = 1^n + 2^n + \ldots + m^n = (m+1)^n \cdot k \tag{2}$$

Twierdzenie 1. Jeśli $(m, k) = 1$ i równanie (2) posiada rozwiązania naturalne $k, m, n > 1$, to

1° m jest liczbą bezkwadratową,

2° dla każdego pierwszego $p \mid m$ jest $p - 1 \mid m$,

3° $\sum\limits_{p \mid m} \frac{m}{p} \equiv -k \pmod m$,

4° $k(n+1) + 1 < m + 1 < (n+1)(k + 1/2)$.

Twierdzenie 2. Jeśli n jest liczbą nieparzystą lub m jest liczbą pierwszą to równanie (2) nie ma rozwiązań naturalnych $m, k, n > 1$.

Udowodnię najpierw kilka lematów.

Lemat 1. Jeśli p jest liczbą pierwszą i $m = l \cdot p + r$, $o \leqslant r < p$ to prawdziwe są następujące kongruencje względem modułu p:

$$S_n(m) \equiv -l + r, \text{ w przypadku gdy } p - 1 \mid n, \tag{3}$$

$$S_n(m) \equiv \begin{cases} S_n(r), \text{ gdy } r > 0 \\ 0, \text{ gdy } r = 0 \end{cases}, \text{ w przypadku gdy } p - 1 \nmid n. \tag{4}$$

Dowód. Wiadomo [3], że jeśli p jest liczbą pierwszą i $p-1 \mid n$ to

$$S_n(p-1) \equiv -1 \pmod p. \tag{5}$$

Niech

$$m = l\,p + r,\ 0 \leqslant r < p \tag{6}$$

wówczas

$$S_n(m) = S_n(lp) + \sum_{i=lp+1}^{lp+r} i^n. \tag{7}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$(sp+i)^n \equiv i^n \pmod p \tag{8}$$

dla dowolnego s całkowitego.

Równość (7) i kongruencja (8) dają

$$S_n(m) \equiv l\, S_n^{(p)} + S_n^{(r)} \pmod p. \tag{9}$$

Z kongruencji (5) i (9) wynika kongruencja (3).

Wiadomo również [3], że jeśli p jest liczbą pierwszą i $p-1 \nmid n$ to

$$S_n(p-1) \equiv 0 \pmod p. \tag{10}$$

Niech zachodzi (6), wówczas postępując jak wyżej otrzymamy kongruencję (9).

Skąd wobec (10) wynika (4) *c. b. d. o.*

Lemat 2. Liczby $S_n(m)$, m są względem siebie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy

1° m jest liczbą bezkwadratową,

2° dla każdego pierwszego $p \mid m$ jest $p-1 \mid n$.

Dowód I. Niech

$$(S_n(m), m) = 1 \tag{11}$$

i

$$m = \prod_{i=1}^{v} p_i^{l_i} \tag{12}$$

niech będzie postacią kanoniczną liczby m. Gdyby dla pewnego $i = k$ $p_k - 1 \nmid n$ to na podstawie lematu 1 (dla $r = 0$), to znaczy z (4), otrzymamy

$$S_n(m) \equiv 0 \pmod{p_k}. \tag{13}$$

Wzory (12) i (13) dają

$$p_k \mid (S_n(m), m)$$

co wobec założenia (11) jest niemożliwe. Jest więc dla każdego $i = 1, 2, \ldots v$

$$p_i - 1 \mid n. \tag{14}$$

Z (12) i lematu 1, to znaczy z (3) (dla $r = 0$) otrzymamy

$$S_n(m) \equiv -\frac{\prod_{i=1}^{v} p_i^{l_i}}{p_k} \pmod{p_k} \tag{15}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, v$.

Gdyby dla pewnego $i = h$ $l_h > 1$ to wobec (15)

$$p_h | (S_n(m), m)$$

co jest sprzeczne z (11). Mamy więc dla każdego $i = 1, 2, \ldots, v$ $l_i = 1$.

Dowód II. Załóżmy teraz, że

$$m = \prod_{i=1}^{v} p_i \tag{16}$$

jest liczbą bezkwadratową i dla każdego $i = 1, 2, \ldots, v$ jest

$$p_i - 1 \mid n. \tag{17}$$

Relacje (16), (17) i lemat 1 dają

$$S_n(m) \equiv -\frac{\prod_{i=1}^{v} p_i}{p_k} \pmod{p_k} \tag{18}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, v$.

Zauważmy, iż wobec (16)

$$\left(\frac{\prod_{i=1}^{v} p_i}{p_k}, p_k\right) = 1 \tag{19}$$

dla każdego $k = 1, 2, \ldots, v$. Wzory (19) i (18) dają (11) *c, b. d. o.*

Lemat 3. $S_n(m) \equiv a \pmod{m}$ i $(a, m) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1° $m = \prod_{i=1}^{v} p_i$ jest liczbą bezkwadratową,

2° dla każdego $i = 1, 2, \ldots, v$ jest $p_i - 1 | n$,

3° $\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{p_i} \equiv -a \pmod{m}$.

Lemat 3 jest uogólnieniem twierdzenia A. Czarnoty [2].

Dowód I. Niech zachodzą 1°, 2°, 3°, wówczas z 1° i 2° oraz lematu 1 wynika

$$S_n(m) \equiv -\frac{m}{P_i} \pmod{P_i} \tag{20}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, v$.

Postępując dalej w taki sposób jak A. Czarnota w [2], mamy

$$\frac{m}{P_i} S_n(m) \equiv -\left(\frac{m}{P_i}\right)^2 \pmod{m} \tag{21}$$

dla $i = 1, 2, 3, \ldots, v$. Dodając stronami kongruencje (21) otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{P_i} S_n(\mathrm{m}) \equiv -\sum_{i=1}^{v} \left(\frac{m}{P_i}\right)^2 \pmod{m}$$

skąd

$$\left(\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{P_i}\right) S_n(m) \equiv -\sum_{i=1}^{v} \left(\frac{m}{P_i}\right)^2 \pmod{m}. \tag{22}$$

Ponieważ

$$\sum_{i=1}^{v} \left(\frac{m}{P_i}\right)^2 \equiv \left(\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{P_i}\right)^2 \pmod{m}, \tag{23}$$

przeto kongruencje (22) i (23) dają

$$\left(\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{P_i}\right) S_n(m) \equiv -\left(\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{P_i}\right)^2 \pmod{m}. \tag{24}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\left(\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{P_i},\ m\right) = 1. \tag{25}$$

Z kongruencji (24) i wzoru (25) wynika kongruencja

$$S_n(m) \equiv -\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{P_i} \pmod{m}. \tag{26}$$

Wzory (26), (25) i 3° dają

$$S_n(m) \equiv a \pmod{m} \text{ i } (a, m) = 1 \tag{27}$$

Dowód II. Niech zachodzą wzory (27), wówczas jak łatwo zauważyć

$$(S_n(m), m) = 1. \tag{28}$$

(28) i lemat 2 dają 1° i 2° lematu 3. Stąd zaś i z lematu 1 (dla $r = o$) oraz z (27) otrzymamy

$$-\frac{m}{P_i} \equiv a \pmod{P_i} \tag{29}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, v$.

Skąd mamy:

$$\sum_{i=1}^{v} \frac{m}{P_i} \equiv -a \pmod{P_i} \tag{30}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, v$.

Kongruencja (30) daje 3° lematu 3 *cbdo.*

Lemat 4. Jeśli równanie (2) ma rozwiązania naturalne $m, k, n > 1$ to

$$k(n+1) + 1 < m + 1 < (n+1)\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Dowód: Weźmy pod uwagę tożsamość

$$(l+1)^{r+1} = \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} l^{r+1-i}. \tag{31}$$

Podstawiając za l w tej tożsamości po kolei $1, 2, \ldots, m$ otrzymamy m równości postaci (31), które po dodaniu stronami dają

$$(m+1)^{r+1} = 1 + (r+1)\, S_r(m) + \sum_{i=2}^{r+1} \binom{r+1}{i} S_{r+1-i}^{(m)}. \tag{32}$$

Niech $r = n$, wówczas z (32) i (2) przenosząc na lewą stronę wyrażenie $(n+1)(m+1)^n k$ i wyłączając poza nawias wspólny czynnik, otrzymamy

$$(m+1)^n[m + 1 - (n+1)k] = 1 + \sum_{i=2}^{n+1} \binom{n+1}{i} S_{n+1-i}^{(m)}. \tag{33}$$

Skąd wynika, że

$$m + 1 > (n+1)k. \tag{34}$$

Niech w (32) $r = n - 1$, stąd i wobec (33) mamy

$$(m+1)^n [m + 1 - (n+1)k] = [m + 1 - (n+1)k] \left[1 + \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} S_{n-s}^{(m)}\right] =$$

$$= 1 + \sum_{i=2}^{n+1} \binom{n+1}{i} S_{n+1-i}^{(m)}. \tag{35}$$

Przyjmując w (35) $i = s + 1$ otrzymamy

$$[m + 1 - (n+1)k] \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{s} S_{n-s}^{(m)}\right] = 1 + \sum_{s=1}^{n} \frac{n+1}{s+1} \binom{n}{s} S_{n-s}^{(m)}.$$

Stąd po wymnożeniu i przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę równości oraz po wyłączeniu wspólnych czynników poza nawias mamy:

$$m + 1 - (n + 1)k - 1 + \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \left[m + 1 - k(n + 1) - \frac{n+1}{s+1} \right] S_{n-s}^{(m)} = 0. \quad (36)$$

Gdyby $m = (n + 1)k$ to równość (36) daje

$$\sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \left(\frac{s-n}{s+1} \right) S_{n-s}^{(m)} = 0,$$

co dla $n > 1$ jest niemożliwe. Stąd i (34) wynika

$$m + 1 > (n + 1)k + 1. \quad (37)$$

Ponieważ $n > 1$ i ciąg $\left\{ m + 1 - k(n + 1) - \frac{n+1}{s+1} \right\}$ jest rosnący dla $s = 1, 2, \ldots$, przeto z (36) wynika, że jego najmniejszy wyraz jest ujemny, tzn.

$$m + 1 - k(n + 1) - \frac{n+1}{2} < 0.$$

Stąd i (37) wynika teza lematu 4. Łatwo zauważyć, że dowód twierdzenia 1 wynika natychmiast z lematów 3 i 4.

Lemat 5. Jeżeli n jest liczbą naturalną nieparzystą to

$$2\, S_n(m) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ m\,(m + 1)).$$

Dowód lematu 5 wynika natychmiast z następujących oczywistych kongruencji:

$$2\, S_n(m) = \sum_{i=0}^{m} [(m - i)^n + i^n] \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ m)$$

i

$$2\, S_n(m) = \sum_{i=1}^{n} [(m + 1 - i)^n + i^n] \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ m + 1).$$

Dowód twierdzenia 2. Niech liczby naturalne $m, k, n > 1$ spełniają równanie (2) i niech n będzie liczbą nieparzystą, wówczas z (2) i lematu 5 wynika kongruencja

$$2k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ m),$$

co wobec lematu 4 dla $n > 1$ jest niemożliwe.

Niech m będzie liczbą pierwszą. Wiadomo [1], że

$$(n+1)\, S_n\,(m-1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B_j\, m^{n+1-j} \tag{38}$$

gdzie B_j są liczbami Bernoulliego. Dodając do obu stron tożsamości (38) liczbę $(n+1) \cdot m^n$ otrzymamy

$$(n+1)\, S_n\,(m) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B'_j\, m^{n+1-j} \tag{39}$$

gdzie $B'_1 = \frac{1}{2}$ i $B'_j = B_j$ dla $j \neq 1$. Ponieważ liczby Bernoulliego [1] można znaleźć rozwiązując trójkątny układ równań

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{u+1}{j} B_j = 0 \text{ dla } u = 1, 2, \ldots, n \text{ i } B_o = 1,$$

więc liczby B'_j znajdujemy rozwiązując układ równań

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{u+1}{j} B'_j = u + 1 \text{ dla } u = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Łatwo również zauważyć, że wspólnym mianownikiem liczb B'_j dla $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ jest wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{n-1} & \binom{n+1}{n} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \binom{1}{0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^h\,(n+1),$$

gdzie h jest liczbą naturalną. Stąd (39) i (2) wynika

$$(n+1)^2\, n!\,(m+1)^n k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B'_j\,(n+1)!\; m^{n+1-j}. \tag{40}$$

Równość (40) daje

$$(n+1)^2\, n!\,(m+1)^n k \equiv 0 \pmod{m},$$

co wobec lematu 4 jest niemożliwe dla m pierwszego i $n > 1$ *cbdo*.

PRACE CYTOWANE

[1] З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич: Теория чисел. Москва, 1964 ss. 504–505.

[2] A. Czarnota: Warunki konieczne i dostateczne na moduły w kongruencji $\sum_{r=1}^{n-1} r^{n-1} \equiv -1 \pmod{n}$, Roczniki P. T. M. Seria 1: Prace Matematyczne II. 1. (1956), ss. 171—178.

[3] G. H. Hardy and E. M. Wright: An introduction to the theory of numbers, Oxford, 1960, s. 91.

[4] L. Moser: On the diophantine equation $1^n + 2^n + \ldots + (m-1)^n = m^n$, Scripta Mathematica 19 (1953), ss. 84—88.

[5] W. Sierpiński: Elementary theory of numbers, (1964) M. M. s. 82.

ON THE EQUATION $1^n + 2^n + \ldots + m^n = (m+1)^n k$

By B. KRZYSZTOFEK

SUMMARY

The paper contains proofs of two theorems about the equation in the title.

Theorem 1. If this equation possesses a solution in natural numbers $k, m, n > 1$ and $(m, k) = 1$, then

1° m is quadratfree,

2° every prime p dividing m fulfils the condition $p - 1 | n$,

3° $\sum_{p|m} \frac{m}{p} \equiv -k \pmod{m}$,

4° $k(n+1) + 1 < m + 1 < (n+1)\left(k + \frac{1}{2}\right)$.

Theorem 2. The equation in the title has no solution if n is *odd* > 1, or if m is *a* prime number.

Oddano do Redakcji 28. VII. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

KAZIMIERZ ZIMA

O PEWNYM UKŁADZIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWO-FUNKCYJNYCH

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest pewien układ równań różniczkowych, obejmujący — jako przypadki szczególne — szereg typów równań różniczkowych z opóźnionym argumentem, pewne równania różniczkowo-całkowe, tzw. równania z wyrażeniami ekstremalnymi [3] i tym podobne.

Przy założeniach odpowiadających znanym warunkom Caratheodory'ego, dowodzimy w stosunku do rozważanego układu twierdzenie o istnieniu rozwiązania problemu Cauchy'ego, twierdzenie o istnieniu całki górnej i dolnej oraz pewnych twierdzeń o nierównościach różniczkowych.

Zawarte w niniejszej pracy wyniki uogólniają m. in. rezultaty prac: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

1. Pojęcia wstępne i oznaczenia

Niech X oznacza zbiór funkcji wektorowych $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$, określonych i ciągłych w przedziale $(-\infty, T)$, $0 < T \leqslant +\infty$. Oznaczmy dalej przez A^{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots n$, n^2 — funkcjonałów rzeczywistych, określonych na iloczynie $< 0, T) \times X$. Symbol $A^{ij}(t, x)$ oznaczać będzie wartość funkcjonału A^{ij} w punkcie (t, x) zbioru $< 0, T) \times X$. Jeśli ustalimy drugą współrzędną punktu (t, x) należącego do zbioru $< 0, T) \times \times X$, wówczas wyrażenie $A^{ij}(t, x)$ jest funkcją zmiennej t, określoną w przedziale $< 0, T)$. Możemy więc powiedzieć, że funkcjonały A^{ij} przekształcają funkcje wektorowe $x(t)$ zbioru X w funkcje rzeczywiste $A^{ij}(t, x)$, określone w przedziale $< 0, T)$. Dlatego zamiast mówić „funkcjonał A^{ij}", będziemy mówili również „transformacja A^{ij}".

W pracy tej zajmiemy się następującym układem równań różniczkowych

$$(1) \quad \begin{cases} x_i(t) = \varphi_i(t), \text{ dla } t \,\varepsilon\, (-\infty, 0> \\ x'_i(t) = f_i(t, A^{i1}(t, x), A^{i2}(t, x), \ldots A^{in}(t, x)), \; t \,\varepsilon < 0, T), \; i = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

W odniesieniu do układu (1) przyjmujemy następujące założenia:

1° Funkcja wektorowa $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots {}_n(t)\}$, zwana funkcją początkową, jest ciągła w przedziale $(-\infty, 0>$.

2° Funkcje $f_i(t, u_1, u_2, \dots u_n)$, $i = 1, 2, \dots n$, określone w zbiorze $D\{t \varepsilon < 0, T)$, u_i dowolne$\}$, są ciągłe ze względu na zmienną przestrzenną $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ przy każdym ustalonym t z przedziału $< 0, T)$ oraz mierzalne ze względu na zmienną t w każdym domkniętym podprzedziale przedziału $< 0, T)$, przy dowolnie ustalonej zmiennej przestrzennej $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$.

3° Istnieją nieujemne i sumowalne w każdym podprzedziale domkniętym przedziału $< 0, T)$ funkcje $m_i(t)$, $i = 1, 2, \dots n$, takie, że dla $t \varepsilon < 0, T)$ zachodzą nierówności

$$|f_i(t, u_1, u_2, \dots u_n)| \leqslant m_i(t), \quad i = 1, 2, \dots n$$

Odnośnie regularności funkcjonałów A^{ij} zakładamy:

4° Dla każdego punktu (τ, x) zbioru $< 0, T) \times X$, liczby $A^{ij}(\tau, x)$, $i, j = 1, 2, \dots n$, nie zależą od wartości funkcji $x(t)$ na przedziale (τ, T).

5° Jeśli funkcja $x(t)$ należy do zbioru X, to jej obraz $A^{ij}(t, x)$ poprzez transformację A^{ij} jest funkcją mierzalną i prawie wszędzie skończoną w każdym domkniętym podprzedziale przedziału $< 0, T)$.

6° Jeśli ciąg $\{x^n(t)\}$ funkcji wektorowych, należących do zbioru X, jest zbieżny jednostajnie do funkcji $x^\circ(t)$ w przedziale $(-\infty, T^\circ>$, $0 < T^\circ < T$, to prawie wszędzie w tym przedziale zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} A^{ij}(t, x^n) = A^{ij}(t, x^\circ), \quad i, j = 1, 2, \dots n$$

D e f i n i c j a. Rozwiązaniem równania (1) w przedziale $< 0, T^\circ >$, $T^\circ < T$, będziemy nazywali każdą funkcję wektorową $x(t)$, określoną w przedziale $(-\infty, T^\circ>$, która dla $t \varepsilon (-\infty, 0>$ jest identyczna z funkcją początkową $\varphi(t)$, a w przedziale $< 0, T^\circ >$ jest absolutnie ciągła i prawie wszędzie w tym przedziale czyni zadość równaniu (1).

2. Twierdzenie o istnieniu rozwiązania układu (1)

W oparciu o wyżej przyjęte założenia udowodnimy obecnie następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 1. Niech liczba T° będzie dowolną liczbą z przedziału $(0, T)$, zaś $\varphi(t)$ nich będzie zadaną w przedziale $(-\infty, 0>$ funkcją początkową.

Jeśli dla układu (1) zachodzą warunki 1°—6°, to istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie tego układu w przedziale $< 0, T^\circ >$.

Dowód. Niech $\tau_\nu = T^\circ/\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Weźmy pod uwagę nieskończony ciąg układów równań całkowych postaci

$$(2)\begin{cases} x_i^\nu(t) = \varphi_i(t), \text{ dla } t \varepsilon (-\infty, 0 > \\ x_i^\nu(t) = \varphi_i(0) + \int\limits_0^{t-\tau_\nu} f_i(s, A^{i1}(s, x^\nu), A^{i2}(s, x^\nu), \ldots A^{in}(s, x^\nu))\, ds, \; t \varepsilon < \tau_\nu, T^\circ > \\ x_i^\nu(t) = \varphi_i(0), \text{ dla } t \varepsilon < 0, \tau_\nu >, \; i, j = 1, 2, \ldots n, \; \nu = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Występujący w układzie (2) symbol całki oznacza całkę w sensie Lebesgue'a.

Jest widoczne, że dla każdego ustalonego wskaźnika ν, funkcja wektorowa $x^\nu(t)$ oznaczająca rozwiązanie ν-tego układu równań całkowych (2), jest określona bezpośrednio dla $t \varepsilon (-\infty, \tau_\nu >$. Jeśli natomiast t należy do przedziału $< \tau_\nu, 2\tau_\nu >$, to zmienna całkowania s przebiega przedział $< 0, \tau_\nu >$ i — zgodnie z założeniem 4° — dla takich s funkcje $A^{ij}(s, x^\nu)$, $i, j = 1, 2, \ldots n$, można traktować jako funkcje znane. Tym samym jako znane można traktować funkcje złożone $F_i^\nu(t) = f_i(t, A^{i1}(t, x^\nu), \ldots A^{in}(t, x^\nu))$, gdy t należy do przedziału $< 0, \tau_\nu >$. Na mocy przyjętych założeń oraz znanych faktów z zakresu teorii funkcji rzeczywistych, funkcje $F_i^\nu(t)$ są sumowalne w przedziale $< 0, \tau_\nu >$. Tak więc całka występująca w układzie (2) ma sens dla $t \varepsilon < \tau_\nu, 2\tau_\nu >$, co pozwala określić rozwiązanie $x^\nu(t)$ tego układu w sąsiednim przedziale $< \tau_\nu, 2\tau_\nu >$. Postępując analogicznie można to rozwiązanie wyznaczyć w dalszych przedziałach: $< 2\tau_\nu, 3\tau_\nu >$, $< 3\tau_\nu, 4\tau_\nu >, \ldots$, a po $\nu - 1$ krokach, w całym przedziale $< 0, T^\circ >$.

Mamy więc wniosek następujący:
Dla kadżego wskaźnikka ν układ (2) posiada rozwiązanie, określone w przedziale $(-\infty, T^\circ >$.

Weźmy pod uwagę ciąg $\{x^\nu(t)\}$, w którym ν-ty wyraz jest właśnie rozwiązaniem ν-tego układu równań całkowych (2). Łatwo zauważyć, że funkcje wektorowe $x^\nu(t)$ są wspólnie ograniczone w przedziale $< 0, T^\circ >$. Wynika to stąd, że $x_i^\nu(t) = \varphi_i(0)$ dla $t \varepsilon < 0, \tau_\nu >$ oraz z nierówności:

$$|x_i^\nu(t)| \leqslant |\varphi_i(0)| + \int\limits_0^{T^\circ} m_i(s)\, ds \text{ dla } t \varepsilon < \tau_\nu, T^\circ >.$$

Jednocześnie są to funkcje jednakowo ciągłe w przedziale $< 0, T^\circ >$, co wynika natychmiast z oszacowania.

$$|x_i^\nu(\bar{t}) - x_i^\nu(\bar{\bar{t}})| \leqslant \left| \int\limits_{\bar{t}}^{\bar{\bar{t}}} m_i(s)\, ds \right|, \text{ gdy } \bar{t}, \bar{\bar{t}} \varepsilon < \tau_\nu, T^\circ >,$$

oraz

$$|x_t^\nu(\bar{t}) - x_t^\nu(\bar{\bar{t}})| = 0 \text{ gdy } \bar{t}, \bar{\bar{t}} \varepsilon < 0, \tau_\nu >.$$

Zgodnie z twierdzeniem Arzeli, z ciągu $\{x^{\nu}(t)\}$ można wybrać podciąg zbieżny jednostajnie w przedziale $< 0, T^{\circ} >$. Aby nie komplikować oznaczeń założymy, że już sam ciąg $\{x^{\nu}(t)\}$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $< 0, T^{\circ} >$ do funkcji $x^{\circ}(t)$. Z uwagi na równość $x^{\nu}(t) \equiv \varphi(t)$ dla $t\,(-\infty, 0>$, ciąg $\{x^{\nu}(t)\}$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $(-\infty, T^{\circ}>$ do funkcji $\tilde{x}(t)$ równej $x^{\circ}(t)$ dla $t \varepsilon < 0, T^{\circ} >$ i równej $\varphi(t)$ dla $t \varepsilon (-\infty, 0 >$. Wykażemy, że funkcja $\tilde{x}(t)$ jest rozwiązaniem następującego układu równań całkowych

$$(3) \quad \begin{cases} x_i(t) = \varphi_i(t) \text{ dla } t \,\varepsilon\, (-\infty, 0> \\ x_i(t) = \varphi_i(0) + \int\limits_0^t f_i(s, A^{i1}(s,x), A^{i2}(s,x), \ldots A^{in}(s,x))\, ds, \; t \,\varepsilon < 0, T^{\circ} >. \\ \qquad i = 1, 2, .. n \end{cases}$$

W tym celu wystarczy sprawdzić, że dla $t \varepsilon < 0\, T^{\circ} >$ zachodzi równość

$$\text{(i)} \quad \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_0^{t-\tau_\nu} f_i(s, A^{i1}(s,x^{\nu}), \ldots A^{in}(s,x^{\nu}))\, ds = \int\limits_0^t f_i(s, A^{i1}(s,\tilde{x}), \ldots A^{in}(s,\tilde{x}))\, ds$$

lub, co na jedno wychodzi, że

$$\lim_{\nu\to\infty} \left[\int\limits_0^t f_i(s, \ldots A^{ij}(s,x^{\nu}), \ldots)\, ds - \int\limits_{t-\tau_\nu}^t f_i(s, \ldots A^{ij}(s,x^{\nu}), \ldots)\, ds \right] =$$

$$= \int\limits_0^t f_i(s, \ldots A^{ij}(s,\tilde{x}), \ldots)\, ds$$

Z uwagi na założenie 3° oraz jednostajną ciągłość całki, mamy

$$\text{(ii)} \quad \left| \int\limits_{t-\tau_\nu}^t f_i(s, \ldots A^{ij}(s,x^{\nu}), \ldots)\, ds \right| < \int\limits_{t-\tau_\nu}^t m_i(s)\, ds \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Z drugiej strony, wobec założenia 6°, prawie wszędzie w przedziale $< 0, T^{\circ} >$ zachodzi równość

$$\text{(iii)} \quad \lim A^{ij}(t,x^{\nu}) = A^{ij}(t,\tilde{x}), \; i, j = 1, 2, \ldots n$$

Z równości (iii) oraz założenia 2° wynika, że ciąg funkcji złożonych $F_i^{\nu}(t) = f_i(t, A^{i1}(t,x^{\nu}), \ldots A^{in}(t,x^{\nu}))$ zmierza prawie wszędzie w przedziale $< 0, T^{\circ} >$ do funkcji $F_i(t) = f_i(t, A^{i1}(t,\tilde{x}), \ldots A^{in}(t,\tilde{x}))$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Na podstawie twierdzenia Lebesgue'a o całkowaniu ciągów posiadających sumowalną majorantę wnosimy, że dla $t \varepsilon < 0, T^{\circ} >$ zachodzi równość

$$\text{(j)} \quad \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_0^t f_i(s, A^{i1}(s,x^{\nu}), \ldots A^{in}(s,x))\, ds = \int\limits_0^t f_i(s, A^{i1}(s,\tilde{x}), \ldots A^{in}(s,\tilde{x}))\, ds.$$

Z równości (j) oraz (ii) wynika równość (i), co dowodzi jednocześnie, że funkcja $\tilde{x}(t)$ spełnia układ całkowy (3). Ponieważ w przedziale $< 0, T^{\circ} >$ jest — z dokładnością do stałej addytywnej $\varphi(0)$ — równa pewnej całce ze zmienną granicą całkowania, przeto jest w tym przedziale funkcją absolutnie ciągłą. Ponieważ w klasie funkcji absolutnie ciągłych układ całkowy (3) jest równoważny równaniu różniczkowemu (1), więc funkcja wektorowa $\tilde{x}(t)$ jest rozwiązaniem równania (1) w przedziale $< 0, T^{\circ} >$ w sensie przyjętej definicji. Twierdzenie 1 zostało w ten sposób wykazane.

3. Nierówności różniczkowe z mocnymi nierównościami w warunku początkowym

W dalszym ciągu zajmujemy się układem równań różniczkowych (1). Będziemy obecnie zakładać, że prócz przyjętych już warunków 1°—6°, układ ten spełnia dwa następujące warunki monotoniczności

7° Jeśli $\bar{u}_1 \leqslant \bar{\bar{u}}_1, \bar{u}_2 \leqslant \bar{\bar{u}}_2, \dots \bar{u}_n \leqslant \bar{\bar{u}}_n$, to $f_i(t, \bar{u}_1, \dots \bar{u}_n) \leqslant f_i(t, \bar{\bar{u}}_1, \dots \bar{\bar{u}}_n)$ $i = 1, 2, \dots n$.

8° Jeśli funkcje wektorowe $\bar{x}(t)$ i $\bar{\bar{x}}(t)$ należą do zbioru X i dla $\tau \varepsilon < 0, T)$ zachodzi nierówność $\bar{x}(t) \leqslant \bar{\bar{x}}(t)$ w przedziale $(-\infty, \tau >$, to $A^{ij}(\tau, \bar{x}) \leqslant A^{ij}(\tau, \bar{\bar{x}})$ dla $i, j = 1, 2, \dots n$.

W oparciu o założenia 1°—8° udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. Niech funkcja wektorowa $x(t)$ będzie całką równania (1) w przedziale $< 0, T^{\circ} >$, odpowiadającą początkowej funkcji $\varphi(t)$. Niech ponadto w przedziale $(-\infty, T^{\circ} >$ dana będzie funkcja wektorowa $z(t)$, $z(t) = \{z_1(t), \dots z_n(t)\}$, ciągła w przedziale $(-\infty, 0 >$, absolutnie ciągła w przedziale $< 0, T^{\circ} >$ i spełniająca następujące warunki:

α) $z_i(t) < \varphi_i(t)$ dla $t \varepsilon (-\infty, 0 >$, $i = 1, 2, \dots n$,

β) Prawie wszędzie w przedziale $< 0, T^{\circ} >$ spełnione są nierówności

$$z'_i(t) \leqslant f_i(t, A^{i1}(t, z), A^{i2}(t, z), \dots A^{in}(t, z)), \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Jeśli spełnione są powyższe warunki, wtedy w przedziale $< 0, T^{\circ} >$ zachodzą nierówności

$$z_i(t) < x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Dowód. Z założenia α) wynika, że dla każdego wskaźnika i, $z_i(0) < x_i(0) = \varphi_i(0)$. Z uwagi na ciągość, te nierówności zachowują się w pewnym prawostronnym otoczeniu $< 0, h)$ liczby 0. Niech η będzie kresem górnym tych wartości h^*, dla których są spełnione nierówności $z_i(t) < x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots n$, dla wszystkich t z przedziału $< 0, h^* >$. Mamy wykazać, że $\eta = T^{\circ}$. Przyjmijmy, dla dowodu niewprost, że $\eta < T^{\circ}$. Z przypuszczenia tego i określenia liczby η wynika, że istnieje taki wskaźnik i_0, że $z_{io}(\eta) = x_{io}(\eta)$. Korzystając z tego, że funkcja absolutnie ciągła jest całką Lebesgue'a swojej pochodnej, otrzymujemy tożsamość

$$\text{(jj)} \qquad x_{i_o}(t) - z_{i_o}(t) \equiv \varphi_{i_o}(0) - z_{i_o}(0) + \int_o^t [x'_{i_o}(s) - z'_{i_o}(s)]\, ds$$

prawdziwą w przedziale $< 0, T^\circ >$. W oparciu o założenia β) i określenie funkcji $x(t)$ jako całki równania (1), z równości (jj) wynika nierówność

$$\text{(jjj)} \qquad x_{i_o}(t) - z_{i_o}(t) \geqslant \varphi_{i_o}(0) - z_{i_o}(0) +$$
$$+ \int_o^t [f_{i_o}(s, \ldots A^{ioj}(s, x), \ldots) - f_{i_o}(s, \ldots A^{ioj}(s, z), \ldots)]\, ds$$

prawdziwa w przedziale $< 0, T^\circ >$. Natomiast w podprzedziale $< 0, \eta >$ zachodzą nierówności $z_i(t) \leqslant x_i(t)$. Z nierówności tych i nierówności α) oraz z monotoniczności funkcji f_i (założenie 7°) i monotoniczności transformacji A^{ij} (założenie 8°) wynika, że dla t z przedziału $< 0, \eta >$ całka występująca w nierówności (jjj) jest nieujemna. Bezpośredni wniosek z tego stwierdzenia jest następujący:

Dla $t = \eta$ zachodzi nierówność

$$x_{i_o}(\eta) - z_{i_o}(\eta) \geqslant \varphi_{i_o}(0) - z_{i_o}(0) > 0.$$

Jest to jednak sprzeczne z określeniem liczby η i i_o. Dowód twierdzenia 2 jest więc zakończony.

Zachowując założenia 1°—8°, poczynione odnośnie układu (1), a zmieniając jedynie kierunki nierówności w warunkach α) i β) twierdzenia 2 na przeciwne, można (analogicznie do dowodu twierdzenia 2) dowieść następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3. Jeśli funkcja $z(t) = \{z_1(t), \ldots z_n(t)\}$ spełnia, pominąwszy warunki α) i β) wszystkie założenia twierdzenia 2, a ponadto

α') $\qquad z_i(t) > \varphi_i(t)$ dla $t \,\varepsilon\, (-\infty, 0 >$

β') $\quad z'_i(t) \geqslant f_i(t, A^{i1}(t, z), \ldots A^{in}(t, z))$ prawie wszędzie w $< 0, T^\circ >$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

to w przedziale $< 0, T^\circ >$ zachodzą nierówności

$$z_i(t) > x_i(t), \; i = 1, 2, \ldots n,$$

gdzie $x(t)$ jest rozwiązaniem układu (1) z funkcją początkową $\varphi(t)$.

4. Całka górna i całka dolna układu (1)

Udowodnimy obecnie, że każdej ciągłej funkcji początkowej $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t)\}$, określonej w przedziale $(-\infty, 0>$, przy założeniach 1°—8° odpowiada całka górna i całka dolna układu (1) i obie te całki są określone w przedziale $<0, T)$.

Dowód. Weźmy pod uwagę dowolny przedział domknięty $<0, T^\circ>$ zawarty w przedziale $<0, T)$. W myśl twierdzenia 1 istnieje w przedziale $<0, T^\circ>$ rozwiązanie $x(t) = \{x_1(t), \ldots x_n(t)\}$ układu (1), odpowiadające początkowej funkcji $\varphi(t)$. Rozważmy ciąg funkcji początkowych $\varphi^\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, związanych z funkcją $\varphi(t)$ równościami $\varphi_i^\nu(t) = \varphi_i(t) + 1/\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Na podstawie twierdzenia 1 każdej funkcji początkowej $\varphi^\nu(t)$ odpowiada całka układu (1), istniejąca w przedziale $<0, T^\circ>$. Oznaczmy ją przez $x^\nu(t)$. Ponieważ dla każdego ν zachodzi nierówność $\varphi_i^\nu(t) > \varphi_i(t)$, dla $t \,\varepsilon\, (-\infty, 0>$, $i = 1, 2, \ldots n$, przeto — na mocy twierdzenia 2 — w przedziale $<0, T^\circ>$ zachodzą nierówności

$$x_i^\nu(t) > x_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots n, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Ponadto, z uwagi na oczywistą nierówność $\varphi_i^{\nu+1}(t) < \varphi_i^\nu(t)$, uzyskujemy w oparciu o twierdzenie 2 drugi ciąg nierówności, a mianowicie

$$x_i^{\nu+1}(t) < x_i^\nu(t), \quad t \,\varepsilon < 0, T^\circ>, \quad i = 1, 2, \ldots n, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Z powyższych nierówności wynika, że funkcje $x_i^\nu(t)$ $i = 1, 2, \ldots n$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, są w przedziale $<0, T^\circ>$ zawarte między krzywymi $x^1{}_i(t)$ i $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots n$. Zatem wyrazy ciągu $\{x^\nu(t)\}$ są wspólnie ograniczone w przedziale $<0, T^\circ>$. W oparciu o założenie 3° łatwo sprawdzić, że ciąg $\{x^\nu(t)\}$ jest ciągiem funkcji jednakowo ciągłych w przedziale $<0, T^\circ>$. Z ciągu $\{x^\nu(t)\}$ da się więc wybrać podciąg $\{x^{n(\nu)}(t)\}$ zbieżny jednostajnie w przedziale $<0, T^\circ>$ do ciągłej funkcji $\mathring{x}(t)$. W sposób dobrze znany uzasadnia się, że funkcja graniczna $\mathring{x}(t)$ jest rozwiązaniem układu (1), odpowiadającym funkcji początkowej $\varphi(t)$. Z uwagi na nierówność $x_i^{n(\nu)}(t) \geqslant x_i(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\mathring{x}_i(t) \geqslant x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots n$. Ponieważ zaś $x(t)$ oznacza dowolne rozwiązanie układu (1) odpowiadające początkowej funkcji $\varphi(t)$, przeto funkcja $\mathring{x}(t)$ jest rozwiązaniem górnym tego układu, odpowiadającym początkowej funkcji $\varphi(t)$.

Dowód istnienia całki górnej układu równań (1) dla przedziału $<0, T^\circ>$ został więc zakończony. Zupełnie analogicznie można przeprowadzić dowód istnienia całki dolnej rozważanego układu równań różniczkowych. Ponieważ liczba T° była dowalną liczbą z przedziału $<0, T)$, więc obie te całki ekstremalne są określone (istnieją) w całym przedziale $<0, T)$.

5. Nierówności różniczkowe ze słabymi nierównościami w warunku początkowym

W punkcie 3 niniejszej pracy podaliśmy dwa twierdzenia dotyczące nierówności różniczkowych, zakładając że porównawcza funkcja $z(t)$ spełnia wobec funkcji początkowej $\varphi(t)$ mocną nierówność w przedziale $(-\infty, 0>$. Wtedy, na podstawie tych twierdzeń, również w przedziale $<0, T)$ zachodzą odpowiednie nierówności pomiędzy funkcją porównawczą, a dowolną całką $x(t)$ układu (1), odpowiadającą funkcji początkowej $\varphi(t)$.

Twierdzenie 2 i 3 można wzmocnić, dopuszczając słabe nierówności w warunku początkowym, natomiast zawartą w tezie dowolną całkę układu (1), odpowiadającą funkcji początkowej $\varphi(t)$, trzeba zastąpić całką górną — względnie dolną — rozważanego układu. Podaną tu informację sformułujemy w postaci dwóch następujących twierdzeń:

Twierdzenie 5. Niech $x(t) = \{x_1(t), \ldots x_n(t)\}$ będzie całką górną układu (1) w przedziale $<0, T^\circ>$, odpowiadającą początkowej funkcji $\varphi(t)$. Niech prócz tego w przedziale $(-\infty, T^\circ>$ będzie określona funkcja wektorowa $z(t) = \{z_1(t), \ldots z_n(t)\}$, ciągła w całym tym przedziale i ciągła absolutnie w podprzedziale $<0, T^\circ>$. Jeśli funkcja $z(t)$ spełnia wobec układu (1) poniższe nierówności

α^*) $$z_i(t) \leqslant \varphi_i(t) \text{ w przedziale } (-\infty, 0>,$$

β^*) $$z'_i(t) \leqslant f_i(t, A^{i1}(t, z), \ldots A^{in}(t, z)) \text{ prawie wszędzie w przedziale } <0, T^\circ>, \text{ dla } i = 1, 2, \ldots n,$$

wówczas w przedziale $<0, T^\circ>$ prawdziwe są nierówności

$$z_i(t) \leqslant x_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Dowód. Niech $\{x^\nu(t)\}$ będzie ciągiem całek układu (1), odpowiadających funkcjom początkowym $\varphi_i^\nu(t) = \varphi_i(t) + 1/\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Na mocy twierdzenia 2, dla każdego ν zachodzi w przedziale $<0, T^\circ>$ nierówność $z_i(t) < x_i^\nu(t)$, $i = 1, 2, \ldots n$. Z dowodu twierdzenia o istnieniu całki górnej (punkt 4) wynika, że ciąg $\{x^\nu(t)\}$ zmierza jednostajnie w przedziale $<0, T^\circ>$ do całki górnej $x^\circ(t)$, układu (1).

Wobec ciągu nierówności $z_i(t) < x_i^\nu(t)$, $i = 1, 2, \ldots n$, spełnionych w przedziale $<0, T^\circ>$ dla $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, otrzymujemy w przypadku granicznym nierówność $z_i(t) \leqslant x_i^\circ(t)$, $i = 1, 2, 3, \ldots n$, co pokrywa się z tezą dowodzonego twierdzenia.

Na zakończenie sformułujemy jeszcze twierdzenie analogiczne do twierdzenia 5, a mianowicie:

Twierdzenie 6. Niech $x(t) = \{x_1(t), \ldots x_n(t)\}$ będzie całką dolną układu (1), odpowiadającą funkcji początkowej $\varphi(t)$ i określoną w przedziale $< 0, T^\circ >$. Niech ponadto w przedziale $(-\infty, T^\circ >$ będzie określona ciągła funkcja wektrowa $z(t) = \{z_1(t), \ldots z_n(t)\}$, w podprzedziale $< 0, T^\circ >$ ciągła absolutnie. Jeśli funkcja ta spełnia wobec układu (1) następujące nierówności

α^{**}) $\qquad z_i(t) \geqslant \varphi_i(t)$ w przedziale $(-\infty, 0>$,

β^{**}) $\quad z'_i(t) \geqslant f_i(t, A^{i1}(t, z), \ldots A^{in}(t, z))$ prawie wszędzie w przedziale $< 0, T^\circ >$, dla $i = 1, 2, \ldots n$,

wówczas w przedziale $< 0, T^\circ >$ prawdziwe są nierówności

$$z_i(t) \geqslant x_i(t), \; i = 1, 2, \ldots n.$$

Dowód twierdzenia 6 przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia 5.

6. Uwagi końcowe

Rozpatrywany w tej pracy układ równań różniczkowych (1) — z uwagi na ogólność funkcjonałów A^{ij} — zawiera w sobie szereg znanych już typów równań różniczkowych. Wymienimy tu najważniejsze.

a) Jeśli $A^{ij}(t, x) = x_i(t)$, to układ (1) przedstawia układ równań różniczkowych zwyczajnych, a zamieszczone w niniejszej pracy twierdzenia pokrywają się bądź z klasycznym twierdzeniem Tonelli'ego, bądź (przynajmniej częściowo) ze znanymi twierdzeniami T. Ważewskiego.

b) Układem równań postaci (1), gdy $A^{ij}(t, x) = x_i(t - h^{ij})$ lub $A^{ij}(t, x) = x_i(t - \alpha^{ij}(t))$ przy znacznie mocniejszych założeniach, zajmowali się J. Franklin [2], G. Sansone [5], A. D. Myszkis [3], K. Zima [7], a ostatnio Driver Rodney D. [1].

c) Przypadek, gdy $A^{ij}(t, x) = \int\limits_0^\infty x_i(t - s)\, dr_{ij}(t, s)$ był szczegółowo rozpracowany w pracy [8]. Praca niniejsza jest jej bezpośrednim uogólnieniem.

d) Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego postaci

$$y'(t) = f(t, A_1(t, y), A_2(t, y))$$

gdzie $A_1(t, y) = \max\limits_{<0,t>} \{y(s)\}, \quad A_2(t, y) = \max\limits_{<0,t>} |y(s)|$,
jest zamieszczone w pracy [4].

PRACE CYTOWANE

[1] R. D. Driver: Exisence theory for a delay-differential system. „Contribs different. equations, Vol. 1" New York 1963 (pp. 317—336).

[2] J. Franklin: On the existence of solution of system of functional differential equations. Proc. Amer. Math. Soc., 1954 (p. 363—369).

[3] В. Р. Петухов: Вопрасы качественного исследования решений уравнений с „Максимумом". Изв. Высш. Учебн. Заведений „Математика". 1964 (3) pp. 116–119.

[4] А. Д. Мышкис: Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Москва – Ленинград 1951.

[5] G. Sansone: Teorema di esistenza di solutioni per una sistema. Ann. Mat. pura ed appl. 1955 (39) (pp. 65—67).

[6] T. Ważewski: Systèmes des équations et des inégalités differéntielles. Ann. Soc. Polon. Math., 23 (1950) (pp. 112—166).

[7] K. Zima: O pewnym układzie równań różniczkowych z opóźnionym argumentem. Zeszyty Naukowe WSP, Katowice 1964 (4), pp. 55—61.

[8] K. Zima: Nierówności różniczkowe z opóźnionym argumentem. Praca doktorska, złożona w Dziekanacie Mat. Fiz. Chem. Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie (grudzień 1962).

SUR UN SYSTÈME DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À L'ARGUMENT FONCTIONNEL

K. ZIMA

RESUMÉ

Dans cette note nous considérons un système des équations différentielles de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} x_i(t) = \varphi_i(t), \text{ pour } t\,\varepsilon\,(-\infty, 0>, \ i = 1, 2, \dots n, \\ x'_i(t) = f_i(t, A^{i1}(t,x), A^{i2}(t,x), \dots A^{in}(t,x)),\ t\,\varepsilon < 0, T),\ 0 < T \leqslant +\infty, \end{cases}$$

en prennant les conditions suivantes:

1° Les fonctions $\varphi_i(t)$ sont continues dans l'intervalle $(-\infty, 0>$.

2° Les fonctions $f_i(t, u_1, u_2, \dots u_n)$ satisfont à conditions bien connues de Carathèodory dans l'ensemble $D\{t\,\varepsilon < 0, T),\ u_i$ — arbitraire$\}$.

3° A^{ij} désignent fonctionalles réeles definies dans le produit $< 0, T) \times \times X$, où X est une famille des fonctions vectoriales — $x(t) = \{x_1(t), \dots x_n(t)\}$ — continues dans l'intervalle $(-\infty, T)$. Nous supposons que les fonctionelles A^{ij} ont les proprietés suivantes.

4° Si $\tau\,\varepsilon < 0, T)$ et $\bar{x}(t) \equiv \bar{\bar{x}}(t)$ pour $t\,\varepsilon\,(-\infty, \tau>$, alors $A^{ij}(\tau, \bar{x}) = A^{ij}(\tau, \bar{\bar{x}})$, $i, j = 1, 2, \dots n$.

5° Si $x(t)\,\varepsilon\,X$, alors $A^{ij}(t, x)$ sont mésurables dans l'intervalle $< 0, T^\circ >$, $T^\circ \angle T$.

6° Si la suite $\{x^{\nu}(t)\}$ des fonctions $x^{\nu}(t) \varepsilon X$ convergent uniformement vers la fonction $\mathring{x}(t)$ dans l'intervalle $(-\infty, T^{\circ}>$, alors

$$\lim A^{ij}(t, x) = A^{ij}(t, \mathring{x}), \; i, j = 1, 2, \ldots n$$

presque partout dans l'intervalle $<0, T^{\circ}>$.

La note ici presente contient les théorèmes suivantes

Théorème I. Si les conditions 1°—6° sont verifiées, il existe alors au moins une solution du problème (1) dans chaque intervalle $<0, T^{\circ}>$, $T^{\circ} < T$.

Théorème II. Supposons que les conditions 1°—6° ont lieu, et en outre

7° Les fonctions f_i satisfont à la condition de la monotonie c'est-à-dire

$$\text{si } \bar{u}_1 \leqslant \bar{\bar{u}}_1, \ldots \bar{u}_n \leqslant \bar{\bar{u}}_n, \text{ alors } f_i(t, \bar{u}_1, \ldots \bar{u}_n) \leqslant f_i(t, \bar{\bar{u}}_1, \ldots \bar{\bar{u}}_n).$$

8° Les fonctionelles $A^{ij}(t, x)$ sont nondécroissantes par rapport à variable $x \varepsilon X$.

Si la fonction $z(t) = \{z_1(t), \ldots z_n(t)\}$ est continue dans l'intervalle $(-\infty, 0>$, absolument continue dans l'intervalle $<0, T^{\circ}>$ $T^{\circ} < T$ et de plus

$$z_i(t) < \varphi_i(t) \text{ pour } t \varepsilon (-\infty, 0>, \; i = 1, 2, \ldots n,$$

$$z'_i(t) \leqslant f_i(t, A^{i1}(t, z), \ldots A^{in}(t, z)), \text{ pour } t \varepsilon <0, T^{\circ}>,$$

alors

$$z_i(t) < x_i(t), \; i = 1, 2, \ldots n, \; t \varepsilon <0, T^{\circ}>,$$

où $x(t)$ est la quelconque solution du problème (1).

Théorème III. Si les suppositions 1°—8° sont verifiées, il existe alors la solution supérieure et la solution inférieure de l'équation (1).

Théorème IV. Si les conditions 1°—8° sont verifiées et la fonction $z(t) = \{z_1(t), \ldots z_n(t)\}$ est continue pour $t \varepsilon (-\infty, 0>$, absolument continue pour $t \varepsilon <0, T^{\circ}>$ et satisfait les inégalités

$$z_i(t) \leqslant \varphi_i(t) \text{ pour } t \varepsilon (-\infty, 0>, \; i = 1, 2, \ldots n,$$

$$z'_i(t) \leqslant f_i(t, A^{i1}(t, z), \ldots A^{in}(t, z)), \text{ pour } t \varepsilon <0, T^{\circ}>,$$

alors

$$z_i(t) \leqslant x_i(t), \; t \varepsilon <0, T^{\circ}>, \; i = 1, 2, \ldots n,$$

où $x(t)$ est la solution supérieure du problème (1).

Oddano do Redakcji 14. IV. 1965 r.

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

JAN BŁAŻ

O PEWNYM RÓWNANIU FUNKCYJNYM TYPU PRZYSZŁOŚCIOWEGO

1.

W pracy zajmuję się istnieniem rozwiązania równania funkcyjnego z wyprzedzającym argumentem, postaci

(1) $$\{\varphi(t)\} = F\{\varphi\}_{h(t)},\quad t \varepsilon \Delta = \langle 0, +\infty),\quad h(t) \geqslant t, ^{*})$$

w którym $\{h(t)\}$ oznacza funkcję ciągłą i niemalejącą w przedziale Δ o wartościach rzeczywistych, niemniejszych od t, symbol $\{\varphi\}_{h(t)}$ oznacza funkcję $\{\varphi(s)\}$ zlokalizowaną do przedziału $\langle 0, h(t)\rangle$ i przyjmującą wartości z pewnej ustalonej przestrzeni Banacha B, zaś symbol $F\{\varphi\}_{h(t)}$ oznacza funkcjonał, który funkcjom $\{\varphi\}_{h(t)}$ przyporządkowuje, jako wartości, elementy przestrzeni B. W równaniu (1) dane są: funkcja $\{h(t)\}$ oraz funkcjonał F; niewiadomą jest funkcja $\{\varphi(t)\}$.

Równanie (1) przy założeniu, że $h(t) \leqslant t$ (typ przeszłościowy) było rozpatrywane przez A. Bieleckiego [1], [2], którego idee wykorzystuję w niniejszej pracy.

2.

Oznaczenia i twierdzenia pomocnicze. Niech U oznacza zbiór funkcji $\{u(t)\}$ ciągłych w przedziale Δ, przyjmujących wartości rzeczywiste, niemalejących w przedziale Δ i niech $\Gamma\{u\}_{h(t)}$ oznacza przekształcenie zbioru U w jego część. Oznaczmy $\{\gamma(t)\} = \Gamma\{1\}_t$, $\{\gamma[h(t)]\} = \Gamma\{1\}_{h(t)}$ i przyjmijmy następujące założenia:

Założenia Z.

1. Jeżeli $\{u_1\} \varepsilon U$, $\{u_2\} \varepsilon U$ oraz $u_1(s) = u_2(s)$ dla $0 \leqslant s \leqslant h(t)$, to $\Gamma\{u_1\}_{h(t)} = \Gamma\{u_2\}_{h(t)}$.

---

*) Symbole $\{\varphi(t)\}$, $\{h(t)\}$, $\{u(t)\}$ oznaczają tu funkcje, podczas gdy oznaczenia $\varphi(t)$, $h(t)$, $u(t)$ zarezerwowane są na oznaczenie wartości odpowiednich funkcji w punkcie t.

2. Jeżeli $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ i $u_1(s) \leqslant u_2(s)$ dla $0 \leqslant s \leqslant h(t_2)$, to $\Gamma\{u_1\}_{h(0)} \leqslant \leqslant \Gamma\{u_2\}_{h(0)}$ i $\Gamma\{u_1\}_{h(t_2)} - \Gamma\{u_1\}_{h(t_1)} \leqslant \Gamma\{u_2\}_{h(t_2)} - \Gamma\{u_2\}_{h(t_1)}$.
3. Jeżeli $\{u_1\} \varepsilon U$, $\{u_2\} \varepsilon U$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ oraz $u_1(s) = \mu u_2(s)$ dla $0 \leqslant s \leqslant \leqslant h(t_2)$, $0 < \mu = \text{const}$, to $\Gamma\{u_1\}_{h(0)} \leqslant \mu \Gamma\{u_2\}_{h(0)}$ oraz $\Gamma\{u_1\}_{h(t_2)} - - \Gamma\{u_1\}_{h(t_1)} \leqslant \mu [\Gamma\{u_2\}_{h(t_2)} - \Gamma\{u_2\}_{h(t_1)}]$.
4. Istnieje liczba $\lambda > 0$ oraz funkcja $\{\varsigma(t)\} \varepsilon U$, taka, że $\varsigma(0) > 0$ oraz $\varsigma(h(t)) \leqslant \lambda \varsigma(t)$ dla $t \varepsilon \Delta$.
5. Istnieje liczba $\Lambda > 0$ taka, że $\gamma(h(t)) - \gamma(t) \leqq \Lambda$, $t \varepsilon \Delta$.
6. Jeżeli $0 \leqq t_1 \leqq t_2$, to $\gamma(h(t_2)) - \gamma(h(t_1)) \leqq \gamma(t_2) - \gamma(t_1)$.
7. Istnieje liczba $k > 0$, spełniająca nierówności $k > 1 + k \lambda \Lambda e^{k\Lambda}$ i $k > \lambda e^{k\Lambda}$.

W dalszym ciągu będziemy korzystać z następujących lematów A. Bieleckiego ([1] str. 106), podanych dla funkcjonału Γ typu przeszłościowego, które przy założeniach 1, 2 i 3 Z zachowują swą moc dla funkcjonału typu przyszłościowego:

Lemat 1. Jeżeli spełnione są założenia 1, 2, 3 Z, $t \varepsilon \Delta$, $\{u_1\} \varepsilon U$, $\{u_2\} \varepsilon U$ oraz $u_1(s) \leqq u_2(s)$ dla $0 \leqq s \leqq h(t)$, to $\Gamma\{u_1\}_{h(t)} \leqq \Gamma\{u_2\}_{h(t)}$.

Lemat 2. Jeżeli spełnione są założenia 1, 2, 3 Z, $0 \leqq \mu = \text{const}$, $\{u\} \varepsilon U$, to $\Gamma\{\mu u\}_{h(t)} \leqq \mu \Gamma\{u\}_{h(t)}$.

Lemat 3. Jeżeli $0 \leqslant B - A < C$ oraz $k \geqslant [C - (B - A)]^{-1}$, to

$$C e^{kA} \leqslant [C - (B - A)] e^{kB}.$$

Wykażemy teraz pewną nierówność funkcyjną, grającą zasadniczą rolę w dowodzie twierdzenia egzystencjalnego dla równania (1). Zbudujmy w tym celu pomocniczą funkcję $w(t)$, określoną związkiem

(2) $$w(t) = \varsigma(t) k e^{k\gamma(t)}, \quad t \varepsilon \Delta.$$

Łatwo widać, że $\{w(t)\} \varepsilon U$. Wspomnianą wyżej nierówność funkcyjną sformułujemy w postaci następującego lematu:

Lemat 4. Jeżeli są spełnione założenia Z, to istnieje liczba $q \varepsilon (0, 1)$, taka, że dla $t \varepsilon \Delta$ zachodzi nierówność

(3) $$\varsigma(t) + \Gamma\{w(s)\}_{h(t)} \leqslant q w(t).$$

Obierzemy dla dowodu liczbę $q \varepsilon (0, 1)$ tak, aby zachodziły nierówności

$$q k > 1 + k \lambda \Lambda e^{k\Lambda} \text{ i } q k > \lambda e^{k\Lambda}.$$

Jest to możliwe wobec założenia 7 Z.

Na podstawie lematów 1, 2 oraz założeń 4 i 5, otrzymamy

$$\varsigma(0)+\Gamma\{w\}_{h(0)}\leqslant\varsigma\,0)+\Gamma\{w(h(0))\}_{h(0)}\leqslant\varsigma(0)+w(h(0))\,\Gamma\{1\}_{h(0)}=$$
$$=\varsigma(0)+w(h(0))\,\gamma(h(0))=\varsigma(0)+\varsigma(h(0))\,k\,e^{k\gamma(h(0))}\,\gamma(h(0))\leqslant\varsigma(0)+$$
$$+\lambda\,\varsigma(0)\,e^{k\Lambda}\,k\,e^{k\gamma(0)}\,[\gamma(0)+\Lambda]=\varsigma(0)\,(1+k\lambda\Lambda\,e^{k\Lambda})<q\,\varsigma(0)\,k=$$
$$=q\,\varsigma(0)\,k\,e^{k\gamma(0)}=q\,w(0).$$

Oznacza to, że nierówność

$$\varsigma(t)+\Gamma\{w\}_{h(t)}<q\,w(t) \tag{4}$$

zachodzi dla $t=0$. Z ciągłości występujących w niej funkcji wynika, że nierówność (4) jest prawdziwa w dostatecznie małym przedziale $<0,\delta>$, $\delta>0$.

Oznaczmy przez τ kres dolny tych wartości $t\,\varepsilon\,\Delta$, dla których nierówność (4) nie jest prawdziwa i obierzmy liczbę ξ dostatecznie bliską τ, $\xi\,\varepsilon\,(0,\tau)$ tak, aby było

$$q>\lambda\,e^{k\Lambda}\,[\gamma(\tau)-\gamma(\xi)]\quad\text{oraz}\quad k>\frac{\lambda\,e^{k\Lambda}}{q-\lambda\,e^{k\Lambda}\,[\gamma(\tau)-\gamma(\xi)]} \tag{5}$$

co jest możliwe wobec ciągłości funkcji $\gamma(t)$ w punkcie τ. Skoro nierówność (4) jest spełniona dla $t=\xi$, więc na mocy tejże nierówności, założeń 2, 3, 4, 5 i 6 Z będzie

$$\zeta(\tau)+\Gamma\{w\}_{h(\tau)}=\zeta(\xi)+\Gamma\{w\}_{h(\xi)}+\zeta(\tau)-\zeta(\xi)+\Gamma\{w\}_{h(\tau)}-\Gamma\{w\}_{h(\xi)}<$$
$$<qw(\xi)+\zeta(\tau)-\zeta(\xi)+w(h(\tau))\,[\Gamma\{1\}_{h(\tau)}-\Gamma\{1\}_{h(\xi)}]=$$
$$=qw(\xi)+\zeta(\tau)-\zeta(\xi)+w(h(\tau))\,[\gamma(h(\tau))-\gamma(h(\xi))]\leqslant$$
$$\leqslant q\,\zeta(\xi)\,ke^{k\gamma(\xi)}+\zeta(\tau)-\zeta(\xi)+\zeta(h(\tau))\,ke^{k\gamma(h(\tau))}\,[\gamma(\tau)-\gamma(\xi)]\leqslant$$
$$\leqslant q\,\zeta(\xi)\,ke^{k\gamma(\xi)}+\zeta(\tau)-\zeta(\xi)+\lambda\,\zeta(\tau)\,e^{k\Lambda}\,ke^{k\gamma(\tau)}\,[\gamma(\tau)-\gamma(\xi)].$$

Chcemy pokazać, że nierówność (4) jest spełniona dla $t=\tau$; w tym celu wystarczy wykazać prawdziwość nierówności

$$q\,\zeta(\xi)\,ke^{k\gamma(\xi)}+\zeta(\tau)-\zeta(\xi)+\lambda\,e^{k\Lambda}\,\zeta(\tau)\,ke^{k\gamma(\tau)}[\gamma(\tau)-\gamma(\xi)]\leqslant q\,\zeta(\tau)\,ke^{k\gamma(\tau)},$$

czyli nierówności

$$\zeta(\tau)\,\{\lambda\,e^{k\Lambda}\,ke^{k\gamma(\tau)}\,[C-(\gamma(\tau)-\gamma(\xi))]-1\}\geqslant\zeta(\xi)\,[\lambda\,e^{k\Lambda}\,kCe^{k\gamma(\xi)}-1],$$

gdzie $C=q/\lambda\,e^{k\Lambda}$.

Ale z lematu 3 wynika, że

$$e^{k\gamma(\tau)}\,[C-(\gamma(\tau)-\gamma(\xi))]\geqslant Ce^{k\gamma(\xi)},$$

czyli

$$\zeta(\tau)\,\{\lambda\,e^{k\Lambda}\,ke^{k\gamma(\tau)}\,[C-(\gamma(\tau)-\gamma(\xi))]-1\}>\zeta(\tau)\,\{\lambda\,e^{k\Lambda}\,kCe^{k\gamma(\xi)}-1\}\geqslant$$
$$\geqslant\zeta(\xi)\,\{\lambda\,e^{k\Lambda}\,kCe^{k\gamma(\xi)}-1\},$$

gdyż

$$\zeta(\xi)\leqslant\zeta(\tau)\quad\text{oraz}\quad\lambda\,e^{k\Lambda}\,kCe^{k\gamma(\xi)}-1=qke^{k\gamma(\xi)}-1>0.$$

Widzimy więc, że nierówność (4) jest prawdziwa dla $t = \tau$; wnioskujemy stąd, iż zachodzi ona w przedziale $< \tau, \tau + \delta >$, gdzie δ jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Przeczy to definicji liczby τ.

3.

Twierdzenie o istnieniu rozwiązania równania (1). Oznaczmy przez Φ zbiór funkcji $\{\varphi(t)\}$ ciągłych dla $t \varepsilon \Delta$ i przyjmujących wartości z przestrzeni Banacha B. Przez $\|x\|$ oznaczać będziemy normę elementu $x \varepsilon B$, zaś przez $\|\varphi(t)\|^*$ oznaczać będziemy $\sup\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|\varphi(\tau)\|$, $t \varepsilon \Delta$, $\{\varphi(t)\} \varepsilon \Phi$. Przez Φ_0 rozumieć będziemy podzbiór zbioru Φ, określony nierównością

$$\|\varphi(t)\| \leqslant w(t), \quad \{\varphi(t)\} \varepsilon \Phi, \quad t \varepsilon \Delta, \tag{6}$$

przy czym funkcja $w(t)$ dana jest określeniem (2).

O funkcjonale F, występującym w równaniu (1) przyjmijmy następujące założenia:

Z a ł o ż e n i a F.

1. Jeśli $\{\varphi(t)\} \varepsilon \Phi$ i $\{\bar{\varphi}(t)\} = F\{\varphi\}_{h(t)}$, to $\{\bar{\varphi}(t)\} \varepsilon \Phi$.
2. Istnieje funkcjonał Γ typu przyszłościowego, podlegający określeniom punktu 2 i spełniający założenia Z i taki, że jeśli $\{\varphi(t)\} \varepsilon \Phi$ oraz $\{\psi(t)\} \varepsilon \Phi$, to zachodzi nierówność $\|F\{\varphi\}_{h(t)} - F\{\psi\}_{h(t)}\| \leqslant$ $\leqslant \Gamma\{\|\varphi - \psi\|^*\}_{h(t)}$, $t \varepsilon \Delta$.
3. Istnieje funkcja $\zeta(t)$, spełniająca założenia 4 Z, taka, że

$$\|F\{\Theta\}_{h(t)}\| \leqslant \zeta(t), \quad t \varepsilon \Delta,$$

przy czym $\{\Theta\}$ oznacza element zerowy zbioru Φ_0.

T w i e r d z e n i e. Jeżeli spełnione są założenia F, to równanie (1) posiada w klasie funkcji Φ_0 dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód. Niech $\{\varphi(t)\} \varepsilon \Phi_0$ i niech

$$\{\bar{\varphi}(t)\} = F\{\varphi\}_{h(t)}. \tag{7}$$

Wtedy, wobec założeń F oraz lematów 1 i 4, mamy

$$\|\bar{\varphi}(t)\| \leqslant \|F\{\varphi\}_{h(t)} - F\{\Theta\}_{h(t)}\| + \|F\{\Theta\}_{h(t)}\| \leqslant \zeta(t) + \Gamma\{\|\varphi\|^*\}_{h(t)} \leqslant$$
$$\leqslant \zeta(t) + \Gamma\{w\}_{h(t)} \leqslant qw(t).$$

Oznacza to, że transformacja F, określona równością (7) spełnia warunek $F(\Phi_0) \subset \Phi_0$.

Niech teraz $\{\varphi(t)\} \varepsilon \Phi_0$ i $\{\psi(t)\} \varepsilon \Phi_0$; wprowadźmy w zbiorze Φ_0 metrykę, przyjmując

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sup_{t \geqslant 0} \frac{\|\varphi(t) - \psi(t)\|^*}{w(t)} \tag{8}$$

W ten sposób, jak łatwo sprawdzić, zbiór Φ_0 staje się przestrzenią metryczną, zupełną.

Dla wykazania, że transformacja (7) jest zbliżająca przyjmijmy, że

$$\{\bar{\varphi}(t)\} = F\{\varphi\}_{h(t)} \quad \text{oraz} \quad \{\bar{\psi}(t)\} = F\{\psi\}_{h(t)}.$$

Zgodnie z założeniem 2 F, lematami 1 i 2 oraz nierównością (3) otrzymujemy oszacowania

$$\|\bar{\varphi}(t) - \bar{\psi}(t)\| = \|F\{\varphi\}_{h(t)} - F\{\psi\}_{h(t)}\| \leqslant \Gamma\{\|\varphi - \psi\|^*\}_{h(t)} \leqslant$$
$$\leqslant \Gamma\{\varrho(\varphi, \psi) w\}_{h(t)} \leqslant \varrho(\varphi, \psi) \Gamma\{w\}_{h(t)} \leqslant \varrho(\varphi, \psi) \; q w(t).$$

Stąd i z określenia (8) wynika, że

$$\varrho(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \leqslant q \varrho(\varphi, \psi), \quad q \varepsilon (0,1).$$

Sformułowane wyżej twierdzenie wynika już teraz wprost z twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

4.

Przykład zastosowania twierdzenia egzystencjalnego. Rozpatrzmy dla przykładu równanie różniczkowo-całkowe z wyprzedzającym argumentem

$$\psi'(t) = \int_0^{\sigma(t)} f(t, \psi(t+s)) \, d_s r(t, s), \quad t \varepsilon \Delta, \tag{9}$$

w którym symbol całkowy oznacza całkę Stieltjesa względem zmiennej s, funkcja $f(t, x)$ jest ciągła w obszarze $D\{t \geqslant 0, -\infty < x < +\infty\}$, a jądro $r(t, s)$ jest określone dla $t \varepsilon \Delta$, $s \geqslant 0$ i ma wariację ograniczoną

$$\bigvee_{s=0}^{\sigma(t)} r(t, s) \leqslant V, \quad t \varepsilon \Delta.$$

Funkcja $\sigma(t)$ jest ciągła i nieujemna dla $t \varepsilon \Delta$ i taka że funkcja $h(t) = t + \sigma(t)$ jest niemalejąca w przedziale Δ.

Szukać będziemy rozwiązania $\psi(t)$ równania (9) klasy C^1 w przedziale Δ, spełniającego dany punktowy warunek początkowy $\psi(0) = \eta$.

Połóżmy $\psi'(t) = \varphi(t)$, $t \varepsilon \Delta$; otrzymamy stąd

$$\psi(t) = \eta + \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau, \quad \psi(t+s) = \eta + \int_0^{t+s} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Równanie (9) możemy więc zapisać w postaci równania funkcyjnego (1), przyjmując

$$F\{\varphi\}_{h(t)} = \int_0^{\sigma(t)} f\left(t, \eta + \int_0^{t+s} \varphi(\tau)\, d(\tau)\right) d_s r(t, s). \tag{10}$$

Załóżmy, że funkcja $f(t, x)$ spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej x:

$$|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})| \leqslant L(t)|\bar{x} - \bar{\bar{x}}|$$

gdzie $L(t)$ jest funkcją ciągłą w przedziale Δ.
Połóżmy

$$\Gamma\{u\}_{h(t)} = V L(t) \int_0^{h(t)} u(\tau)\, d\tau; \tag{11}$$

wtedy

$$\gamma(t) = V L(t)\, t, \quad \gamma(h(t)) = V L(t)\; h(t).$$

Łatwo zauważyć, że funkcjonał Γ określony wzorem (11) spełnia założenia 1, 2, 3 Z.

Warunek $\gamma(h(t)) - \gamma(t) \leqslant \Lambda$, występujący w założeniu 5 Z przyjmie tutaj postać $V L(t)\,[h(t) - t] \leqslant \Lambda$, czyli — wobec związku $h(t) = t + \sigma(t)$ — postać

$$L(t)\, \sigma(t) \leqslant \Lambda / V. \tag{12}$$

Założenie 6 Z będzie spełnione, jeśli przyjmiemy, iż funkcja $\nu(t) = L(t)\, \sigma(t)$ jest nierosnąca dla $t \varepsilon \Delta$. Zakładając jeszcze, że

$$|f(t, \eta)| \leqslant M, \text{ dla } t \varepsilon \Delta, \tag{13}$$

i przyjmując, że funkcja $\zeta(t)$ jest stała $\zeta(t) = VM$, stwierdzimy łatwo, że spełnione są założenia 4 Z i 3 F. Wtedy funkcja $w(t)$, występująca w określeniu (2) przyjmie postać

$$w(t) = K e^{kVL(t)\, t}$$

gdzie $K = MVk$.

Przyjmijmy, że istnieją stałe $\Lambda > 0$ i $k > 0$ $(\lambda = 1)$, spełniające nierówności, sformułowane w obrębie założeń 5 i 7 Z i oznaczmy przez Φ_0 zbiór funkcji $\{\varphi(t)\}$ ciągłych w przedziale Δ i spełniających warunek (6), tzn. w naszym przypadku nierówność

$$|\varphi(t)| \leqslant K e^{kVL(t)\,t}$$

Pokażemy, że spełnione jest założenie 2 F.

Istotnie, jeśli $\{\varphi(t)\} \varepsilon \Phi_0$ i $\{\psi(t)\} \varepsilon \Phi_0$, to

$$|F\{\varphi\}_{h(t)} - F\{\psi\}_{h(t)}| = |\int_0^{\sigma(t)} [f(t, \eta + \int_0^{t+s} \varphi(\tau)\,d\tau) - f(t, \eta + \int_0^{t+s} \psi(\tau)\,d\tau)]\,d\,r(t,s)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant \sigma(t)} |f(t, \eta + \int_0^{t+s} \varphi(\tau)\,d\tau) - f(t, \eta + \int_0^{t+s} \psi(\tau)\,d\tau)| \bigvee_{s=0}^{\sigma(t)} r(t,s) \leqslant$$

$$\leqslant V \max_{0 \leqslant s \leqslant \sigma(t)} L(t) | \int_0^{t+s} \varphi(\tau)\,d\tau - \int_0^{t+s} \psi(\tau)\,d\tau | \leqslant$$

$$\leqslant VL(t) \int_0^{t+\sigma(t)} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|\,d\tau = VL(t) \int_0^{h(t)} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant VL(t) \int_0^{h(t)} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|^*\,d\tau = \Gamma\{|\varphi - \psi|^*\}_{h(t)}.$$

Tym samym zakończyliśmy sprawdzanie założeń twierdzenia egzystencjalnego dla równania (1). Z twierdzenia tego wynika więc, że przy założeniach przyjętych w obrębie punktu 4 pracy, równanie różniczkowo-całkowe (9) posiada dokładnie jedno rozwiązanie w klasie funkcji Φ_0.

PRACE CYTOWANE

[1] A. Bielecki: *Równania różniczkowe zwyczajne i pewne ich uogólnienia*. Biuro Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych PAN, Warszawa, 1961.

[2] A. Bielecki: *Sur la méthode des approximations successives*. Folia Soc. Sci. Lublinensis, 2 (1962), p 59—61.

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE À L'ARGUMENT AVANCÉ

RÉSUMÉ

Dans ce travail j'étudie une équation fonctionnelle à argument avancé de la forme

(1) $$\{\varphi(t)\} = F\{\varphi\}_{h(t)}, \quad t \varepsilon \Delta = <0, +\infty), \quad h(t) \geqslant t,$$

où $\{h(t)\}$ désigne une fonction réelle, continue et non decroissante pour $t \geqslant 0$, la fonction $\{\varphi(t)\}$ appartient à l'ensemble Φ des fonctions definies

et continues dans l'intervalle $< 0, + \infty)$ à valuers dans un espace B de Banach. Le symbole $\{\varphi\}_{h(t)}$ désigne la fonction $\{\varphi(s)\}$ rétrécie pour $0 \leqslant s \leqslant h(t)$; $F\{\varphi\}_{h(t)}$ est une transformation de Φ dans Φ.

L'ensemble de toutes les fonctions réelles $\{u(t)\}$, continues, non negatives et non decroissantes dans l'intervalle $< 0, + \infty)$, sera désigne par U et une transformation de U dans U — par $\Gamma\{u\}_{h(t)}$; de plus $\{\gamma(h(t))\} = \Gamma\{1\}_{h(t)}$, $\{\gamma(t)\} = \Gamma\{1\}_t$. J'admets pour l'équation (1) les hypothèses 1—7 p. 68 et 1—3 p. 70.

Moyennant le thèoréme du point fixe de Banach je dèmontre, que l'equation (1) admet éxactement une solution dans la classe des fonctions $\{\varphi(t)\} \varepsilon \Phi$, qui satisfont à la condition

$$\|\varphi(t)\| \leqslant \zeta(t) k e^{k\gamma(t)}, \quad t \geqslant 0,$$

où $\{\zeta(t)\}$ désigne une fonction de l'ensemble U (v. l'hypothèse 4, p. 68 et 3, p. 70), $\|x\|$ — la norme de element $x \varepsilon B$ et $0 < k = \text{const}$.

Oddano do Redakcji 20. IV. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

K. ZIMA

O JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZANIA PROBLEMU CAUCHY'EGO DLA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH Z PRZESUNIĘTYM ARGUMENTEM

Niniejsza praca zawiera uogólnienie znanego z teorii równań różniczkowych zwyczajnych kryterium E. Kamkego o jednoznaczności, na przypadek równań różniczkowych z przesuniętym argumentem. Oprócz twierdzenia o jednoznaczności praca zawiera pewne twierdzenia o charakterze porównawczym. Podane tu wyniki są uogólnieniem m. in. rezultatów prac [1], [2].

1. Równanie różniczkowe z opóźnieniem w przestrzeni Banacha

Niech E oznacza przestrzeń Banacha, zaś X niech będzie zbiorem funkcji $x(t)$, określonych w przedziale $<p, T)$, $p \leqslant 0 < T$, przyjmujących wartości z przestrzeni E.

Będziemy stale zakładać, że funkcje należące do zbioru X są ciągłe, a w podprzedziale $<0, T)$ — różniczkowalne.

Niech R będzie iloczynem kartezjańskim przedziału $<p, T)$ i zbioru X, tj. $R = <p, T) \times X$. Załóżmy, że na zbiorze R jest określona operacja A, która ma następujące własności

1*. Jeśli punkt (t, x) należy do zbioru R, to $A(t, x) \varepsilon E$.

2*. Jeśli $\bar{x}(t), \tilde{x}(t) \varepsilon X$ i dla $\tau \varepsilon <p, T)$ $\bar{x}(t) \equiv \tilde{x}(t)$ w przedziale $<p, \tau>$, to $A(\tau, \bar{x}) = A(\tau, \tilde{x})$.

Operację A posiadającą własności 1* i 2* będziemy nazywali operacją typu Volterry.

Niech $\beta(t)$ będzie funkcją rzeczywistą, określoną w przedziale $<0, T)$ i niech $\inf.\{\beta(t)\} \geqslant p$.

Będziemy rozważać następujący problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \text{ dla } t \varepsilon <p, 0> \\ x'(t) = A(\beta(t), x) \text{ dla } t \varepsilon <0, T). \end{cases} \tag{1}$$

Rozwiązaniem problemu (1) w przedziale $<0, T)$ nazywamy taką funkcję $x(t)$ należącą do zbioru X, która dla $t \varepsilon < p, 0 >$ jest identyczna z zadaną funkcją początkową $\varphi(t)$, zaś w przedziale $<0, T)$ spełnia drugi warunek problemu (1).

2. Funkcjonały modularne

Celem sformułowania kryterium jednoznaczności dla problemu (1) wprowadzimy pewną klasę funkcjonałów rzeczywistych i nieujemnych, określonych na zbiorze $R^* = <0, T) \times X \times <p, 0>$. Funkcjonały te, z uwagi na niektóre ich własności, będziemy krótko nazywać funkcjonałami modularnymi, a dla ich oznaczenia będziemy używali litery Γ.

Jeśli punkt (t, x, τ) należy do zbioru R^*, to wartość funkcjonału Γ w tym punkcie będziemy oznaczać symbolem $\Gamma(t, x, \tau)$.

Niech $\mathring{x}(t)$ będzie dowolnie ustaloną funkcją, należącą do zbioru X. Będziemy zakładać, że przy ustalonym argumencie $\mathring{x}$, funkcjonał Γ ma następujące własności względem zmiennej t i parametru τ:

1°. Przy ustalonej wartości τ, $\Gamma(t, \mathring{x}, \tau)$ jest funkcją ciągłą i niemalejącą zmiennej t.

2°. Dla każdego $t \varepsilon (0, T)$ i $\tau^* \varepsilon < p, 0)$ zachodzi nierówność

$$\Gamma(t, \mathring{x}, \tau^*) \leqslant \Gamma(0, \mathring{x}, \tau^*) + \Gamma(t, \mathring{x}, 0) - \| \mathring{x}(0) \|.$$

3°. Jeśli $\mathring{x}(t) \equiv 0$ w przedziale $<\tau, 0>$, to dla $t \varepsilon <0, T)$ zachodzi równość $\Gamma(t, \mathring{x}, \tau) \equiv \Gamma(t, \mathring{x}, 0)$, a w przypadku granicznym, gdy $\tau = 0$, $\Gamma(0, \mathring{x}, 0) = \| \mathring{x}(0) \|$.

4°. Jeśli $t^* > 0$ i $\Gamma(t^*, \mathring{x}, 0) = 0$, to $\mathring{x}(t) \equiv 0$ w przedziale $<0, t^*>$.

5°. Jeśli $t \varepsilon (0, T)$ i $\mathring{x}'$ oznacza pochodną funkcji $\mathring{x}$, to

$$\underline{D}_- \Gamma(t, \mathring{x}, 0) \leqslant \Gamma(t, \mathring{x}', 0).$$

6°. Jeśli $x(0) = 0$, to $\bar{D}_+ \Gamma(t, \mathring{x}, 0)_{t=0} \leqslant \| \mathring{x}'_+(0) \|$.

Podamy obecnie kilka przykładów funkcjonałów, spełniających warunki 1°—6°.

P r z y k ł a d 1. Jeśli funkcja $x(t)$, przyjmująca wartości z pewnej przestrzeni rzeczywistej Hilberta, jest ciągła w przedziale $<p, T)$, a w podprzedziale $<0, T)$ posiada ciągłą pochodną i $x(0) = 0$, to funkcjonał Γ określony wzorem

$$\Gamma(t, x, \tau) = \left[\int_{\tau}^{t} \| x(s) \|^2 ds \right]^{1/2} \tag{α}$$

spełnia warunki 1°—6° ([4]).

Przykład 2. Jeśli funkcja $x(t)$, przyjmująca wartości z przestrzeni Banacha, jest ciągła w przedziale $< p, T)$, ma ciągłą pochodną w podprzedziale $< 0, T)$ oraz $x(0) = 0$, to funkcjonał Γ określony wzorem

$$\Gamma(t, x, \tau) = \int_{\tau}^{t} \| x(s) \| \, ds \tag{β}$$

jest funkcjonałem modularnym ([4]).

Przykład 3. Jeśli funkcja $x(t)$, przyjmująca wartości z przestrzeni Banacha jest ciągła w przedziale $< p, T)$ a w podprzedziale $< 0, T)$ ma ciągłą pochodną, to funkcjonał Γ określony wzorem

$$\Gamma(t, x, \tau) = \sup_{<\tau, t>} \| x(s) \| \tag{γ}$$

jest modularny.

Dość proste dowody własności 1°—6° w odniesieniu do funkcjonałów podanych w przykładach 1—3 pomijam.

3. Jednoznaczność rozwiązania problemu (1)

Przy dowodzie kryterium Kamkego o jednoznaczności dla równania różniczkowego z opóźnieniem, będziemy powoływać się na pewne twierdzenie z zakresu nierówności różniczkowych, które niżej przytoczymy, a które dla wygody nazwiemy pierwszym twierdzeniem porównawczym ([3]).

Pierwsze twierdzenie porównawcze. Niech $\sigma(t, u)$ będzie funkcją nieujemną i ciągłą w zbiorze $D\{0 < t < T,\ u \geqslant 0\}$ i mającą tę własność, że gdy utworzymy równanie różniczkowe

$$u' = \sigma(t, u) \tag{2}$$

to jedyną całką tego równania spełniającą warunki 1) $\lim\limits_{t \to 0+} u(t) = 0$, 2) $u'_+(0) = 0$, jest funkcja tożsamościowo równa zeru w przedziale $< 0, T)$.

Równanie (2) ma następującą, ważną własność, zawartą w tezie pierwszego twierdzenia porównawczego:

Jeśli ciągła i nieujemna w przedziale $< 0, T)$ funkcja $z(t)$ znika w punkcie 0 wraz ze swą prawostronną pochodną, a dla $t \in (0, T)$ czyni zadość nierówności

$$\underline{D}_- z(t) \leqslant \sigma(t, z(t)), \tag{3}$$

to $z(t) \equiv 0$ w przedziale $< 0, T)$.

Twierdzenie o jednoznaczności. Niech $\bar{x}(t)$, $\tilde{x}(t)$ będą dwoma funkcjami rodziny X. Niech następnie $\bar{\xi}(t) = A(\beta(t), \bar{x})$, $\tilde{\xi}(t) = A(\beta(t), \tilde{x})$ oraz niech $\beta(0) \leqslant 0$. Jeśli operacja A ma tę własność, że dla dowolnej pary funkcji $\bar{x}(t)$ i $\tilde{x}(t) \varepsilon X$ i ich obrazów $\bar{\xi}(t)$ i $\tilde{\xi}(t)$ zachodzi nierówność

$$(4) \qquad \Gamma(t, \{\bar{\xi} - \tilde{\xi}\}, 0) \leqslant \sigma(t, \Gamma(t, \{\bar{x} - \tilde{x}\}, p)),$$

to początkowej funkcji $\varphi(t)$ określonej i ciągłej w przedziale $< p, 0 >$, odpowiada co najwyżej jedno rozwiązanie problemu (1).

Dowód. Niech $\bar{x}(t)$ i $\tilde{x}(t)$ będą dwoma rozwiązaniami problemu (1). Utwórzmy funkcję $z(t) = \Gamma(t, \{\bar{x} - \tilde{x}\}, p)$. Ponieważ dla $t \varepsilon < p, 0 >$ $\bar{x}(t) - \tilde{x}(t) = \varphi(t) - \varphi(t) \equiv 0$, więc $z(0) = \Gamma(0, \{\bar{x} - \tilde{x}\}, p) = 0$.

Pokażemy teraz, że funkcja $z(t)$ spełnia nierówność (3). Istotnie, jeśli funkcje $\bar{x}(t)$ i $\tilde{x}(t)$ są rozwiązaniami problemu (1), to $\bar{\xi}(t) = A(\beta(t), \bar{x}) = \bar{x}'(t)$, $\tilde{\xi}(t) = A(\beta(t), \tilde{x}) = \tilde{x}'(t)$ i nierówność (4) przyjmie postać

$$(5) \qquad \Gamma(t, \{\bar{x}' - \tilde{x}'\}, 0) \leqslant \sigma(t, \Gamma(t, \{\bar{x} - \tilde{x}\}, p)),$$

a stąd, poprzez warunki 3° i 5°, otrzymujemy

$$(6) \qquad \underline{D}_{-}\Gamma(t, \{\bar{x} - \tilde{x}\}, p) \leqslant \sigma(t, \Gamma(t, \{\bar{x} - \tilde{x}\}, p)).$$

Jest to więc nierówność (3) dla funkcji $z(t) = \Gamma(t, \{\bar{x} - \tilde{x}\}, p)$.

Pokażemy jeszcze, że funkcja $z(t)$ posiada w punkcie 0 prawostronną pochodną równą zeru. Istotnie, z założenia, że $\beta(0) \leqslant 0$ oraz na mocy 2* (str. 1) wynikają równości

$$(7) \qquad A(\beta(0), \bar{x}) = A(\beta(0), \varphi), \quad A(\beta(0)\, \tilde{x}) = A(\beta(0), \varphi),$$

z których, wobec równania (1) wynika równość $\bar{x}'_{+}(0) = \tilde{x}'_{+}(0)$.

Na mocy warunku 6° otrzymujemy

$$(8) \qquad \bar{D}_{+} z(t)_{t=0} \leqslant \| \bar{x}'_{+}(0) - \tilde{x}'_{+}(0) \| = 0.$$

Funkcja $z(t)$ jest jednak, wobec założenia 1°, niemalejąca. Stąd $\underline{D}_{+} z(t) \geqslant 0$.

Uwzględniając jeszcze oczywistą nierówność $\underline{D}_{+} z(t) \leqslant \bar{D}_{+} z(t)$, otrzymujemy wniosek, że $z'_{+}(0)$. Zatem funkcja $z(t)$ spełnia wszystkie założenia pierwszego twierdzenia porównawczego, a stąd wynika, że $z(t) \equiv 0$ w przedziale $< 0, T)$.

Dowodzi to jednoznaczności rozwiązania problemu (1).

4. Szacowanie całki równania (1)

Twierdzenie o oszacowaniu całki równania (1), które niżej sformułujemy, będzie się wiązać z pewnym twierdzeniem z zakresu nierówności różniczkowych. Twierdzenie to krótko nazwiemy drugim twierdzeniem porównawczym ([3]).

Drugie twierdzenie porównawcze. Niech dane będzie równanie różniczkowe

$$u' = \sigma^*(t, u), \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

O funkcji $\sigma^*(t, u)$ zakładamy, że jest ciągła i nieujemna dla $t \geqslant 0, u \geqslant 0$ i niemalejąca względem zmiennej u.

Równanie (9) ma tę własność, że jeśli ciągła i nieujemna dla $t \geqslant 0$ funkcja $z(t)$ spełnia nierówności

$$\underline{D}_- z(t) \leqslant \sigma^*(t, z(t)) \text{ oraz } z(0) \leqslant \delta, \tag{10}$$

zaś $u(t, \delta)$ jest całką górną w prawo równania (9) z warunkiem początkowym $u(0, \delta) = \delta$, to dla $t \geqslant 0$ zachodzi nierówność

$$z(t) \leqslant u(t, \delta). \tag{11}$$

Twierdzenie o oszacowaniu. Niech funkcja $x(t)$ należy do zbioru X (str. 1) i niech $\xi(t) = A(\beta(t), x)$. Jeśli funkcjonał A spełnia nierówność:

$$\Gamma(t, \xi, 0) \leqslant \sigma^*(t, \Gamma(t, x, p)), \tag{12}$$

to dla funkcji $\bar{x}(t)$, będącej całką równania (1), prawdziwe jest oszacowanie

$$\Gamma(t, \bar{x}, p) \leqslant v(t), \tag{13}$$

gdzie $v(t)$ jest całką górną w prawo równania (9), spełniającą warunek początkowy $v(0) = \Gamma(0, \varphi, p)$.

Dowód. Z nierówności (12) oraz warunku 5° wynika nierówność

$$\underline{D}_- \Gamma(t, \bar{x}, 0) \leqslant \sigma^*(t, \Gamma(t, \bar{x}, p)). \tag{14}$$

Następnie, wobec monotoniczności funkcji $\sigma^*(t, u)$ względem zmiennej u, oraz w oparciu o nierówność (14) i warunek 2°, otrzymujemy

$$\underline{D}_- \Gamma(t, \bar{x}, 0) \leqslant \sigma^*(t, \{\Gamma(t, \bar{x}, 0) + \Gamma(0, \varphi, p) - \| \bar{x}(0) \| \}). \tag{15}$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$Y(t) = \Gamma(t, \bar{x}, 0) + \Gamma(0, \varphi, p) - \| \bar{x}(0) \| \text{ oraz } \Gamma(0, \varphi, p) = \delta.$$

Z nierówności (15) wynika dla funkcji $Y(t)$ nierówność następująca

$$\underline{D}_{-}Y(t) \leqslant \sigma^{*}(t, Y(t)). \tag{16}$$

Zauważmy jeszcze, że $Y(0) = \Gamma(0, \bar{x}, 0) + \delta - \| \bar{x}(0) \| = \delta$. Na mocy drugiego twierdzenia porównawczego, dla funkcji $Y(t)$ otrzymujemy oszacowanie

$$Y(t) \leqslant v(t), \tag{17}$$

gdzie $v(t)$ jest całką górną w prawo równania (9), z warunkiem początkowym $v(0) = \delta$. Z drugiej strony, wobec warunku 2°, $\Gamma(t, \bar{x}, p) \leqslant Y(t)$. Ostatecznie otrzymujemy więc oszacowanie

$$\Gamma(t, \bar{x}, p) \leqslant v(t), \tag{18}$$

co kończy dowód twierdzenia o oszacowaniu.

PRACE CYTOWANE

[1] A. Bielecki: *Równania różniczkowe zwyczajne i pewne ich uogólnienia.* Warszawa, 1961.

[2] T. Dłotko: *O pewnym równaniu różniczkowym z opóźniającym się argumentem.* Zeszyty Nanpkowe Wyższej Szkoły Pedagog. w Katowicach, Sekcja Matem.

[3] T. Ważewski: *Systémes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications.* Ann. de la Soc. Polon. de Math. 1950.

[4] K. Zima: *Nierówności różniczkowe z opóźnionym argumentem.* (Praca doktorska, złożona w Dziekanacie Wydz. Mat. Fiz. Chem., Uniw. Jagiellońskiego w Krakowie, 1962).

RÉSUMÉ

Sur l'unicité de la résolution du problème de Cauchy par rapport à l'équation différentielle à l'argument retardé.

I) Soit E un'espace de Banach et X l'ensemble des fonctions continues dans l'intervalle $< p, T)$, différentiables pour $t < 0, T)$ et $x(t) \varepsilon E$ pour $t \varepsilon < p, T)$. Soit $R = < p, T) \times X$.

Nous considérons une transformation A, définie dans l'ensemble R et supposons

1*. $A(t,x) \varepsilon E$ pour $(t,x) \varepsilon R$.

2*. Si $\bar{x}(t)$, $\tilde{x}(t) \varepsilon X$ et $\bar{x}(t) \equiv \tilde{x}(t)$ pour $t \varepsilon < p, \tau >$, alors $A(\tau, \bar{x}) = A(\tau, \tilde{x})$.

II) Soit donné l'équation différentielle

$$
(1) \qquad \begin{cases} x(t) = \varphi(t) \text{ pour } t \varepsilon < p, 0 > \\ x'(t) = A(\beta(t), x) \text{ pour } t \varepsilon < 0, T). \end{cases}
$$

où $\beta(t)$ est une fonction réelle, definie dans l,intervalle $< 0, T)$ et inf. $\beta(t) \geqslant p$.

III) Désignos par Γ une operation réelle, definie dans l'ensemble $R^* = <0, T) \times X \times < p, 0 >$. Nous admettons que l'operation à pour chaque $\overset{*}{x}(t) \varepsilon X$ fixe, les proprietes suivantes

1°. $\Gamma(t, \overset{*}{x}, \tau)$ est une fonction nonnégative, continue et nondécroissante par rapport à variable t.

2°. Pour chaques $t \varepsilon (0,T)$ et $\tau^* \varepsilon < p, 0)$

$$
\Gamma(t, \overset{*}{x}, \tau^*) \leqslant \Gamma(0, \overset{*}{x}, \tau^*) + \Gamma(t, \overset{*}{x}, 0) - \| \overset{*}{x}(0) \|.
$$

3°. Si $\overset{*}{x}(t) \equiv 0$ dans l'intervalle $< \tau, 0 >$, alors $\Gamma(t, \overset{*}{x}, \tau) \equiv \Gamma(t, \overset{*}{x}, 0)$ et, de plus, $\Gamma(0, \overset{*}{x}, 0) = \| x(0) \|$.

4°. Si $t^* > 0$ et $\Gamma(t^*, \overset{*}{x}, 0) = 0$, alors $\overset{*}{x}(t) \equiv 0$ pour $t \varepsilon < 0, t^* >$.

5°. $\underline{D}_- \Gamma(t, \overset{*}{x}, 0) \leqslant \Gamma(t, \overset{*}{x}', 0)$, $t \varepsilon (0,T)$ ($\overset{*}{x}'$ est derivée de la fonction $\overset{*}{x}$).

6°. Si $\overset{*}{x}(0) = 0$, alors $\bar{D}_+ \Gamma(t, \overset{*}{x}, 0)_{t=0} \leqslant \| \overset{*}{x}'_+(0) \|$.

IV) La fonction $\sigma(t,u)$ continue et nonnégative pour $t \varepsilon < 0, T)$, $u \geqslant 0$ a la propriete suivante:

Si la fonction $u(t)$, $t \varepsilon < 0, T)$ est une résolution d'équation

$$
(2) \qquad u' = \sigma(t,u), \text{ et } \lim_{t \to 0+} u(t) = 0, \ u'_+(0) = 0,
$$

alors $u(t) \equiv 0$.

V) Désignos par $\bar{x}(t)$, $\tilde{x}(t)$ deux fonctions d'ensemble X. Si l'inégalité suivante à lieu

$$
\Gamma(t, \{\xi - \xi\}, 0) \leqslant \sigma(t, \Gamma(t, \{\bar{x} - \tilde{x}\}, p)),
$$

où $\xi(t) = A(\beta(t), \bar{x})$, $\xi(t) = A(\beta(t), \tilde{x})$, alors l'équation (1) possède le plus une résolution.

Oddano do Redakcji 14. VII. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

TADEUSZ DŁOTKO

O PEWNYM ZASTOSOWANIU TWIERDZENIA BANACHA O PUNKCIE STAŁYM

Jak zauważył A. Bielecki [1], twierdzenie Banacha o punkcie stałym przekształcenia zwężającego może być w prosty sposób zmodyfikowane tak, aby wraz z dowodem istnienia rozwiązania równania funkcyjnego i jednoznacznością otrzymać ciągłą zależność od parametru.

W klasie równań różniczkowych pozwala to na jednoczesny dowód twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i ciągłej zależności rozwiązania od parametru i warunku początkowego.

W nocie tej podaję w oparciu o zmodyfikowane twierdzenie o punkcie stałym Banacha pewne twierdzenie o istnieniu, jednoznaczności i ciągłej zależności od parametru i wartości początkowej rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego z wyprzedzającym argumentem. Omawiane równanie rozpatruję w przestrzeni Banacha. Umożliwia to stosowanie rozważań np. do układów równań różniczkowych.

Otrzymane twierdzenie gwarantuje istnienie rozwiązania równania różniczkowego z wyprzedzającym argumentem w klasie funkcji o wzroście co najwyżej wykładniczym w całym przedziale $\langle 0, \infty)$.

Stanowi ono uogólnienie wcześniejszych wyników A. Bieleckiego [2], C. Corduneanu [3] z teorii równań różniczkowych bez przesuniętego argumentu i prac Doss'a i Nasr'a [6] oraz T. Dłotko i M. Kuczmy [5] z teorii równań z wyprzedzającym argumentem.

Na wstępie przytoczę wspomnianą wcześniej modyfikację twierdzenia o punkcie stałym.

Twierdzenie 1. Niech funkcja $F(x, y, z)$, określona na iloczynie kartezjańskim $B \times E \times G$ przestrzeni metrycznej zupełnej B i przestrzeni metrycznych E i G przyjmuje wartości z przestrzeni B. Załóżmy ponadto, że funkcja F jest ciągła względem $(y, z) \in E \times G$ przy ustalonym x i dla dowolnych x i $X \in B$ jest

$$|F(x, y, z) - F(X, y, z)| \leqslant \alpha(y, z) |x - X|,$$

gdzie $\alpha(y,z)$ jest pewną funkcją ciągłą zmiennych y i z o wartościach rzeczywistych i $\alpha(y,z) \varepsilon < 0, 1)$.

Przy tych założeniach istnieje dokładnie jedna funkcja $x(y,z)$ określona w całym iloczynie kartezjańskim $E \times G$ o wartościach z przestrzeni B, taka, że

$$x(y,z) = F(x(y,z), y, z)$$

oraz $x(y,z)$ jest ciągła w przestrzeni $E \times G$.

Dowód. Ustalmy $(y,z) \varepsilon E \times G$. Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że istnieje funkcja $x(y,z)$ taka, że $x(y,z) = F(x(y,z), y, z)$. Należy wykazać, że $x(y,z)$ jest ciągła. Niech $(Y,Z) \varepsilon E \times G$. Wtedy jak wyżej $x(Y,Z), = F(x(Y,Z), Y, Z)$. Oszacujmy różnicę

$$|x(y,z) - x(Y,Z)| \leqslant |F(x(y,z), y, z) - F(x(Y,Z), Y, Z)| + $$
$$+ |F(x(y,z), Y, Z) - F(x(Y,Z) Y, Z)| \leqslant |F(x(y,z), y, z) -$$
$$- F(x(y,z), Y, Z)| + \alpha(Y,Z)\,|x(y,z) - x(Y,Z)|.$$

Otrzymujemy

$$(1) \qquad |x(y,z) - x(Y,Z)| \leqslant \frac{|F(x(y,z), y, z) - F(x(y,z), Y, Z)|}{1 - \alpha(Y,Z)}.$$

Ustalmy (y,z). Gdy $|Y - y| + |Z - z| \to 0$, to licznik ostatniej nierówności dąży do zera, zaś mianownik do liczby większej od zera. Dowodzi to ciągłości funkcji $x(y,z)$.

Sformułuję najpierw dalsze założenia w formie hipotezy.

Hipoteza H_1.

I. Niech B_1 oznacza przestrzeń Banacha. Funkcja $f(t,x,y,u)$ jest ciągła i odwzorowuje elementy iloczynu kartezjańskiego $< 0, \infty) \times B_1 \times B_1 \times \times (-\infty, +\infty)$ w elementy przestrzeni B_1.

II. Istnieją funkcje $L_1(t)$ i $L_2(t)$ nie ujemne i ciągłe dla $t \geqslant 0$ o wartościach rzeczywistych takie, że dla $x, X, y, Y \varepsilon B_1$, $t \geqslant 0$, $u = \mathrm{const}$ jest

$$(2) \qquad \| f(t,x,y,u) - f(t,X,Y,u) \| \leqslant L_1(t) \| x - X \| + L_2(t) \| y - Y \|$$

gdzie $\| \; \|$ oznacza normę w przestrzeni B_1.

III. Istnieją liczby $\varkappa > 1$, K, $\delta \varepsilon < 0{,}1)$, $T \geqslant 0$ i $x_0, y_0 \varepsilon B_1$ takie, że dla dowolnego ustalonego $u \varepsilon (-\infty, +\infty)$ jest

$$(3) \qquad \int_0^t \| f(\tau, x_0, y_0, u) \| \, d\tau \leqslant K \exp(\varkappa \Lambda(t)) \text{ dla } t \geqslant T,$$

gdzie $\Lambda(t) = \int_0^t [L_1(\tau) + L_2(\tau)] \, d\tau$ dla $t \geqslant 0$. Ponadto

$$
(4) \qquad \frac{L_1(t) + L_2(t)\exp[\varkappa\Lambda(h(t)) - \varkappa\Lambda(t)]}{[L_1(t) + L_2(t)]\varkappa} \leqslant \delta \text{ dla } t \geqslant 0,^*
$$

gdzie $h(t)$ oznacza funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej t ciągłą dla $t \geqslant 0$ i $h(t) \geqslant t$.

Rozpatrzmy w przestrzeni B_1, równanie różniczkowe

$$
(5) \qquad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t), \varphi(h(t)), u)
$$

z warunkiem początkowym

$$
(6) \qquad \varphi(0) = \varphi_0 \,\varepsilon\, B_1.
$$

Twierdzenie 2. Jeżeli prawdziwa jest hipoteza H_1, to równanie (5) z warunkiem początkowym (6) posiada przy ustalonym u dokładnie jedno rozwiązanie $\varphi(t)$ takie, że $\|\varphi(t)\| = 0\,(\exp(\varkappa\Lambda(t)))$.

Dowód. Oznaczmy przez Φ zbiór wszystkich takich funkcji ciągłych $\varphi(t)$ w przedziale $< 0, \infty)$, że $\varphi(t) \,\varepsilon\, B_1$ i

$$
(7) \qquad \|\varphi(t)\| = 0\,(\exp(\varkappa\Lambda(t))) \text{ dla } t \geqslant 0.
$$

Za A. Bieleckim [2] wprowadzamy normę $|\varphi|$ elementu $\varphi(t)$

$$
|\varphi| = \sup_{t \geqslant 0} \{\|\varphi(t)\| \exp(-\varkappa\Lambda(t))\}.
$$

Można łatwo sprawdzić, że zbiór Φ z przyjętą normą stanowi przestrzeń Banacha. Równanie (5) z przyjętym warunkiem początkowym (6) jest równoznaczne równaniu całkowemu

$$
(8) \qquad \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau), \varphi(h(\tau)), u)\, d\tau \qquad \text{(patrz [4] lub [7]).}
$$

Operacja

$$
(9) \qquad \bar{\varphi}(t) = \varphi_0 + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau), \varphi(h(\tau)), u)\, d\tau
$$

określona dla $\varphi(t) \,\varepsilon\, \Phi$, przekształca elementy zbioru Φ w elementy tego zbioru. Mamy bowiem oszacowania

---

* Ostatni warunek jest w szczególności spełniony gdy $\Lambda(h(t)) - \Lambda(t) \leqslant \Delta \leqslant \frac{\ln \varkappa}{\varkappa}$ lub gdy $h(t) = t$.

$$\| \bar{\varphi}(t) \| \leqslant \| \varphi_0 \| + \int_0^t \{ L_1(\tau) \| \varphi(\tau) - x_0 \| + L_2(\tau) \| \varphi(h(\tau)) - y_0 \| \} \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \| f(\tau, x_0, y_0, u) \| \, d\tau \leqslant \| \varphi_0 \| + \max(|\varphi - x_0|;$$

$$|\varphi - y_0|) \int_0^t [L_1(\tau) \exp(\varkappa \Lambda(\tau)) + L_2(\tau) \exp(\varkappa \Lambda(h(\tau)))] \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \| f(\tau, x_0, y_0, u) \| \, d\tau \leqslant \| \varphi_0 \| + \max(|\varphi - x_0|; |\varphi - y_0|) \, \delta \int_0^t [L_1(\tau) +$$

$$+ L_2(\tau)] \varkappa \exp. (\varkappa \Lambda(\tau)) \, d\tau + \int_0^t \| f(\tau, x_0, y_0, u) \| \, d\tau = \| \varphi_0 \| + \max(|\varphi - x_0|;$$

$$|\varphi - y_0|) \, \delta \exp(\varkappa \Lambda(t) - 1) + \int_0^t \| f(\tau, x_0, y_0, u) \| \, d\tau.$$

Ostatecznie

$$\| \bar{\varphi}(t) \| \exp(-\varkappa \Lambda(t)) \leqslant \text{const dla } t \geqslant 0.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że $\bar{\varphi}(t) \varepsilon \Phi$. Należy jeszcze pokazać, że przy poczynionych założeniach jest

$$|\bar{\varphi} - \bar{\psi}| \leqslant \delta |\varphi - \psi|.$$

W tym celu rozpatrzymy różnicę

$$\| \bar{\varphi}(t) - \bar{\psi}(t) \| \leqslant \int_0^t \| f(\tau, \varphi(\tau), \varphi(h(\tau)), u) - f(\tau, \psi(\tau), \psi(h(\tau)), u) \| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \{ L_1(\tau) \| \varphi(\tau) - \psi(\tau) \| + L_2(\tau) \| \varphi(h(\tau)) - \psi(h(\tau)) \| \} \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi - \psi| \int_0^t \{ L_1(\tau) + L_2(\tau) \exp[\varkappa \Lambda(h(\tau)) - \varkappa \Lambda(\tau)] \exp(\varkappa \Lambda(\tau)) \} \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \delta |\varphi - \psi| \int_0^t [L_1(\tau) + L_2(\tau)] \varkappa \exp(\varkappa \Lambda(\tau)) \, d\tau = \delta |\varphi - \psi| \, [\exp(\varkappa \Lambda(t)) - 1].$$

Ostatecznie

$$\| \bar{\varphi}(t) - \bar{\psi}(t) \| \leqslant \delta \, |\varphi - \psi| \exp(\varkappa \Lambda(t)), \text{ skąd } |\bar{\varphi} - \bar{\psi}| \leqslant \delta |\varphi - \psi|.$$

Pokazaliśmy, że operacja (9) jest zbliżająca. Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\varphi(t)$ z klasy Φ spełniające równanie (5) i warunek (6) w przedziale $t \geqslant 0$ (parametr u był ustalony).

Przed przystąpieniem do dowodu ciągłości otrzymanego rozwiązania równania (5) ze względu na parametr u sformułuję drugą hipotezę.

H i p o t e z a H_2.

Funkcja $f(t, x, y, u)$ określona w przestrzeni $< 0, \infty) \times B_1 \times B_1 \times \times (-\infty, +\infty)$ spełnia warunek Lipschitza ze względu na zmienną $u \varepsilon (-\infty, \infty)$

$$\| f(t, x, y, u) - f(t, x, y, U) \| \leqslant N | u - U \|,$$

gdzie $| \ \|$ oznacza bezwzględną wartość oraz istnieje stała M taka, że

$$\sup_{t \geqslant 0} t \cdot \exp(-\varkappa \Lambda(t)) \leqslant M.$$

T w i e r d z e n i e 3. Jeżeli prawdziwe są hipotezy H_1 i H_2, to rozwiązania równania (5) zależą w sposób ciągły od warunku początkowego (6) oraz parametru u.

Dowód. W celu stosowania twierdzenia 1 przyjmijmy, że $B = \Phi$, $E = < 0, \infty)$, $G = (-\infty, +\infty)$. Funkcję F określamy następująco:

$$F = F(t, \varphi(t), \varphi_0, u) = \varphi_0 + \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau), \varphi(h(\tau)), u)\, d\tau.$$

Przyjmujemy $\alpha(\varphi_0, u) = \delta < 1$. Zgodnie z dokonanymi oszacowaniami

$$| F(t, \varphi, \varphi_0, u) - F(t, \psi, \varphi_0, u) | \leqslant \delta | \varphi - \psi |$$

Pokażemy, że funkcja F jest ciągła względem argumentów φ_0 i u. Z hipotezy H_2 otrzymujemy

$$| F(t, \varphi, \varphi_0, u_0) - F(t, \varphi, \varphi_1, u_1) | \leqslant \sup_{t \geqslant 0} \frac{\| \varphi_0 - \varphi_1 \|}{\exp(\varkappa \Lambda(t))} +$$

$$+ \sup_{t \geqslant 0} \frac{N | u_0 - u_1 \| t}{\exp(\varkappa \Lambda(t))} \leqslant \| \varphi_0 - \varphi_1 \| + NM | u_0 - u_1 \|.$$

Gdy $\| \varphi_0 - \varphi_1 \| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $| u_0 - u_1 \| < \varepsilon / 2MN$, to

$$| F(t, \varphi, \varphi_0, u_0) - F(t, \varphi, \varphi_1, u_1) | < \varepsilon,$$

co dowodzi, że rozwiązania równania (5) zależą w sposób ciągły od warunku (6) i parametru u.

PRACE CYTOWANE

[1] A. Bielecki: Równania różniczkowe zwyczajne i pewne ich uogólnienia, Warszawa 1961.

[2] — Заметка о применении Метода Ванаха... Bull. Acad. Polon. Sci, Cl. III, T. IV. (5) 1956, 255—258.

[3] C. Coduneanu: Sur l'existence et le comportement des solutions d'une classe d'équations différentielles, Bull. Math. de la Soc. Sci Math. Phys. de la R. P. R., 2(50) nr 4 (1958), 397—400.

[4] J. Dieudonne: Foundations of Modern Analysis, New York 1960.

[5] S. Doss and S. K. Nasr: On the functional equation $dy/dx = f[x, y(x), y(x+h)]$, $h > 0$, Amer. Journal of Math. 4 (1953), 713—716.

[6] T. Dłotko et M. Kuczma: Sur une équation différentiellefonctionnelle, Coll. Math. Vol. XII (1964) fasc. I, 107—114.

[7] L. A. Lusternik i W. I. Sobolew: Elementy analizy funkcjonalnej, Warszawa 1959.

SUR UNE APPLIQUATION DU THÉOREME DE BANACH SURLE POINT FIXE

TADEUSZ DŁOTKO

RESUMÉ

Dans la présente note l'auter examine l'équation différentielle à argument accéléré aux valeurs de l'espace de Banach. On démontre le théorème: si l'hypothèse H_1 est accomplie, alors l'équation différentielle [5] avec la condition [6] possède exactement une solution $\varphi(t)$ telle, que $\|\varphi(t)\| = 0(\exp(\varkappa\Lambda(t)))$ pour $t \geqslant 0$.

Ensuite nous trouvons une modification du théorème de Banach sur le point fixe d'une telle façon, que si les hypothèses H_1 et H_2 sont accomplies, alors les solutions de l'équation [5] dépendent d'une manière continuelle de la condition [6] et du paramètre u.

Les résultats obtenus généralisent certains théorèmes ultérieurs obtenus par A. Bielecki, C. Coduneanu, S. Doss et S. K. Nasr et l'auteur de cette note.

Oddano do Redakcji 18. VI. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

TADEUSZ DŁOTKO

O ISTNIENIU ROZWIĄZAŃ PEWNEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO Z OPÓŹNIAJĄCYM SIĘ I WYPRZEDZAJĄCYM ARGUMENTEM

W pracy [1] zajmowałem się istnieniem rozwiązań równania różniczkowego z wyprzedzającym argumentem postaci

(1) $$\varphi'(t) = F(\{\varphi(s)\}_{t \leqslant s \leqslant k(t)}) \text{ dla } t \geqslant 0$$

z warunkiem początkowym $\varphi(0) = \varphi_0$. Przy odpowiednich założeniach dowiodłem, że równanie (1) wraz z sformułowanym warunkiem początkowym punktowym posiada przynajmniej jedno rozwiązanie $\varphi(t)$ w całym przedziale $< 0, \infty)$. Rozwiązanie to nleży do klasy funkcji o wzroście conajwyżej wykładniczym dla $t \geqslant 0$.

W pracy tej modyfikuję metodę dowodu zastosowaną w [1] w taki sposób, ażeby objąć nią równanie postaci [1], w którym występuje równocześnie opóźniony i wyprzedzający argument i w którym warunek początkowy dany jest w postaci funkcji początkowej.

Oznaczenia

Niech X_n oznacza n wymiaową przestrzeń kartezjańską, której elementy oznaczamy przez $x = (x_1, ..., x_n)$. Przyjmujemy normę elementu $x: |x| = \max [|x_1|, ..., |x_n|]$. Symbol X_{1+n} oznacza iloczyn kartezjański zbiorów $(-\infty, +\infty) \times X_n$; jego elementy oznaczamy przez $(t, x) = (t, x_1 ... x_n)$. Symbol Φ oznacza klasę funkcji wektorowych $\{\varphi(s)\}_{t,u}$ określonych w przedziałach $< t, u >$, przyjmujących wartości z przestrzeni X_n i ciągłych w przedziale $< t, u >$. Końce przedziału $< t, u >$ nie są ustalone. Symbol $\varphi(t)$ jest skrótem ciągu $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$. W zbiorze Φ określam metrykę w ten sposób, że odległość

(2) $$[\{\varphi\}_{t,u} - \{\psi\}_{s,v}]$$

rozumiemy jako odległość w sensie Hausdorffa wykresów tych funkcji, będących podzbiorami przestrzeni X_{n+1}.

Symbol $\Phi_{<p,\infty)}$ oznacza klasę funkcji $\varphi(s)$, określonych i ciągłych w przedziale $<p, \infty)$, $0 \geqslant p = \mathrm{const} > -\infty$, przyjmujących wartości z przestrzeni X_n. Symbol $\Phi'_{<p,\infty)}$ oznacza podklasę klasy funkcji $\Phi_{<p,\infty)}$ mających ciągłą pochodną w przedziale $<0, \infty)$.

Symbol $F(\{\varphi(s)\}_{t,u})$ oznacza funkcję która elementom zbioru Φ zlokalizowanym do przedziału $<t, u>$ przyporządkowuje punkty przestrzeni X_n i jest ciągła ze względu na metrykę przyjętą w zbiorze Φ. Oznacza to, że

(3) $$\bigwedge_{\{\varphi(s)\}_{t,u}} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{\{\psi(t)\}_{s,v}} [[\{\varphi(s)\}_{t,u}; \{\psi(t)\}_{s,v}] < \delta \rightarrow |F(\{\varphi(s)\}_{t,u}) - F(\{\psi(t)\}_{s,v})| < \varepsilon].$$

Punkt przyporządkowany funkcji $\{\varphi(s)\}_{t,u}$ oznaczamy przez $F(\{\varphi(s)\}_{t,u})$. Zakładamy, że $h(t)$ i $k(t)$ są funkcjami ciągłymi dla $t \geqslant 0$, $h(t) \leqslant k(t)$ i $\inf\limits_{t \geqslant 0} h(t) = p > -\infty$.

Będziemy rozpatrywać równanie

(4) $$\begin{aligned} \varphi'(t) &= F(\{\varphi(s)\}_{h(t),k(t)}) && \text{dla } t \geqslant 0 \\ \varphi(t) &= \omega(t) && \text{dla } t \,\varepsilon <p, 0>, \end{aligned}$$

określone dla funkcji wektorowych $\{\varphi(s)\}_{h(t),k(t)}$ z klasy Φ. Poszukujemy rozwiązania $\varphi(t)$ z klasy $\Phi'_{<p,\infty)}$ spełniającego daną funkcję początkową $\omega(t)$ taką, że $|\omega(t)| \leqslant \varkappa$ dla $t \,\varepsilon <p, 0>$ i $\varkappa = \mathrm{const} > 0$.

Oznaczmy $\Lambda(t) = \int\limits_0^t [M(s) + N(s)]\, ds$, $t \geqslant 0$, gdzie $M(t)$ i $N(t)$ są funkcjami ciągłymi i nieujemnymi dla $t \geqslant 0$.

Zakładamy, że istnieją liczby α, K takie, że

(5) $$\alpha [\Lambda(k(t)) - \Lambda(t)] \leqslant (1-\alpha)\Lambda(t) + e^{-1} \quad \text{dla } t \geqslant 0,$$

przy czym $K\varkappa^{\alpha} \leqslant \varkappa$, $\alpha \,\varepsilon <0,1>$, $K \geqslant 0$ i

(6) $$|F(\{\varphi(s)\}_{h(t),k(t)})| \leqslant M(t) + N(t) K (\max_{h(t) \leqslant s \leqslant k(t)} |\varphi(s)|)^{\alpha} \quad \text{dla } t \geqslant 0.$$

Lemat. Dla danej funkcji $\varphi(t) \,\varepsilon\, \Phi_{<p,\infty)}$ funkcja $\psi(t) = F(\{\varphi(s)\}_{h(t),k(t)})$ jest funkcją ciągłą dla wartości $t \geqslant 0$.

Dowód lematu jest w pełni analogiczny do dowodu lematu 1 z pracy [2] str. 65.

W dalszym ciągu ograniczymy się do pewnej podklasy zbioru $\Phi_{<p,\infty)}$ i w niej będziemy poszukiwać rozwiązań równania (4). W tym celu wprowadzamy normę funkcji $\varphi(t) \,\varepsilon\, \Phi_{<p,\infty)}$, a mianowicie:

(6) $$\|\varphi\| = \max [\sup_{t \varepsilon <p,0>} |\varphi(t)|; \sup_{t \geqslant 0} \{|\varphi(t)| \exp(-e\Lambda(t) - \lambda t)\}], \lambda = \mathrm{const} > 0.$$

Oznaczmy przez B zbiór utworzony z wszystkich funkcji $\varphi(t) \varepsilon \Phi_{<p,\infty)}$ takich, że $\|\varphi\| < +\infty$. Jest to przestrzeń Banacha. Liniowość przestrzeni B jest oczywista. Weźmy ciąg funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ o wyrazach ze zbioru B spełniający warunek Cauchy'ego

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{M \in N_0} \bigwedge_{n, m \in N_0} [(n, m > M) \rightarrow \|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon].$$

Wykażemy zbieżność tego ciągu do pewnej funkcji $\varphi(t)$ takiej, że $\|\varphi\| < +\infty$. Ustalmy dowolny punkt $t_0 \varepsilon < p, \infty)$. Gdy $t_0 \varepsilon < p, 0 >$, to z warunku $\max\limits_{t \in <p,0>} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon$ wynika, że istnieje funkcja ciągła $\varphi(t)$ taka, że $\varphi_n(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ dla $t \varepsilon < p, 0 >$. Dla $t_0 \geqslant 0$ ciąg liczb $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego

$$|\varphi_n(t_0) - \varphi_m(t_0)| \sup(-e\Lambda(t_0) - \lambda(t_0)) \leqslant \|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon,$$

więc jest zbieżny. Zbieżność według normy (6) oznacza jednostajną zbieżność ciągu $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ w każdym ustalonym przedziale $<0, T>$, $T > 0$, więc w przedziale $<0, \infty)$ ciąg ten jest zbieżny do funkcji ciągłej $\varphi(t)$. Z nierówności $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ otrzymujemy w granicy $\|\varphi - \varphi_m\| < \varepsilon$, skąd $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi_m\| + \varepsilon < \infty$, co dowodzi że zbiór B stanowi przestrzeń zupełną.

Oznaczmy przez U podzbiór zbioru B utworzony przez funkcje $\varphi(t)$ takie, że $|\varphi(t)| \leqslant \varkappa$ dla $t \varepsilon < p, 0 >$, $|\varphi(t)| \leqslant \varkappa \exp(e\Lambda(t))$ dla $t \geqslant 0$ oraz $K\varkappa^{\alpha} \geqslant \max(1 : |\omega(0)|)$. Wedle tych założeń $K\varkappa^{\alpha} \geqslant \varkappa \geqslant \max|\omega(t)|$.

Zbiór U jest niepusty, ograniczony, wypukły i domknięty. Aby wykazać domkniętość zbioru U, weźmy ciąg funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ze zbioru U, zbieżny do funkcji φ. Trzeba wykazać, że również $\varphi \varepsilon U$. W przeciwnym razie istniał by punkt t_1 taki, że $|\varphi(t_1)| > \varkappa \exp(e\Lambda(t_1))$. Z warunku (6) wynika, że $\varphi_n(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ dla $t \varepsilon < 0, t_1 >$, więc $|\varphi_n(t_1)| > \varkappa \exp(e\Lambda(t_1))$ dla $n > N$, co niemożliwe.

Rozpatrzmy obecnie transformację $\psi(t) = T\varphi(t)$, gdzie

$$\psi(t) = \begin{cases} \omega(t) \quad \text{dla} \quad t \varepsilon < p, 0 > \\ \omega(0) + \int\limits_0^t F(\{\varphi(s)\}_{h(\tau), k(\tau)})\, d\tau \ \text{dla} \ t \geqslant 0 \ \text{i} \ \varphi(t) \varepsilon U. \end{cases} \tag{7}$$

Zgodnie z poczynionymi założeniami otrzymujemy $\psi(t) \varepsilon U$. Oznaczmy przez V zbiór $V = T(U) C U$. Wykażemy, że operacja (7) jest ciągła. Weźmy ciąg funkcji $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ zbieżny do $\varphi(t)$ zgodnie z przyjętą normą. Należy wykazać, że ciąg obrazów tych funkcji $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ jest zbieżny do funkcji $\psi(t) = T\varphi(t)$ wedle normy (6), czyli $\sup\limits_{t \geqslant 0} |\psi_m(t) - \psi(t)| \exp(-e\Lambda(t) - \lambda t) \rightarrow 0$ gdy $m \rightarrow +\infty$.

Z ostatniego warunku wynika, że $\varphi_m(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ dla $t \varepsilon < 0, T > \subset < 0, \infty)$, więc dla udowodnienia relacji $\| \psi_m(t) - \psi(t) \| \to 0$, gdy $m \to +\infty$ wystarczy wykazać, że $\sup_{t \geqslant 0} |\psi_m(t) - \psi(t)| \exp(-e\Lambda(t) - \lambda t) \to 0$ gdy $m \to +\infty$.

Zgodnie z określeniem operacji T otrzymujemy

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| = |\omega(0) + \int_0^t F(\{\varphi_n\}_{h(\tau), k(\tau)}) d\tau - \omega(0) - \int_0^t F(\{\varphi\}_{h(\tau), k(\tau)}) d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |F(\{\varphi_n\}_{h(\tau), k(\tau)}) - F(\{\varphi\}_{h(\tau), k(\tau)})| d\tau.$$

Przypuśćmy, że istnieje punkt t_1 taki, że ciąg liczb $\psi_n(t_1) \not\to \psi(t_1)$. Weźmy pod uwagę przedział $< 0, T >$, gdzie $T = \max_{t \varepsilon < 0, t_1 >} k(t)$.

Z jednostajnej zbieżności $\varphi_n(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ w przedziale $< 0, T >$ wynika, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$, istnieje liczba N taka, że dla $n \geqslant N$ jest $[\{\varphi_n\}_{h(t), k(t)}; \{\varphi\}_{h(t), k(t)}] \leqslant \delta$ dla $t \varepsilon < 0, t_1 >$. Z ciągłości funkcji F otrzymujemy

$$|F(\{\varphi_n\}_{h(t), k(t)}) - F(\{\varphi\}_{h(t), k(t)})| \leqslant \varepsilon \text{ dla } t \in < 0, t_1 >, \text{ więc}$$

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| \leqslant \varepsilon t_1 \text{ dla } t \in < 0, t_1 >.$$

Oznacza to, że $\psi_n(t_1) \to \psi(t_1)$. Co więcej $\psi_n(t) \to \psi(t)$ w przedziale $< 0, t_1 > \subset < 0, \infty)$. Ponadto

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| \exp(-e\Lambda(t) - \lambda t) \leqslant 2\varkappa \exp(-\lambda t) \leqslant \varepsilon_1 \text{ dla } t \geqslant t_1,$$

skąd $\| \psi_n - \psi \| \to 0$ gdy $n \to \infty$. Więc operacja T jest ciągła.

Niech $\{\psi_n(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ oznacza dowolny ciąg funkcji ze zbioru V. Obierzmy ciąg liczb T_m, $m = 1, 2, \ldots$ taki, że $\lim_{m \to \infty} T_m = \infty$. Weźmy pod uwagę przedział $< 0, T_1 >$. Gdy $\psi(t) = T\varphi(t)$, $\varphi(t) \in U$ i $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T_1$, to $|\psi_n(t)| \leqslant \varkappa \exp(e\Lambda(T_1) + \lambda T_1)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $t \in < 0, T_1 >$. Ponadto

$$|\psi(t_2) - \psi(t_1)| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} [M(t) + N(t) K(\max_{h(t) \leqslant s \leqslant k(t)} |\varphi(s)|)^\alpha] dt \leqslant [\max_{0 \leqslant t \leqslant T_1} M(t) +$$

$$+ K \max_{0 \leqslant t \leqslant T_1} N(t) \varkappa^\alpha \exp(e\Lambda(k^*(T_1)) + \lambda T_1)] (t_2 - t_1) = \text{const}\,(t_2 - t_1),$$

gdzie $k^*(T_i) = \max_{0 \leqslant t \leqslant T_i} k(t)$, $i = 1, 2, \ldots$

Wykazaliśmy, że w przedziale $< 0, T_1 >$ funkcje zbioru V są wspólnie ograniczone i jednakowo ciągłe. Z twierdzenia Arzeli wynika, że istnieje podciąg $\{\psi_n^1(t)\}$ ciągu $\{\psi_n(t)\}$ zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $\psi^1(t)$

w przedziale $\langle 0, T_1 \rangle$ takiej, że $|\psi^1(t)| \leqslant \varkappa \exp(e\Lambda(t))$. Rozpatrzmy przedział $\langle 0, T_2 \rangle$ oraz ciąg funkcji $\{\psi_1^n(t)\}$ dla $t \in \langle 0, T_2 \rangle$. Podobnie jak wyżej można wykazać wspólną ograniczoność i jednakową ciągłość ciągu funkcji $\{\psi_n^1(t)\}$ dla $t \in \langle 0, T_2 \rangle$. Więc istnieje podciąg $\{\psi_2^n(t)\}$ ciągu $\{\psi_n^1(t)\}$ zbieżny jednostajnie do funkcji $\psi^2(t)$ dla $t \in \langle 0, T_2 \rangle$.

Powtarzając ostatnie rozumowanie określamy rekurencyjnie nieskończony ciąg $\{\psi_n^m(t)\}$, $m = 1, 2, \ldots$, będący podciągiem ciągu $\psi_n^{m-1}(t)\}$ i $\psi_n^m(t) \rightrightarrows \psi^m(t)$ dla $t \in \langle 0, T_m \rangle$ i $n \to +\infty$. Utwórzmy ciąg przekątniowy $\psi_1^1(t), \psi_2^2(t), \ldots, \psi_n^n(t), \ldots$ Ciąg ten jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle 0, \infty)$ do funkcji $\psi(t)$ takiej, że $\psi(t) \equiv \psi^m(t)$ dla $t \in \langle 0, T_m \rangle$ i $\psi(t) \in U$. Obierzmy $\varepsilon > 0$ i oznaczmy $T_\varepsilon = \lambda^{-1} \ln(4\varkappa\varepsilon^{-1})$. Wówczas $\sup\limits_{t \geqslant 0} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| \exp(-e\Lambda(t) - \lambda t) \leqslant \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T_\varepsilon} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| \exp$ $(-e\Lambda(t) - \lambda t) + \sup\limits_{t \geqslant T_\varepsilon} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| \exp(-e\Lambda(t) - \lambda t)$. Pierwszy ze składników prawej strony ostatniej nierówności można uczynić $\leqslant \varepsilon/2$ dla $n \geqslant N$, gdyż $\psi_n^n(t) \rightrightarrows \psi(t)$ dla $t \in \langle 0, T_\varepsilon \rangle$. Do drugiego składnika można stosować oszacowanie

$$\sup_{t \geqslant T_\varepsilon} |\psi(t) - \psi_n^n(t)| \exp(-e\Lambda(t) - \lambda t) \leqslant \sup_{t \geqslant T_\varepsilon} 2\varkappa \exp(-\lambda t) = \varepsilon/2.$$

Dowodzi to zwartości zbioru V. W ten sposób zostało udowodnione twierdzenie:

Twierdzenie. Załóżmy, że spełnione są założenia przyjęte na wstępie do niniejszej pracy. Wówczas równanie różniczkowe (4) z ograniczoną funkcją początkową $\omega(t)$ posiada przynajmniej jedno rozwiązanie $\varphi(t) \in \Phi'_{\langle p, \infty)}$ takie, że $|\varphi(t)| \leqslant \varkappa \exp(e\Lambda(t))$ dla $t \geqslant 0$.

PRACE CYTOWANE

[1] T. Dłotko: *O istnieniu rozwiązań pewnego równania różniczkowego z wyprzedzającym argumentem.* Zesz. Nauk. WSP w Katowicach, Nr 4, 1964, str. 79—83.

[2] T. Dłotko: *O pewnym równaniu różniczkowym z opóźniającym się argumentem.* Zesz. Nauk. WSP w Katowicach, Nr 4, 1964, str. 63—72.

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE À ARGUMENT RETARDÉ ET ACCÉLÉRÉ

TADEUSZ DŁOTKO

RÉSUMÉ

Dans cette noe l'auteur examine l'équation différentielle vectorielle (4) à argument retardé et accéléré. Nous comprenons par le symbole $\{\varphi(s)\}_{h(t), k(t)}$, que la voleur $\varphi, (t)$ est désignée par les valeurs de la solu-

tion $\varphi(t)$ de l'intervalle $< h(t), k(t) >$ (on peut supposer $h(t) \leqslant t \leqslant k(t)$.

Dans les hypothèses convenables l'auteur démontre l'existence au moins d'une solution $\varphi(t)$ $(t \geqslant 0)$ de l'équation (4) avec la condition donnée sous la forme d'une fonction initiale $\omega(t)$ pour $t \leqslant 0$.

Oddano do Redakcji 18. VI. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

TADEUSZ DŁOTKO

UWAGA DO PRACY „O PEWNYM RÓWNANIU RÓŻNICZKOWYM Z OPÓŹNIAJĄCYM SIĘ ARGUMENTEM"

W pracy [1] zajmowałem się równaniem różniczkowo-funkcyjnym z opóźniającym się argumentem postaci

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\varphi'(t) = F(\{\varphi(s)\}_{h(t)\leqslant s\leqslant t}) && \text{dla } t \geqslant 0 \\ &\varphi(t) = \omega(t) && \text{dla } t \leqslant 0. \end{aligned}$$

Funkcjonał $\{\varphi(s)\}_{h(t),t}$ przyporządkowuje układowi funkcji $\varphi(s) = \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ zlokalizowanych do przedziału $< h(t), t >$ punkt $\{\varphi(s)\}_{h(t),t}$ z przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej E^n.

Przy odpowiednich założeniach dowiodłem w [1] istnienia przynajmniej jednego rozwiązania równania (1) o charakterze lokalnym, przedłużania rozwiązań na cały przedział $< 0, \infty)$, ich odległości, jednoznaczności i ciągłej zależności od funkcji początkowej $\omega(t)$. W szczególności udowodniłem następujące twierdzenie.

Niech $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Oznaczmy $|x| = \max[|x_1|, \ldots, |x_n|]$ i $\|\varphi(s)\|_{0,t} = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}[\max\limits_{i=1,\ldots,n}|\varphi_i(s)|]$. Wówczas dowolna liczba pochodna $D\|\varphi(s)\|_{0,t}$ funkcji ciągłej $\|\varphi(s)\|_{0,t}$ spełnia nierówność

$$D\|\varphi(s)\|_{0,t} \leqslant |\varphi'(t)| \quad \text{dla } t \geqslant 0.$$

W cytowanej pracy [1] dowiodłem również następującego twierdzenia: jeżeli spełniony jest warunek

$$|F\{\varphi(s)\}_{h(t),t} - F\{\psi(s)\}_{h(t),t}| \leqslant w(t, \|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0,t}) \quad \text{dla } t \geqslant 0,$$

w którym $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ oznaczają funkcje ciągłe w przedziale $<\inf\limits_{t\geqslant 0} h(t), \infty)$ i ograniczone dla $t \leqslant 0$, to rozwiązania $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ równania (1) wyznaczone odpowiednio przez funkcje początkowe $\omega(t)$ i $\bar{\omega}(t)$ spełniają nierówność

$$\|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0,t} \leqslant \alpha(t) \quad \text{dla } t \geqslant 0,$$

gdzie $\alpha(t)$ oznacza całkę górną równania

$$(2) \qquad u'(t) = w(t, u(t))$$

wyznaczoną przez warunek początkowy $(0, \|\omega(t) - \bar{\omega}(t)\|_{\inf\limits_{t \geqslant 0} h(t), 0})$.

Twierdzenie to można uogólnić na przypadek dwu różnych równań. Dane są równania (1) oraz

$$(3) \qquad \psi'(t) = G(\{\psi(s)\}_{k(t), t}) \text{ dla } t \geqslant 0, \quad \psi(t) = \bar{\omega}(t) \text{ dla } t \leqslant 0,$$
$$\inf_{t \geqslant 0} h(t) = \inf_{t \geqslant 0} k(t) > -\infty, \quad k(t) \leqslant t \text{ dla } t \geqslant 0.$$

Warunek

$$(4) \qquad |F(\{\varphi(s)\}_{h(t), t}) - G(\{\psi(s)\}_{k(t), t})| \leqslant w(t, \|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0, t}) \text{ dla } t \geqslant 0,$$

w którym $w(t, u)$ jest funkcją ciągłą dla $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$ i równanie różniczkowe (2) posiada wszystkie rozwiązania górne wyznaczone przez warunki początkowe $(0, u_o)$, $u_o \geqslant 0$ określone w całym przedziale $t \geqslant 0$ gwarantuje, że dla dowolnych dwu rozwiązań $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ równań (1) i (3) jest prawdziwa nierówność

$$\|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0, t} \leqslant \alpha(t) \text{ dla } t \geqslant 0.$$

W ostatniej nierówności $\alpha(t)$ oznacza rozwiązanie górne równania (2) wyznaczone przez warunek początkowy $(0, \|\omega(t) - \bar{\omega}(t)\|_{\inf\limits_{t \geqslant 0} h(t), 0})$.

Dowód. Zgodnie z (4) otrzymujemy

$$D\|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0, t} \leqslant |F(\{\varphi(s)\}_{h(t), t}) - G(\{\psi(s)\}_{k(t), t})| \leqslant$$
$$\leqslant w(t, \|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0, t}) \text{ dla } t \geqslant 0.$$

Z twierdzenia Ważewskiego o nierównościach różniczkowych [3], tw. 2, str. 124 otrzymujemy

$$(5) \qquad \|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0, t} \leqslant \alpha(t) \text{ dla } t \geqslant 0,$$

gdzie funkcja $\alpha(t)$ jest określona jak w tezie dowodzonego twierdzenia. Ostatni warunek można zapisać w postaci

$$(6) \qquad \|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0, t} \leqslant \|\omega(t) - \bar{\omega}(t)\|_{\inf\limits_{t \geqslant 0} h(t), 0} + \int_0^t w(\tau, \alpha(\tau))\, d\tau \text{ dla } t \geqslant 0.$$

Wniosek. Z warunku (6) wynika, że przy poczynionych w [1] założeniach rozwiązania równania różniczkowego (1) zależą w sposób ciągły od warunku początkowego w postaci funkcji początkowej oraz od prawej strony równania (1). Nierówność (6) daje równocześnie oszacowanie odległości dwu rozwiązań równań (1) i (3) wyznaczonych przez różne, bądź równe funkcje początkowe.

Przykłady ilustrujące udowodnione twierdzenie

I. Dane dwa równania skalarne z opóźniającym się argumentem postaci

(a) $\varphi'(t) = a(t)\varphi(h(t)) + f(t, \varphi(h_1(t)))$ dla $t \geqslant 0, \varphi(t) = \omega(t)$ dla $t \leqslant 0$

i

(b) $\psi'(t) = a(t)\psi(k(t))$ dla $t \geqslant 0, \psi(t) = \bar{\omega}(t)$ dla $t \leqslant 0$,

w których $a(t)$ oznacza funkcję ciągłą dla $t \geqslant 0$, $h(t)$ i $k(t)$ są danymi funkcjami ciągłymi, $h(t) \leqslant t$, $k(t) \leqslant t$ dla $t \geqslant 0$, $\inf_{t \geqslant 0} h(t) = \inf_{t \geqslant 0} k(t) > -\infty$. Funkcja $f(t,x)$ jest ciągła i $|f(t,x)| \leqslant M = \text{const}$ dla $(t,x) \in \langle 0, \infty) \times (-\infty, +\infty)$. Funkcjami szukanymi są $\varphi(t)$ i $\psi(t)$.

Dla równań (a) i (b) otrzymujemy:

$$|F(\{\varphi(s)\}_{h(t),t}) - G(\{\psi(s)\}_{k(t),t})| \leqslant |a(t)|\ |\varphi(h(t)) - \psi(k(t))| +$$

$$+ |f(t, \varphi(h_1(t)))| \leqslant M + |a(t)| N + |a(t)|\ \| \varphi(h(s)) - \psi(k(s)) \|_{0,t},$$

gdzie $N = \| \omega(t) - \bar{\omega}(t) \|_{\inf\limits_{t \geqslant 0} h(t),\, 0}$.

Można przyjąć $w(t,u) = |a(t)| u + |a(t)| N + M$, wówczas zgodnie z udowodnionym twierdzeniem dla warunku początkowego $(0, p) = \| \omega(t) - \bar{\omega}(t) \|_{\inf\limits_{t \geqslant 0} h(t),\, 0})$ otrzymujemy

$$\| \varphi(s) - \psi(s) \|_{0,t} \leqslant \exp\left(\int_0^t |a(\tau)| d\tau\right)\left[p + \int_0^t [|a(\tau)| N + M] \exp\left(-\int_0^\tau |a(u)| du\right) d\tau\right] \text{ dla } t \geqslant 0.$$

Przez specjalizację warunków na funkcje $a(t)$ i $f(t,x)$ można otrzymać różne twierdzenia o rozwiązaniach równań (a) i (b).

II. Rozpatrzmy równania różniczkowe

(c) $\varphi'(t) = \int\limits_{h(t)}^{t} \varphi(s)\, d_s r(t,s) + f(t)$ dla $t \geqslant 0$, $\varphi(t) = \omega(t)$ dla $t \leqslant 0$

i

(d) $\psi'(t) = \int\limits_{h(l)}^{t} \psi(s)\, d_s \bar{r}(t,s) + g(t)$ dla $t \geqslant 0$, $\psi(t) = \bar{\omega}(t)$ dla $t \leqslant 0$

i załóżmy, że posiadają rozwiązania określone w całym przedziale $\langle 0, \infty)$ (patrz n. p. [2] lub [1]).

Hipoteza H. Oznaczmy $M(t) = \bigvee_{s=h(t)}^{s=t} [r(t,s) - \bar{r}(t,s)]$ i niech $M(t) \leqslant K$ i $\int_0^\infty M(t)\,dt < +\infty$. Ponadto funkcje ciągłe $f(t)$ i $g(t)$ dla $t \geqslant 0$ spełniają warunki $|\int_0^t f(\tau)\,d\tau| \leqslant K_1$ i $|\int_0^t g(\tau)\,d\tau| \leqslant K_1$ dla $t \geqslant 0$. Funkcja $h(t)$ jest ciągła i $h(t) \leqslant t$ dla $t \geqslant 0$.

Lemat. Jeżeli prawdziwa jest hipoteza H i rozwiązania równania różniczkowego

$$\text{(e)} \qquad x'(t) = \int_{h(t)}^{t} x(s)\, d_s [r(t,s) - \bar{r}(t,s)] \text{ dla } t \geqslant 0,\ x(t) = \beta(t) \text{ dla } t \leqslant 0\ |\beta(t)| \leqslant \text{const dla } t \geqslant 0$$

istnieją w całym przedziale $< 0, \infty)$, to są one ograniczone dla $t \geqslant 0$. Dowód ograniczoności rozwiązań wynika z twierdzenia 4 udowodnionego w [2] str. 55. Wówczas

$$|x'(t)| \leqslant (\sup_{s \geqslant 0} |x(s)|) \bigvee_{s=h(t)}^{s=t} [r(t,s) - \bar{r}(t,s)] \leqslant \text{const dla } t \geqslant 0.$$

Pokażemy, że spełniony jest warunek (4) dla funkcji występujących w równaniach (c) i (d). Otrzymujemy

$$|F(\{\varphi(s)\}_{h(t),t}) - G(\{\psi(s)\}_{h(t),t})| \leqslant |\int_{h(t)}^{t} \varphi(s)\, d_s r(t,s) - \int_{h(t)}^{t} \boldsymbol{\psi}(s)\, \boldsymbol{d_s} \bar{r}(t,s)| +$$

$$+ 2K_1 \leqslant |\int_{h(t)}^{t} \varphi(s)\, d_s [r(t,s) - \bar{r}(t,s)]| + |\int_{h(t)}^{t} [\varphi(s) - \psi(s)]\, d_s \bar{r}(t,s)| + 2K_1.$$

Pierwszy składnik ostatniej sumy jest ograniczony przez stałą K_2 zgodnie z wcześniejszym lematem. Do drugiego składnika wolno stosować oszacowanie.

$$|\int_{h(t)}^{t} [\varphi(s) - \psi(s)]\, d_s \bar{r}(t,s)| \leqslant [\sup_{t \leqslant 0} |\omega(t) - \bar{\omega}(t)| + \max_{0 \leqslant s \leqslant t} |\varphi(s) -$$

$$- \psi(s)|] \bigvee_{s=h(t)}^{s=t} \bar{r}(t,s) = [p + \|\varphi(s) - \psi(s)\|_{0,t}]\,\delta(t),$$

gdzie $p = \sup_{t \leqslant 0} |\omega(t) - \bar{\omega}(t)|$, $\delta(t) = \bigvee_{s=h(t)}^{s=t} \bar{r}(t,s)$.

Funkcja $w(t,u)$ z warunku (4) jest postaci $w(t,u) = (p+u)\,\delta(t) + 2K_1 + K_2$. Z udowodnionego twierdzenia otrzymujemy oszacowanie

$$\|\varphi(s)-\psi(s)\|_{0,t}\leqslant\left(\exp\int_0^t\delta(\tau)\,d\tau\right)\left\{p+\int_0^t[K_2+2K_1+p\,\delta(\tau)]\exp\left(-\int_0^\tau\delta(u)\,du\right)d\tau\right\}$$

dla $t\geqslant 0$. Analogicznie można wykorzystać udowodnione twierdzenie w innych twierdzeniach typu porównawczego.

PRACE CYTOWANE

[1] T. Dłotko: O pewnym równaniu różniczkowym z opóźniającym się argumentem, Zesz. Nauk. WSP w Katowicach, Nr 4 (1964), 63—72.

[2] A. D. Myszkis: Линейние дифференциальные уравнения з запаздывающим аргументом, Москва 1957.

[3] T. Ważewski: Systèmes des équations et des inégalités differentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications, Ann. Soc. Pol. Math., 23 (1950), 112—167.

UNE REMARQUE CONCERNANT LA NOTE „O PEWNYM RÓWNANIU RÓŻNICZKOWYM Z OPÓŹNIAJĄCYM SIĘ ARGUMENTEM"

TADEUSZ DŁOTKO

RÉSUMÉ

Dans la note nommée ci-dessus l'auteur examine deux équations différentielles de la forme (1) et (3) à argument retardé. Nous comprenons par le symbole $\{\varphi(s)\}_{h(t)\leqslant s\leqslant t}$ que la valeur $\varphi'(t)$ est désignée par les valeurs des solutions de l'intervalle $<h(t), t>$.

La condition initiale est donnée sous la forme d'une fonction initiale.

Dans les hypothèses admises (entre autres (4)) l'auteur donne l'évaluation de max $|\varphi(s)-\psi(s)|$ dans lequel $\varphi(t)$ satisfait à l'équation (1), $\psi(t)$ satisfait à l'équation (3) par la solution supérieure de l'équation différentielle (2). Il en résulte entre autres la dépendence continuelle des solutions de l'équation (1) de la fonction initiale et du paramètre.

Le théorème obtenu est iluustré par les exemples concrets.

Oddano do Redakcji 18. VI. 1965.

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

TADEUSZ DŁOTKO

O PEWNYM ZAGADNIENIU ASYMPTOTYCZNYM DLA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO n-tego RZĘDU

W pracy [3] G. A. Gofman rozpatruje przy odpowiednich założeniach zagadnienie istnienia i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego postaci

(1) $$y^{(n)}(x) = f(x, y(x))\,\varphi(x), \quad n > 1$$

spełniającego następujące warunki początkowe

(2) $$y(0) = y_0 > 0, y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0, \lim_{x \to \infty} y'(x) = 0.$$

W dowodzie istnienia i jednoznaczności rozwiązania omawianego zagadnienia znajdują się błędy polegające na tym, że autor nie rozpatruje przypadku, w którym szukane rozwiązanie zeruje się wraz z pochodną w pewnym punkcie.

Celem tej noty jest podanie ogólniejszego twierdzenia aniżeli w [3], którego odmienny dowód nie zawiera wspomnianych usterek. Poczynione założenia są przy tym znacznie słabsze aniżeli w [3].

H i p o t e z a H.

1. Funkcje sklarne $f(x, y)$ i $\varphi(x)$ są ciągłe dla $x \geqslant 0$ i $y \in (-\infty, +\infty)$.
2. $f(x, y)\,y > 0$ dla $x \geqslant 0$ i $y \neq 0$, $\varphi(x) > 0$ dla $x \geqslant 0$.
3. Dla każdego zbioru $<0, a> \times (-\infty, +\infty)$, $a \geqslant 0$ istnieje stała $M(a)$ taka, że $|f(x, y)| \leqslant M(a)$ dla punktów tego zbioru.

T w i e r d z e n i e 1. Jeżeli prawdziwa jest hipoteza H, to istnieje rozwiązanie równania (1), spełniające warunki początkowe (2).

Dowód. Najpierw udowodnię, że równanie (1) posiada rozwiązanie spełniające warunki początkowe

(2') $$y^{(i)}(0) = \gamma_i, \ \gamma_i \in (-\infty, +\infty), \ i = 0, 1, \ldots, n-1$$

określone w całym przedziale $<0, \infty)$.

Równanie różniczkowe (1) z warunkami (2') jest równoważne równaniu całkowemu postaci

$$(3)\qquad y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t,y(t))\,\varphi(t)\,dt+\gamma_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+$$
$$+\gamma_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+\gamma_1 x+\gamma_0 .$$

Jeżeli ostatnie równanie posiada rozwiązanie, to jego pochodna jest postaci

$$(4)\qquad y'(x)=\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2} f(t,y(t))\,\varphi(t)\,dt+\gamma_{n-1}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+$$
$$+\gamma_{n-2}\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}+\ldots+\gamma_1 .$$

Obierzmy liczbę $a>0$ i oznaczmy przez

$$\Phi(x)=\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{n-2}\varphi(t)\,dt \quad \text{dla } x\geqslant 0.$$

Jest $\Phi(x)\geqslant 0$ i $\Phi(x)$ rośnie dla $x\geqslant 0$. W przedziale $<-1, a>$ rozpatrzmy ciąg równań całkowych

$$(5)\qquad y_m(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x-\frac{1}{m}} (x-t)^{n-1} f(t,y_m(t))\,\varphi(t)\,dt+\gamma_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+$$
$$+\ldots+\gamma_1 x+\gamma_0,$$

przy tym zakładamy, że $y_m(x)=\gamma_0$ dla $x\in<-\frac{1}{m}, 0>$ dla $m=1,2,\ldots$

Każde z równań całkowych (5) można rozwiązać metodą kolejnych przedłużeń w przedziałach $<0,\frac{1}{m}>,\ldots,<\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}>$, gdzie $\frac{k}{m}\geqslant a$. Dla wszystkich rozwiązań równań ciągu (5) otrzymujemy w przedziale $<0,a>$ oszacowanie

$$|y_m(x)|\leqslant\frac{1}{(n-1)!}M(a)\Phi(a)+\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|\frac{a^{n-i}}{(n-i)!}<+\infty \quad \text{dla } m=1,2,\ldots.$$

Oznacza to, że rozwiązania równań (5) są wspólnie ograniczone w przedziale $<0,a>$. Pokażemy, że są one również jednakowo ciągłe w tym przedziale. W tym celu obierzmy liczbę $\varepsilon > 0$ i rozpatrzmy różnicę $|y_m(x+h) - y_m(x)|$ dla $x, x+h \in \langle 0, a \rangle$ i $h \geqslant 0$. Jest

$$|y_m(x+h) - y_m(x)| \leqslant \left| \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{n-1} f(t, y_m(t)) \varphi(t)\, dt \right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \frac{(x+h)^{n-i} - x^{n-i}}{(n-i)!} \leqslant \frac{1}{(n-1)!} M(a)\, a^{n-1} \max_{t \in \langle 0, a\rangle} \varphi(t)\, h +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \frac{(x+\Theta h)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} h \leqslant \left[\frac{M(a)\, a^{n-1}}{(n-1)!} \max_{t \in \langle 0, a\rangle} \varphi(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \frac{a^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \right] h \text{ dla } m = 1, 2, \ldots \text{ i } \Theta \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dowodzi to jednakowej ciągłości rozwiązań (5) w przedziale $\langle 0, a \rangle$. Z twierdzenia Arzeli wynika, że istnieje podciąg rozwiązań $\{y_{m_k}(x)\}$ $k = 1, 2, \ldots$ ciągu rozwiązań $\{y_m(x)\}$ $m = 1, \ldots$ zbieżny jednostajnie do funkcji $y(x)$ w przedziale $\langle 0, a \rangle$. Łatwo można udowodnić, że funkcja $y(x)$ spełnia równanie (3) w przedziale $\langle 0, a \rangle$. Przedział $\langle 0, a \rangle$, $a > 0$ został obrany dowolnie, oznacza to, że równanie (3) posiada rozwiązania spełniające warunki (2') określone w całym przedziale $\langle 0, \infty)$.

W dalszym ciągu będę rozpatrywał szczególne warunki początkowe postaci (2'), a mianowicie

$$\text{(2'')} \qquad y(0) = y_0 > 0, \; y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0, \; y^{(n-1)}(0) = \gamma = \gamma_{n-1}.$$

Gdy przyjąć $\gamma > 0$, to pochodna (4) z warunkami (2'') monotonicznie rośnie oraz $y'(x) > 0$ dla $x \geqslant 0$. Nie może więc być $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x) = 0$. Oznacza to, że rozwiązań równania (1) spełniających (2) wystarczy szukać dla wartości $\gamma \leqslant 0$.

Pokażę, że gdy liczba γ jest ujemna i dostatecznie mała, to rozwiązanie równania (3) spełniające (2'') przecina dokładnie jeden raz oś x. Z równości

$$\text{(6)} \qquad y(x) = y_0 + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \left[\gamma + \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-1} f(t, y(t)) \varphi(t)\, dt \right]$$

wynika, że gdy ustalić przedział $\langle 0, a \rangle$ i przyjąć $\gamma = -\dfrac{y_0 (n-1)!}{a^{n-1}} -$ $- M(a) \int\limits_0^a \left(1 - \dfrac{t}{a}\right)^{n-1} \varphi(t)\, dt - k^2$, gdzie $k = \text{const} \neq 0$, to $y(a) < 0$.

Z równości (6) wynika, że jeśli rozwiązanie $y_1(x)$ odpowiadające wartości γ_1 przecina oś x, to rozwiązanie $y_2(x)$ odpowiadające wartości $\gamma_2 < \gamma_1$ też przecina oś x. Ponadto dowolne rozwiązanie (6) może przeciąć co najwyżej raz oś x.

Zbiór tych wartości γ dla których $y(a) < 0$ jest ograniczony z góry. Niech $\bar{\gamma}$ oznacza kres górny tych wartości.

Zbiór tych wartości γ dla których $y(x)$ nie przecina ($y(x) \geqslant 0$) osi x jest ograniczony z dołu. Oznaczmy jego kres dolny przez $\tilde{\gamma}$. Pokażemy, że $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}$. Łatwo pokazać, że jest $\bar{\gamma} \leqslant \tilde{\gamma}$. Gdyby było $\bar{\gamma} < \tilde{\gamma}$, to istniałoby rozwiązanie (6) spełniające (2''), które nie przecięło by osi x, ani też nie było by $y(x) \geqslant 0$ dla $x \geqslant 0$. Jest to niemożliwe, gdyż jedna z dwu sytuacji musi zajść. Pozostaje $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}$, czyli zbiór $\in \gamma(-\infty, +\infty)$ można podzielić na dwie klasy $(-\infty, \bar{\gamma})$ i $(\bar{\gamma}, +\infty)$ stanowiące przekrój Dedekinda o takich własnościach, że rozwiązanie równania (6) wyznaczone przez warunki (2'') z wartością γ z pierwszej z tych klas przecina dokładnie jeden raz oś x, zaś rozwiązanie równania (6) wyznaczone przez (2'') z wartością γ z drugiej z tych klas nie zmienia znaku w przedziale $< 0, \infty)$.

Pokażemy, że rozwiązanie $y(x, \bar{\gamma})$ równania (6) wyznaczone przez warunek $(y_0, 0, \ldots, 0, \bar{\gamma})$ ma tę własność, że $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x, \bar{\gamma}) = 0$.

Rozwiązanie $y(x, \bar{\gamma})$ nie może przecinać osi x, gdyż wówczas z ciągłej zależności rozwiązań od warunku początkowego wynikałoby, że rozwiązanie równania (6) spełniające warunek $(y_0, 0, \ldots, 0, \bar{\gamma} + \varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ przecięło by oś x wbrew własnościom klas przekroju Dedekinda.

Pozostaje jedyna możliwość $y(x, \bar{\gamma}) \geqslant 0$ dla $x \geqslant 0$. Można łatwo pokazać, że gdy funkcja $y^{(n)}(x, \bar{\gamma})$ nie zmienia znaku dla $x \geqslant x_0$, to istnieje $\lim\limits_{x \to \infty} y'(x, \bar{\gamma}) = g \in < -\infty, +\infty >$. Nie może być $g < 0$, gdyż wówczas $y(x, \bar{\gamma})$ przecięło by oś x, co nie zachodzi. Obecnie wykluczymy możliwość $g > 0$.

Gdyby było $g > 0$, to dla dostatecznie dużych wartości x funkcja $y(x, \bar{\gamma})$ była by rosnąca. Mogą zaistnieć dwa przypadki:

I. $\min\limits_{x \geqslant 0} y(x, \bar{\gamma}) = \delta > 0$. Wówczas dla $\gamma < \bar{\gamma}$ dostatecznie bliskiego $\bar{\gamma}$ rozwiązanie $y(x, \gamma)$ równania (1) nie przetnie osi x wbrew własności kresu $\bar{\gamma}$.

II. $\min\limits_{x \geqslant 0} y(x, \bar{\gamma}) = 0$. Wtedy rozwiązanie $y(x, \gamma)$ dla pewnej wartości $\gamma < \bar{\gamma}$ musiało by przeciąć dwukrotnie oś x, co nie jest możliwe.

Pozostaje jedyna możliwość $g = 0$, co kończy dowód twierdzenia *).

---

*) Pewne skróty w dowodzie zaproponował mi recenzent pracy *p. dr K. Zima*, za co w tym miejscu składam podziękowania.

Jednoznaczność rozwiązania

Twierdzenie 2. Niech prawdziwe jest twierdzenie 1. Wówczas dowolne twierdzenie o jednoznaczności dla równania (1) z warunkiem początkowym (2') jest równocześnie warunkiem jednoznaczności istnienia rozwiązania tego równania spełniającego warunek (2).

Dowód. Twierdzenie 1 gwarantuje, iż nie istnieją dwie różne wartości γ_1 i γ_2 takie, że $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x, \gamma_1) = \lim\limits_{x\to\infty} y'(x, \gamma_2) = 0$. Twierdzenie o jednoznaczności dla równania (1) gwarantuje, że warunkowi początkowemu $(y_0, 0, \ldots, 0, \bar{\gamma})$ odpowiada tylko jedno rozwiązanie, co kończy dowód twierdzenia.

Uwaga. Zadanie (2) dla równania (1) posiada w szczególności jedyne rozwiązanie, gdy funkcja $f(x, y)$ spełnia warunki:

a) $|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant L(x)|y - \bar{y}|$ dla $x > 0$ i dowolnych y,

b) funkcja $L(x)$ jest ciągła dla $x > 0$, przy czym gdy $y(x)$ i $\bar{y}(x)$ oznaczają dwa rozwiązania równania (1) dla $x \geqslant 0$, wyznaczone przez

$$y^i(0) = \bar{y}^i(0) \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

to $\lim\limits_{x\to+0} L(x)[y(x) - \bar{y}(x)] = 0$.

Bowiem przy tych założeniach rozwiązanie równania (1) spełniające (2') jest jedyne (patrz np. [1]).

Również dla $L(x) = x^{-n}$ ostatnie twierdzenie jest prawdziwe, gdyż w tym przypadku

$$\lim_{x\to+0} \frac{y(x) - \bar{y}(x)}{x^n} = \lim_{x\to+0} \frac{y^{(n)}(x) - \bar{y}^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f(0, y(0)) - f(0, \bar{y}(0))}{n!} = 0,$$

co oznacza, że spełniony jest warunek b).

Ostatnia uwaga stanowi mocne uogólnienie warunku jednoznaczności zadania (2) dla równania (1) sformułowanego w pracy [3].

PRACE CYTOWANE

[1] E. A. Coddington, N. Levinson: Theory of ordinary differential equations, New York 1955.

[2] T. Dłotko: Sur l'allure asymptotique des solutions de l'equation differentielle ordinaire du second ordre, Ann. Polon. Math., XI, 1962, 261—272.

[3] Н. Я. Гофман: Об одной асимптотической задаче. Известия высших учебных заведений, № 5 (12) 1959, 98—103.

SUR UN PROBLÈME INITIAL ASYMPTOTIQUE POUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE DU n-ième ORDRE

TADEUSZ DŁOTKO

RÉSUMÉ

Dans cette note l'auteur examine l'existence des solutions de l'équation différentielle de la forme (1) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x)) \varphi(x)$ telle que (2) $y(0) = y_0 > 0$, $y^{(1)}(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} y'(x) = 0$. Si l'hypothèse H_1 est accomplie, alors l'équation (1) possède au moins une solution $\varphi(t)$ satisfaisant aux conditions (2).

Si de plus la fonction $f(x, y)$ satisfait à la condition de Lipschitz, alors cette solution est unique.

Les résultats obtenus consistuent une forte généralisation d'un théorème de G. A. Gofman [3] où d'ailleurs il y a quelques fautes.

Oddano do Redakcji 18. VI. 1965.

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

JAN BŁAŻ

O ZADANIU BRZEGOWYM DLA PEWNEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO Z OPÓŹNIONYM ARGUMENTEM

1.

W pracy zajmuję się zadaniem brzegowym dla równania różniczkowego z opóźnionym argumentem, postaci

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi'(t) = \lambda \int\limits_0^\infty f(t, \varphi(t-s))\, d_s r(t,s), & \text{dla } t \in \langle 0, a \rangle \\ \varphi(t) = \omega(t), \text{ dla } t \leqslant 0, \ \varphi(a) = \eta. \end{cases}$$

Symbol całkowy w prawej stronie równania oznacza całkowanie w sensie Stieltjesa względem zmiennej s przy ustalonym $t \in \langle 0, a \rangle$, zaś λ jest parametrem rzeczywistym.

Niewiadomą w równaniu (1) jest funkcja $\varphi(t)$, która ma być ciągła w przedziale $(-\infty, a\rangle$ i ma mieć ciągłą pochodną dla $t \in \langle 0, a \rangle$, przy czym przez $\varphi'(0)$ rozumiem pochodną prawostronną. Żądanie to nakłada już z góry warunek ciągłości na funkcję $\omega(t)$, zwaną funkcją początkową.

Występujące w równaniu funkcje $\omega(t)$, $f(t, x)$ i $r(t, s)$ przyjmuję za wiadome i zakładam, że spełniają one następujący układ założeń:

Założenia Z.

1. Funkcja $f(t, x)$ jest ciągła w obszarze $D\{0 \leqslant t \leqslant a, -\infty < x < +\infty\}$ przy czym istnieje liczba $m > 0$, taka, że w obszarze tym spełniona jest nierówność $m \leqslant f(t, x)$.
2. Dla każdego punktu (t, x) obszaru D zachodzi nierówność $f(t, x) \leqslant \leqslant \Phi(t, |x|)$, gdzie funkcja $\Phi(t, y)$ jest ciągła, nieujemna w obszarze $D_+\{0 \leqslant t \leqslant a, y \geqslant 0\}$ i niemalejąca ze względu na zmienną y.
3. Jądro $r(t, s)$ jest określone dla $t \in \langle 0, a \rangle$, $s \geqslant 0$, niemalejące ze względu na zmienną s i spełnia założenia (v. np. [1]), gwarantujące ciągłość całki Stieltjesa

$$\Theta(t) = \int\limits_0^\infty f(t, \varphi(t-s))\, d_s r(t,s), \quad t \in \langle 0, a \rangle.$$

Istnieją ponadto dwie stałe q, V takie, że dla $t \in <0, a>$ zachodzą nierówności

$$0 < q \leqslant \overset{\infty}{\underset{s=0}{V}} r(t, s) \leqslant V.$$

4. Każda całka górna równania różniczkowego bez opóźnienia $y' = C\Phi(t, y)$, gdzie C jest dowolną stałą, jest przedłużalna na cały przedział $<0, a>$.
5. Funkcja początkowa $\omega(t)$ jest ciągła i ograniczona dla $t \leqslant 0$.

Przy tych założeniach przeprowadzę dowód istnienia rozwiązania zadania brzegowego (1).

W ostatniej części pracy omawiam zagadnienie jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

2.

Twierdzenie 1. Jeżeli są spełnione założenia Z, to istnieje co najmniej jedna liczba λ, dla której odpowiednie zadanie brzegowe (1) posiada co najmniej jedno rozwiązanie.

Dowód. Jak pokazano w pracy [2] przyjęte założenia gwarantują istnienie rozwiązania zadania Cauchy'ego:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi'(t) = \lambda \int\limits_0^\infty f(t, \varphi(t-s))\, d_s r(t, s), & \text{dla } t \in <0, a> \\ \varphi(t) = \omega(t) & \text{dla } t \leqslant 0 \end{cases}$$

przy każdym ustalonym λ.

Zastąpmy równanie (2) równoważnym mu równaniem całkowym

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi(t) = \xi + \lambda \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_0^\infty f(\tau, \varphi(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau, \ \xi = \omega(0), \ t \in <0, a>, \\ \varphi(t) = \omega(t), \ t \leqslant 0 \end{cases}$$

i zbudujmy ciąg liczb $\{\lambda_\nu\}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ oraz ciąg $\{\varphi_\nu(t)\}$ funkcji ciągłych w przedziale $(-\infty, a>$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, określone w sposób następujący:

Liczbę λ_0 obieramy dowolnie i określamy funkcję $\varphi_1(t)$ jako całkę równania

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \xi + \lambda_0 \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_0^\infty f(\tau, \varphi_1(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau, & \text{dla } t \in <0, a> \\ \varphi_1(t) = \omega(t), & \text{dla } t \leqslant 0 \end{cases}$$

Liczbę λ_1 określamy wzorem

$$\lambda_1 = (\eta - \xi) / \int_0^a \left\{ \int_0^\infty f(t, \varphi_1(t-s))\, d_s r(t,s) \right\} dt,$$

po czym przyjmujemy, iż

$$\begin{cases} \varphi_2(t) = \xi + \lambda_1 \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \varphi_2(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau, \text{ dla } t \in <0, a> \\ \varphi_2(t) = \omega(t), \text{ dla } t \leqslant 0 \end{cases}$$

Ogólnie, przyjmujemy

$$(4) \qquad \lambda_{\nu-1} = (\eta - \xi) / \int_0^a \left\{ \int_0^\infty f(t, \varphi_{\nu-1}(t-s))\, d_s r(t,s) \right\} dt, \ \nu = 2, 3, \ldots$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi_\nu(t) = \xi + \lambda_{\nu-1} \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \varphi_\nu(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau, \text{ dla } t \in <0, a> \\ \varphi_\nu(t) = \omega(t), \text{ dla } t \leqslant 0, \ \nu = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Pokażemy, że funkcje $\{\varphi_\nu(t)\}$ tworzą zbiór zwarty w przestrzeni $C <0, a>$ funkcji ciągłych w przedziale $<0, a>$ (zwartość tego zbioru dla $t \leqslant 0$ wynika bezpośrednio z określenia (5)). Zgodnie z twierdzeniem Arzeli wystarczy wykazać, że funkcje omawianego zbioru są wspólnie ograniczone i jednakowo ciągłe w przedziale $<0, a>$. Przyjmijmy więc, że $t \in <0, a>$; wtedy — zgodnie z założeniem 2 — otrzymamy

$$f(t, \varphi_\nu(t-s)) \leqslant \Phi(t, |\varphi_\nu(t-s)|) \leqslant \Phi(t, \Lambda_\nu(t-s)) \leqslant \Phi(t, \Lambda_\nu(t)),$$

gdzie $\Lambda_\nu(t) = \sup\limits_{u \leqslant t} |\varphi_\nu(u)|$.

Stąd, z warunku (5), z założenia (3) i ze znanych własności całki Stieltjesa, otrzymujemy dla $t \in <0, a>$ nierówności

$$|\varphi_\nu(t)| \leqslant |\xi| + |\lambda_{\nu-1}| \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \varphi_\nu(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant |\xi| + |\lambda_{\nu-1}| V \int_0^t \Phi(\tau, \Lambda_\nu(\tau))\, d\tau.$$

Wynika stąd nierówność

$$(6) \qquad \Lambda_\nu(t) \leqslant |\xi| + |\lambda_{\nu-1}| V \int_0^t \Phi(\tau, \Lambda_\nu(\tau))\, d\tau, \ t \in <0, a>.$$

Z drugiej strony, na mocy (4) oraz założeń 1 i 3, otrzymujemy oszacowanie

$$|\lambda_{\nu-1}| = |\eta - \xi| / \int_0^a \left\{ \int_0^\infty f(t, \varphi_{\nu-1}(t-s))\, d_s r(t,s) \right\} dt \leqslant |\eta - \xi| / m \int_0^a \bigvee_{s=0}^{\infty} r(t,s)\, dt,$$

z którego wynika nierówność

$$|\lambda_{\nu-1}| \leqslant |\eta - \xi| / mqa, \quad \nu = 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Ze związków (6) i (7) otrzymujemy nierówność całkową

$$\Lambda_\nu(t) \leqslant |\xi| + C \int_0^t \Phi(\tau, \Lambda_\nu(\tau))\, d\tau, \quad t \in \langle 0, a \rangle, \tag{8}$$

gdzie $C = V|\eta - \xi|/mqa$, z której — na mocy założeń 2 i 4 oraz twierdzenia Z. Opiala [4] — wynika, że

$$\Lambda_\nu(t) \leqslant g(t, |\xi|), \quad t \in \langle 0, a \rangle,$$

przy czym $g(t, |\xi|)$ oznacza tu całkę górną w prawo równania różniczkowego $y' = C\Phi(t, y)$, spełniającą warunek początkowy $g(0, |\xi|) = |\xi|$.

Stąd, oraz z założenia ograniczoności funkcji początkowej $\omega(t)$ w przedziale $(-\infty, 0\rangle$ (założenie 5), wnioskujemy o istnieniu takiej liczby $M > 0$, że dla $t \in (-\infty, a\rangle$ spełniona jest nierówność

$$|\varphi_\nu(t)| \leqslant M, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

co dowodzi wspólnej ograniczoności funkcji $\{\varphi_\nu(t)\}$ w rozważanym przedziale.

Załóżmy teraz, że liczby t oraz $t + h$ $(h \neq 0)$ należą do przedziału $\langle 0, a \rangle$. Wtedy — zgodnie z (5), z założeniem 2 i oszacowaniem (7) i (9) — będzie

$$|\varphi_\nu(t+h) - \varphi_\nu(t)| \leqslant |\lambda_\nu| \left| \int_t^{t+h} \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \varphi_\nu(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant (|\eta - \xi| / mqa) \left| \int_t^{t+h} \max_{0 \leqslant s} \Phi(\tau, |\varphi_\nu(\tau - s)|) \bigvee_{s=0}^{\infty} r(\tau, s)\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant (V|\eta - \xi| / mqa) \left| \int_t^{t+h} \Phi(\tau, M)\, d\tau \right|.$$

Ponieważ funkcja $\Phi(t, M)$ jest ograniczona dla $t \in \langle 0, a \rangle$ — $\Phi(t, M) \leqslant L$ — więc

$$|\varphi_\nu(t+h) - \varphi_\nu(t)| \leqslant (LV|\eta - \xi| / mqa)\, |h|.$$

Oszacowanie różnicy $|\varphi_\nu(t+h) - \varphi_\nu(t)|$ w przypadku, gdy jedna z liczb t oraz $t+h$ jest ujemna, zaś druga należy do przedziału $<0, a>$ nie przedstawia trudności. Tym samym wykazaliśmy, iż funkcje $\{\varphi_\nu(t)\}$ tworzą zbiór funkcji jednakowo ciągłych w przedziale $(-\infty, a>$; zbiór ten jest więc zwarty. Istnieje zatem podciąg $\{\mu(\nu)\}$ ciągu $\{\nu\}$ liczb naturalnych, taki, że ciąg funkcji $\{\varphi_{\mu(\nu)}(t)\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(-\infty, a>$ do pewnej funkcji $\bar{\varphi}(t)$, ciągłej w tym przedziale:

$$(10) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \varphi_{\mu(\nu)}(t) = \bar{\varphi}(t), \quad t \in (-\infty, a>.$$

Jest oczywiste, że $\bar{\varphi}(t) \equiv \omega(t)$ dla $t \leqslant 0$.

Z oszacowania (7) wynika, że ciąg $\{\lambda_{\mu(\nu)-1}\}$ jest ograniczony; można zatem wybrać z niego podciąg $\{\lambda_{\sigma(\nu)-1}\}$, zbieżny do pewnej liczby $\bar{\lambda}$:

$$(11) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \lambda_{\sigma(\nu)-1} = \bar{\lambda}.$$

Z kolei z ciągu funkcyjnego $\{\varphi_{\mu(\nu)}(t)\}$ wybierzemy podciąg $\{\varphi_{\sigma(\nu)}(t)\}$; ze związku (10) wynika, iż

$$(12) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \varphi_{\sigma(\nu)}(t) = \bar{\varphi}(t).$$

W dalszym ciągu, dla prostoty zapisu, ciągi występujące we wzorach (11) i (12), oznaczać będziemy odpowiednio przez $\{\lambda_{\sigma-1}\}$ oraz $\{\varphi_\sigma(t)\}$, opuszczając wskaźnik ν.

Pokażemy, że funkcja $\bar{\varphi}(t)$ spełnia w przedziale $<0, a>$ równanie

$$(13) \qquad \bar{\varphi}(t) = \xi + \bar{\lambda} \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \bar{\varphi}(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau, \quad t \in <0, a>$$

oraz warunek $\bar{\varphi}(a) = \eta$ (równość $\bar{\varphi}(t) \equiv \omega(t)$ dla $t \leqslant 0$ jest oczywista).

Rozważmy w tym celu różnicę

$$R_\sigma(t) = \left|\varphi_\sigma(t) - \xi - \bar{\lambda} \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \bar{\varphi}(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau\right| =$$

$$= \left|\lambda_{\sigma-1} \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \varphi_\sigma(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau - \bar{\lambda} \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \bar{\varphi}(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \bar{R}_\sigma(t) + \bar{\bar{R}}_\sigma(t),$$

gdzie

$$\bar{R}_\sigma(t) = |\lambda_{\sigma-1}| \int_0^t \left\{ \int_0^\infty [f(\tau, \varphi_\sigma(\tau - s)) - f(\tau, \bar{\varphi}(\tau - s))]\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau,$$

$$\bar{\bar{R}}_\sigma(t) = |\lambda_{\sigma-1} - \bar{\lambda}| \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \bar{\varphi}(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau.$$

Dla oszacowania funkcji $\bar{R}_\sigma(t)$ zauważmy, że ze związku (12) i założenia 1 wynika, iż dla dostatecznie dużych σ oraz $t \in \langle 0, a \rangle$ jest

$$|f(t, \varphi_\sigma(t-s)) - f(t, \bar{\varphi}(t-s))| < \varepsilon,$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią. Stąd i z oszacowania (7) wnioskujemy, że

$$\bar{R}_\sigma(t) < (|\eta - \xi| / mqa)\, Va\, \varepsilon,$$

co oznacza, iż

$$\lim_{\sigma \to \infty} \bar{R}_\sigma(t) = 0. \tag{14}$$

Z założeń 1 i 5 wynika istnienie takiej liczby $K > 0$, że dla $t \in \langle 0, a \rangle$ spełniona jest nierówność $|f(t, \bar{\varphi}(t-s))| \leqslant K$. Ponieważ ponadto $\lim_{\sigma \to \infty} \lambda_\sigma = \bar{\lambda}$, więc dla dostatecznie dużych σ zachodzi nierówność $|\lambda_{\sigma-1} - \bar{\lambda}| < \varepsilon$. Zatem dla tychże σ będzie $\bar{\bar{R}}_\sigma(t) < KaV\varepsilon$, co oznacza, iż

$$\lim_{\sigma \to \infty} \bar{\bar{R}}_\sigma(t) = 0. \tag{15}$$

Z relacji (14) i (15) wnosimy, iż $\lim_{\sigma \to \infty} R_\sigma(t) = 0$, co wobec (12) oznacza, że funkcja $\bar{\varphi}(t)$ spełnia równanie (13). Ze wzoru (4) i określenia ciągu $\{\lambda_\sigma\}$ wynika równość

$$\lambda_\sigma = (\eta - \xi) / \int_0^a \left\{ \int_0^\infty f(\tau, \varphi_\sigma(\tau - s))\, d_s r(\tau, s) \right\} d\tau. \tag{16}$$

Dla wykazania, że funkcja $\bar{\varphi}(t)$ spełnia warunek $\bar{\varphi}(a) = \eta$, wystarczy pokazać, że

$$\bar{\lambda} = (\eta - \xi) / \int_0^a \left\{ \int_0^\infty f(t, \bar{\varphi}(t-s))\, d_s r(t, s) \right\} dt. \tag{17}$$

Rozważmy w tym celu różnicę

$$D_\sigma = \left| \lambda_\sigma - (\eta - \xi) / \int_0^a \left\{ \int_0^\infty f(t, \bar{\varphi}(t-s))\, d_s r(t, s) \right\} dt \right|.$$

Korzystając ze związku (16) łatwo sprawdzamy prawdziwość nierówności

$$D_\sigma \leqslant [|\eta - \xi| / (mqa)^2] \left\{ \int_0^a \left| \int_0^\infty [f(t, \bar{\varphi}(t-s)) - f(t, \varphi_\sigma(t-s))]\, d_s r(t, s) \right| dt \right\}.$$

Rozumując analogicznie jak przy szacowaniu funkcji $\bar{R}_\sigma(t)$ stwierdzamy bez trudu, iż dla dostatecznie dużych σ prawa strona ostatniej nierówności jest dowolnie mała. Oznacza to, że spełniona jest równość (17). Tym samym dowód twierdzenia 1 został zakończony.

Uwaga. Jeżeli funkcja $f(t,x)$ nie zachowuje w obszarze D stałego znaku, to problem brzegowy (1) może nie posiadać w ogóle rozwiązania. Jako przykład rozpatrzmy równanie różniczkowe ze stałym opóźnieniem argumentu

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \lambda\,[4 - \varphi(t-1)], \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ \varphi(t) = 1 \text{ dla } -1 \leqslant t \leqslant 0. \end{cases}$$

Stosując metodę kroków znajdziemy rozwiązanie tego równania

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ 3\lambda t + 1 & \text{dla } \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ -\frac{3}{2}\lambda^2 t^2 + 3\lambda(1+\lambda)t - \frac{3}{2}\lambda^2 + 1 & \text{dla } \ \ 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

skąd wynika, że

$$\varphi(2) = -\frac{3}{2}\lambda^2 + 6\lambda + 1.$$

Łatwo teraz zauważyć, że warunek postaci $\varphi(2) = \eta$, gdzie $\eta > 7$ nie może być spełniony dla żadnej wartości λ; warunek $\varphi(2) = 7$ jest spełniony dla jednej wartości tego parametru, zaś warunek typu $\varphi(2) = \eta$, przy $\eta < 7$ jest spełniony dla dwu wartości parametru λ.

3.

Dla zbadania zależności rozwiązania zadania brzegowego (1) od parametru λ oraz jednoznaczności tego rozwiązania, rozważmy dwa równania różniczkowe z opóźnionym argumentem

$$\begin{cases} \varphi'_i(t) = \lambda_i \int\limits_0^\infty f_i(t, \varphi_i(t-s))\, d_s r_i(t,s) & \text{dla } t \in \langle 0, a \rangle \\ \varphi_i(t) = \omega_i(t) \text{ dla } t \leqslant 0, & i = 1,2 \end{cases} \tag{18}$$

i przyjmijmy, że funkcje $f_i(t,x)$ są ciągłe w obszarze D, zaś funkcje $r_i(t,s)$ oraz $\omega_i(t)$ spełniają odpowiednie założenia 3 oraz 5 (str. 107), $i = 1,2$. Załóżmy ponadto, że dla każdej pary $(t,\bar{x})$ i $(t,\bar{\bar{x}})$ punktów obszaru D zachodzi nierówność

$$|f_1(t,\bar{x}) - f_2(t,\bar{\bar{x}})| \leqslant \Psi(t, |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|) \tag{19}$$

gdzie funkcja $\Psi(t, y)$ jest ciągła, nieujemna w obszarze D_+ i niemalejąca ze względu na zmienną y.

Załóżmy, że funkcje $\varphi_1(t) = \varphi_1(t, \lambda_1)$ i $\varphi_2(t) = \varphi_2(t, \lambda_2)$ są rozwiązaniami odpowiednich równań (18) i oznaczmy

$$M = \max\{\sup_{t \leqslant 0} |\omega_2(t)|, \max_{0 \leqslant t \leqslant a} |\varphi_2(t)|\},$$
$$K = \max |f_2(t, x)| \text{ w prostokącie } P\{0 \leqslant t \leqslant a, |x| \leqslant M\},$$
$$\gamma = |\lambda_1 - \lambda_2| KVa,$$
$$\varkappa(t) = |\lambda_1| K \bigvee_{s=0}^{\infty} [r_1(t, s) - r_2(t, s)] \text{ dla } t \in \langle 0, a \rangle,$$
$$\eta = \sup_{t \leqslant 0} |\omega_1(t) - \omega_2(t)| + \gamma,$$
$$\lambda(t) = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|, \ \Lambda(t) = \sup_{u \leqslant t} |\lambda(u)|, \ t \leqslant a,$$

i przyjmijmy, że funkcja $\varkappa(t)$ jest ciągła w przedziale $\langle 0, a \rangle$ oraz, że całka górna równania różniczkowego bez opóźnienia

(20) $$y' = C\Psi(t, y) + \varkappa(t), \text{ gdzie } C = |\lambda_1| V$$

jest przedłużalna na przedział $\langle 0, a \rangle$.

Nietrudno teraz pokazać, że w przedziale $\langle 0, a \rangle$ zachodzi nierówność całkowa

(21) $$\Lambda(t) \leqslant \eta + \int_0^t [C\Psi(\tau, \Lambda(\tau)) + \varkappa(\tau)]\, d\tau,$$

z której, na mocy cytowanego już twierdzenia Z. Opiala, wynika oszacowanie

(22) $$\sup_{u \leqslant t} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \leqslant g(t, \eta), \ t \in \langle 0, a \rangle.$$

Symbol $g(t, \eta)$ oznacza tu całkę górną w prawo równania różniczkowego (20), wychodzącą z punktu $(0, \eta)$.

Tym samym udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcje $\varphi_i(t)$ są rozwiązaniami odpowiednich równań (18), funkcje $f_i(t, x)$ są ciągłe w obszarze D i spełniają nierówność (19), zaś funkcje $r_i(t, s)$ i $\omega_i(t)$ $(i = 1, 2)$ spełniają założenia 3 i 5 (str. 107), to dla $t \in \langle 0, a \rangle$ zachodzi nierówność (22).

Z twierdzenia 2 uzyskamy pewne wnioski, dotyczące jednoznaczności i ciągłej zależności rozwiązania (zadania Cauchy'ego dla rozpatrywanego równania) od parametru.

Połóżmy w tym celu w związkach (18): $f_1(t, x) \equiv f_2(t, x)$ dla $(t, x) \in D$, $r_1(t, s) \equiv r_2(t, s)$ dla $t \in \langle 0, a \rangle$, $s \leqslant 0$, $\omega_1(t) \equiv \omega_2(t)$ dla $t \leqslant 0$; wtedy $\varkappa(t) \equiv 0$, zaś $\eta = \gamma = KV|\lambda_1 - \lambda_2| a$.

Funkcje $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ oznaczać teraz będą dwa rozwiązania tego samego równania, odpowiadające kolejno wartościom λ_1 i λ_2 parametru λ. Z oszacowania (22) wynika wprost

Wniosek 1. Jeżeli są spełnione założenia twierdzenia 2, $g(t,0) \equiv 0$ oraz funkcja $g(t,\eta)$ dla dostatecznie małych η zależy w sposób ciągły od warunków początkowych, to rozwiązanie zadania Cauchy'ego dla rozpatrywanego równania różniczkowego, zależy w sposób ciągły od parametru λ.

Przyjmując w równaniach (18): $f_1(t,x) \equiv f_2(t,x)$, $r_1(t,s) \equiv r_2(t,s)$, $\omega_1(t) \equiv \omega_2(t)$ oraz $\lambda_1 = \lambda_2$, tzn. $\eta = 0$, możemy wypowiedzieć

Wniosek 2. Jeżeli są spełnione założenia twierdzenia 2 oraz $g(t,0) \equiv 0$ dla $t \in <0,a>$, to przy ustalonej wartości parametru λ zadanie Cauchy'ego dla rozpatrywanego równania może posiadać co najwyżej jedno rozwiązanie $\varphi(t)$.

Załóżmy teraz, że funkcje $\varphi_1(t)$ i $\varphi_2(t)$ są rozwiązaniami zadania brzegowego (1), tzn.

$$(23) \qquad \begin{cases} \varphi_1'(t) = \lambda_1 \int\limits_0^\infty f(t, \varphi_1(t-s))\, d_s r(t,s) & \text{dla } t \in <0,a> \\ \varphi_1(t) = \omega(t) \text{ dla } t \leqslant 0, \ \varphi_1(a) = \eta \end{cases}$$

oraz

$$(24) \qquad \begin{cases} \varphi_2'(t) = \lambda_2 \int\limits_0^\infty f(t, \varphi_2(t-s))\, d_s r(t,s) & \text{dla } t \in <0,a> \\ \varphi_2(t) = \omega(t) \text{ dla } t \leqslant 0, \ \varphi_2(a) = \eta \end{cases}$$

i przyjmijmy następujące założenia

Założenia Z^*.

1*. Funkcja $f(t,x)$ spełnia założenia 1 (str. 107) i jest niemalejąca ze względu na zmienną x.

2*. Funkcje $r(t,s)$ i $\omega(t)$ spełniają odpowiednio założenia 3 i 5 (str. 107).

Udowodnimy

Twierdzenie 3. Jeżeli są spełnione założenia Z^*, to istnieje co najwyżej jedna wartość parametru λ, dla której zadanie brzegowe (1) posiada rozwiązanie.

Przypuśćmy, dla dowodu niewprost, że występujące w związkach (23) i (24) liczby λ_1 i λ_2 są różne, np. $\lambda_1 < \lambda_2$. Wtedy, dla $t \in <0,a>$ będzie

$$\varphi_1'(t) = \lambda_1 \int\limits_0^\infty f(t, \varphi_1(t-s))\, d_s r(t,s) < \lambda_2 \int\limits_0^\infty f(t, \varphi_1(t-s))\, d_s r(t,s).$$

Otrzymaliśmy więc silną nierówność różniczkową

$$\begin{cases} \varphi'_1(t) < \lambda_2 \int\limits_0^\infty f(t, \varphi_1(t-s))\, d_s r(t,s) \text{ dla } t \in \langle 0, a \rangle \\ \varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \omega(t) \text{ dla } t \leqslant 0, \end{cases}$$

z której, wobec znanego twierdzenia o nierówności różniczkowej z opóźnionym argumentem (v. [3], [7]), wynika silna nierówność

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) \text{ dla } t \in \langle 0, a \rangle.$$

Nierówność ta przeczy jednak warunkowi $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = \eta$, co kończy dowód twierdzenia.

Uwaga. Bez istotnych zmian założeń i rozumowania można przenieść powyższe twierdzenia na przypadek problemu brzegowego, typu

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \lambda \int\limits_0^\infty f(t, \varphi(t-s))\, d_s r(t,s) \text{ dla } t \in \langle 0, a \rangle \\ \varphi(t) = \omega(t) \text{ dla } t \leqslant 0, \varphi'(a) = \eta. \end{cases}$$

Przedstawione w pracy twierdzenia uogólniają niektóre wyniki K. Zawischy [6] i S. Takahashi [5], dotyczące równań różniczkowych zwyczajnych.

PRACE CYTOWANE

[1] A. Bielecki, M. Maksym: *Sur une généralisation d'un théorème de A. D. Myshkis concernant un système d'équations différentielles ordinaires à argument retardé*, Folia Soc. Sci. Lublinensis, 2 (1962), p. 74—78.

[2] J. Błaż: *Sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle à argument retardé*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), p. 9—14.

[3] J. Błaż, K. Zima: *Über eine Differentialungleichung mit Verzögerung*, Ann. Polon. Math. 14 (1964), p. 311—319.

[4] Z. Opial: *Sur un système d'inégalites intégrales*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 200—207.

[5] S. Takahashi: *Die Differentialgleichung $y' = kf(x, y)$*, Tôhoku Math. Journ. 34 (1931), p. 249—256.

[6] K. Zawischa: *Über die Differentialgleichung $y' = kf(x, y)$ deren Lösungskurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen soll*, Monatschr. für Math. und Phys. 37 (1930), p. 103—124.

[7] K. Zima: *Sur une inegalité différentielle à l'argument retardé*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), p. 303—308.

SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES POUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE À ARGUMENT RETARDÉ

RÉSUMÉ

Considérons l'équation différentielle à argument retardè

(1) $$\varphi'(t)=\lambda\int\limits_0^\infty f(t,\varphi(t-s))\,d_s r(t,s), \text{ pour } 0\leqslant t\leqslant a$$

et la condition aux limites

(2) $$\varphi(t)=\omega(t) \text{ pour } t\leqslant 0,\ \varphi(a)=\eta,$$

où $a\ (a>0)$ et η sont des constantes et λ est un paramètre.

La fonction $f(t,x)$ est définie et continue dans le domaine $D\{0\leqslant t\leqslant a, -\infty<x<+\infty\}$ et satisfait pour tout point du domaine $D\,a$ l'inégalité $m\leqslant f(t,x)$, $0<m=\text{const}$. De plus $f(t,x)\leqslant\Phi(t,|x|)$, $(t,x)\in D$, où la fonction $\Phi(t,y)$ est continue et non négative dans la domaine $D_+\{0\leqslant t\leqslant a, y\geqslant 0\}$, non décroissante par rapport à la variable y et telle, que toutes les intégrales supérieures de l'équation différentielle sans retard $y'=k\Phi(t,y)$ $k=\text{const}$, sont prolongeables à l'intervalle $<0,a>$.

La fonction initiale $\omega(t)$ est continue et bornée dans l'intervalle $(-\infty,0>$. Le noyau $r(t,s)$ est une fonction définie pour $t\in<0,a>$. et $s\geqslant 0$ et telle (v. p. ex. [1]), que l'intégrale de Stieltjes

$$\Theta(t)=\int\limits_0^\infty f(t,\varphi(t-s))\,d_s r(t,s)$$

est continue dans l'intervalle $<0,a>$. La variation

$$v(t)=\bigvee_{s=0}^{\infty} r(t,s)$$

satisfait aux inégalites $0<q\leqslant v(t)\leqslant V$ pour $t\in<0,a>$ (q et V sont des constantes).

Dans ces hypothèses je démontre qu'il existe au moins une valeur du paramètre λ, pour laquelle le problème (1) — (2) admet au moins une solution.

Dans la seconde partie de la présente note j'etablis des conditions suffisantes pour l'unicité de la solution du problème (1) — (2).

Oddano do Redakcji 2. VIII. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

K. ZIMA

EFEKTYWNE ROZWIĄZANIA NIEKTÓRYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH Z FUNKCYJNYM ARGUMENTEM

W pracy niniejszej podane zostaną pewne twierdzenia dotyczące struktury całki ogólnej niektórych liniowych równań różniczkowych pierwszego i drugiego rzędu o funkcyjnym argumencie.

1. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu

Niech $a(t)$ i $\delta(t)$ będą dwoma funkcjami ciągłymi w przedziale $< 0, T)$, $T \leqslant \infty$. Będziemy zakładać, że $\delta(t) \geqslant 0$ oraz $\delta(t) \in < 0, T)$ gdy $t \in < 0, T)$. Rozważać będziemy następujący problem Cauchy'ego

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) = a(t) \cdot x(\delta(t)) \text{ dla } t \in < 0, T), \\ x(0) = \alpha. \end{cases}$$

W zależności od funkcji $\delta(t)$, równanie (1) może przedstawiać równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem, równanie z wyprzedzeniem, równanie typu mieszanego, zwyczajne równanie różniczkowe itp.

W odniesieniu do równania (1) ważną rolę będzie odgrywał następujący szereg funkcyjny

$$(2) \quad \mathring{x}(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t), \text{ gdzie } a_1(t) = \int_0^t a(s)\,ds,\ a_{i+1}(t) = \int_0^t a(s) \cdot a_i(\delta(s))\,ds.$$

Szereg (2) jest zawsze zbieżny w punkcie $t = 0$. Zależnie zaś od zespołu funkcji $a(t)$ i $\delta(t)$ może być zbieżny w szerszym lub węższym podprzedziale przedziału $< 0, T)$.

Udowodnimy obecnie pewne twierdzenie dotyczące związku szeregu (2) z problemem (1). Przyjmijmy w tym celu, że istnieje liczba A, $0 < A \leqslant T$, taka, że $\delta(t) \in < 0, \delta(A))$, gdy $t \in < 0, A)$. Niech dalej $A^* = \max(A, \delta(A))$. (Oczywiście $A^* = \infty$ gdy $A = \infty$).

Twierdzenie 1. Jeśli szereg (2) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $< 0, A^*)$ (względnie niemal jednostajnie zbieżny w przedziale $< 0, \infty)$ gdy $A^* = \infty$) to funkcja

$$(3) \qquad x(t) = \overset{*}{x}(t) \cdot \alpha = \alpha \cdot [1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)]$$

jest rozwiązaniem problemu (1) w przedziale $< 0, A)$.

Dowód. Różniczkując szereg (3) formalnie, wyraz po wyrazie, otrzymujemy

$$(4) \qquad (\alpha [1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)])' = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a'_i(t) = \alpha \cdot a(t) [1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\delta(t))].$$

Otrzymany szereg pochodnych jest — w myśl założenia — zbieżny dla tych wartości t, dla których $\delta(t) \in < 0, A^*)$, tzn. dla $t \in < 0, A)$. W tym przedziale różniczkowanie szeregu (3) wyraz po wyrazie jest dozwolone i wobec tego dla $t \in < 0, A)$ ma miejsce równość (4). Oznacza to, że funkcja (3) jest rozwiązaniem problemu (1) w przedziale $< 0, A)$, bowiem prócz równości (4) mamy jeszcze $a_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ i stąd $x(0) = \alpha \cdot (1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)) = \alpha$.

Przypadki, gdy szereg (2) jest zbieżny niemal jednostajnie. W tym miejscu przyjmiemy, że funkcje $a(t)$ i $\delta(t)$ są określone i ciągłe w przedziale $< 0, \infty)$.

Jeśli funkcja $\delta(t)$ spełnia nierówność $\delta(t) \leqslant t$ (tzn., że równanie (1) jest równaniem z opóźnionym argumentem), wówczas szereg (2) jest jednostajnie zbieżny w każdym domkniętym przedziale $< 0, T >$.

Niech bowiem $M = \max\limits_{< 0, T >} |a(t)|$. Wtedy $|a_1(t)| \leqslant Mt$, $|a_2(t)| \leqslant Mt^2/2!, \ldots$, $|a_n(t)| \leqslant Mt^n/n!$ dla $t \in < 0, T >$. Z otrzymanych oszacowań wynika jednostajna zbieżność szeregu (2) w przedziale $< 0, T >$.

W szczególności, jeśli $\delta(t) \equiv t$, $a_n(t) = \left(\int\limits_0^t a(s)\, ds\right)^n / n!$ ((3), str. 73), a stąd $x(t) = \alpha \cdot \exp\left(\int\limits_0^t a(s)\, ds\right)$, co zgadza się ze znanym wzorem na rozwiązanie liniowego równania różniczkowego zwyczajnego.

Z odpowiednich twierdzeń o jednoznaczności wynika, że w przypadku gdy $\delta(t) \leqslant t$, funkcja $x(t)$ wyrażona wzorem (3) jest jedynym rozwiązaniem poblemu (1).

Przykłady. Przykład 1. Dla równania różniczkowego $x'(t)=e^{-t}\cdot x(2t)$, $t \in < 0, \infty)$, z warunkiem początkowym $x(0) = \alpha$, rozwiązaniem w przedziale $< 0, \infty)$ jest funkcja $x(t) = \alpha \cdot \left[1 - e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-3t} - \frac{1}{3 \cdot 7} e^{-7t} + \right.$
$\left. + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 15} e^{-15t} \dots \right]$

Przykład 2. Rozwiązaniem równania $x'(t) = t^n \cdot x(t^k)$, $x(0) = \alpha$ w przedziale $< 0,1 >$ jest funkcja

$$x(t) = \alpha \left[+1 \frac{t^n}{n+1} + \frac{t^{(n+1)(k+1)}}{(n+1)^2 (k+1)} + \frac{t^{(n+1)[k^2+k+1]}}{(n+1^3)(k+1)[k^2+k+1]} + \right.$$
$$+ \frac{t^{(n+1)[k^3+k^2+k+1]}}{(n+1)^4 (k+1)(k^2+k+1)(k^3+k^2+k+1)} +$$
$$\left. + \dots = \alpha \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{(n+1)\cdot Q_{i-1}(k)}}{(n+1)^i \prod_{s=0}^{i-1} Q_s(k)} \right], \text{ gdzie } Q_o(k) = 1,\ Q_r(k) = k^r + k^{r-1} + \right.$$
$$+ k^{r-2} + \dots + k + 1.$$

Przykład 3. Weźmy pod uwagę równanie $x'(t) = x(2t)$, $x(0) = \alpha$. W tym przypadku szereg (2) ma postać

$$x(t) = \alpha \left[1 + t + \frac{2}{1 \cdot 2} t^2 + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 8}{4!} t^4 + \dots \right]$$

Powyższy szereg jest zbieżny jedynie dla $t = 0$. Nie oznacza to jednak, że równanie w przykładzie 3 nie posiada w ogólne rozwiązania. Bliżej tę kwestię wyjaśni poniższy przykład:

Przykład 4. Jeśli dla równania $x'(t) = x\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, $x(0) = 0$ rozpiszemy szereg (3) to otrzymamy funkcję identycznie równą zeru w przedziale $< 0, \infty)$, która jest trywialnym rozwiązaniem równania w przykładzie czwartym. Innym rozwiązaniem tegoż równania jest funkcja $x(t) = \sin t$, którego to rozwiązania nie da się uzyskać na podstawie podanego tu wzoru (3). Ostatnie dwa równania są tzw. równaniami z wyprzedzającym argumentem. W stosunku do takich równań niewiele wiadomo na temat istnienia rozwiązania i nie ma twierdzeń o absolutnej jednoznaczności.

Znane dotychczas twierdzenia o jednoznaczności (1), (2), wymagają stosunkowo mocnych założeń odnośnie równania z przyśpieszeniem i gwarantują jednoznaczność rozwiązania w pewnej, specyficznej dla danego równania klasie funkcji. Twierdzenia te gwarantują jednocześnie istnienie rozwiązania. Założenia wzmiankowanych wyżej twierdzeń spełnia np.

równanie w przykładzie 1 i dlatego możemy twierdzić, że otrzymane przez nas rozwiązanie jest jedyne w klasie funkcji podwykładniczych, spełniających nierówność $|x(t)| \leqslant \exp(k \cdot e^{-t})$, gdzie k jest pewną stałą.

Niejednorodne równanie różniczkowe. Weźmy pod uwagę równanie

$$
(5) \qquad \begin{cases} x'(t) = a(t) \cdot x(\delta(t)) + b(t), \ t \in \langle 0, T) \\ x(0) = \alpha. \end{cases}
$$

Zakładamy, że funkcje $a(t)$, $\delta(t)$ i $b(t)$ są ciągłe w przedziale $\langle 0, T)$ a ponadto $\delta(t) \geqslant 0$. Jeśli w oparciu o funkcje $a(t)$, $\delta(t)$ i $b(t)$ zbudujemy następujący szereg.

$$
(6) \qquad x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t), \text{ gdzie } b_1(t) = \int_0^t b(s)\,ds, \ b_{i+1}(t) = \int_0^t a(s) \cdot b_i(\delta(s))\,ds
$$

to szereg ten jest formalnym, szczególnym rozwiązaniem równania (5), tzn. w stosunku do tego szeregu jest słuszne analogiczne twierdzenie do twierdzenia 1. Łatwo stwierdzić, że gdy $\delta(t) \leqslant t$, wówczas szereg (6) jest zbieżny niemal jednostajnie. W szczególności, gdy $\delta(t) \equiv t$, $x(t) = \exp(\int_0^t a(s)\,ds) \cdot \int_0^t b(s) \cdot \exp(-\int_0^s a(u)\,du)\,ds$.

Całką ogólną równania (5) jest suma funkcji $\overset{*}{x}(t)$ i $\overset{**}{x}(t)$ gdzie $\overset{*}{x}(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, zaś $\overset{**}{x}(t)$ szczególną całką pełnego równania (5).

2. Równanie różniczkowe drugiego rzędu

Zajmiemy się teraz równaniem różniczkowym postaci

$$
(7) \qquad x''(t) = a(t) \cdot x(\delta(t)) + b(t), \ a(t), \delta(t) \text{ i } b(t) \text{ ciągłe dla } t \in \langle 0, T)
$$

oraz $\delta(t) \geqslant 0$, z warunkiem początkowym $x(0) = \alpha, x'(0) = \beta$.

Zanim podamy formalne rozwiązanie problemu Cauchy'ego (7) przy dowolnej funkcji $\delta(t)$, zajmiemy się krótko przypadkiem, gdy $\delta(t) \equiv t$.

Niech $\varphi(t)$ będzie dowolną funkcją ciągłą w przedziale $\langle 0, T)$. Określimy pewne operacje działające na funkcję $\varphi(t)$, a mianowicie

$$
(8) \qquad I\varphi \overset{\text{def.}}{=} \int_0^t \varphi(s)\,ds, \quad m\varphi \overset{\text{def.}}{=} a(t) \cdot \varphi(t),
$$

gdzie $a(t)$ jest funkcją występującą w równaniu (7).

Określmy z kolei następujące trzy funkcje

$$z_0(t) = 1 + I^2a + I^2mI^2a + I^2mI^2mI^2a + \ldots$$

$$z_1(t) = I^3a + I^3mI^2a + I^2mI^3a + I^3mI^2mI^2a + I^2mI^3mI^2a + I^2mI^2mI^3a + \ldots$$

$$z_2(t) = I^2b + I^2mI^2b + I^2mI^2mI^2b + \ldots$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem problemu (7) w przedziale $< 0, T)$ jest funkcja

$$\tilde{x}(t) = (\alpha + \beta t) \cdot z_0(t) - 2\beta \cdot z_1(t) + z_2(t). \tag{9}$$

Szeregi określające funkcje $z_0(t)$, $z_1(t)$ i $z_2(t)$ są niemal jednostajnie zbieżne i można je dwukrotnie różniczkować wyraz po wyrazie. Prócz tego, funkcja $z_2(t)$ spełnia równanie (7) i $z_2(0) = z'_2(0) = 0$. Funkcja $z_0(t)$ spełnia równanie jednorodne i warunek $z_0(0) = 1, z'_0(0) = 0$. Wreszcie funkcja $z_1(t)$ czyni zadość tożsamości różniczkowej

$$z_1''(t) = z_0'(t) + a(t) \cdot z_1(t),\ z_1(0) = z'_1(0) = 0.$$

Z tych własności funkcji $z_0(t)$, $z_1(t)$ i $z_2(t)$ można wywnioskować, że rozwiązaniem problemu (7) jest funkcja określona wzorem (9).

P r z y k ł a d 5. Dla równania $x''(t) = t \cdot x(t) + t^a$ funkcje $z_0(t)$, $z_1(t)$ i $z_2(t)$ przedstawiają się następująco

$$z_0(t) = \frac{t^3}{2\cdot 3} + \frac{t^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{t^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \cdots,$$

$$z_1(t) = \frac{t^4}{4!} + \frac{9\,t^7}{7!} + \frac{100\,t^{10}}{10!} + \frac{1380\,t^{13}}{13!} + \cdots,$$

$$z_2(t) = \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{t^{\alpha+5}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+5)} +, \cdots$$

Funkcję $\tilde{x}(t)$ określoną wzorem (9), a będącą rozwiązaniem problemu (7) można zapisać inaczej, a mianowicie

$$\tilde{x}(t) = \alpha\, z_0(t) + \beta\,(t \cdot z_0(t) - 2 \cdot z_1(t)) + z_2(t). \tag{10}$$

Z zapisu (10) łatwo wyciągnąć wnioski dotyczące istnienia rozwiązania problemu brzegowego dla równania (7). Istotnie, jeśli dla jakiegoś a liczba $a \cdot z_0(a) - 2 \cdot z_1(a) \neq 0$, to równanie $\tilde{x}(a) = \alpha\, z_0(a) + \beta\,(a \cdot z_0(a) - 2\, z_1(a)) + z_2(a)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie na β, a to oznacza, że z punktu $(0, \alpha)$ można poprowadzić dokładnie jedną całkę (pod kątem $\beta^* =$ arctg β), przechodzącą przez punkt $(a, \tilde{x}(a))$. Np. odnośnie równania w przykładzie 5 jest widoczne, że dla $a = 1$ $z_0(1) - 2 \cdot z_1(1) > 0$. Stąd wniosek, że z każdego punktu osi $t = 0$ można poprowadzić całkę równania 5 docierającą do dowolnie wybranego punktu na osi $t = 1$.

Równanie drugiego rzędu z funkcyjnym argumentem. Zajmiemy się teraz równaniem postaci

$$(11) \qquad \begin{cases} x''(t) = a(t) \cdot x(\delta(t)) + b(t), & t \in \langle 0, T), \\ x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta. \end{cases}$$

O funkcjach $a(t)$, $\delta(t)$ i $b(t)$ zakładamy, że są ciągłe w przedziale $\langle 0, T)$ oraz funkcja $\delta(t)$ jest różniczkowalna i nieujemna.

Formalnym rozwiązaniem problemu (11) jest funkcja następująca

$$(12) \qquad x(t) = \alpha \cdot \mathring{z}_0(t) + \beta \cdot \mathring{z}_1(t) + \mathring{z}_2(t), \text{ gdzie}$$

$$\mathring{z}_0(t) = 1 + I^2a + I^2mpI^2a + I^2mpI^2mpI^2a + \dots$$

$$\mathring{z}_2(t) = I^2b + I^2mpI^2b + I^2mpI^2mpI^2b + \dots$$

$$\mathring{z}_1(t) = t + \delta(t)\, I^2a + \delta_1(t)\, I^2mpI^2a + \delta_2(t)\, I^2mpI^2mpI^2a + \dots$$
$$- [I^2m_1Ia + Im_1I^2a + I^2mpIm_1I^2a + I^2mpI^2m_1Ia + Im_2I^2mpI^2a +$$
$$+ I^2m_2ImpI^2a + \dots]$$

Litera I oznacza operację całkowania, m — operację mnożenia przez funkcję $a(t)$, p — operację podstawienia w miejsce t liczby $\delta(t)$ zaś m_k oznacza mnożenie przez funkcję $\delta'_k(t)$, gdzie $\delta_k(t) = \delta\{\dots\delta[\delta(t)]\}$, ($k$ — krotna iterata funkcji $\delta(t)$).

Odnośnie formalnego rozwiązania (12) można udowodnić analogiczne twierdzenie do twierdzenia 1, a mianowicie

Twierdzenie 2. Niech dla $t \in \langle 0, A)$ $A \leqslant T$, $\delta(t) \in \langle 0, \delta(A))$. Niech dalej $A^* = \max(A, \delta(A))$. Jeśli szeregi $\mathring{z}_0(t)$, $\mathring{z}_1(t)$ i $\mathring{z}_2(t)$ są zbieżne jednostajnie w przedziale $\langle 0, A^*)$ to funkcja (12) jest rozwiązaniem problemu (11) w przedziale $\langle 0, A)$.

Dowód twierdzenia 2 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1.

Szeregi określające funkcje $\mathring{z}_0(t)$, $\mathring{z}_1(t)$ i $\mathring{z}_2(t)$ są zbieżne niemal jednostajnie, gdy $\delta(t) \leqslant t$, tzn. gdy równanie (11) jest równaniem z opóźnionym argumentem. Wówczas w każdym ograniczonym przedziale $\langle 0, T^* \rangle$ można uzyskać oszacowania

$$|a(t)| \leqslant M, \quad |\delta(t)| \leqslant K, \text{ a stąd } |\delta'_n(t)| \leqslant K^n.$$

Można więc funkcje $\mathring{z}_0(t)$, $\mathring{z}_1(t)$ i $\mathring{z}_2(t)$, a ściślej mówiąc szeregi te funkcje określające zmajoryzować zbieżnymi szeregami wykładniczymi.

PRACE CYTOWANE

[1] J. Błaż: O pewnym układzie równań różniczkowo-całkowych z wyprzedzającym argumentem, Zeszyty Naukowe WSP, Sekcja Mat. Nr 4 (1964).

[2] T. Dłotko: O istnieniu rozwiązań pewnego równania różniczkowego z wyprzedzającym argumentem, Zeszyty Naukowe WSP, Sekcja Mat. Nr 4 (1964).

[3] Г. Поля, Г. Сеге: Задачи и теоремы из анализа, Москва 1956.

RÉSOLUTIONS EFFECTIVES DES CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC L'ARGUMENT FONCTIONNEL

K. ZIMA

RÉSUMÉ

Dans cette note nous considérons l'équation différentielle du première ordre

(1) $$x'(t) = a(t) \cdot x(\delta(t)) + b(t), \ t \in \langle 0, T), \ x(0) = \alpha,$$

et l'équation du second ordre

(2) $$x''(t) = a(t) \cdot x(\delta(t)) + b(t), \ x'(0) = \beta, \ x(0) = \alpha.$$

Les fonctions $a(t)$, $b(t)$ et $\delta(t)$ sont continues dans l'intervalle $\langle 0, T)$, $T \leqslant \infty$, et $\delta(t) \geqslant 0$.

Soit I l'operateur de l'ntegration et m_a l'operateur de la multiplication par la fonction $a(t)$, c'est — à-dire

$$I\varphi = \int_0^t \varphi(s), \ m_a\varphi = a(t) \cdot \varphi(t).$$

Définisons les fonctions $x_0(t)$, $x_1(t)$, comme suit

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t), \ b_1(t) = \int_0^t b(s)\,ds, \ b_{i+1}(t) = \int_0^t a(s) \cdot b_i(\delta(s))\,ds,$$

$$x_0(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t), \ a_1(t) = \int_0^t a(s)\,ds, \ a_{i+1}(t) = \int_0^t a(s) \cdot a_i(\delta(s))\,ds.$$

Théorème 1. Si les fonctions $x_0(t)$ et $x_1(t)$ sont définiées dans l'intervalle $\langle 0, \delta(A))$, alors la fonction $\tilde{x}(t) = \alpha \cdot x_0(t) + x_1(t)$ est la solution du problème (1).

Désignos par x_0, x_1 etx_2 les fonctions suivantes

$$\overset{*}{z}_0(t) = 1 + I^2a + I^2mpI^2a + I^2mpI^2mpI^2a + \ldots$$

$$\overset{*}{z}_2(t) = I^2b + I^2mpI^2b + I^2mpI^2mpI^2b + \ldots$$

$$\overset{*}{z}_1(t) = [t + \delta(t)\, I^2a + \delta_1(t)\, I^2mpI^2a + \delta_2(t)\, I^2mpI^2mpI^2a + \ldots] -$$

$$- [I^2m_1I^2a + Im_1I^2a + I^2mpI^2m_1I^2a + \ldots]$$

où p est l'operateur de la substitution $(t \approx \delta(t))$, m_i — l'operateur de la multiplication par la fonction $\delta'_i(t)$, $\delta_i(t) = \underbrace{\delta(\ldots(\delta(\delta}_{i}(t))))$.

Théorème 2. Sous les hypothèses convenables, la fonction

$$z(t) = \alpha \cdot z_0(t) + \beta \cdot z_1(t) + z_2(t)$$

est la solution du problème (2).

Oddano do Redakcji 2. VIII. 1965

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
SEKCJA MATEMATYKI, ZESZYT NR 5 (OGÓLN. ZB. NR 30), 1966 R.

KRYSTYNA SKÓRNIK

POSTAĆ FUNKCJI LOKALNIE CAŁKOWALNEJ, KTÓREJ m-ta POCHODNA LOKALNA ZNIKA PRAWIE WSZĘDZIE

Wiadomo, że jeżeli funkcja $f(x)$ zmiennej punktowej $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$ ma pochodne ciągłe aż do rzędu $m = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$ i jeżeli $f^{(m)}(x) = 0$, to funkcja $f(x)$ daje się przedstawić w postaci

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\mu_1 - 1} \xi_1^i \, f_{1i}(x) + \ldots + \sum_{i=0}^{\mu_q - 1} \xi_q^i \, f_{qi}(x),$$

gdzie funkcja f_{ji} jest stała względem zmiennej ξ_i.

Dowód tego twierdzenia można znaleźć między innymi w książeczce J. Mikusińskiego i R. Sikorskiego ,,The Elementary Theory of Distributions", na str. 46. W tejże książeczce jest analogiczne twierdzenie wypowiedziane także dla przypadku, gdy f jest funkcją całkowalną i pochodna $f^{(m)}$ jest rozumiana w sensie uogólnionym. Jednakże dowód tam podany jest (dla przypadku funkcji całkowalnych) niekompletny*). Celem tej pracy jest podanie dowodu kompletnego. Okazuje się przy tym, że nie jest istotne ograniczanie się do funkcji o wartościach rzeczywistych lub zespolonych. Twierdzenie jest prawdziwe dla funkcji o wartościach w dowolnej przestrzeni Hilberta i w tej postaci jest udowodnione w tej pracy. Zauważmy jeszcze, że szczególny przypadek, gdy wartości funkcji są rzeczywiste, był rozważany także przez H. Königa w Mathematische Nachrichten 9 (1953) str. 129—148.

Całość mojej pracy złożona jest z trzech paragrafów. W pierwszym została wprowadzona potrzebna w pracy symbolika i definicje. Między innymi podane zostały tam definicje zbieżności według normy, zbieżności lokalnej i pochodnej lokalnej. W drugim paragrafie udowodnione zostały twierdzenia dotyczące funkcji lokalnie całkowalnych, które posiadają pochodne lokalne oraz znajdują się tam uogólnienia twierdzeń Rolle'a i La-

---

*) Luka jest w dowodzie twierdzenia 28.2, na str. 45, gdyż podana na końcu wskazówka dotycząca przypadku, gdy funkcja $f(x)$ jest całkowalna, nie rozwiązuje sprawy. Uwagę na to zwrócił mi prof. J. Mikusiński.

grange'a na przestrzeń q-wymiarową dla funkcji o wartościach rzeczywistych. Twierdzenia te mają charakter pomocniczy. Twierdzenie podstawowe tego paragrafu jest następujące:

Funkcja f lokalnie całkowalna w R^q o wartościach w przestrzeni Hilberta ma m-tą pochodną lokalną równą zeru wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego dowolnie ustalonego h zachodzi równość

$$\Delta^{(m,h)} f = 0$$

dla prawie wszystkich x z R^q.

Ostatni, trzeci paragraf został poświęcony postaci funkcji lokalnie całkowalnej w R^q, której m-ta pochodna lokalna znika prawie wszędzie.

§. 1. Symbolika i podstawowe określenia

Przez R^q rozumiemy przestrzeń q-wymiarową punktów $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$. Przyjmijmy znakowanie $x+y = (\xi_1+\eta_1, \ldots, \xi_q+\eta_q)$, $x-y = (\xi_1-\eta_1, \ldots, \xi_q-\eta_q)$, $xy = (\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_q\eta_q)$, gdzie $y = (\eta_1, \ldots, \eta_q)$. Poza tym będziemy korzystali z oznaczenia $x^m = \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_q^{\mu_q}$, gdzie $m = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$.

Oznaczmy przez T_i^q zbiór wszystkich permutacji złożonych z i jedynek i $q-i$ zer. Na przykład zbiór T_2^4 składa się z sześciu permutacji: 0011, 0101, 0110, 1001, 1010 i 1100. Poszczególne permutacje należące do zbioru T_i^q będą odgrywały rolę wykładnika potęgowego (ewentualnie wskaźnika) zmiennej $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$. Na przykład dla permutacji $k = (0,1, 1,0)$ należącej do T_2^4 mamy $x^k = \xi_1^0 \cdot \xi_2^1 \cdot \xi_3^1 \cdot \xi_4^0 = \xi_2 \cdot \xi_3$.

Niech $k = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q)$ będzie dowolnie ustaloną permutacją należącą do T_i^q i niech $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$ będzie dowolnie ustalonym układem q liczb rzeczywistych.

Symbolem $\overset{c}{V}_k f$ oznaczać będziemy funkcję określoną w R^q za pomocą wzoru

$$\overset{c}{V}_k f = f(x - kx + kc),$$

gdzie $kx = (\varkappa_1\xi_1, \ldots, \varkappa_q\xi_q)$, $kc = (\varkappa_1\gamma_1, \ldots, \varkappa_q\gamma_q)$. Funkcja $\overset{c}{V}_k f$ jest więc stała względem tych zmiennych ξ_i, dla których $\varkappa_i = 1$.

Symbol $\overset{c}{V}_k$ będziemy nazywali **operatorem podstawiania.**

Dla przykładu niech $k = (0,1, 1,0)$, $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$; wówczas

$$\overset{c}{V}_k f = f(\xi_1, \gamma_2, \gamma_3, \xi_4).$$

Niech e_i oznacza punkt, którego i-ta współrzędna jest równa 1, a pozostałe 0. Jeżeli więc punkt x ma współrzędne $\xi_1, \ldots, \xi_q$, to punkt $x+e_i\chi_i$

różni się od x tylko i-tą współrzędną, równą $\xi_i+\chi_i$. Jeżeli k jest permutacją należącą do T_1^q, mającą na i-tym miejscu liczbę równą jeden, to zachodzi równość

$$\overset{c}{\mathrm{V}}_k f = \overset{\gamma i}{\mathrm{V}}_{e_i} f,$$

przy czym symbol

$$\overset{\gamma i}{\mathrm{V}}_{e_i} f = f(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \gamma_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_q)$$

przedstawia funkcję punktu, którego współrzędnymi są $\xi_1, \ldots, \xi_q$, gdzie $\xi_i = \gamma_i$. Analogicznie symbol

$$\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_{e_i} \overset{\beta}{\mathrm{V}}_{e_j} f \text{ dla } i \neq j$$

oznacza wartość funkcji w punkcie, którego współrzędnymi są $\xi_1, \ldots, \xi_q$, przy czym $\xi_i = \alpha$ a $\xi_j = \beta$. W dalszym ciągu zamiast symbolu V_{e_i} będziemy pisali V_i. Jeżeli za x wstawimy $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, to będziemy krótko pisali $\overset{a}{\mathrm{V}} f$.

Jest widoczne, że dla operatorów podstawiania zachodzi następująca własność: Jeżeli $i \neq j$, to

$$\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i \overset{\beta}{\mathrm{V}}_j f = \overset{\beta}{\mathrm{V}}_j \overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i f, \tag{1.1}$$

gdzie

$$\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i \overset{\beta}{\mathrm{V}}_j f = \overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i (\overset{\beta}{\mathrm{V}}_j f).$$

Ponieważ równość (1.1) zachodzi dla wszystkich funkcji, więc mamy symboliczny zapis

$$\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i \overset{\beta}{\mathrm{V}}_j = \overset{\beta}{\mathrm{V}}_j \overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i \quad (i \neq j), \tag{1.2}$$

który mówi, że zachodzi przemienność operatorów $\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i$ i $\overset{\beta}{\mathrm{V}}_j$. Łatwo pokazać, że dla operatorów podstawiania stosuje się twierdzenie o łączności: Jeżeli wskaźniki i, j, r, są różne, to

$$\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i [(\overset{\beta}{\mathrm{V}}_j \overset{\gamma}{\mathrm{V}}_r) f] = (\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i \overset{\beta}{\mathrm{V}}_j)(\overset{\gamma}{\mathrm{V}}_r f),$$

co można zapisać

$$\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i (\overset{\beta}{\mathrm{V}}_j \overset{\gamma}{\mathrm{V}}_r) f = (\overset{\alpha}{\mathrm{V}}_i \overset{\beta}{\mathrm{V}}_j) \overset{\gamma}{\mathrm{V}}_r f. \tag{1.3}$$

Przyjmijmy definicję następującą

$$(\eta_1 \overset{\alpha 1}{\mathrm{V}}_i + \ldots + \eta_n \overset{\alpha n}{\mathrm{V}}_i) f = \eta_1 \overset{\alpha 1}{\mathrm{V}}_i f + \ldots + \eta_n \overset{\alpha n}{\mathrm{V}}_i f. \tag{1.4}$$

Operator postaci $A_i = \eta_1 \overset{\alpha 1}{\mathrm{V}}_i + \ldots + \eta_n \overset{\alpha n}{\mathrm{V}}_i$, gdzie $\eta_1, \ldots, \eta_n$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liczbami rzeczywistymi, będziemy nazywali **operatorem cząstkowym.**

Można pokazać, że operatory o różnych wskaźnikach są przemienne i łączne. Należy jedynie zauważyć, że operator A_i można zapisać w postaci

$$\sum_{t=1}^{n} \eta_t \overset{\alpha t}{\mathrm{V}_i}$$

i pamiętać o tym, że prawdziwa jest równość (1.2).

Niech h będzie daną liczbą rzeczywistą różną od zera. Dla funkcji $f(x)$ jednej zmiennej przyjmujemy definicję:

$$\Delta^{(1,h)} f = f(x+h) - f(x).$$

Operator $\Delta^{(1,h)}$ będziemy nazywali **operatorem różnicowym rzędu 1-go** lub krótko **operatorem różnicowym.** Różnicę $f(x+h) - f(x)$ nazywa się zwykle pierwszą różnicą funkcji $y = f(x)$. V. [5].

Przyjmujemy definicję indukcyjną

$$\Delta^{(m,h)} f = \Delta^{(1,h)} (\Delta^{(m-1,h)} f) \quad (m = 2, 3, \ldots).$$

Można wykazać, że zachodzi wzór

$$\Delta^{(m,h)} f = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh).$$

Jeżeli f jest funkcją wielu zmiennych określoną w R^q oraz $I = (1, \ldots, 1)$, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$, $h = (\chi_1, \ldots, \chi_q)$, to przyjmujemy definicję

$$\Delta_i^{(1,\chi_i)} f = f(x + e_i \chi_i) - f(x),$$

$$\Delta^{(I,h)} f = \Delta_1^{(1,\chi_1)} \cdots \Delta_q^{(1,\chi_q)}.$$

Analogicznie jak dla funkcji jednej zmiennej rozszerzymy definicję operatora różnicowego rzędu pierwszego na operator rzędu $m = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$. A mianowicie

$$\Delta^{(m,h)} f = \Delta_1^{(\mu_1,\chi_1)} \cdots \Delta_q^{(\mu_q,\chi_q)} f,$$

przy czym

(1.5) $$\Delta_i^{(\mu_i,\chi_i)} f = \sum_{j=0}^{\mu_i} (-1)^{\mu_i - j} \binom{\mu_i}{j} f(x + e_i \chi_i).$$

Korzystając z przyjętej symboliki i powyższych równości mamy

(1.6) $$\Delta_i^{(1,\chi_i)} f = \overset{\xi_i+\chi_i}{\mathrm{V}_i} f - \overset{\xi_i}{\mathrm{V}_i} f,$$

Z ostatniej równości wynika, że operator różnicowy $\Delta_i^{(1,\chi_i)}$ jest szczególnym przypadkiem operatora cząstkowego. Stąd oraz z przemienności operatorów cząstkowych o różnych wskaźnikach wynika, że

$$\Delta_i^{(1,\chi_i)}\Delta_j^{(1,\chi_j)} f = \Delta^{(1,\chi_j)}\Delta_i^{(1,\chi_i)} f \quad (i \neq j).$$

Niech x oznacza w dalszym ciągu punkt przestrzeni q-wymiarowej: $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$; podobnie $h = (\chi_1, \ldots, \chi_q)$. Przez $\frac{1}{h}$ będziemy rozumieć liczbę $\frac{1}{\chi_1 \ldots \chi_q}$. Ponadto przez $\operatorname{sgn} x$ będziemy rozumieć iloczyn $\prod_{1 \leq i \leq q} \operatorname{sgn} \xi_i$. Gdy więc choć jedna ze współrzędnych ξ_i jest równa 0, to $\operatorname{sgn} x = 0$. Gdy wszystkie współrzędne ξ_i są różne od zera, to $\operatorname{sgn} x$ ma wartość 1 lub —1 w zależności od tego czy liczba współrzędnych ujemnych jest parzysta czy nieparzysta. Poza tym, niech $m! = \mu_1! \ldots \mu_q!$ jeśli $m = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$ i $\mu_1, \ldots, \mu_q$ są całkowite nieujemne.

Przedziałem q-wymiarowym $[a, b]$ będziemy nazywali iloczyn kartezjański q przedziałów jednowymiarowych

$$[a, b] = [\alpha_1, \beta_1] \times \ldots \times [\alpha_q, \beta_q],$$

gdzie

$$[\alpha_i, \beta_i] = [\beta_i, \alpha_i], \text{ gdy } \beta_i < \alpha_i,$$

przy czym α_i są współrzędnymi punktu a, natomiast β_i są współrzędnymi punktu b.

Niech w dalszym ciągu f_n i f oznaczają funkcje o wartościach w przestrzeni Hilberta, całkowalne (lub lokalnie całkowalne) w sensie Bochnera. Ogólnie przez $|f|$ będziemy rozumieli funkcję, której wartość w danym punkcie jest równa normie wartości f w tym punkcie. Jeżeli f jest funkcją całkowalną w sensie Bochnera, to $|f|$ jest funkcją całkowalną w sensie Lebesgue'a.

Mówimy, że ciąg funkcji f_n **jest zbieżny według normy** do funkcji f, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R^q} |f_n - f| dx = 0. \tag{1.7}$$

Mówimy, że ciąg funkcji f_n jest **zbieżny lokalnie** do funkcji f, jeżeli jest zbieżny według normy w każdym ograniczonym przedziale P, to znaczy jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \int_P |f_n - f| dx = 0.$$

Mówimy, że lokalnie całkowalna funkcja f ma **pochodną lokalną** równą lokalnie całkowalnej funkcji g, jeżeli dla każdego ograniczonego przedziału P

$$\int_P \left| \frac{1}{h} \Delta^{(1,h)} f - g \right| dx$$

dąży do zera, gdy $h \to 0$ i $\operatorname{sgn} h \neq 0$.

Ogólnie mówimy, że lokalnie całkowalna funkcja f ma m**-tą pochodną lokalną** równą lokalnie całkowalnej funkcji φ, jeżeli dla każdego ograniczonego przedziału P

$$\int_P \left| \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f - \varphi \right| dx$$

dąży do zera, gdy $h \to 0$ i $\operatorname{sgn} h \neq 0$.

W dalszym ciągu pochodną lokalną będziemy oznaczali symbolem D_L. Można pokazać, że dla funkcji lokalnie całkowalnych, posiadających pochodne lokalne, zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 1.1. Jeżeli f i g są funkcjami lokalnie całkowalnymi w R^q i posiadają pochodne lokalne, to:

a) $D_L(f+g) = D_L f + D_L g$,

b) $D_L(f \cdot g) = D_L f \cdot g + f \cdot D_L g$,

c) $D_L^{Ie_i}(f+g) = D_L^{Ie_i} f + D_L^{Ie_i} g$.

Ciąg funkcji rzeczywistych całkowalnych f_n będziemy nazywali ciągiem deltowym, jeżeli:

1. Istnieje ciąg liczb $\varepsilon_n > 0$, zbieżny do 0, taki że $f_n(x) = 0$ dla $|x| > \varepsilon_n$;
2. $\int f_n(x)dx = 1$;
3. $\int |f_n(x)| dx < M < \infty$.

Ciąg deltowy będziemy zawsze oznaczali przez δ_n.

§ 2. Pewne twierdzenia dotyczące funkcji lokalnie całkowalnych posiadających lokalne pochodne

Podstawowym twierdzeniem tego paragrafu jest:

Twierdzenie 2. Funkcja f lokalnie całkowalna w R^q ma m-tą pochodną lokalną równą zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ustalonego h zachodzi równość

$$\Delta^{(m,h)} f(x) = 0$$

dla prawie wszystkich x z R^q.

Dowód powyższego twierdzenia oparty będzie na pomocniczych twierdzeniach 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5.

Twierdzenie 2.1. Jeżeli ciąg f_n funkcji lokalnie całkowalnych jest zbieżny lokalnie do f, a ciąg funkcji całkowalnych g_n znikających poza pewnym wspólnie ograniczonym przedziałem jest zbieżny według normy do funkcji g, to ciąg splotów $f_n * g_n$ jest zbieżny lokalnie do $f * g$.

Dowód. Niech $[-a, a]$ będzie przedziałem, poza którym znikają funkcje ciągu g_n. Wtedy

$$\int_P |f_n * g_n - f * g| dx = \int_P |\int [f_n(x-t) g_n(t) - f(x-t) g(t)] dt| dx =$$

$$= \int_P |\int f_n(x-t) [g_n(t) - g(t)] dt| dx + \int_P |\int g(t) [f_n(x-t) - f(x-t)] dt| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-a}^{a} |g_n(t) - g(t)| dt \int_P |f_n(x-t)| dx + \int_{-a}^{a} |g(t)| dt \int_P |f_n(x-t) - f(x-t)| dx.$$

Niech P będzie dowolnie ustalonym przedziałem. Weźmy przedział $\bar{P}$ taki, że dla każdego $x \in P$ i dla każdego $t \in [-a, a]$, $x - t \in \bar{P}$. Niech ε będzie dowolnie ustaloną liczbą. Niech t będzie dowolnie ustalonym punktem z przedziału $[-a, a]$. Wtedy

$$\int_P |f_n(x-t) - f(x-t)| dx \leqslant \int_{\bar{P}} |f_n(u) - f(u)| du \leqslant \varepsilon$$

dla wystarczająco dużych n. Wobec powyższego całka

$$\int_{-a}^{a} |g(t)| dt \int_P |f_n(x-t) - f(x-t)| dx$$

dąży do zera przy $n \to \infty$. Można zauważyć, że istnieje stała M taka, że

$$\int_P |f_n(x-t)| dx < M.$$

Wobec tego i zbieżności według normy ciągu g_n mamy

$$\int_{-a}^{a} |g_n(t) - g(t)| dt \int_P |f_n(x-t)| dx \leqslant M \cdot \varepsilon.$$

Twierdzenie 2.2. Jeżeli f jest funkcją lokalnie całkowalną, to ciąg $\delta_n * f$ jest lokalnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Korzystając z własności 2° ciągu deltowego i twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\int_P | f * \delta_n - f | dx = \int_P |\int f(x-t) \delta_n(t) dt - \int f(x) \delta_n(t) dt| dx \leqslant$$

(2.1)

$$\leqslant \int_P [\int |f(x-t) - f(x)| \, |\delta_n(t)| dt] dx \leqslant \int |\delta_n(t)| dt \int_P |f(x-t) - f(x)| dx.$$

Ale $\int\limits_P |f(x-t)-f(x)|dx$ dąży do zera dla $|t|\to 0$. Wobec tego dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$, że całka po prawej stronie (2.1) jest mniejsza od ε dla $|t|<\delta$. Wobec własności 1° ciągu δ_n wyrażenie (2.1) staje się mniejsze od ε, gdy n jest tak duże, że $\delta_n(t)=0$ dla $|t|>\delta$.

Łatwo wykazać, że: Jeżeli f jest funkcją lokalnie całkowalną w R^q, to

(2.2) $$(\Delta^{(m,h)}f)*\delta_n=\Delta^{(m,h)}(f*\delta_n),$$

gdzie $h=(\chi_1,\ldots,\chi_q)$, $m=(\mu_1,\ldots,\mu_q)$.

Dla uproszczenia wypowiedzi dalszych twierdzeń wprowadzimy dodatkowe określenia i oznaczenia.

Przez **pochodną rzędu** m będziemy rozumieli każdą pochodną postaci

$$\frac{\delta^{|m|}f}{\delta\xi_{i_1}\delta\xi_{i_2}\ldots\delta\xi_{i_{|m|}}}$$

gdzie $m=(\mu_1,\ldots,\mu_q)$, $|m|=\mu_1+\ldots+\mu_q$, a

(2.3) $$i_1, i_2,\ldots, i_{|m|}$$

jest pewnym układem $|m|$ liczb o wartościach $1,\ldots,q$, przy czym μ_1 oznacza ilość jedynek występujących w układzie (2.3), μ_2 oznacza ilość liczb 2 występujących w układzie (2.3) i tak dalej.

Funkcja f **jest klasy C^m w $[a,b]$** ($m=(\mu_1,\ldots,\mu_q)$), jeżeli wszystkie pochodne rzędu $\leqslant m$ istnieją w (a,b) i są równoważne z funkcjami ciągłymi w $[a,b]$.

Wiadomo, że jeżeli funkcja f jest klasy C^m i dwie pochodne mieszane rzędu m różnią się tylko kolejnością różniczkowania, to pochodne te są równe. V. [4]. Innymi słowy, w klasie C^m istnieje tylko jedna pochodna rzędu m; będziemy ją krótko oznaczali symbolem $D^m f$.

Pochodną rzędu m można też zdefiniować indukcyjnie wzorami

$$D^0 f=f,$$

$$D^{(m+e_i)}f=(D^m f)^{(e_i)}\quad (i=1,\ldots,q),$$

gdzie $m=(\mu_1,\ldots,\mu_q)$.

Uwaga. Można pokazać, że operator różniczkowy D^{me_i} jest przemienny zarówno z operatorem podstawiania V_j jak i z operatorem różnicowym $\Delta^{(\mu_j,\chi_j)}$, przy założeniu, że $i\neq j$.

W dowodzie lematu 2.1 będziemy korzystali z następującego twierdzenia W. Sierpińskiego:

Jeżeli funkcja $f(x)$ określona w R^1 i o wartościach rzeczywistych posiada w przedziale $[x, x+mh]$ ciągłą pochodną rzędu $(m$-$1)$-go, a wewnątrz tego przedziału pochodną rzędu m-tego, to zachodzi

$$\Delta^{(m,h)} f = h^m \overset{x+Qmh}{\mathrm{V}} D^m f,$$

gdzie $0 < Q < 1$, a x i h dwie dowolnie ustalone liczby rzeczywiste. V. [5].

Lemat 2.1. Jeżeli funkcja f o wartościach rzeczywistych jest klasy C^m w $[x, x+mh]$, gdzie $mh = (\mu_1 \chi_1, \ldots, \mu_q \chi_q)$ $(m > 0$ i $h \neq 0)$, zaś x i h to dwa dowolnie ustalone punkty przestrzeni R^q oraz

(2.4) $$\Delta^{(m,h)} f = 0,$$

to w przedziale $[x, x+mh]$ istnieje punkt y, dla którego $\overset{y}{\mathrm{V}} D^m f = 0$.

Dowód. Bez straty dla ogólności dowodu przyjmiemy $x = 0$ i $h = I$. Wtedy założenie (2.4) jest postaci

$$\overset{0}{\mathrm{V}} \Delta^{(m,I)} f = 0,$$

a funkcja f jest klasy C^m w przedziale $[0, m]$. Na podstawie twierdzenia W. Sierpińskiego mamy prawdziwość tematu 2.1 w przypadku $q = 1$. Twierdzenie będzie udowodnione przez indukcję, jeżeli z założenia, że twierdzenie jest prawdziwe dla $(q-1)$-wymiarów wynika, że jest prawdziwe dla q-wymiarów. Przyjmujemy to założenie.

Jeżeli $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$, to niech $\bar{x}$ oznacza punkt przestrzeni $(q-1)$-wymiarowej, powstały przez skreślenie ostatniej współrzędnej punktu x; a więc $\bar{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_{q-1})$. Wypiszmy jeszcze skróty wynikające z przyjętej poprzednio symboliki:

$$\Delta^{(m,h)} = \Delta_1^{(\mu_1, \chi_1)} \cdots \Delta_q^{(\mu_q, \chi_q)},$$

$$\Delta^{(\overline{m}, \overline{h})} = \Delta_1^{(\mu_1, \chi_1)} \cdots \Delta_{q-1}^{(\mu_{q-1}, \chi_{q-1})}.$$

Wtedy $\Delta^{(m,h)} f = \Delta^{(\overline{m},h)} \Delta_q^{(\mu_q, \chi_q)} f$.

Funkcja $g = \overset{0}{\mathrm{V}}_q \Delta^{(\mu_q, 1)} f$ jest funkcją zmiennej $\bar{x}$ i jest klasy $C^{\overline{m}}$ w przedziale $[0, \overline{m}]$. Poza tym $\Delta^{(\overline{m},1)} g = 0$. Na podstawie założenia indukcyjnego istnieje punkt $\bar{y} \in [0, \overline{m}]$, dla którego $\overset{\bar{y}}{\mathrm{V}} D^{\overline{m}} g = 0$. Ale

$$\overset{\bar{y}}{\mathrm{V}} D^{\overline{m}} g = \overset{\bar{y}}{\mathrm{V}} D^{\overline{m}} \overset{0}{\mathrm{V}}_q \Delta_q^{(\mu_q, 1)} f = \overset{0}{\mathrm{V}}_q \Delta_q^{(\mu_q, 1)} \overset{\bar{y}}{\mathrm{V}} D^{\overline{m}} f$$

zgodnie z uwagą na stronie 134. Pisząc więc $\varphi = \overset{\bar{y}}{\mathrm{V}} D^{\overline{m}} f$

mamy

$$\overset{0}{\mathrm{V}}_q \Delta_q^{(\mu_q, 1)} \varphi = 0,$$

gdzie φ jest funkcją zmiennej rzeczywistej ξ_q i klasy C^{μ_q} w przedziale $[0, \mu_q]$. Zatem istnieje takie $\eta_q \in [0, \mu_q]$, że

$$\overset{\eta_q}{\mathrm{V}}_q D^{\mu_q} \varphi = 0$$

czyli

$$\overset{\eta_q}{\mathrm{V}}_q D^{\mu_q} \overset{\bar{y}}{\mathrm{V}} D^{\bar{m}} f = 0.$$

Stąd i na podstawie uwagi odnośnie operatorów D^{me_i} i V_j ze strony 134 mamy

$$\overset{\bar{y}}{\mathrm{V}} \overset{\eta_q}{\mathrm{V}} D^{\bar{m}} D^{\mu_q} f = 0$$

co oznacza, że

$$\overset{y}{\mathrm{V}} D^m f = 0$$

przy czym $y = (\bar{y}, \eta_q)$ a $m = (\bar{m}, \mu_q)$.

Korzystając z powyższego lematu udowodnimy

Lemat 2. 2. Jeżeli funkcja f o wartościach rzeczywistych jest klasy C^m w przedziale $[x, x+mh]$, przy czym x i h to dwa dowolnie ustalone punkty przestrzeni R^q, to w przedziale $[x, x+mh]$ istnieje punkt y, dla którego

$$\overset{y}{\mathrm{V}} D^m f = \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f.$$

Dowód. Lemat jest prawdziwy w przypadku, gdy $f(t) = t^m = \tau_1^{\mu_1} \cdots \tau_q^{\mu_q}$, wtedy bowiem $D^m f = m!$ i $\frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f = \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} t^m =$

$$= \frac{1}{\chi_1^{\mu_1} \cdots \chi_q^{\mu_q}} \Delta^{(\mu_1, \chi_1)} \cdots \Delta^{(\mu_q, \chi_q)} \tau_1^{\mu_1} \cdots \tau_q^{\mu_q} = \frac{\mu_1!\, \chi_1^{\mu_1} \cdots \mu_q!\, \chi_q^{\mu_q}}{\chi_1^{\mu_1} \cdots \chi_q^{\mu_q}} = m!.$$

Jeżeli f jest dowolną funkcją spełniającą założenia powyższego twierdzenia, to funkcja

$$g(t) = f(t) - \lambda \frac{t^m}{m!},$$

gdzie $\lambda = \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f$ — spełnia założenia lematu 2.1. Wobec tego w przedziale $[x, x+mh]$ istnieje punkt y dla którego $\overset{y}{\mathrm{V}} D^m g = 0$, czyli $\overset{y}{\mathrm{V}} D^m f = \lambda$. Zatem

$$\overset{y}{\mathrm{V}} D^m f = \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f,$$

a to należało wykazać.

Uwaga. Lemat można by uogólnić w ten sposób, żeby twierdzenie W. Sierpińskiego było jego szczególnym przypadkiem.

Twierdzenie 2.3. Jeżeli funkcja f o wartościach rzeczywistych jest klasy C^m w całej przestrzeni, to ma m-tą pochodną lokalną i pochodna ta jest równa

$$D^m f.$$

Dowód. Należy wykazać, że $D^m f = D_L^m f$ to znaczy, że dla każdego ograniczonego przedziału P całka

$$\int\limits_P \left| \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f - D^m f \right| dx$$

dąży do zera, gdy $h \to 0$ i $\operatorname{sgn} h \neq 0$. Wobec lematu 2.2 istnieje punkt $y \in [x, x+h]$, dla którego

$$\Delta^{(m,h)} f = \overset{y}{\mathrm{V}} D^m f.$$

Ponieważ funkcja $D^m f$ jest jednostajnie ciągła w każdym przedziale ograniczonym, więc dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba dodatnia $\varrho < 1$, że dla $x \in P$ jest

$$\left| \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f - D^m f \right| = \left| \overset{y}{\mathrm{V}} D^m f - D^m f \right| < \varepsilon \text{ dla } |h| < \varrho < 1.$$

Stąd

$$\int\limits_P \left| \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f - D^m f \right| dx < \varepsilon \int P \, dx \text{ dla } |h| < \varrho < 1,$$

a to należało wykazać.

Twierdzenie 2.4. Jeżeli funkcja g o wartościach rzeczywistych, klasy C^m jest poza pewnym ograniczonym przedziałem tożsamościowo równa zeru, a funkcja f o wartościach rzeczywistych jest lokalnie całkowalna w R^q, to funkcja $F = f * g$ jest także klasy C^m i zachodzi równość

$$D^m (f * g) = f * D^m g.$$

Dowód. Najpierw sprawdzimy słuszność twierdzenia w przypadku $m = 0$. Ponieważ iloczyn $f(t) \cdot g(x-t)$ jest całkowalny, więc splot $F = f * g$ jest określony dla każdego x. Ponadto mamy nierówność

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \int |f(t)| \; |g(x-t) - g(x_0 - t)| \, dt.$$

Ale wyrażenie $|g(x-t) - g(x_0 - t)|$ jest równe zeru poza pewnym ograniczonym przedziałem $[-a, a]$ (dobranym w zależności od punktu x) i wobec jednostajnej ciągłości g staje się mniejsze od dowolnie zadanej liczby $\varepsilon > 0$, gdy $|x - x_0|$ jest mniejsze od odpowiednio dobranej liczby $\delta > 0$. Zatem

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \varepsilon \int_{-a}^{a} |f(t)|\, dt \quad \text{dla } |x - x_0| < \delta.$$

Oznacza to, że

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0),$$

czyli splot $f * g$ jest funkcją ciągłą.

Udowodnimy słuszność twierdzenia dla pochodnej cząstkowej rzędu e_i. Rozważana pochodna cząstkowa jest w punkcie x równa granicy wyrażenia

$$\varphi(k) = \frac{1}{K} \Delta^{(1, ke_i)} \int g(x - t) \cdot f(t)\, dt = \frac{1}{K} \int \Delta^{(1, ke_i)} g(x - t) \cdot f(t)\, dt$$

dla $k \to 0$, $\operatorname{sgn} k \neq 0$ i $|k| < 1$. Na podstawie lematu 2.2

$$\varphi(k) = \int \overset{y-t}{\mathrm{V}} D^{e_i} g \cdot f(t)\, dt,$$

gdzie $y \in [x, x + e_i k]$. Wobec tego

$$|\varphi(k) - f * D^{e_i} g| = \left| \int \overset{y-t}{\mathrm{V}} D^{e_i} g \cdot f(t)\, dt - \int f(t) \cdot D^{e_i} g(x - t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int \left| \overset{y-t}{\mathrm{V}} D^{e_i} g - D^{e_i} g(x - t) \right| |f(t)|\, dt.$$

Ale wyrażenie $\overset{y-t}{\mathrm{V}} D^{e_i} g - D^{e_i} g(x - t)$ jest równe zeru poza pewnym ograniczonym przedziałem $a < t < b$ (dobranym w zależności od punktu x) i wobec jednostajnej ciągłości $D^{e_i} g$ staje się mniejsze od dowolnie zadanej liczby $\varepsilon > 0$, gdy k jest bezwzględnie mniejsze od odpowiednio dobranej liczby $\delta > 0$. Zatem

$$|\varphi(k) - f * D^{e_i} g| \leqslant \varepsilon \cdot \int_{a}^{b} |f(t)|\, dt \quad \text{dla } |k| < \delta.$$

Oznacza to, że $\lim_{k \to 0} [\varphi(k) - f * D^{e_i} g] = 0$. Czyli $D^{e_i}(f * g) = f * D^{e_i} g$ i wobec dowodu twierdzenia dla $m = 0$ splot $f * D^{e_i} g$ jest funkcją ciągłą.

Dla pochodnej rzędu m prawdziwość twierdzenia dowodzi się indukcyjnie.

Twierdzenie 2.5. Jeżeli f jest funkcją lokalnie całkowalną w R^q i ma m-tą pochodną lokalną $D_L^m f$, a g jest funkcją mierzalną, ograniczoną i o nośniku ograniczonym, wtedy splot $f * g$ jest klasy C^m, przy czym zachodzi związek

$$D^m (f * g) = (D_L^m f) * g. \tag{2.5}$$

Dowód. W przypadku $m = 0$ twierdzenie jest prawdziwe na podstawie twierdzenia podanego w [3], str. 55—58.

Udowodnimy słuszność twierdzenia dla pochodnej cząstkowej rzędu e_i. Niech $k = f * g$ i $|g| < M$. Wtedy

$$\frac{1}{h^{Ie_i}} \Delta^{(I, he_i)} k - (D_L^{Ie_i} f) * g = \int \left[\frac{1}{h^{Ie_i}} \Delta^{(I, he_i)} k - D_L^{Ie_i} f \right] g(x - t)\, dt. \tag{2.6}$$

Niech (a, b) będzie jakimś ograniczonym przedziałem i niech ϱ będzie liczbą dodatnią taką, że $g(x) = 0$ dla $|x| > \varrho$. Wtedy $g(x - t) = 0$ dla $x \in (a, b)$ i $t \notin (a - \varrho, b + \varrho)$. Więc moduł (2.6) jest mniejszy lub równy

$$M \int_{a-\varrho}^{b+\varrho} \left| \frac{1}{h^{Ie_i}} \Delta^{(I, he_i)} k - D_L^{Ie_i} f \right| dt.$$

Ponieważ $D_L^{Ie_i} f$ jest lokalną pochodną funkcji f, więc ostatnia całka dąży do zera, gdy $h \to 0$. Jest to dowód niemal jednostajnej zbieżności

$$\frac{1}{h^{Ie_i}} \Delta^{(I, he_i)} \text{ do } (D_L^{Ie_i} f) * g,$$

skąd wynika, że $(D_L^{Ie_i} f) * g$ jest funkcją ciągłą i równa się $D^{Ie_i}(f * g)$.

Ogólnie dla pochodnej rzędu m twierdzenie jest prawdziwe na podstawie indukcji matematycznej.

W ten sposób zostały udowodnione lub przytoczone wszystkie twierdzenia pomocnicze potrzebne do dowodu twierdzenia 2. Przystąpmy więc do dowodu tego twierdzenia.

Twierdzenie 2. Funkcja f lokalnie całkowalna w R^q ma m-tą pochodną lokalną równą zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego dowolnie ustalonego h zachodzi równość

$$\Delta^{(m, h)} f = 0$$

dla prawie wszystkich x z R^q, przy czym $m = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$, $h = (\chi_1, \ldots, \chi_q)$ i $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$.

Dowód. Udowodnimy najpierw słuszność twierdzenia w przypadku, gdy funkcja f przyjmuje wartości rzeczywiste.

Jeżeli $\Delta^{(m,h)} f$ jest funkcją zerową, to $\frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f$ jest także funkcją zerową. Wobec tego

$$\lim_{h \to 0} \left| \int_P \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} f \right| dx \quad (\operatorname{sgn} h \neq 0)$$

jest także funkcją zerową. Oznacza to, że zero jest m-tą pochodną lokalną funkcji f.

Przyjmijmy teraz, że funkcja f ma m-tą pochodną lokalną równą zeru i $\operatorname{sgn} h \neq 0$. Niech funkcje ciągu deltowego δ_n należą do klasy C^m. Wtedy funkcje

$$\varphi_n = f * \delta_n \tag{2.7}$$

są wobec twierdzenia 2.4 także klasy C^m. Na podstawie lematu 2.2 istnieje punkt $y \in [x, x+mh]$, dla którego zachodzi równość

$$\overset{y}{\mathrm{V}} D^m \varphi_n = \frac{1}{h^m} \Delta^{(m,h)} \varphi_n. \tag{2.8}$$

Na podstawie twierdzenia 2.5, równości (2.7) i założenia mamy

$$D^m \varphi_n = D^m (f * \delta_n) = (D_L^m f) * \delta_n = 0.$$

Stąd i z równości (2.8) wynika, że

$$\Delta^{(m,h)} \varphi_n = 0. \tag{2.9}$$

Korzystając ze wzoru (2.2) otrzymujemy

$$\Delta^{(m,h)} \varphi_n = \Delta^{(m,h)} (f * \delta_n) = (\Delta^{(m,h)} f) * \delta_n. \tag{2.10}$$

Na podstawie twierdzenia 2.2 ciąg $(\Delta^{(m,h)} f) * \delta_n$ dąży lokalnie do $\Delta^{(m,h)} f$. Stąd, z równości (2.9) i (2.10) wynika, że $\Delta^{(m,h)} f = 0$ dla prawie wszystkich x i każdego dowolnie ustalonego h.

Rozważmy przypadek, gdy funkcja f ma wartości w przestrzeni Hilberta. Jeżeli $\Delta^{(m,h)} f$ jest funkcją zerową, to dowód jest analogiczny jak w przypadku funkcji o wartościach rzeczywistych.

Jeżeli $D_L^m f = 0$ zaś a_n jest dowolnym elementem bazy w przestrzeni Hilberta, to także $D_L f(x) \cdot a_n = 0$ (w sensie iloczynu skalarnego). Ale funkcja

$$F_n(x) = a_n \cdot f(x)$$

jest funkcją o wartościach rzeczywistych, więc z pierwszej części dowodu wynika, że

$$\Delta^{(m,h)} F_n(x) = 0$$

dla każdego dowolnie ustalonego h i dla prawie wszystkich x z R^q. Zatem

$$\Delta^{(m,h)} a_n \cdot f(x) = 0$$

dla $x \in Z_n$ miary 0 i dla dowolnego elementu a_n bazy. Ponieważ baza jest przeliczalna, więc

$$\Delta^{(m,h)} a_n \cdot f(x) = 0 \tag{2.11}$$

dla $x \in Z$ miary 0, przy czym $Z = \bigcup_n Z_n$ miary 0. Z (2.11) wynika, że

$$a_n \cdot \Delta^{(m,h)} f(x) = 0 \text{ dla } x \in Z \text{ miary } 0.$$

Ponieważ ostatnia równość zachodzi dla wszystkich elementów bazy, więc

$$\Delta^{(m,h)} f(x) = 0 \text{ dla } x \in Z \text{ miary } 0.$$

Oznacza to, że dla każdego dowolnie ustalonego h

$$\Delta^{(m,h)} f(x) = 0$$

poza zbiorem Z miary zero.

§ 3. Postać funkcji lokalnie całkowalnej, której m-ta pochodna lokalna znika prawie wszędzie

Niech $i_1, \ldots, i_\alpha$ oznacza układ α liczb wybranych spośród q pierwszych liczb naturalnych i niech $k = (k_1, \ldots, k_q)$ będzie takim układem, że $k_i = 1$, gdy $i = i_1, \ldots, i_\alpha$ oraz $K_i = 0$, gdy $i \neq i_1, \ldots, i_\alpha$.

Symbolem $\int\limits_0^c f(t)\, dt^K$ będziemy oznaczali całkę wielokrotną, w której całkowanie odbywa się raz względem każdej ze zmiennych $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_\alpha}$ odpowiednio w granicach od 0 do $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_\alpha}$, co można zapisać wzorem:

$$\int\limits_0^{\gamma_{i_1}} d\tau_{i_1} \int\limits_0^{\gamma_{i_2}} d\tau_{i_2} \cdots \int\limits_0^{\gamma_{i\alpha}} f(t)\, d\tau_{i_\alpha},$$

przy czym $t = (\tau_1, \ldots, \tau_q)$, $c = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$.

Niech dany będzie układ liczb rzeczywistych $\gamma_{i,j}$, gdzie $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, \mu_i$. Liczb tych jest $\mu_1 + \ldots + \mu_q$. Oznaczmy ten układ literą c.

Jeżeli $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, gdzie α_i jest liczbą naturalną spełniającą nierówność $1 \leqslant \alpha_i \leqslant \mu_i$, to przez c_a rozumiemy $c_a = (\gamma_{1,\alpha_1}, \ldots, \gamma_{q,\alpha q})$.

Twierdzenie 3. Jeżeli funkcja $F(x)$ jest ciągła w R^q i spełnia równość

$$\Delta^{(m,h)} F(x) = 0 \text{ dla } h, x \in R^q$$

oraz

$$\overset{0}{V}_i F = 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, q,$$

to dla każdego układu punktów stałych $c_a = (\gamma_{1,\alpha_1}, \cdots, \gamma_{q,\alpha_q})$ $(\gamma_{i,\alpha_i} \neq \gamma_{j,\alpha_j}$ dla $i \neq j)$ zachodzi

$$(3) \qquad F(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leqslant a \leqslant m-I} \sum_{0 \leqslant b \leqslant m-I} (-1)^{i-1} A_{k(m-b),ka}\, x^{k(b+I)} \overset{ca}{V}_k F,$$

dla $x \in R^q$,

przy czym $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, $m = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$, $A_{k(m-b),ka}$ są odpowiednio dobranymi stałymi a symbol T_i^q był zdefiniowany na stronie 128. (Jeżeli we wzorze (3) jest $\mu_j = 0$ dla pewnego j, to odpowiednią sumę należy zastąpić przez 0).

W dowodzie powyższego twierdzenia wykorzystamy pewne twierdzenie Angheluta, którego dowód można znaleźć w pracy T. Angheluta: Sur une équation fonctionnelle caractérisant les polynômes. V. [1]. Twierdzenie Angheluta: Jeżeli funkcja f o wartościach rzeczywistych jest ciągła w R^1 i

$$\Delta^{(m+1,h)} f = 0$$

zachodzi dla dowolnego stałego h i punktu x, to funkcja f jest wielomianem stopnia co najwyżej m-tego.

Pokażemy słuszność twierdzenia Angheluta w przypadku funkcji f o wartościach w przestrzeni Hilberta. Niech $G_n(x) = a_n \cdot f(x)$ (w sensie iloczynu skalarnego), przy czym $f(x)$ ma wartości w przestrzeni Hilberta, a_n jest dowolnym elementem bazy w rozważanej przestrzeni. Wówczas na podstawie twierdzenia Angheluta funkcja $G_n(x)$ jako funkcja o wartościach rzeczywistych jest postaci

$$G_n(x) = b_{nm}\, x^m + \ldots + b_{no}.$$

Zatem

$$b_{nm}\, x^m + \ldots + b_{no} = a_n \cdot f(x).$$

Funkcja $f(x)$ jest określona jednoznacznie, w przeciwnym bowiem wypadku

$$G_n(x) = a_n \cdot f(x) \text{ i } G_n(x) = a_n \cdot g(x).$$

Czyli

$$a_n [f(x) - g(x)] = 0 \text{ dla każdego } x,$$

a to znaczy, że $f(x) = g(x)$.

Łatwo można wykazać, że istnieje c_k takie, że $a_n \cdot c_k = b_{nk}$. Dla $x = 0$ mamy

$$G_n(0) = b_{no} = a_n \cdot f(0), \text{ więc } c_o = f(0).$$

Można pokazać, że

$$c_k = \frac{\overset{0}{\mathrm{V}} \Delta^{(k,h)} \left[f(x) - \sum_{t=k+1}^{m} x^t c_{nt} \right]}{k!\, h^k} \quad \text{dla } k = m, \ldots, 1.$$

Więc $f(x) = c_m x^m + \ldots + c_o$, co należało wykazać.

Dowód twierdzenia 3. Pokażemy, że w przypadku $q = 1$ twierdzenie jest prawdziwe. Korzystając z twierdzenia Angheluta i założeń powyższego twierdzenia w przypadku funkcji jednej zmiennej mamy następującą postać funkcji F:

$$F(x) = a_1 x^{\mu_1} + \ldots + a_{\mu_1} x. \tag{3.1}$$

Wyznaczmy współczynniki a_i w zależności od wartości funkcji F w punktach $\gamma_{1,i}$ $(i = 1, \ldots, \mu_i)$, przy czym $\gamma_{1,i} \neq \gamma_{1,j}$. Rozwiązując μ_1 równań o μ_1 niewiadomych postaci:

$$F(\gamma_{1,1}) = a_1 \gamma_{1,1}^{\mu_1} + \ldots + a_{\mu_1} \gamma_{1,1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(\gamma_{1,\mu_1}) = a_1 \gamma_{1,\mu_1}^{\mu_1} + \ldots + a_{\mu_1} \gamma_{1,\mu_1}$$

otrzymujemy

$$a_1 = \sum_{0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \mu_1 - 1} F(\gamma_{1,\alpha_1+1}) (-1)^{\alpha_1} \frac{W_{1,\alpha_1+1}}{W}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{\mu_1} = \sum_{0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \mu_1 - 1} F(\gamma_{1,\alpha_1+1}) (-1)^{\mu_1+\alpha_1-1} \frac{W_{\mu_1,\alpha_1+1}}{W},$$

gdzie $W = \begin{vmatrix} \gamma_{1,1}^{\mu_1}, \ldots, \gamma_{1,1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{1,\mu_1}^{\mu_1}, \ldots, \gamma_{1,\mu_1} \end{vmatrix}$, a W_{β_1,α_1+1}, to podwyznacznik wyznacznika W

powstały przez skreślenie kolumny o wskaźniku $\alpha_1 + 1$ i wiersza o wskaźniku $\alpha_1 + 1$. α_1 i β_1 są liczbami naturalnymi i przyjmują wartości od 0 do $\mu_1 - 1$ dla $\mu_1 \geqslant 1$. (Jeżeli $\mu_1 = 0$, to umówimy się, że wtedy $f(x) = 0$). Zatem funkcja F jest postaci

$$F(x) = \sum_{0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \mu_1 - 1} \sum_{0 \leqslant \beta_1 \leqslant \mu_1 - 1} x^{\beta_1+1} \cdot \overset{\gamma_1,\, \alpha_1+1}{\mathrm{V}} F \cdot (-1)^{\mu_1-\beta_1+\alpha_1} \frac{W_{\mu_1-\beta_1,\,\alpha_1+1}}{W}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy

$$(-1)^{\mu_1-\beta_1+\alpha_1} \frac{W^{\mu_1-\beta_1,\, \alpha_1+1}}{W} = A_{\mu_1-\beta_1,\, \alpha_1+1},$$

$$\text{to } F(x) = \sum_{0\leqslant\alpha_1\leqslant\mu_1-1} \sum_{0\leqslant\beta_1\leqslant\mu_1-1} A_{\mu_1-\beta_1,\, \alpha_1+1}\, x^{\beta_1+1} \overset{\gamma_1,\, \alpha_1+1}{\mathrm{V}_1} F.$$

Ostatnią równość można napisać w postaci

$$\left(1 - \sum_{0\leqslant\alpha_1\leqslant\mu_1-1} \sum_{0\leqslant\beta_1\leqslant\mu_1-1} A_{\mu_1-\beta_1,\, \alpha_1+1}\, x^{\beta_1+1} \overset{\gamma_1,\, \alpha_1+1}{\mathrm{V}_1}\right) F = 0.$$

W ten sposób w przypadku $q=1$ twierdzenie zostało udowodnione.

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\sum_{0\leqslant\alpha_i\leqslant\mu_i-1} \sum_{0\leqslant\beta_i\leqslant\mu_i-1} A_{\mu_i-\beta_i,\, \alpha_i+1}\, \xi_i^{\beta_i+1} \overset{\gamma_i,\, \alpha_i+1}{\mathrm{V}_i} = \nabla_i^{\mu_i} \quad \text{dla } i=1,\ldots,q, \tag{3.2}$$

przy czym $\nabla_i^{\mu_i} = 0$, gdy $\mu_i = 0$

Z założenia wiadomo, że

$$\Delta^{(m,h)} F(x) = \Delta_1^{(\mu_1,\, \chi_1)} \ldots \Delta_q^{(\mu_q,\, \chi_q)} F(x) = 0. \tag{3.3}$$

Ustalmy dowolnie zmienne $\xi_2, \ldots, \xi_q$ i niech $\triangle_2^{(\mu_2,\, \chi_q)} \ldots \triangle_q^{(\mu_q,\, \chi_q)} F = H(\xi_1)$.

Stąd i z równości (3.3) otrzymujemy równość następującą

$$\triangle_1^{(\mu_1,\, \chi_1)} H(\xi_1) = 0,$$

przy czym H jest funkcją spełniającą założenia twierdzenia w przypadku $q=1$. Na podstawie pierwszej części dowodu ostatnia równość przyjmuje postać

$$\nabla_1^{\mu_1} H(\xi_1) = 0,$$

a po ponownym zastosowaniu poprzednio wprowadzonej definicji

$$\nabla_1^{\mu_1} \triangle_2^{(\mu_2,\, \chi_2)} \ldots \triangle_q^{(\mu_q,\, \chi_q)} F = 0. \tag{3.4}$$

Operator $\nabla_i^{\mu_i}$ tak jak operator $\triangle_j^{(\mu_j,\, \chi_j)}$ jest szczególnym przypadkiem operatora cząstkowego. Korzystając z przemienności tych operatorów dla $i \neq j$, równość (3.4) jest postaci

$$\triangle_2^{(\mu_2,\, \chi_2)} \nabla_1^{\mu_1} \triangle_3^{(\mu_3,\, \chi_3)} \ldots \triangle^{(\mu_q,\, \chi_q)} F = 0. \tag{3.5}$$

Ustalmy teraz zmienne $\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_q$ i niech $\nabla_1^{\mu_1} \triangle_3^{(\mu_3, \chi_3)} \ldots \triangle_q^{(\mu_q, \chi_q)} F = G(\xi_2)$, wówczas równość (3.5) przyjmie postać

$$\triangle_2^{(\mu_2, \chi_2)} G(\xi_2) = 0,$$

gdzie $G(\xi_2)$ jest funkcją ciągłą i $G(0) = 0$. Stąd i z pierwszej części dowodu otrzymujemy postać funkcji G

$$\nabla_2^{\mu_2} G(\xi_2) = 0.$$

Zatem zachodzi równość

$$\nabla_2^{\mu_2} \nabla_1^{\mu_1} \triangle_3^{(\mu_3, \chi_3)} \ldots \triangle_q^{(\mu_q, \chi_q)} F = 0.$$

Postępując tak jeszcze $q-2$ razy dochodzimy do równości

$$\nabla_1^{\mu_1} \ldots \nabla_q^{\mu_q} F = 0,$$

która dzięki wzorom (3.2) jest postaci

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} \Bigl(1 - \sum_{0 \leqslant \alpha_i \leqslant \mu_i - 1} \; \sum_{0 \leqslant \beta_i \leqslant \mu_i - 1} A_{\alpha_i - \beta_i, \alpha_i + 1} \, \xi_i^{\beta_i + 1} \overset{\gamma_i, \alpha_i + 1}{\mathrm{V}_i}\Bigr) F \doteq 0, \tag{3.6}$$

przy czym jeżeli we wzorze (3.6) jest $\mu_j = 0$ dla pewnego j, to odpowiednia suma równa się 0. Równość (3.6) można zastąpić równością

$$\prod_{l \in T_1^q} \Bigl(1 - \sum_{0 \leqslant a \leqslant m - I} \; \sum_{0 \leqslant b \leqslant m - I} A_{l(m-b), l(a+I)} \, x^{l(b+I)} \overset{Ca}{\mathrm{V}_l}\Bigr) F = 0, \tag{3.7}$$

jeżeli oczywiście umówimy się, że przy rozpisaniu wskaźników $[l(m-b), l(a+I)]$ odrzucimy wszystkie zera tam występujące. Wówczas wskaźniki te będą postaci $(\alpha_i - \beta_i, \alpha_i + 1)$, czyli takiej jak w równości (3.6).

Pokażemy, że równość (3.7) jest identyczna z równością

$$\Bigl(1 - \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \; \sum_{k \in T_l^q} \; \sum_{0 \leqslant a \leqslant m - I} \; \sum_{0 \leqslant b \leqslant m - I} (-1)^{i-1} A_{k(m-b), k(a+I)} \, x^{k(b+I)} \overset{Ca}{\mathrm{V}_k}\Bigr) F = 0, \tag{3.8}$$

gdzie $A_{k(m-b), k(a+I)} = \prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant i} A_{l_j(m-b), l_j(a+I)}$, przy czym $l_j \in T_1^q$, $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant i} l_j = k$, zaś stałe $A_{l_j(m-b), l_j(a+I)}$ są postaci takiej jak $A_{l(m-b), l(a+I)}$.

Wystarczy pokazać, że dowolny składnik występujący po lewej stronie równości (3.8) jest także elementem lewej strony równości (3.7) i odwrotnie. Niech $k = (k_1, \ldots, k_q)$ będzie dowolną permutacją należącą do T_i^q. Dla uproszczenia rozumowania przyjmijmy, że k ma i pierwszych współrzędnych 1. Wtedy

$$x^{k(b+I)} = \xi_1^{\beta_1+1} \cdots \xi_i^{\beta_i+1}, \overset{Ca}{\mathrm{V}_k} F = \overset{\gamma_1, \alpha_1+1}{\mathrm{V}_1} \cdots \overset{\gamma_i, \alpha_i+1}{\mathrm{V}_i} F,$$

$$A_{k(m-b), k(a+I)} = A_{\mu_1-\beta_1, \alpha_1+1} \cdots A_{\mu_i-\beta_i, \alpha_i+1}.$$

Należy więc pokazać, że składnik postaci

$$(3.9) \qquad (-1)^i A_{\mu_1-\beta_1, \alpha_1+1} \cdots A_{\varkappa_i-\beta_i, \alpha_i+1} \xi_1^{\beta_1+1} \cdots \xi_i^{\beta_i+1} \overset{\gamma_1, \alpha_1+1}{\mathrm{V}_1} \cdots \overset{\gamma_i, \alpha_i+1}{\mathrm{V}_i} F$$

występuje w równości (3.7) z tym samym znakiem.

Jeżeli z równości (3.7) weźmiemy drugie składniki „i" pierwszych czynników, to otrzymamy element postaci

$$(-1)^i A_{\alpha_1-\beta_1, \alpha_1+1} \cdot \xi_1^{\beta+1} \overset{\gamma_1, \alpha_1+1}{\mathrm{V}_1} \cdots A_{\mu_i-\beta_i, \alpha_i+1} \xi_i^{\beta_i+1} \overset{\gamma_i, \alpha_i+1}{\mathrm{V}} F$$

identyczny z elementem (3.9).

Analogicznie można pokazać, że dowolny wyraz występujący w równości (3.7) występuje też w równości (3.8). Ponieważ równość (3.7) i (3.8) mają dokładnie po 2^q składników i to takich, że każdy występujący w równości (3.7) występuje też w równości (3.8) i odwrotnie, więc są identyczne. Równość (3.8) jest tezą naszego twierdzenia a to oznacza, że dowód jest zakończony.

Lemat 3. 1. Jeżeli funkcja f jest lokalnie całkowalna w R^q, to wtedy zachodzi równość

$$\Delta^{(I, h)} \int_0^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Dowód. Twierdzenie jest prawdziwe w przypadku $q = 1$, gdyż wtedy zgodnie z przyjętą symboliką zachodzi równość

$$\Delta^{(1, h)} \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^{x+h} f(t)\, dt - \int_0^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Ogólnie twierdzenie udowodnimy przez indukcję. Przypuśćmy, że zachodzi ono dla $(q-1)$ zmiennych rzeczywistych. Udowodnimy, że zachodzi wtedy też dla q zmiennych rzeczywistych. Przyjmujemy oznaczenia

$$x = (\bar{x}, \xi_q), \; t = (\bar{t}, \tau_q), \; h = (\bar{h}, \chi_q), \; I = (\bar{I}, 1).$$

Wtedy na podstawie twierdzenia Fubiniego i założenia indukcyjnego mamy co następuje

$$\Delta^{(I,h)}\int_0^x f(t)\,dt = \Delta^{(\bar{I},\bar{h})}\Delta^{(1,\chi_q)}\int_0^{\xi_q} d\tau_q \int_0^{\bar{x}} f(\bar{t},\tau_q)\,d\bar{t} = \Delta^{(\bar{I},\bar{h})}\int_{\xi_q}^{\xi_q+\chi_q} d\tau_q \int_0^{\bar{x}} f(\bar{t},\tau_q)\,d\bar{t} =$$

$$= \Delta^{(\bar{I},\bar{h})}\int_0^{\bar{x}} dt \int_{\xi_q}^{\xi_q+\chi_q} f(\bar{t},\tau_q)\,d\tau_q = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{h}} dt \int_{\xi_q}^{\xi_q+\chi_q} f(\bar{t},\tau_q)\,d\tau_q = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Lemat 3.2. Jeżeli f jest funkcją lokalnie całkowalną w R^q, to wtedy zachodzi równość

$$\Delta^{(m,h)}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} \Delta^{(m,h)} f(t)\,dt.$$

Dowód. W przypadku, gdy $q = 1$ twierdzenie jest prawdziwe. Niech

$$\int_0^x f(t)\,dt = F(x),$$

Wtedy

$$\int_x^{x+h} \Delta^{(m,h)} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} \Big[\sum_{0\leqslant i\leqslant m} (-1)^{m-i}\tbinom{m}{i} f(t+ih)\Big]\,dt =$$

$$= \sum_{0\leqslant i\leqslant m} (-1)^{m-i}\tbinom{m}{i}\int_x^{x+h} f(t+ih)\,dt = \sum_{0\leqslant i\leqslant m} (-1)^{m-i}\tbinom{m}{i}\int_{x+ih}^{x+h+ih} f(z)\,dz =$$

$$= \sum_{0\leqslant i\leqslant m} (-1)^{m-i}\tbinom{m}{i}\,[F(x+h+ih)-F(x+ih)] =$$

$$= \Delta^{(m,h)}[F(x+h)-F(x)] = \Delta^{(m,h)}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Ogólnie twierdzenie udowodnimy przez indukcję. Przypuśćmy, że zachodzi ono dla $(q-1)$ zmiennych rzeczywistych. Udowodnimy, że zachodzi też dla q zmiennych rzeczywistych. Przyjmijmy oznaczenia

$$x = (\bar{x}, \xi_q),\ h = (\bar{h}, \chi_q),\ m = (\bar{m}, \mu_q)\ \text{i}\ t = (\bar{t}, \tau_q).$$

Na podstawie twierdzenia Fubiniego i założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\Delta^{(m,h)} \int\limits_{x}^{x+h} f(t)\,dt = \Delta^{(\bar{m},\bar{h})} \Delta_q^{(\mu_q,\chi_q)} \int\limits_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{h}} d\bar{t} \int\limits_{\xi_q}^{\xi_q+\chi_q} f(\bar{t},\tau_q)\,d\tau_q =$$

$$= \Delta^{(\bar{m},\bar{h})} \int\limits_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{h}} d\bar{t}\, \Delta_q^{(\mu_q,\chi_q)} \int\limits_{\xi_q}^{\xi_q+\chi_q} f(\bar{t},\tau_q)\,d\tau_q =$$

$$= \int\limits_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{h}} \left[\Delta^{(\bar{m},\bar{h})} \int\limits_{\xi_q}^{\xi_q+\chi_q} \Delta_q^{(\mu_q,\chi_q)} f(\bar{t},\tau_q)\,d\tau_q\right] d\bar{t} =$$

$$= \int\limits_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{h}} d\bar{t} \int\limits_{\xi_q}^{\xi_q+\chi_q} \Delta^{(\bar{m},\bar{h})} \Delta_q^{(\mu_q,\chi_q)} f(\bar{t},\tau_q)\,d\tau_q = \int\limits_{x}^{x+h} \Delta^{(m,h)} f(t)\,dt.$$

Twierdzenie 3.1. Każda funkcja lokalnie całkowalna f jest pochodną lokalną swej całki

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Dowód. Niech h^+ będzie punktem powstałym z h przez zastąpienie współrzędnych ujemnych zerami. Analogicznie, h^- niech będzie punktem powstałym z h przez zastąpienie współrzędnych dodatnich zerami. Więc $h = h^+ + h^-$. Wobec tego i lematu 3.1

$$\Delta^{(I,h)} \int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt = \operatorname{sgn} h \int\limits_{x+h-}^{x+h+} f(t)\,dt. \tag{3.10}$$

Jeżeli $\operatorname{sgn} h \neq 0$, to $h^- < h^+$. Oznaczmy przez Z_h funkcję charakterystyczną przedziału $h^- < x < h^+$. Zatem całkę z równości (3.10) można napisać w postaci $Z_h * f$. Wobec tego

$$\Delta^{(I,h)} \int\limits_0^x f(t)\,dt = \operatorname{sgn} h\, Z_h * f.$$

Niech h_n będzie takim dowolnym ciągiem punktów zbieżnym do zera, że $h \neq 0$. Wtedy ciąg $\frac{1}{h^n} \operatorname{sgn} h_n Z_{h_n}$ jest ciągiem deltowym, czyli

$$\delta_n = \frac{1}{h_n} \operatorname{sgn} h_n\, Z_{h_n}.$$

Stąd i z twierdzenia 2.2 wynika, że dla każdego ograniczonego przedziału P zachodzi

$$\lim_{h_n \to 0} \int_P \left| \frac{1}{h_n} \Delta^{(I, h_n)} \int_0^x f(t)\, dt - f(x) \right| dx = \lim_{h_n \to 0} \int_P \left| \frac{1}{h_n} \operatorname{sgn} h_n Z_{h_n} * f - f \right| dx =$$

$$= \lim_{h_n \to 0} \int_P |\delta_n * f - f|\, dx = 0,$$

co jest tezą naszego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e   p o d s t a w o w e. Funkcja f lokalnie całkowalna w R^q ma m-tą pochodną lokalną równą zero prawie wszędzie wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci

$$f(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leqslant b \leqslant m-I} (-1)^{i-1} x^{kb} f_{kb} \text{ p. w.,} \tag{4}$$

gdzie $b = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, $m = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$, funkcje f_{kb} są stałe względem zmiennej x^k i lokalnie całkowalne w płaszczyźnie $(q-i)$-wymiarowej prostopadłej do x^k. (Jeżeli we wzorze (4) jest $\mu_j = 0$ dla pewnego j, to odpowiednią sumę należy zastąpić przez 0).

Dowód. Korzystając z twierdzenia 2 możemy założenia o m-tej pochodnej lokalnej równej zero prawie wszędzie zastąpić równością

$$\Delta^{(m,h)} f = 0, \tag{4.1}$$

która zachodzi dla każdego ustalonego h i prawie wszystkich x. Niech

$$\int_0^x f(t)\, dt = F(x). \tag{4.2}$$

Rozważmy dla funkcji F $(m+1)$-szą różnicę. Na podstawie lematów 3.1, 3.2 oraz równości (4.1) otrzymujemy

$$\Delta^{(m+I,h)} F = \Delta^{(m,h)} \Delta^{(I,h)} \int_0^x f(t)\, dt = \Delta^{(m,h)} \int_x^{x+h} f(t)\, dt = \int_x^{x+h} \Delta^{(m,h)} f(t)\, dt = 0.$$

Funkcja F spełnia założenia twierdzenia 3, jest więc postaci

$$F(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leqslant a \leqslant m-I} \sum_{0 \leqslant b \leqslant m-I} (-1)^{i-1} A_{k(m-b),ka}\, x^{k(b-I)} \overset{Ca}{\nabla}_k F,$$

przy czym $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$, $c_a = (\gamma_{1, \alpha_1}, \cdots, \gamma_{q, \alpha_q})$, zaś $A_{k(m-b),ka}$ są odpowiednio dobranymi stałymi. Stąd, z definicji (4.2), z twierdzenia Fubiniego oraz z definicji całki wprowadzonej na stronie 141 mamy

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leqslant a \leqslant m-I} \sum_{0 \leqslant b \leqslant m-I} (-1)^{i-1} A_{k(m-b),ak}\, x^{k(b+I)} \overset{Ca}{\mathrm{V}}_k F.$$

Ale

$$x^{k(b+I)} \overset{Ca}{\mathrm{V}}_k F = x^{k(b+I)} \int_0^x \left[\int_0^{Ca} f(t)\,dt^k\right] dt^{I-k} = x^{kb} \int_0^x \left[\int_0^{Ca} f(t)\,dt^k \cdot x^k\right] dt^{I-k} =$$

$$= x^{kb} \int_0^x \left[\int_0^{Ca} f(t)\,dt^k \cdot \int_0^x dt^k\right] dt^{I-k} = x^{kb} \int_0^x \left[\int_0^x \left(f(t)\,dt^k\right) dt^k\right] dt^{I-k} =$$

$$= x^{kb} \int_0^x \left(\int_0^{Ca} f(t)\,dt^k\right) dt.$$

Więc

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{1 \leqslant i \leqslant b} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leqslant a \leqslant m-I} \sum_{0 \leqslant b \leqslant m-I} (-1)^{i-1} A_{k(m-b),ak}\, x^{kb} \int_0^x \left(\int_0^{Ca} f(t)\,dt^k\right) dt.$$

Korzystając w dalszym ciągu z twierdzenia Fubiniego i z twierdzeń 1.2 i 3.1 otrzymujemy następującą postać funkcji f

$$f(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leqslant a \leqslant m-I} \sum_{0 \leqslant b \leqslant m-I} (-1)^{i-1} A_{k(m-b),ak}\, x^{kb} \int_0^{Ca} f(t)\,dt^k +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leqslant a \leqslant m-I} \sum_{0 \leqslant b \leqslant m-I} (-1)^{i-1} A_{k(m-b),ak}\, kb \cdot x^{kb-k} \cdot \int_0^x \left[\int_0^{Ca} f(t)\,dt^k\right] dt,$$

przy czym równość zachodzi prawie wszędzie. Ale

$$kb\, x^{k(b-I)} \int_0^x \left[\int_0^{Ca} f(t)\,dt^k\right] dt = x^{kh}\, kb \overset{Ca}{\mathrm{V}}_k F.$$

Więc

$$f(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant q} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leqslant b \leqslant m-I} x^{kb} (-1)^{i-1} \left\{ \sum_{0 \leqslant a \leqslant m-I} A_{k(m-b),ak} \left[\int_0^{Ca} f(t)\,dt^k + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \overset{Ca}{\mathrm{V}}_k F \cdot kb\right]\right\} \text{ p. w.}$$

Jeżeli przyjmiemy

$$\sum_{0 \leq a \leq m-1} A_{k(m-b),ak} \left[\int_0^{Ca} f(t)\, dt^k + kb \cdot \overset{Ca}{\nabla}_k F \right] = f_{kb},$$

to otrzymamy

$$f(x) = \sum_{1 \leq i \leq q} \sum_{k \in T_i^q} \sum_{0 \leq b \leq m-1} (-1)^{i-1} x^{kb} f_{kb} \text{ p. w.},$$

gdzie f_{kb} są funkcjami stałymi względem x^k i lokalnie całkowalnymi w płaszczyźnie $(q-i)$ wymiarowej prostopadłej do x^k.

Łatwy dowód twierdzenia w drugą stronę pominiemy.

Dla przykładu wypiszmy postać funkcji f w przypadku, gdy $m = (2,3)$. Zgodnie z tezą ostatniego twierdzenia funkcja f jest postaci:

$$f(x) = \sum_{1 \leq i \leq 2} \sum_{k \in T_i^2} \sum_{0 \leq b \leq m-1} (-1)^{i-1} f_{kb} \cdot x^{kb} =$$

$$= \sum_{k \in T_1^2} \sum_{0 \leq b \leq m-1} x^{kb} f_{kb} - \sum_{k \in T_2^2} \sum_{0 \leq b \leq m-1} x^{kb} f_{kb} = \sum_{0 \leq \beta_1 \leq 1} \xi_1^{\beta_1} f_{(\beta_1, 0)} +$$

$$+ \sum_{0 \leq \beta_2 \leq 2} \xi_2^{\beta_2} f_{(0, \beta_2)} - \sum_{0 \leq \beta_1 \leq 1} \sum_{0 \leq \beta_2 \leq 2} \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} f_{(\beta_1, \beta_2)} =$$

$$= \sum_{0 \leq \beta_1 \leq 1} \xi_1^{\beta_1} \left[f_{(\beta_1, 0)} - \sum_{0 \leq \beta_2 \leq 2} \xi_2^{\beta_2} f_{(\beta_1, \beta_2)} \right] + \sum_{0 \leq \beta_2 \leq 2} \xi_2^{\beta_2} f_{(0, \beta_2)}.$$

Funkcje $f_{(\beta_1, 0)} - \sum_{0 \leq \beta_2 \leq 2} \xi_2^{\beta_2} f_{(\beta_1, \beta_2)}$ są stałe względem ξ_1, analogicznie funkcje $f_{(0, \beta_2)}$ są stałe względem zmiennej ξ_2. Niech więc $f_{(\beta_1, 0)} - \sum_{0 \leq \beta_2 \leq 2} \xi_2^{\beta_2} f_{(\beta_1, \beta_2)} = \bar{f}_{(1, \beta_1)}$,

$$f_{(0, \beta_2)} = \bar{f}_{(2, \beta_2)},$$

gdzie $\bar{f}_{(2, \beta_2)}$ funkcje stałe względem zmiennej ξ_2, a funkcje $\bar{f}_{(1, \beta_1)}$ stałe względem ξ_1. Zatem otrzymamy postać funkcji f następującą

$$f(x) = \sum_{0 \leq \beta_1 \leq 1} \xi_1^{\beta_1} \bar{f}_{(1, \beta_1)} + \sum_{0 \leq \beta_2 \leq 2} \xi_2^{\beta_2} \bar{f}_{(2, \beta_2)},$$

przy czym funkcje $\bar{f}_{i, \beta_i}$ są stałe względem zmiennych ξ_i.

Można zauważyć, że przedstawienie (4) nie jest jedyne. Na przykład, jeśli $m = (1,1)$ i $f(x) = \xi_1 + \xi_2$, możemy też napisać $f(x) = (\xi_1+1)+(\xi_2-1)$.

PRACE CYTOWANE

[1] T. Angheluta: *Sur une équation fonctionnelle caractérisant les polynômes.* Bull. Soc. Sci. Cluj, 6, str. 139—145, 1931 rok.

[2] H. König: *Neue Begründung der Theorie der „Distributionen" von L. Schwartz,* Mathematische Nachrichten 9, str. 129—148, 1953 rok.

[3] J. Mikusiński: *Ans introduction to the theory of the Lebesgue and Bochner integrals,* str. 120, 1964 rok, Univ. of Florida, Gainesville.

[4] J. Mikusiński: *O ciągłych pochodnych funkcji wielu zmiennych*, Prace Matematyczne 1, str. 55—58, 1962 rok.

[5] W. Sierpiński: *„Analiza".* Tom I. Część trzecia. *Funkcje elementarne i rachunek różniczkowy.* Str. 223—233, 1925 rok.

THE FORM OF LOCALLY INTEGRABLE FUNCTION WHOSE m-th DERIVATIVE VANISHES ALMOST EVERYWHERE

By K. SKÓRNIK

SUMMARY

The author gives the general form of locally integrable function of many variables with values in Hilbert's space and integrable in the sense of Bochner, which fulfil the differential equation $f^{(m)}(x) = 0$ (the mixed derivative of the order m is used here in a general sense).

Oddano do Redakcji 2. VIII. 1965

SPIS TREŚCI

TABLE OF CONTENTS

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W KATOWICACH
1956—1967

Wydział Filologiczno-Historyczny:

1. Zeszyty Naukowe. **Prace Historycznoliterackie:** Nr 1: 1956 ss. 244, cena zł 20,—; Nr 2: 1962 ss. 300, cena zł 40,—; Nr 3: 1965 ss. 494, cena zł 40,—; Nr 4: 1967.
2. Zeszyty Naukowe. **Sekcja Językoznawstwa:** Nr 1: 1959 ss. 116, cena zł 20,—; Nr 2: 1962 ss. 139, cena zł 25,—; Prace Językoznawcze: Nr 3: 1966 ss. 164, cena zł 14,50.
3. Zeszyty Naukowe. **Katedra Metodyki Literatury i Języka Polskiego:** Nr 1: 1963 ss. 156, cena zł 25,—.
4. Zeszyty Naukowe. **Katedra Literatury Powszechnej:** Nr 1: 1963 ss. 70, cena zł 15,—.
5. Zeszyty Naukowe. **Katedra Pedagogiki:** Nr 1: 1961 ss. 136, cena zł 20,—; Nr 2: 1963 ss. 96, cena zł 15,—; Nr 3: 1965 ss. 208, cena zł 20,—; Nr 4: 1967.
6. Zeszyty Naukowe. **Prace Filozoficzno-Społeczne:** Nr 1: 1962 ss. 155, cena zł 25,—; Nr 2: 1964 ss. 223, cena zł 35,—; Nr 3 — w druku.
7. Zeszyty Naukowe. **Prace Historyczne:** Nr 1: 1964 ss. 248, cena zł 36,—.
8. Zeszyty Naukowe. **Stefanowi Żeromskiemu w setną rocznicę urodzin.** Nr 34: 1967 ss. 212, cena zł 17,—.

Wydział Matematyczno-Fizyczno-Chemiczny

1. Zeszyty Naukowe. **Sekcja Matematyki:** Nr 1: 1958 ss. 64, cena zł 12,—; Nr 2: 1960 ss. 76, cena zł 15,—; Nr 3: 1962 ss. 96, cena zł 15,—; Nr 4: 1964 ss. 96, cena zł 15,—; Nr 5: 1967, Nr 6 — w druku.

Sekcja Fizyki: Nr 1: 1958 ss. 68, cena zł 15,—; Nr 2: 1960 ss. 87, cena zł 15,—; Nr 3: 1963 ss. 56, cena zł 15,—; Nr 4: 1965 ss. 119, cena zł 25,—; Nr 5: 1966 ss. 129, cena zł 12,—; Nr 6 — w druku.

Sekcja Chemii: Nr 1: 1957 ss. 81, cena zł 15,—; Nr 2: 1960 ss. 220, cena zł 20,—; Nr 3: 1961 ss. 136, cena zł 20,—; Nr 4: 1963 ss. 120, cena zł 17,—; Nr 5: 1964 ss. 196, cena zł 30,—; Nr 6: 1965 ss. 279, cena zł 30,—; Nr 7: 1967, ss. 416, cena zł 28,—; Nr 8 — w druku.

Technicznego

Sekcja Wychowania Technicznego: Nr 1: 1962 ss. 68, cena zł 15,—; Nr 2: 1967.